



DIPARTIMENTO  
DI MATEMATICA  
GIUSEPPE PEANO  
UNIVERSITÀ DI TORINO



**Piano Lauree Scientifiche**  
In collaborazione con MIUR, con-Scienze, Confindustria



Master “Professione Formatore in Didattica della Matematica”  
dell’Università degli Studi di Torino, in collaborazione con  
Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2013, GeoGebra Institute di Torino  
e il Dipartimento di Matematica dell’Università di Torino

*S. Abbati, V. Alberti, B. Baldi, S. Barbera, S. Beltramino, A. Berra, A. Cena,  
A. Coviello, P. Curletti, M. Dalè, R. Ferro, F. Finoglio, S. Fratti, A. Frumento,  
M. C. Garassino, L. Genoni, F. Giustino, C. Idrofano, S. Labasin, P. G. Laiolo,  
L. Mantello, S. Paruzza, D. Pavarino, P. Pezzini, L. Poli, F. Raina, A. Rongoni,  
D. Sasso, G. Trincherro, F. Turiano*

# **GEOMETRIA TRA REALTÀ E TEORIA. PROPOSTE PER UN CURRICULUM VERTICALE**

A cura di:

***Ornella Robutti***

**Ledizioni**

©2014 Ledizioni LediPublishing

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

[www.ledizioni.it](http://www.ledizioni.it)

[info@ledizioni.it](mailto:info@ledizioni.it)

S. Abbati, V. Alberti, B. Baldi, S. Barbera, S. Beltramino, A. Berra, A. Cena, A. Coviello, P. Curletti, M. Dalè, R. Ferro, F. Finoglio, S. Fratti, A. Frumento, M. C. Garassino, L. Genoni, F. Giustino, C. Idrofano, S. Labasin, P. G. Laiolo, L. Mantello, S. Paruzza, D. Pavarino, P. Pezzini, L. Poli, F. Raina, A. Rongoni, D. Sasso, G. Trincherò, F. Turiano

*GEOMETRIA TRA REALTÀ E TEORIA. PROPOSTE PER UN CURRICOLO VERTICALE*

A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2015

Revisione testi: Monica Mattei

ISBN 978-88-6705-352-0

Immagine in copertina: Mendel Myslabodski

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: [www.ledizioni.it](http://www.ledizioni.it)

# INDICE

<b>Presentazione</b>	V
<b>Introduzione</b>	IX
<b>Capitolo 1</b> <i>L'albero maestro</i>	1
Proposte di adattamenti, ampliamenti	1
Rampe, fili e giravolte	1
Adattamento dell'attività "L'albero maestro" con riferimento alle Indicazioni Nazionali	5
Adattamento dell'attività "L'albero maestro" per il biennio del liceo scientifico	12
Adattamento dell'attività "L'albero maestro" per il biennio del liceo scientifico	15
Riflessioni sulla valutazione. Altezza e perpendicolarità nelle prove INVALSI e i nostri suggerimenti	18
Verifica sul concetto di altezza e perpendicolarità. I nostri suggerimenti per la valutazione	32
<b>Capitolo 2</b> <i>L'orologio</i>	45
Proposte di adattamenti, ampliamenti	45
Muoversi... con gli angoli	45
Orologi, girandole e pattinatori	51
Ma quanto sarà ripido?	55
Dall'astronomia alla trigonometria	61
Lo spettacolo di Natale	68
Riflessioni sulla valutazione. L'angolo delle prove INVALSI e i nostri suggerimenti	70
Verifica sul concetto di angolo. I nostri suggerimenti per la valutazione	93

## INDICE

<b>Capitolo 3</b> <i>Esplorazione di figure piane: dalla congettura alla dimostrazione</i>	99
Proposte di adattamenti, ampliamenti	99
L'eredità	99
Dalla congettura alla dimostrazione: il teorema di Pitagora	101
Angoli al centro e alla circonferenza: approccio alla dimostrazione	104
Quale dimostrazione?	111
Un problema di Pólya	113
Riflessioni sulla valutazione. Esplorazione e dimostrazione nelle prove INVALSI	118
<i>Richiami teorici - Altezza</i>	141
<i>Richiami teorici - Angoli</i>	143
<i>Richiami teorici - Dimostrazione</i>	146
<b>Bibliografia e sitografia</b>	148

# PRESENTAZIONE

## GEOMETRIA E SVILUPPO DELLA PROFESSIONE DOCENTE

**Ornella Robutti**

*Dipartimento di Matematica, Università di Torino*

*Vice direttore del Master universitario "Professione Formatore in Didattica della Matematica"*

*Responsabile PLS Piemonte, Responsabile del GeoGebra Institute di Torino*

### 1. Master universitario di secondo livello – "Professione Formatore in Didattica della Matematica"

Il master universitario, connesso al piano nazionale M@t.abel e attivo a Torino nei due anni 2013/14 e 2014/2015 dall'Università degli Studi di Torino, ha avuto come destinatari insegnanti in servizio nella scuola secondaria di primo e secondo grado nelle classi di concorso A047, A048, A049 e A059.

Il master è nato per rispondere alla necessità di un rinnovamento della professione docente alla luce delle nuove indicazioni curriculari e del nuovo sistema di valutazione nazionale rappresentato dall'INVALSI. Era quindi rivolto a docenti interessati ad acquisire competenze che permettessero loro di operare, successivamente, come formatori nei confronti di colleghi-docenti della scuola secondaria. In quest'ottica, dei 30 posti previsti, 6 sono stati riservati a insegnanti che avessero un'esperienza pregressa come formatori del piano M@t.abel.

Il master, di durata biennale, ha visto gli insegnanti impegnati in 1500 ore di corso suddivise in lezioni in presenza e online, ore di laboratorio e ore di tirocinio riguardanti cinque aree: Numeri, Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni, Modelli.

### 2. Piano nazionale M@t.abel

Il piano M@t.abel è un progetto realizzato nel 2006 da Indire su iniziativa del Ministero della Pubblica Istruzione in collaborazione con alcune Associazioni Nazionali degli Insegnanti.

Tale progetto intende promuovere lo sviluppo della professione docente attraverso un approccio innovativo all'insegnamento-apprendimento della matematica. L'esigenza nasce da una parte dal riconoscimento del ruolo sempre più importante della matematica nella formazione dei nuovi cittadini e di quello che le tecnologie hanno nelle nuove generazioni e dall'altra per far fronte alle carenze degli studenti italiani, evidenziate dall'indagine internazionale OCSE-PISA e da altri studi nazionali, e alla crisi di vocazioni per le facoltà scientifiche.

M@t.abel è un progetto di formazione e-learning blended che coniuga e alterna momenti di formazione online e in presenza. Il processo di formazione non è un processo individuale: l'idea fondamentale è quella della costituzione di una comunità di apprendimento nella quale,

attraverso una piattaforma e in presenza sotto la guida di un tutor, ogni insegnante possa condividere esperienze, riflessioni sulla sperimentazione, criticità, spunti per implementare l'attività didattica, ... La condivisione e il confronto sono infatti alla base dello sviluppo professionale del docente. Il percorso promosso da M@t.abel si differenzia inoltre dalle forme tradizionali di aggiornamento per la presenza di una fase di sperimentazione interna al progetto di formazione stessa e non temporalmente successiva. Tale approccio favorisce un effettivo rinnovamento delle pratiche didattiche.

All'interno del progetto M@t.abel gli insegnanti trovano una serie di attività strutturate che provengono dal progetto "La Matematica per il cittadino", messo a punto dall'Unione Matematica Italiana (UMI) nell'ambito di un Protocollo d'intesa stipulato nel 1993 con il Ministero della Pubblica Istruzione ed esteso nel 1999 alla Società Italiana di Statistica (SIS).

(da: [http://www.indire.it/ponmatematicacorso1/all/09\\_06\\_05\\_m@tabel\\_sintesi1.pdf](http://www.indire.it/ponmatematicacorso1/all/09_06_05_m@tabel_sintesi1.pdf))

Le attività, riconducibili ai nuclei Numeri, Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni, presentano una metodologia innovativa rispetto all'introduzione dei concetti matematici, promuovendo un forte utilizzo delle nuove tecnologie. Inoltre promuovono una didattica di tipo laboratoriale, dove il laboratorio non è (solo) un ambiente fisico ma un ambiente di apprendimento che favorisce un ruolo attivo dello studente nella costruzione del sapere attraverso l'esplorazione e l'utilizzo delle tecnologie, per arrivare poi alla sua formalizzazione. Le attività M@t.abel cercano, infatti, di dare un senso concreto ai concetti matematici rifuggendo il tecnicismo e la trattazione puramente astratta e simbolica della matematica.

### 3. INVALSI

La rilevazione degli apprendimenti di base mediante le prove INVALSI nasce dall'esigenza di dotare il Paese di un sistema di valutazione dei risultati conseguiti dalla Scuola in linea con le esperienze più avanzate a livello internazionale. La rilevazione degli apprendimenti di base mediante le prove INVALSI è guidata dalla duplice esigenza di migliorare, da un lato, l'efficacia della Scuola per le fasce più deboli della popolazione scolastica e, dall'altro, di far emergere e diffondere le esperienze di eccellenza presenti nel Paese ([www.invalsi.it](http://www.invalsi.it)) al fine di migliorare progressivamente i livelli di apprendimento nella Scuola e, di conseguenza, le opportunità di sviluppo e di crescita dell'intero Paese.

Le prove, di tipo standardizzato, se da una parte presentano dei limiti dall'altra permettono di comparare i risultati conseguiti dagli studenti delle diverse scuole. Esse non si pongono comunque in antitesi con la valutazione formativa e sommativa quotidianamente realizzata all'interno delle scuole, ma vogliono solo rappresentare un utile punto di riferimento esterno per integrare gli elementi di valutazione attualmente esistenti.

### 4. Il software GeoGebra

Software open source, GeoGebra si sta diffondendo sempre più nelle scuole di ogni ordine e grado, nei centri di formazione per insegnanti, nelle università e negli ambienti di ricerca didattica.

Le ragioni del suo successo sono da ricercarsi in un contesto più ampio di rinnovamento della professione docente. Le caratteristiche di tale software sono infatti ideali per un approccio laboratoriale all'insegnamento della Matematica poiché GeoGebra favorisce, con la sua peculiarità di essere un software di geometria dinamica, l'esplorazione di situazioni geometriche e la formulazione di congetture.

GeoGebra permette allo studente, per esempio, di costruire nel piano o nello spazio delle figure geometriche, sulla base di certe proprietà, e poi di modificarle (trascinandole, allargandole,

ruotandole, ...) senza variare però il protocollo geometrico di costruzione e mantenendo così inalterate le proprietà dell'oggetto. Questo aspetto stimola sicuramente l'apprendimento degli allievi che hanno un ruolo attivo nell'esplorazione del problema. Le congetture fatte possono poi essere formalizzate o dimostrate con l'utilizzo di GeoGebra.

GeoGebra possiede inoltre due ambienti integrati: uno numerico (simile a un foglio di calcolo) e uno di calcolo simbolico (un vero e proprio CAS – Computer Algebra System) che permettono il suo utilizzo non solo per lavorare con la Geometria ma anche con altri nuclei, quali Numeri o Dati e Previsioni.

Infine, i file costruiti con GeoGebra possono essere caricati sul web come applet dinamici interattivi, utilizzabili anche senza bisogno di scaricare il software, che sono fruibili e possono essere condivisi dagli insegnanti, favorendo uno scambio di esperienze e spunti per attività didattiche e la nascita di comunità di pratica.

## 5. Questo volume

Il libro è il risultato del lavoro svolto dagli insegnanti di ruolo di scuola secondaria di primo e secondo grado che hanno partecipato al master universitario di secondo livello “Professione Formatore in Didattica della Matematica” dell'Università degli Studi di Torino nell'ambito del nucleo Geometria con la docenza e il coordinamento della prof. Ornella Robutti. Nel volume convergono, oltre all'esperienza formativa del master, anche le competenze e l'esperienza dei docenti legata al loro vissuto di insegnante, di formatore M@t.abel, di corsista M@t.abel, di coordinatore di gruppi di docenti...

I contenuti proposti traggono fondamento da alcune delle attività del piano M@t.abel e sono stati arricchiti con numerose proposte di ampliamenti e adattamenti rivolti anche ad altri ordini di scuola. Il volume contiene inoltre attività originali, elaborate dagli insegnanti stessi, basate su un approccio laboratoriale alla matematica con l'utilizzo di GeoGebra e altri strumenti poveri o tecnologici. Una particolare attenzione è stata rivolta ai quesiti INVALSI inerenti i contenuti delle attività proposte che sono stati analizzati e commentati, inseriti in relazione alle attività, alla luce delle Indicazioni Nazionali.





# INTRODUZIONE

## *PREMESSA ALL'USO DEL LIBRO*

*a cura di S. Beltramino, M. Dalè*

In queste pagine si raccoglie il lavoro svolto durante le ore di Geometria del Master “Professione Formatore in Didattica della Matematica” dell’Università degli Studi di Torino. Gli autori, tutti corsisti del Master, sono suddivisi nei vari gruppi di lavoro.

In ognuno dei tre capitoli si trova il rimando alla corrispondente attività M@t.abel (reperibile sul sito dell’Indire) con alcuni adattamenti o suggerimenti per classi differenti rispetto a quelle proposte ufficialmente dall’attività, una riflessione sui quesiti INVALSI relativi alle conoscenze trattate nell’attività e proposte di quesiti simil-INVALSI prodotte dagli autori, studenti del Master.

I quesiti INVALSI citati sono ripresi dal sito e corrispondenti perciò ai fascicoli citati.

Nei tre capitoli sono presenti delle icone che consentono di individuare, nelle diverse schede che compongono il testo, la parte su cui viene focalizzata l’attenzione:



attività M@t.abel di riferimento e contestualizzazione



proposte di adattamenti, ampliamenti



riflessioni sulla valutazione. Esplorazione e dimostrazione nelle prove INVALSI

Ogni attività è corredata da una scheda che riprende gli elementi teorici fondamentali per il tema trattato.

Per leggere ed eventualmente utilizzare in classe i nostri suggerimenti è necessario conoscere l’attività e, in alcuni casi, avere dimestichezza con la tecnologia.

Ricordiamo che questi capitoli sono una raccolta dei lavori del corso, per questo ogni intervento ha uno stile differente, caratterizzante i diversi gruppi di lavoro. Inoltre, nella parte dedicata all’INVALSI, qualche quesito si ripete in quanto visto sotto aspetti differenti.

Buona lettura.



# CAPITOLO 1

## L'ALBERO MAESTRO



[www.risorsedocentipon.indire.it/home\\_piattaforma/](http://www.risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/)

L'attività appartiene al nucleo di Geometria del piano M@t.abel.

**Tematica affrontata:** geometria, concetto di altezza.

**Ordine di scuola:** scuola secondaria di primo grado.

**Obiettivi dell'attività:**


- costruire il significato di distanza tra due punti e tra un punto e una retta;
- costruire il significato di perpendicolarità e di altezza;
- saper tracciare correttamente le altezze dei triangoli, dei parallelogrammi e dei trapezi;
- formulare congetture e saperle argomentare.

**Richiami teorici<sup>1</sup>:**

- definizione di altezza;
- distanza;
- misura.

## Proposte di adattamenti, ampliamenti

*a cura di D. Pavarino*

	<b>RAMPE, FILI E GIRAVOLTE</b>
<b>Autori</b>	A. Cena, A. Coviello, S. Fratti
<b>A chi è rivolto</b>	Scuola secondaria di secondo grado (biennio istituto tecnico)

### Descrizione dell'attività

La seguente attività si articola in quattro differenti proposte di lavoro, che sono state strutturate per la classe indicata in ciascuna di esse.

<sup>1</sup> Si veda in Appendice a pag. 141

## PROPOSTA 1 - Equilibrio di un corpo su piani con diversa inclinazione - Classe seconda ITI

### Testo dell'attività

*Fase 1.* Prendi un libro, una matita, un astuccio e un cellulare. Appoggia il libro su di un banco e su di esso metti uno dei tre oggetti. Inclina il libro in modo che un suo lato rimanga sempre appoggiato al banco: osserva e descrivi che cosa succede all'oggetto al crescere dell'inclinazione del libro rispetto al piano del banco. Riprova con un altro oggetto.

*Fase 2.* Con carta e penna rappresenta in forma schematica la situazione, servendoti di un goniometro.

*Fase 3.* Con GeoGebra riproduci il modello costruito a mano.

### Indicazioni per il docente e commento all'attività

Si chiede all'allievo di provare ad appoggiare un corpo (matita, astuccio, cellulare) su un libro e di osservare come all'aumentare dell'inclinazione del libro il corpo inizi a scivolare.

L'insegnante si aspetta che l'allievo comprenda la relazione tra lo scivolamento e le direzioni delle forze applicate.

L'insegnante propone di disegnare, aiutandosi con un goniometro, un piano orizzontale, un piano inclinato di un angolo di  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale, un piano inclinato di  $60^\circ$  gradi rispetto all'orizzontale e un piano verticale (parete). L'allievo dovrà disegnare un corpo (a forma di rettangolo) appoggiato sul piano nelle diverse situazioni e la sua forza peso.

L'allievo dovrà notare che la differenza tra le situazioni dinamiche è in relazione alla diversa inclinazione della forza peso rispetto al piano. Sarà quindi invitato a disegnare le componenti della forza peso nelle direzioni parallela e perpendicolare al piano e a osservare che all'aumentare dell'inclinazione  $\alpha$  del piano la componente normale diminuisce, perché è il cateto adiacente a un angolo  $\alpha$  di un triangolo rettangolo di cui il vettore forza peso  $P$  è l'ipotenusa. Per una corretta rappresentazione delle forze agenti nella situazione citata, l'allievo dovrà ripetutamente e correttamente disegnare perpendicolari, in situazione non stereotipa, e parallele.

### Laboratorio tecnologico

Le suddette situazioni possono essere rappresentate con GeoGebra (figura 1) definendo uno slider sull'angolo del piano: muovendo il punto sullo slider il piano si inclina e la forza peso rimane coerente in perpendicolarità allo stesso (il docente può preparare una scheda per l'attività di laboratorio).

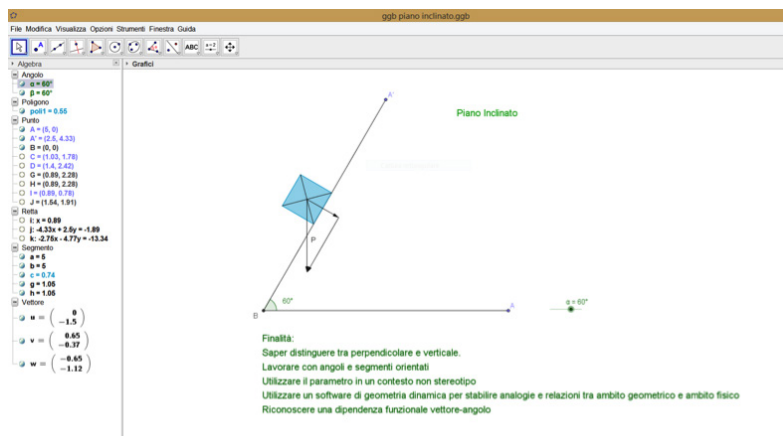


Figura 1. Il piano inclinato realizzato con GeoGebra

### Laboratorio virtuale

<http://phet.colorado.edu/it/simulation/the-ramp>

In questo laboratorio virtuale è possibile variare l'inclinazione di una rampa e osservare come l'angolo di inclinazione influisce sulle forze che agiscono sugli oggetti trascinati (figura 2).



Figura 2

### PROPOSTA 2 - Srotolando un rocchetto di filo - Classe prima ITI

#### Testo dell'attività

Per svolgere l'attività dovrai procurarti un rocchetto di filo o un metro a rotella. Srotola il filo, appoggia rocchetto e filo su di un foglio e con una matita traccia sul foglio la direzione del filo e la forma del rocchetto. Osserva l'angolo formato dal filo con il raggio nel punto in cui il filo si stacca dal rocchetto. Che cosa puoi concludere?

#### Indicazioni per il docente e commento all'attività

Questa attività è destinata ad allievi di classe prima che non abbiano ancora conoscenze di fisica per poter affrontare l'attività precedente.

L'insegnante o gli allievi dovranno portare in classe un rocchetto di filo (anche un metro a rotella) e iniziare a srotolare il filo procedendo per posizioni successive: a ogni posizione scelta l'allievo dovrà segnare con la matita la traccia corrispondente al filo e il raggio del rocchetto nel punto di distacco del filo dal rocchetto (figura 3). Gli allievi osserveranno che l'angolo formato dal filo e dal raggio nel punto di distacco è sempre un angolo retto.



Figura 3

Questa attività permette di affrontare diversi nodi concettuali:

- raggio perpendicolare alla tangente nel punto di contatto;
- accelerazione centripeta nei moti curvilinei;
- principio d'inerzia.

Può fornire l'occasione per un primo approccio ai luoghi geometrici, infatti la traccia descritta dalla punta del filo che si srotola è l'evolvente di una circonferenza.

Si può realizzare un'attività simile con altri strumenti costruiti con materiali poveri. In una classe prima o seconda professionale, avendo a disposizione laboratori e officine, si può ragionare sulla perpendicolarità con una ruota di bicicletta, con una squadra a "t" e il piano inclinabile: un altro modo di vedere la perpendicolarità.

**PROPOSTA 3 - Simulare con GeoGebra lo srotolamento di un rocchetto di filo - Classe prima**

**Testo dell'attività**

1. Per rappresentare il rocchetto di filo traccia con GeoGebra una circonferenza di raggio unitario. La circonferenza è la proiezione ortogonale del rocchetto su un piano perpendicolare al suo asse (figura 4).
2. Vogliamo srotolare il filo facendogli compiere un angolo giro intorno al rocchetto. Definisci uno slider angolo  $\alpha$  variabile nell'intervallo  $[0; 2\pi]$ .
3. L'angolo  $\alpha$  definisce nella circonferenza un raggio  $OP$ .  $P$  è il punto di distacco del filo dal rocchetto.
4. Con la proposta 2 hai scoperto che, nell'istante in cui si stacca, il filo giace su di una retta  $t$  perpendicolare al raggio  $OP$ . Disegna questa retta.
5. Traccia su  $t$  il segmento  $PC$  proiezione del filo srotolato.
6. Rendi invisibili  $t$  e tutti gli elementi che hai usato per la costruzione lasciando il segmento  $PC$  e la circonferenza. Trascinando lo slider, puoi srotolare e riarrotolare il filo.
7. Scopri il luogo geometrico descritto dalla proiezione del capo del filo  $C$ : è una curva detta *evolvente della circonferenza*.

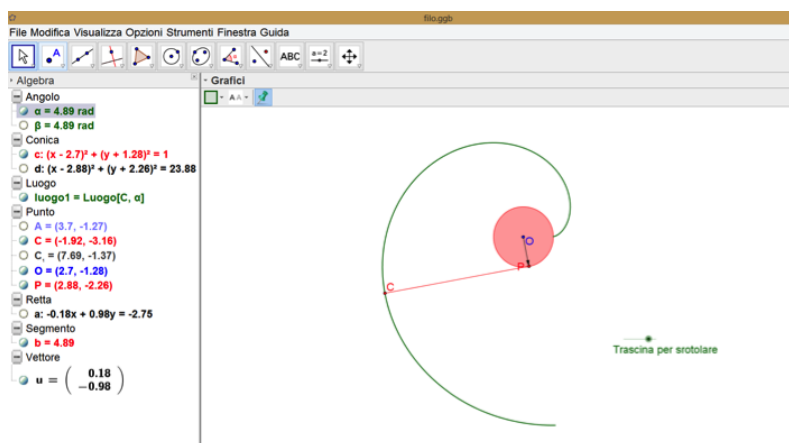


Figura 4. L'estremità del filo descrive un'evolvente della circonferenza

**Indicazioni per il docente e commento all'attività**

Questa attività è destinata ad allievi che abbiano dimestichezza con il programma GeoGebra. Il docente aggiusterà la scheda secondo le conoscenze degli allievi. Fare la costruzione è un obiettivo. Il docente commenterà come la retta perpendicolare vari con il raggio e come la condizione di perpendicolarità coincida con la tangenza alla circonferenza. Per determinare la lunghezza del filo srotolato sarà necessario saper determinare la lunghezza di un arco di circonferenza.

**PROPOSTA 4 - Giravolte di perpendicolari - Biennio**

**Testo dell'attività:** "Perpendicolare non è verticale"

Con il software GeoGebra costruisci un triangolo isoscele  $FSE$  rettangolo in  $S$  (figura 5). Inizialmente  $FS$  giace sull'asse "orizzontale" ed  $ES$  è "verticale", come si sente dire con un po' di leggerezza.

Trascina il punto  $E$  sul semiasse delle ordinate positive in maniera tale che la lunghezza del lato  $ES$  si mantenga costante, il vertice  $F$  rimanga fisso e l'angolo in  $S$  rimanga perpendicolare. Vedrai come i due cateti, mantenendo la perpendicolarità, si dispongono lungo diverse direzioni.

Curiosità: disegna il luogo descritto dal punto medio del cateto  $ES$ . La curva descritta è detta *cissoide*. Nota fin dall'antichità, Newton escogitò il metodo appena descritto per tracciarla.

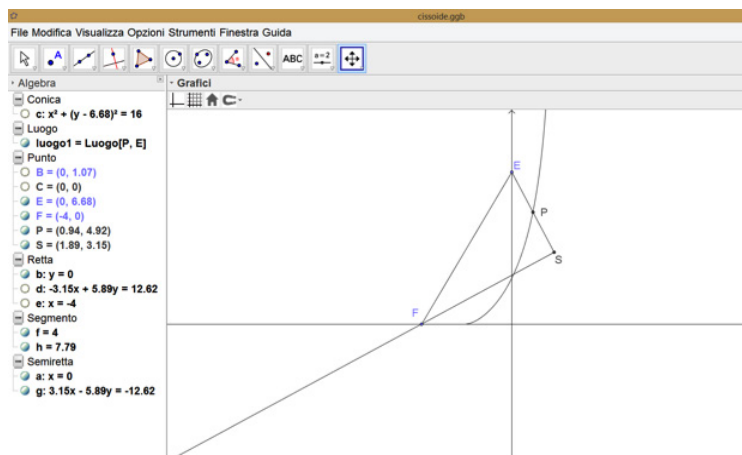


Figura 5. La cissoide

### Indicazioni per il docente e commento all'attività

Questa attività è destinata ad allievi che abbiano dimestichezza con il software GeoGebra. Il docente preparerà la scheda secondo le conoscenze degli allievi. La costruzione è un obiettivo. Il docente insisterà sulla non necessità di disegnare i triangoli rettangoli con un cateto o l'ipotenusa parallela a un lato del foglio.

	<b>ADATTAMENTO DELL'ATTIVITÀ "L'ALBERO MAESTRO" CON RIFERIMENTO ALLE INDICAZIONI NAZIONALI</b>
<b>Autori</b>	V. Alberti, A. Berra, M. Dalè, L. Genoni
<b>A chi è rivolto</b>	Primo – secondo biennio (dipende dagli indirizzi)

La lettura delle Indicazioni Nazionali dei Licei consente di individuare, in relazione ai temi presenti nell'attività *L'albero maestro*, i seguenti aspetti:

TEMA UNO: "Verticalità e perpendicolarità in fisica"

TEMA DUE: "Verticalità, ortogonalità e perpendicolarità nello spazio"

TEMA TRE: "L'organizzazione dello spazio: le forme"

TEMA QUATTRO: "Proiezioni e sezioni: il movimento e la direzione"

In relazione alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida l'attività del *L'Albero maestro* si presta, perciò, a:

- riprendere e potenziare il concetto di verticalità e perpendicolarità, con l'ausilio dello studio della fisica relativamente al concetto di verticalità. Nelle scuole ove sia presente un corso di disegno è possibile collaborare con i colleghi di questa disciplina. Utile è il ricorso a un software di geometria opportuno come strumento per esplorare diverse situazioni;
- studiare le distanze in un riferimento cartesiano;
- risolvere i triangoli rettangoli;
- riflettere sugli angoli (trigonometria);
- introdurre gli elementi fondamentali di geometria dello spazio:
  - perpendicolarità retta-piano;
  - riflessioni sulle ombre;
  - costruzione di un ipotetico solido piramidale;
  - realizzazione di un solido con geomag e individuazione delle sezioni;
  - riprodurre graficamente la situazione su un foglio e saper descrivere in linguaggio naturale;
  - problemi di ottimo;
  - analisi di alcuni quesiti degli ultimi Esami di Stato.

Si propongono di seguito alcune attività che consentono di introdurre gli argomenti citati.

Nelle proposte si è cercato di elaborare prove con un livello crescente di difficoltà.

Ogni argomento viene introdotto con una situazione problematica o un problema, che rappresenta il punto di partenza per affrontare l'argomento. Nell'ultima parte si fa riferimento all'Esame di Stato del Liceo Scientifico.

### ***PROPOSTA 1 - La macchina telecomandata***

**Nodo concettuale:** perpendicolarità.

**Finalità:** consolidare il concetto di perpendicolarità (dopo aver proposto l'attività dell'albero maestro) tracciando correttamente le perpendicolari.

#### **Testo dell'attività**

Disegnare l'antenna della macchinina telecomandata (figura 6).



*Figura 6. Movimento macchina*



## **PROPOSTA 2 - Ville e... altro**

**Nodo concettuale:** perpendicolarità nello spazio.

**Finalità:** riconoscere situazioni di perpendicolarità nello spazio attraverso la lettura di immagini. Si prende spunto da un'attività di M@t.abel, "Ville e palazzi".

### **Testo dell'attività**

La figura 7 rappresenta la "Rotonda", una delle ville venete palladiane.



*Figura 7. La Rotonda, Palladio, Vicenza*

1. Individuare ed elencare i solidi di cui è costituita questa struttura architettonica. Individuare da quali poligoni sono formate le relative facce. Individuare infine, disegnandole su una carta da lucido, sovrapposta all'immagine, tutte le linee verticali in verde e quelle orizzontali di cui è costituita in rosso. Individuare infine tutte le linee tra loro perpendicolari. Che relazione esiste tra queste linee?
2. Ci sono nell'immagine due linee, una rossa e una verde (visibili nel lucido), che non si intersecano? L'intersezione dipende dal fatto che l'immagine è piana? Oppure è possibile che due rette, di cui una verticale e un'altra orizzontale, possano non avere punti in comune?

Proporre, per esempio, di analizzare le linee degli spigoli di una scatola da scarpe come quella in figura 8: tali linee si possono dire parallele? Se non sono parallele, perché non hanno la stessa direzione, le chiamiamo con un nome nuovo: sghembe e le loro direzioni si dicono ortogonali se esiste una linea parallela a una delle due e perpendicolare all'altra in un punto comune.



*Figura 8. Esempio di scatola*

### PROPOSTA 3 - L'albero maestro e le vele

**Nodi concettuali:** similitudini e triangoli.

**Finalità:** la proposta di seguito riportata vuole riprendere il concetto di similitudine e introdurre la risoluzione dei triangoli.

L'insegnante può proporre la soluzione del quesito o ricorrendo alla sola similitudine o alla trigonometria, dipende dall'indirizzo di scuola in cui viene presentato; si può utilizzare GeoGebra per la soluzione.

Studente: lo studente deve osservare le immagini e trovare le relazioni.

#### Testo dell'attività

Si vogliono realizzare le vele per una imbarcazione. Quali elementi di geometria è necessario conoscere per calcolare la superficie della randa?

Conoscendo la misura del boma e avendo a disposizione una fotografia della barca, è possibile calcolare la superficie della randa e del fiocco? Come si potrebbe trovare la misura degli angoli? (Si consideri l'albero perpendicolare, come nella figura 9.)

E se l'albero non fosse perpendicolare, ma posto come nello schema di figura 10?



Figura 9. Fotografia barca a vela

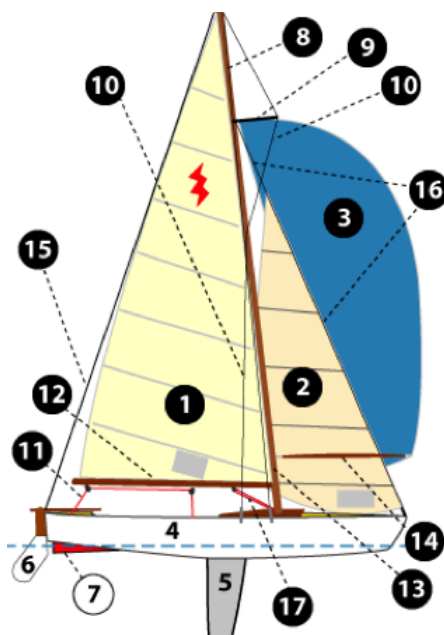


Figura 10. Schema barca a vela (disegno tratto da Wikipedia)

- 1 - randa, 2 - fiocco, 3 - spinnaker, 4 - scafo, 5 - deriva, 6 - timone,
- 7 - chiglia, 8 - albero, 9 - crocette, 10 - sartie, 11 - scotta della randa,
- 12 - boma, 13 - albero, 14 - tangone, 15 - paterazzo, 16 - strallo, 17 - vang

**Strumenti:** si possono utilizzare il goniometro o GeoGebra per la misura degli angoli.

**Approfondimento previsto:** il docente può introdurre il teorema dei seni.

Se fosse necessario consolidare il concetto di perpendicolarità è possibile richiedere di disegnare l'albero maestro in caso di rollio e beccheggio della barca (figura 11).

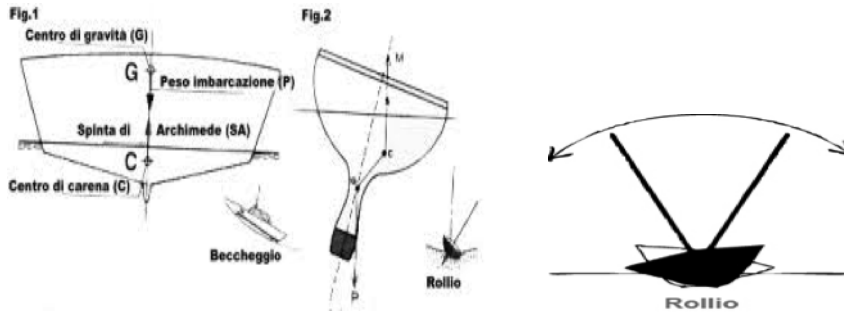


Figura 11. (da: [www.maurofornasari.com/btmcorso/rollio.gif](http://www.maurofornasari.com/btmcorso/rollio.gif))

In questo caso si potrebbe poi richiedere che cosa accadrebbe se la vela toccasse l'acqua nel caso del rollio e calcolare l'angolo di cui la barca si inclina. L'argomento si presta a numerosi approfondimenti e ampliamenti soprattutto se in classe ci sono studenti che conoscono la barca a vela.

#### **PROPOSTA 4 - Il “riparo” della barca a vela**

**Nodo concettuale:** solidi.

**Finalità:** aiutare gli studenti ad acquisire una “visione” spaziale dinamica.

L'introduzione dei solidi di rotazione può essere proposta con il seguente esercizio.

*Problema* La rotazione del boma attorno all'albero maestro che tipo di solido genera, considerando l'albero maestro perpendicolare al piano della barca? E se l'albero non fosse perpendicolare, che solido si otterrebbe?

La proposta di uno studio delle piramidi può prendere spunto dalla necessità di realizzare una copertura che protegga la barca senza rimuovere l'albero.

*Problema* Considerando la base della barca triangolare (triangolo isoscele) e volendo realizzare un telo che copra la barca, senza togliere l'albero maestro (lungo 11 m), quali informazioni servirebbero per calcolare la quantità di telo necessaria per la copertura? Date le dimensioni di base della barca assimilabili a un triangolo, è possibile procedere? Se la risposta è affermativa, come?

E ancora per i poliedri:

*Problema* Volendo trasferire la barca in un luogo chiuso: quali dimensioni minime deve avere questo ambiente? La barca può essere posta al riparo in una darsena oppure portata in un luogo di rimessaggio. Nelle due situazioni le dimensioni da considerare sono diverse?

*Suggerimento:* si può proporre una visualizzazione mediante un modellino di barca a vela e geomag per realizzare la darsena (oppure ricorrendo a cartoncini).

Si possono proporre ulteriori analisi, anche traendo spunti dai siti di seguito riportati (ultima data di consultazione: maggio 2015).

*Simulatore*

[http://education.nationalgeographic.com/education/multimedia/interactive/sailing-simulator/?ar\\_a=1](http://education.nationalgeographic.com/education/multimedia/interactive/sailing-simulator/?ar_a=1)  
e simile

[http://www.thepirateking.com/ships/sail\\_simulator.htm](http://www.thepirateking.com/ships/sail_simulator.htm)  
(3 minuti di simulatore di navigazione)

<http://www.wb-sails.fi/portals/209338/news/boatRace/boatRaceFrameSet.htm>

[http://www.nshof.org/index.php?option=com\\_content&view=category&layout=blog&id=32&Itemid=104&limitstart=10](http://www.nshof.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=32&Itemid=104&limitstart=10)

<http://teachers.egfi-k12.org/navy-sail-design/>

<http://www.oceansail.co.uk/Articles/Maths.html>

<http://www.princeton.edu/~rvdb/JAVA/sail/sail.html>

<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/sailing.html>

[http://www.slideshare.net/Stanford\\_Engineering/e-day-2012margotsailing](http://www.slideshare.net/Stanford_Engineering/e-day-2012margotsailing)

[http://www.maa.org/external\\_archive/devlin/devlin\\_11\\_99.html](http://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_11_99.html)

*Gioco*

<http://www.sailsimulator.com/>

**PROPOSTA 5 - Gara di nuoto (problema di minimo)**

**Nodo concettuale:** ottimizzazione.

**Finalità:** analizzare una situazione di scelta operando una situazione di scelta.

**Testo dell'attività**

Francesco e Giovanni, al mare, hanno deciso di fare una gara per chi arriverà prima alla boa partendo dall'ombrellone (figura 12).



*Figura 12*

Sapendo che Francesco è più veloce a nuotare di Giovanni, quale percorso è più opportuno che scelga Giovanni?

Si può proporre lo stesso quesito sapendo che Giovanni e Francesco corrono e nuotano con velocità rispettivamente diverse.

## **PROPOSTA 6 - Testo di un problema assegnato all'esame di Stato**

(Esame di Stato 1994, problema n. 2)

Si può partire dall'analisi di un tema di geometria proposto all'Esame di Stato.

**Finalità:** analizzare i problemi della perpendicolarità e della distanza in vista dell'Esame di Stato.

### **Problema**

Una piramide ha per base il triangolo  $ABC$ , isoscele e rettangolo in  $A$ , e ha per altezza il segmento  $AV$ . Inoltre la faccia  $VBC$  forma un angolo di  $45^\circ$  col piano della base e lo spigolo  $VB$  è lungo  $2b\sqrt{3}$ , dove  $b$  è una lunghezza nota.

Calcolare la distanza del vertice  $A$  dal piano della faccia  $VBC$  e trovare per quale valore di  $b$  tale distanza vale  $4\sqrt{2}$ .

Verificato che questo valore di  $b$  è  $4$ , con riferimento a esso secare la piramide con un piano parallelo alla base  $ABC$  e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza  $x$ .

Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione  $f(x)$  ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .


Richieste allo studente:

1. Dopo aver letto attentamente il testo, rappresentare con un disegno la situazione geometrica proposta. La figura richiesta dal testo, compare tra i poliedri che formano la "Rotonda" del Palladio? In che cosa differisce questa, dalla piramide presente nell'opera dell'architetto veneto?
2. Dopo aver individuato un progetto risolutivo del primo quesito posto, procedere con la sezione piana del solido, quindi con la proiezione di tale sezione sul piano di base. Come si possono descrivere le linee che individuano la proiezione, rispetto ai due piani proiettante e di proiezione? E tra loro?
3. Se il prisma del problema fosse una scatola e venisse appoggiata su un piano inclinato rispetto alla linea di terra, vi sarà di certo un'inclinazione massima del piano oltre il quale la scatola cadrà, quale? Come si fa a determinarla? Tracciare in tale caso la perpendicolare e la verticale mandata dal baricentro del prisma e riflettere su quale dei due concetti si fonda l'idea di equilibrio.
4. Determina le simmetrie della facciata della "Rotonda". Quale relazione in questo caso tra verticale e perpendicolare?

### **Traccia e suggerimenti per l'analisi**

1. Analisi del testo.
2. Rappresentazione della situazione geometrica.
3. Contestualizzazione fisica, per esempio appoggiare il solido a un piano e analizzare la situazione di equilibrio: relazione tra equilibrio statico e verticalità. Misura del baricentro di un corpo esteso sfruttando la verticalità nel luogo.
4. Mettere in moto il sistema su un riferimento inerziale e poi in uno non inerziale (accelerato verso l'alto o verso il basso; con accelerazione centripeta). Come cambia la verticalità, rispetto alla perpendicolarità (fatto geometrico, indipendente dal riferimento)? Mettere in crisi anche il concetto stesso di verticalità (fatto fisico) come direzione privilegiata su-giù.

5. Studiare le direzioni delle rette degli spigoli della figura: si arriva a costruire così il concetto di ortogonalità e alla definizione naturale di rette sghembe.
6. Ortogonalità e concetto di distanza. Problemi di minimo.
7. Secare la figura costruita con un piano e proiettare la sezione su un altro piano, che raccoglie l'immagine della figura sezione iniziale: la proiezione è una figura solida (insieme dei raggi) la sezione è una figura piana (intersezione della proiezione e del piano secante). Vari i modelli di proiezione-sezione: isometrie, similitudini, affinità, proiettività.
8. Studio della simmetria assiale: applicazione della perpendicolarità sul piano (Principio di Fermat e problemi di minimo nel piano). Utile il confronto geometrico tra simmetria assiale e simmetria obliqua: non è una isometria. Studio degli invarianti per trasformazioni.
9. Deformazione del cammino minimo quando vi sia un cambio di velocità nel mezzo (leggi della rifrazione: problema Bagnino-Bagnante)

	<b>ADATTAMENTO DELL'ATTIVITÀ "L'ALBERO MAESTRO" PER IL BIENNIO DEL LICEO SCIENTIFICO</b>
<b>Autori</b>	L. Giustino, P. Laiolo, G. Trincherò, F. Turiano
<b>A chi è rivolto</b>	Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

**Descrizione dell'attività**

L'attività si presenta come un ampliamento/integrazione dell'attività L'albero maestro e si articola in tre proposte.

***PROPOSTA 1 - Tracciare la perpendicolare piegando la carta***

**Modalità di lavoro:** lavoro a coppie.

**Consegna**

A ogni coppia si distribuisce un foglio bianco rotondo con il disegno di un segmento  $r$  e si richiede di tracciare una perpendicolare al segmento dato, piegando la carta. Una volta che gli alunni hanno capito che basta ripiegare su se stesso il segmento lungo il segmento stesso, si può chiedere perché si è giunti a una perpendicolare. Successivamente è possibile distribuire un foglio rettangolare e si chiede agli studenti di piegare il foglio lungo uno dei bordi.

**Domande stimolo**

Perché si giunge a una perpendicolare relativa al segmento  $r$  oppure relativa a uno dei lati del rettangolo? Perché ripiegando un segmento su se stesso si ottiene l'asse del segmento? Si porta a ragionare sugli angoli e sulla congruenza di figure.

Piegando la carta puoi trovare le altezze di un qualsiasi triangolo?

## **PROPOSTA 2 - Altezza della striscia e altezza del parallelogramma**

**Modalità di lavoro:** lavoro a coppie.

### **Consegna**

Data una striscia di carta si chiede di disegnare alcuni parallelogrammi con i lati opposti appartenenti ai bordi della striscia.

### **Domande stimolo**

Che cosa puoi osservare circa le altezze dei parallelogrammi disegnati? Puoi sempre disegnarle entrambe?

L'insegnante può richiedere di tagliare altre strisce per evidenziare la seconda altezza.

### **Spunti per un approfondimento disciplinare**

*Quante altezze ha un trapezio?*

L'autista di un camioncino (figura 13) deve trasportare una lastra a forma di trapezio isoscele di altezza 2 m, base maggiore 10 m e base minore 4 m. Nel posizionarla sul rimorchio deve fare attenzione a che non sporga oltre  $\frac{1}{3}$  della lunghezza del veicolo, come da normativa. Decide dunque di appoggiarla sul lato  $a$ . Tenuto conto dell'ingombro del carico, dell'altezza del rimorchio da terra (2 m), passerà in retromarcia attraverso una galleria di altezza 4,30 m?

Situazione problema come approfondimento e/o elementi di verifica.

(Liberamente tratto da: Silvia Sbaragli (2010) "Qui cade sua... altezza", *La vita scolastica* 18, 25-27)

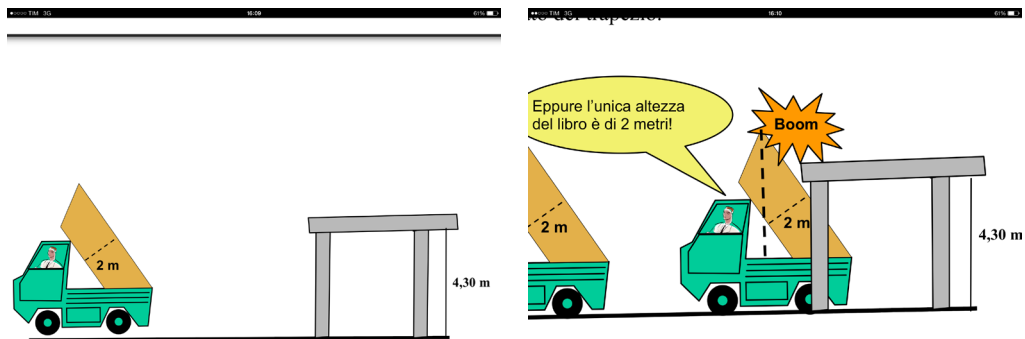


Figura 13

## **PROPOSTA 3 - Il parco triangolare**

L'attività prende spunto dalla seguente situazione problematica e si suddivide in due richieste.

### **Fase 1**

Tre lunghi corsi ad alto traffico automobilistico delimitano un grande parco a forma triangolare. La zona verde è circondata da una pista ciclabile (indicata in rosso nella figura 14).

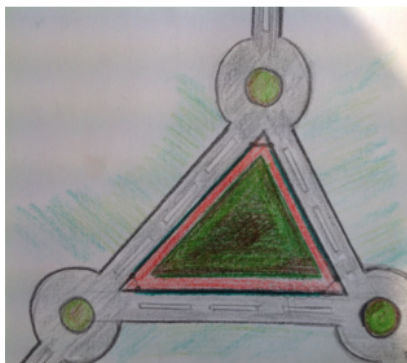


Figura 14

Si vogliono realizzare nuovi tratti di pista ciclabile che da ciascun ingresso (posti nei vertici) conducano al lato opposto. Per contenere le spese di realizzazione, si conviene che ciascuno dei nuovi tratti sia il più corto possibile. Nel punto d'incontro si vuole collocare una postazione "rent a bike" raggiungibile attraverso i nuovi tratti ciclabili.

1. Determina il punto dove collocare la postazione e rappresenta la situazione graficamente. Argomenta le tue/vostre scelte.
2. Scrivi le tue/vostre considerazioni sulla soluzione esplorando altre possibili forme triangolari.

#### *Indicazioni metodologiche*

Si può pensare di procedere così:

1. Comprendere il problema reale. Occorre pensare alla distanza minima che collega un ingresso del parco alla pista ciclabile situata nel corso opposto. Se tali piste si incontrano, il punto d'incontro sarà il posto dove localizzare, all'interno del parco, la stazione di noleggio bici.
2. Trasformare il problema reale in un problema matematico. Il parco può essere rappresentato come un triangolo. Gli ingressi sono i vertici, le piste ciclabili esistenti i lati del triangolo. Il problema viene riformulato in "determinare le altezze di un triangolo e determinare il loro punto d'incontro" (figura 15).
3. Tradurre la soluzione matematica nella situazione reale. La soluzione trovata è applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso o rettangolo la soluzione non sarebbe appropriata, poiché le piste ciclabili e il noleggio dovrebbero essere collocate al di fuori del parco.

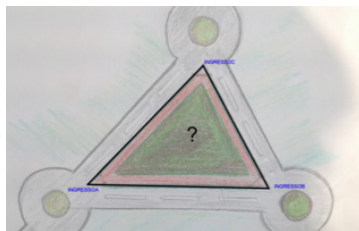


Figura 15



## Fase 2. La via più breve

Si vuole realizzare il percorso pedonale minimo che collega i tre lati del parco. Un tratto del percorso è già in fase di costruzione e coincide in figura con il segmento  $FG$  (figura 16). Disegna, motivando la tua scelta, l'intero percorso.

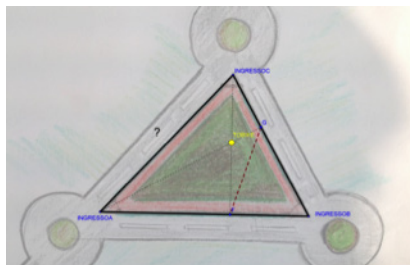


Figura 16

Domande stimolo


- La scelta  $FG$  sarà casuale?
- È possibile trovare un altro triangolo “inscritto” nel parco che abbia perimetro minore? Esplora con GeoGebra la situazione.

## ALLA SCOPERTA DI ALTRE PROPRIETÀ

Si stimolano gli studenti alla ricerca di altre proprietà del triangolo ortico da esplorare e verificare con GeoGebra.

### Triangolo inscritto nel triangolo acutangolo di perimetro minimo

Le altezze del parco triangolare sono bisettrici del triangolo minimo (quindi l'ortocentro del triangolo coincide con l'incastro del triangolo ortico).

	<b>ADATTAMENTO DELL'ATTIVITÀ “L'ALBERO MAESTRO” PER IL BIENNIO DEL LICEO SCIENTIFICO</b>
<b>Autori</b>	S. Beltramino, P. Curletti, C. Idrofano, L. Poli
<b>A chi è rivolto</b>	Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

## Premessa

Dalle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici: “*il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione [...]. Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.*”

*La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

In una classe prima di scuola secondaria di secondo grado, la situazione tipica che si presenta è quella in cui gli studenti provengono da svariate scuole di I grado (mediamente anche 8 o 9 per ciascuna classe) e quindi la domanda “Come avete studiato geometria alla scuola media?” riceve abitualmente le risposte più disparate, ma quello che emerge con chiarezza è che, nella maggior parte dei casi, non è stata svolta alcuna attività di tipo pratico e manipolatorio per giungere a congetturare le proprietà. Principalmente per loro Geometria significa misura e formule a memoria per il calcolo di aree e volumi.

### ***L'albero maestro***

Per quanto è stato detto nella premessa, è indispensabile proporre anche nel biennio esperienze di tipo pratico per consolidare conoscenze e abilità che, se non pienamente interiorizzate, rischiano poi in seguito di creare difficoltà e incomprensioni.

Il nodo concettuale di *retta perpendicolare* e quelli a esso collegati (distanza tra un punto e una retta, altezza) rappresentano un caso tipico in cui un misconcetto riemerge periodicamente per interferire con la corretta comprensione (nello studio dei triangoli, dei parallelogrammi, dei luoghi geometrici, dei punti notevoli di un triangolo). Nel caso dei luoghi geometrici, il termine equidistanti può riferirsi tanto alla distanza tra punti che a quella tra un punto e una retta, ...

Gli obiettivi primari per cui proponiamo questa attività sono:

- far nascere l'esigenza di definire e di dimostrare. Tale esigenza viene fatta scaturire, nella classe prima, sia proponendo situazioni in cui la semplice osservazione delle figure può condurre a conclusioni non corrette (come per esempio illusioni ottiche o situazioni controintuitive) sia proponendo attività con carta e forbici che visualizzano proprietà delle figure (per esempio la somma degli angoli interni di un triangolo) in un numero necessariamente limitato di casi (“Avete costruito 25 triangoli e verificato la proprietà, ma siete sicuri di aver lavorato con precisione? Siete autorizzati ad affermare che tale proprietà vale per ogni triangolo?”);
- mettere gli studenti con le “mani nella pasta”, proponendo attività pratico-manipolatorie per congetturare proprietà: l'introduzione graduale allo studio della geometria razionale e al metodo ipotetico-deduttivo, il passaggio dal concreto all'astratto richiedono che gli studenti abbiano costruito il significato dei concetti geometrici con attività manipolatorie e, appunto, concrete. Com'è possibile attuare il passaggio dal concreto all'astratto se la fase del concreto viene completamente a mancare?
- cancellare l'idea che la geometria sia fare solo misure e uso di formule da imparare a memoria per i calcoli di aree e volume.

Riteniamo che questa attività possa essere utilizzata nei seguenti momenti, eventualmente come verifica dei prerequisiti, ma soprattutto per individuare i misconcetti:

- nello studio dei triangoli, per accertarsi che gli studenti sappiano tracciare correttamente le altezze in un triangolo generico (caso del triangolo ottusangolo);
- come premessa all'altra attività di M@t.abel prevista per la secondaria di secondo grado “Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione” (capitolo 3): spesso l'altezza di un triangolo viene identificata con la mediana o con la bisettrice;
- nello studio dei parallelogrammi;
- l'individuazione, mediante piegatura, delle altezze di un triangolo può suggerire la congettura che esse passino per uno stesso punto e far emergere l'esigenza di dimostrarlo;

- quando si introducono l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo come luoghi geometrici;
- le altezze di un triangolo sono gli assi dei lati di un altro triangolo; ...
- nello studio della circonferenza (retta tangente in un punto);
- nello studio dell'equivalenza (parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza, triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza, costruzione di un poligono di  $n - 1$  lati equivalente a un poligono dato di  $n$  lati, nella dimostrazione del I teorema di Euclide, ...).

Inoltre è bene incrementare il ricorso alla piegatura della carta che, oltre che per le rette perpendicolari, può essere utilizzata per:

- introdurre un *fascio proprio di rette*: assegnato un punto  $P$  produrre pieghe che portano  $P$  su se stesso (fissano  $P$ ) come in figura 17 a);
- introdurre una *retta passante per due punti*: assegnati due punti  $P$  e  $Q$  produrre una piega che fissi entrambi (figura 17 b);
- *asse del segmento*: assegnati due punti  $P$  e  $Q$  produrre una piega che li scambia tra loro (figura 17 c);
- *bisettrice di un angolo*: assegnate le rette  $r$  e  $s$  produrre pieghe che le scambino tra loro;
- produrre *due rette parallele* (figura 17 d);
- *parabola*.

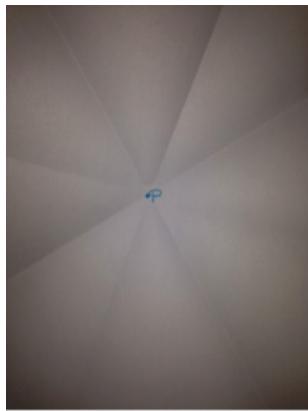


Figura 17 a



Figura 17 b

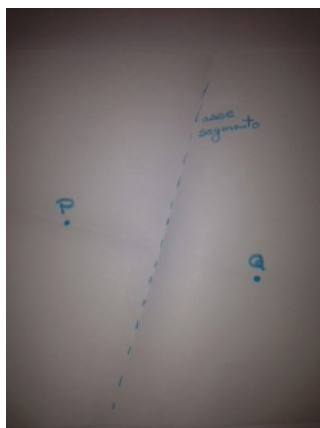


Figura 17 c



Figura 17 d

Tra i vantaggi dell'utilizzazione della piegatura della carta in aula c'è il fatto che la carta non ha i centimetri e quindi non induce a misurare, ma anche il fatto che problemi come la trisezione dell'angolo sono facilmente risolvibili.

Le proposte di lavoro sono simili in tutti i casi: produrre l'*oggetto matematico* con la piegatura della carta, riprodurre le pieghe della carta con GeoGebra, ma dal punto di vista statico, per provare a dimostrare che cosa stiamo facendo e poi, con la dinamicità di GeoGebra costruire il luogo di punti, visualizzando la generalizzazione.

Il discorso deve essere sviluppato ulteriormente nel secondo biennio, da una parte con la piegatura della carta per introdurre le coniche e i luoghi di punti, dall'altra per approfondire il senso del metodo ipotetico-deduttivo in geometria. Ci chiediamo, infatti, se il metodo ipotetico deduttivo sia un obiettivo realistico di fine biennio del liceo scientifico. Inoltre si pone il problema di come raccordare tale metodo con lo studio della geometria dello spazio in cui la componente visiva-intuitiva gioca un ruolo fondamentale. Anche qui gli origami possono venirci in aiuto.

## Riflessioni sulla valutazione. Altezza e perpendicolarità nelle prove INVALSI e i nostri suggerimenti

*a cura di S. Paruzza*

Nella tabella vengono riportati alcuni quesiti SNV relativi ai concetti di perpendicolare e di altezza per i livelli L06, L08 e L10 e per la seconda prova scritta del Liceo Scientifico.

Anno	Livello	N. quesito	Scopo
2010	08	D12	Tracciare altezze
2011	08	D16	Costruire perpendicolari
2013	08	D15	Rappresentare le altezze di un triangolo
2012	08	D25	Disegnare l'altezza di un triangolo
2003	06	18	Riconoscere perpendicolari
2011	08	D6	Misurare l'altezza per calcolare l'area di un triangolo
2003	06	19	Riconoscere altezze uguali in triangoli equivalenti
2004	06	25	Riconoscere altezze uguali per confrontare aree
2004	06	6	Riconoscere altezze uguali in triangoli equivalenti
2011	06	D5	Riconoscere altezze uguali in poligoni equivalenti
2010	06	D10	Misurare altezze per determinare aree
2013	10	D5	Riconoscere, tra diverse argomentazioni, quella corretta
2013	10	D17	Calcolo dell'area di una figura in posizione non standard
2012	10	D3	Riconoscere altezze uguali per individuare aree uguali
2007	10	10	Riconoscere altezze uguali per individuare quadrilateri equivalenti
2012	10	D17	Saper individuare nel piano cartesiano basi e altezze di triangoli in diverse posizioni
2011	10	D18	Determinazione di altezze nel piano cartesiano per trovare l'area
2012	10	D24	Riconoscere perpendicolarità per applicare il Teorema di Pitagora

2013	2° prova Liceo Scientifico	Costruzione di perpendicolari per determinare distanze nel piano cartesiano	
2011	2° prova Liceo Scientifico	Costruzione di perpendicolari per determinare distanze e luoghi geometrici nello spazio	
2014	10	D11	Individuare altezze di triangolo e parallelogramma per confrontare aree
2014	08	D22	Riconoscere l'altezza comune di triangoli equivalenti
2014	10	D7	Individuare altezze di triangoli per determinare aree come differenza
2014	08	D11	Riconoscere altezze uguali in triangoli equivalenti. Riconoscere l'altezza e determinare la base di un triangolo per ottenere un'area assegnata

	<b>Autori</b>	A. Frumento, L. Mantello, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni
---	---------------	--

Dall'analisi delle prove è emerso che il concetto di altezza interviene in due diverse tipologie di quesiti: domande in cui è esplicitamente richiesto di tracciare altezze e domande in cui saper individuare l'altezza è prerequisito per rispondere correttamente (quesiti su calcolo/confronto di aree). Nelle prime prove proposte dall'INVALSI, prevalgono quesiti del secondo tipo.

La richiesta è divenuta nel tempo sempre più presente, tanto da essere, oggi, una costante delle prove INVALSI.

I quesiti relativi alle altezze sono inseriti nel Macroprocesso 1: CONCETTI E PROCEDURE che include i processi 1 e 2 del QdR INVALSI, così definiti:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture, ...);
2. conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico).

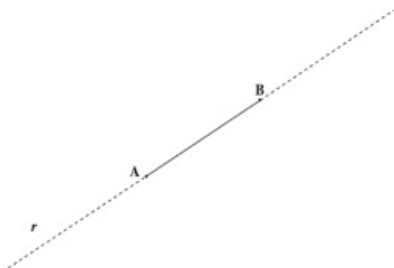
*“Si tratta di processi di base, senza i quali non è possibile per uno studente affrontare nessun tipo di quesito di matematica e sono preliminari all'insieme dei processi cognitivi valutati dai test INVALSI. La misura della performance degli studenti nell'ambito di questi due processi rappresenta anche una valutazione efficace del grado di raggiungimento degli obiettivi formativi della matematica propri della scuola secondaria di I grado. Infatti appartengono a questi due processi quesiti usualmente proposti nella prassi didattica, quali il saper tracciare l'altezza in un triangolo...”*

*(da: QUADERNI SNV N.3/2012 – MAT [http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni\\_SNV\\_N3\\_MAT.pdf](http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N3_MAT.pdf))*

***Quesiti che richiedono di tracciare altezze***

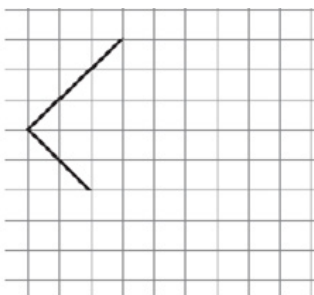
**QUESITO D12 - Livello 8, anno scolastico 2009/2010**

Qui sotto vedi una retta  $r$  sulla quale sono segnati due punti  $A$  e  $B$ . Disegna un triangolo rettangolo  $ABC$  in modo tale che il segmento  $AB$  sia un cateto. Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.



**QUESITO D16 - Livello 8, anno scolastico 2010/2011**

Osserva la seguente figura.

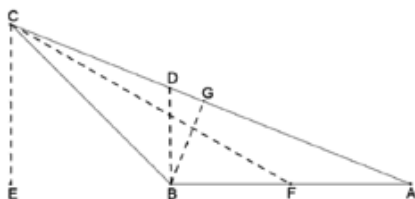


- Completa la figura in modo da ottenere un quadrato.
- Spiega come hai fatto per disegnare il quadrato.

.....  
 .....

**QUESITO D15 - Livello 8, anno scolastico 2012/2013**

Osserva la figura.

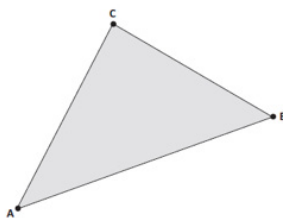


Quale, tra le seguenti coppie di segmenti, rappresenta due delle altezze del triangolo  $ABC$ ?

- $CE$  e  $CF$
- $BD$  e  $BG$
- $CE$  e  $BG$
- $CF$  e  $BD$

**QUESITO D25 - Livello 6, anno scolastico 2011/2012**

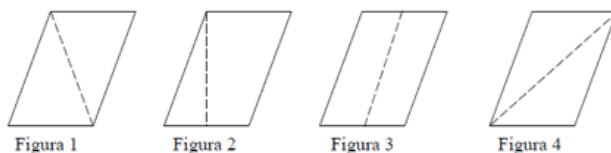
Osserva la figura.



Disegna nel triangolo  $ABC$  l'altezza  $CH$  relativa al lato  $AB$ .

**QUESITO D12 - Livello 6, anno scolastico 2002/2003**

Osserva attentamente le figure.



In quale figura il segmento tratteggiato corrisponde all'altezza? Nella figura...

- A.  1
- B.  2
- C.  3
- D.  4

**Quesiti che richiedono di tracciare altezze per calcolare aree**

**QUESITO D6 - Livello 8, anno scolastico 2010/2011**

Osserva il disegno.



Calcola l'area del triangolo prendendo con un righello le misure necessarie.

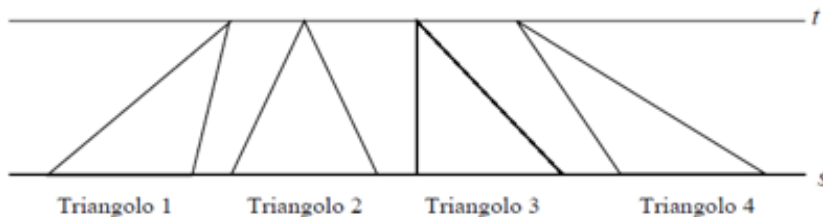
a. Risposta: .....  $\text{cm}^2$

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.

.....

**QUESITO 19 - Livello 6, anno scolastico 2002/2003**

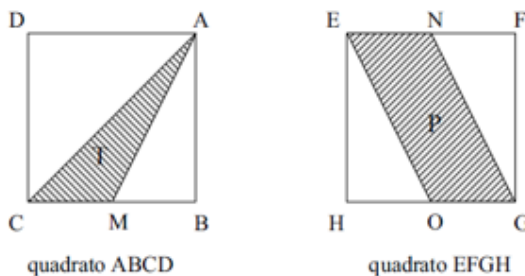
Tutti i triangoli in figura hanno la misura della base uguale e il vertice sulla retta  $t$  parallela alla retta  $s$ .



- A.  Solo il triangolo 1 e il triangolo 3 hanno la stessa area
- B.  Il triangolo 4 ha l'area minore rispetto agli altri triangoli.
- C.  Tutti i triangoli hanno la stessa area.
- D.  Nessun triangolo ha la stessa area di un altro di questi triangoli.

**QUESITO 25 - Livello 6, anno scolastico 2003/2004**

Ci sono due quadrati uguali di vertici  $ABCD$  e  $EFGH$ . Nel primo quadrato si ottiene la figura  $T$  di vertici  $AMC$  e nel secondo si ottiene la figura  $ENGO$ . I punti  $M$ ,  $N$  e  $O$  sono i punti medi dei relativi lati dei quadrati, quindi i segmenti  $CM$ ,  $EN$  e  $OG$  sono uguali tra loro.

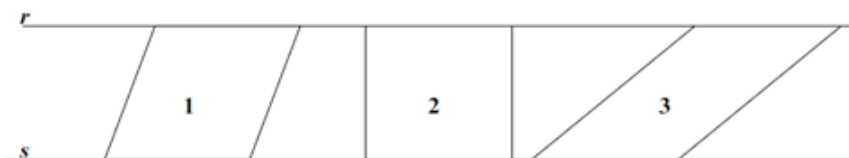


Quali tra le seguenti affermazioni è VERA?

- A.  L'area della figura T è due terzi dell'area della figura P.
- B.  L'area della figura T è metà dell'area della figura P.
- C.  L'area della figura T è un terzo dell'area della figura P.
- D.  L'area della figura T è un quarto dell'area della figura P.

**QUESITO 6 - Livello 6, anno scolastico 2003/2004**

Osserva la seguente figura:



Le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele e i parallelogrammi 1, 2 e 3 hanno la base di ugual misura sulla retta  $s$ . I lati opposti alle relative basi si trovano sulla retta  $r$ .

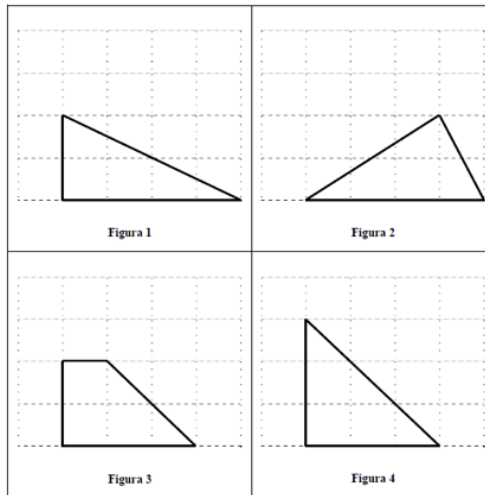


Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A.  Solo 1 e 2 hanno la stessa area.
- B.  Nessuno dei tre ha la stessa area.
- C.  hanno tutti e tre la stessa area.
- D.  Solo 1 e 3 hanno la stessa area.

**QUESITO D5 - Livello 6, anno scolastico 2010/2011**

Osserva le seguenti quattro figure:

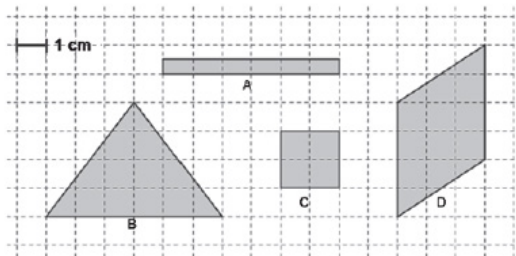


Tre di esse hanno la stessa area. Quali sono?

Risposta .....

**QUESITO D10 - Livello 6, anno scolastico 2009/2010**

Osserva queste figure:



Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

	VERO	FALSO
a. L'area di A è di $6 \text{ cm}^2$ .		
b. B e D hanno la stessa area.		
c. C è la figura con l'area minore.		
d. L'area di B è il triplo dell'area di C		

	<p><b>Autori</b></p>	<p>R. Ferro, F. Finoglio, M. C. Garassino, S. Labasin</p>
---	----------------------	---

Nel seguente lavoro sono stati selezionati alcuni quesiti INVALSI (l'ambito prevalente è Spazio e Figure) che consentono di creare un percorso attraverso il concetto di perpendicolarità, secondo punti di vista e ambiti di analisi diversi.

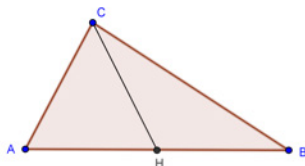
Alcuni quesiti indagano lo spazio bidimensionale e ritrovano la perpendicolarità nella costruzione delle altezze e/o nel calcolo delle aree di triangoli, parallelogrammi o poligoni in generale, mentre altri propongono domande relativamente a figure in tre dimensioni.

I *processi prevalenti* coinvolgono una gamma piuttosto vasta di competenze: dalla capacità di “risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica” (anche nei diversi ambiti geometrico, algebrico o numerico) alla capacità di “acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico” o ancora il saper “riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura”.

Per completezza il percorso è stato integrato con due quesiti tratti dalle prove degli Esami di Stato, nei quali ritroviamo i concetti di distanza e perpendicolarità.

**QUESITO D5 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

$H$  è il punto medio del lato  $AB$  del triangolo  $ABC$ .



I triangoli  $AHC$  e  $HBC$  hanno la stessa area perché:

- A.  la distanza di  $C$  da  $AB$  è la stessa nei due triangoli e  $AH = HB$
- B.  la mediana  $CH$  divide il triangolo in due triangoli congruenti
- C.  hanno come altezza comune  $CH$  e le relative basi sono della stessa lunghezza
- D.  i triangoli  $CHA$  e  $CHB$  sono tutti e due triangoli isosceli

**Ambito prevalente:** Spazio e figure

**Scopo domanda:** riconoscere, tra diverse argomentazioni, quella corretta.

**Processo prevalente:** utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico.

**Indicazioni Nazionali e Linee Guida:** fondamenti della geometria euclidea del piano.

**Risposta corretta:** A

**Commento:** il distrattore C può risultare molto attrattivo per studenti che leggono con poca attenzione.

Lo studente, infatti, deve riconoscere che  $CH$  non è in generale altezza ma mediana, e quindi concludere che l'affermazione contenuta nell'opzione C è falsa.

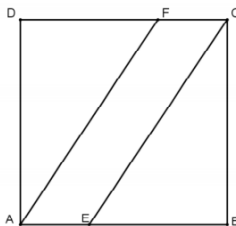
**Risultato del campione**

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Risposta mancante</i>
22,7	18,8	46,4	8,1	4,0

La difficoltà risiede nel capire che i due triangoli hanno la stessa altezza (Processi 6 e 7).

**QUESITO D17 – Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

Considera il quadrato  $ABCD$  il cui lato misura 6 cm.  $AE$  e  $FC$  misurano ciascuno 2 cm.



Quanto misura la superficie del quadrilatero  $AECF$ ?

Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

**Ambito prevalente:** Spazio e Figure

**Scopo domanda:** calcolo dell'area di una figura in posizione non standard.

**Processo prevalente:** risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi: numerico, geometrico, algebrico.

**Indicazioni Nazionali e Linee Guida:** conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.

**Macroprocesso:** utilizzare.

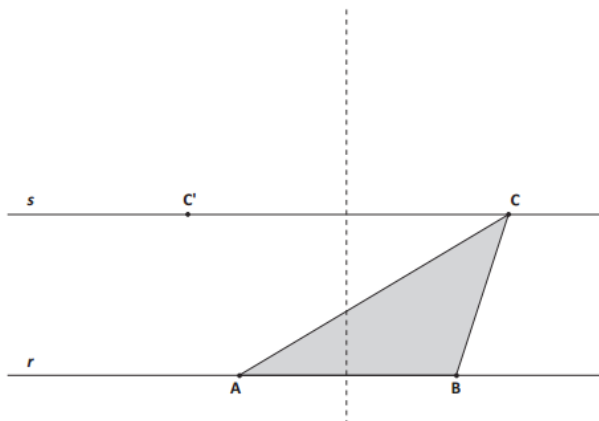
**Risultato del campione**

	<i>Mancata Risposta</i>	<i>Errata</i>	<i>Corretta</i>
G	22,4	49,1	28,5
L	17,9	43,9	38,2
T	22,9	52,4	24,7
P	30,1	53,9	16,1

La difficoltà dello studente risiede nel riconoscere l'altezza della figura (Processo 4).

**QUESITO D3 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

$ABC$  è uno degli infiniti triangoli aventi la base  $AB$  sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $C$ .



Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di  $ABC$ ?

- A.  Soltanto il triangolo  $ABC'$ , simmetrico di  $ABC$  rispetto all'asse di  $AB$
- B.  Soltanto il triangolo isoscele di base  $AB$
- C.  Soltanto il triangolo rettangolo in  $A$  e il triangolo rettangolo in  $B$
- D.  Tutti gli infiniti triangoli di base  $AB$

**Ambito prevalente:** Spazio e Figure

**Oggetto di valutazione:** composizione e scomposizione di figure.

**Processo prevalente:** acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, definire, generalizzare, ...).

**Dalle Indicazioni per il curricolo 2007:** calcolare l'area di superfici scomponendole in figure elementari, per esempio triangoli.

**Macroprocesso:** argomentazione.

**Risposta corretta:** D

**Commento:** Il distrattore A fa pensare alla simmetria come unica soluzione possibile.

**Risultato del campione**

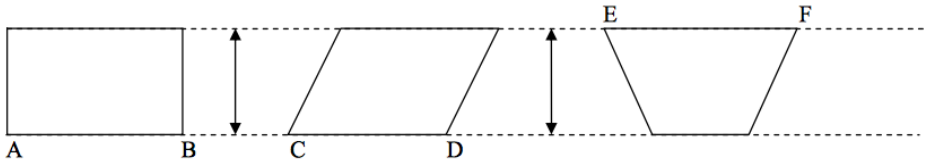
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Risposta mancante</i>
53,3	7,8	7,2	28,1	3,4

La difficoltà dell'allievo risiede nell'individuare base e altezza dei triangoli e nel riconoscere l'invarianza dell'altezza quindi dell'area al variare di  $C$  (Processo 6).

**QUESITO 10 - Prova INVALSI per la classe prima secondaria secondo grado, a.s. 2006/2007**

(da: [http://www.engbeben.it/prof/materiali/invalsi/invalsi\\_seconda\\_superiore/2006-2007/invalsi\\_matematica\\_2006-2007\\_secondaria\\_prima.pdf](http://www.engbeben.it/prof/materiali/invalsi/invalsi_seconda_superiore/2006-2007/invalsi_matematica_2006-2007_secondaria_prima.pdf))

Nella figura i segmenti  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  sono congruenti.



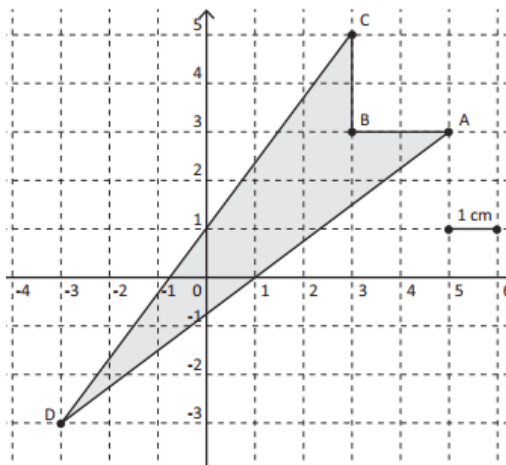
Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A.  Solo due quadrilateri hanno uguale area.
- B.  Solo due quadrilateri hanno uguale perimetro.
- C.  I quadrilateri hanno tutti uguale perimetro.
- D.  I quadrilateri hanno tutti uguale area.

È fondamentale riconoscere le altezze dei quadrilateri (Processo 6) ed è utile ragionare su una striscia di carta e sulla distanza tra due rette parallele.

**QUESITO D17 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Calcola l'area del quadrilatero  $ABCD$  disegnato in figura.



Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

**Ambito prevalente:** Spazio e Figure

**Processo prevalente:** saper riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura.

**Indicazioni Nazionali e Linee Guida:** uso del metodo delle coordinate cartesiane. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area.

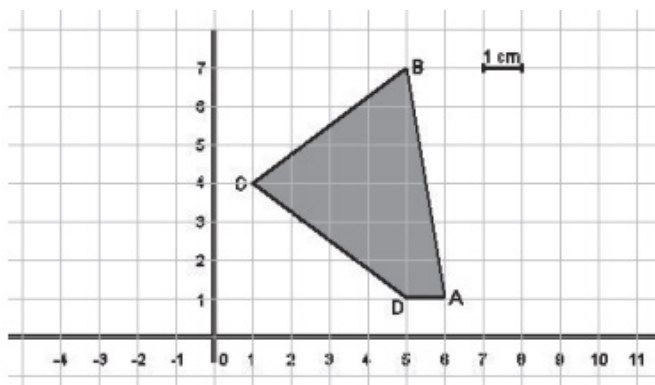
**Commento:** il quesito è interessante anche perché prevede diversi procedimenti risolutivi. L'area può essere calcolata sia come differenza di un quadrato di lato 8, meno un quadrato di lato 2 e due triangoli rettangoli, che come differenza tra l'area di  $ACD$  e l'area di  $ABC$ . Nel secondo caso viene proprio testata la competenza che stiamo esaminando, ovvero il saper individuare base e altezza dei triangoli anche quando non sono orizzontali e verticali (Processo 5).

**Risultato del campione**

<i>Mancata Risposta</i>	<i>Errata</i>	<i>Corretta</i>
41,7	42,0	14,7

**QUESITO D18 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.



Calcola l'area del quadrilatero  $ABCD$ .

Risposta: .....  $\text{cm}^2$

**Ambito prevalente:** Spazio e Figure

**Processo prevalente:** risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come per esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, ...).

**Nuovo obbligo di istruzione:** confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

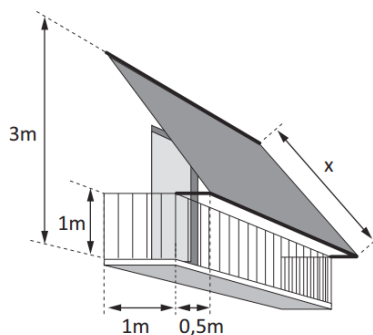
**Risultato del campione**

<i>Mancata Risposta</i>	<i>Errata</i>	<i>Corretta</i>
33,6	37,7	28,7

L'area può essere calcolata per via indiretta come differenza di aree oppure come somma di aree di triangoli. Quesito analogo a quello riportato precedentemente, ma che richiama un processo differente (Processo 4).

**QUESITO D24 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a 3 m di altezza dal pavimento del balcone, che è largo 1 m. La tenda deve sporgere 0,5 m dalla ringhiera che è alta 1 m.



Scrivi i calcoli che fai per trovare la lunghezza  $x$  della tenda e infine riporta il risultato.

.....

Risultato:  $x = \dots\dots\dots$  metri

**Ambito prevalente:** Spazio e Figure

**Processo prevalente:** risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica.

**Indicazioni Nazionali e Linee Guida:** teorema di Pitagora. Misura di grandezze: teorema di Pitagora.

**Risultato del campione**

<i>Mancata Risposta</i>	<i>Errata</i>	<i>Corretta</i>
43,2	27,7	27,0

Il quesito intende testare non solo il livello della conoscenza ma anche quello della competenza. Viene infatti richiesto di applicare il modello teorico rappresentato dal triangolo rettangolo e quindi dal teorema di Pitagora a una situazione concreta (Processo 4).

**SECONDA PROVA PER I LICEI SCIENTIFICI 2012/2013**

Si considerino, nel piano cartesiano, i punti  $A(2; -1)$  e  $B(-6; -8)$ .

Si determini l'equazione della retta passante per  $B$  e avente distanza massima da  $A$ .



Figura 18. Esempio videata di GeoGebra

Al variare della retta per  $B$  varia la distanza del punto  $A$ , che coincide con il cateto del triangolo  $ACB$ . Assume valore massimo in corrispondenza del segmento  $AB$ , ipotenusa del triangolo.

**SECONDA PROVA PER I LICEI SCIENTIFICI 2010/2011**

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

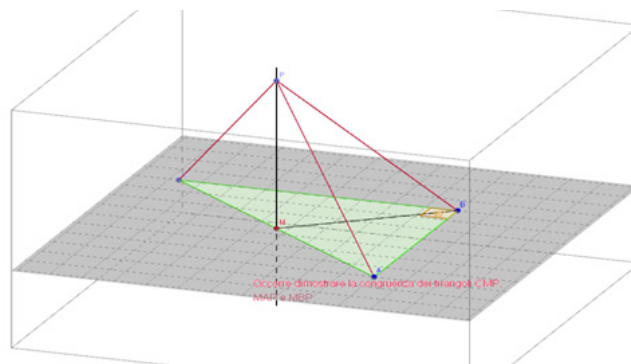


Figura 19

Occorre dimostrare la congruenza dei triangoli  $CMP$ ,  $MAP$  e  $MBP$ .

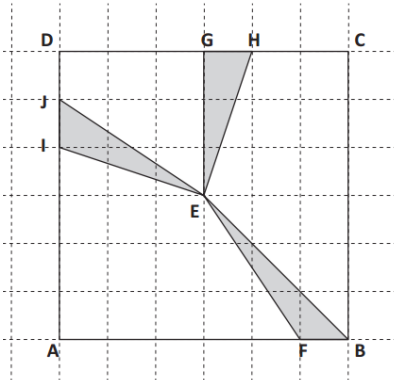


	<p><b>Autori</b></p>	<p>S. Paruzza</p>
---	----------------------	-------------------

Per completezza si aggiungono i quesiti sullo stesso tema dell'anno 2013/2014.

**QUESITO D11 - Livello 08, anno scolastico 2013/2014**

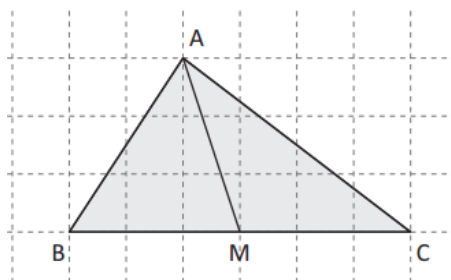
Osserva i triangoli nella seguente figura.



- a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
- A.  I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro
  - B.  I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro
  - C.  I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro
  - D.  I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro
- b. Posiziona sul lato  $AB$  del quadrato il punto  $P$  in modo che il triangolo  $AEP$  abbia area doppia del triangolo  $EFB$ .

**QUESITO D22 - Livello 08, anno scolastico 2013/2014**

Nel triangolo in figura il segmento  $AM$  congiunge il vertice  $A$  con il punto medio  $M$  del lato  $BC$ . Il triangolo risulta così diviso in due triangoli.

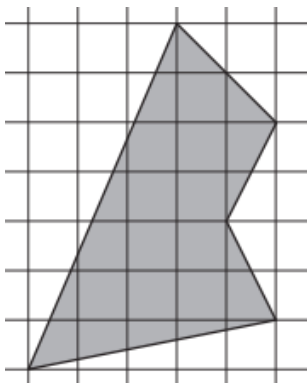


I due triangoli  $ABM$  e  $AMC$  risultano tra loro equivalenti?

- A.  Sì, perché i triangoli  $ABM$  e  $AMC$  hanno una base e la relativa altezza di uguali lunghezze
- B.  Sì, perché il lato  $AM$  è in comune ai triangoli  $ABM$  e  $AMC$
- C.  No, perché i triangoli  $ABM$  e  $AMC$  non sono congruenti
- D.  No, perché il segmento  $AM$  è la mediana relativa al lato  $BC$  del triangolo  $ABC$

**QUESITO D7 - Livello 10, anno scolastico 2013/2014**

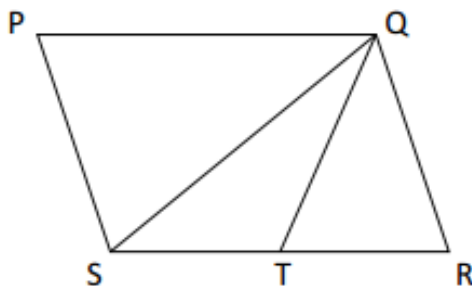
Osserva la figura.



Se il lato di ogni quadretto corrisponde a 1 m, allora la superficie del poligono misura ..... m.

**QUESITO D11 - Livello 10, anno scolastico 2013/2014**

$PQRS$  è un parallelogramma e  $T$  è il punto medio di  $SR$ .



Qual è il rapporto tra l'area del triangolo  $QST$  e l'area del parallelogramma?

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato. ....

Risultato: .....

**Verifica sul concetto di altezza e perpendicolarità.  
I nostri suggerimenti per la valutazione**

Quelli che seguono sono alcuni quesiti elaborati per valutare l'acquisizione del concetto di distanza da parte degli alunni della **scuola secondaria di primo grado** con i relativi obiettivi oggetto di valutazione.

	<b>Autori</b>	S. Abbati, B. Baldi, S. Barbera, S. Paruzza, D. Sasso
---	---------------	---

**QUESITO 1 - Geometria in bicicletta**

La bicicletta della fotografia (figura 20) è una via di mezzo tra una bici da corsa e una bici da città.



Figura 20. Foto di una bicicletta

Grazie alla rappresentazione schematica di figura 21 stabilisci, nel disegno, qual è la distanza:

1. tra i mozzi  $J$  e  $L$  della bici
2. della sella  $C$  dalle seguenti parti del telaio:
  - a. tubo  $EF$
  - b. tubo  $DH$
  - c. tubo  $DJ$

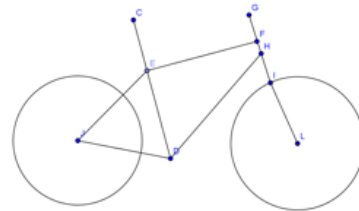


Figura 21

Spiega il procedimento che hai seguito.

3. La distanza tra la sella  $C$  e il perno del pedale  $D$  è la stessa che quella tra sella e tubo  $DH$ ? Perché?

	<b>Autori</b>	A. Frumento, L. Mantello, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni
---	---------------	---

**QUESITO 2 - Il nuotatore**

Luca sta nuotando da un po' di tempo e ora è stanco: vorrebbe raggiungere la spiaggia il prima possibile. Dalla posizione in cui si trova (figura 22) disegna il percorso che gli conviene seguire per arrivare alla spiaggia nuotando il meno possibile. Motiva la tua scelta.

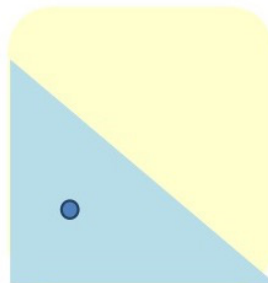


Figura 22

**QUESITO 3 - La casa di Marianna**

La casa di Marianna è compresa tra via Roma e via Bologna (figura 23).

Quale delle due vie secondo te è più vicina? Motiva la tua risposta.

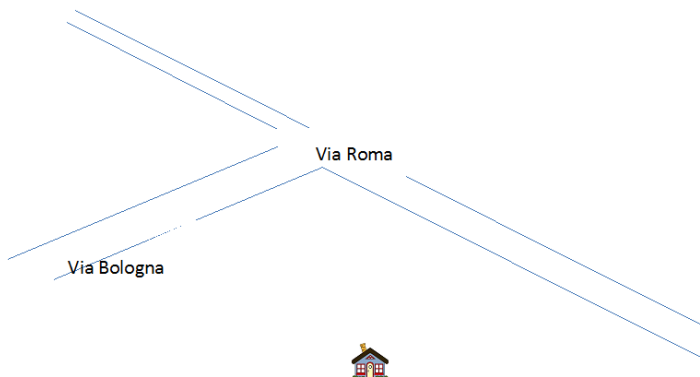


Figura 23

**QUESITO 4 - La torre di Pisa**

(rielaborato da: "Contaci! Misure, spazio e figure" volume 1 – Zanichelli, Bologna, 2012)



La foto rappresenta la Torre di Pisa.

Essa è inclinata rispetto alla verticale di un angolo di

- $0^\circ$
- $6^\circ$
- $30^\circ$
- $84^\circ$

Motiva la tua risposta.

Figura 24. Torre di Pisa

*Risposta:* i ragazzi dovrebbero disegnare la verticale (figura 25) e capire che l'angolo tra la verticale e la pendenza della torre è  $6^\circ$ .

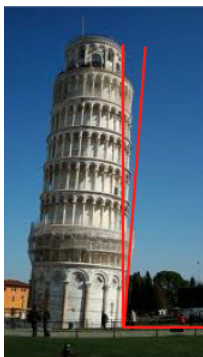


Figura 25.  
Soluzione

Competenze	Obiettivi	Conoscenze
(da: Indicazioni Nazionali 2012) <ul style="list-style-type: none"> <li>Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.</li> <li>Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.</li> <li>Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saper individuare e tracciare, in contesti differenti, perpendicolari, verticali e distanze saper tracciare correttamente le altezze dei triangoli, dei parallelogrammi e dei trapezi.</li> <li>Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure (da: Indicazioni Nazionali 2012).</li> <li>Utilizzare il concetto di distanza.</li> <li>Misurare.</li> <li>Riconoscere un modello geometrico in un oggetto reale utilizzare i metodi geometrici appresi in una situazione reale. (Per una scuola superiore si potrebbe richiedere ai ragazzi di costruire il modello geometrico con GeoGebra.)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Distanza, altezza, verticale.</li> <li>Enti geometrici fondamentali.</li> <li>Angoli.</li> <li>Poligoni.</li> </ul>

Vengono di seguito riportati alcuni spunti per la valutazione per la **scuola secondaria di secondo grado** e i relativi obiettivi.

	<b>Autori</b>	R. Ferro, F. Finoglio, M. C. Garassino, S. Labasin
--	---------------	--

### QUESITO 1 - Triangoli e parallelogrammi

Nella figura 26 i segmenti  $AB$  e  $CD$  sono il doppio di  $EF$ .

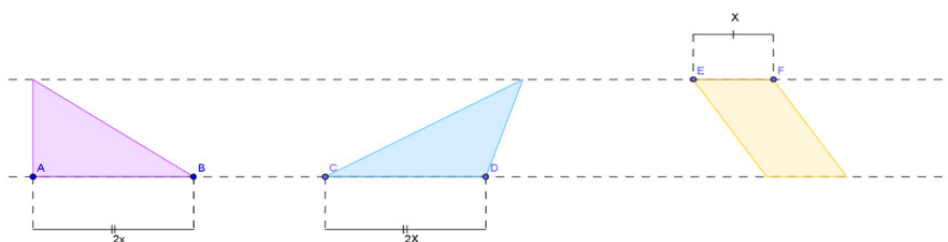


Figura 26

Quale delle seguenti proposizioni è vera? Motiva la risposta.

- I due triangoli hanno la stessa area, mentre il parallelogramma ha area diversa da quella dei due triangoli.
- Il triangolo rettangolo e il parallelogramma hanno la stessa area, mentre il triangolo ottusangolo ha area diversa.
- Tutti e tre i poligoni hanno la stessa area.
- Nessuno dei tre poligoni ha area uguale a uno degli altri due.

In un momento successivo: si può pensare ad altre figure da inserire nella stessa striscia e aventi la medesima area.

**Possibili motivazioni degli studenti:**

- i due triangoli hanno la stessa area perché hanno la stessa base e la stessa altezza, il parallelogramma ha area doppia del triangolo di base  $x$ , quindi la stessa di un triangolo di base  $2x$  (considerazioni geometriche e numeriche (sulla metà del doppio));
- indicata con  $h$  l'altezza della striscia, i triangoli hanno area  $xh$  cioè la stessa del parallelogramma di lato  $x$  (considerazioni algebriche);
- supponendo che  $x = 4$  e  $h = 5$  allora... (considerazioni numeriche).

**Competenze:**

- riconoscere che le figure rappresentate hanno la stessa altezza (striscia);
- riconoscere che le figure hanno la stessa area;
- conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area delle principali figure nel piano (Indicazioni Nazionali e Linee Guida);
- saper giustificare la risposta;
- risolvere problemi usando strategie in ambiti diversi (nella motivazione gli studenti potrebbero utilizzare il registro geometrico oppure numerico oppure algebrico).

**QUESITO 2 - L'aereo**

(da: "Matematica per problemi", R. Cremaschi, Zanichelli, Bologna, 2001)

Se la traiettoria dell'aereo è la seguente, in quali posizioni l'aereo è più vicino a  $B$  che ad  $A$ ?

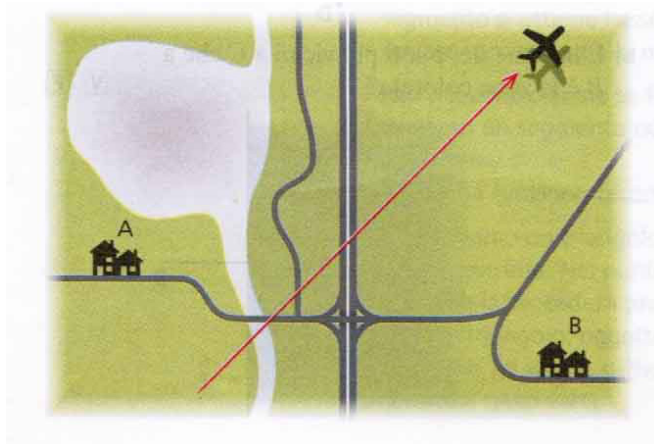


Figura 27

**Competenza:** saper tracciare la distanza punto-retta (non orizzontale).

**QUESITO 3 - Strisce e luoghi**

(da: "Matematica per problemi", R. Cremaschi, Zanichelli, Bologna, 2001)

a. La striscia colorata rappresenta il luogo dei punti più vicini a  $C$  che ad  $A$  e più lontani da  $D$  che a  $B$ ?

V    F

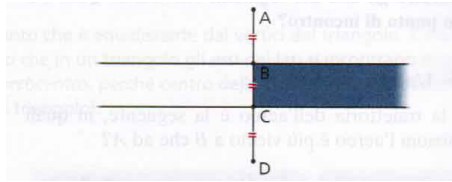


Figura 28

b. L'insieme dei punti più vicini a  $C$  che a  $B$  è la zona colorata?

V    F

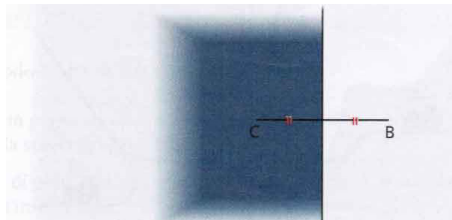


Figura 29

**Competenze:**

- confrontare distanze;
- riconoscere luoghi di punti.

	<p><b>Autori</b></p>	<p>A. Berra, M. Dalè, L. Genoni</p>
---	----------------------	-------------------------------------

**QUESITO 4 - L'autocisterna**

In figura 30 è raffigurata un'autocisterna per il trasporto di liquidi.



Figura 30. Da immagini di Google

Il disegno della sezione verticale della cisterna è la seguente (figura 31), la linea obliqua indica il livello del liquido nella cisterna.

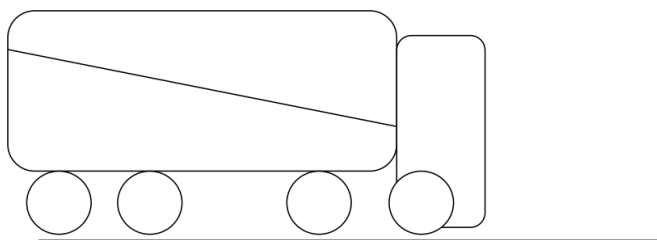


Figura 31

- Disegnare la direzione verticale al luogo e la perpendicolare.
- Che cosa sta succedendo al camion? Dove si trova? Si sta muovendo? Fornisci almeno quattro situazioni in cui il livello dell'acqua potrebbe avere questa forma.

<i>Obiettivi</i>	<i>Competenze</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Saper tracciare correttamente la direzione perpendicolare e la verticale.</li> <li>Saper individuare una situazione reale in cui ambientare la situazione geometrica proposta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modellizzare una situazione reale.</li> </ul>

### **QUESITO 5 - L'impianto di irrigazione**

Un giardino è di forma quadrangolare irregolare. Si vuole attrezzare il perimetro di tale giardino con un impianto fisso di irrigazione, ma il pozzo è in una posizione interna a esso. Quale deve essere il percorso minimo che la tubazione deve fare dal pozzo per raggiungere i quattro lati perimetrali?



Figura 32. Il giardino quadrato o "giardino segreto" del Vaticano

<i>Obiettivi</i>	<i>Competenze</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Saper costruire la perpendicolare da un punto ai lati di un quadrilatero.</li> <li>Riconoscere che il segmento di perpendicolare è la distanza tra un punto e una retta.</li> <li>Riconoscere che la distanza è il percorso di minima lunghezza tra due punti.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saper modellizzare una situazione concreta.</li> </ul>




**Autori**

V. Alberti, A. Cena, A. Coviello, S. Fratti

**QUESITO 6 - La bandiera delle Seychelles**

A un sarto è stata commissionata la realizzazione di 100 bandiere della Repubblica delle Seychelles. La bandiera è composta da cinque bande oblique convergenti nell'angolo inferiore sinistro. Il lato superiore è diviso in tre parti uguali da tre bande di colore blu, giallo e rosso. Il lato a destra è diviso in tre parti uguali dalla banda di colore rosso e da due bande di colore bianco e verde (figura 33).



Figura 33. Bandiera delle Seychelles

- a. Indica se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera o falsa.
- |  |   |   |
|--|---|---|
| La banda verde ha area uguale a quella bianca. | V | F |
| La banda blu ha area uguale a quella verde.    | V | F |
| La banda blu ha area uguale a quella rossa.    | V | F |
- b. Qual è il rapporto tra la superficie della banda blu e la superficie dell'intera bandiera?
- c. Il sarto afferma: "Per preparare le 100 bandiere avrò bisogno di una estensione di tessuto rosso doppia rispetto a quella del tessuto verde." È corretta la previsione del sarto? Motiva la tua risposta .

**Competenze:**

- confrontare figure geometriche (riconoscere i triangoli con la stessa altezza);
- individuare strategie di risoluzione (dividere, mediante la diagonale del rettangolo, l'area rossa in due triangoli e dedurre l'uguaglianza delle aree dei sei triangoli);
- argomentare.

**QUESITO 7 - La bandiera dell'Eritrea**

A un sarto è stata commissionata la realizzazione di 100 bandiere dell'Eritrea.

La bandiera è composta da due bande orizzontali di pari dimensioni: verde la superiore e azzurra la inferiore. A queste è sovrapposto un triangolo rosso con la base sul lato del pennone e il vertice che raggiunge il lato al vento (figura 34).



Figura 34. Bandiera dell'Eritrea

- a. Il sarto afferma: “Il tessuto rosso è il più costoso. Per fortuna che il vertice del triangolo rosso coincide con il punto medio del lato al vento. Infatti se il vertice cadesse in un altro punto del lato, l’area sarebbe maggiore e dovrei utilizzare una maggior quantità del tessuto più caro”.

È corretta la previsione del sarto? Motiva la tua risposta.

- b. Al sarto è stato richiesto di cucire una fettuccina dorata che parte dal vertice superiore a destra e raggiunge il lato obliquo superiore del triangolo rosso. Questa fettuccina deve essere di lunghezza minima.

Aiuta il sarto a determinare la lunghezza della fettuccina. Il disegno precedente raffigura la bandiera mantenendo invariate le proporzioni tra le lunghezze; il lato obliquo del triangolo rosso ha lunghezza 206,2 cm.

**Competenze:**

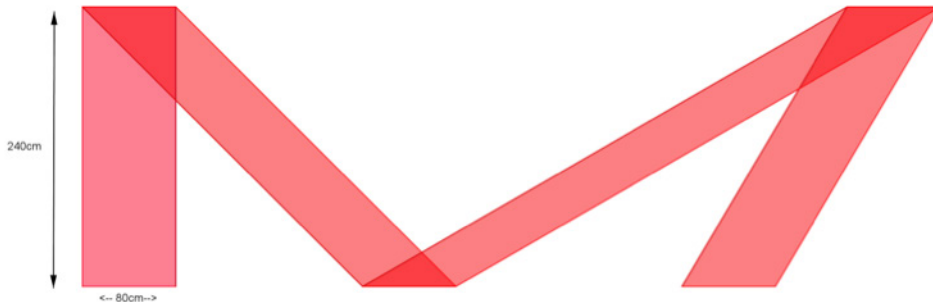
- confrontare figure geometriche (riconoscere che variando la posizione del vertice l’area del triangolo rosso rimane costante, riconoscere che la fettuccina ha lunghezza minima se coincide con una altezza del triangolo verde);
- tradurre il problema nel registro numerico e algebrico (misurare con il righello oppure importare l’immagine in GeoGebra, determinare le lunghezze dei lati reali);
- individuare una strategia per ricavare la lunghezza della fettuccina (per esempio, ricavare l’area del triangolo verde: la fettuccina è l’altezza relativa a un suo lato di cui si conosce la lunghezza);
- argomentare.

	<p><b>Autori</b></p>	<p>L. Giustino, P. Laiolo, F. Turiano, G. Trincherò</p>
---	----------------------	---

**QUESITO 8 - Il logo**

Un negozio di bricolage di nuova apertura ha commissionato a una ditta specializzata la realizzazione di un grosso logo in compensato da porre all'ingresso del negozio.

In figura 35 viene fornito il disegno del logo con le misure del primo pannello.



*Figura 35*

Quanti metri quadrati di compensato saranno necessari?

Spiega le considerazioni che fai per rispondere alla domanda.

Lo studente deve:

- riconoscere che i quadrilateri che formano il logo sono tutti parallelogrammi;
- riconoscere che i parallelogrammi hanno tutti la stessa altezza;
- riconoscere che i quadrilateri sono equivalenti;
- giustificare le considerazioni fatte.



**Autori**

S. Beltramino, P. Curletti, C. Idrofano, L. Poli

### **QUESITO 9 - La tenda**

Osserva la tenda rappresentata in figura 36. È la foto della tenda che Marco e Luca hanno acquistato per le vacanze. L'altezza della tenda misura 1,5 m. Il telo che Marco ha comprato per la copertura è lungo 4 m, ma secondo Luca non è sufficiente per ottenere l'effetto desiderato. Chi ha ragione? Perché?



*Figura 36.*

*(da: <http://www.lastshopping.it/blog/offerte/bertoni-tende-da-campeggio-igloo-canadesi-e-casette-per-vivere-la-natura.html>)*

Lo studente deve:

- riconoscere che con il termine “altezza” si indica il bastone “verticale”;
- riconoscere che esiste un triangolo rettangolo;
- riconoscere e saper motivare una situazione dove la risposta non c'è perché mancano alcune informazioni.

### **QUESITO 10 - Trapezio e triangoli**

Seguendo ormai da molti anni lo svolgimento della prova dei “Giochi di Archimede” abbiamo avuto modo di osservare come spesso i nostri studenti non riescano a riconoscere, nelle situazioni presentate, delle proprietà note e ad applicarle alla risoluzione dei quesiti. Spesso allievi che nelle verifiche proposte al termine di un'unità didattica dimostrano di aver acquisito le conoscenze e le abilità relative a tale unità non sono in grado, anche a breve distanza di tempo, di richiamarle per poterle applicare in contesti nuovi o non immediatamente riconducibili a un argomento specifico del programma e ciò può essere riscontrato anche nello svolgimento delle prove INVALSI.

Ci chiediamo come sia possibile intervenire efficacemente per rendere durevoli le conoscenze e le abilità e per sviluppare negli studenti la capacità di applicare gli strumenti matematici acquisiti in nuovi contesti.

Il problema, Quesito 10 della prova dei “Giochi di Archimede” – Gara Biennio del 27/11/2013, è il seguente:

In un trapezio  $ABCD$  la base maggiore  $AB$  è tripla della base minore  $CD$ . Indicato con  $E$  il punto medio della diagonale  $BD$ , qual è il rapporto tra l'area del triangolo  $CDE$  e l'area del trapezio?

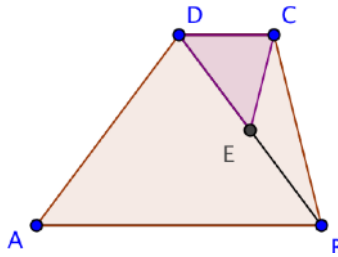


Figura 37

- 1/3
- 1/6
- 1/8
- 1/12
- non può essere determinata dai dati forniti

Lo studente deve riconoscere:

- che il triangolo  $DCB$  e il trapezio  $ABCD$  hanno la stessa altezza;
- che i triangoli  $CDE$  e  $EBC$  sono equivalenti poiché hanno la stessa base e la stessa altezza.



## CAPITOLO 2

### L'OROLOGIO



[www.risorsedocentipon.indire.it/home\\_piattaforma/](http://www.risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/)

L'attività appartiene al nucleo di Geometria del piano M@t.abel.

**Tematica affrontata:** geometria, concetto di angolo.

#### Obiettivi dell'attività:


- costruire il significato di angolo;
- mettere in relazione le grandezze (tempo e angolo nell'orologio analogico);
- misurare angoli di varie dimensioni con metodi diversi;
- esprimere e rappresentare i risultati di misure di angoli;
- risolvere problemi usando le proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo a modelli materiali e a semplici deduzioni.

#### Richiami teorici<sup>1</sup>:

- definizione di angolo;
- tipi di angolo;
- proprietà;
- misura.

### Proposte di adattamenti, ampliamenti

*a cura di P. Laiolo*

	<b>MUOVERSI... CON GLI ANGOLI</b>
<b>Autori</b>	A. Frumento, L. Mantello, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni
<b>A chi è rivolto</b>	Scuola secondaria di primo grado (classe prima/seconda)

#### Descrizione dell'attività

L'attività si articola in quattro fasi:

1. Costruzione della rosa dei venti.
2. Muoversi in una certa direzione definita da un angolo.

<sup>1</sup> Si veda in Appendice a pag. 143

3. Muoversi sulle mappe.
4. Un approccio alla similitudine.

### Fase 1 - Costruzione della rosa dei venti

Nella prima fase si propone l'osservazione e il commento di un semplice disegno rappresentante la rosa dei venti (figura 1) e si ragiona su come poterla costruire.

Dopo aver svolto l'attività dell'orologio, proposta in M@tabel, dovrebbero emergere con facilità la possibilità di inserire la rosa dei venti in un cerchio e la relazione tra direzioni e angoli in analogia con le ore.

Si invitano gli studenti a individuare gli angoli caratterizzanti, per esempio, la perpendicolarità tra le direzioni N-S ed E-W, cioè quattro angoli di  $90^\circ$  (la costruzione potrebbe essere fatta in un ambiente aperto avvalendosi di semplici strumenti come un cordino e uno strumento per tracciare sul terreno).

In questa situazione emerge la necessità di individuare il Nord per orientare correttamente la rosa, problema che potrebbe essere risolto usando riferimenti geografici (per esempio, le montagne, il Sole, ...) oppure avvalendosi della bussola.



Figura 1. La rosa dei venti e la bussola

### Fase 2 - Muoversi in una certa direzione definita da un angolo

Dopo la costruzione della rosa dei venti si propone agli allievi di raggiungere oggetti dislocati nel cortile. Al termine di questa attività gli allievi arrivano a definire la direzione e la distanza di cui si devono muovere per raggiungere l'oggetto individuato. Nasce quindi l'esigenza di trovare un modo convenzionale per esprimere la posizione di un oggetto, ossia di quanti gradi ci si deve spostare rispetto al Nord (direzione) e di quanti metri (distanza) in maniera che chiunque possa raggiungere lo stesso punto in modo inequivocabile.

Qualche esempio di consegna.

- Ti trovi al centro della rosa dei venti e stai guardando in direzione Nord. Devi raggiungere l'oggetto scuro. Che cosa fai?
- Immagina di dover dire a un tuo compagno, posto al centro della rosa e rivolto verso Nord, come raggiungere l'oggetto scuro (figura 2). Che tipo di informazioni dovresti fornirgli?



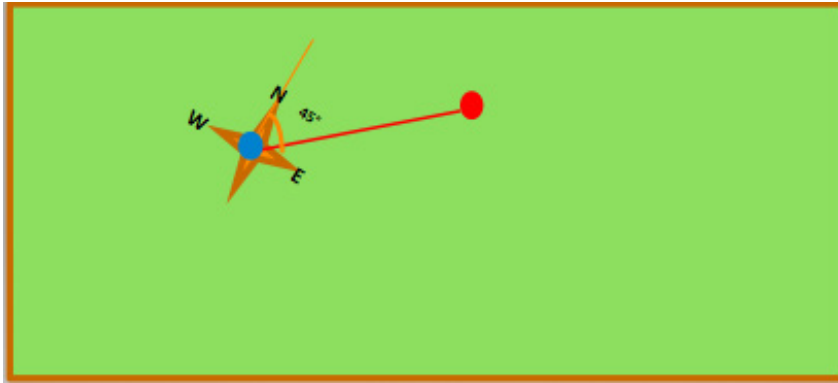


Figura 2

Con questa attività emerge la necessità di individuare in modo inequivocabile la *direzione* (l'angolo tra N e oggetto, in questo caso  $45^\circ$ ) e la distanza (per esempio il numero di passi) tra l'oggetto e il punto di partenza.

In merito alla misura in passi può esser affrontato l'aspetto legato alla differenza di lunghezza dei passi, misura soggettiva e poco precisa, e quindi la necessità di usare una misura convenzionale.

- Decidi di giocare alla caccia al tesoro con i tuoi amici. Il tesoro è nascosto nel punto chiaro (figura 3). Che informazioni fornisci perché il tesoro possa essere trovato con facilità?

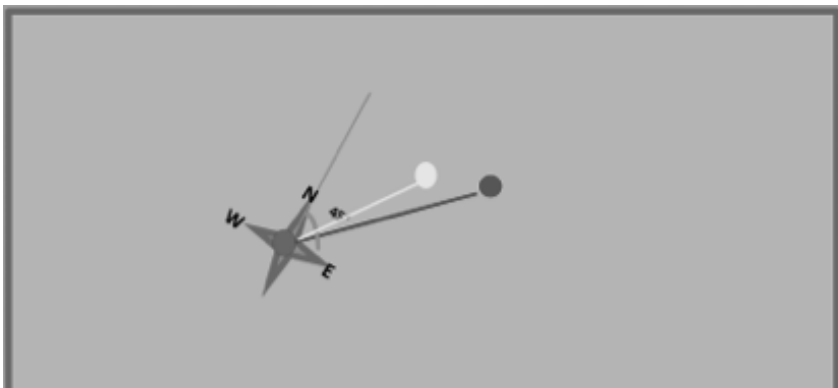


Figura 3

- Muoviti in direzione  $30^\circ$  di 10 metri (figura 4). Che cosa incontri? (oggetto scuro). E se ti muovi nella stessa direzione ma di 15 m, che cosa incontri? (oggetto chiaro)

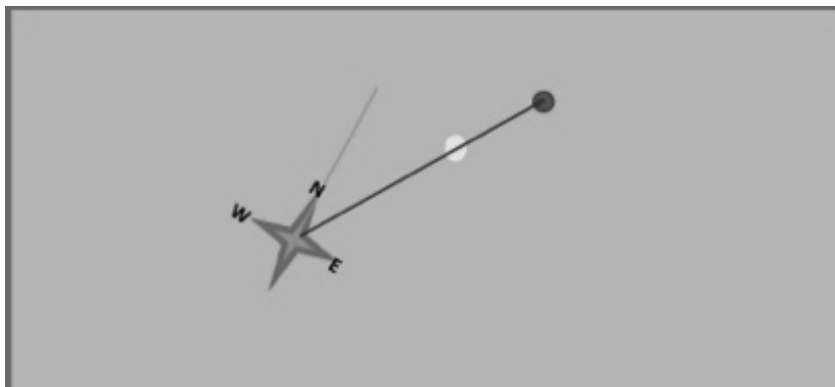


Figura 4

Questa attività dovrebbe servire a mettere in evidenza che seguendo una stessa direzione possono essere raggiunti punti diversi a seconda della distanza dal punto di partenza.

### Fase 3 - Muoversi sulle mappe

Si chiede di costruire una rosa dei venti su carta lucida in modo che possa essere utilizzata su carte e mappe. La costruzione può avvenire con l'uso di strumenti come il goniometro.

Si possono pensare esercizi di spostamento su carte e mappe della propria città immaginando di dover raggiungere la biblioteca, il parco giochi, il Comune, ...

Proponiamo di seguito alcune applicazioni.

#### Applicazione 1 – Orientarsi su una mappa

Questa è la mappa di Livorno Ferraris (figura 5).

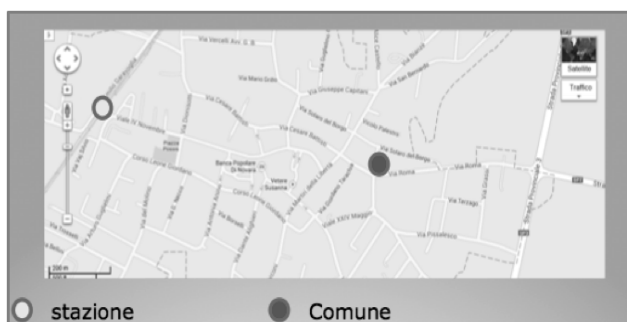


Figura 5. (da: <https://www.google.it/maps>)

Ci troviamo in Stazione. In quale direzione ci dobbiamo muovere per raggiungere il Comune? Di quanti metri?

Dopo aver localizzato il Nord con l'uso della bussola si orienta la mappa (figura 6) e si procede a tracciare la direzione e a ricavare angolo e distanza.



Figura 6

*Applicazione 2 - Giochi didattici digitali*

Un sito internet molto pratico e divertente in cui si trovano giochi digitali relativi a punti cardinali e rotte, per allenarsi, giocando, sui concetti trattati, è il seguente:  
<http://digilander.libero.it/sussidi.didattici/nordsud/nordsud.html>

*Applicazione 3 - Il radar*

Il radar emette onde radio che vengono riflesse dagli oggetti che incontrano e vengono poi registrate dallo stesso strumento. Grazie a esse è possibile dare l'esatta localizzazione di un oggetto.

*Esercizio*

(da: "School Mathematics Project", Zanichelli, Bologna, 1972)

Una stazione radar a Southampton avvista un oggetto in moto, lontano 30 km con azimut  $240^\circ$ . Fai un disegno in scala che indichi la sua posizione e trova le distanze (a) verso Sud e (b) verso Ovest rispetto a Southampton.

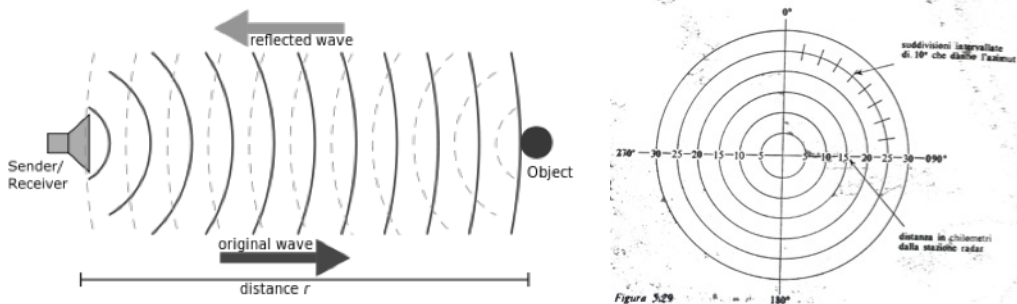


Figura 7

L'esercizio proposto può diventare dinamico se svolto con GeoGebra: risulta infatti possibile cambiare la distanza dell'oggetto dalla stazione radar calcolando in modo simultaneo e preciso, grazie al foglio di calcolo associato, le distanze dell'oggetto da Sud e da Ovest (figura 8).

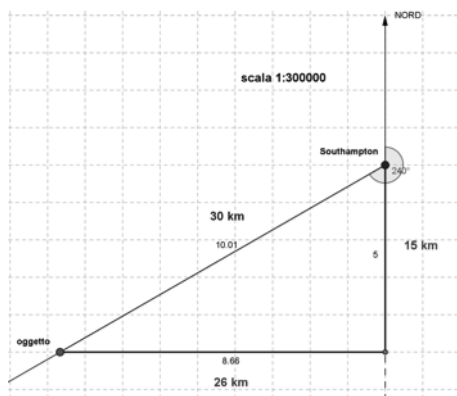


Figura 8. Esempio di videata con GeoGebra

*Esercizio*

(da: "School Mathematics Project", Zanichelli, Bologna, 1972)

Un pilota vuole volare da Londra a Manchester che, approssimativamente, si trova a 225 km a Nord e 200 km a Ovest di Londra. Per mezzo di un disegno in scala, fatto su carta quadrettata, trova (a) l'azimut secondo il quale deve volare e (b) per quanti chilometri deve volare.

**Fase 4 - Un approccio alla similitudine**

Ai ragazzi viene fornita una pianta in cui è indicata la rosa dei venti e un punto che localizza la posizione di origine (•).

*Consegna*

Muoviti di 5 cm nella direzione Est e di altri 5 cm nella direzione Nord. Indica con *A* il punto di arrivo e congiungilo con il punto di origine. Che cosa osservi? Ora spostati di 10 cm in direzione Est e altri 10 cm in direzione Nord. Chiamata *B* il nuovo punto e congiungilo con l'origine. Che cosa osservi?

In figura 9 è stato rappresentato ciò che dovrebbe emergere: *A* e *B* si trovano sulla stessa retta che congiunge i punti con l'origine.

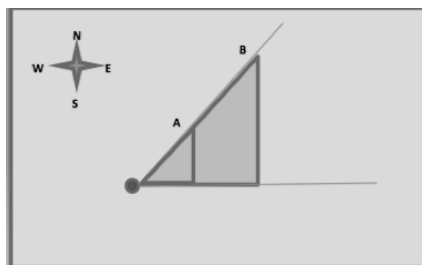



Figura 9

Si invitano quindi i ragazzi a ragionare sui due triangoli ottenuti, tabulando i dati relativi a lati e angoli per far emergere le proprietà caratterizzanti la similitudine.

	<p><b>OROLOGI, GIRANDOLE E PATTINATORI</b></p>
<p><b>Autori</b></p>	<p>S. Abbati, B. Baldi, S. Barbera, S. Paruzza, D. Sasso</p>
<p><b>A chi è rivolto</b></p>	<p>Scuola secondaria di primo grado</p>

**Descrizione dell'attività**

L'attività si articola in cinque fasi:

1. Il concetto di rotazione.
2. Esempi di attività da fare sul quaderno con strumenti da disegno.
3. Ricerca del centro di rotazione.
4. Rotazione come composizione di simmetrie.
5. Composizioni di rotazioni nell'arte e in natura.

**Fase 1 - Il concetto di rotazione**

Si chiede a un gruppo di ragazzi di ruotare allineati attorno a un compagno (si introduce, quindi, il concetto di rotazione dato il centro e l'angolo). Si somministrano alcune attività da fare sul quaderno con strumenti da disegno e si chiede di notare ciò che è variabile e ciò che è costante tra punti, raggi, archi, dimensioni e angoli.



Figura 10. (da: <http://www.ilfattoquotidiano.it/2013/11/12/pattinaggio>)

Si rappresenta poi la rotazione con GeoGebra (figura 11).

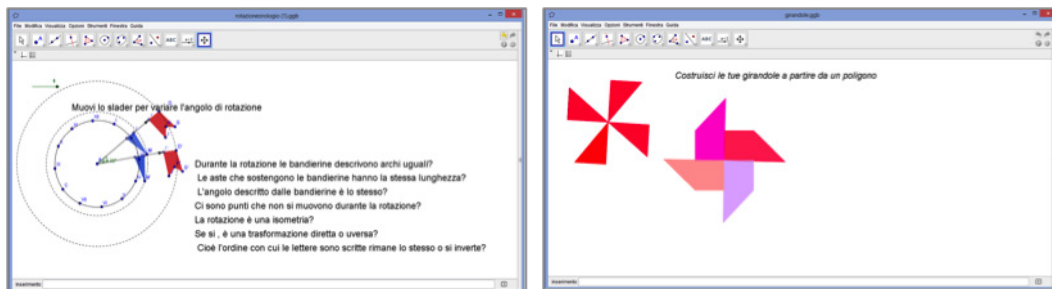
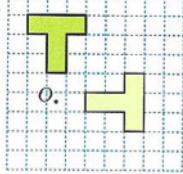
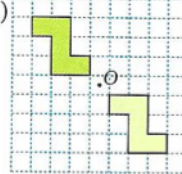


Figura 11. Esempi di videate di GeoGebra. File: rotazioneorologio.ggb e girandole.ggb

**Fase 2 - Esempi di attività da fare sul quaderno con strumenti da disegno**

Indica di quanti gradi è ruotata la figura e in quale verso rispetto al punto *O*.

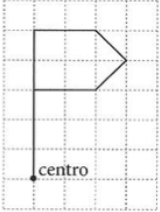
a) 

b) 

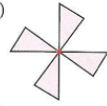
Ricopia la figura sul quaderno e fai una rotazione di


a) 90° in senso orario

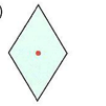
b) 45° in senso antiorario.



Di quale angolo bisogna far ruotare la figura perché combaci con la figura di partenza?

a) 

b) 

c) 


d) 

Figura 12. (da: "Contaci! Misure, spazio e figure", Volume 1, Zanichelli, Bologna, 2012)

Di quanti gradi devi far ruotare ciascuna figura di destra perché si sovrapponga a quella di sinistra (figura 13)? (Puoi aiutarti utilizzando un foglio di carta da lucido su cui ricopiare la figura di destra e uno spillo da puntare nel centro di rotazione).

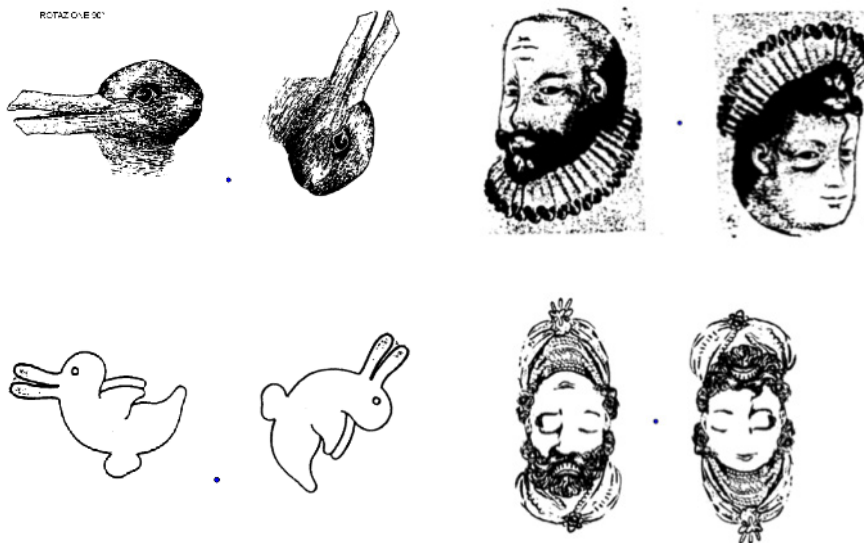


Figura 13. (da: [http://it.wikipedia.org/wiki/Illusione\\_ottica#Figure\\_ambigue](http://it.wikipedia.org/wiki/Illusione_ottica#Figure_ambigue))

### Fase 3 - Ricerca del centro di rotazione

Per arrivare a trovare il centro di rotazione si propone l'attività con GeoGebra (e/o sul quaderno) di costruzione degli assi di segmenti congiungenti punti corrispondenti (figura 14).

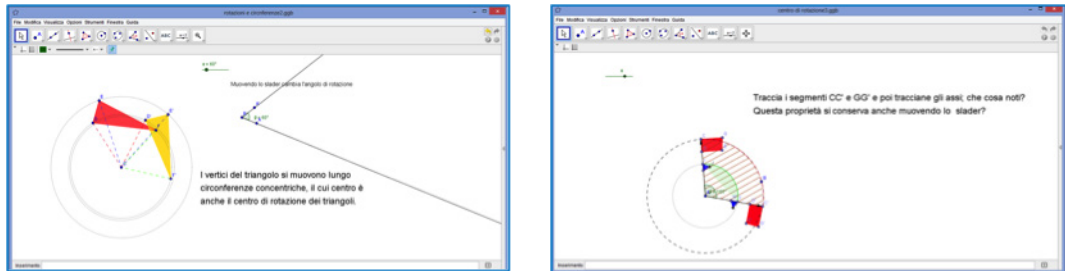


Figura 14. Esempi di videate di GeoGebra. File: rotazioniecirconferenze.ggb e centrodirotazione.ggb

Si può inoltre proporre la seguente immagine per la ricerca del centro di rotazione con GeoGebra (e/o sul quaderno) (figura 15).



Figura 15. Esempio di videata di GeoGebra. File: draghivolanti.ggb

### Fase 4 - Rotazione come composizione di simmetrie

Si compongono due simmetrie assiali, prima ad assi perpendicolari poi ad assi incidenti non perpendicolari, e si chiede di verificare che la composizione dia come risultato una rotazione (figura 16).

Si chiede di trovare il centro di rotazione e di misurare l'angolo di rotazione. Si chiede, inoltre di trovare, nelle precedenti composizioni di simmetrie, la relazione che intercorre tra l'angolo formato dagli assi e l'angolo di rotazione.

Le richieste precedenti possono essere proposte con GeoGebra e/o sul quaderno.

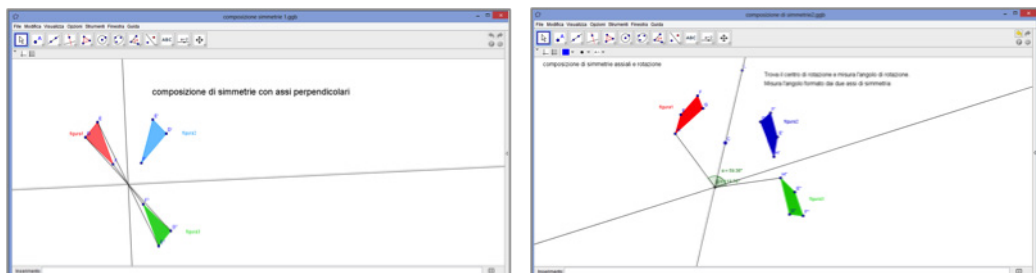


Figura 16. Esempi di videate di GeoGebra. File: composizionidisimmetrie1.ggb e composizionidisimmetrie3.ggb

**Fase 5 - Composizioni di rotazioni nell'arte e in natura**

L'ultima attività verte sulle composizioni di rotazioni nell'arte e in natura.

Si chiede agli studenti di trovare foto di opere d'arte e in natura che presentino composizioni di rotazioni e poi di individuarne il centro di rotazione e gli angoli di rotazione. Riportiamo alcune foto di esempio (figure 17 - 20) tratte da: <http://www.toscana.lafragola.kataweb.it/pisa/medie/fibonacci/story302176.html>



Figura 17. Rosone chiesa di San Pietro, Tuscania - Italia



Figura 18. Mosaico



Figura 19. Amolo



Figura 20. Stella marina

Si chiede agli studenti di realizzare un rosone/mosaico con GeoGebra (e/o sul quaderno) dopo aver individuato il motivo fondamentale (figura 21).

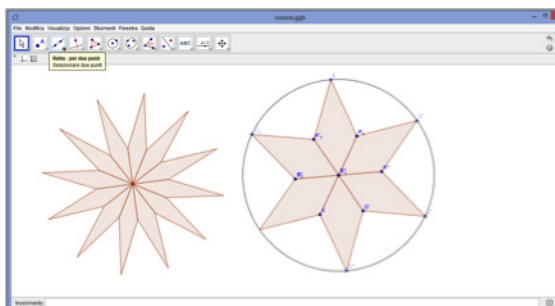



Figura 21. Esempio videata GeoGebra. File: rosone.ggb



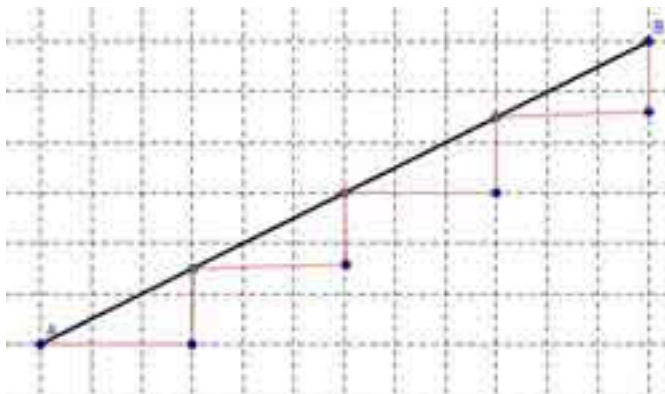
	<b>MA QUANTO SARÀ RIPIDO?</b>
<b>Autori</b>	L. Giustino, P. Laiolo, G. Trincherò, F. Turiano
<b>A chi è rivolto</b>	Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

### **Descrizione dell'attività**

La proposta ha l'obiettivo di contestualizzare il concetto di pendenza in una situazione reale: un'escursione in montagna.

Si suppone che gli studenti conoscano già il concetto di pendenza di un segmento o di una retta.

L'insegnante può richiamarlo facendo riferimento alla pendenza di una scala che abbia i gradini tutti uguali e può invitare gli studenti a osservare ed esprimersi sulla pendenza delle scale della scuola. In figura 22 portiamo l'esempio di una scala i cui gradini hanno l'alzata (altezza) di 15 cm e la pedata (profondità) di 30 cm. Il rapporto tra l'alzata dei gradini e la pedata è 15/30, quindi la pendenza di questa scala è del 50%.



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 22

La situazione ottimale sarebbe quella di realizzare questa attività presso una zona di montagna, magari durante un viaggio d'istruzione, per rendere operativo con l'esperienza il concetto teorico di pendenza e far emergere da essa gli approfondimenti auspicati.

L'attività si articola nelle seguenti 4 fasi.

#### **Fase 1 - Mappe e curve di livello**

A seconda della classe, questa fase può servire per riprendere oppure per acquisire i concetti di scala di riduzione e di curva di livello.

In un istituto tecnico potrebbe essere una buona occasione per collaborare con l'insegnante di topografia. È molto probabile che gli studenti di un primo biennio del secondo ciclo abbiano già fatto esperienza di scale di riduzione. In generale, potrebbe essere meno probabile che conoscano le curve di livello, ma può accadere che tra loro ci siano alcuni esperti camminatori o escursionisti.

In tal caso l'insegnante potrebbe favorire il loro coinvolgimento e la valorizzazione del loro sapere in un'ottica di *peer education* o *flipped classroom*<sup>2</sup>.

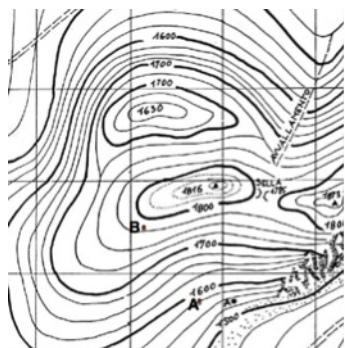


Figura 23

L'insegnante distribuisce la seguente mappa agli studenti (figura 23). Propone di osservare che cosa è indicato in essa e attiva una discussione attraverso domande stimolo.

Alcune domande potrebbero essere:

- Che cosa indicano secondo voi quei numeri sulla mappa? E quelle curve?
- Come possiamo distinguere su questa mappa una zona pianeggiante da una che ha dei rilievi collinari o montuosi?
- Possiamo anche distinguere rilievi che sono più ripidi di altri? Perché alcuni tratti di curva sono vicini e altri più distanti? Che cosa vuol dire ciò?

Le curve di livello (dette anche isoipse) uniscono punti di uguale quota di una zona e sono usate per rappresentare su un piano, come quello di una carta geografica, la variazione di quota di un rilievo montuoso. Ogni 100 metri di dislivello è tracciata una curva e, di solito, su di essa viene indicata la quota. A seconda della scala di riduzione della carta, è possibile trovare tracciate, con un tratto più sottile, le cosiddette curve intermedie, per indicare dislivelli di 25 o di 50 metri. L'interno di una curva rivolto verso una quota maggiore rappresenta un incremento di quota, quindi una zona emergente dal terreno, uno sperone. L'interno di una curva rivolto verso una quota minore rappresenta un decremento di quota, quindi un avvallamento o un canale (figura 24).

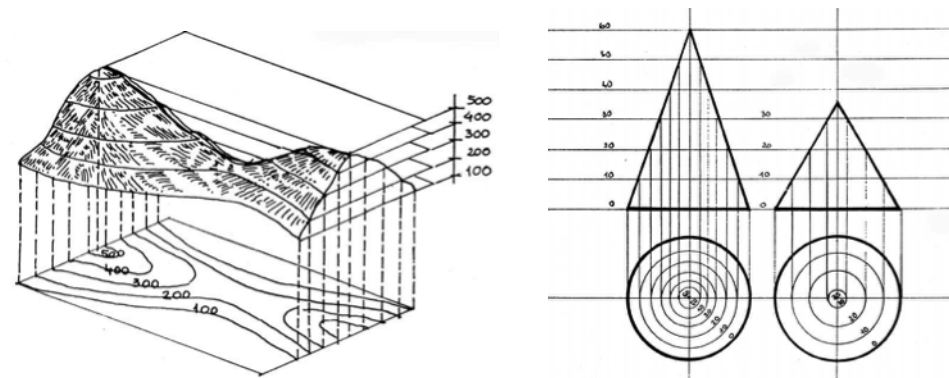


Figura 24. Esempi di curve di livello

## Fase 2 - Distanze su una mappa

In questa fase gli studenti dovranno stimare la distanza tra due punti situati in una zona montuosa indicati su una carta. Dalla osservazione della carta e dalla discussione emergerà la differenza rispetto alla situazione pianeggiante: in una zona montuosa la distanza tra due punti sulla carta deve tenere conto anche della variazione di quota registrata durante il percorso che congiunge i due punti.

<sup>2</sup> Alcune figure e proposte, che qui di seguito includiamo, sono state tratte dal seguente sito: <http://www.caisem.org/public/Didattica%5CTUTTI%5COrientamento%20in%20montagna.pdf>

*Primo passo*

L'insegnante, riferendosi ancora alla figura 23, chiede di stimare la distanza tra due punti che stanno sulla stessa quota.

In tal modo la classe riprende il concetto di fattore di scala di una mappa, alcune procedure sull'uso delle proporzioni e lavora sull'approssimazione della misura della lunghezza di un percorso curvilineo come sommatoria delle lunghezze delle diverse spezzate approssimanti il percorso.

*Secondo passo*

Nella fase precedente gli studenti hanno stimato la distanza tra due punti siti in una zona pianeggiante e hanno verificato che è stato sufficiente conoscere la scala di riduzione. L'insegnante chiede adesso di ricavare dalla carta una stima della distanza tra due punti nel caso in cui essi siano collocati a quote diverse in un'area non pianeggiante. Si aspetta che gli studenti facciano emergere la necessità di conoscere l'inclinazione o la pendenza del terreno. L'insegnante può cogliere l'occasione per far notare che la pendenza si può indicare:

- in gradi, come fanno gli arrampicatori per esprimere la pendenza di una parete rocciosa. Il grado misura l'ampiezza dell'angolo formato tra il terreno piano e la parete inclinata considerata. Si parla infatti di inclinazione, che a  $90^\circ$  corrisponde a una parete verticale perpendicolare al piano del terreno orizzontale;
- in percentuale, come vediamo sui cartelli stradali. Se dalla carta, tenuto conto del fattore di scala, misuriamo che la distanza orizzontale da  $A$  a  $B$  è pari a 2 km e il loro dislivello è pari a +700 m (senza discese/salite intermedie), allora la pendenza media del percorso sarà del 35%, ottenuta nel seguente modo:  $700 : 2000 = 0,35 = 35\%$

Caso 1: i due punti sono situati lungo un percorso a pendenza pressoché costante.

L'esperienza può essere realizzata anche dentro un edificio scolastico, per esempio lungo i gradini di una scala, misurando la distanza tra due punti  $A$  e  $B$  su due gradini (la cosiddetta lunghezza inclinata) e la distanza tra le proiezioni ortogonali  $A$  e  $B'$  dei due punti sul piano orizzontale, come nella figura 25. Lo studente osserva che sulla mappa vede i punti  $B$  e  $B'$  sovrapposti ma che nella realtà il percorso inclinato  $AB$  è più lungo del percorso orizzontale  $AB'$ . A questo punto l'insegnante può proporre situazioni che richiedano la modellizzazione con triangoli rettangoli aventi in comune uno stesso cateto (che modella il piano orizzontale) e diversa ipotenusa, la cui lunghezza varia di volta in volta al variare della sua inclinazione rispetto a tale cateto. La lunghezza inclinata  $AB$  sarà ricavata con il teorema di Pitagora.

Caso 2: i due punti sono situati lungo un percorso a pendenza variabile, come i punti  $A$  e  $D$  indicati nella figura 26. La lunghezza  $AD$  sarà ottenuta come somma delle lunghezze  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ .

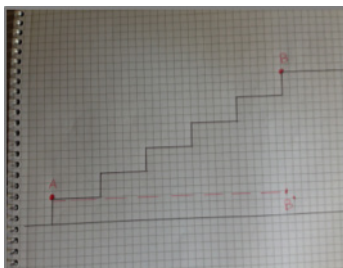


Figura 25

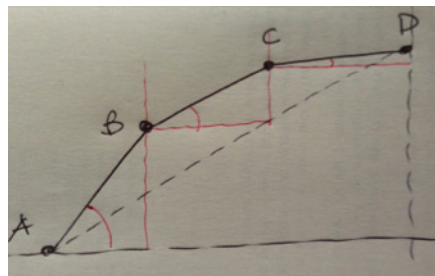


Figura 26

*Terzo passo*

L'insegnante chiede di stimare i tempi di percorrenza del tratto *AB*.

Un alpinista mediamente allenato e con uno zaino in spalla percorre in un'ora circa 3 curve di livello in salita, cioè circa 300m.

### **Fase 3 - Pendenza**

L'insegnante propone di prestare attenzione ai segnali stradali indicanti la pendenza di un tratto di strada e chiede di osservare la relazione tra angolo di inclinazione e pendenza espressa in percentuale (figura 27). È importante che gli studenti colgano che non vi è una dipendenza lineare tra le due grandezze.

A seconda della classe in cui viene proposta l'attività, si può far notare che la definizione di pendenza come tangente trigonometrica di un angolo dovrebbe far comprendere che la pendenza, in quanto appunto funzione trigonometrica, non è una funzione di tipo lineare.

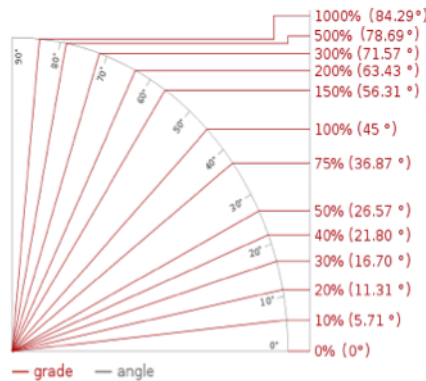


Figura 27. (da: [http://it.wikipedia.org/wiki/Pendenza\\_topografica](http://it.wikipedia.org/wiki/Pendenza_topografica))

*Attività 1 - Trovare l'inclinazione di una strada nota la percentuale della pendenza*

(da: <http://macosa.dima.unige.it/om/voci/peculi/peculi.btm>)

Abbiamo visto la pendenza come rapporto tra il dislivello superato e il corrispondente avanzamento in orizzontale.

Se la pendenza è del 14%, basta tracciare con riga e squadra un segmento orizzontale lungo 100 mm (10 cm) e uno verticale con un estremo in comune con esso lungo 14 mm e, congiunti gli altri estremi, misurare l'inclinazione del nuovo segmento con un goniometro. In questo caso (figura 28) si ottiene una pendenza 8°.

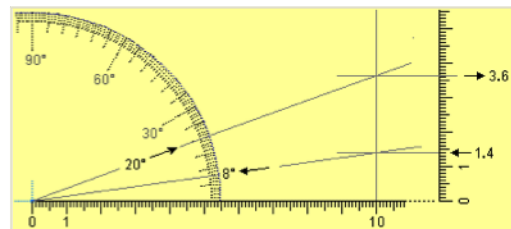


Figura 28

### **Fase 4 - Gita in montagna**

Si chiede di pianificare una gita in montagna con valutazione dei tempi del percorso. Sarebbe opportuno utilizzare una mappa del territorio di appartenenza.

*Esempio*

Valuta la distanza da Tures a Cima del Bosco (figura 29).

Quanto tempo impiegheremo a percorrere il sentiero che unisce Tures a Cima del Bosco?

Quale sarà il tratto con pendenza massima?



Figura 29. (da: “Sci alpinismo in Valle di Susa”, Fraternali Editore)

**Esempi di prove di verifica**

*Esempio 1*

(da: <http://macosa.dima.unige.it/schede/ps2/PS-2.htm>)

Da una cartina ricavo che una funicolare ha un percorso rettilineo che si sviluppa orizzontalmente per 850 m (è la lunghezza della sua proiezione su un piano orizzontale). Su una guida della città leggo che tale percorso ha una inclinazione costante di 25°. Utilizza opportunamente la carta millimetrata e una riga per determinare il dislivello superato dalla funicolare e la pendenza del percorso (figura 30). Spiega come hai proceduto.

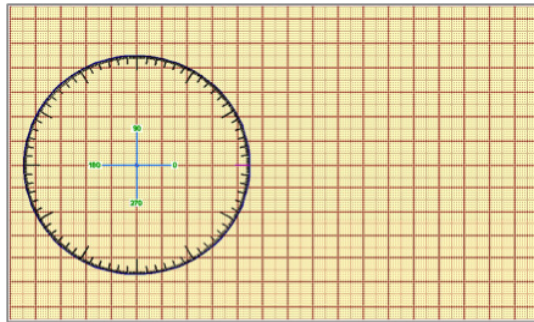


Figura 30

*Esempio 2*

Decidi di raggiungere in bicicletta la Basilica di Superga da Sassi. Cercando in rete trovi le seguenti indicazioni (figura 31).

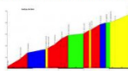
**Superga (Basilica di) da Sassi**  
 quota massima (m): 670  
 dislivello complessivo (m): 550  
 lunghezza (km): 5  
 difficoltà: ::  
 località partenza: Sassi (Torino, TO)  
 copertura della rete cellulare  
 • Vodafone: 90% di copertura  
 Contributore: bartolucci  
 Ultima revisione: 31/3/2013



Prodigiosa al cospetto della basilica

**accesso:**  
 da Corso Casale, Torino  
**note tecniche:**  
 Salita impegnativa, con un dislivello di 550 m in 5km, con pendenze quasi sempre oltre il 10% (sono pochi i tratti poco pendenti), lunghi tratti al 13% e altri al 18%. Una classica!  
**descrizione itinerario:**  
 La salita alla basilica si divide in tre tratti molto duri intervallati da altri meno impegnativi che permettono di rifilare un po'. Si parte subito al 13% e poi al 18%. Breve riposo, poi di nuovo al 12% e al 18% e ancora 11%. Tratto di riposo e poi ultimi 2km prima al 13% fino al bivio per Baldissero e poi al 10% nell'ultima rampa prima del piazzale della Basilica

**altre annotazioni:**  
 Salita percorsa più volte durante la Milano-Torino. Dal piazzale si ha una vista impareggiabile sia sulla pianura torinese, sulle alpi, sull'astigiano.



tratta da [www.salite.ch](http://www.salite.ch)

Figura 31

**CAPITOLO 2. L'OROLOGIO**

Commenta in gruppo tali dati forniti dal sito <http://www.gulliver.it/itinerario/57695/> per valutare la lunghezza del percorso, la difficoltà e i tempi di percorrenza per pianificare l'escursione.

*Esempio 3 - Testo di un problema assegnato all'esame di Stato (Esame di Stato a.s. 2007-2008 - Corso di ordinamento - Sessione ordinaria)*

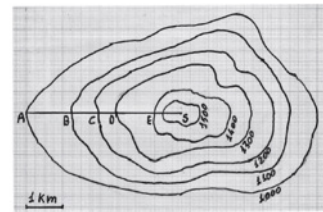
Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (figura 32) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



Figura 32

*Esempio 4 - Quesito D10 - PN 2010-2011, INVALSI*

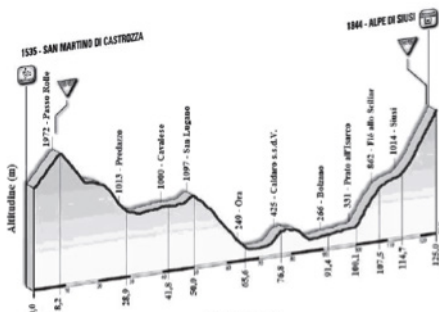
La figura che vedi riporta una rappresentazione semplificata delle linee di livello di una montagna. Le linee di livello uniscono tutti i punti che si trovano alla stessa altitudine. Nella figura il punto A è a 1000 metri di altitudine e la vetta S della montagna è a 1600 metri. Un escursionista va dal punto A al punto S seguendo il percorso indicato nel disegno dal segmento AS.



- a. Tra i tratti AB, BC, CD, DE, qual è il più ripido?  
 A.  AB      B.  BC  
 C.  CD      D.  DE
- b. Giustifica la tua risposta .....


*Esempio 5 - Quesito D19 - PN 2009-2010, INVALSI*

Questo è il profilo altimetrico della quinta tappa del Giro d'Italia 2009.



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	La tappa è lunga 125 km.		
b.	L'altitudine massima raggiunta è 1844 m.		
c.	Il dislivello tra Bolzano e l'arrivo (Alpe di Siusi) è 2110 m.		
d.	La distanza tra Bolzano e l'arrivo (Alpe di Siusi) è 33,6 km.		

	<b>DALL'ASTRONOMIA ALLA TRIGONOMETRIA</b> <b>Introduzione alla Trigonometria</b>
<b>Autori</b>	R. Ferro, F. Finoglio, M. C. Garassino, S. Labasin
<b>A chi è rivolto</b>	Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

### ***Riflessioni metodologiche***

Dalle Indicazioni Nazionali per i Licei (primo biennio, Geometria): “Saranno studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell’ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.” (secondo biennio, Relazioni e Funzioni): “[Lo studente] sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.”

In linea con le Indicazioni Nazionali la proposta richiede di concentrarsi maggiormente sulla risoluzione dei triangoli e non affrontare equazioni e disequazioni complesse ma limitarsi ad alcune formule (somma, sottrazione, duplicazione e bisezione). Si vogliono inoltre proporre le applicazioni della trigonometria ad altri settori disciplinari.

Il percorso scelto intende favorire la motivazione allo studio dei principali teoremi partendo da applicazioni significative ovvero da alcune delle domande degli astronomi e dei geografi che, per molti secoli, hanno determinato i progressi della trigonometria.

Tra le diverse questioni proposte, si suggerisce anche un approccio storico ripercorrendo alcuni dei problemi di astronomia sviluppati nella scuola matematica di Alessandria d’Egitto (calcolo del raggio della Terra o calcolo della distanza tra la Terra e la Luna) e alla base della nascita stessa della trigonometria.

### ***Descrizione dell’attività***

L’attività è articolata in tre fasi:

1. Spunto di partenza: costruzione di angoli.
2. Eratostene.
3. Applicazioni.

#### **Fase 1 - Spunto di partenza: costruzione di angoli**

##### *Attività con GeoGebra*

In una circonferenza costruire un orologio e calcolare l’ampiezza dell’angolo tra le lancette delle ore e dei minuti alle ore 1:00. Variando il raggio osservare che non varia l’ampiezza dell’angolo.

Dall’ora all’ombra: su carta millimetrata, con righello e goniometro oppure con l’uso di un software, si propone il problema dell’ombra (per esempio con la seguente situazione).

*Problema - Ombre e Angoli*

(da: [http://online.scuola.zanichelli.it/amaldi-files/Cap\\_3/Triangolazione\\_Cap3\\_Par6\\_Amaldi.pdf](http://online.scuola.zanichelli.it/amaldi-files/Cap_3/Triangolazione_Cap3_Par6_Amaldi.pdf))

Vogliamo conoscere l'altezza di un lampione riuscendo a misurare la sua ombra. Come possiamo fare?

Risoluzione: avendo a disposizione un'asta, per esempio di 80 cm, possiamo misurare l'ombra dell'asta e considerando la similitudine dei triangoli determinare l'altezza del lampione (figura 33).



Figura 33

E voi che ombra proiettereste con i dati del problema scelto?

Risoluzione: ciascuno studente può calcolare l'ombra conoscendo la propria altezza.

*Problema - In gita a Roma*

Una turista alta 1,68 m visita Piazza del Popolo, a Roma, dove si trova un obelisco. La turista misura la lunghezza dell'ombra dell'obelisco (compresa la sua base) che risulta 17,9 m. Subito dopo viene misurata l'ombra della turista, che risulta lunga 0,81 m.

Qual è l'altezza dell'obelisco (compresa la base su cui poggia)?

Si passa quindi alla definizione di  $\text{sen}x$ ,  $\text{cos}x$ ,  $\text{tan}x$  in un triangolo rettangolo (figura 34) per poi estendere il concetto di seno di un angolo a qualsiasi angolo e così passare alle funzioni goniometriche.

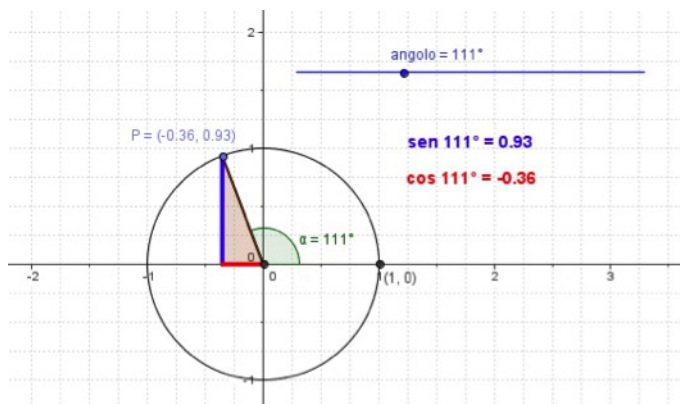


Figura 34. Esempio videata di GeoGebra



## Fase 2 - Eratostene

Si introduce il problema storico relativo alla misura del raggio terrestre.

Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene misurò il raggio della Terra ottenendo una misura che differiva solo del 5% dal valore attualmente conosciuto.

Eratostene sapeva che a Siene (città dell'antico Egitto esattamente sul tropico) a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole illumina il fondo dei pozzi (figura 35).

Nello stesso giorno fece misurare l'ombra di un obelisco ad Alessandria, città che si trovava sullo stesso meridiano a una distanza di 5000 stadi.

Stabilì che la direzione dei raggi solari formava un angolo di  $7^{\circ} 12'$  con la verticale, cioè  $1/50$  di un angolo giro. Pertanto la circonferenza della Terra doveva essere 50 volte la distanza tra Siene e Alessandria ovvero 39000 km.

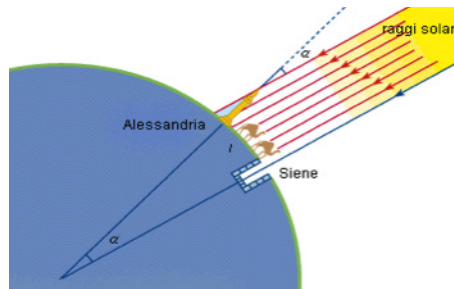


Figura 35. (da: <http://www.vialattea.net/eratostene/>)

Plinio il Vecchio la definì “impresa inaudita ma così semplice che è impossibile non credergli”.

Infatti questo risultato stupefacente è fondato su un modello matematico costituito da due sole conoscenze di tipo geometrico:

- due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali;
- gli archi di circonferenza sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.

### Esercizio

Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro in modo da toccarlo a un'altezza di 3,6 m. Quale angolo forma la scala con il pavimento? E con il muro?

## Fase 3 - Applicazioni

*Applicazione 1 - Misura della distanza da terra di un punto inaccessibile*

### Scheda insegnante

Si utilizza una semplice strumentazione per calcolare in modo indiretto l'altezza  $b$  della parete del corridoio della scuola.

Si adopera un puntatore dotato di un mirino (un tubo di plastica) che permette di misurare l'altezza in gradi di una posizione rispetto all'orizzontale.

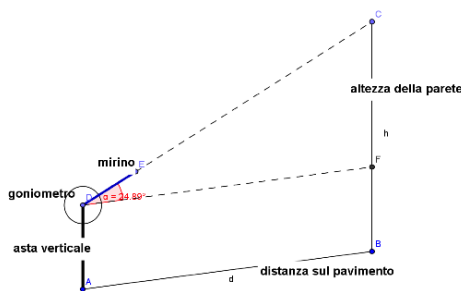
**Materiali:** asta verticale metallica fissata su un supporto, goniometro, viti, tubo di plastica.

**Come si usa:** si prende come riferimento lo spigolo tra due pareti e si misura sul pavimento la distanza  $d$  tra la posizione dell'asta verticale e lo spigolo.

Dopo aver fissato il goniometro sull'estremità superiore dell'asta, si punta con il mirino l'estremo in alto dello spigolo e si legge l'angolo  $\alpha$  che il puntatore indica sul goniometro.

Se  $l$  rappresenta la lunghezza dell'asta, l'altezza della parete si calcola attraverso l'uguaglianza

$$\frac{h-l}{d} = \tan \alpha$$



*Applicazione 2 - Risoluzione di triangoli qualsiasi*

Attività con GeoGebra: teorema della corda, teorema dei seni, area di un triangolo qualsiasi, teorema del coseno.

**Scheda studente**

<b>Goniometria e triangoli</b>
<b>Che cosa imparerai:</b> i principali teoremi relativi alla risoluzione dei triangoli.
<b>Che cosa devi sapere:</b> relazione tra gli angoli in una circonferenza, relazione tra i lati in un triangolo.
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apri GeoGebra.</li> <li>• Disegna una circonferenza di centro <math>C</math> e raggio <math>r</math> a tuo piacere.</li> <li>• Disegna una corda <math>AB</math> sulla circonferenza.</li> <li>• Disegna due punti <math>D, E</math> sulla circonferenza, da parti opposte rispetto alla corda <math>AB</math>.</li> <li>• Disegna i segmenti <math>AD, BD, AE, BE</math>.</li> <li>• Disegna gli angoli <math>ADB</math> e <math>AEB</math> (un angolo si designa indicando tre punti che lo individuano, il vertice deve essere necessariamente il secondo. Per l'ordine degli altri due ricorda che GeoGebra lavora ruotando in senso antiorario).</li> <li>• Muovi il punto <math>D</math>. Come varia l'angolo <math>ADB</math>? .....</li> <li>• Muovi il punto <math>E</math>. Come varia l'angolo <math>AEB</math>? .....</li> <li>• Esiste una relazione tra gli angoli <math>ADB</math> e <math>AEB</math>? .....</li> </ul>
<b>Facciamo il punto</b>
Angoli alla circonferenza che sottendono la stessa corda sono ..... oppure ..... ..... quindi la funzione seno a essi relativa assume .....
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dal menu File, scegli Nuovo.</li> <li>• Disegna una circonferenza di centro <math>C</math> e raggio <math>r</math> a tuo piacere e una corda <math>AB</math>.</li> <li>• Dall'estremo <math>A</math> conduci la retta passante per il centro <math>C</math> e sia <math>D</math> l'intersezione con la circonferenza all'estremo opposto. Il segmento <math>AD</math> è ..... e misura .....</li> <li>• Disegna il segmento <math>BD</math>. Quanto misura l'angolo <math>ABD</math>? ..... Perché? .....</li> <li>• Il triangolo <math>ABD</math> è pertanto .....</li> <li>• Puoi quindi applicare al triangolo <math>ABD</math> i teoremi noti. Lega in una relazione <math>AB, AD</math> e l'angolo <math>D</math>. .....</li> <li>• Verifica la tua congettura: richiedi la misura del segmento <math>AB</math> e del segmento <math>AD</math>. Nella barra d'inserimento scrivi la formula: <math>g = \text{distanza } AD * \dots</math> (funzione goniometrica da te utilizzata). Risultano uguali i valori di <math>g</math> e la distanza <math>AB</math>?</li> <li>• Per quanto visto prima che cosa cambia se prendi un punto <math>E</math> sulla circonferenza e nella formula da te trovata sostituisci l'angolo <math>ADB</math> con l'angolo <math>AEB</math>?.....</li> </ul>

**Facciamo il punto - Teorema della corda**

La corda di una circonferenza di raggio  $r$  ha misura pari al prodotto del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza sottesi dalla corda.

Risolvi i seguenti esercizi sul tuo quaderno.

1. Determina la lunghezza di una corda  $AB$  di una circonferenza di raggio  $r$ , sapendo che  $\cos \alpha = 3/5$ , essendo  $\alpha$  uno degli angoli alla circonferenza che insistono sugli archi sottesi alla corda.
2. Considera una circonferenza di raggio  $r$ . Determina le misure degli angoli alla circonferenza che insistono sugli archi sottesi a una corda  $AB$  di misura  $\sqrt{3}$ .

Questa volta la costruzione è incompleta, dovrai finirla tu! È sufficiente lavorare sul quaderno, ma fai come preferisci.

- Disegna un triangolo  $ABC$ .
- Disegna la circonferenza circoscritta al triangolo (il centro si determina come intersezione di due ..... e il raggio è pari alla lunghezza .....)
- Applica il teorema della corda alla corda  $AB$ : .....
- Applica il teorema della corda alla corda  $BC$ : .....
- Applica il teorema della corda alla corda  $AC$ : .....
- Ricava da ciascuna delle tre il valore di  $2r$ : .....
- Che cosa puoi concludere? .....

**Facciamo il punto - Teorema del seno**

In un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo a esso opposto è costante ed è uguale al diametro della circonferenza circoscritta.

Risolvi il seguente esercizio sul tuo quaderno.

1. In un triangolo  $ABC$  risulta  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$  e  $BC = 5$  m. Determina la misura di  $AC$ .

**Area di un triangolo**

L'area di un triangolo  $ABC$  di cui sono noti due lati  $AC$  e  $AB$  e l'angolo compreso  $\alpha$ , si può ottenere come semiprodotto tra i due lati e il seno dell'angolo compreso.

Individua una strategia per giungere a questa relazione.

*Applicazione 3 - Quota di un elicottero: problema di triangolazione*

Due osservatori, posti a 90 m di distanza, vedono nello stesso istante un elicottero sotto due angoli di elevazione rispettivamente di  $25^\circ$  e di  $40^\circ$ . Supponendo che l'elicottero sia perpendicolare alla retta che passa per i due punti in cui sono situati gli osservatori, a quale altezza da terra si trova l'elicottero? (figura 36)

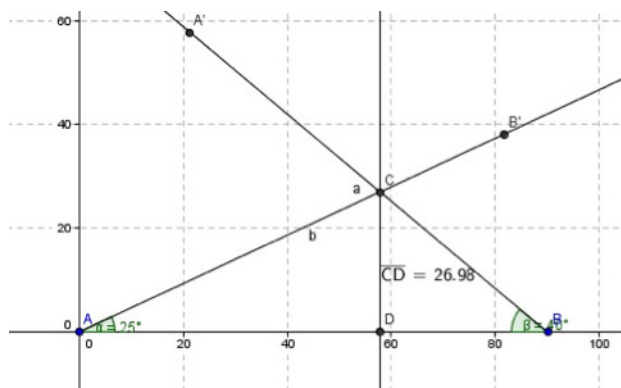


Figura 36

## CAPITOLO 2. L'OROLOGIO

### Applicazione 4 - Problema di Ottica

(da: "Lenti & occhiali, un manuale di ottica oftalmica", AA.VV., Medical Books (Problema di ottica))

Un sistema molto usato dagli ottici come misura degli angoli piccoli è quello delle diottrie prismatiche.

Consideriamo l'angolo in figura. Alla distanza di 100 cm dal vertice  $O$  tracciamo il segmento  $AH$ , normale a  $OH$ : la misura in centimetri di questo segmento mi dà la misura dell'angolo in diottrie prismatiche.

Considera la figura 37 relativa a 11 diottrie prismatiche e determina la misura dell'angolo in gradi.

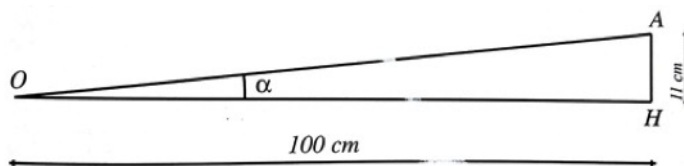


Figura 37

Poichè si ha  $\tan\alpha = \frac{AH}{OH} = 0,11$  si ha  $\alpha = 6,28^\circ$ .

### Applicazione 5 - Risoluzione di triangoli in vari casi

- Essendo noti due lati e l'angolo tra essi compresi  
Soluzione unica per il Primo criterio di congruenza dei triangoli.

Esempio (figura 38)

$v = 24$  km/h, costante

tratto  $BC$ :  $t = 20'$

tratto  $AC$ :  $t = 15'$

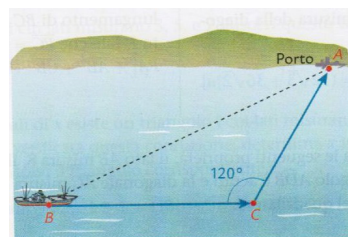


Figura 38. (da: L. Sasso, "Nuova Matematica a colori" - vol. 4, Petrini, Novara 2012)

- Essendo noti un lato e due angoli  
Soluzione unica per il Secondo criterio generalizzato di congruenza dei triangoli.  
Esempio: quota dell'elicottero
- Essendo note le misure dei tre lati  
Se le misure soddisfano le disuguaglianze triangolari, la soluzione è unica per il Terzo criterio di congruenza dei triangoli.
- Essendo noti due lati e un angolo non compreso tra essi.  
In questo caso il problema può avere nessuna, una o due soluzioni!

Esempio

Considera un triangolo  $ABC$  con  $c = 6$  e  $\alpha = 30^\circ$  (figura 39). Discuti al variare della misura del lato  $a$  nell'intervallo  $[3, 8]$  la risoluzione del triangolo.

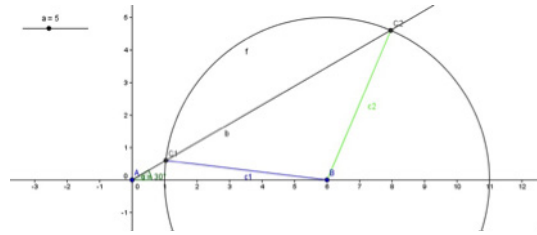


Figura 39

Applicazione 6 - Problema di topografia

([http://www.istituto25aprile.gov.it/documenti/materiale\\_didattico/Compititopografia\\_vacanze\\_estive3G.pdf](http://www.istituto25aprile.gov.it/documenti/materiale_didattico/Compititopografia_vacanze_estive3G.pdf))

Un appezzamento di terreno quadrilatero  $ABCD$  è stato rilevato andando a misurare:

$AB = 345,65$  m       $AD = 308,68$  m       $CD = 195,44$  m

$\alpha = 95,3852$  gon       $\gamma = 115,5600$  gon

Rappresentare in scala opportuna l'appezzamento e calcolarne il perimetro e la superficie.

Il proprietario del terreno vuole far passare in mezzo al terreno un sentiero che partendo dal vertice  $B$  sia perpendicolare al lato  $AD$  (figura 40). Calcolare la superficie delle due parti in cui l'appezzamento risulta suddiviso dal sentiero. (Si consideri il sentiero di larghezza nulla)

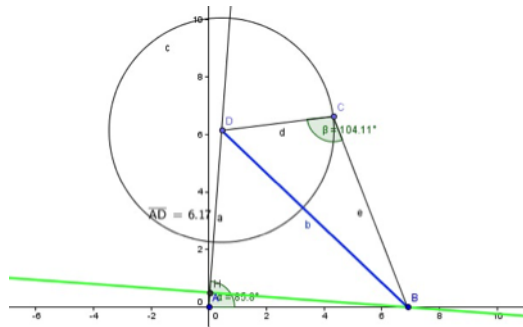


Figura 40

Applicazione 7 - Problema di Astronomia

Valutare la distanza Terra-Luna (figura 41).

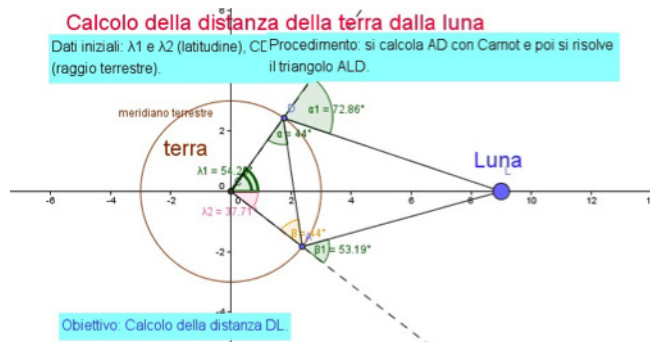



Figura 41

	<b>LO SPETTACOLO DI NATALE</b>
<b>Autori</b>	S. Beltramino, P. Curretti, C. Idrofano, L. Poli
<b>A chi è rivolto</b>	Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

**Riflessioni metodologiche**

In questa attività si è pensato all'uso della tecnologia per esplorare, congetturare, verificare e per costruire. Nel problema proposto sono presenti tutte queste fasi, ciascuna di esse può essere affrontata dagli studenti anche senza ricorrere alla tecnologia, ma semplicemente facendo riferimento al proprio corpo o alle proprie conoscenze.

**Descrizione dell'attività**

Il problema proposto è il seguente: Simone è l'addetto alle luci dello spettacolo di Natale. Con l'occhio di bue che ha a disposizione deve illuminare l'intero palcoscenico facendo attenzione a non illuminare nient'altro. Si sa che il cono di luce è di  $35^\circ$ .

Apri il file di GeoGebra: trovi disegnato il segmento  $AB$  che rappresenta il palcoscenico e il punto  $C$ , in cui Simone posiziona l'occhio di bue.

Aiuta Simone a trovare, se esistono, altri punti in cui può posizionare l'occhio di bue, con lo stesso cono di luce, in modo che continui a illuminare tutto e solo il palcoscenico.

Il file di GeoGebra si presenta come in figura 42.

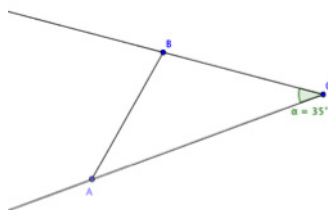


Figura 42. Videata iniziale di GeoGebra

Come detto, sicuramente il problema potrebbe essere risolto coinvolgendo il corpo anziché la tecnologia: se, per esempio, chiediamo ai ragazzi di rappresentare il cono di luce con un braccio teso quasi immediato per gli allievi spostarsi su di una circonferenza.

Qui, con l'uso di GeoGebra, lo studente può imporre che l'ampiezza dell'angolo sia fissa e valga  $35^\circ$  e muovere il punto  $C$  per cercare per quali posizioni i punti  $A$  e  $B$  appartengono ai lati dell'angolo (ovviamente farà una valutazione "a occhio") oppure può imporre di costruire un angolo di vertice  $C$  i cui lati passino per  $A$  e per  $B$  e chiedere per quali posizioni di  $C$  la misura di tale angolo corrisponde a  $35^\circ$ .

Verranno così accettate per buone le prime due posizioni di figura 43 e scartate le figure simili alla terza posizione.

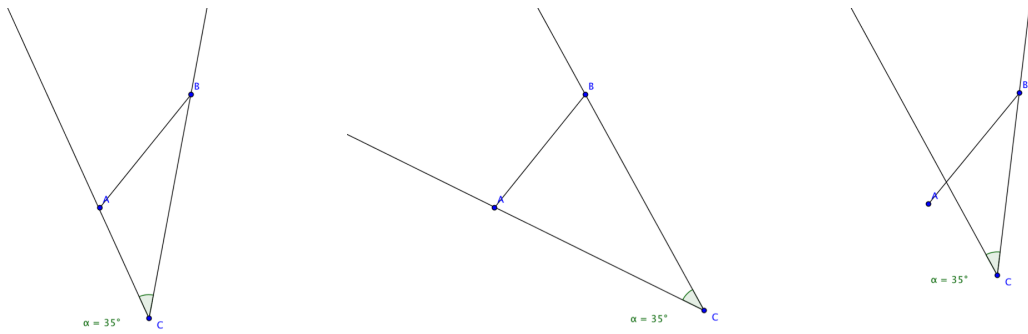


Figura 43. Esempi videate GeoGebra

Nella seconda fase dell'attività si può portare lo studente a congetturare. Dopo aver individuato alcuni punti, come in figura 44, è possibile chiedersi se i punti che possono andar bene a Simone sono i punti lungo una circonferenza.

Si dovrebbe riuscire a rispondere a domande come:

- Saranno tutti i punti della circonferenza?
- Esisteranno dei punti della circonferenza che non vanno bene?
- Esisteranno dei punti che invece vanno bene ma che non appartengono alla circonferenza?

Per la verifica è possibile disegnare una circonferenza (con il comando *Conica per cinque punti*) e vincolare il punto *C* alla circonferenza (figura 45).

Muovendo *C* sulla circonferenza l'angolo sarà sempre di 35°? E se *C* appartiene all'arco segnato con la freccia? Che cosa succede?

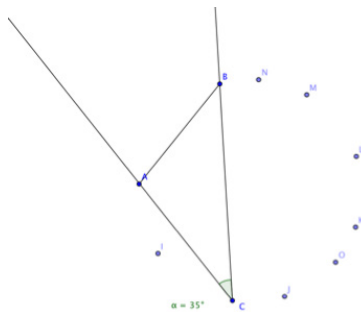


Figura 44

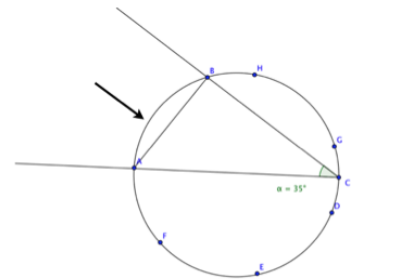


Figura 45

Successivamente è possibile portare lo studente a costruire il luogo dei punti come unione di due archi di circonferenza, individuando il centro e il raggio.

Anche in questo caso è possibile chiedere agli allievi se la circonferenza esiste sempre, se il centro e il raggio sono unici o no. Si procede così a un avvio di dimostrazione.

Infine si potrebbe generalizzare la situazione chiedendosi se la misura dell'angolo di 35° abbia influenzato in qualche modo la soluzione trovata. Sarebbero cambiate le risposte se la misura dell'angolo fosse stata di 40°? E se fosse un valore generico  $\beta$ , con  $\beta$  minore di 180°?

## Riflessioni sulla valutazione. L'angolo delle prove INVALSI e i nostri suggerimenti

*a cura di S. Beltramino*

Nella tabella vengono riportati alcuni quesiti INVALSI relativi al concetto di angolo o alla sua misurazione. I quesiti contrassegnati con un asterisco sono quelli presi in considerazione in questo capitolo.

Anno	Livello	N. quesito	Scopo
2009	08	D8*	Somma degli angoli interni di un triangolo
2010	08	D12*	Triangolo rettangolo
2010	02	D5	Lettura orologio
2010	05	D8	Misura di un angolo con l'uso del goniometro
2010	05	D32	Confronto tra angoli
2010	06	D12	Misura degli angoli e operazioni con gli stessi
2010	06	D14	Misura di un angolo con l'uso del goniometro
2011	05	D10	Orologio e angoli delle lancette
2011	06	D16	Orologio e angoli delle lancette
2011	10	D3*	Disuguaglianza triangolare
2011	10	D9*	Geometria solida: relazioni tra lati e angoli
2011	10	D17*	Assi di simmetria in un parallelogramma
2011	10	D18*	Calcolo di aree con l'equiscomponibilità
2011	10	D30*	Simmetria centrale e assiale
2012	02	D19	Lettura orologio
2012	10	D3*	Riconoscere il concetto di altezza di un triangolo e di distanza tra due rette
2012	10	D8*	Osservare una figura tridimensionale per riconoscere un triangolo equilatero, verificando che lo è
2012	10	D13*	Angoli al centro e angoli alla circonferenza
2012	10	D24*	Teorema di Pitagora applicato a situazioni reali
2012	10	D27*	Conversione di registro da verbale a numerico e grafico
2012	10	D29*	Disuguaglianza triangolare
2013	10	D5*	Distinzione tra mediana e altezza
2013	10	D8*	Riconoscere il grafico di una retta, nota che sia la sua equazione
2013	10	D17*	Calcolare l'area di una figura in posizione non standard
2013	10	D21*	Riconoscere l'equazione di una retta dato il suo grafico
2013	10	D27*	Riconoscere il teorema di Pitagora e calcolare un'area
2012	10	D29*	Similitudini
2014	05	D14	Somma di angoli
2014	08	D18	Costruzione di un triangolo rettangolo inscritto in una circonferenza
2014	08	D26	Rotazione di una figura
2014	10	D23	Angoli interni di un triangolo e loro somma
2014	10	D26	Riconoscere una trasformazione piana (rotazione)



Infine il quesito preso dagli “Esempi di prove per la scuola secondaria di secondo grado”.

Anno	Livello	Numero quesito	Scopo
2011	10	D21*	Piano cartesiano e rotazioni

	<b>Autori</b>	A. Berra, M. Dalé, L. Genoni
---	---------------	------------------------------

### **Premessa**

L'analisi delle prove INVALSI ha posto in evidenza come non siano presenti in modo significativo item espliciti rispetto al concetto di angolo. Il concetto di angolo, infatti, ricorre o come prerequisito per la soluzione di altri tipi di richieste o come soggetto di una domanda esplicita, ma di solito limitata alla individuazione di un valore.

La lettura del “Quadro di Riferimento di matematica” dell'INVALSI in Spazio e Figure, relativamente al tema in oggetto e ai processi matematici più in generale, consentirebbe probabilmente una maggiore attenzione all'angolo.

Si riporta di seguito la parte relativa ai contenuti matematici e ai processi.

### **Quadro di Riferimento di matematica**

(da: INVALSI, *Quadro di Riferimento per la prova di matematica*, 2 marzo 2011)

Contenuti matematici. *Spazio e figure*

Mappe, piantine e orientamento. Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato, ...). *I principali enti geometrici*. Angoli e loro ampiezza. Rette incidenti, parallele e perpendicolari. Verticalità, orizzontalità. Uguaglianza di figure. Equivalenza tra figure. Composizione e scomposizione di figure. Elementi di semplici figure dello spazio (vertici, spigoli, ...). Unità di misure di lunghezze, aree e volumi.

Perimetro di poligoni. Aree di poligoni. Somma degli angoli di un triangolo e di poligoni. Teorema di Pitagora. Traslazioni, rotazioni e simmetrie. Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. *Angoli al centro e angoli alla circonferenza*. Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide. Sistema di riferimento cartesiano. Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche.

Processi

1. Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture, ...).
2. Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, ...).
3. Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...).
4. Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come per esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, ...).

5. Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura, ...).
6. Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...).
7. Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).
8. Saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).

Come si evince dalla lettura, sono presenti nei contenuti matematici riferimenti agli angoli, sia espliciti (angoli e loro ampiezza, angoli al centro e angoli alla circonferenza) sia impliciti (rotazioni).

L'analisi dei processi richiesti per la soluzione di quesiti relativi agli angoli evidenzia che possono essere coinvolti vari processi, di fatto presenti, ma non prevalenti relativamente agli angoli.

Sono stati analizzati altri documenti necessari per l'attività del docente nel primo biennio della scuola secondaria superiore, che contengono gli elementi fondamentali anche per le prove INVALSI: Indicazioni Nazionali per i Licei e Linee guida per Istituti Tecnici e Professionali e scheda per la certificazione delle competenze.

### **Indicazioni Nazionali per i Licei**

*Liceo Scientifico.* “Geometria. Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica. [...] Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. [...] Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.”

In questo contesto l'angolo non viene citato minimamente, pur proponendo lo studio di alcuni elementi di trigonometria. Le indicazioni dell'INVALSI prestano in questo caso maggiore attenzione.

### **Linee Guida per Istituti Tecnici e Professionali**

La situazione non cambia per gli Istituti Tecnici e Professionali, anche se la proposta di ciò che gli studenti devono apprendere è definita in modo più chiaro indicando le competenze all'inizio e con l'indicazione delle conoscenze e delle abilità che gli studenti devono acquisire.

*Conoscenze Geometria.* Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio. Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà.

*Abilità Geometria.* Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.

Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.

Si analizza infine il documento relativo alle competenze che gli studenti devono acquisire al termine del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado.

### **Certificato delle competenze di base acquisite nell'assolvimento dell'obbligo di istruzione**

*(da: Modello certificazione delle competenze D.M.9/2010)*

La certificazione delle competenze per l'ASSE MATEMATICO prevede:

- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica
- Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni
- Individuare le strategie appropriate per la risoluzione di problemi
- Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

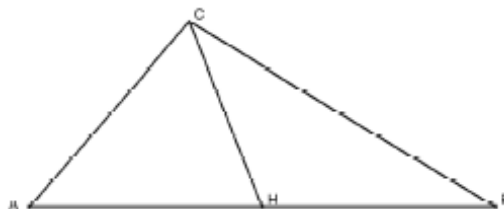
In questo contesto l'angolo può sicuramente rientrare in quesiti e esercizi per l'accertamento delle competenze, ma probabilmente sempre come strumento e non come soggetto.

### ***Prove INVALSI***

Si riportano di seguito i testi delle prove INVALSI con un breve commento. La scelta per la proposta dei quesiti è cronologica (dal 2013 alle proposte di prova), per sottolineare come in ogni anno sia emerso il tema dell'angolo. L'organizzazione per temi avrebbe fatto perdere di vista le scelte operate dagli estensori dei quesiti nei diversi anni.

**QUESITO D5 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

$H$  è il punto medio del lato  $AB$  del triangolo  $ABC$ .



I triangoli  $AHC$  e  $HBC$  hanno la stessa area perché:

- A.  la distanza di  $C$  da  $AB$  è la stessa nei due triangoli e  $AH = HB$
- B.  la mediana  $CH$  divide il triangolo in due triangoli congruenti
- C.  hanno come altezza comune  $CH$  e le relative basi sono della stessa lunghezza
- D.  i triangoli  $CHA$  e  $CHB$  sono tutti e due triangoli isosceli

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Caratteristiche		Descrizione e commento																																	
<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b> Riconoscere, tra diverse argomentazioni, quella corretta.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Fondamenti della geometria euclidea del piano. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Manc. Resp.</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>4,0</td> <td><b>22,7</b></td> <td>18,8</td> <td>46,4</td> <td>8,1</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>4,0</td> <td><b>29,2</b></td> <td>16,3</td> <td>44,8</td> <td>5,7</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>3,7</td> <td><b>18,3</b></td> <td>20,7</td> <td>49,3</td> <td>8,0</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>4,6</td> <td><b>17,1</b></td> <td>20,7</td> <td>45,0</td> <td>12,6</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Macroprocesso:</b> Utilizzare</p>			Manc. Resp.	A	B	C	D	G	4,0	<b>22,7</b>	18,8	46,4	8,1	L	4,0	<b>29,2</b>	16,3	44,8	5,7	T	3,7	<b>18,3</b>	20,7	49,3	8,0	P	4,6	<b>17,1</b>	20,7	45,0	12,6	<p><b>Risposta corretta:</b> A</p> <p><b>Commento.</b></p> <p>Per rispondere correttamente è sufficiente che gli studenti conoscano la formula per il calcolo dell'area di un triangolo e sappiano identificare la misura dell'altezza relativa a una base come la distanza tra il vertice da cui è condotta l'altezza e il lato opposto a tale vertice.</p> <p>Il distrattore C può essere molto attrattivo per studenti che leggono con poca attenzione: lo studente, infatti, deve riconoscere che <math>CH</math> non è in generale altezza ma mediana e quindi concludere che l'affermazione contenuta nell'opzione C è falsa.</p>			
	Manc. Resp.	A	B	C	D																														
G	4,0	<b>22,7</b>	18,8	46,4	8,1																														
L	4,0	<b>29,2</b>	16,3	44,8	5,7																														
T	3,7	<b>18,3</b>	20,7	49,3	8,0																														
P	4,6	<b>17,1</b>	20,7	45,0	12,6																														

La domanda richiede di distinguere tra altezza, perpendicolare e mediana di un triangolo. Il ruolo dell'angolo è molto marginale e implicito nel concetto di altezza come segmento di perpendicolare mandata da un vertice al lato opposto.

**QUESITO D8 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

Considera la funzione definita da:  $y = 3x + 1$ .

a. Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?

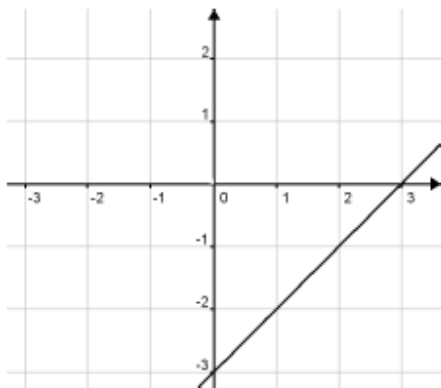


Grafico 1

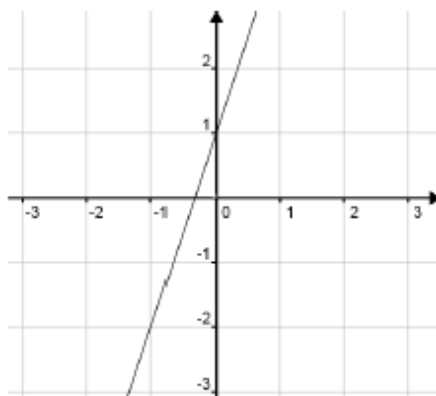


Grafico 2

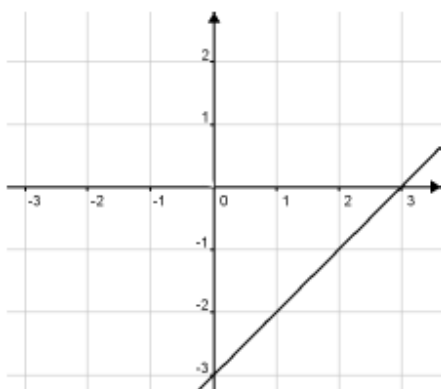


Grafico 3

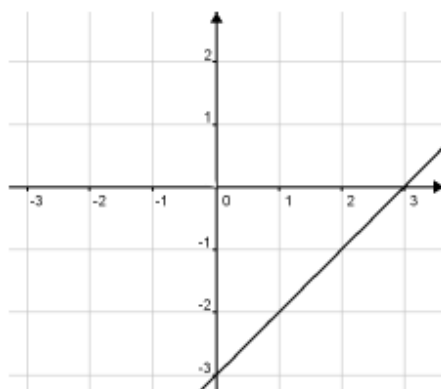


Grafico 4

- A.  Il grafico 1
- B.  Il grafico 2
- C.  Il grafico 3
- D.  Il grafico 4

b. Quale valore di  $y$  si ottiene per  $x = 0$ ? .....

c. Per quale valore di  $x$  si ottiene  $y = 0$ ? .....

d. Per quali valori di  $x$  la  $y$  assume valori positivi? .....

**GUIDA ALLA LETTURA**

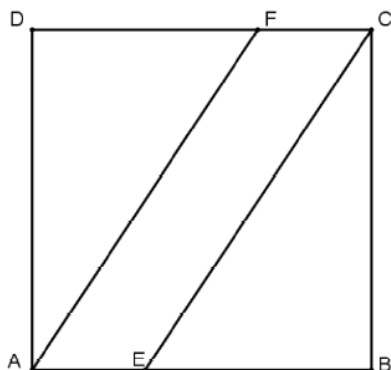
(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Caratteristiche	Descrizione e commento																																																																																															
<p><b>Ambito prevalente.</b> Relazioni e Funzioni.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b></p> <p>a. Identificare pendenza (coefficiente angolare) e intercetta (ordinata all'origine) in un grafico.</p> <p>b. Calcolare il valore di una funzione in un punto.</p> <p>c. Calcolare il valore di una funzione in un punto (come processo inverso attraverso la soluzione di un'equazione) – determinare lo zero di una funzione lineare.</p> <p>d. Determinare il segno di una funzione lineare.</p> <p><b>Processo prevalente.</b></p> <p>a, d: Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra.</p> <p>b, c: Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Le funzioni e la loro rappresentazione numerica, funzionale, grafica). Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <p>Item a.</p> <table border="1" data-bbox="147 966 602 1174"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mancata risposta</th> <th>A</th> <th><b>B</b></th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>8,3</td> <td>8,2</td> <td><b>31,1</b></td> <td>12,5</td> <td>39,9</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>7,1</td> <td>7,6</td> <td><b>41,4</b></td> <td>13,3</td> <td>30,6</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>8,8</td> <td>8,1</td> <td><b>27,8</b></td> <td>12,4</td> <td>42,9</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>9,6</td> <td>9,5</td> <td><b>17,3</b></td> <td>11,0</td> <td>52,5</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Macroprocesso:</b> Utilizzare</p> <table border="1" data-bbox="147 1226 672 1704"> <thead> <tr> <th></th> <th>Item</th> <th>Mancata risposta</th> <th>Errata</th> <th><b>Corretta</b></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>D8_b</td> <td>35,6</td> <td>13,0</td> <td><b>51,5</b></td> </tr> <tr> <td>G</td> <td>D8_c</td> <td>42,3</td> <td>27,8</td> <td><b>29,9</b></td> </tr> <tr> <td>G</td> <td>D8_d</td> <td>46,4</td> <td>45,5</td> <td><b>8,1</b></td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>D8_b</td> <td>23,0</td> <td>9,9</td> <td><b>67,1</b></td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>D8_c</td> <td>29,2</td> <td>25,6</td> <td><b>45,2</b></td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>D8_d</td> <td>32,5</td> <td>53,1</td> <td><b>14,4</b></td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>D8_b</td> <td>34,8</td> <td>14,0</td> <td><b>51,2</b></td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>D8_c</td> <td>42,8</td> <td>31,0</td> <td><b>26,3</b></td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>D8_d</td> <td>47,1</td> <td>48,7</td> <td><b>4,2</b></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>D8_b</td> <td>59,4</td> <td>17,0</td> <td><b>23,6</b></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>D8_c</td> <td>65,2</td> <td>27,2</td> <td><b>7,6</b></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>D8_d</td> <td>70,6</td> <td>27,2</td> <td><b>2,2</b></td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Macroprocesso:</b> Utilizzare</p>		Mancata risposta	A	<b>B</b>	C	D	G	8,3	8,2	<b>31,1</b>	12,5	39,9	L	7,1	7,6	<b>41,4</b>	13,3	30,6	T	8,8	8,1	<b>27,8</b>	12,4	42,9	P	9,6	9,5	<b>17,3</b>	11,0	52,5		Item	Mancata risposta	Errata	<b>Corretta</b>	G	D8_b	35,6	13,0	<b>51,5</b>	G	D8_c	42,3	27,8	<b>29,9</b>	G	D8_d	46,4	45,5	<b>8,1</b>	L	D8_b	23,0	9,9	<b>67,1</b>	L	D8_c	29,2	25,6	<b>45,2</b>	L	D8_d	32,5	53,1	<b>14,4</b>	T	D8_b	34,8	14,0	<b>51,2</b>	T	D8_c	42,8	31,0	<b>26,3</b>	T	D8_d	47,1	48,7	<b>4,2</b>	P	D8_b	59,4	17,0	<b>23,6</b>	P	D8_c	65,2	27,2	<b>7,6</b>	P	D8_d	70,6	27,2	<b>2,2</b>	<p><b>Risposta corretta:</b></p> <p>a. B</p> <p>b. 1</p> <p>c. <math>-\frac{1}{3}</math></p> <p>d. <math>x &gt; -\frac{1}{3}</math> oppure qualunque rappresentazione dell'intervallo aperto <math>]-\frac{1}{3}, +\infty[</math></p> <p><b>Commento.</b></p> <p>Per rispondere correttamente al primo item è sufficiente che gli studenti riconoscano gli effetti che hanno la pendenza e l'intercetta di una funzione lineare sul suo grafico. Osservare che la pendenza è positiva porta immediatamente a escludere che la risposta esatta possa trovarsi fra le opzioni C e D. Osservare che l'ordinata all'origine è 1 esclude la possibilità che il grafico corretto sia il grafico 1. Quindi la risposta corretta è B.</p> <p>Per rispondere correttamente all'item b è sufficiente possedere il concetto di funzione come macchina INPUT-OUTPUT e calcolare <math>y(0)</math>, oppure riconoscere immediatamente in <math>y(0)</math> l'ordinata all'origine.</p> <p>La risposta all'item c richiede il procedimento inverso, cioè il procedimento che porta, noto l'OUTPUT, a determinare l'INPUT di una funzione lineare. Riconoscere che il valore richiesto è lo zero della funzione, cioè l'ascissa del punto di ordinata uguale a 0, consente agli studenti di avere uno strumento di controllo sul risultato ottenuto (deve essere negativo e maggiore di -1).</p> <p>Per rispondere all'item d è sufficiente che gli studenti sappiano leggere graficamente il segno di una funzione lineare di cui hanno già determinato lo zero.</p>
	Mancata risposta	A	<b>B</b>	C	D																																																																																											
G	8,3	8,2	<b>31,1</b>	12,5	39,9																																																																																											
L	7,1	7,6	<b>41,4</b>	13,3	30,6																																																																																											
T	8,8	8,1	<b>27,8</b>	12,4	42,9																																																																																											
P	9,6	9,5	<b>17,3</b>	11,0	52,5																																																																																											
	Item	Mancata risposta	Errata	<b>Corretta</b>																																																																																												
G	D8_b	35,6	13,0	<b>51,5</b>																																																																																												
G	D8_c	42,3	27,8	<b>29,9</b>																																																																																												
G	D8_d	46,4	45,5	<b>8,1</b>																																																																																												
L	D8_b	23,0	9,9	<b>67,1</b>																																																																																												
L	D8_c	29,2	25,6	<b>45,2</b>																																																																																												
L	D8_d	32,5	53,1	<b>14,4</b>																																																																																												
T	D8_b	34,8	14,0	<b>51,2</b>																																																																																												
T	D8_c	42,8	31,0	<b>26,3</b>																																																																																												
T	D8_d	47,1	48,7	<b>4,2</b>																																																																																												
P	D8_b	59,4	17,0	<b>23,6</b>																																																																																												
P	D8_c	65,2	27,2	<b>7,6</b>																																																																																												
P	D8_d	70,6	27,2	<b>2,2</b>																																																																																												

La domanda chiede di riconoscere il grafico di una retta, nota che sia la sua equazione. Il quesito, classificato nel nucleo di Relazioni e Funzioni, in realtà nasconde contenuti di natura geometrica, in particolare il concetto di pendenza e di inclinazione. Ragionando infatti sull'angolo che tali rette formano con l'asse  $x$ , si riesce ad arrivare alla soluzione senza ragionamenti algebrici o funzionali. Sempre il ruolo dell'angolo risulta nascosto e non esplicito né come contenuto del quesito né coinvolto nella strategia risolutiva.

**QUESITO D17 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

Considera il quadrato  $ABCD$  il cui lato misura 6 cm.  $AE$  e  $FC$  misurano ciascuno 2 cm.



Quanto misura la superficie del quadrilatero  $AECF$ ?

Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

**Guida alla lettura**

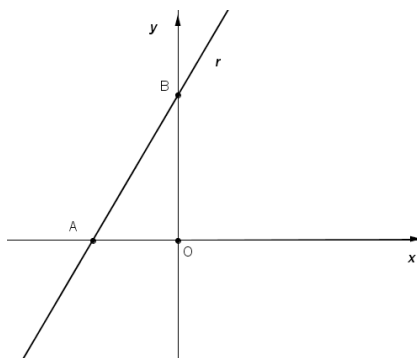
(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Caratteristiche				Descrizione e commento																				
<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b> Calcolo dell'area di una figura in posizione non standard.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mancata risposta</th> <th>Errata</th> <th>Corretta</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>22,4</td> <td>49,1</td> <td><b>28,5</b></td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>17,9</td> <td>43,9</td> <td><b>38,2</b></td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>22,9</td> <td>52,4</td> <td><b>24,7</b></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>30,1</td> <td>53,9</td> <td><b>16,1</b></td> </tr> </tbody> </table>					Mancata risposta	Errata	Corretta	G	22,4	49,1	<b>28,5</b>	L	17,9	43,9	<b>38,2</b>	T	22,9	52,4	<b>24,7</b>	P	30,1	53,9	<b>16,1</b>	<p><b>Risposta corretta:</b> 12</p> <p><b>Commento.</b> Per rispondere alla domanda gli studenti possono seguire due strategie:</p> <p>a) Riconoscere che <math>AECF</math> è un parallelogramma di base <math>AE</math> e altezza relativa <math>CB</math>. Quindi l'area, in centimetri quadrati, è data da <math>2 \cdot 6 = 12</math></p> <p>b) Determinare l'area del quadrilatero <math>AECF</math> come differenza fra l'area del quadrato <math>ABCD</math> e la somma delle aree dei triangoli rettangoli <math>EBC</math> e <math>ADF</math>; in centimetri quadrati: <math>36 - 24 = 12</math>.</p>
	Mancata risposta	Errata	Corretta																					
G	22,4	49,1	<b>28,5</b>																					
L	17,9	43,9	<b>38,2</b>																					
T	22,9	52,4	<b>24,7</b>																					
P	30,1	53,9	<b>16,1</b>																					
<p><b>Macroprocesso:</b> Utilizzare</p>																								

Nel calcolo dell'area del quadrilatero è importante riconoscere che si tratta di un parallelogramma, la cui natura va dimostrata. Anche in questo caso si può evitare di coinvolgere gli angoli sebbene appaia essenziale (e di fatto lo è) il loro utilizzo.

**QUESITO D21 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

Osserva la seguente figura.



Le coordinate di  $A$  sono  $(-3; 0)$  e l'area del triangolo  $AOB$  è 9.

Quale tra le seguenti equazioni rappresenta la retta  $r$ ?

- A.   $y = 2x + 6$
- B.   $y = -2x - 6$
- C.   $y = 3x + 9$
- D.   $y = -3x - 9$

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

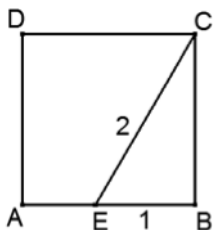
Caratteristiche		Descrizione e commento																																		
<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b> Individuare le coordinate di un punto e riconoscerne l'appartenenza a una retta.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mancata risposta</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>7,7</td> <td><b>28,4</b></td> <td>9,5</td> <td>25,1</td> <td>29,3</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>7,9</td> <td><b>36,9</b></td> <td>9,4</td> <td>21,2</td> <td>24,7</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>7,8</td> <td><b>24,5</b></td> <td>9,4</td> <td>27,3</td> <td>31,0</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>7,4</td> <td><b>18,6</b></td> <td>9,7</td> <td>29,2</td> <td>35,0</td> </tr> </tbody> </table>			Mancata risposta	A	B	C	D	G	7,7	<b>28,4</b>	9,5	25,1	29,3	L	7,9	<b>36,9</b>	9,4	21,2	24,7	T	7,8	<b>24,5</b>	9,4	27,3	31,0	P	7,4	<b>18,6</b>	9,7	29,2	35,0	<p><b>Risposta corretta:</b> A</p> <p><b>Commento.</b> Gli studenti che conoscono il significato grafico-geometrico del termine <math>q</math> nell'equazione <math>y = px + q</math> possono scartare immediatamente le opzioni B e D.</p> <p>Una verifica numerica porta a scartare il caso in cui il punto <math>B</math> possa avere ordinata 9 o a verificare la correttezza dell'ipotesi che il punto <math>B</math> abbia ordinata 6.</p>				
	Mancata risposta	A	B	C	D																															
G	7,7	<b>28,4</b>	9,5	25,1	29,3																															
L	7,9	<b>36,9</b>	9,4	21,2	24,7																															
T	7,8	<b>24,5</b>	9,4	27,3	31,0																															
P	7,4	<b>18,6</b>	9,7	29,2	35,0																															
<p><b>Macroprocesso:</b> Utilizzare.</p>																																				



In questo quesito, molto simile al D8, si chiede di passare dal registro grafico a quello algebrico riconoscendo l'equazione di una retta, nota che sia l'area che essa forma con gli assi coordinati. Anche in questo caso una riflessione, non dovuta ma opportuna, sugli angoli permetterebbe una rapida soluzione.

**QUESITO D27 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

$ABCD$  è un quadrato, il segmento  $EC$  è lungo 2 dm e il segmento  $EB$  è lungo 1 dm.



La superficie del quadrato  $ABCD$  misura:

- A.  3 dm<sup>2</sup>
- B.  4 dm<sup>2</sup>
- C.  5 dm<sup>2</sup>
- D.   $4\sqrt{3}$  dm<sup>2</sup>

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

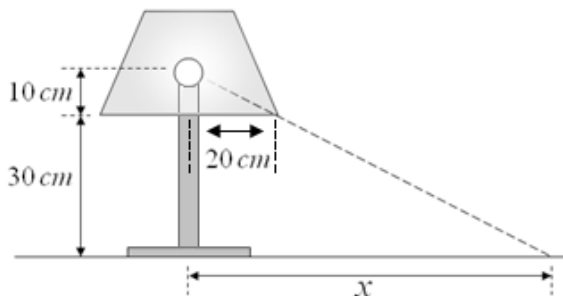
Caratteristiche		Descrizione e commento																																	
<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b> Riconoscere e applicare il teorema di Pitagora.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi: numerico, geometrico, algebrico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area delle principali figure geometriche del piano. Teoremi di Euclide e di Pitagora.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mancata risposta</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>4,5</td> <td><b>35,0</b></td> <td>22,4</td> <td>13,7</td> <td>24,5</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>3,8</td> <td><b>42,4</b></td> <td>16,6</td> <td>12,2</td> <td>25,1</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>4,5</td> <td><b>30,4</b></td> <td>24,0</td> <td>14,0</td> <td>27,1</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>5,5</td> <td><b>28,1</b></td> <td>30,5</td> <td>15,9</td> <td>19,9</td> </tr> </tbody> </table>			Mancata risposta	A	B	C	D	G	4,5	<b>35,0</b>	22,4	13,7	24,5	L	3,8	<b>42,4</b>	16,6	12,2	25,1	T	4,5	<b>30,4</b>	24,0	14,0	27,1	P	5,5	<b>28,1</b>	30,5	15,9	19,9	<p><b>Risposta corretta:</b> A</p> <p><b>Commento.</b> Il quesito richiede l'applicazione del teorema di Pitagora, già ben noto dalla scuola secondaria di primo grado, per determinare la lunghezza del lato del quadrato. Una volta determinata tale lunghezza (<math>\sqrt{3}</math> dm), per determinare l'area del quadrato <math>ABCD</math> basta elevare <math>\sqrt{3}</math> al quadrato ottenendo la risposta A.</p> <p>Il distrattore C intercetta chi eventualmente sbaglia a usare il teorema di Pitagora calcolando la misura di <math>CB</math> come <math>\sqrt{2^2 + 1^2}</math> anziché <math>\sqrt{2^2 - 1^2}</math>.</p> <p>Il distrattore B potrebbe attrarre chi pensa, guardando il disegno, che <math>AB = 2EB = 2</math> cm.</p> <p>Il distrattore D attrae chi confonde l'area del quadrato con il perimetro.</p>			
	Mancata risposta	A	B	C	D																														
G	4,5	<b>35,0</b>	22,4	13,7	24,5																														
L	3,8	<b>42,4</b>	16,6	12,2	25,1																														
T	4,5	<b>30,4</b>	24,0	14,0	27,1																														
P	5,5	<b>28,1</b>	30,5	15,9	19,9																														
<p><b>Macro processo:</b> Utilizzare</p>																																			

Nel quadrato  $ABCD$  si costruisce il triangolo  $CEB$  che risulta la metà di un triangolo equilatero: il teorema di Pitagora è la chiave risolutiva.

Ancora grande rilevanza agli angoli retti, non in quanto angoli ma per poter rapidamente ottenere informazioni sui lati. I tri-angoli sembrano, nell'INVALSI, solo tri-lateri.

**QUESITO D29 - Livello 10, anno scolastico 2012/2013**

In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure. Quanto misura il raggio  $x$  del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio della lampada?



- A.  50 cm
- B.  60 cm
- C.  70 cm
- D.  80 cm

**Guida alla lettura**

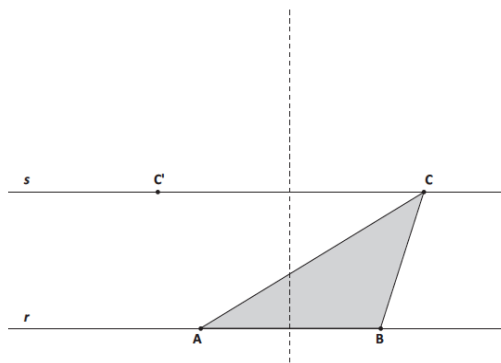
(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Caratteristiche						Descrizione e commento																																			
<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Scopo della domanda.</b> Utilizzare la similitudine per risolvere un problema.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi: numerico, geometrico, algebrico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune trasformazioni.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mancata risposta</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>G</td> <td>8,7</td> <td>13,8</td> <td>30,6</td> <td>13,5</td> <td><b>33,4</b></td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>10,8</td> <td>12,1</td> <td>26,1</td> <td>13,5</td> <td><b>37,6</b></td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>7,6</td> <td>13,3</td> <td>31,9</td> <td>14,2</td> <td><b>33,0</b></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>6,3</td> <td>17,9</td> <td>36,9</td> <td>12,6</td> <td><b>26,4</b></td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Macroprocesso:</b> Formulare</p>							Mancata risposta	A	B	C	D	G	8,7	13,8	30,6	13,5	<b>33,4</b>	L	10,8	12,1	26,1	13,5	<b>37,6</b>	T	7,6	13,3	31,9	14,2	<b>33,0</b>	P	6,3	17,9	36,9	12,6	<b>26,4</b>	<p><b>Risposta corretta:</b> D</p> <p><b>Commento.</b> Si tratta di un classico problema di applicazione delle similitudini. Infatti è possibile impostare la proporzione <math>x : 20 = 40 : 10</math> da cui si ottiene <math>x = 80</math> cm.</p> <p>In modo più diretto è possibile calcolare il rapporto di similitudine <math>40/10</math> e, per ottenere <math>x</math>, moltiplicare 20 per 4 ottenendo 80 cm.</p> <p>Il distrattore 60 cm cattura chi non tiene conto, nella misura del lato del triangolo rettangolo grande, dei 10 cm di distanza tra la lampadina e la parte di sostegno della lampadina che si trova entro il paralume.</p>					
	Mancata risposta	A	B	C	D																																				
G	8,7	13,8	30,6	13,5	<b>33,4</b>																																				
L	10,8	12,1	26,1	13,5	<b>37,6</b>																																				
T	7,6	13,3	31,9	14,2	<b>33,0</b>																																				
P	6,3	17,9	36,9	12,6	<b>26,4</b>																																				

Il quesito della lampada finalmente fonda il proprio centro nel concetto di similitudine e quindi sul ruolo fondamentale giocato dall'angolo come invariante per le figure. Resta comunque un concetto sempre sotteso, a livello intuitivo, quasi come elemento primitivo, non come esplicita ipotesi *sine qua non* sarebbe impossibile ogni affermazione al riguardo.

**QUESITO D3 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

$ABC$  è uno degli infiniti triangoli aventi la base  $AB$  sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $C$ .



Tra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di  $ABC$ ?

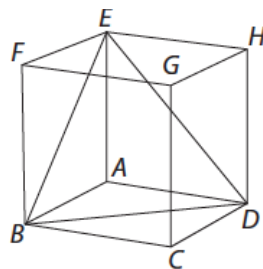
- A.  Soltanto il triangolo  $ABC'$ , simmetrico di  $ABC$  rispetto all'asse di  $AB$
- B.  Soltanto il triangolo isoscele di base  $AB$
- C.  Soltanto il triangolo rettangolo in  $A$  e il triangolo rettangolo in  $B$
- D.  Tutti gli infiniti triangoli di base  $AB$

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento					Classificazione										
<p><b>Risposta corretta:</b> D</p> <p>Lo studente qui dovrebbe "vedere" che, al variare della posizione di <math>C</math> sulla retta <math>s</math>, parallela alla retta <math>r</math> su cui giace la base <math>AB</math> dei triangoli, l'altezza dei triangoli considerati non varia, così come non varia la base.</p> <p>Le opzioni A, B, C dovrebbero funzionare da distrattori per gli studenti che non hanno ancora consolidato discrete abilità di esplorazione dinamica mentale, assai importanti in matematica.</p> <p>Probabilmente lo sviluppo e il consolidamento di tale abilità potrebbe essere favorita dell'abitudine all'uso di software di geometria dinamica come strumenti di esplorazione e osservazione di proprietà e "fatti" geometrici.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td><b>D</b></td> <td>Non risponde</td> </tr> <tr> <td>53,3</td> <td>7,8</td> <td>7,2</td> <td><b>28,1</b></td> <td>3,4</td> </tr> </table>					A	B	C	<b>D</b>	Non risponde	53,3	7,8	7,2	<b>28,1</b>	3,4	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche. Poligoni e loro proprietà.</p>
A	B	C	<b>D</b>	Non risponde											
53,3	7,8	7,2	<b>28,1</b>	3,4											

Il quesito riguarda la proprietà dei triangoli equivalenti di data base  $AB$  e gioca un ruolo fondamentale il distrattore sui triangoli isometrici (simmetrici rispetto l'asse della base  $AB$ ). Il ruolo dell'angolo qui è veramente esplicito: l'idea che triangoli che non hanno la stessa forma possano avere come proprietà comune l'area, e che *quindi* l'area sia un invariante a meno della forma delle figure.



**QUESITO D8 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

La seguente figura rappresenta in prospettiva un cubo che è stato sezionato con il piano passante per i vertici  $B, D, E$ .

Marina afferma: “Il triangolo  $BDE$  è un triangolo equilatero”. Marina ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- Sì, perché .....
- No, perché .....

**Guida alla lettura**

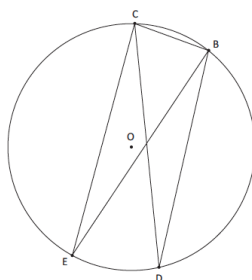
(da: “Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado”)

Commento	Classificazione						
<p><b>Risposta corretta:</b> Sì, perché “i lati sono diagonali delle facce del cubo” oppure... (vedi griglia)</p> <p>In generale, la risposta è accettabile se fa riferimento alla proprietà che le diagonali delle facce di un cubo sono uguali fra loro, utilizzando anche un linguaggio meno preciso e chiaro, ma privo di scorrettezze.</p> <p>Non sono accettabili risposte che fanno riferimento a misure empiriche, eseguite sulla figura proposta nel testo della prova, dei lati del triangolo: ciò che gli studenti devono utilizzare è una proprietà del cubo.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Errata</td> <td style="width: 33%;">Corretta</td> <td style="width: 33%;">Non risponde</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">41,4</td> <td style="text-align: center;">47,2</td> <td style="text-align: center;">10,3</td> </tr> </table>	Errata	Corretta	Non risponde	41,4	47,2	10,3	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Analizzare figure geometriche, individuando invarianti. Le principali figure del piano e dello spazio. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche. Analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche.</p>
Errata	Corretta	Non risponde					
41,4	47,2	10,3					

Il quesito richiede la capacità di rappresentazione tridimensionale per dimostrare che il triangolo  $BDE$  è equilatero, quindi la capacità di individuare triangoli rettangoli in assonometria.

**QUESITO D13 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Osserva la circonferenza di centro  $O$  rappresentata in figura.



Comunque siano presi i punti  $B, C, D, E$  sulla circonferenza, è possibile affermare che:

- A.  il triangolo  $BCE$  è congruente al triangolo  $CBD$   
 B.  il segmento  $BD$  è congruente al segmento  $CE$   
 C.  l'angolo  $EBC$  è congruente all'angolo  $DCB$   
 D.  l'angolo  $CEB$  è congruente all'angolo  $CDB$

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

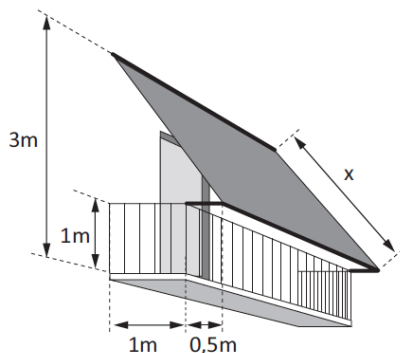
Commento	Classificazione										
<p><b>Risposta corretta:</b> D</p> <p>Per rispondere lo studente deve far ricorso alle note proprietà sugli angoli alla circonferenza, utilizzando quindi proprietà geometriche, senza ricorrere a misure sulla figura per individuare la risposta corretta.</p> <p>Si noti che la domanda, affinché una delle opzioni sia corretta, richiede implicitamente che i punti <math>E</math> e <math>D</math> appartengano allo stesso arco <math>BC</math> di circonferenza. Anche quegli studenti che avessero pensato alla possibilità di considerare il punto <math>D</math> non appartenente all'arco cui appartiene <math>E</math> avrebbero potuto escludere questa eventualità sapendo che una e una sola delle opzioni A, B, C, D è corretta (questa informazione viene fornita nelle istruzioni per rispondere, che vengono sempre lette agli studenti prima di iniziare la prova e che si trovano scritte nella prima pagina del fascicolo).</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>31,3</td> <td>11,3</td> <td>18,7</td> <td>35,0</td> <td>2,8</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	Non risponde	31,3	11,3	18,7	35,0	2,8	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Proprietà fondamentali della Circonferenza. Circonferenza e cerchio. Analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche. Sviluppare semplici catene deduttive.</p>
A	B	C	D	Non risponde							
31,3	11,3	18,7	35,0	2,8							

In questa domanda si fa esplicito riferimento alle proprietà degli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco e che quindi è un invariante per punti che appartengono allo stesso arco di circonferenza. Il distrattore vuole di nuovo far riflettere sulla differenza tra congruenza di triangoli, proprietà più forte, e congruenza di angoli, più debole.

Il quesito non è formulato con precisione. Non è vero che “*comunque siano presi i punti sulla circonferenza B, C, D, E*” si ottengono gli angoli *CEB* e *CDB* congruenti ma, come precisato nel commento, i punti *E* e *D* devono appartenere allo stesso arco *BC*. L'enunciato è ambiguo, sarebbe stata opportuna una maggiore precisione nel testo.

**QUESITO D24 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a 3 m di altezza dal pavimento del balcone, che è largo 1 m. La tenda deve sporgere 0,5 m dalla ringhiera che è alta 1 m.



Scrivi i calcoli che fai per trovare la lunghezza *x* della tenda e infine riporta il risultato.

.....

Risultato: *x* = ..... metri

**Guida alla lettura**

(da: “*Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado*”)

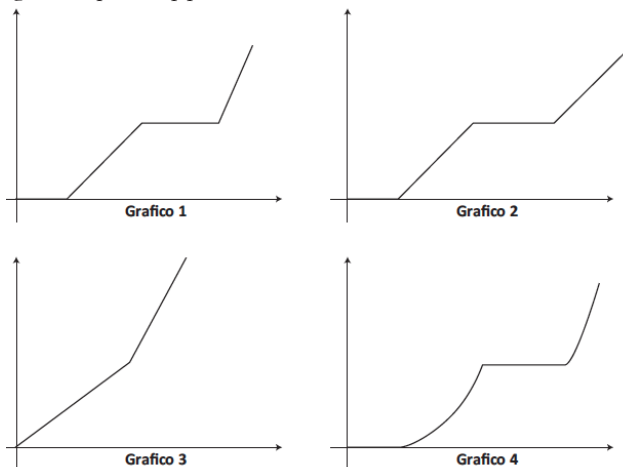
Commento	Classificazione						
<p><b>Risposta corretta:</b> Accettabile qualunque risposta che faccia riferimento al teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di cateti 2 e 1,5: <math>x = \sqrt{4 + 2,25} = 2,5</math></p> <p>Accettabile anche se il risultato viene lasciato indicato. Esempio <math>\sqrt{4 + 2,25}</math> oppure <math>\sqrt{6,25}</math>.</p> <p>La domanda richiede la capacità di riconoscere, in una situazione realistica, la possibilità di utilizzare il teorema di Pitagora per rispondere. Se lo studente individua questa possibilità, si tratta di una semplice applicazione del teorema di Pitagora. Per rispondere si potrebbe anche evitare l'uso della calcolatrice che, comunque, può essere di aiuto.</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1" data-bbox="140 1603 560 1680"> <tr> <td>Errata</td> <td>Corretta</td> <td>Non risponde</td> </tr> <tr> <td>27,7</td> <td>27,0</td> <td>43,2</td> </tr> </table>	Errata	Corretta	Non risponde	27,7	27,0	43,2	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Teorema di Pitagora. Misura di grandezze: teorema di Pitagora.</p>
Errata	Corretta	Non risponde					
27,7	27,0	43,2					

Nel quesito della tenda sul balcone, è esplicito il riferimento alla similitudine e quindi al concetto di angolo come invariante per similitudine.

**QUESITO D27 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Durante il periodo estivo Anna deve leggere un libro di 305 pagine come compito per le vacanze. Nel mese di giugno si riposa e a partire dal primo giorno di luglio legge 5 pagine al giorno per tutto il mese. In agosto va in vacanza con i genitori e dimentica il libro a casa; al suo ritorno, negli ultimi 10 giorni di vacanza, per terminare il libro legge 15 pagine al giorno.

Quale, tra i seguenti grafici, può rappresentare l'andamento del numero di pagine lette da Anna nel periodo estivo?



- A.  Il grafico 1      B.  Il grafico 2      C.  Il grafico 3      D.  Il grafico 4

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento					Classificazione										
<p><b>Risposta corretta:</b> A</p> <p>Si tratta di una tipica attività di conversione dal registro verbale-numerico a quello grafico. Per individuare il grafico corretto, gli studenti devono sapere tradurre graficamente informazioni come "nel mese di giugno (Anna) si riposa" (che consente di escludere il grafico 3, l'unico che non parte con un segmento orizzontale), "a partire dal 1° luglio legge 5 pagine al giorno" o "negli ultimi dieci giorni di vacanza legge 15 pagine al giorno" (che consentono di escludere il grafico 4, che esprime una relazione non lineare tra numero di pagine lette e giorni trascorsi in luglio). Infine gli studenti devono collegare l'aumento del numero di pagine lette a un aumento della pendenza nel grafico, scegliendo così, il grafico 1 invece del grafico 2 (in cui non c'è aumento di pendenza tra il periodo di luglio e quello degli ultimi dieci giorni di vacanza).</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>51,8</td> <td>24,8</td> <td>8,3</td> <td>10,0</td> <td>2,5</td> </tr> </tbody> </table>					A	B	C	D	Non risponde	51,8	24,8	8,3	10,0	2,5	<p><b>Ambito prevalente.</b> Relazioni e Funzioni.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Linguaggio delle funzioni anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.</p> <p>Passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale). Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Studiare le funzioni <math>f(x) = ax + b</math>.</p>
A	B	C	D	Non risponde											
51,8	24,8	8,3	10,0	2,5											

La domanda non si riferisce al nucleo Geometria ma a Relazioni e Funzioni. Ciò nondimeno la risposta si può dare più agevolmente se si attribuisce all'angolo, inclinazione della retta grafico rispetto all'asse  $x$ , significato di velocità di crescita della grandezza analizzata. Ancora una volta l'angolo è nascosto pur essendo un concetto decisivo ai fini della soluzione.

**QUESITO D29 - Livello 10, anno scolastico 2011/2012**

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
a. Se tre punti $A, B, C$ non sono allineati, nel triangolo $ABC$ ciascun lato è minore della somma degli altri due lati.		
b. Dato un triangolo di area $A$ , i lati e le altezze a essi relative sono grandezze inversamente proporzionali.		
c. In un triangolo la differenza tra due lati può essere maggiore del terzo lato.		

**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2011/12, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento	Classificazione																
<p><b>Risposta corretta:</b>                      D29a - V                      D29b - V                      D29c - F</p> <p>La domanda richiede la conoscenza delle disuguaglianze triangolari (item a. e c.) e di che cosa si intende per grandezze inversamente proporzionali, oltre alla conoscenza della formula che consente di calcolare l'area di un triangolo (item b.)</p> <p><b>Risultati del campione</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>V</th> <th>F</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>D29a</td> <td>64,4</td> <td>27,2</td> <td>4,5</td> </tr> <tr> <td>D29b</td> <td>40,3</td> <td>49,5</td> <td>6,1</td> </tr> <tr> <td>D29c</td> <td>37,9</td> <td>53,2</td> <td>4,7</td> </tr> </tbody> </table>		V	F	Non risponde	D29a	64,4	27,2	4,5	D29b	40,3	49,5	6,1	D29c	37,9	53,2	4,7	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica.</p> <p><b>Indicazioni Nazionali e Linee Guida.</b> Conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del Piano. Nozioni fondamentali di geometria del piano. Le principali figure del piano. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: area delle principali figure geometriche del piano.</p>
	V	F	Non risponde														
D29a	64,4	27,2	4,5														
D29b	40,3	49,5	6,1														
D29c	37,9	53,2	4,7														

La domanda è davvero emblematica perché richiede di riflettere sulle disuguaglianze triangolari riferite solo ai lati di un triangolo, senza alcun accenno alle conseguenti relazioni di disuguaglianza sulle ampiezze degli angoli. Cosa ancor più sorprendente se si pensa che il contesto della domanda è interno alla geometria e di contenuto squisitamente disciplinare e di conoscenza di relazioni degli elementi del triangolo. Si può addirittura ipotizzare che l'autore del problema, e in generale delle domande di queste prove, consideri secondario o poco significativo che un quindicenne conosca e riesca a manipolare gli angoli rispetto alle richieste irrinunciabili sulle proprietà che riguardano le aree e le lunghezze.



**QUESITO D3 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm.

Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

- A.  6,5 cm
- B.  10 cm
- C.  15,5 cm
- D.  17 cm

**Guida alla lettura**

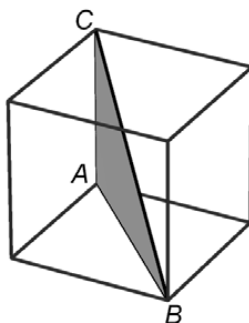
(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2010/11, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento	Ambito, compito, processo e Obbligo
<p><b>Risposta corretta:</b> D</p> <p>In un triangolo la misura di un lato deve essere minore della somma delle misure degli altri due lati. In questo caso la somma delle misure dei due lati noti è 16 cm. Quindi l'unica misura che non si può accettare fra quelle proposte è 17 cm.</p>	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...).</p> <p><b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p>

Il quesito riguarda le relazioni tra i lati di un triangolo e non considera le relazioni tra gli angoli.

**QUESITO D9 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo  $ABC$  ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

	Vera	Falsa
a1. Il lato $AB$ è uguale al lato $AC$ .		
a2. Il triangolo $ABC$ è rettangolo.		
a3. Il lato $BC$ è il più lungo dei tre.		
a4. L'angolo $ABC$ è di $45^\circ$ .		

b. Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo  $ABC$ ?

$AC = \dots\dots\dots$  m       $AB = \dots\dots\dots$  m       $BC = \dots\dots\dots$  m

**Guida alla lettura**

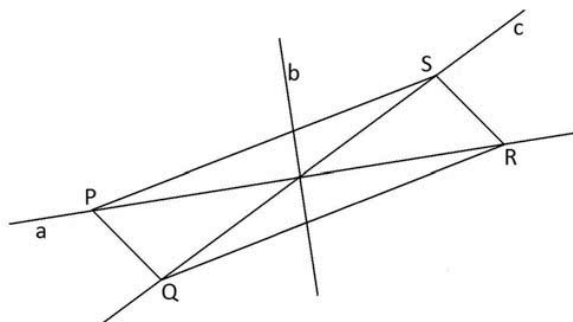
(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2010/11, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento	Ambito, compito, processo e Obbligo
<p><b>Risposta corretta</b></p> <p>Risposta corretta alla domanda a1. Falsa. Infatti il lato <math>AB</math> non è uguale al lato <math>AC</math>.</p> <p>Risposta corretta alla domanda a2. Vera. Infatti il triangolo <math>ABC</math> è rettangolo in <math>A</math>.</p> <p>Risposta corretta alla domanda a3. Vera. Infatti <math>BC</math> è l'ipotenusa del triangolo rettangolo <math>ABC</math>.</p> <p>Risposta corretta alla domanda a4. Falsa. Infatti il triangolo rettangolo <math>ABC</math> non è isoscele (<math>AB</math> è maggiore di <math>AC</math>).</p> <p>Risposte corrette alla domanda b:</p> <p><math>AC = 1</math> m</p> <p><math>AB = \sqrt{2}</math> m</p> <p><math>BC = \sqrt{3}</math> m</p> <p>Si possono accettare anche valori approssimati</p> <p><math>AB = 1,41</math> m oppure <math>AB = 1,4</math> m</p> <p><math>BC = 1,73</math> m oppure <math>BC = 1,7</math> m</p>	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> DOMANDA a: Saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...)</p> <p>DOMANDA b: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...)</p> <p><b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p>

Lo studente deve riconoscere un angolo dall'analisi della figura, questo consente al docente di comprendere se lo studente ha analizzato la figura anche dal punto di vista dello spazio.

**QUESITO D17 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

Quale tra le rette  $a$ ,  $b$  e  $c$ , nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma  $PQRS$ ?



- A.  La retta  $a$
- B.  La retta  $b$
- C.  La retta  $c$
- D.  Nessuna delle tre rette

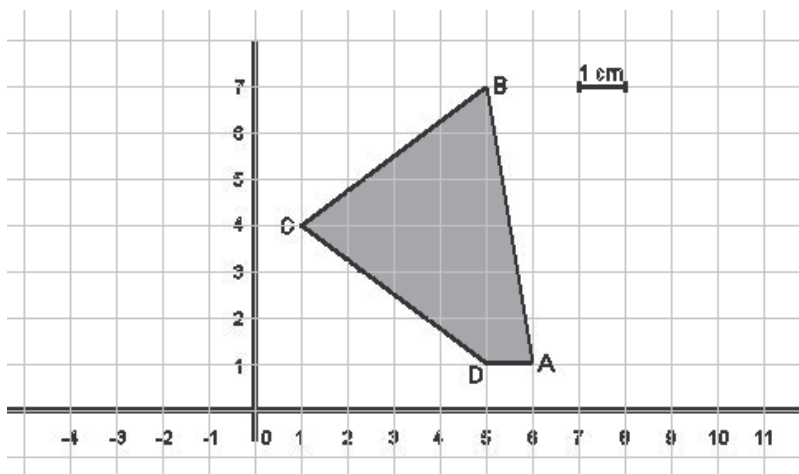
**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2010/11, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento	Ambito, compito, processo e Obbligo
<p>Per rispondere è importante conoscere il significato di simmetria assiale e di asse di simmetria di una figura.</p> <p><b>Risposta corretta:</b> D</p> <p>In generale un parallelogramma ha solo un centro di simmetria (il punto di incontro delle diagonali) e non ha assi di simmetria. Solo nel caso in cui sia un rettangolo o un rombo, allora un parallelogramma ha due assi di simmetria. Nel caso del parallelogramma di figura non si ha alcuna informazione che possa indurre a ritenere che esso dia un rettangolo o un rombo, quindi la risposta corretta è la D.</p> <p>Le altre opzioni presentano distrattori tipici per gli studenti che pensano che un parallelogramma abbia assi di simmetria.</p>	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p><b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p>

**QUESITO D18 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.



Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

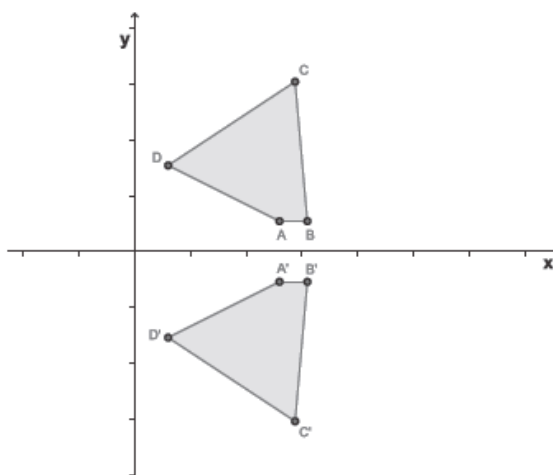
**Guida alla lettura**

(da: "Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2010/11, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado")

Commento	Ambito, compito, processo e Obbligo
<p>Per rispondere è bene che lo studente conosca qualche cenno della teoria dell'equiscomponibilità (è sufficiente quanto viene svolto nella scuola secondaria di primo grado).</p> <p><b>Risposta corretta:</b> 15 cm<sup>2</sup></p> <p>Basta considerare la figura da calcolare come differenza tra il rettangolo di vertici <math>M(1; 7)</math>, <math>N(6; 7)</math>, <math>A(6; 1)</math>, <math>P(1; 1)</math> e i triangoli <math>DPO</math>, <math>OMB</math> e <math>BNA</math>.</p> <p>Si ottiene: <math>(30 - 6 - 6 - 3) \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2</math></p> <p>Si potrebbe anche suddividere il quadrilatero <math>ABCD</math> in due triangoli <math>ABD</math> e <math>BCD</math> e calcolarne l'area:  <math>\text{area}(ABD) = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3</math>    <math>\text{area}(BCD) = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12</math>.</p> <p>La loro somma (<math>3 + 12 = 15</math>) è l'area del quadrilatero.</p> <p>(D. Passalacqua:  <a href="http://lnx.sinapsi.org/wordpress/tutorial/invalsi/">http://lnx.sinapsi.org/wordpress/tutorial/invalsi/</a>)</p>	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, ...).</p> <p><b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p>

**QUESITO D30 - Livello 10, anno scolastico 2010/2011**

Il quadrilatero  $A'B'C'D'$  è ottenuto applicando al quadrilatero  $ABCD$  una trasformazione.



Di quale trasformazione si tratta?

- A.  Traslazione
- B.  Simmetria rispetto all'asse  $y$
- C.  Simmetria rispetto all'asse  $x$
- D.  Rotazione attorno all'origine

**Guida alla lettura**

(da: “Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2010/11, Guida alla lettura. Prova di Matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di II grado”)

Commento	Ambito, compito, processo e Obbligo
Per rispondere è necessario conoscere il significato di simmetria (assiale e centrale). <b>Risposta corretta:</b> C È immediato osservare che i vertici dei due poligoni si corrispondono in una simmetria avente come asse quello delle $x$ .	<b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure. <b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...) <b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

In questi item si può considerare la conoscenza degli angoli utile per rispondere, ma siamo ancora in presenza di angoli retti.

**QUESITO D21**

(da: “Nuovi esempi di prove per la scuola secondaria di secondo grado (8 aprile 2011)”)

Un rettangolo  $ABCD$  nel piano cartesiano ha i vertici nei punti  $A = (1, 1)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (3, 5)$ ,  $D = (1, 5)$ . Il rettangolo  $A'B'C'D'$  è ottenuto da  $ABCD$  mediante una rotazione in senso antiorario di  $90^\circ$ , di centro l'origine. Le coordinate dei vertici di  $A'B'C'D'$  sono:

$A' = \dots\dots\dots$

$B' = \dots\dots\dots$

$C' = \dots\dots\dots$

$D' = \dots\dots\dots$

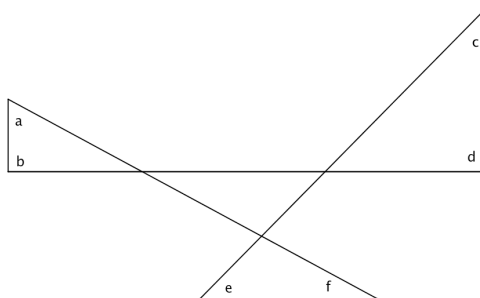
<b>Risposta corretta:</b> $A' = (-1, 1)$ ; $B' = (-1, 3)$ ; $C' = (-5, 3)$ ; $D' = (-5, 1)$ <b>Tipologia:</b> Aperta a risposta univoca	<b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure. <b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure ( <i>in ambito aritmetico, geometrico ...</i> ). <b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. Il piano cartesiano. Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti.
--	--

Il quesito richiede l'acquisizione del concetto di rotazione.

**QUESITO D8 – Prova Nazionale, Livello 8, anno scolastico 2008/2009**

(da: “Nuovi esempi di prove per la scuola secondaria di secondo grado (8 aprile 2011)”) )

Qual è la somma degli angoli  $a, b, c, d, e, f$  nella figura disegnata qui sotto?

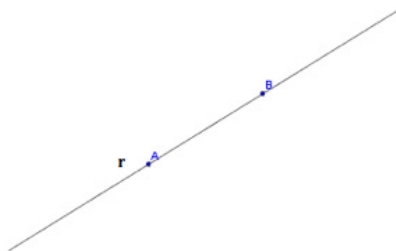


- A.  Un angolo piatto, ossia  $180^\circ$
- B.  Tre angoli retti, ossia  $270^\circ$
- C.  Due angoli piatti, ossia  $360^\circ$
- D.  Cinque angoli retti, ossia  $450^\circ$

<p><b>Risposta corretta:</b> C</p> <p>Lo studente deve conoscere due proprietà delle figure piane: il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo e il fatto che angoli opposti al vertice sono congruenti, e collegare fra loro queste conoscenze. Sarebbe interessante chiedere di giustificare la risposta.</p> <p><b>Tipologia:</b> Scelta multipla</p>	<p><b>Ambito prevalente.</b> Spazio e Figure.</p> <p><b>Processo prevalente.</b> Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (<i>in ambito aritmetico, geometrico...</i>).</p> <p><b>Nuovo obbligo di istruzione.</b> Competenza – Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p> <p>Abilità – Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.</p> <p>Gli studenti devono conoscere alcune proprietà degli angoli e riconoscere alcuni elementi caratteristici.</p>
--	---

**QUESITO D12 – Prova Nazionale, livello 8, anno scolastico 2009-2010**

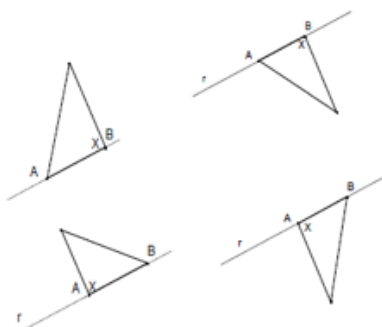
Qui sotto vedi una retta  $r$  sulla quale sono segnati due punti  $A$  e  $B$ . Disegna un triangolo rettangolo  $ABC$  in modo tale che il segmento  $AB$  sia un cateto. Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.



**Risposta corretta:** C

Lo studente deve costruire un triangolo rettangolo a partire da un cateto, disegnato su una retta obliqua.

Poiché è importante avere la certezza che lo studente abbia costruito il triangolo in modo che sia rettangolo, viene richiesta l'apposizione di una crocetta sull'angolo retto.



**Tipologia:** Aperta a risposta univoca

**Ambito prevalente.** Spazio e Figure.

**Processo prevalente.** Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico ...*)

**Nuovo obbligo di istruzione.** Competenza – Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

**Abilità –** Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative.

L'analisi del quesito evidenzia ancora una volta l'attenzione al concetto di perpendicolarità.

Verifica sul concetto di angolo.  
I nostri suggerimenti per la valutazione

	<b>Autori</b>	A. Berra, M. Dalé, L. Genoni
--	---------------	------------------------------

Seguono alcuni esempi di domande per valutare l'attività dell'Orologio.

**Esempio 1 - Il problema dell'orario**

Nelle figure 46 in basso gli orologi indicano una certa ora ciascuno.



Figura 46

Rispondi alle seguenti domande:

1. Che cosa indicano le due lancette?
2. Quanto tempo impiegano le lancette per compiere un giro completo?

3. Di quanti gradi si sposta la lancetta delle ore all'ora? E di quanti la lancetta dei minuti ogni 10 minuti?
  4. Ogni quarto d'ora, di quanti gradi si spostano le due lancette?
  5. Di quanti gradi si sposta la lancetta delle ore ogni 5 minuti?
- Se hai risposto alle domande precedenti sei ora in grado di rispondere all'ultima domanda.
6. Qual è l'ampiezza dell'angolo compreso tra le lancette dei sei orologi delle figure?

**Esempio 2 - Il problema della moneta e del Sole**

1. Misura il diametro di una moneta da 1 euro.
2. “Traguarda” il Sole con la moneta: a quale distanza dal tuo occhio devi mettere la moneta per coprire totalmente il Sole? (Ricorda di non fissare il Sole a occhio nudo.)
3. L'ampiezza angolare del Sole sarà allora l'ampiezza dell'angolo sotto il quale vedi la moneta a quella distanza.
4. Se si sbaglia la misura dell'angolo dell'1%, di quanto varia la misura del diametro del Sole? (La distanza Terra-Sole è  $1.49 \times 10^{11}$  m.)



Figura 47

**Esempio 3 - Robot in movimento**

Un Robot sa eseguire le seguenti istruzioni:

$A_n$  = avanti di  $n$  passi

$I_n$  = indietro di  $n$  passi

$S_n$  = ruota in senso antiorario di  $n$  gradi

1. Indicare le istruzioni necessarie per far disegnare dal robot un triangolo equilatero di lati  $n = 50$  passi partendo dal vertice  $A$  con la direzione perpendicolare rispetto alla base  $AB$  (figura 48).
2. Indicare le istruzioni necessarie per far disegnare dal robot un esagono regolare sempre partendo dal vertice  $A$  con direzione perpendicolare al lato  $AB$  (figura 49).

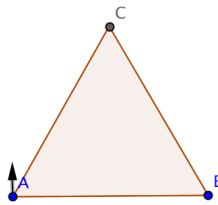


Figura 48

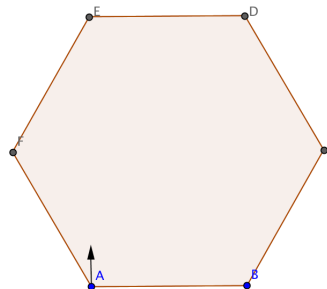


Figura 49



Lo studente deve saper individuare le lunghezze dei lati tenendo conto che dovrà far ruotare il robot non di un angolo corrispondente all'angolo interno dei poligoni e deve conoscere sia la misura degli angoli di un triangolo equilatero sia la misura degli angoli di un esagono.

**Esempio 4 - Attività laboratoriale: fotografie**

Si deve fotografare un quadro su una parete, di dimensioni 60 cm x 20 cm, e si hanno a disposizione due farette per illuminare il quadro. Come si possono disporre i farette? Sono sufficienti le informazioni date?

	<p><b>Autori</b></p>	<p>R. Ferro, F. Finoglio, M. C. Garassino, S. Labasin</p>
---	----------------------	---

**Esempio 5 - Quale triangolo?**

Risolvi il triangolo essendo noti due lati e un angolo non compreso tra essi.

*Osservazioni:* il problema può avere nessuna, una o due soluzioni e la soluzione può essere ricercata con un'esplorazione tramite GeoGebra. Per esempio, se si considera un triangolo  $ABC$  con  $c = 6$  e  $\alpha = 30^\circ$ , si può discutere la risoluzione del triangolo al variare della misura del lato  $a$  nell'intervallo  $[3, 8]$ . In figura 50 un esempio di videata di costruzione con GeoGebra.

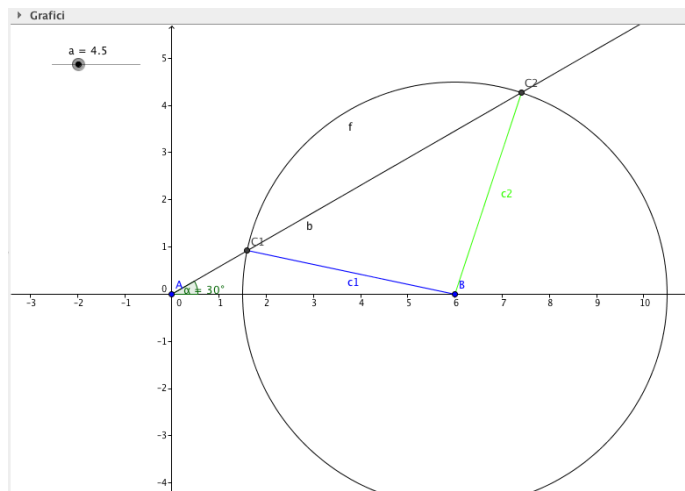



Figura 50

	<b>Autori</b>	S. Beltramino, P. Curletti, C. Idrofano, L. Poli
---	---------------	--

### Esempio 6 - Un viaggio in nave

Salpiano da Genova con il pilota automatico che tiene la prua costantemente puntata a Sud ( $180^\circ$  rispetto al Nord).

In assenza di correnti arriviamo a Île Rousse, in Corsica, dopo aver navigato per 200 km.

Tenendo conto che il nostro pilota automatico compie un errore al massimo di un grado, dove ci aspettiamo di essere dopo aver percorso 200 Km?

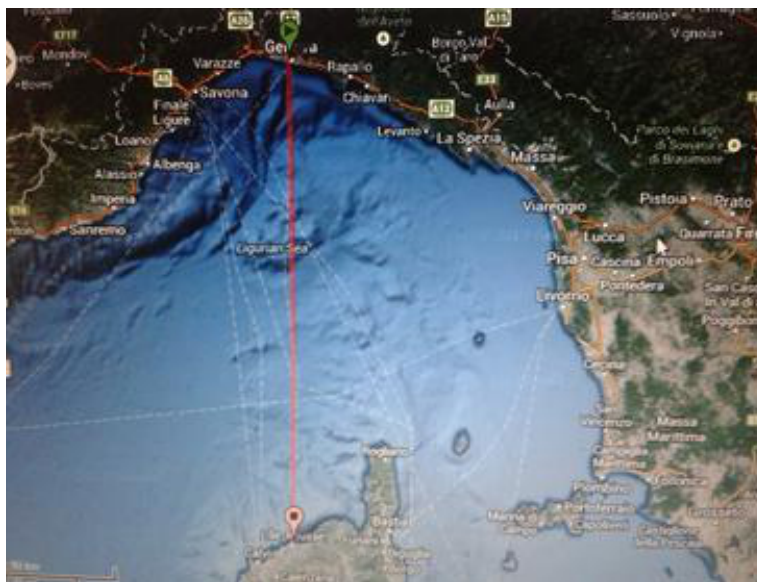


Figura 51. Da Google Earth

### Esempio 7 - Diamoci uno sguardo intorno - Il baseball

(Tratto dal documento Attività Concernenti le Competenze per Classe: [http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/2525\\_mate\\_competenze\\_completo.pdf](http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/2525_mate_competenze_completo.pdf))

Il campo di baseball può essere rappresentato approssimativamente come un quarto di cerchio delimitato da due linee perpendicolari, dette *linee di foul* (figura 52).

Il campo di gioco può essere suddiviso in una parte interna, chiamata *diamante*, e in una esterna.

Il diamante è costituito da un quadrato di lato 27,43 m ai cui vertici sono poste quattro basi. La *casa base* si trova nel centro del quarto di cerchio ed è lì che si pone il *battitore*. Le altre tre basi vengono chiamate *prima base*, *seconda base* e *terza base*.

In mezzo al diamante si trova il *monte di lancio*, un piccolo dosso circolare alla cui sommità viene fissata la pedana del lanciatore.

1. Calcola qual è la distanza tra la pedana del lanciatore e la casa base.
2. Calcola la distanza minima che un giocatore deve percorrere attorno al diamante (giro completo) per effettuare il punto (approssima al cm).
3. Sapendo che la distanza in linea d'aria tra  $A$  e  $B$  è di 145 m, calcola il raggio del settore circolare che delimita il campo (approssima al cm).
4. Che percentuale rappresenta la superficie del diamante rispetto alla superficie totale del campo da gioco?
5. A che distanza dalla prima, dalla seconda e dalla terza base si trovano gli estremi  $A$  e  $B$ ? (approssima al cm)
6. Per ragioni di sicurezza, il campo da gioco viene recintato con una rete a 15 m di distanza dal perimetro di gioco. Qual è la lunghezza minima della rete necessaria per la recinzione?

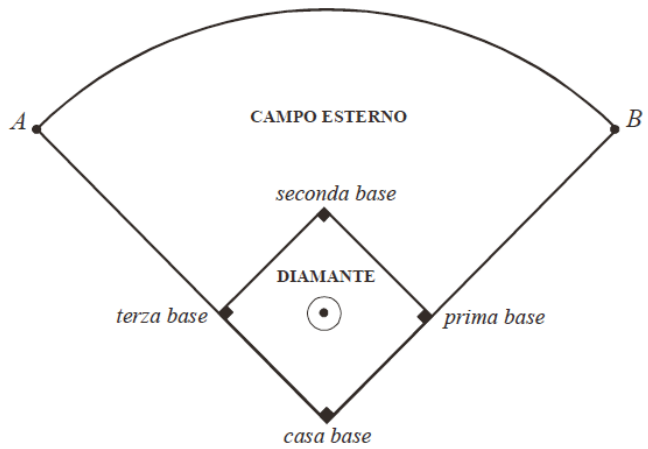


Figura 52

**Esempio 8 - Da “Olimpiadi della matematica UMI”**

(Quesito della gara senior delle Olimpiadi della Matematica, UMI, del 1989, tratto da: “Le olimpiadi della matematica”, a cura di F. Conti, M. Barsanti e T. Franzoni, Zanichelli (1994))

Quali delle seguenti curve costituisce il luogo dei punti che vedono il quadrato  $Q$  da un angolo di  $45^\circ$ ?

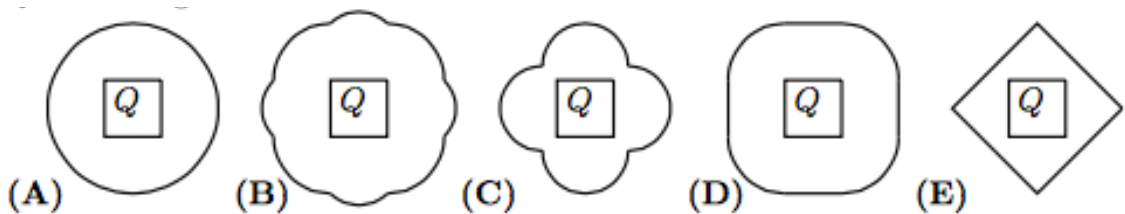


Figura 53



## CAPITOLO 3

### ESPLORAZIONE DI FIGURE PIANE: DALLA CONGETTURA ALLA DIMOSTRAZIONE



[www.risorsedocentipon.indire.it/home\\_piattaforma/](http://www.risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/)

L'attività appartiene al nucleo di Geometria del piano M@t.abel.

**Tematica affrontata:** geometria, triangoli.

**Ordine di scuola:** scuola secondaria di secondo grado - primo biennio.

**Obiettivi dell'attività:**


- realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando anche strumenti informatici;
- comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive;
- analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie.

**Richiami teorici<sup>1</sup>:**

- approccio alla dimostrazione.

## Proposte di adattamenti, ampliamenti

*a cura di S. Labasin*

	<b>L'EREDITÀ</b>
<b>Autori</b>	A. Frumento, L. Mantello, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni
<b>A chi è rivolto</b>	Scuola secondaria di primo grado (classe prima/seconda)

Affrontare la tematica della dimostrazione nella scuola secondaria di primo grado è sempre complesso per più fattori:

- per gli allievi “il dimostrare” la validità generale di una proprietà è molto spesso un'azione non necessaria: se è vero per un caso particolare, va da sé che valga sempre;
- gli alunni non possiedono consapevolmente molti strumenti matematici spesso indispensabili per una dimostrazione formale rigorosa.

<sup>1</sup> Si veda in Appendice a pag. 146

Con tali premesse, si è deciso di strutturare un percorso che parta dal particolare e via via si allarghi a considerare “tutti i casi possibili”, privilegiando un apprendimento e una esplorazione di tipo percettivo-motorio rispetto a una formalizzazione matematicamente più rigorosa di quanto intuito per via esperienziale.

### ***La situazione problematica***

#### **L'eredità**

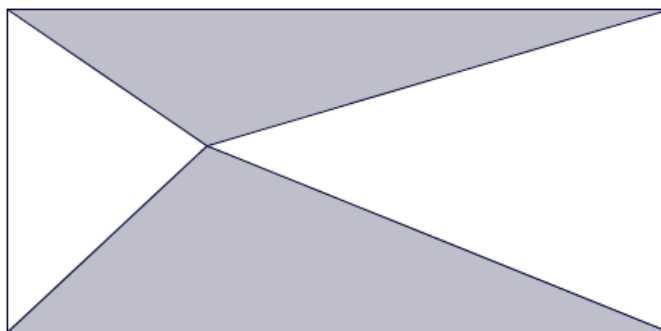
*(da: 8° Rally matematico transalpino cat: 7, 8)*

Due fratelli ereditano un terreno di forma rettangolare. Per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno di forma rettangolare.

Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente.

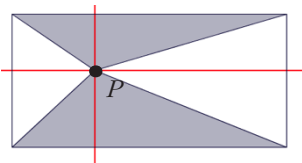
Sarà sempre vero che le due parti sono uguali?

Giustificate il ragionamento.



*Figura 1. Disegno del terreno*

**Scheda di lavoro**

<b>Fase 1: verifichiamo che la proprietà vale in <u>un caso</u></b> (apprendimento percettivo-motorio)	
<b>Il docente</b>	<b>Gli allievi</b>
Propone la situazione problematica. Fornisce il materiale per la costruzione di un modello sufficientemente grande del problema. <i>La proprietà è valida anche in altri casi?</i>	Il gruppo classe realizza concretamente un solo modello della situazione proposta, ritaglia i vari triangoli e ne verifica l'equiestensione attraverso la loro pesatura su una bilancia a due bracci.
<b>Fase 2: verifichiamo che la proprietà vale in <u>tanti casi diversi</u></b> (apprendimento percettivo-motorio)	
<b>Il docente</b>	<b>Gli allievi</b>
Divide la classe in coppie di lavoro. Assegna il compito e guida le coppie nella realizzazione del disegno. Osserva il lavoro degli allievi e interviene come moderatore, se necessario.  <i>Possiamo concludere che la proprietà vale sempre?</i>	Ogni coppia deve disegnare su di un foglio un rettangolo di dimensioni assegnate (tutte diverse tra loro). Tracciando per il punto $P$ le parallele ai lati del triangolo, la figura si decompone in 8 triangoli. I ragazzi ritagliano i triangoli ottenuti e li ricompongono a formare due quadrilateri equivalenti.  Concludono che la proprietà è vera per tutti i casi da loro esaminati.
<b>Fase 3: verifichiamo che la proprietà vale in <u>“tutti” i casi, anche in quelli limite</u></b> (impiego del software GeoGebra)	
<b>Il docente</b>	<b>Gli allievi</b>
Guida gli alunni nella realizzazione del modello con GeoGebra e nella successiva esplorazione del problema, anche dei suoi casi limite.  <i>Siamo sicuri di aver veramente dimostrato la validità della proprietà?</i>	A coppie realizzano il file e lo utilizzano per esplorare quanti più casi possibili.
<b>Fase 4: <u>dimostriamo formalmente la proprietà</u></b> (utilizzo del linguaggio simbolico algebrico)	
<b>Il docente</b>	<b>Gli allievi</b>
Guida gli alunni nella comprensione dei passaggi algebrici che portano a concludere che le somme delle aree dei triangoli corrispondenti sono equivalenti a metà area del rettangolo.	Seguono la dimostrazione formale, di cui dovrebbero (almeno alcuni) comprendere il significato.

	<p><b>DALLA CONGETTURA ALLA DIMOSTRAZIONE: IL TEOREMA DI PITAGORA</b></p>
<p><b>Autori</b></p>	<p>S. Abbati, B. Baldi, S. Barbera, S. Paruzza, D. Sasso</p>
<p><b>A chi è rivolto</b></p>	<p>Scuola secondaria di primo grado</p>

***Riflessioni sulla dimostrazione nella scuola secondaria di primo grado***

Nella scuola media lo studio della geometria è di tipo intuitivo, ovvero le proprietà delle figure devono essere ricercate mediante osservazioni sperimentali (pratiche) ripetute più volte su oggetti, disegni, modelli aventi la forma delle diverse figure geometriche (come del resto ritroviamo nella pratica dell'insegnamento della matematica di Emma Castelnuovo e che è alla base delle attività M@t.abel). Le proprietà scoperte vengono poi generalizzate, ossia considerate valide per ogni figura analoga al modello studiato praticamente (metodo induttivo, ovvero che va da casi particolari a regole generali), dove le proprietà scoperte sono, soprattutto, frutto dell'intuizione.

La dimostrazione deve partire dall'esplorazione, dal fare congetture e spiegare perché quella cosa accade. Gli alunni devono operare delle scelte motivate, secondo argomenti pertinenti tra alternative possibili, e sostenere con argomentazioni le proprie intuizioni per convincere coloro che pensano il contrario.

Nella scuola di secondo grado ci sarà il passaggio dalla geometria intuitiva a quella razionale, dove le proprietà trovate attraverso metodi sperimentali dovranno essere validate attraverso una successione di ragionamenti logici.

**Attività**

La situazione proposta serve per introdurre il Teorema di Pitagora.

**■ Distanza sull'isola**

La nave (C) dista 15,2 km da A e 7,4 km da B. Inoltre l'angolo BCA è retto.

Il capitano della nave può calcolare quanto distano, in linea d'aria, i punti A e B? Giustifica la risposta descrivendo il tuo ragionamento e, in caso affermativo, esegui i calcoli che ritieni opportuni per trovare la misura della distanza richiesta.

Arrotonda il risultato al decimo.



Figura 2

Gli alunni possono lavorare individualmente o in coppia.

Si analizzano le osservazioni e le proposte dei ragazzi: dovrebbe emergere che le informazioni in possesso non sono sufficienti per risolvere il problema.

Si propongono tre tipologie di attività da far eseguire ai ragazzi divisi in piccoli gruppi (massimo 3 alunni per gruppo) per dimostrare il Teorema di Pitagora.



**Prima attività a piccoli gruppi - Costruzione su una piastrella**

1. Far costruire su una piastrella del pavimento un triangolo rettangolo isoscele utilizzando dello scotch colorato (figura 3).
2. Una volta tracciato il triangolo rettangolo, chiedere di costruire su ciascun lato del triangolo un quadrato esternamente al triangolo e indicare con  $Q_1$ ,  $Q_2$  i quadrati costruiti sui cateti e con  $Q_3$  il quadrato costruito sull'ipotenusa.
3. Chiedere di scrivere che osservazioni si possono fare sui quadrati  $Q_1$ ,  $Q_2$  e sul quadrato  $Q_3$ .
4. Confronto e discussione su quanto osservato da ciascun gruppo.

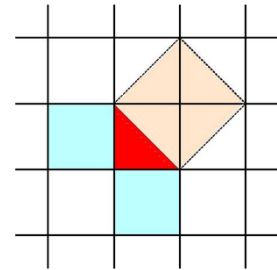


Figura 3

Questa caratteristica è valida per tutti i triangoli rettangoli?

**Seconda attività a coppie - Costruzione con il cartoncino**

Far costruire su un cartoncino un triangolo rettangolo scaleno e i quadrati corrispondenti ai lati del triangolo, indicando con  $Q_1$  e  $Q_2$  quelli costruiti sui cateti e con  $Q_3$  quello costruito sull'ipotenusa, e ritagliare i quadrati ottenuti (dare indicazioni sulle misure dei cateti che devono essere maggiori di 5 cm).

Su una bilancia a piatti, ciascun gruppo mette su un piatto i due quadrati relativi ai cateti e sull'altro quello relativo all'ipotenusa: l'equilibrio della bilancia verifica che l'osservazione della precedente attività vale per tutti i triangoli rettangoli (figura 4).

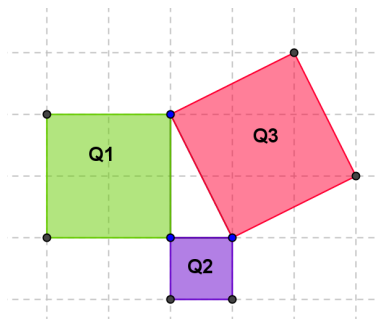


Figura 4. Bilancia a piatti per la verifica del teorema di Pitagora

**Terza attività individuale - Piegature di un foglio di forma quadrata**

Ritagliare un foglio a forma di quadrato, suddividerlo in 9 quadrati congruenti piegando i lati del quadrato grande 3 volte, piegare i lati su loro stessi per  $2/3$ .

Si ottiene il quadrato costruito sull'ipotenusa, formato dal quadrato interno costruito sul cateto minore e da 4 triangoli che sommati sono equivalenti al quadrato costruito sul cateto maggiore (figura 5).

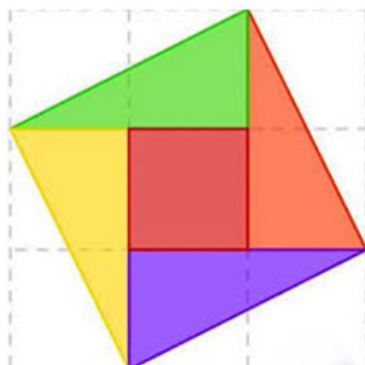


Figura 5

La proprietà scoperta è il Teorema di Pitagora: “In un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull’ipotenusa.”

### La leggenda di Pitagora e delle piastrelle

Una leggenda racconta che Pitagora abbia formulato il suo teorema mentre stava aspettando un’udienza da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo di Samo, Pitagora si mise a osservare le piastrelle quadrate del pavimento; si pensa che ne abbia vista una rotta perfettamente lungo la diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali che oltre a essere rettangoli erano anche isosceli, avendo i due lati congruenti. Pitagora immaginò un quadrato costruito sulla diagonale di rottura della piastrella: quadrato avente come lati le diagonali delle piastrelle circostanti.

L’area di ciascuna delle piastrelle adiacenti ai cateti era di 2 mezze piastrelle (= 1 piastrella); la somma delle due aree era quindi di 4 mezze piastrelle (= 2 piastrelle); l’area del quadrato costruito sull’ipotenusa (diagonale della piastrella) era di 4 mezze piastrelle.

Il teorema di Pitagora vale solo per i triangoli rettangoli?

L’attività di costruzione può essere svolta nel laboratorio di informatica utilizzando il software GeoGebra.

### Enunciato inverso

(da: “Matematica 1. Numeri e figure”, E. Castelnuovo, La Nuova Italia, Firenze)

“Gli Egiziani, per costruire la base quadrata delle piramidi, cioè per fare in modo che gli angoli fossero proprio retti, si valevano del metodo della corda. Si era nel 3000 a.C. Il metodo è questo: si prende una corda lunga, per esempio, 12 unità di lunghezza e si divide con dei nodi in tante parti uguali: una parte si fa di 3 nodi, una di 4 e una di 5. Si tende la parte di 4 nodi tra due paletti ficcati per terra, e si tirano le altre due parti, lunghe 3 e 5, in modo che i loro estremi s’incontrino. Si ottiene così un triangolo; e questo triangolo ha un angolo retto. Gli Egiziani notarono che i numeri 3, 4, 5, lunghezze dei lati del triangolo, erano tali che:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .”

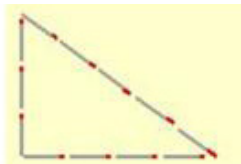


Figura 6

Si può chiedere agli studenti se ritengono questo procedimento equivalente a quanto visto finora o se osservano qualche differenza.

L'insegnante li guida a concludere che la strategia utilizzata dagli Egiziani rappresenta l'operazione inversa.

	<p><b>ANGOLI AL CENTRO E ALLA CIRCONFERENZA: APPROCCIO ALLA DIMOSTRAZIONE</b></p>
<p><b>Autori</b></p>	<p>R. Ferro, F. Finoglio, M. C. Garassino, S. Labasin</p>
<p><b>A chi è rivolto</b></p>	<p>Primo biennio scuola secondaria di secondo grado</p>

**Descrizione dell'attività**

L'attività propone allo studente una situazione da esplorare con GeoGebra (scheda di lavoro) utilizzando ciò che gli viene suggerito e ciò che ritiene utile per congetturare e trarre conclusioni dalle premesse date.

L'attività è stata preparata tenendo presente la lettura de “*La dimostrazione alla prova*” (O. Robutti - D. Paola, in *Matematica e Aspetti Didattici, Quaderni della Direzione Classica, vol. 45, MIUR 2001*).

In particolare si ritengono centrali gli elementi che emergono nel seguente passo tratto da: F. Arzarello - O. Robutti, *Il problema aperto in geometria con l'aiuto di un software didattico, Nuova Secondaria, 2, Lascuola, Brescia 1997*:

“*La modalità di presentazione del problema di congettura e dimostrazione è quella del problema aperto che ha le seguenti caratteristiche:*

- *ha un enunciato abbastanza corto;*
- *non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi;*
- *non induce un metodo di soluzione;*
- *non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste: le domande poste sono del tipo: “Quali configurazioni assume... Quali relazioni puoi trovare tra...”*

Si presenta inoltre un'analisi della scheda per gli studenti: il lavoro conduce a ripetere molte volte la procedura *esplorazione - controllo ascendente - formulazione di congetture - abduzione - controllo discendente*, al fine di permettere di capire “che cosa sto facendo” invece di imparare a memoria ricette matematiche preconfezionate.

**Scheda di lavoro**

**Prima parte**

- Apri GeoGebra.
- Definisci uno slider  $r$  con valori compresi tra 0 e 10.
- Disegna una circonferenza di centro il punto  $O$  e raggio  $r$ .
- Disegna due punti  $A$  e  $B$  sulla circonferenza, disegna i segmenti  $AO$  e  $BO$  e segna l'angolo  $AOB$  (si tratta di un angolo al centro).

Muovendo i punti  $A$  e  $B$  osserva il variare dell'angolo.

Muovi lo slider, cioè varia il raggio della circonferenza. Che cosa osservi?.....

.....

**Seconda parte**

- Disegna ora un punto  $C$  sulla circonferenza.  $C$  deve essere scelto in modo tale da insistere ("appoggiarsi") sullo stesso arco  $AB$  su cui insiste l'angolo  $AOB$ .
- Disegna i segmenti  $AC$  e  $BC$  e segna l'angolo  $ACB$  (è un angolo alla circonferenza).

Sposta il punto  $C$ . Che cosa accade? .....

Varia il raggio della circonferenza e sposta nuovamente il punto  $C$ . Che cosa accade? .....

.....

Sposta  $A$  e/o  $B$ . Muovi il punto  $C$ . Che cosa accade?.....

Prova a enunciare la *proprietà* che hai appena osservato.

"In una circonferenza due o più angoli alla circonferenza che insistono ....."

**Terza parte**

Muovi il punto  $B$  e osserva la misura dell'angolo al centro  $AOB$  e quella del corrispondente angolo alla circonferenza  $ACB$ . Studia la funzione  $ACB = f(AOB)$ .

1. Muovi il raggio della circonferenza in modo da ottenere una circonferenza di raggio  $AO = 5$  cm.
2. Muovi il punto  $B$  sulla circonferenza per generare un insieme di coppie di angoli corrispondenti ( $AOB$  e  $ACB$ ). Fai variare l'angolo al centro  $AOB$  da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  con passo di circa  $30^\circ$ .
3. Completa la tabella, ripetendo il procedimento anche per una circonferenza di raggio  $AO = 8$  cm.

Circonferenza di raggio 5 cm		Circonferenza di raggio 8 cm	
$AOB$	$ACB$	$AOB$	$ACB$
$0^\circ$		$0^\circ$	
$30^\circ$		$30^\circ$	
$60^\circ$		$60^\circ$	
$90^\circ$		$90^\circ$	
$120^\circ$		$120^\circ$	
$150^\circ$		$150^\circ$	
$180^\circ$		$180^\circ$	

4. Esprimi a parole il legame tra le ampiezze dei due angoli. Esprimi il legame anche attraverso il linguaggio matematico.

Enuncia il relativo teorema.

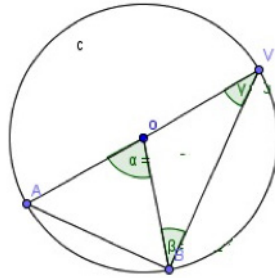
"Un angolo alcentro.....".

Spiega ora il perché

**Quarta parte**

Tra tutti i casi possibili considera in particolare quello in cui  $A$  e  $V$  appartengono allo stesso diametro, la situazione è rappresentata in figura.

Con GeoGebra costruisci la figura rappresentata misurando gli angoli indicati.



Esamina la situazione.

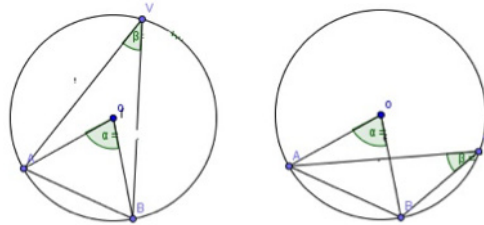
L'angolo al centro  $\alpha = AOB$  è un angolo esterno del triangolo  $BOC$ . Perciò è congruente a .....

Gli angoli risultano ..... poiché il triangolo  $OBC$  è .....avendo i lati .....

Concludi: .....

Da cui segue: .....

Completa la dimostrazione esaminando inoltre le ulteriori situazioni delle due figure sottostanti.



*Suggerimento:* muovi  $C$ , traccia il diametro  $CD$  e determina angoli al centro  $AOD$ ,  $DOB$  e relativi angoli alla circonferenza  $ACD$ ,  $DCB$  del tipo esaminato nella situazione sopra.

**Conseguenze**

- Quale relazione esiste tra due angoli alla circonferenza che sottendono la medesima corda?
- Sapresti determinare l'ampiezza degli angoli alla circonferenza inscritti in una semicirconferenza?
- Quale relazione esiste tra angoli alla circonferenza che sottendono la stessa corda e hanno il vertice da parte opposta rispetto alla corda?

**Esercizi proposti**

1. Due rette tangenti in  $T$  e in  $S$  a una circonferenza di centro  $O$  si incontrano in  $P$ . Come risultano gli angoli  $TOS$  e  $TPS$ ?
2. Per ciascuno degli angoli alla circonferenza rappresentati, disegna l'arco su cui insiste e il corrispondente angolo al centro.

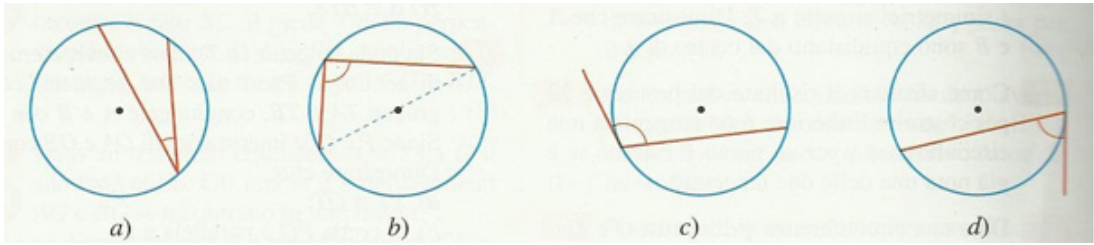


Figura 7. (da: "Pensare e fare matematica, Geometria", M. Andreini, R. Manara, F. Prestipino, I. Saporiti, Etas, Milano, 2011)

3. Nella figura 8 sono rappresentate due corde di una circonferenza,  $AB$  e  $CD$ , congruenti e non parallele;  $M$  e  $N$  sono i punti medi delle corde. Unire  $M$  e  $N$  con  $O$ .
  - a. Come sono i segmenti  $ON$  e  $OM$ ? Che cosa si può dire del triangolo  $MON$ ?
  - b. Che cosa si può dire dei triangoli  $POM$  e  $QON$ ? Dedurre che  $PM$  e  $QN$  sono congruenti.
4. Nella figura 9,  $O$  è il centro della circonferenza e  $AOB$  è un triangolo isoscele sulla base  $AB$ . Dimostra che i segmenti  $AC$  e  $BD$  sono congruenti.

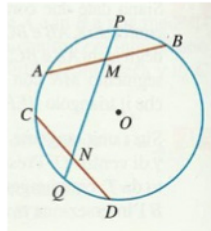


Figura 8. Ibidem

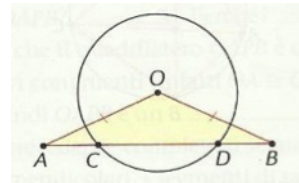


Figura 9. Ibidem

5. In ciascuna figura 10,  $O$  indica il centro della circonferenza. Spiega perché le situazioni rappresentate sono impossibili.

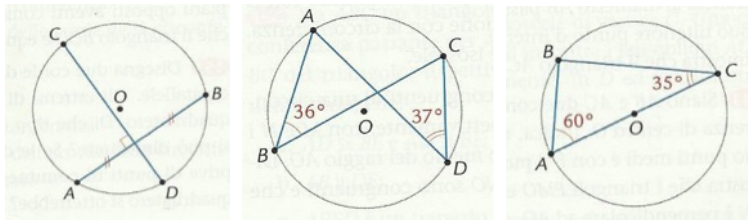


Figura 10. (da: "Nuova matematica a colori, Geometria", L. Sasso, Petrini, Novara, 2011)

6. Nella figura 11 sono rappresentate due corde  $AB$  e  $CD$  di una circonferenza,  $P$  è il punto di intersezione dei loro prolungamenti. Unire  $A$  con  $D$  e  $B$  con  $C$ .
  - a. Segnare le coppie di angoli tra loro congruenti perché insistono sullo stesso arco o su archi congruenti.
  - b. Dimostra che i triangoli  $PBC$  e  $PDA$  sono congruenti.
  - c. Dimostra che la semiretta di origine  $P$  passante per  $O$  è bisettrice dell'angolo  $BPD$ .

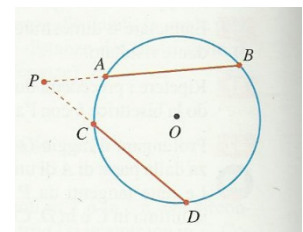
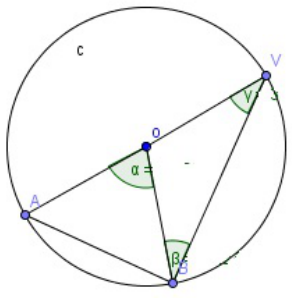
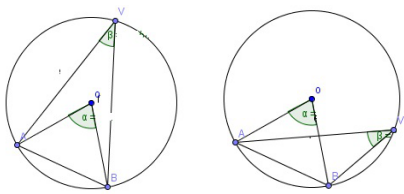


Figura 11.

(da: M. Andreini, R. Manara, Ibidem)

**Analisi della scheda di lavoro**

Scheda di lavoro	Analisi della scheda														
<p><b>Fase 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apri GeoGebra.</li> <li>• Considera tre punti su una circonferenza e segna l'angolo <math>ACB</math> interno alla circonferenza (si chiama angolo alla circonferenza).</li> <li>• Analizza come varia l'angolo al variare dei punti sulla circonferenza.</li> <li>• Si può osservare una congruenza tra angoli? In quale caso?</li> </ul>	<p><b>Lavoro di esplorazione senza controllo</b></p> <p>Ai ragazzi viene richiesto di esplorare la figura senza specificare bene la direzione in cui andare.</p> <p>Il <i>test del trascinamento</i> permetterà di stabilire se la costruzione è corretta (cioè se hanno costruito effettivamente i punti sulla circonferenza).</p> <p>All'inizio i ragazzi proveranno a muovere i punti <math>A, B, C</math> senza capire che cosa sta variando.</p> <p>Con il passare dei minuti dovrebbero capire che per rispondere alle nostre domande occorre muovere un solo punto e annotare che cosa succede, poi provare con gli altri.</p>														
<p><b>Fase 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sposta il punto <math>C</math>. Che cosa accade?</li> <li>• Varia il raggio della circonferenza e sposta nuovamente il punto <math>C</math>. Che cosa accade?</li> <li>• Sposta <math>A</math> e/o <math>B</math>. Muovi il punto <math>C</math>. Che cosa accade?</li> <li>• Prova a enunciare la proprietà, a formulare una <i>congettura</i> sulla base delle relazioni che hai appena osservato.</li> </ul>	<p><b>Controllo ascendente/selezione (congettura)</b></p> <p>L'insegnante aiuta gli studenti a prendere in considerazione la figura corretta, occorre infatti porre l'attenzione sugli angoli alla circonferenza e quindi sullo spostamento di <math>C</math>.</p> <p>I ragazzi dovrebbero notare che l'angolo alla circonferenza è costante quando si "guarda" allo stesso arco e formulare una congettura (con GeoGebra occorre fare attenzione e ridefinire l'angolo quando si passa "all'altro arco").</p> <p>Dovrebbero anche individuare che angoli alla circonferenza opposti rispetto alla corda <math>AB</math> sono supplementari.</p>														
<p><b>Fase 3 – Perché gli angoli alla circonferenza sono tutti congruenti?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dopo la discussione collettiva si può dire che: "In una circonferenza due o più angoli alla circonferenza che insistono ....."</li> <li>• Cerchiamo di spiegare il perché?</li> </ul> <table border="1" data-bbox="306 1242 575 1476"> <thead> <tr> <th><math>AOB</math></th> <th><math>ACB</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>p^\circ</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>30^\circ</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>60^\circ</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>90^\circ</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>120^\circ</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>150^\circ</math></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aggiungi la misura dell'angolo alla circonferenza <math>ACB</math> a quella del corrispondente angolo al centro <math>AOB</math>. Completa la tabella:</li> <li>• Prova a formulare una <i>congettura</i> sulla base delle relazioni che hai appena osservato.</li> <li>• Esprimi a parole il legame tra le ampiezze dei due angoli. Esprimi il legame anche attraverso il linguaggio matematico.</li> </ul>	$AOB$	$ACB$	$p^\circ$		$30^\circ$		$60^\circ$		$90^\circ$		$120^\circ$		$150^\circ$		<p><b>Selezione, abduzione</b></p> <p>Dopo l'esplorazione libera dei ragazzi e la discussione collettiva si può finalmente validare la congettura.</p> <p>L'insegnante dovrà chiedere "perché".</p> <p>In questo momento per gli studenti si evidenzia un "salto": è l'insegnante che aiuta gli studenti a superare il problema proponendo l'angolo al centro.</p> <p>In questo modo gli studenti dovrebbero aver compreso il motivo per cui gli angoli alla circonferenza sono congruenti (<i>controllo discendente</i>: la metà dello stesso angolo al centro).</p>
$AOB$	$ACB$														
$p^\circ$															
$30^\circ$															
$60^\circ$															
$90^\circ$															
$120^\circ$															
$150^\circ$															

<p><b>Fase 4 – Perché la metà dell’angolo al centro?</b></p> <p>Esamina la situazione in figura.                  Descrivi tutte le possibili relazioni tra gli angoli segnati.</p> 	<p><b>Controllo ascendente/selezione</b></p> <p>Ora si cambia il punto di vista dell’analisi della figura e sta cambiando anche l’obiettivo dell’esplorazione, pertanto occorre ripartire con il processo di selezione.</p> <p>Per gli studenti la dimostrazione è un “salto” notevole perché occorre considerare il caso particolare rappresentato in figura e anche in questo caso l’insegnante ci sembra indispensabile. Si potrebbe fornire ai ragazzi il file con la figura da prendere in considerazione in modo da facilitare il salto.</p> <p>Nel momento in cui gli studenti considerano le relazioni tra gli angoli sono spinti verso l’<i>abduzione</i>, cioè chi risolve sceglie tra le proprie conoscenze teoriche quella che ritiene possa essere usata nel particolare contesto in cui opera.</p>
<p><b>Fase 5</b></p> <p>L’angolo al centro <math>\alpha = AOB</math> è un angolo esterno del triangolo <math>BOV</math>. Perciò è congruente .....</p> <p>Gli angoli risultano ..... poiché il triangolo <math>OBV</math> è ..... avendo i lati .....</p> <p>Concludi:.....</p> <p>Da cui segue: .....</p> <p>Completa la dimostrazione esaminando le ulteriori situazioni delle due figure sottostanti.</p> <p><i>Suggerimento:</i> traccia la retta <math>VO</math> che incontra la circonferenza nell’ulteriore punto <math>C</math> e determina gli angoli al centro <math>AOC</math>, <math>COB</math> e i relativi angoli alla circonferenza <math>AVC</math>, <math>CVB</math> del tipo esaminato nella situazione sopra.</p> 	<p><b>Controllo discendente</b></p> <p>Avendo capito che si tratta di usare le proprietà dell’angolo esterno a un triangolo e che i triangoli sono isosceli, si può finalmente ottenere la dimostrazione che solitamente si trova sui libri di testo.</p> <p>Poi si riparte con l’<i>esplorazione/controllo ascendente e selezione</i> per altri casi, infatti considerare il caso particolare dovrebbe aver destato qualche malumore negli studenti che non si ritrovano più nelle figure esplorate in precedenza. Si dovrà obbligatoriamente chiarire che la dimostrazione andrebbe fatta per il caso più generale, ma la figura della Fase 4 ci permette di considerare le cose da un punto di vista estremamente semplice e utile al nostro obiettivo.</p>


Analizzando le schede da noi preparate secondo lo schema proposto nella ricerca didattica, ci siamo accorte che il nostro percorso era più ambizioso del previsto e spesso guidato dall’insegnante per convergere verso l’obiettivo.

Mantenendo fisso il nostro obiettivo, abbiamo quindi apportato delle modifiche rendendo più aperte le domande, in modo da permettere maggior libertà di azione agli studenti e “sminuzzando” i passaggi del nostro percorso per evitare di rendere troppo alti i “salti”.

Rimane comunque parzialmente irrisolto come far accettare “spontaneamente” agli studenti il fatto di dover fare la dimostrazione considerando il caso particolare.

Il nostro lavoro conduce a ripetere molte volte la procedura *esplorazione – controllo ascendente – congetture – abduzione – controllo discendente* in modo da creare l’abitudine a capire che cosa si sta facendo, evitando così di imparare a memoria ricette matematiche preconfezionate.



	<b>QUALE DIMOSTRAZIONE?</b>
<b>Autori</b>	A. Berra, M. Dalè, L. Genoni
<b>A chi è rivolto</b>	Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Si intende proporre una riflessione sul tema della dimostrazione in alcuni dei nuclei tematici centrali della programmazione di Matematica del secondo biennio e del quinto anno.

Si prosegue poi con lo studio di una possibile generalizzazione del teorema di Pitagora ai triangoli qualunque.

### ***Dove e come si dimostra?***

#### **Macrotemi tradizionali del secondo biennio e quinto anno**

1. “Geometria” analitica o metodo delle coordinate
2. Trigonometria
3. Analisi matematica

1. Il metodo delle coordinate:

- è un metodo di *dimostrazione* o di *verifica*?
- serve per *validare* o per *congetturare* o per *esemplificare*?

Il metodo delle coordinate viene introdotto come “strumento” già nel biennio, con affinamento successivo e approfondimento d’uso e di significati che ne consentano un uso a più livelli. Resta il fatto che a volte anche nei libri di testo non è fatta chiarezza sugli obiettivi che tale contenuto consente di raggiungere; se cioè sia un metodo di dimostrazione, se un metodo di rappresentazione o semplicemente uno strumento di esemplificazione di situazioni che consentono di arrivare alla congettura di proprietà da dimostrare in una seconda fase e con strategie differenti. L’ambiguità e la non dichiarata univoca finalità dello strumento restano impliciti per i più e, forse volutamente, per gli studenti, ma al docente deve essere chiaro, e a lui spetta, l’importante compito di definirne l’uso in ogni specifico contesto in cui se ne richieda l’applicazione come chiave di lettura irrinunciabile dello strumento.

Spesso le proprietà della geometria euclidea della retta, dei triangoli, dei poligoni sono tradotte sul piano cartesiano. Questo metodo di rappresentazione risulta di sicuro interesse sia sul piano semantico che epistemologico perché spinge alla riflessione sull’uso tautologico, quindi meramente rappresentativo, non produttivo e creativo di significati matematici nuovi. Resta l’indubbia validità sul piano didattico: gioca il ruolo di ponte tra il registro geometrico e quello algebrico, mediazione di sicuro impatto visivo e anche evocativo della rappresentazione mentale degli oggetti matematici.

Le proprietà analitiche delle coniche, invece, spesso precedono le proprietà sintetiche. Anche in questo caso resta ambiguo l’uso che si fa dello strumento ai fini della validazione, della definizione, dell’esplorazione e della rappresentazione delle proprietà delle figure geometriche.

2. La dimostrazione riappare prepotentemente nel problema della risoluzione del triangolo. Il metodo trigonometrico si presta all'uso della dimostrazione sia geometrica che algebrica di proprietà e di relazioni tra gli oggetti definiti dalla teoria. La dimostrazione resta comunque non centrale nello sviluppo di questi argomenti. Viene infatti percepita come viatico all'uso meccanico degli strumenti inizialmente costruiti e del cui significato spesso si perde traccia nella stratificazione algebrica di addestramento ossessivo e sterile di calcolo.
3. La dimostrazione è fondamentale negli elementi di analisi matematica e in questo caso il baricentro passa dagli aspetti geometrici a quelli analitico/funzionali.

#### *Osservazione*

Ci pare di poter sottolineare una differenza sostanziale che separa i due approcci: gli oggetti dello studio sono nuovi. Proprietà locali topologiche prendono il posto delle proprietà globali geometriche, fulcro dei temi studiati precedentemente. Cambia anche il “modo di dimostrare”:

- proprietà non sempre evidenti in sé, cioè facilmente rappresentabili in registro grafico, ma spesso riposte e impossibili da rappresentare;
- i teoremi che si dimostrano non sono costruttivi, bensì asseriscono l'esistenza di oggetti non direttamente osservabili e individuabili. Si perde pertanto il contatto degli oggetti costruiti e la percezione degli stessi, ragion per cui la dimostrazione assume un ruolo centrale, se non rappresenta in effetti l'unico ponte tra gli oggetti e la nostra comprensione degli stessi.

### ***Proposta di ampliamento - Generalizzazione del teorema di Pitagora***

#### **Motivazione**

- Il teorema di Pitagora si presta molto bene a esemplificare la procedura didattica della costruzione dei significati degli strumenti: *esemplificazione, esplorazione, congettura, validazione e dimostrazione*.
- È un teorema di *fondamento di tutte le teorie matematiche* oggetto di studio del triennio citate sopra nella riflessione introduttiva: metodo delle coordinate, risoluzione del triangolo, geometria dello spazio, analisi matematica nonché della *fisica*.
- È un teorema di fondamento anche epistemologico e di interpretazione in chiave storica dello sviluppo di questa disciplina.
- Nelle Indicazioni Nazionali e nelle Linee Guida compare come centrale nei programmi del biennio e come strumento fondamentale anche negli anni successivi.
- Lo strumento esplorativo di geometria dinamica GeoGebra risulta fondamentale nella costruzione di questo contenuto matematico.

#### **Sviluppo del percorso**

1. Posizione del problema nel caso del triangolo rettangolo di forme diverse. Riepilogo delle dimostrazioni già effettuate. Far sorgere la necessità di un ampliamento di tale teorema, per esempio costruendo con GeoGebra un triangolo rettangolo e trascinando, mantenendo fissa l'ipotenusa  $AB$ , il vertice  $C$ . Per continuità si insinua la richiesta della validità di un teorema simile per un generico triangolo.
2. Esplorazione con GeoGebra della relazione d'ordine che esiste tra le misure delle aree dei quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo modificato al punto 1. Trascinando il vertice  $C$  lungo l'asse del segmento  $AB$  si scopre che la somma dei quadrati dei lati  $AC$  e  $BC$ , se  $C$  dista da  $AB$  meno di  $AB/2$ , è minore del quadrato di  $AB$ , al contrario di quando  $C$  è trascinato al di sopra di tale posizione limite.

- Si chiede di congetturare allora sulla natura del termine mancante che rende tale disuguaglianza una uguaglianza. La riflessione si può guidare ora sulla natura dell'angolo in  $C$  nelle varie posizioni e osservare che se si proietta  $B$  sulla retta  $AC$ , la proiezione  $H$  appartiene al segmento  $AC$  se l'angolo  $C$  è acuto, esternamente al contrario.
- Si invitano allora gli allievi ad analizzare i due casi separatamente e a dedurre una relazione algebrica semplice, applicando ripetutamente il teorema di Pitagora per triangoli rettangoli, in cui quello iniziale viene ripartito dal segmento che proietta  $B$  su  $AC$  e si perviene così alla relazione cercata.
- Si tratta ora di interpretare i due addendi di segno opposto nei due casi come termini che dipendono esclusivamente dalle proprietà dell'angolo  $C$ . Si perviene così alla necessità di associare all'angolo un numero reale che descriva questa dipendenza geometrica. Si definisce così in modo "naturale" il *coseno* dell'angolo  $C$ .
- Gli *ampliamenti* poi si possono tradurre nei teoremi sulla *risoluzione del triangolo generico*. Sulla definizione analitica di perpendicolarità: definizione, significati di coefficiente angolare, pendenza, inclinazione. Riflessione ulteriore sulla perpendicolarità.
- Un ampliamento ulteriore riguarda il *concetto* e la *costruzione di ortogonalità* per approdare alla definizione e criterio di riconoscibilità di rette sghembe ortogonali e di rette non sghembe perpendicolari: concetto chiave della geometria dello spazio, centrale nelle nuove Indicazioni Nazionali e Linee guida.

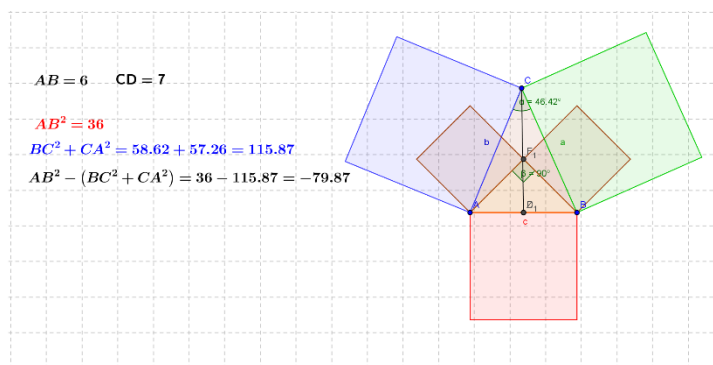



Figura 12. Ampliamento del teorema di Pitagora

	<b>UN PROBLEMA DI PÓLYA</b>
<b>Autori</b>	V. Alberti, A. Cena, A. Coviello, S. Fratti
<b>A chi è rivolto</b>	Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Per vent'anni, tra il 1946 e il 1965, il Dipartimento di Matematica della Stanford University organizzò un concorso a premi rivolto agli allievi dell'ultimo anno della scuola superiore.

I problemi proposti possono essere così classificati:

- guess and prove*, dove si richiedeva di congetturare e dimostrare una proprietà;

- *test consequences*, dove si richiedeva di verificare le conseguenze di una proposizione generale;
- *you may guess wrong*, una congettura "evidente" si rivelava errata;
- *small scale theory*, una successione di sottoproblemi permetteva di enunciare un teorema;
- *red herring*, un'ovvia relazione tra le ipotesi era irrilevante per la soluzione.

Nel 1974 questi problemi sono stati pubblicati, con note e soluzioni a cura di George Pólya e Jeremy Kilpatrick, con l'intento di fornire agli insegnanti materiali e spunti di riflessione.

Abbiamo consultato questa raccolta alla ricerca di un problema che potesse essere affrontato attraverso diverse fasi: esplorazione, produzione di congetture, validazione e dimostrazione.

La nostra attenzione si è concentrata sul quarto problema assegnato nel 1959:

*"Erect an (exterior) square on each side of an (arbitrarily given) triangle. Those 6 vertices of these 3 squares that do not coincide with a vertex of the triangle form a hexagon. Three sides of this hexagon are, of course, equal to the corresponding sides of the triangle. Show that each one of the remaining three sides equals the double of a median of the triangle."*

(da: G. Polya, J. Kilpatrick, *The Stanford Mathematics Problem Book: With Hints and Solutions*, Dover Books on Mathematics, 2009)

Abbiamo scelto questo problema perché nella fase di esplorazione si sono presentate varie proprietà che, assemblate in diverse concatenazioni logiche, permettono altrettante dimostrazioni della tesi. Presentiamo una proposta di lavoro ispirata a questo quesito, ipotizzando possibili processi risolutivi degli allievi.

### ***Proposta di lavoro***

#### **Prima parte - Il triangolo e l'esagono regolare**

Su ciascun lato di un triangolo è costruito esternamente un quadrato. I sei vertici dei quadrati che non coincidono con quelli dei triangoli formano un esagono. Sotto quali ipotesi l'esagono diventa regolare?

##### *Proposta*

1. Costruisci ed esplora la figura.
2. Affinché l'esagono sia regolare, il triangolo deve essere particolare?
3. Ripeti la costruzione a partire da un triangolo equilatero.
4. Osserva le relazioni tra le lunghezze dei lati dell'esagono e quelli del triangolo equilatero, formula e dimostra delle congetture.
5. L'esagono può essere regolare?

Dopo una prima fase di *wandering dragging*, gli allievi capiscono che devono concentrare l'esplorazione sui triangoli equilateri (figura 13).

Tuttavia, non riuscendo a rendere regolare l'esagono, essi cercano le ragioni del fallimento analizzando le relazioni tra le lunghezze dei lati.

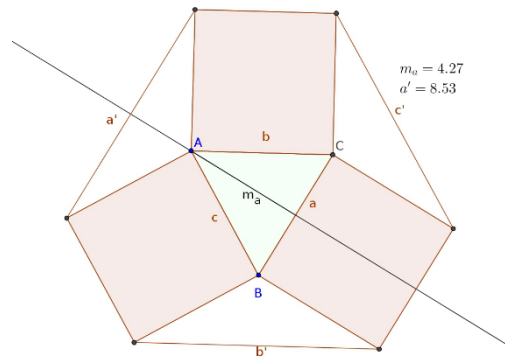


Figura 13

Gli allievi possono osservare e verificare che le altezze/mediane dei due triangoli opposti al vertice  $A$  giacciono sulla stessa retta e possono dedurre che la lunghezza  $a'$  del lato dell'esagono opposto al vertice  $A$  è doppia rispetto a quella dell'altezza del triangolo. Si possono invitare gli allievi a scrivere concatenazioni del tipo:

$$a' = 2m_a \Rightarrow a' = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3}a$$

Considerando gli angoli e i lati uguali nei due triangoli opposti al vertice  $A$ , gli allievi possono scegliere tra le proprie conoscenze quale utilizzare per dimostrare questa congettura (abduzione).

Infine, gli allievi concludono che l'esagono non può essere regolare e producono una dimostrazione organizzando in un'unica struttura le concatenazioni logiche fatte nei punti precedenti (distanziamento globale).

### Seconda parte - Il triangolo e l'esagono

Nella discussione al termine della prima parte abbiamo osservato che, se il triangolo è equilatero, l'altezza/mediana uscente da un vertice giace sulla stessa retta dell'altezza/mediana del triangolo isoscele opposto.

Come varia la situazione considerando un generico triangolo?

*Proposta*

- Che cosa osservi trascinando i vertici del triangolo?
- Puoi congetturare una proprietà?
- Qual è la relazione tra la lunghezza  $a$  del lato dell'esagono e la lunghezza  $m_a$  della mediana relativa al lato del triangolo opposto ad  $A$ ?
- Puoi dimostrare queste proprietà?

In un triangolo generico l'altezza e la mediana non coincidono. Trascinando i vertici del triangolo interno, gli allievi possono verificare che la mediana  $AM$  si mantiene ortogonale al lato opposto ad  $A$  del triangolo esterno e, viceversa, la mediana  $AM$  è ortogonale al lato opposto ad  $A$  del triangolo interno (figura 14).

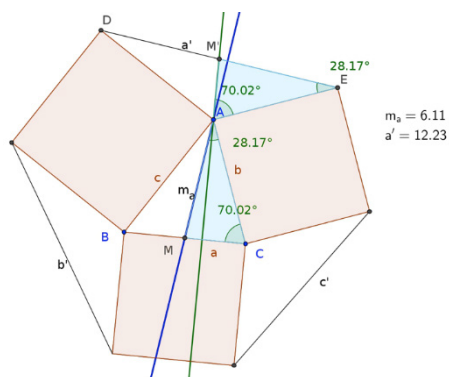


Figura 14

Si osserva che due coppie di triangoli si mantengono congruenti:  $AMC$  con  $EM'A$  e  $BMA$  con  $AMD$  e così la lunghezza  $\overline{DE}$  si mantiene doppia di quella della mediana  $\overline{AM}$ .

Nella figura 14 si presentano tante relazioni tra le sue parti, trovarne il nesso di conseguenze logiche è una sfida che dovrebbe invogliare e motivare gli allievi alla dimostrazione. La costruzione fatta suggerisce di considerare l'ortogonalità e lavorare sugli angoli e i lati per applicare i criteri di congruenza dei triangoli (abduzioni).

La dimostrazione fornita da Pólya si muove da un'altra abduzione. Egli considera le mediane, quindi rapporti tra le lunghezze che fanno intervenire la teoria della similitudine (figura 15).

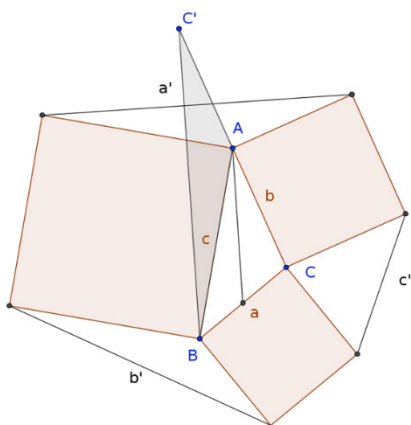


Figura 15

### Una terza abduzione

Lo “scambio” tra mediana e altezza è il nucleo del problema di Febbraio 2013 di FLATlandia<sup>2</sup>

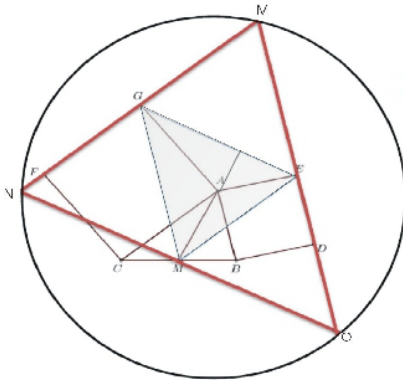
Nella dimostrazione proposta da un allievo di terza media abbiamo riscontrato un esplicito processo di abduzione. Riportiamo il passo della dimostrazione:

*“Se il segmento  $EG$  è perpendicolare alla mediana  $AM$  allora tale retta è l'altezza del triangolo  $GME$  (in particolare è proprio l'altezza rispetto al lato  $EG$ ). Per dimostrare ciò...”* (figura 16)

<sup>2</sup> <http://web.unife.it/progetti/fardicono/flatlandia/FLATlandia> è una attività, promossa dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara, che consiste nel proporre mensilmente un problema agli studenti della scuola secondaria di primo e secondo grado.

Classe 3D, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

a) Dimostrare che il segmento EG è perpendicolare alla retta della mediana AM del triangolo ABC.



Osservando la costruzione proposta dal quesito, abbiamo subito unito i vertici GME, individuando un triangolo. Se il segmento EG è perpendicolare alla retta della mediana AM, allora, tale retta è l'altezza del triangolo GME (in particolare è proprio l'altezza rispetto al lato EG). Per dimostrare ciò, dopo aver costruito anche le altre altezze del triangolo GME, abbiamo tracciato nei punti G, M ed E tre rette parallele ai rispettivi lati opposti (ME, EG e GM), individuando all'intersezione delle tre rette i vertici di un nuovo triangolo MNO [ci sono due punti M nella figura]. Abbiamo osservato che i tre

4

Figura 16

## Riflessioni sulla valutazione. Esplorazione e dimostrazione nelle prove INVALSI

*a cura di M. Dalè*


Nella tabella vengono riportati alcuni quesiti INVALSI relativi al concetto di composizione e scomposizione di figure piane, di equivalenza, ... I quesiti contrassegnati con un asterisco sono quelli presi in considerazione in questo capitolo.

Altre indicazioni: rete AVIMES (<http://www.avimes.it/>)

<i>Anno</i>	<i>Livello</i>	<i>N. quesito</i>	<i>Scopo</i>
2009	02	D13	Osservare una situazione e individuare una posizione
2011	02	D13	Composizione e scomposizione di figure piane
2010	05	D15	Riconoscere rappresentazioni spaziali di un oggetto da punti di vista diversi
2010	05	D19	Relazioni tra aree
2011	05	D20	Relazioni tra forme e oggetti
2011	05	D23	Completamento di figure con giustificazione della costruzione
2012	05	D5*	Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione
2012	05	D26*	Poligoni regolari e loro proprietà
2014	05	D10	Area di figure piane e giustificazione
2010	06	D12	Angoli e loro ampiezza con richiesta di giustificazione
2010	06	D21	Relazioni tra superfici
2011	06	D2	Equivalenza di figure piane e scomposizione
2011	06	D5	Confronto di aree
2011	06	D16	Completamento di figure con giustificazione della costruzione
2011	06	D26	Triangoli e simmetrie
2012	06	D14*	Angoli e loro ampiezza
2012	06	D24*	Elementi di semplici figure piane
2013	06	D11*	Riconoscere ed esplicitare la differenza di lunghezza tra lato e diagonale di un quadrato (o ipotenusa e cateto di triangolo rettangolo)
2013	06	D21*	In una sequenza di triangoli con stessa base individuare la relazione tra le aree. Individuare un elemento $n$ -simo di una sequenza
2010	08	D21	Triangoli in sequenza, individuare una relazione e giustificare
2010	08	D23	Cogliere una relazione tra elementi geometrici e giustificare
2011	08	D6	Calcolo area e indicazione calcoli
2011	08	D9	Analisi di figure e relazioni tra aree
2012	08	E6*	Composizione e scomposizione di figure
2012	08	E12*	Perimetri di poligoni
2012	08	E16*	Figure simili
2013	08	D12*	Cogliere la relazione tra sezione e altezza di un tronco di cono
2014	08	D4	Riconoscere forme nello spazio
2014	08	D22	Equivalenza di triangoli (argomentazione da riconoscere)



2012	10	D3*	Triangoli equivalenti
2012	10	D8*	Geometria dello spazio. Riconoscere diagonal e triangoli. Argomentare
2013	10	D5*	Triangoli equivalenti
2013	10	D17*	Calcolo area mediante scomposizione
2014	10	D11	Equivalenza e congruenza di figure piane (argomentazione)
2014	10	D16	Relazioni tra circonferenze e rettangoli (argomentazione)
2014	10	D18	Trapezio circoscritto a una circonferenza, riconoscere relazioni
2014	10	D23	Utilizzare proprietà del triangolo e delle similitudini

	<b>Autori</b>	S. Beltramino, P. Curletti, C. Idrofano, L. Poli
---	---------------	--

### ***Argomentare e giustificare in geometria nelle prove INVALSI***

Abbiamo reperito le informazioni dai “Quadri di Riferimento” forniti dall’INVALSI nei vari anni, dai rapporti “Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti” e nei “Quaderni” e solo in seguito abbiamo analizzato le prove, soffermandoci in particolare su quelle proposte negli anni 2012 e 2013.

Prima di iniziare ci pare opportuno ricordare che una prova come quella dell’INVALSI è uno strumento di indagine finalizzato a rilevare dati oggettivi, quindi da un certo punto di vista è uno strumento “povero” rispetto ad altri strumenti di rilevazione degli apprendimenti, in particolare rispetto a quelli messi in atto dai docenti nella loro didattica quotidiana.

*“Le prove INVALSI si pongono il duplice scopo di verificare da una parte se finalità, obiettivi, competenze, previste dalle Indicazioni nazionali e dalle Linee guida che il MIUR ha pubblicato per i diversi ordini di scuola, sono di volta in volta raggiunti o meno e in quale misura e dall’altra di verificare se i livelli di competenza degli studenti italiani risultano coerenti con quanto previsto dai Quadri di Riferimento delle Indagini Internazionali, quali TIMSS, PIRLS e OCSE-PISA.*

*In sintesi alle singole istituzioni scolastiche spetta il compito di valutare gli apprendimenti, giorno dopo giorno, periodicamente, annualmente; all’INVALSI – o comunque a qualsiasi ente terzo valutativo – spetta di valutare la tenuta e l’andamento del sistema: si tratta dunque di ambiti di indagine diversi e complementari.”*

*(da: E. Castagnola, M. Chimetto, A. Orlandoni, QUADERNI SNV N. 2 – ITA e MAT. Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 Esempi di lettura dei dati restituiti alle scuole.)*

Detto questo, il punto di riferimento delle prove INVALSI è sicuramente il Quadro di Riferimento in cui si trovano, tra le altre cose, i processi cognitivi. Il Quadro di Riferimento infatti presenta le idee chiave che guidano la progettazione delle prove per quanto riguarda:

- gli ambiti della valutazione, cioè quali aspetti della matematica del primo ciclo della scuola si valutano, e la scelta degli argomenti oggetto della valutazione;
- i modi della valutazione, ossia le caratteristiche degli strumenti di valutazione e i criteri seguiti nella costruzione delle prove.

Il Quadro di Riferimento non è neutro in quanto frutto di una scelta dettata, tra le altre cose, da una particolare visione della matematica, da una particolare idea di ragazzo, di cittadino, di scuola, di famiglia, di società, ... qui si legge l'intento valutativo delle prove INVALSI: *“L'apprendimento della matematica è una componente fondamentale nell'educazione e la crescita della persona, secondo un punto di vista che ha origini lontane e che è oggi universalmente condiviso. Nel contempo, nella società attuale la matematica è nel cuore del trattamento quantitativo dell'informazione nella scienza, nella tecnologia e nelle attività economiche e nel lavoro, e quindi la competenza matematica è un fattore fondamentale nella consapevolezza del futuro cittadino e nella sua riuscita nel mondo professionale. Interessa perciò sondare se le conoscenze che la scuola, ai diversi livelli, stimola e trasmette, sono ben ancorate a un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze stabili, almeno sui livelli essenziali. Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento “meccanico” o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere e usare il pensiero matematico. Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, che pure costituiscono una componente irrinunciabile della disciplina matematica, non dovrebbero essere considerati fini a se stessi.*

*Visti gli obiettivi generali che sono attribuiti all'insegnamento della matematica dalle disposizioni di legge, ma più in generale dalla nostra società, nel solco di una visione della matematica profondamente radicata nella cultura, le prove INVALSI non devono limitarsi a valutare l'apprendimento della matematica utile, ma devono cercare di far riferimento alla matematica come strumento di pensiero e alla matematica come disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico.*

*[...] Tali prove consistono di quesiti costruiti in relazioni a due dimensioni: i contenuti matematici e i processi cognitivi coinvolti nel lavoro matematico e nella risoluzione di problemi.”*

*(da: Quadro di Riferimento - Matematica, INVALSI)*

Confrontando i processi cognitivi proposti nei vari livelli scolari si può notare come vi siano dei piccoli cambiamenti tra la Prova Nazionale (PN) e la prova pensata per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado (SNV10), in particolare per il processo 6 che interessa a noi in questo momento.

Nella tabella seguente sono riportate le descrizioni dei processi cognitivi e, nell'ultima colonna, il “macroprocesso” a cui appartengono<sup>3</sup>, anche se nel Rapporto del 2012/13 i macroprocessi diventano solo più tre: *formulare, interpretare e utilizzare* e non è detto in maniera esplicita dove si pensa di inserire il processo 6.

Dal nostro punto di vista questo cambiamento è una piccola perdita anche se forse è un adeguamento alle prove internazionali. Nel TIMSS, per esempio, i domini cognitivi sono i seguenti:<sup>4</sup> *Conoscenza, Applicazione e Ragionamento.*

---

<sup>3</sup> Nel Rapporto INVALSI viene sottolineato che gli otto processi sono stati raggruppati, al fine di rendere più semplice e comprensibile la restituzione dei dati soprattutto per quel che riguarda l'individuazione dei punti di forza e di debolezza degli studenti, in quattro gruppi di “macroprocessi”: *Concetti e procedure, Rappresentazioni, Modellizzazione e Argomentazione.*

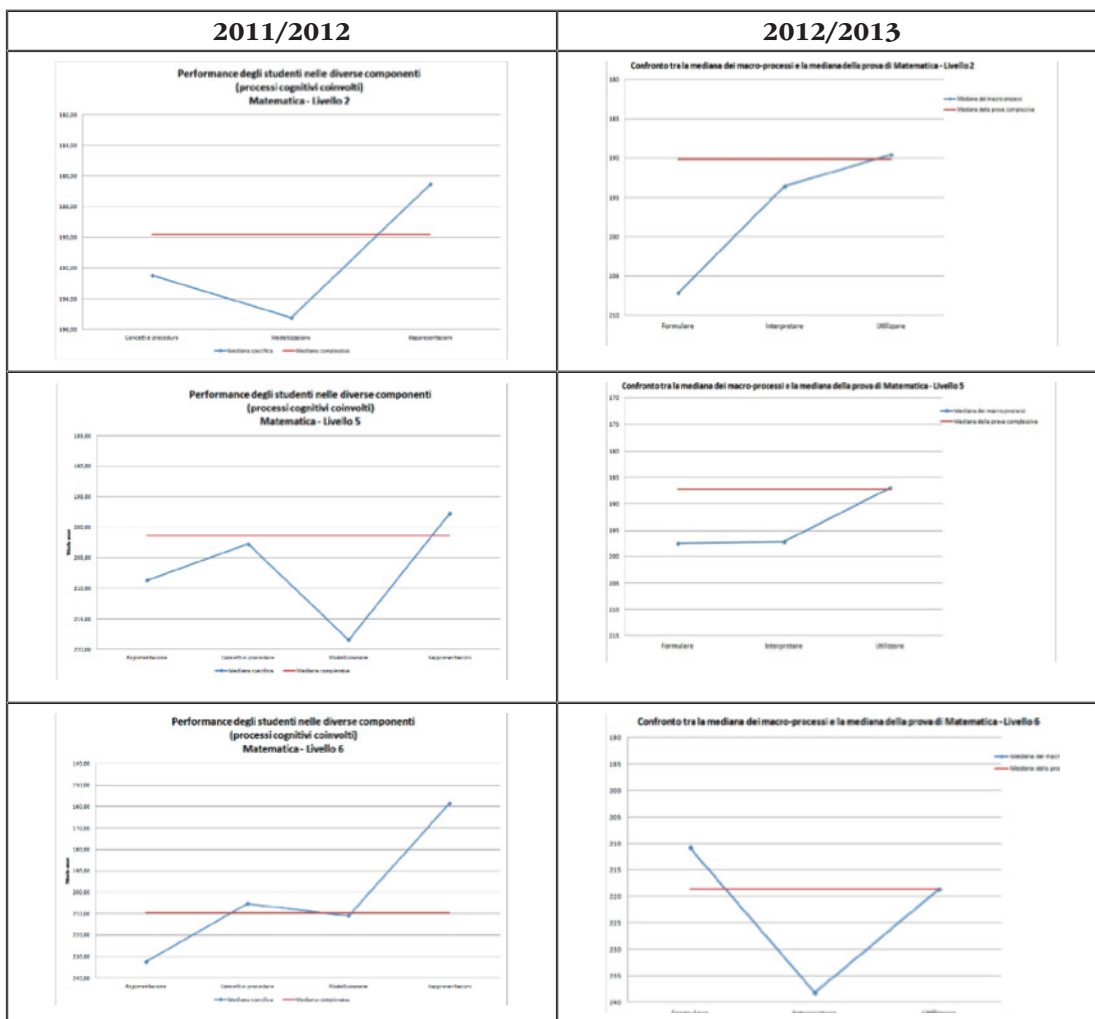
<sup>4</sup> Da *Quadro di riferimento TIMSS – 2011*. Da notare che il termine *Argomentare* compare nel TIMSS solo nel quadro di riferimento di Scienze.

Il primo riguarda i fatti, le procedure e i concetti che gli studenti devono conoscere; applicazione è centrato sull'abilità degli studenti di applicare nozioni e conoscenze concettuali per risolvere problemi o rispondere a quesiti e infine *ragionamento* va oltre alla soluzione di problemi di routine per includere situazioni non famigliari, contesti complessi e problemi che richiedono una soluzione in più fasi.

<i>Cod</i>	<i>PN e precedenti</i>	<i>SNV10</i>	
1	Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture, ...)	Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture, ...)	Concetti e procedure
2	Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, ...)	Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico)	
3	Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...)	Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...)	Rappresentazioni
4	Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo, ...)	Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo, ...)	Modellizzazione
5	Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura, ...)	Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, ...)	
6	Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...)	Utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare, ...)	<b>Argomentazione</b>
7	Utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...)	Utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...)	Modellizzazione

8	Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...)	Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...)	Rappresentazioni
---	---	---	------------------

Confrontando le performance degli studenti rispetto ai processi cognitivi coinvolti si può osservare come il processo *Argomentazione* sia costantemente al di sotto della mediana della prova complessiva in tutti i livelli per i quali è previsto.





Dai grafici precedenti si nota come il processo *Argomentazione* sia particolarmente difficile per i nostri studenti anche perché piuttosto delicato dal punto di vista didattico.

Nel “QUADERNI SNV N. 1 - MAT. Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11, Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica Classe seconda – scuola secondaria di II grado”<sup>5</sup> si legge che progettare e realizzare ambienti di insegnamento–apprendimento mirati a sviluppare competenze argomentative non è semplice; al tempo stesso è fondamentale, vista l’importanza centrale che tali competenze rivestono nella formazione matematica e, più in generale, intellettuale di una persona.

Perché gli studenti incontrano forti difficoltà in attività che richiedono di attivare processi argomentativi? Le spiegazioni possono essere molteplici; nel seguito proponiamo ipotesi:

- chi argomenta deve possedere conoscenze solide sull’oggetto dell’argomentare: le conoscenze sull’argomento, ben interiorizzate, sono una premessa necessaria all’attivazione di processi argomentativi pertinenti ed efficaci;
- argomentare richiede la capacità di saper gestire, dal punto di vista logico e linguistico, i vari passi del ragionamento e la loro concatenazione;
- chi argomenta deve conoscere e possedere diversi modelli di argomentazione, che consentano esemplificazioni, giustificazioni, validazioni, dimostrazioni; deve possedere la capacità di attivare, a seconda dell’esigenza e del tipo di argomentazione, inferenze induttive, abduttive, deduttive, ma anche analogie, particolarizzazioni, generalizzazioni, ...;
- se le conoscenze sull’argomento sono necessarie, esse non sono sufficienti a rendere efficace e pertinente un’argomentazione: importanti sono anche gli aspetti teleologici, ossia quelli legati alla finalità per cui si scelgono di utilizzare certe conoscenze con determinate modalità piuttosto che altre conoscenze con altre modalità.

<sup>5</sup> Il Quaderno, reperibile sul sito [www.invalsi.it](http://www.invalsi.it), è scritto da Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola.

Spesso gli studenti incontrano difficoltà proprio a utilizzare le conoscenze possedute su un certo argomento, perché non hanno ben compreso o fatto proprio il fine che devono conseguire. Inoltre sono altrettanto importanti gli aspetti retorici di un'argomentazione, ossia le modalità con cui si sceglie di sostenere un'argomentazione o di condurre una spiegazione. Aspetti epistemici, teleologici e retorici sono fortemente intrecciati e tutti fondamentali in un'argomentazione efficace e pertinente;

- è necessario infine, e questo è forse il punto più delicato e cruciale, che chi argomenta abbia interiorizzato i valori culturali che caratterizzano la scelta argomentativa come via privilegiata nell'esporre le proprie ragioni, nello spiegare e chiarire il proprio punto di vista.

Soddisfare questa condizione richiede da parte dell'insegnante un lavoro lungo e sistematico, che consenta allo studente di creare, se ancora non esiste, un retroterra culturale adeguato.

Il contesto in cui mediamente si lavora in una classe di scuola secondaria di primo o di secondo grado, in cui si verifica spesso il rischio della frammentazione della cultura in materie, con difficoltà di effettiva comunicazione tra i docenti di diversi ambiti, con eccessiva attenzione al conseguimento di competenze tecniche, spesso con numeri elevati di studenti e ridotto numero di ore per materia, non è certo favorevole all'instaurarsi di una "cultura dell'argomentazione". La progettazione e la realizzazione di ambienti di insegnamento-apprendimento adeguati a favorire lo sviluppo di competenze argomentative richiedono la collaborazione tra docenti di diverse materie, che consenta di individuare tematiche comuni sulle quali lavorare dai diversi punti di vista delle varie discipline. Il concorso di diversi insegnanti consente quella pluralità di voci e di punti di vista su una stessa tematica che è il cuore dell'argomentazione e consente anche di sviluppare le attività secondo i tempi lunghi richiesti dalle discussioni, dal confronto e dall'analisi delle diverse opinioni.

Analizzando in particolare le prove nei due anni considerati, siamo andati a individuare quali item sono stati inseriti nell'ambito Spazio e Figure con il processo prevalente 6; la seguente tabella riporta quanto detto.

	<i>Livello 2</i>	<i>Livello 5</i>	<i>Livello 6</i>	<i>Livello 8</i>	<i>Livello 10</i>
2012/13			D11 D21a	D12	D5
2011/12		D5 D26	D14 D24	E6 E12 E16	D3 D8

Analizzando nello specifico gli item, riportati qui di seguito con il commento presente nella Guida alla lettura, si osserva che non compare mai la parola *Dimostrare*, in effetti compare una sola volta in una prova per il Livello 10, ma per il nucleo Aritmetica e Algebra. In un intervento di Rossella Garuti si legge che l'assenza di tale termine è dovuto alla specificità della prova pensata per il Livello 10: la prova è la stessa per tutti gli indirizzi e le indicazioni sono piuttosto frammentate e differenti tra loro. Anche per questo l'INVALSI ha scelto di non utilizzare nella prova contenuti specifici del biennio delle superiori, ma in particolare contenuti specifici del primo ciclo, con l'intento di introdurre gradualmente semplici argomentazioni e dimostrazioni.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> da: Rossella Garuti, La geometria nelle prove INVALSI: un'analisi verticale, [www.invalsi.it](http://www.invalsi.it)

**LIVELLO 5, ANNO SCOLASTICO 2011/2012**  
**CLASSE QUINTA SCUOLA PRIMARIA**

**QUESITO D5**

L'insegnante ha consegnato a Lucia e a Giada due fogli uguali di carta bianca rettangolari e due foto rettangolari uguali. Le due ragazze devono incollare le foto sul foglio bianco. Hanno eseguito il lavoro in questo modo:



Lavoro eseguito da Lucia



Lavoro eseguito da Giada

- a. Chi ha lasciato più spazio bianco?
- A.  Lucia
  - B.  Giada
  - C.  Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco
  - D.  Non si può sapere perché non si conoscono le misure

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

.....

**Scopo della domanda:** determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione.

**Risposta corretta**

- a. C
- b. La risposta è considerata corretta se si fa riferimento al fatto che sia i fogli sia le foto hanno la stessa superficie oppure hanno le stesse dimensioni.

L'alunno deve saper argomentare riguardo all'equivalenza tra figure e non considerare solo l'aspetto percettivo. Si richiede infatti di motivare la scelta della risposta, e questo può dar modo all'insegnante di individuare anche eventuali misconcezioni che possono essere causa di difficoltà e ostacoli.

**Risultato del campione**

	Risp. manc.	A	B	<b>C</b>	D
a.	0,5	13,5	23,6	<b>57,1</b>	4,9

	Risp. manc.	Errata	<b>Corretta</b>
b.	4,6	51,7	<b>43,0</b>

**QUESITO D26**

Giovanni osserva il disegno di questo esagono regolare e dice: “Il perimetro della parte colorata in grigio chiaro si può trovare usando la misura del lato dell’esagono.”



Giovanni ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Sì, perché .....

.....

.....

No, perché .....

.....

.....

**Scopo della domanda:** poligoni regolari e loro proprietà.

**Risposta corretta**

Sì, perché... Lo studente deve fare riferimento al fatto che la figura corrispondente alla parte colorata in grigio chiaro ha i lati uguali a quelli dell’esagono.

Per rispondere correttamente lo studente deve riconoscere che nell’esagono ci sono sei triangoli equilateri uguali e deve riconoscere che il rombo grigio chiaro è appunto formato da due di questi triangoli equilateri. Si tratta quindi di ricavare informazioni dalle proprietà della figura.

**Risultato del campione**

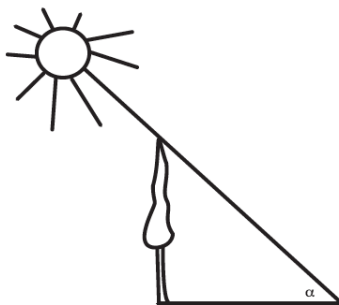
Risp. manc.	Errata	<b>Corretta</b>
12,2	53,7	<b>29,4</b>



**LIVELLO 6, ANNO SCOLASTICO 2011/2012**  
**CLASSE PRIMA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO**

**QUESITO D14**

La lunghezza dell'ombra di un albero varia durante il giorno a seconda dell'altezza del sole sull'orizzonte.



Quanto deve misurare l'angolo  $\alpha$  affinché l'altezza dell'albero e la lunghezza della sua ombra diventino uguali?

Risposta: .....

**Scopo della domanda:** angoli e loro ampiezza.

**Risposta corretta:**  $45^\circ$

Lo studente, per poter rispondere correttamente, deve riconoscere che quando l'albero e la sua ombra hanno la stessa misura formano un triangolo rettangolo isoscele oppure la metà di un quadrato.

**Risultato del campione**

Risp. manc.	Errata	Corretta
10,5	24,1	<b>65,2</b>

**QUESITO D24**

L'insegnante chiede ai suoi alunni: un triangolo equilatero e un quadrato possono avere lo stesso perimetro?

- Anna risponde: no. Infatti il triangolo ha tre lati e il quadrato ne ha quattro.
- Luigi risponde: no. Infatti un quadrato è sempre più grande di un triangolo.
- Ugo risponde: sì. Quando succede i lati del triangolo sono più lunghi di quelli del quadrato.
- Fabiana risponde: sì. Quando succede il lato del triangolo è uguale a quello del quadrato.

Chi ha ragione?

- A.  Anna
- B.  Luigi
- C.  Ugo
- D.  Fabiana

**Scopo della domanda:** elementi di semplici figure piane.

**Risposta corretta:** C

Il quesito richiede di argomentare in ambito geometrico. Il quadrato e il triangolo equilatero sono figure familiari ai ragazzi ma una riflessione sugli elementi geometrici, a volte, può evidenziare misconcetti nascosti. In questo caso infatti il quesito investiga la possibilità di costruire figure piane isoperimetriche.

Le argomentazioni proposte dai diversi distrattori si riferiscono in A al numero dei lati, in B all'estensione della figura e quindi al concetto di area, in D alla lunghezza dei lati.

**Risultato del campione**

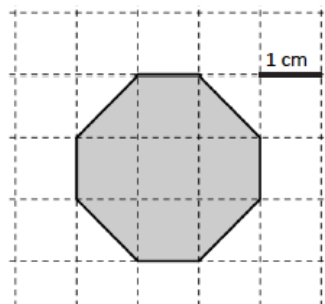
Risp. manc.	A	B	<b>C</b>	D
2,5	31,0	14,1	<b>38,3</b>	13,0

**LIVELLO 6, ANNO SCOLASTICO 2012/13**  
**CLASSE PRIMA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO**

**QUESITO D11**

Giulio dice che l'ottagono rappresentato in figura ha il perimetro di 8 cm.

Giulio ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.



- Giulio ha ragione perché .....
- .....
- Giulio non ha ragione perché .....
- .....
- .....

**Scopo della domanda:** riconoscere ed esplicitare la differenza di lunghezza tra lato e diagonale di un quadrato (o ipotenusa e cateto di triangolo rettangolo).

**Macroprocesso:** utilizzare.

**Risposta corretta**

Giulio non ha ragione perché... alcuni lati sono lunghi 1 quadretto, altri sono lunghi come la diagonale di un quadretto.

Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento al fatto che la diagonale del quadretto è maggiore del lato oppure che rilevano che la lunghezza del perimetro è maggiore di 8 cm.

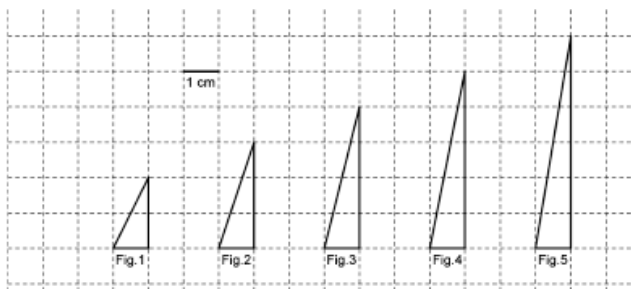
Lo studente può intuire che la misura del perimetro fornita è scorretta semplicemente riconoscendo che la diagonale di un quadretto è sempre più lunga del lato oppure misurando direttamente i lati con il righello. Quesiti di questo tipo possono essere utili per verificare la presenza di convinzioni errate e cioè che diagonale e lato abbiano la stessa misura oppure che l'ottagono possa essere solo regolare.

**Risultato del campione**

Risp. manc.	Errata	Corretta
6,0	79,7	<b>14,3</b>

**QUESITO D21**

Osserva i seguenti triangoli.



a) Da un triangolo al successivo l'area del triangolo:

- A.  Raddoppia
- B.  Triplica
- C.  Aumenta di 1 cm<sup>2</sup>
- D.  Aumenta di 0,50 cm<sup>2</sup>

b) Se l'altezza dei triangoli continua ad aumentare di 1 cm da una figura alla successiva, quanti centimetri misurerà l'altezza del triangolo della figura 100?

- A.  102
- B.  101
- C.  100
- D.  99

**Ambito prevalente:** (a.) Spazio e Figure, (b.) Relazioni e funzioni.

**Scopo della domanda**

- a. In una sequenza di triangoli con stessa base individuare la relazione tra le aree.
- b. Individuare un elemento  $n$ -simo di una sequenza.

**Macroprocesso:** formulare.

**Risposta corretta:** a. D, b. B

- a. Per rispondere correttamente a questo primo quesito, lo studente deve calcolare l'area di almeno due triangoli successivi e verificarne la differenza. L'analisi dei fascicoli potrebbe essere utile per riflettere sulle opzioni non corrette per individuare le relazioni tra altezza e area di triangoli aventi la stessa base. Nel caso delle opzioni A e B la relazione tra altezza e area è di proporzionalità diretta (raddoppia e triplica), nel caso dell'opzione C la relazione tra altezza e area è lineare ma non direttamente proporzionale.

Da notare il distrattore C che è stato scelto dal 52% dei ragazzi.

Per noi il processo prevalente non è il 6, o almeno non riusciamo a vedere l'aspetto argomentativo qui.

- b. Lo studente deve individuare qual è la regolarità che permette di passare dal numero della figura alla sua altezza. L'opzione C potrebbe essere molto accattivante in quanto corrisponde al numero di posizione della figura richiesto, quando invece lo studente deve accorgersi che avendo la figura 1 altezza 2 e aumentando sempre di 1 cm l'altezza, allora la figura 100 avrà altezza pari a  $100 + 1$ .

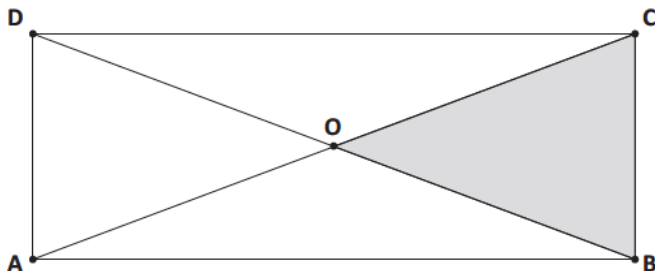
**Risultato del campione**

	Risp. manc.	A	B	C	D
a.	2,1	12,1	2,6	52,7	<b>30,5</b>
b.	4,3	16,5	<b>45,3</b>	26,3	7,6

**LIVELLO 8, ANNO SCOLASTICO 2011/2012**  
**CLASSE TERZA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO**

**QUESITO E6**

In figura è rappresentato il rettangolo  $ABCD$  con le sue diagonali. Se conosci l'area del rettangolo, puoi calcolare l'area del triangolo in grigio?



- A.  No, perché i quattro triangoli di vertice  $O$  non sono tutti uguali fra loro.
- B.  No, perché non conosco le dimensioni del rettangolo.
- C.  Sì, perché i quattro triangoli di vertice  $O$  sono equivalenti.
- D.  Sì, perché i quattro triangoli di vertice  $O$  sono isosceli.

**Ambito prevalente:** composizione e scomposizione di figure.

**Risposta corretta:** C

Anche in questo item lo studente deve scegliere tra quattro argomentazioni date. I risultati mostrano che tutte e quattro le opzioni per gli studenti sono plausibili, in particolare le due opzioni A e B raccolgono insieme quasi il 60% dei consensi; l'opzione corretta viene scelta solo dal 24,1%. Potrebbe rivelare una certa confusione tra i termini congruente, equivalente e uguale. In una attività di classe sarebbe interessante chiedere di giustificare perché i quattro triangoli sono equivalenti ragionando sulle formule per calcolare l'area di un triangolo.

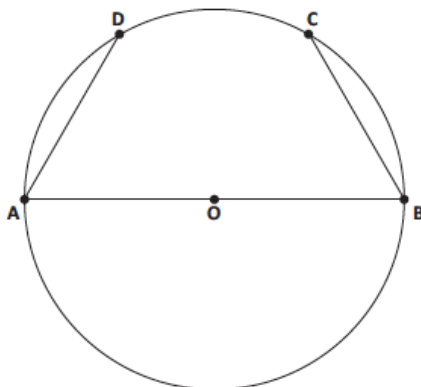
Se indichiamo con  $m$  e  $n$  le dimensioni del rettangolo allora possiamo dimostrare per via algebrica, o anche utilizzando il linguaggio naturale, che i triangoli  $COB$  e  $AOD$  hanno area uguale a  $(m * n : 2) : 2$  e i triangoli  $COD$  e  $BOA$  hanno area  $(n * m : 2) : 2$  e che quindi tutti e quattro i triangoli sono equivalenti e questo vale per ogni rettangolo.

**Risultato del campione**

Risp. manc.	A	B	C	D
1,6	26,9	30,8	<b>24,1</b>	16,4

**QUESITO E12**

La circonferenza in figura ha il diametro di 10 cm e le corde  $AD$  e  $BC$  uguali al raggio.



a. Qual è il perimetro del quadrilatero  $ABCD$ ?

Risposta:.....cm

b. Giustifica la tua risposta.

.....

**Scopo della domanda:** perimetri di poligoni.

**Risposta corretta:**

a. 25

b. Nella risposta deve essere esplicitato che il segmento  $DC$  è uguale al raggio.

Esempi di risposte corrette:

- $DC$  è un raggio.
- $CB$  è uguale al raggio e forma un triangolo equilatero  $COB$  e quindi  $DC$  è anche lui uguale al raggio.
- $DC$  è uguale a 5 cm e quindi  $10 + 5 + 5 + 5 = 25$  cm.
- Ho misurato e ho visto che  $DC$  ha la stessa misura di  $CB$ .
- Perché  $COB$  e  $COD$  e  $ADO$  sono triangoli equilateri.
- Anche  $DC = 5$  cm.

Nell'item a. lo studente doveva calcolare il perimetro del quadrilatero, eventualmente completando (realmente o mentalmente) la figura.

Nell'item b. lo studente doveva giustificare la risposta data. Nella risposta bastava indicare che il segmento  $DC$  aveva la stessa misura del raggio del cerchio. Infatti non era richiesto di giustificare perché il segmento  $DC$  avesse la stessa misura del raggio.

Nonostante questo, solo il 42% degli studenti ha fornito una giustificazione e il 17% ha omesso la risposta. La catena di affermazioni che porta a concludere che  $DC$  è uguale al raggio può essere uno spunto per una attività di classe:  $DOA$  e  $CBO$  sono triangoli equilateri, pertanto il triangolo  $DOC$  è anch'esso equilatero in quanto triangolo isoscele con angolo al vertice di  $60^\circ$ , da cui  $DC = \text{raggio} = 5$  cm.

Da osservare che più di un quarto degli studenti non risponde all'item b.

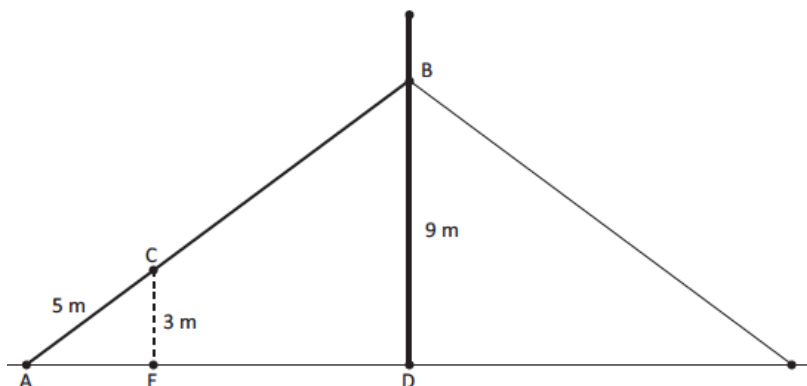
**Risultato del campione**

	Risp. manc.	Errata	<b>Corretta</b>
a	17,0	21,9	<b>60,8</b>
b	27,4	30,0	<b>42,0</b>

**QUESITO E16**

Il cavo ( $AB$ ) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m.

Una lampada di segnalazione ( $C$ ) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra ( $A$ ).



a. Qual è la lunghezza del cavo  $AB$ ?

Risposta.....

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

**Scopo della domanda:** figure simili.

**Risposta corretta:**

a. 15 m

b. Esempi di risposte corrette:

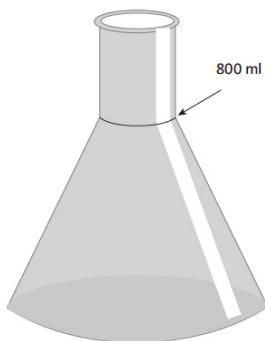
- $3 : 9 = 5 : x \quad x = 5 \times 9 : 3 = 15$
- 3 è un terzo di 9 quindi 5 è un terzo di 15.
- Ho misurato e ho visto che  $CB$  è il doppio di  $AC$ .
- $ADB$  e  $AEC$  sono triangoli simili.
- $AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad ED = 8 \quad AB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$
- 9 è il triplo di 3 quindi  $AB$  è il triplo di  $AC$ .

Lo studente deve riconoscere la similitudine tra i triangoli  $ACE$  e  $ADB$  in quanto i segmenti  $CE$  e  $BD$  sono entrambi perpendicolari al terreno e quindi paralleli tra loro. Le strategie di soluzione possono essere diverse, come si vede dagli esempi di risposte corrette, e si accettavano anche risposte nelle quali non era esplicitata la similitudine tra i triangoli. Nell'item b. la percentuale di omissioni è molto elevata (42%) segno che l'abitudine a giustificare una risposta non è ancora parte della prassi didattica.

Da notare l'elevata percentuale di non risposte.

**Risultato del campione**

	Risp. manc.	Errata	<b>Corretta</b>
a.	28,5	20,6	<b>50,7</b>
b.	42,1	25,1	<b>32,3</b>

**LIVELLO 8, ANNO SCOLASTICO 2012/2013  
CLASSE TERZA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO****QUESITO D12**

Giovanni versa 100 ml di acqua alla volta nel recipiente che vedi in figura fino a 800 ml.

Ogni volta segna con una tacchetta sul recipiente il livello raggiunto dall'acqua.

Com'è la distanza tra le tacchette segnate da Giovanni?

- A.  La distanza tra le tacchette diminuisce verso l'alto.
- B.  La distanza tra le tacchette aumenta verso l'alto
- C.  La distanza tra le tacchette si mantiene costante
- D.  La distanza tra le tacchette prima aumenta e poi diminuisce



**Scopo della domanda:** cogliere la relazione tra sezione e altezza di un tronco di cono.

**Macroprocesso:** formulare.

**Risposta corretta:** B

Lo studente deve mettere in relazione il significato di volume, inteso come spazio occupato, e forma del recipiente che lo contiene. In questo caso, trattandosi di un tronco di cono, a parità di volume (100 ml) la distanza tra le tacchette aumenta via via che diminuisce la sezione del tronco di cono.

**Risultato del campione**

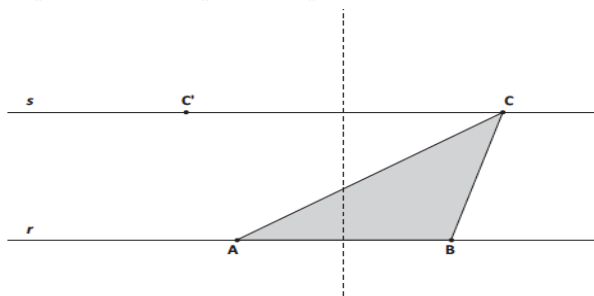
Risp. manc.	A	<b>B</b>	C	D
1,7	13,8	<b>57,7</b>	20,2	6,5

**LIVELLO 10, ANNO SCOLASTICO 2011/2012**

**CLASSE SECONDA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO**

**QUESITO D3**

$ABC$  è uno degli infiniti triangoli aventi la base  $AB$  sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $C$ .



Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di  $ABC$ ?

- A.  Soltanto il triangolo  $ABC'$ , simmetrico di  $ABC$  rispetto all'asse  $AB$
- B.  Soltanto il triangolo isoscele di base  $AB$
- C.  Soltanto il triangolo rettangolo in  $A$  e il triangolo rettangolo in  $B$
- D.  Tutti gli infiniti triangoli di base  $AB$

**Scopo della domanda:** triangoli equivalenti

**Risposta corretta:** D

Lo studente qui dovrebbe “vedere” che, al variare della posizione di  $C$  sulla retta  $s$ , parallela alla retta  $r$  su cui giace la base  $AB$  dei triangoli, l'altezza dei triangoli considerati non varia, così come non varia la base.

Le opzioni A, B, C dovrebbero funzionare da distrattori per gli studenti che non hanno ancora consolidato discrete abilità di esplorazione dinamica mentale, assai importanti in matematica.

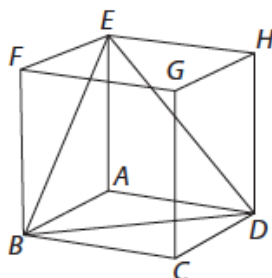
Probabilmente lo sviluppo e il consolidamento di tale abilità potrebbe essere favorita dall'abitudine all'uso di software di geometria dinamica come strumenti di esplorazione e osservazione di proprietà e “fatti” geometrici.

**Risultato del campione**

Risp. manc.	A	B	C	<b>D</b>
3,4	53,3	7,8	7,2	<b>28,1</b>

**QUESITO D8**

La seguente figura rappresenta in prospettiva un cubo che è stato sezionato con il piano passante per i vertici  $B, D, E$ .



Marina afferma: “Il triangolo  $BDE$  è un triangolo equilatero”. Marina ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Sì, perché .....

.....

.....

No, perché .....

.....

.....

**Risposta corretta:** Sì, perché... “i lati sono diagonali delle facce del cubo” oppure...

In generale, la risposta è accettabile se fa riferimento alla proprietà che le diagonali delle facce di un cubo sono uguali tra loro, utilizzando anche un linguaggio meno preciso e chiaro, ma privo di scorrettezze.

Non sono accettabili risposte che fanno riferimento a misure empiriche, eseguite sulla figura proposta nel testo della prova, dei lati del triangolo: ciò che gli studenti devono utilizzare è una proprietà del cubo.

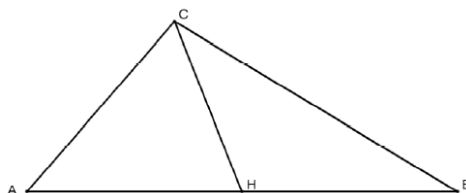
**Risultato del campione**

Risp. manc.	Errata	<b>Corretta</b>
10,3	41,1	<b>47,2</b>

**LIVELLO 10, ANNO SCOLASTICO 2012/2013**  
**CLASSE SECONDA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO**

**QUESITO D5**

$H$  è il punto medio del lato  $AB$  del triangolo  $ABC$ .



I triangoli  $AHC$  e  $HBC$  hanno la stessa area perché

- A.  La distanza  $C$  da  $AB$  è la stessa nei due triangoli e  $AH = HB$
- B.  La mediana  $CH$  divide il triangolo in due triangoli congruenti
- C.  Hanno come altezza comune  $CH$  e le relative basi sono della stessa lunghezza.
- D.  I triangoli  $CHA$  e  $CHB$  sono tutti e due triangoli isosceli.

**Scopo della domanda:** riconoscere, tra diverse argomentazioni, quella corretta.

**Macroprocesso:** utilizzare.

**Risposta corretta:** A

Per rispondere correttamente è sufficiente che gli studenti conoscano la formula per il calcolo dell'area di un triangolo e sappiano identificare la misura dell'altezza relativa a una base come la distanza tra il vertice da cui è condotta l'altezza e il lato opposto a tale vertice.

Il distrattore C può essere molto attrattivo per studenti che leggono con poca attenzione: lo studente, infatti, deve riconoscere che  $CH$  non è in generale altezza ma mediana e quindi concludere che l'affermazione contenuta nell'opzione C è falsa.

**Risultato del campione**

	Risp. manc.	<b>A</b>	B	C	D
<b>G</b>	4,0	<b>22,7</b>	18,8	46,4	8,1
<b>L</b>	4,0	<b>29,2</b>	16,3	44,8	5,7
<b>T</b>	3,7	<b>18,3</b>	20,7	49,3	8,0
<b>P</b>	4,6	<b>17,1</b>	20,7	45,0	12,6

In generale possiamo notare come le argomentazioni vengano proposte o con risposte aperte, con una richiesta di ragionamento, oppure con item a risposta chiusa in cui si chiede di scegliere qual è l'argomentazione corretta, come per esempio l'item seguente.

**QUESITO D17**

L'insegnante dice: "Prendiamo un numero naturale che indichiamo con  $n$ . Cosa si può dire del risultato di  $n(n - 1)$ ? È sempre pari, oppure sempre dispari, oppure può essere qualche volta pari e qualche volta dispari?". Alcuni studenti rispondono in questo modo:

Roberto: "Può essere sia pari sia dispari, perché  $n$  è un numero qualsiasi".

Angela: "È sempre dispari, perché  $n - 1$  indica un numero dispari".

Ilaria: "È sempre pari, perché  $3 \times (3 - 1)$  fa 6, che è pari".

Chiara: "È sempre pari perché  $n$  e  $(n - 1)$  sono numeri consecutivi e quindi uno dei due deve essere pari".

Chi ha ragione e fornisce la spiegazione corretta?

- A.  Roberto
- B.  Angela
- C.  Ilaria
- D.  Chiara

**Risposta corretta:** D

In questo item in cui si suppone che gli studenti conoscano già la risposta corretta, quello che l'insegnante può richiedere agli studenti è di spiegare perché le altre affermazioni non forniscono la spiegazione corretta. È una competenza importante, nel caso dei quesiti a scelta multipla, essere in grado di individuare la risposta corretta attraverso l'eliminazione di quelle scorrette.

Leggendo inoltre in verticale i quesiti possiamo notare, soprattutto in geometria, che la loro difficoltà è più o meno comparabile, specialmente per i quesiti riferiti alla scuola secondaria di primo e secondo grado, ma osservando la percentuale di risposte corrette notiamo che anche queste sono più o meno le stesse, segno forse che i nostri studenti non riescono a crescere in conoscenze e abilità argomentative? Dovrebbe essere un forte punto di riflessione per gli insegnanti italiani. Riteniamo sia importante abituare gli studenti a spiegare e motivare le proprie scelte fin dai primi anni di scuola in un lento processo elicoidale. Le Prove INVALSI ci dicono che nel momento in cui si chiede agli studenti di spiegare il perché di una certa scelta la percentuale di errore sale nettamente così come la percentuale di omissioni, e questo dovrebbe spingere l'insegnante accorto a riflettere sul maggior peso da attribuire alla fase argomentativa.

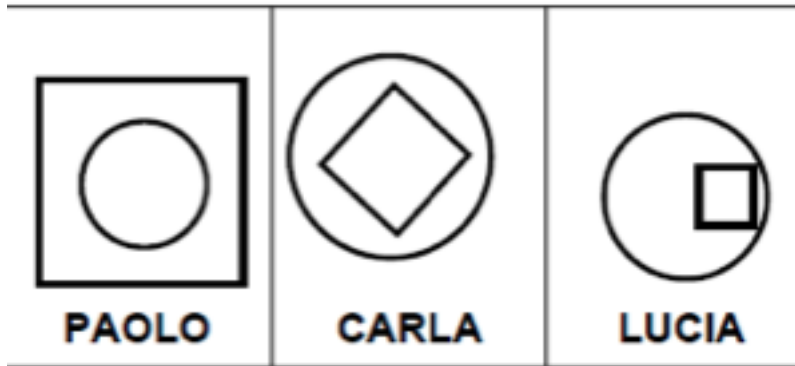
Ma non c'è solo l'INVALSI. La rete AVIMES<sup>7</sup> da anni lavora sull'argomentazione e sull'autovalutazione e propone nel suo Catalogo di Geometria item argomentativi da proporre già nella classe prima della scuola primaria, come quello riportato qui sotto in figura 17. A dimostrazione del fatto che la competenza di argomentare debba essere insegnata con un lungo processo, iniziato già fin dai primi anni della scuola.

---

<sup>7</sup> AVIMES è l'acronimo Autovalutazione d'Istituto per il Miglioramento dell'Efficacia della Scuola, [www.avimes.it](http://www.avimes.it), ed è una rete di scuole che da anni lavora sull'autovalutazione e sull'argomentazione in particolare per la scuola primaria. L'item è tratto dal "Catalogo di geometria".

*Il disegno geometrico*

Tre bambini devono fare questo compito: “Disegna un quadrato dentro a un cerchio”. Ecco i loro disegni.



*Figura 17. Item AVIMES*

Chi ha fatto il disegno sbagliato?.....

Spiega perché .....

.....

.....



## RICHIAMI TEORICI - ALTEZZA

*a cura di P. Pezzini*



### Definizione

In un triangolo, il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto prende il nome di **altezza** relativa a tale lato.

### Osservazione

Molta attenzione all'uso del linguaggio corretto in matematica. Per esempio l'altezza di un triangolo è un segmento non è la sua misura.

### Teorema

In un triangolo isoscele la mediana, l'altezza e la bisettrice relative alla base coincidono.

### Definizione

Dati una retta  $r$  e un punto  $P$ , il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta prende il nome di **proiezione ortogonale del punto  $P$  sulla retta  $r$** .

### Osservazione

Se un punto  $P$  appartiene a  $r$  allora esso coincide con la sua proiezione ortogonale.

### Teorema

Il segmento di perpendicolare condotto da un punto a una retta è minore di qualunque altro segmento condotto dal punto alla retta.

### Definizione

La **proiezione ortogonale di un segmento su una retta** è il segmento che ha come estremi le proiezioni ortogonali degli estremi del segmento sulla retta.

### Osservazione

Segmenti diversi possono avere la stessa proiezione ortogonale sulla stessa retta.

### Definizione

La **distanza di un punto da una retta** è il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta.

### Osservazione

Da non confondere il concetto di distanza con la lunghezza della distanza. La distanza è il percorso minimo da un punto a una retta.

### Teorema

Due segmenti condotti da un punto a una retta e aventi su questa proiezioni ortogonali congruenti sono congruenti.

### **Teorema**

Due segmenti condotti da un punto a una retta, e aventi su questa proiezioni ortogonali non congruenti, non sono congruenti. Inoltre, a proiezione ortogonale maggiore corrisponde il segmento maggiore.

### **Teorema**

Si considerino più segmenti condotti da un punto a una retta, allora si ha:

- il minore è perpendicolare alla retta;
- se sono congruenti, allora hanno proiezioni ortogonali congruenti;
- se non sono congruenti, allora hanno proiezioni ortogonali non congruenti e a segmenti maggiori corrispondono proiezioni ortogonali maggiori.

### **Teorema**

In un poligono, ogni lato è minore della somma di tutti gli altri lati.

#### *Osservazione*

Da questo teorema si ha la possibilità di introdurre il concetto di distanza tra due punti nel modo seguente.

### **Definizione**

Si dice **distanza tra due punti A e B** il segmento che li unisce.

#### *Osservazione*

La distanza tra due punti è il più breve percorso tra due punti.

L'introduzione della nozione di distanza tra due punti può essere l'occasione per parlare (in modo intuitivo) già nella scuola secondaria inferiore del concetto di geodetica, facendo notare, per esempio, che sulla sfera il concetto analogo è quello dato dagli archi di cerchi massimi.

### **Definizione**

Date due rette parallele, la distanza di un qualsiasi punto su una retta dalla seconda prende il nome di **distanza tra due rette parallele**.

### **Teorema**

Le tre altezze di un triangolo (o i loro prolungamenti) si incontrano in uno stesso punto detto **ortocentro**.

#### *Osservazione importante*

Importante far disegnare le tre altezze di un triangolo con molti esempi, facendo notare che l'ortocentro di un triangolo può trovarsi internamente, su un lato o esternamente a triangolo.

Infine, dopo aver ripreso il concetto di **misura** ("La misura di una grandezza è il rapporto tra questa e una grandezza a essa omogenea presa come riferimento"), si può definire la misura della **lunghezza** di un segmento ("La lunghezza di un segmento è ciò che quel segmento ha in comune con tutti gli altri a esso congruenti").



**RICHIAMI TEORICI – ANGOLI***a cura di P. Pezzini***Definizione**

Si considerino due semirette aventi l'estremo in comune. Esse dividono il piano in due parti. Ciascuna di queste due parti prende il nome di **angolo**.

L'origine comune delle due semirette prende il nome di **vertice** dell'angolo, mentre le due semirette prendono il nome di **lati** dell'angolo.

*Osservazione*

La definizione di angolo è fondamentale anche se difficile: si deve molto insistere sul fatto che l'angolo è una parte di piano (illimitata) e non è la sua misura. Inoltre si deve precisare che due semirette con la stessa origine formano due angoli.

Un'altra difficoltà consiste nell'accettare che il concetto di lato di un angolo non presuppone che esso abbia lunghezza limitata.

**Definizione**

Un angolo si dice **convesso** se non contiene il prolungamento dei suoi lati.

Un angolo si dice **concavo** se contiene il prolungamento dei suoi lati.

Un angolo si dice **piatto** quando i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro.

Un angolo si dice **giro** quando i suoi lati coincidono.

*Osservazione*

Segue dalla definizione di angolo che due semirette aventi l'origine in comune formano necessariamente un angolo convesso e uno concavo. È inoltre necessario far notare che un angolo piatto coincide con un semipiano, mentre un angolo giro coincide con un piano.

**Definizione**

Due angoli che hanno il vertice e un lato in comune e gli altri due lati situati da parti opposte rispetto al lato comune si dicono **consecutivi**.

Due angoli consecutivi i cui lati non in comune sono uno il prolungamento dell'altro si dicono **adiacenti**.

Riprendendo la definizione di congruenza ("Due figure si dicono congruenti se con un movimento rigido è possibile farle coincidere") si può introdurre il concetto di **ampiezza** di un angolo ("L'ampiezza di un angolo è ciò che esso ha in comune con tutti gli angoli a esso congruenti") e si può passare al confronto tra angoli potendo così, attraverso la sovrapposizione, decidere quale è minore o maggiore, senza introdurre il concetto di misura.

Affinché la somma di angoli diventi un'operazione di gruppo abeliano, occorre introdurre il concetto di angolo orientato nel modo seguente.

### **Definizione**

Un **angolo** si dice **orientato** se è stata scelta per esso una delle due orientazioni possibili (orario-antiorario).

In questo caso si deve spiegare che cosa si intende per orientazione di un angolo e anche far attenzione al fatto che l'angolo  $ABC$  è diverso dall'angolo  $CBA$ .

Di conseguenza si può definire, in modo corretto, il concetto di somma di angoli.

#### *Osservazione*

Importante far notare che le stesse proprietà valgono per insiemi diversi e, proprio per questo motivo, si possono trattare questi insieme allo stesso modo (i numeri razionali con l'operazione di somma, i numeri relativi con l'operazione di somma, i segmenti con l'operazione di somma, gli angoli con l'operazione di somma). Ecco perché si usa lo stesso termine "somma". In qualche modo è necessario far capire il concetto di struttura algebrica e non solo di insieme di numeri, di segmenti, di angoli, spiegando che senza un'operazione con determinate proprietà non si può fare molto!

### **Definizione**

Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.

#### *Osservazione*

Si osservi che angoli adiacenti sono supplementari ma angoli supplementari non sono necessariamente adiacenti.

### **Teorema**

Due angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.

### **Definizione**

Due rette che si incontrano in un punto dividono il piano in quattro angoli. Le due coppie di angoli, così individuate, in cui i lati di uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro angolo, si dicono **angoli opposti al vertice**.

### **Teorema**

Due angoli opposti al vertice sono congruenti.

#### *Osservazione*

Gli ultimi due teoremi sono molto facili, ma sono fondamentali perché permettono di introdurre la nozione di perpendicolarità.

### **Definizione**

Due rette che, incontrandosi, formano quattro angoli congruenti si dicono **perpendicolari**.

#### *Osservazione*

In Geometria Euclidea (ossia definita in dimensione  $n$  su spazi affini costruiti su spazi euclidei) i termini di ortogonalità e di perpendicolarità sono sinonimi.

**Definizione**

I quattro angoli congruenti individuati da due rette perpendicolari si dicono **angoli retti**.

**Teorema**

Un angolo retto è la metà di un angolo piatto.

**Definizione**

Un angolo convesso si dice **acuto** se è minore di un angolo retto.

Un angolo convesso si dice **ottuso** se è maggiore di un angolo retto (essendo convesso è minore di un angolo piatto).

Due angoli consecutivi la cui somma è un angolo retto si dicono **complementari**.

**Teorema (della bisettrice)**

Esiste ed è unica una semiretta che ha l'origine nel vertice di un angolo e lo divide in due angoli congruenti.

**Corollario**

Data una retta e un suo punto esiste ed è unica la retta passante per tale punto che divide, insieme con la retta data, il piano in quattro angoli congruenti.

Tale corollario può essere riformulato in questo modo:

Data una retta e un suo punto esiste ed è unica la perpendicolare alla retta data.

Infine, dopo aver ripreso il concetto di **misura** (“La misura di una grandezza è il rapporto tra questa e una grandezza a essa omogenea presa come riferimento”), si può definire la misura dell'ampiezza di un angolo sia in **gradi** (“ $1^\circ$  è la centottesima parte di un angolo piatto”) sia in **radianti** (“1 rad è l'angolo che individua un arco di circonferenza pari al raggio che lo sottende”).

## RICHIAMI TEORICI - DIMOSTRAZIONE

*a cura di P. Pezzini*



La dimostrazione fa della matematica una disciplina fortemente caratterizzata dalla giustificazione di nozioni, regole e tecniche, con una riflessione su di esse e sulle loro conseguenze, indipendentemente dalla possibilità di applicarle.

In matematica una dimostrazione è eseguita all'interno di una teoria nella quale gli enunciati condivisi sono esplicitati all'inizio dell'attività dimostrativa.

Tale metodo ha inizio nel mondo greco con Euclide che ne *Gli Elementi* (IV-III secolo a.C.) riassume, completandole, le principali ricerche e conoscenze dei matematici che lo avevano preceduto.

Gli Elementi di Euclide sono il primo esempio, per molti secoli insuperato, di sistema assiomatico deduttivo, ossia di teoria fondata su un insieme di proposizioni di partenza (assiomi o postulati) a partire dalle quali, mediante dimostrazioni, si deducono, ossia si ricavano, altre proposizioni dette teoremi.

Tale concezione di dimostrazione subisce vari cambiamenti nei secoli.

Il XVII secolo segna una profonda frattura nella concezione della dimostrazione (Torricelli, Descartes, Pascal, Wallis). Si cerca di sviluppare metodi che consentano di ottenere risultati e scoprire proprietà significative, con riferimento ai nuovi enti matematici che la rivoluzione scientifica in corso richiedeva di studiare.

Un'altra profonda trasformazione nel concetto di dimostrazione avviene agli inizi del '900.

Le geometrie non euclidee e la scoperta dell'esistenza di antinomie nelle teorie matematiche formulate portano all'esigenza di ripensare le conoscenze e le tecniche matematiche in uso, cercando di fondarle su basi sicure. Bisogna precisare i concetti di assioma, teorema, dimostrazione, teoria ed essere sicuri che le tecniche utilizzate nella ricerca matematica non portino a contraddizioni.

Nella matematica moderna si può allora assumere quella che segue come una definizione del concetto di dimostrazione.

*In una teoria  $T$  si dice dimostrazione della tesi  $t$  dalle ipotesi  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  una sequenza finita e ordinata di enunciati che termina con la tesi  $t$  e tale che ogni enunciato soddisfa una delle seguenti condizioni:*

- è un assioma della teoria  $T$
- è una delle ipotesi  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$
- è dedotto da uno o più degli enunciati precedenti mediante applicazione delle regole logiche.

Sono Frege, Hilbert e altri logici a enfatizzare la necessità di porre attenzione alle regole e questo è un fatto nuovo nell'evoluzione della matematica. In questo modo, con Hilbert, la dimostrazione diviene un calcolo logico che precisa la nozione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria. Nasce così il concetto di dimostrazione formale che precisa la nozione intuitiva di dimostrazione.

Nella didattica, l'approccio a un problema o un teorema non è mai semplice e si possono individuare alcune fasi che lo caratterizzano:

- analisi e esplorazione del problema;
- produzione di congetture;
- loro validazione;
- dimostrazione di quelle corrette.

Nei processi di risoluzione è importante utilizzare opportuni mediatori che consentano di facilitare le varie fasi. Uno di questi è l'ambiente "carta e matita". A esso si affiancano validi software didattici. Tra i più utilizzati sia in ambito di geometria sintetica che analitica vi è GeoGebra che offre la possibilità, come anche altri software di geometria, di manipolare dinamicamente le figure.

### **Riferimenti bibliografici**

D. Paola, O. Robutti, La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria,  
<http://www.matematica.it/paola/quaderno%20ministero%20novembre%201998.pdf>

F. Arzarello, F. Olivero, D. Paola, O. Robutti, Dalle congetture alle dimostrazioni. una possibile continuità cognitiva,  
<http://www.matematica.it/paola/Conggetture%20e%20dimostrazioni%20finale.pdf>

## BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- AA.VV. (2003). *Lenti & occhiali. Un manuale di ottica oftalmica*. Palermo: Medical Books.
- Andreini, M., Manara, R., Prestipino, F., Saporiti, I. (2011). *Pensare e fare matematica, Geometria*. Milano: Etas.
- Arzarello F., Robutti O. (1997). *Il problema aperto in geometria con l'utilizzo di un software didattico*. NUOVA SECONDARIA, 2, 73-76.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (1999). *Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva*. Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22b/3, 209-233.
- Bertinetto, C., Metiainen, A., Paasonen, J., Voutilainen, E. (2012). *Contaci! 1 Misure, spazio e figure*. Bologna: Zanichelli.
- Castelnuovo, E. *Matematica 1. Numeri e figure*. Firenze: La Nuova Italia.
- Conti, F., Barsanti, M., Franzoni, T. (1994) *Le Olimpiadi della Matematica - Problemi dalle gare italiane*. Bologna: Zanichelli.
- Cremaschi, R. (2001). *Matematica per problemi*. Bologna: Zanichelli.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali per i licei*.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il Primo Ciclo*.
- Paola, D., Robutti, O. (2001). *La dimostrazione alla prova*. In: Matematica ed aspetti didattici, Quaderni della Direzione Classica, 45, 97-201. Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
- Polya, G. & Kilpatrick, J. (2009). *The Stanford Mathematics Problem Book: With Hints and Solutions*. Mineola, New York: Dover Publications, INC.
- Sada, S. *Sci alpinismo in Valle di Susa*. Ciriè, Torino: Fraternali Editore.
- Sasso, L. (2011). *Nuova matematica a colori, Geometria*. Novara: Petrini.
- Sasso, L. (2012). *Nuova Matematica a colori. 4*. Novara: Petrini.
- Sbaragli, S. (2010). *Qui cade sua... altezza*. Matematica: didattica e avventura. Numero speciale monografico di Vita Scolastica. Anno 64, numero 18, pagg. 25-27.
- School Mathematics Project*. (1972). Bologna: Zanichelli.
- UMI, (2001), *Matematica 2001: Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)*, XXII Convegno UMI-CIIM, Ischia.

UMI, (2003), *Matematica 2003*: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica, Ciclo secondario, Viareggio.

UMI (2013), *Giochi di Archimede – Gara Biennio*. <http://www.umi.it>

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

<http://www.istruzione.it/>

<http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/>

<http://community.geogebra.org/it/>

<http://difima.i-learn.unito.it/>

<http://risorsedocentipon.indire.it>

[http://www.indire.it/ponmatematicacorso1/all/09\\_06\\_05\\_m@tabel\\_sintesi1.pdf](http://www.indire.it/ponmatematicacorso1/all/09_06_05_m@tabel_sintesi1.pdf)

<http://www.invalsi.it>

<http://www.filippin.it/morin/attivita/supermath2010/scimemi.pdf>

<http://phet.colorado.edu/it/simulation/the-ramp>

<http://www.maurofornasari.com/htmcorso/rollio.gif>

[http://education.nationalgeographic.com/education/multimedia/interactive/sailingsimulator/?ar\\_a=1](http://education.nationalgeographic.com/education/multimedia/interactive/sailingsimulator/?ar_a=1)

[http://www.thepirateking.com/ships/sail\\_simulator.htm](http://www.thepirateking.com/ships/sail_simulator.htm)

<http://www.wb-sails.!/portals/209338/news/boatRace/boatRaceFrameSet.htm>

[http://www.nshof.org/index.php?option=com\\_content&view=category&layout=blog&id=32&Itemid=104&limitstart=10](http://www.nshof.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=32&Itemid=104&limitstart=10)

<http://teachers.eg!-k12.org/navy-sail-design/>

<http://www.oceansail.co.uk/Articles/Maths.html>

<http://www.princeton.edu/~rvdb/JAVA/sail/sail.html>

<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/sailing.html>

[http://www.slideshare.net/Stanford\\_Engineering/e-day-2012margotsailing](http://www.slideshare.net/Stanford_Engineering/e-day-2012margotsailing)

[http://www.maa.org/external\\_archive/devlin/devlin\\_11\\_99.html](http://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_11_99.html)

## BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

<http://www.sailsimulator.com/>

[http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni\\_SNV\\_N3\\_MAT.pdf](http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N3_MAT.pdf)

[http://www.engheben.it/prof/materiali/invalsi/invalsi\\_seconda\\_superiore/2006-2007/invalsi\\_matematica\\_2006-2007\\_secondaria\\_prima.pdf](http://www.engheben.it/prof/materiali/invalsi/invalsi_seconda_superiore/2006-2007/invalsi_matematica_2006-2007_secondaria_prima.pdf)

<http://www.lastshopping.it/blog/offerte/bertoni-tende-da-campeggio-igloo-canadesi-e-cassette-per-vivere-la-natura.html>

<https://www.google.it/maps>

<http://digilander.libero.it/sussidi.didattici/nordsud/nordsud.html>

<http://www.ilfattoquotidiano.it/2013/11/12/pattinaggio>

[http://it.wikipedia.org/wiki/Illusione\\_ottica#Figure\\_ambigue](http://it.wikipedia.org/wiki/Illusione_ottica#Figure_ambigue)

<http://www.toscana.lafragola.kataweb.it/pisa/medie/fibonacci/story302176.html>

<http://www.caisem.org/public/Didattica%5CTUTTI%5COrientamento%20in%20montagna.pdf>

[http://it.wikipedia.org/wiki/Pendenza\\_topografica](http://it.wikipedia.org/wiki/Pendenza_topografica)

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/peculi/peculi.htm>

<http://macosa.dima.unige.it/schede/ps2/PS-2.htm>

<http://www.gulliver.it/itinerario/57695/>

[http://online.scuola.zanichelli.it/amaldi-files/Cap\\_3/Triangolazione\\_Cap3\\_Par6\\_Amaldi.pdf](http://online.scuola.zanichelli.it/amaldi-files/Cap_3/Triangolazione_Cap3_Par6_Amaldi.pdf)

<http://www.vialattea.net/eratostene/>

[http://www.istituto25aprile.gov.it/documenti/materiale\\_didattico/Compititopografia\\_vacanze\\_estive3G.pdf](http://www.istituto25aprile.gov.it/documenti/materiale_didattico/Compititopografia_vacanze_estive3G.pdf)

[http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/2525\\_mate\\_competenze\\_completo.pdf](http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/2525_mate_competenze_completo.pdf)

<http://www.avimes.it/>

<http://web.unife.it/progetti/fardicono/#atlandia/FLATlandia>

[http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013\\_II\\_Sec\\_Secondo\\_grado\\_GUIDA\\_MATEMATICA.pdf](http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013_II_Sec_Secondo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf)

<http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/guide/2012-2SUP-GUIDA-MATEMATICA.pdf>

[http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/griglie/Griglia\\_correzione\\_guida\\_lettura\\_SNV1011\\_Mat\\_II\\_superiore.pdf](http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/griglie/Griglia_correzione_guida_lettura_SNV1011_Mat_II_superiore.pdf)



