Atti del VI GEOGEBRA ITALIAN DAY - 2016

L'ATTIVITÀ DEI DOCENTI CON GEOGEBRA NELLA FORMAZIONE E NELLA SPERIMENTAZIONE

6 ottobre 2016, Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

A cura di:
Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

L'ATTIVITÀ DEI DOCENTI CON GEOGEBRA NELLA FORMAZIONE E NELLA SPERIMENTAZIONE
Atti del VI GeoGebra Italian Day 2016

A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2018
Revisione testo: Elisa Gentile

Comitato scientifico-organizzativo: Ferdinando Arzarello, Silvia Beltramino, Alessio Drivet, Elisa Gentile, Miranda Mosca, Giuseppina Rinaudo, Ornella Robutti, Cristina Sabena, Ada Sargenti, Claudia Testa, Germana Trinchero

Responsabile del Convegno: Ornella Robutti

Esperto tecnico: Tiziana Armano

Coordinamento rapporti con le scuole: Daniela Truffo (Città metropolitana di Torino, CE.SE.DI.)

ISBN: 9788867058075
In copertina: immagine creata con GeoGebra dalla prof.ssa Ada Sargenti

INDICE

Relazioni in plenaria

Aitzol Lasa	The progression on algebraization levels with GeoGebra	15
Giovannina Albano, Umberto Dello Iacono	GeoGebra, E-learning e Digital Storytelling: una possibile integrazione per l'apprendimento in matematica	27

Comunicazioni

Virginia Alberti, Sara Labasin, Ferdinando Arzarello, Eugenia Taranto, Arianna Coviello	MOOC di Geometria: presupposti, obiettivi e risultati	41
Barbara Brignone, Elena Furlan, Francesca Marzolla, Anna Vicidomini	L'esperienza della Quality Class	49
Emanuele Ciancio, Annalisa Baderna, Patrizia Laiolo	Terreni infidi: rigori sbagliati e biciclette che sbandano	57
Walter Dambrosio	Analisi Matematica oggi: un percorso per l'Università	63
Barbara Kimeswenger	Identifying High-Quality GeoGebra Materials for Teaching Mathematics	69
Sara Labasin, Virginia Alberti, Ferdinando Arzarello, Ornella Robutti, Eugenia Taranto	Il nuovo MOOC Numeri: obiettivi e aspettative	81
Enrico Martoglio	Inserire belle figure nei propri documenti ossia: come usare GeoGebra con LATEX	87
Monica Mattei, Carlotta Idrofano, Daniela Pavarino, Ornella Robutti, Annarosa Rongoni, Cinzia Soldera	Attività per una matematica accessibile e inclusiva. Introduzione	91
Margherita Motteran	Lavorare con le coniche per conoscerle meglio	105
Carlotta Soldano, Daniele Manzone	L'apprendimento attraverso la 'logica della ricerca': un'analisi di attività-gioco di geometria elementare all'interno di ambienti di geometria dinamica	117
Maria Spreafico, Martino Pavignano, Ursula Zich	GeoGebra, matematica e disegno architettonico. Analisi matematica e geometrica nei profili degli ordini architettonici: esempi dalla "Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola"	129

Workshop

Silvia Beltramino, Germana Trinchero	Cosa succede in classe se andiamo alla ricerca di variazioni in matematica?	141
Maria Cantoni, Donatella Merlo, Ada Sargenti	GeoGebra non è una lavagna dinamica	153
Maria Giovanna Frassia, Annarosa Serpe	PNSD on the road con GeoGebra	167
Monica Mattei, Carlotta Idrofano, Daniela Pavarino, Ornella Robutti, Annarosa Rongoni, Cinzia Soldera	Attività per una matematica accessibile e inclusiva. Applicazioni	175
Liliana Paparo	I poligoni stellati: un esempio di coding con GeoGebra	187
Maria Spreafico, Daniele Tavella, Leonardo Vesprini, Martina Vita	Analisi matematica di architetture e opere d'arte	197
Luciano Zazzetti, Giovanna Valori	Alla scoperta della funzione integrale: potenzialità di un approccio dinamico.	209

VI GEOGEBRA ITALIAN DAY – 2016

L'attività dei docenti con GeoGebra nella formazione e nella sperimentazione

6 ottobre 2016

Aula Magna Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

h. 14.00	Autorità istituzionali	Università di Torino, USR Piemonte, Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Fisica, Scuola di Scienze della Natura, Città metropolitana Torino, Liceo D'Azeglio
h. 14.15	Markus Hohenwarter	Presentazione delle novità di GeoGebra
h. 14.30	Aitzol Lasa	The progression on algebraization levels with GeoGebra
h. 15.15	Giovannina Albano, Umberto Dello Iacono	GeoGebra, E-learning e Digital Storytelling: una possibile integrazione per l'apprendimento in matematica
h. 16.00 – 16.30	Intervallo	
h. 16.30 – 18.30	Sessioni Parallele Comunicazioni e workshop	
h.18.30	Chiusura	

VI GEOGEBRA ITALIAN DAY

Elisa Gentile
Università degli studi di Torino - GeoGebra Institute di Torino
elisa.gentile@unito.it

Didattica della matematica e nuove tecnologie

La ricerca internazionale in didattica della matematica con le tecnologie e in particolare con i software di geometria dinamica (DGS – *dynamic geometry software*) nasce circa venticinque anni fa con la comparsa dei primi DGS e oggi continua includendo anche *GeoGebra* e tutte le funzionalità e modalità di collaborazione e interazione offerte dalle tecnologie mobili.

L'uso delle tecnologie nella didattica è stato discusso da Sinclair et al. (2017) evidenziando i sette filoni di ricerca più attuali nella didattica della geometria:

- l'uso delle teorie della ricerca in didattica della geometria,
- la natura del ragionamento visuospaziale,
- il ruolo di diagrammi e gesti,
- il ruolo delle tecnologie digitali,
- l'insegnamento-apprendimento delle definizioni,
- l'insegnamento-apprendimento nel processo di dimostrazione,
- approcci Euclidei e non Euclidei.

Come evidenziato da Borba in un recente survey commissionato dall'ICME (Borba et al., 2017) le tecnologie digitali hanno modificato la nozione di essere umano nel processo di insegnamento-apprendimento: le tecnologie mobili, i corsi online, i *MOOC* (*massive open online courses*) e le tecnologie touch non possono essere escluse dalla quotidianità dei docenti di matematica.

Possiamo riconoscere alcune fasi nello sviluppo delle tecnologie, in particolare legate alla didattica della geometria: dall'introduzione di *Logo* come strumento didattico, alla comparsa di software basati sul contenuto ("content" software come *Cabri Geomètre*, *Geometer's Sketchpad* e successivamente *GeoGebra*, in Borba et al 2017, pag. 222) in cui la funzionalità del *dragging* ha consentito agli allievi di "sperimentare la matematica" e cogliere la dinamicità delle figure via via analizzate. La diffusione di internet ha successivamente modificato le dinamiche di apprendimento, introducendo la dimensione collaborativa anche a distanza o in modalità *blended* (ovvero in presenza e a distanza insieme), dapprima all'interno della comunità dei docenti e in seguito in quella di classe, tra allievi e docente e tra pari. Con l'avvento del cosiddetto *Web 2.0* si è assistito all'introduzione di risorse digitali e della tecnologia mobile, unitamente alla condivisione di materiali attraverso piattaforme di *e-learning* o servizi in *cloud computing*, nel processo di insegnamento-apprendimento (per un esempio di tali attività si veda la plenaria di Albano e Dello Iacono nel presente volume in merito al *digital storytelling*).

L'importanza del ragionamento visuospaziale nell'insegnamento-apprendimento della geometria è riconosciuta da molti autori, come evidenziato nella ricerca di Sinclair et al. (2017), anche se non sempre si lavora nelle attività di classe in questa direzione. Le capacità di visualizzazione e di ragionamento possono essere migliorate attraverso esperienze che coinvolgano lo studente in attività di manipolazione concreta di artefatti, combinate con l'uso dei DGS. Lavorando sulle differenti rappresentazioni di un medesimo concetto o oggetto matematico è possibile giungere anche ad elevati livelli di astrazione, in tal senso si può affermare che i DGS possano supportare l'apprendimento (Sinclair et al. 2017, pag. 280). Altro valore aggiunto è rappresentato dalla possibilità, per gli allievi, di esplorare e sviluppare definizioni di enti geometrici attraverso le funzionalità dinamiche del software per arrivare a costruire un ricco campionario di esempi (*dynamic concept images* in Sinclair et al. 2017). Inoltre i DGS possono essere utilizzati per proporre agli allievi attività di esplorazione, formulazione di congetture e per motivarli alla dimostrazione, attraverso attività anche di tipo collaborativo.

La collaborazione tra i docenti di matematica nella predisposizione di materiali e percorsi didattici, nonché nella formazione, alla luce delle nuove tecnologie, è stata analizzata da Jaworski et al. (2017), facendo emergere come siano sempre più numerose le iniziative che coinvolgono comunità di docenti che lavorano e si formano con un comune obiettivo. Inoltre, Borba et al. (2017) osservano che la tecnologia stessa definisce nuove forme di organizzazione della conoscenza e determina nuove interazioni tra individui e conoscenza nei vari contesti di apprendimento.

Il focus del VI GeoGebra Day è stato dunque, in coerenza con questi studi, l'attività dei docenti nella formazione e nella sperimentazione, con attenzione non solo a singoli, ma anche a comunità di docenti, sia in presenza che a distanza.

I MOOC rappresentano un ottimo strumento per facilitare l'esperienza professionale di tipo collaborativo, costituendo uno spazio virtuale per la discussione, la condivisione di idee e risorse, e fornendo opportunità per un feedback costruttivo (nel presente volume si rimanda agli interventi di Alberti et al. & Labasin et al. per un'analisi delle esperienze torinesi).

Ma la collaborazione non coinvolge solo i docenti, come Borba et al. (2017) evidenziano: si stia assistendo a un progressivo spostamento verso ambienti di apprendimento aperti, centrati sullo studente, dinamici (sia grazie all'uso delle tecnologie, sia in loro assenza), che favoriscono la collaborazione e la discussione tra pari, che puntano alla costruzione condivisa di significati e si contrappongono a una visione di insegnamento prettamente trasmissivo.

Le tecnologie resesi disponibili negli ultimi anni hanno modificato in modo sostanziale l'uso che ne poteva essere fatto per la didattica: si pensi alle tecnologie mobili, le cui caratteristiche di agevole portabilità e disponibilità, accesso a internet e largo uso e diffusione presso gli studenti le rendono potenzialmente in grado di estendere i confini della didattica e dell'apprendimento della matematica oltre la classe (Borba et al., 2017). Anche i DGS sono stati coinvolti dalle sfide introdotte dalle nuove tecnologie (touch, multitouch, mobile, …), richiedendo in alcuni casi un ripensamento del software in dipendenza delle funzionalità del dispositivo con il quale sono fruiti.

Ovviamente, la sola introduzione di tali strumenti non modifica di per sé la didattica, ma necessita di un ripensamento delle pratiche di classe, poiché la loro introduzione comporta sfide di differente natura (pedagogiche, tecniche, gestionali, … come evidenziato da Borba et al., 2017) e i vari task che possono essere assegnati cambiano a seconda dei dispositivi utilizzati, lasciando al docente la scelta delle modalità e degli strumenti da utilizzare.

Inoltre, la diffusione di repository, digital library e learning objects ha reso più facile per gli utenti (siano essi docenti o studenti) l'accesso a informazioni e contenuti. Si pensi ad esempio alla possibilità di creare GeoGebraBooks contenenti materiali prodotti dal docente o reperiti in rete tra quelli messi a disposizione degli utenti sul GeoGebra Tube (risorse per la classe: https://www.geogebra.org/materials). La molteplicità di tali materiali, anche alla luce della fruizione autonoma da parte degli allievi che prima di domandare al docente cercano in rete una possibile riposta, rende necessaria una forma di riconoscimento di materiali di qualità e una dichiarazione degli intenti sottesi alla progettazione del materiale stesso (per approfondimenti si veda nel presente volume l'intervento di Kimeswenger).

Novità e nuove potenzialità di GeoGebra

Sin dalla sua nascita GeoGebra si è sempre contraddistinto per la rapidità nella sua evoluzione, nella capacità di recepire le esigenze degli utenti e fornire una risposta in termini di nuove funzionalità anche grazie all'enorme quantità di sviluppatori e collaboratori che vanta.

Il VI GeoGebra Day è stato aperto con la presentazione da parte del fondatore Markus Hohenwarter (tramite un video: Hohenwarter, 2016) delle nuove funzionalità presenti e in via di sviluppo. Analizzeremo alcune di esse alla luce delle considerazioni dei paragrafi precedenti.

Data la sempre maggiore diffusione di tablet e smartphone gli sviluppatori hanno previsto l'implementazione di applicazioni GeoGebra per questi dispositivi, cercando di valorizzare le potenzialità dei diversi strumenti tecnologici. Per il tablet è stata riprodotta la stessa interfaccia dell'applicazione fruibile tramite web ed è già disponibile per l'utilizzo sulle maggiori piattaforme (iOS, Windows e Android). Seguiranno le versioni utilizzabili sugli smartphone per cui si sta valutando l'ergonomia dell'applicazione dato il ridotto spazio dello schermo. Saranno create delle applicazioni native, che incorporino determinate funzionalità del software (in dipendenza dall'uso che se ne vuole fare) in modo da renderle snelle e fruibili anche con i dispositivi meno recenti e performanti. Si avrà, ad esempio, una versione con vista grafici e algebra con l'obiettivo di consegnare nelle mani degli allievi una calcolatrice grafica gratuita e immediatamente fruibile sui loro dispositivi.

Data la sempre maggiore diffusione del software nelle scuole si è valutata la possibilità di un suo utilizzo durante le verifiche ed è dunque stata ideata la modalità “Exam”, in cui viene rilevato se l'utente ha lasciato GeoGebra e utilizzato altre finestre del computer. Per quanto riguarda l'uso dei dispositivi mobili in tale modalità si suggerisce l'uso combinato con app per la child protection che consentono al docente di bloccare i dispositivi e consentire solo l'uso di GeoGebra. Su questo versante seguiranno aggiornamenti e innovazioni nei mesi successivi.

Ripensando a quanto discusso nei paragrafi precedenti sulla dimensione collaborativa (tra docenti e allievi e tra pari) si rileva l'introduzione della funzionalità GeoGebra Groups, una sorta di social network per la didattica in cui è possibile condividere materiale (creato anche utilizzando i GeoGebraBooks), raccogliere elaborati degli studenti e dare loro dei feedback. Questa nuova modalità rappresenta, dunque, un esempio di quegli ambienti aperti di cui si è già discusso, unitamente ai repository del GeoGebra Tube.

Tecnologie: quale futuro?

Abbiamo analizzato l'importanza del ragionamento visuospaziale nella didattica della geometria, ma va ricordato come esso possa migliorare la comprensione della matematica nella sua totalità. Per migliorare tali abilità occorre un uso ragionato dei DGS che richiede un cambiamento della didattica, con eventuale riformulazione dei problemi “classici” in ottica di esplorazione, prevedendo una coesistenza di gesti, argomentazioni, schemi e rappresentazioni finalizzati al ragionamento geometrico, con un inevitabile spostamento verso ambienti di apprendimento dinamici e centrati sullo studente. Tale approccio potrà consentire in futuro di ampliare il range di allievi interessati ed anche eccellenti in matematica (Sinclair et al., 2017).

Le novità introdotte dall'ultima fase di evoluzione delle tecnologie portano con sé una ridefinizione della realtà di classe e del tempo dedicato all'apprendimento, dal momento che risorse e strumenti sono sempre immediatamente disponibili per gli allievi. Borba et al. (2017) evidenziano come sia più facile per gli allievi fruire una risorsa on line invece di consultare il libro di testo o attendere per domandare al docente, ma ciò apre nuovi interrogativi sulla validità di tali materiali, sulle fonti consultate e sulla progettazione pedagogica delle risorse per favorire la comprensione e la conoscenza, a cui gli interventi raccolti nel presente volume tentano di rispondere. In modo particolare, nell'intervento di Kimeswenger si analizzano i possibili criteri per la valutazione automatica della qualità delle risorse caricate dagli utenti tra i *GeoGebra Materials* e la correlazione tra qualità dell'autore e qualità del materiale.

Storia dei Convegni

L'Istituto Italiano di GeoGebra è stato fondato a Torino nel luglio 2010, è ospitato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino ed opera in collaborazione con l'associazione La Casa degli Insegnanti.

A partire dal suo anno di fondazione, l'Istituto ha organizzato ogni anno un convegno di una giornata dedicato allo studio e alla condivisione di recenti ricerche e sperimentazioni con GeoGebra, denominato GeoGebra Day. In occasione del Convegno DI.FI.MA., che ha cadenza biennale, il GeoGebra Day è stato integrato nel programma, prevedendo una intera giornata per la discussione di buone partiche didattiche con GeoGebra.

Seguono la storia e le caratteristiche dei vari GeoGebra Day che si sono succeduti fino a oggi.

I GeoGebra Day, 7 ottobre 2011, in occasione del convegno DI.FI.MA. Ha partecipato Zsolt Lavicza dell'IGI. Ha avuto luogo una presentazione delle attività del GeoGebra Institute di Torino sulla ricerca, sperimentazione e formazione docenti e del nuovo GeoGebra Institute di Bari sulla collaborazione tra scuole e università. È seguita una tavola rotonda sulle esperienze delle scuole e una sessione di comunicazioni e workshop. Sono state consegnate le prime certificazioni GeoGebra (Utente ed Esperto). Le certificazioni utente sono state assegnate in seguito al corso di formazione e alla sperimentazione in classe con il tutoraggio di esperti.

II GeoGebra Day, 27 settembre 2012. Sono state presentate le attività degli Istituti Italiani di GeoGebra, il progetto "Comunità di pratica GeoGebra" a cura della Casa degli Insegnanti e un'attività svolta presso il Liceo Darwin di Rivoli. Ha seguito una sessione di comunicazioni e workshop per condividere le esperienze delle scuole. Sono state consegnate le certificazioni di utente GeoGebra ai docenti che avevano seguito i corsi di formazione e che avevano sperimentato in classe con il tutoraggio di esperti.

III GeoGebra Day, 4 ottobre 2013, in occasione del convegno DI.FI.MA. Ha avuto luogo una tavola rotonda degli Istituti italiani sulla ricerca, formazione e sperimentazione con GeoGebra. Successivamente sono state presentate le esperienze dalle scuole. Sono state consegnate le certificazioni di utente ai docenti che avevano seguito i corsi di formazione e avevano sperimentato in classe con il tutoraggio di esperti. Sono inoltre state consegnate le certificazioni di Esperto GeoGebra ad alcuni insegnanti, già certificati Utente, che avevano proseguito la formazione, affiancando i formatori nei corsi.

IV GeoGebra Day, 3 ottobre 2014. Il tema dal convegno è stato: "La formazione docenti con GeoGebra". La mattinata è stata dedicata alle sessioni plenarie in lingua inglese (Prof. Hans-Georg Wiegand, Prof. Gilles Aldon, Prof. Pep Bujosa, Prof. Ferdinando Arzarello) e alla tavola rotonda in cui sono state presentate analisi comparative in un progetto italo-australiano di formazioni insegnanti con GeoGebra. Il pomeriggio è stato dedicato alle sessioni parallele per comunicazioni e workshop. Sono poi state consegnate le certificazioni Utente e Esperto ai docenti che hanno partecipato ai corsi e sperimentato sotto la guida dei tutor.

V GeoGebra Day, 9 ottobre 2015, in occasione della terza giornata del convegno DI.FI.MA. Il pomeriggio è stato scandito dalla presentazione plenaria della prof.ssa Barbel Barzel che ha discusso il rapporto dell'insegnamento-apprendimento della matematica con le tecnologie, evidenziandone il valore aggiunto in termini di scoperta, concettualizzazione e modellizzazione. Sono seguiti due interventi che hanno analizzato possibili usi di GeoGebra per attività in classe sul versante della matematica (concetto di misura dell'area: Daniele Manzone & Cristiano Danè) e su quello della fisica (trasformazioni di Lorentz e loro interpretazione geometrica: Angelo Merletti). Successivamente sono state presentate le esperienze dalle scuole come comunicazioni e workshop e consegnate le certificazioni.

VI GeoGebra Day, 6 ottobre 2016. Il tema del convegno è stato "L'attività dei docenti con GeoGebra nella formazione e nella sperimentazione". L'avvio dei lavori è stato segnato da un video messaggio del fondatore Markus Hohenwarter, in cui sono state presentate le novità di GeoGebra. Nel corso del pomeriggio si sono susseguite due relazioni in plenaria (Aitzol Lasa e Giovannina Albano & Umberto Dello Iacono), che hanno analizzato l'uso di GeoGebra nell'apprendimento dell'algebra e le sue possibili integrazioni con le metodologie del *digital storytelling* e dell'e-learning. Successivamente, come di consueto, sono state organizzate sessioni parallele con comunicazioni e workshop, suddivisi per argomenti e ordini scolastici, anche in questa edizioni si è spaziato dalla scuola dell'infanzia all'Università coinvolgendo sia la Matematica sia la Fisica. Come consuetudine, il convegno si è concluso con la consegna delle certificazioni Utente e Esperto ai docenti che hanno seguito i corsi e sperimentato le attività sotto la guida dei tutor dell'Istituto.

Questo volume

Questo volume raccoglie i contributi presentati durante il VI GeoGebra Italian Day, tenutosi a Torino il 6 ottobre 2016, che ha costituito una proficua occasione di scambio di idee, metodologie, buone pratiche e tecniche per l'uso di GeoGebra in classe.

Il volume è composto da una prima parte, in cui troviamo i contributi presentati nella sessione plenaria e da due parti successive in cui vengono presentate le attività e le sperimentazioni svolte nelle scuole, sotto forma di comunicazioni o sotto forma di workshop.

BIBLIOGRAFIA

Borba M.C., Askar P., Engelbrecht J., Gadanidis G., Llinares S. & Sánchez Aguilar M. (2017) Digital Technology in Mathematics Education: Research over the Last Decade. In: Kaiser G. (Ed) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13*. Springer.

Jaworski B, Chapman O., Clark-Wilson A., Cusi A., Esteley C., Goos M., Isoda M., Joubert M. & Robutti O. (2017) Mathematics Teachers Working and Learning Through Collaboration. In: Kaiser G. (Ed) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13*. Springer.

Sinclair N., Bartolini Bussi M.G., de Villiers M., Jones K., Kortenkamp U., Leung A. & Owens K. (2017) Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. In: Kaiser G. (Ed) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13*. Springer.

SITOGRAFIA

Hohenwarter M. (2016) *Presentation about recent developments in the GeoGebra world concerning phone Apps, GeoGebra in exams and our new collaboration feature GeoGebra Groups*. https://www.youtube.com/watch?v=ZCBZrNBS9eU

RELAZIONI IN PLENARIA

THE PROGRESSION ON ALGEBRAIZATION LEVELS WITH GEOGEBRA
LA PROGRESSIONE DEI LIVELLI ALGEBRICI CON GEOGEBRA

Aitzol Lasa
Università Pubblica di Navarra, aitzol.lasa@unavarra.es

Sommario: L'uso integrato di due supporti materiali, modelli dinamici e "carta e matita", è un ambiente pertinente per organizzare l'attività matematica a tutti i livelli. La classificazione dei modelli dinamici in *esplorativi*, *illustrativi* e *dimostrativi* concede agli studenti un ruolo di utente, centrando la loro attenzione sull'attività matematica ed eludendo i fenomeni di *spostamento metacognitivo*. Inoltre, l'uso integrato di tali strumenti, favorisce lo sviluppo della comprensione algebrica delle situazioni matematiche, in termini di *livelli algebrici*. Vi presentiamo alcuni esempi di esperienze in classe per tutti i livelli di istruzione, dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria.

Abstract: The integrate use of two material supports, dynamic models and paper and pencil, is a pertinent environment to organize mathematical activity at all levels. The classification of dynamic models on *explorative*, *illustrative* and *demonstrative* give students a user role, centring their attentions to the mathematical activity and eluding *metacognitive shift* phenomena. Furthermore, the integrate use of those instruments, aids the development of algebraic understanding of mathematical situations, in terms of *algebraic levels*. We present examples of classroom experiences for all educational levels, from childhood education to secondary school.

Introduction

This paper summarizes a number of learning and teaching experiences involving GeoGebra (GGB), from Childhood Education to Secondary Education. The research group in Mathematical Education DIDAMATIK (Public University of Navarre) is responsible of the theoretical and didactical model behind the design of these materials, although, some materials have co-authors from different Local GGB Institutes.

GGB has tools to integrate and develop mathematical notions, processes and meanings on Geometry, Algebra and Functions Theory, which technically exceed those of its antecessor, Cabri II Plus. A statistical package and the 3D version contributes to its versatility. In addition to epistemological and educational motivations, there are also purely pragmatic reasons to use GGB: a user-friendly interface in a variety of languages, and economical-free access to software and materials (Lasa & Wilhelmi, 2013a).

Despite these advantages, in the decade of 2010, Teacher Training Programs have failed to promote a widespread use of GGB at Secondary Schools in Spain, mainly because these programs where centered, almost exclusively, in the technical instruction of the tool, but suffered a shortage on "good practices" and the lack of didactical and pedagogical instructions. Only those active teachers involved in GGB communities are actively using the software as an every-day tool. Thus, a new methodology is vital at University Teacher Education and continuous teacher instruction programs, in order to promote the use of GGB. In this direction, DIDAMATIK has recently implemented a GGB training course[1] centered on the didactical use of the instrument, and based on *meta-didactical transposition*, a theoretical model and methodology developed by Arzarello et al (2014).

Teachers who attend seminars, training programs and discussion forums, also need referential and tested materials. In that sense, DIDAMATIK produces and analyzes teaching activities based on GGB, in order to assemble a catalogue of useful materials. In the next sections, we show the didactical characteristics of these materials, and examples of activities for a variety of educational levels.

1 The results of this experience would are available at the proceedings of the VIII CIBEM – *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, held in Madrid, 10-14 July 2017.

Didactical model

Although there are alternative classifications for dynamic models, which depend on the sophistication of the model, or students computing skills, Lasa and Wilhelmi (2013b) classify dynamic models according to the mathematical activity behind them, which could be *explorative*, *illustrative* or *demonstrative*. That means the teacher is responsible for the design of the model, or at least s/he must select it from a catalogue[2]; students are mere users, and their responsibility is limited to solve the problem.

The decision to give students a "user role" is not casual. If we want student to build their own construction, they would need additional instruction on the technical use of the instrument. Since complex mathematics requires longer technical instruction, in the long term, GGB becomes the final goal of the entire teaching process, and that leads to a *metacognitive shift* phenomenon (Brousseau, 1998, 2007).

An *explorative model* satisfies the initial conditions of a problem, and students must deduce so far unknown properties from it. An *illustrative model* shows selected examples of propositions, and teachers use them to show the veracity of a given property, by means of an inductive argument: the software generates many examples, and students fail to find a counterexample for the property. Thus, students are confident on the result and take the conjecture as valid. This is the widespread use of GGB in Spain; in fact, temporal constraints or students' cognitive restrictions led to the didactical decision of ignore formal deductive arguments and proofs. Sometimes, the computing steps of an illustrative model differ from pure logical reasoning, and thus, a *demonstrative model* carries out the formal proof, step-by-step, and exceeds the mere illustration of a property. In this last step, teachers must join situations together, to unify inductive and deductive arguments.

The Theory of didactical situations in mathematics (Brousseau, 1998, 2007) states that a *didactical situation* must arrange *action*, *formulation* and *validation* phases. Furthermore, students who confront a *didactical situation* are able to validate their solution-proposal by means of an immediate feedback from the situation, i.e., a situation is a mathematical problem which, "by design", includes elements that give students the essential feedback to be aware of the correctness of their mathematical production. Thus, a *dynamic model* takes the place of the *antagonistic milieu*, every time the model gives students that feedback.

When using dynamic models in the context of didactical situations, it is vital to integrate the use of software, and paper and pencil. In the one hand, the use by turns of these supports is essential to the process of generalization, since dynamic models show many particular (extensive) objects, and paper and pencil give importance to the expression of general (intensive) objects by means of algebraic techniques.

Furthermore, there is empirical evidence (Lasa, 2015) that the alternative switch from one support to the other, aids the development of *algebraization levels* (Godino et al, 2015, 2016). The theoretical description of *algebraization levels* considers arithmetical and algebraic elements as "linguistic", and evolve in three directions: structures (equivalence relation; operations properties, equations, etc.), functions (arithmetical and geometrical patterns; linear, quadratic, etc.), and models (problem solving).

In any of these contexts, is useful to graduate and describe the uses of algebra in the resolution of mathematical tasks. Students may use basic arithmetical strategies in the total absence of algebra (level 0), implicit algebraic structural properties over numbers (level 1), symbols to represent unknown values and basic structural equations (level 2), consolidated algebraic techniques to solve equations and systems (level 3), parameters to describe families of functions and classes of equations (level 4) etc.

2 Spanish most popular store is the Gauss Project: http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/

From Childhood Education to Secondary Education

Teachers in rural schools have collaborative opportunities, which do not usually arise in urban contexts. For example, in Larraintzar (Navarre) Childhood Education, Primary Education and Secondary Education students (age 3 to 16) share common spaces at the same school. Thus, the school staff hires a secondary school mathematics teacher, and this teacher contributes to the development of mathematical curriculum in all grades (Lasa, 2015).

A group of interdisciplinary teachers designed an activity for 5 years old students, to identify plane shapes (figure 1). In particular, they work with triangles and quadrilaterals, the circumference and the circle, and geometrical figures with vertical-axe symmetry. The GGB-Book[3] has six activities, where students alternate guided activities (composition and decomposition puzzles, illustration of vertical-axe symmetry and symmetric puzzles) and free activities (free drawings with predesigned GGB-tools).

The activity also satisfied the *globalization principle*, and joined contents from other disciplines; some contents students were learning at the same period, and some contents whom students were showing close interest. These contents include writing and reading, spelling of vertical-axe letters (the Basque word for "mummy" happens to be a word written by vertical-axe symmetric letters, AMATXO: a word students feel attached to) and basic rules to use computers. Students assist a weekly computer session and are familiar with software, but they bear *ontogenetic obstacles* (Brousseau, 1998, 2007) when manipulating the computer-mouse.

The experiment shows that students are able to complete the activities, and thus, dynamic software is a valid resource in Childhood Education. Dynamism is attractive for them, and students help each other spontaneously. They succeed in dragging figures from the inside, even though vertex manipulation exceeds their skills.

Figure 1. Compositions, decomposition and symmetry.

3 Link to material: https://www.geogebra.org/m/yQv8QrFQ#chapter/132499

In Primary Education (ages 8-9), students begin to analyse mathematical structures using arithmetical techniques. However, the arithmetical and pre-algebraic representations of some geometrical figures exceed student's *arithmetical threshold*. Thus, they can use dynamic geometry to identify and describe properties of figures students do not foresee.

Lasa, Wilhelmi and Belletich (2014) propose and activity to analyse the isoperimetric inequality, i.e., to conclude that the area of the circumference is optimal for a given perimeter. In this activity, students would face cognitive difficulties and support restrictions: student's previous arithmetical knowledge and the use of a grid are enough to conclude that the square is the optimal figure in the family of quadrilaterals. Once students arrive to that conclusion, we can move forward, and design an *explorative* activity using dynamic software, structured by means of *action*, *formulation* and *validation* phases.

First, students are required to build plane figures using 20 toothpicks. Each toothpick is a measure unit and all figures the same perimeter. Nevertheless, they do not have instruments yet to measure the internal area of those figures. In figure 2, students tread figures to estimate which figure has a bigger surface.

Figure 2. Treading toothpick polygons.

Experimental contrast shows that student are confident with the square, they think it´s a strong candidate. Few students say that the circumference is a good choice too, but no one has instruments to validate their option. Thus, in a second stage, we introduce a grid, so students could use basic counting strategies to build arguments and convince their peers. In this stage, the square is clearly the best candidate (first choice for 40% of students), since students can calculate its dimensions on the grid; but students who find the circumference a plausible candidate, admit that they cannot build an argument on the grid to justify their choice (figure 3).

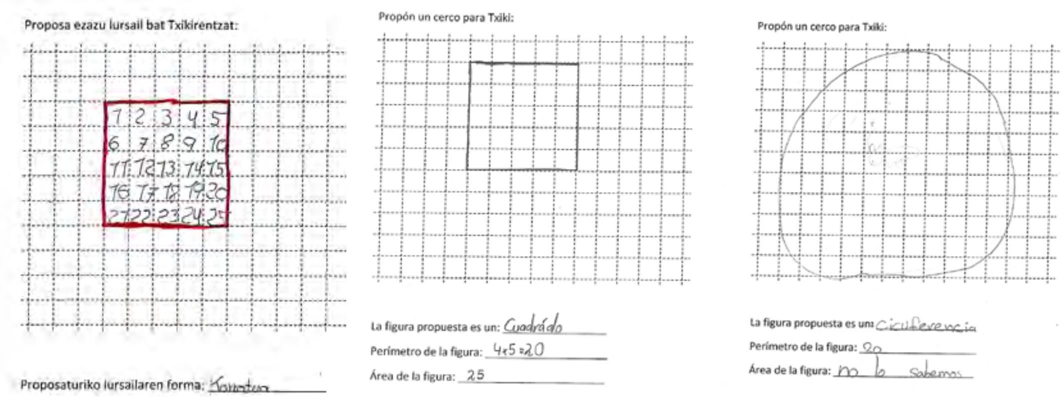


Figure 3. Square: counting and arithmetical strategies; circumference: no clue.

Students also present many other "funny" irregular forms, but those areas never exceed that of the square. Students decompose the unitary square in two isosceles square triangles to build these irregular forms (figure 4). Students reflect in those cases their understanding of "distance" and "parallel". Certainly, Primary School students do not achieve the notion of irrational number, and thus, they identify the unitary length as the distance between two consecutive vertexes: horizontally, vertically, but also diagonally. Dickon, Brown and Gibson (1991) already state that halve students who end Primary School make the mistake of understanding the unitary length as the non-perpendicular distance between parallel lines.

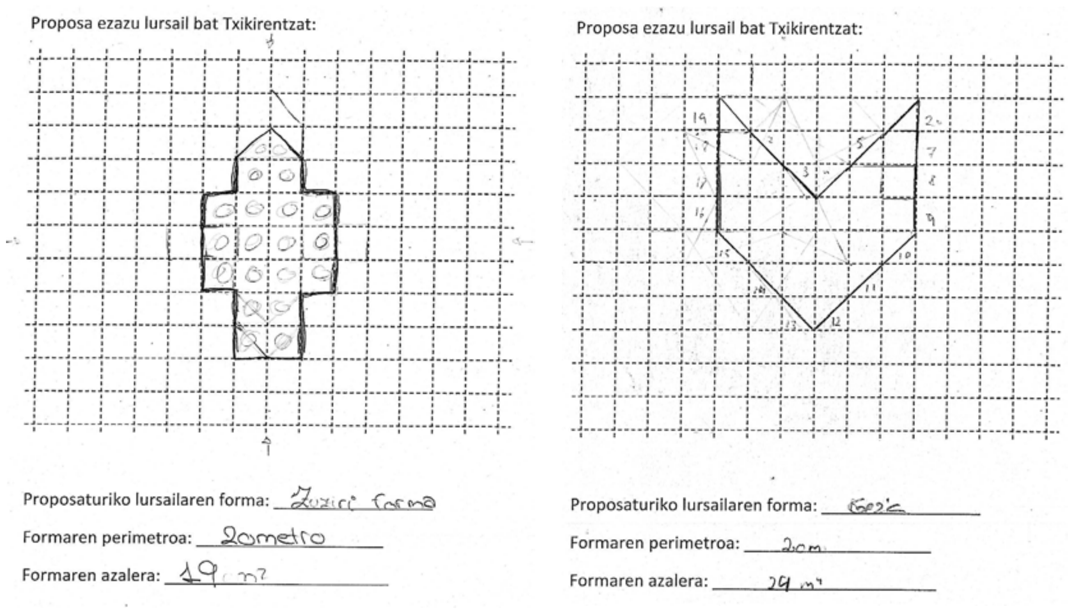
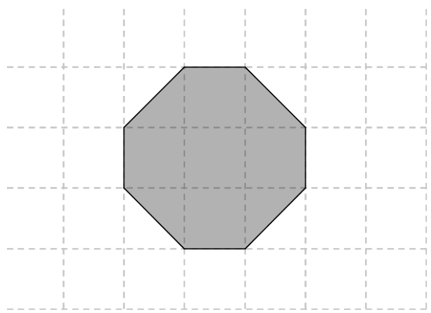


Figure 4. Decomposition of the square in isosceles square triangles.



Segments of equal length

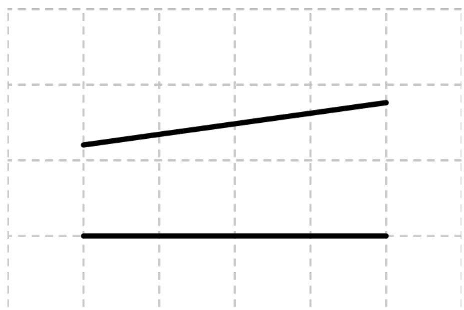


Figure perimeter. 8 units

Figure 5. Unitary length as the non-perpendicular distance between parallel lines.

The third and final stage of the activity involves the use of a dynamic model4 (figure 6). Students work in pairs and an additional teacher attends the session, in order to aid students in any technical difficulty they may have. The teacher provides students with a formulary, and students must fill in the sheet while they manipulate the explorative model (figure 7). Despite anecdotic arithmetical errors and small transcription mistakes, the activity is successful, and all student arrive to the expected conclusion: the circumference optimizes the area for a given

4 Link to material: https://www.geogebra.org/m/yQv8QrFQ#chapter/132497

perimeter.

The model provides dynamic numerical information regarding perimeter and area. In this way, numbers appear to students not only as static values of particular objects, but as changing values attached to movable points, i.e., numerical values change by the action of dragging, making a deeper approach of numbers as variable numerical values.

Moreover, students can see not only entire numbers, but decimal numbers too, since the dynamic model naturally show rational numbers up to a given number of decimals. Hence, the dynamic environment provides a context where decimal numbers have a natural status, even though students are not capable yet of manipulating decimal numbers internally. As we saw in figures 3 and 4, counting is still the basic strategy for calculating perimeter and area.

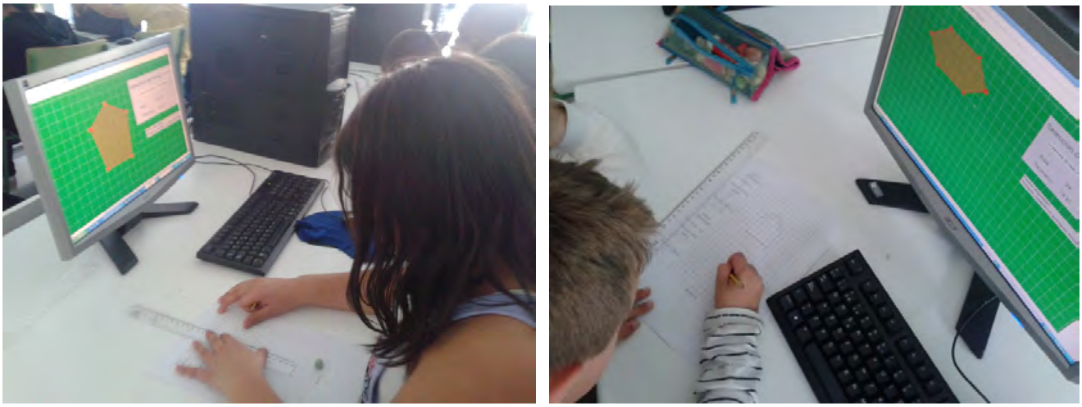
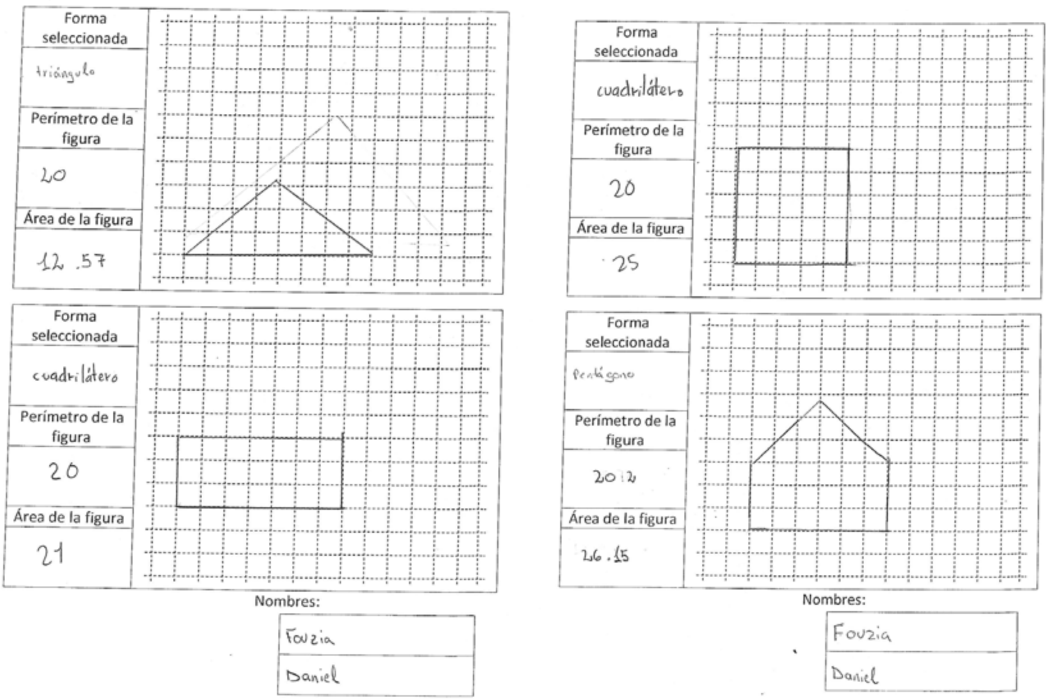


Figure 6. Explorative moment on computer activity.



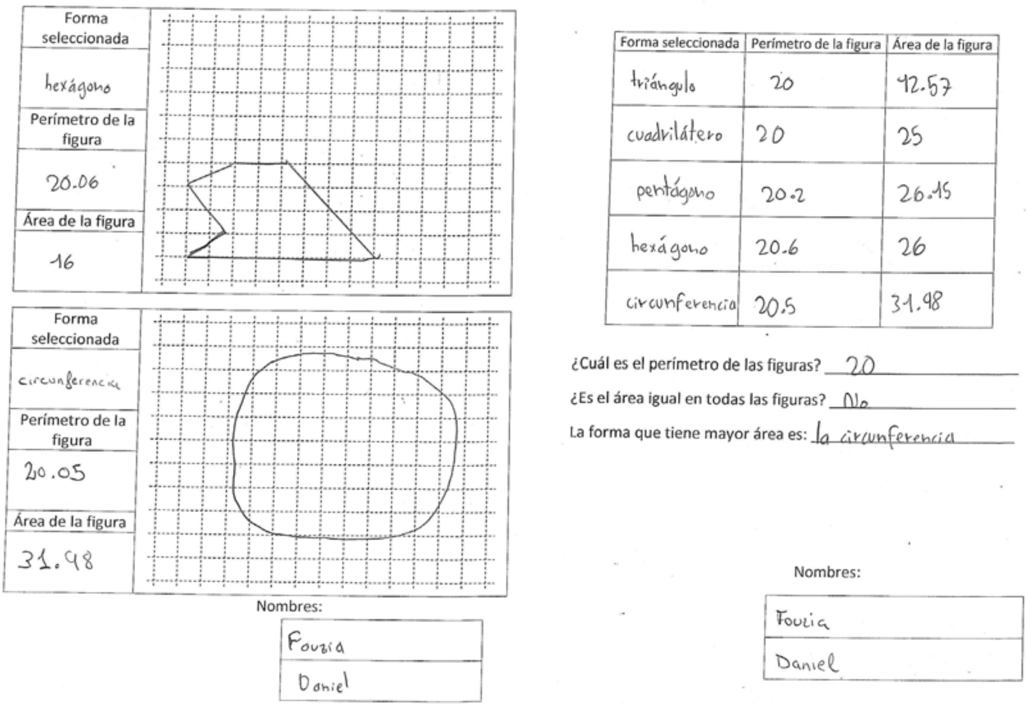


Figure 7. Transcription of information and final report: circumference as an optimal figure.

In Secondary School, students can use a numerical model as a first approach to explore invariant properties. For example, we present a dynamic model (figure 8) to build a constructive definition of trigonometric ratios[5]. Students use the models to introduce themselves to trigonometry, and do not have previous knowledge, other than the classification of triangles (according to sides and angles), and the Pythagorean Theorem.

The first few calculations are executed in paper, to reach students *arithmetical threshold*, but in the long term, as calculations become tedious, a spreadsheet is required. The use of a spreadsheet gives way to an *illustrative moment*, where the absence of counterexamples in the study of many cases makes it possible to construct an inductive argument. Thus, students convince themselves that the property is true for any particular triangle.

The process should end with a deductive argument to prove that trigonometric ratios are invariant, and thereby, they are worth a definition. In this last step, geometrical formal language is required to superimpose the structure of Thales Theorem on the explorative model of the triangle.

5 Link to material: https://www.geogebra.org/m/oOGHNoq8#chapter/82005

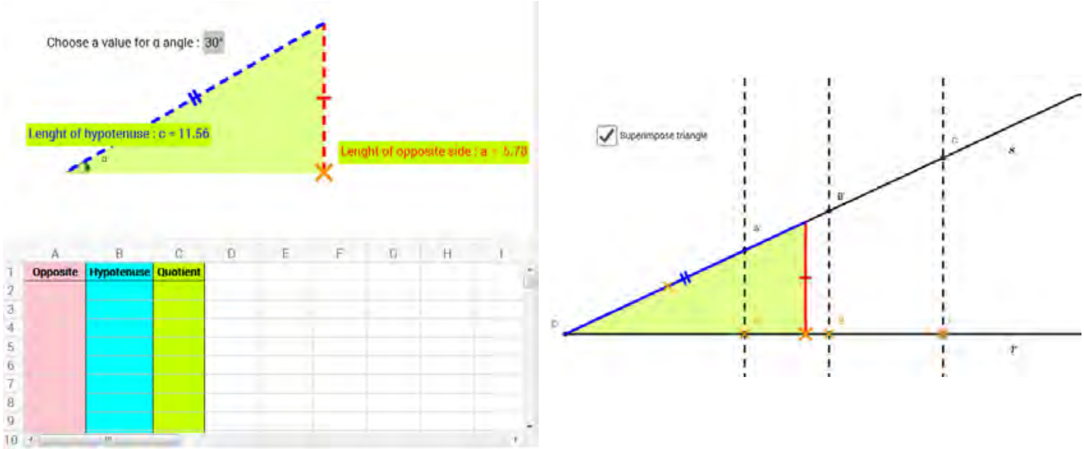


Figure 8. Constructive definition of trigonometric ratios.

Once the notion of trigonometric ratio is presented, a further step is the development of trigonometric functions, as angle α becomes a variable x. That is a different interpretation of the notion that has much to do with movement and velocity, i.e., the change of the value $y=sin(x)$ as x goes from 0-to-360. We present the modification of this perspective by means of an explorative construction, an animation with a "play" button (figure 9). The dynamic model is been designed to facilitate the idea of periodic function, by means of a game, where the student creates a partial function, and the dynamic model reproduces that portion of function every given period. The set of constructions follow a scaffolding structure[6]: first, we present the graph of a function; second, a periodic graph; third, a periodic graph for any given period; fourth, the goniometric circle; and, finally, we put into movement the entire goniometric circle, to pint the sinus function. Since the goniometric circle spreads on the Cartesian plane, this approach follows the premise that natural phenomena, force and velocity can model situations and problems.

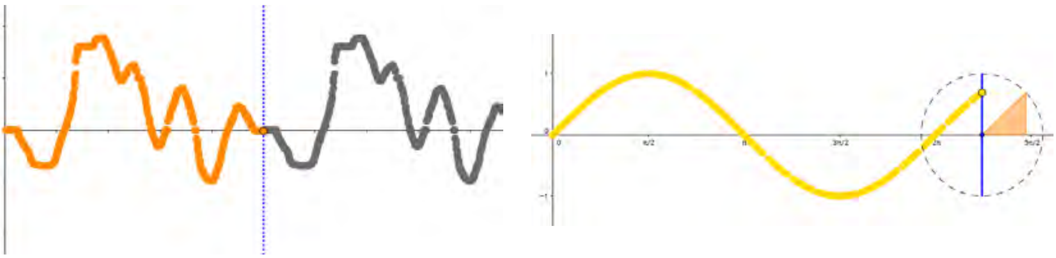


Figure 9. Scaffolding to arrive the sinus function.

Trigonometric functions satisfy a great number of properties. Nevertheless, rigorous and formal demonstrations of such equalities are hard to present to students, since they require the introduction of many auxiliary results and complex symbolic calculations. In secondary education, dynamic models can be used to explore, illustrate and sometimes prove trigonometric relations (at least, partial proves can be presented for particular cases).

Figure 19 shows some examples of dynamic models, where students prove trigonometric properties[7]. All activities follow the same structure: (1) an explorative moment where students try to find arguments and make conjectures, (2) an illustrative moment where students convince

6 Link to material: https://www.geogebra.org/m/oOGHNoq8#chapter/82007

7 Link to material: https://www.geogebra.org/m/oOGHNoq8#chapter/82009

themselves that no counterexamples can be find, by means of an inductive argument, and (3) a demonstrative moment, where the teacher presents an institutional prove for the property.

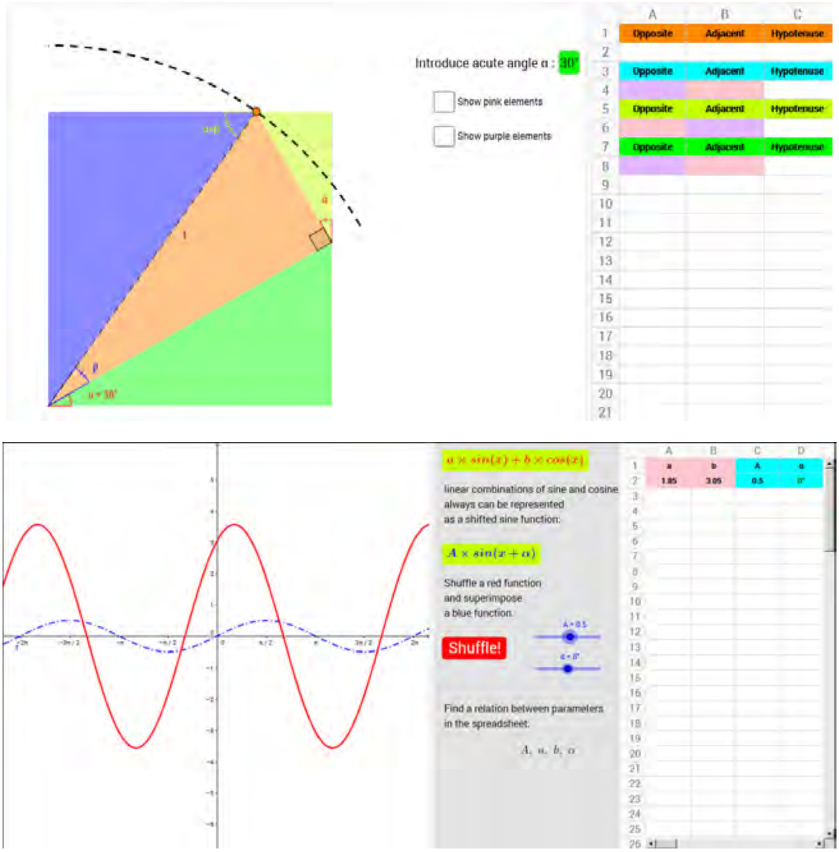


Figure 10. Proving trigonometric properties.

All examples shown until now are either numerical or use algebraic codes to represent function variables. These dynamic models are suitable for student who either are familiar to the use of intensives to codify information and use these intensive expressions for numerical calculations (*algebraization level* 2), or are capable of symbolic calculation with variables (*algebraization level* 3). In more complex algebraic situations, students must deal with parameters (*algebraization level* 4), and the different nature and the distinction between variable and parameter can be problematic. In the design of these dynamic models an explicit decision has been made to use "sliders" to represent parameters, and thus, to give a slider a unique meaning or interpretation.

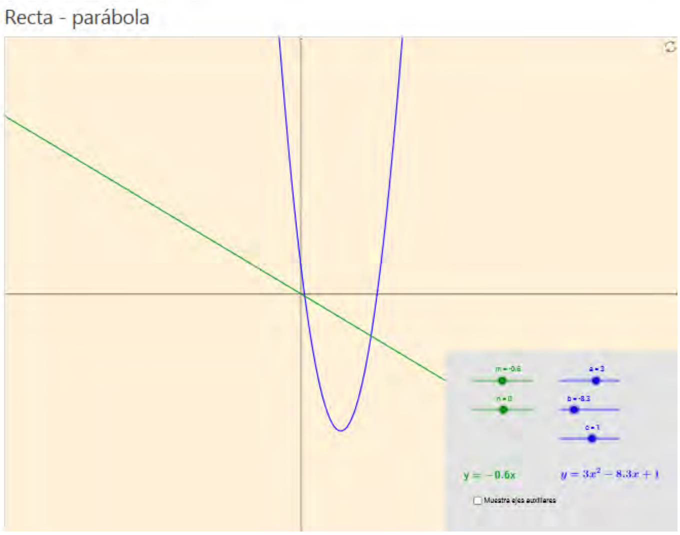
Students can use dynamic models to assist ordinary algebraic tasks, such as equation solving. A functional modelling of the situation provides visual information of the algebraic task. In addition, there is empirical evidence (Lasa, 2015) that the integration of dynamic models have a direct effect in student's performance when solving algebraic tasks. Furthermore, the sequence in which different supports are been used and implemented in school practice determine the type of improvement shown by the student:

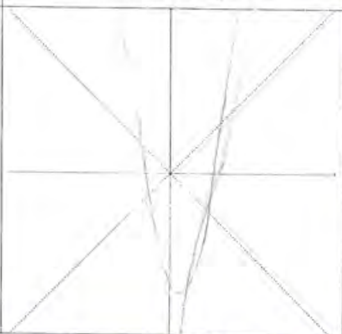
On the one hand, students who manipulate a dynamic model before they are introduced to the use of an algebraic technique, obtain the correct and complete algebraic solution more often that those students who are directly instructed in the algebraic technique.

On the other hand, students who have an instruction on the algebraic technique are able to articulate better arguments on the instrumental use of the dynamic model of the mathematic situation.

These results suggest a helical outline where the progressive achievement of mathematical knowledge swings from explorative moments (dynamic model) to the consolidation of algebraic techniques (paper and pencil), and back, and optimizes the acquisition of mathematical knowledge in teaching and learning situations.

Figure 11 shows a simple example of a dynamic model to assist equation-solving tasks. The system involves a quadratic function and a line[8]. Students solve the equation on a paper template, where they must write down the information form the dynamic model. The model does not show numerical information, in order to force student apply the algebraic technique.



Lortu adierazpen esplizitua	Transkribatu eskuz grafikoa	Berdintze-metodoa eta bigarren mailako ekuazioa
$\begin{cases} 3x^2 - 4x = y + 6 \\ 5x - y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2-4x-6=y \\ 5x-12=y \end{cases}$		$\begin{cases} 3x^2-4x=y+6 \to 3x^2-4x-6=y \\ 5x-y=12 \to 5x-12=y \end{cases}$ $3x^2-4x-6=5x-12$ $3x^2-4x-5x=6-12$ $3x^2-9x=6-12$ $3x^2-9x-6=0$ $\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{6}=\frac{9\pm3}{6}$ $\overset{+}{\to} \frac{12}{6}=2$; $\overset{-}{\to} \frac{6}{6}=1$ $2\to 5\cdot2-y=12$ $-y=12-10$ $-y=2$ $y=-2$ $(2,-2)$ $1\to 5\cdot1-y=12$ $-y=12-5$ $-y=7$ $y=-7$ $(1,-7)$

Metodo dezberdinak erabiliz emaitza berdinak azaltzen dira

Figure 11. Equation solving.

Conclusions

In the context of school mathematics, dynamic models are an effective way to overcome the inductive-deductive gap on the interpretation of mathematical objects. GGB shortens the distance between two interpretations of an example, as an “isolated object” or “representative of a class”. Moreover, *explorative*, *illustrative* and *demonstrative* moments provide an accurate classification of dynamic models, attending to mathematical activity, where the use of software should always accompany other supports, such as paper and pencil, in terms of *treatment* and *conversion*.

8 Link to material: https://www.geogebra.org/m/XfrM8z9E

The use of dynamic models aid student progression on *algebraization levels*. In Childhood Education, student begin to drag and move points, and thus, they don't see static of stereotyped geometrical objects, but they sense a notion of "change". In Primary Education, constructions introduce numerical values and the possibility to drag points and modify lengths of segments; hence, those values correspond to generalized numbers and changing numerical values, and aid a progression from arithmetic (*algebraic level* 0) to pre-algebra (*algebraic level* 2). Finally, in Secondary Education, the use of sliders to show families of equations and functions, are a context to advance from the consolidation of algebra (*level* 3) to the understanding of parameters (*level* 4).

The introduction of software modifies the relation between students and teacher. The classical didactical contract, i.e., the *imitation contract* is not functional anymore, and requests a modification. Thus, the new pedagogical contract involves a situation with an *essential adidactical component*, where the student gets the feedback from the dynamic model. Once the explorative moment is over, the *didactical memory* of the classroom returns to the *imitation contract*, where the teacher is responsible for the *institutionalization* of mathematical knowledge.

References

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes. En A. Clark-Wilson et al. (eds.), The Mathematics Teacher in the Digital Era, Mathematics Education in the Digital Era 2, 352 – 378.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Traducción de Dilma Fregona). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Aké, L., Contreras, A., Estepa, A., Lasa, A. (2016). Algebraization levels in primary, middle and high school mathematics. 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, 24-31 July 2016. RAE-VRE Project (MINECO, Spain), University of Granada.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *8*, 117-142.

Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Bilbo: UEU.

Lasa, A., Belloso, N., Abaurrea, J. (2016). Long live triangles! Dynamic models for trigonometry. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 5(2), 30- 55.

Lasa, A., Wilhelmi, M.R., Belletich, O. (2014). A plot for Laika. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, 16(4), 1089-1110.

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013a). GeoGebra en la formación de profesorado de ESO y Bachillerato. *Cónica*, 3, 30–32.

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013b). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *2*(1), 52-64.

GEOGEBRA, E-LEARNING E DIGITAL STORYTELLING: UNA POSSIBILE INTEGRAZIONE PER L'APPRENDIMENTO IN MATEMATICA

Giovannina Albano, Umberto Dello Iacono
Università degli Studi di Salerno, galbano@unisa.it,

Abstract

Questo lavoro riguarda la definizione di applicazioni realizzate con GeoGebra e integrate nella piattaforma Moodle, utilizzate per l'implementazione di task manipolativi e linguistici all'interno di attività, inquadrate in un approccio di digital storytelling. L'innovatività di tali applicazioni consiste nella possibilità che danno di tener traccia in piattaforma delle manipolazioni dello studente, e di usare tali informazione per disegnare in maniera fine percorsi di apprendimento personalizzati. Inoltre, viene mostrato come GeoGebra possa essere usato per favorire l'uso di un registro colto attraverso la manipolazione di blocchi-parole opportunamente scelti, costruiti e resi disponibili. Questa applicazione permette anche la valutazione automatica della correttezza o meno della frase costruita e si pone quindi come possibile alternativa intermedia tra le domande a risposta chiusa, che presentano ben noti limiti didattici, e quelle a risposta aperta, che di contro pongono il problema della valutazione.

Introduzione

Questo articolo presenta un'idea innovativa di uso di GeoGebra integrato in una piattaforma di e-learning, all'interno di un contesto di digital storytelling. Questa applicazione di GeoGebra rientra in un progetto più ampio che mira alla definizione di un modello, indicato col nome di DIST-M ovvero Digital Storytelling Interattivo in Matematica, di organizzazione di attività su piattaforme on-line, basate su un approccio socio-costruttivista di stampo vygotskiano, in cui il ruolo di esperto viene affidato, per quanto più possibile, al gruppo di pari e alla piattaforma. Le attività della piattaforma sono intese orientate alle competenze, ovvero sono trasversali rispetto ai contenuti specifici che rappresentano solo un'occasione per lavorare sulla competenza obiettivo. Sebbene i contenuti siano dati come pre-requisito dell'attività, quindi sostanzialmente come acquisiti, tuttavia GeoGebra può essere sfruttato (come abbiamo fatto) per realizzare task all'interno del DIST-M, che consentano il recupero a studenti con lacune di conoscenze e abilità.

Sono state disegnate e implementate alcune attività pilota (Dello Iacono, 2015; Albano, Dello Iacono, Mariotti, 2016; Albano, Dello Iacono, Fiorentino, 2016) che hanno permesso di indagare in che modo i pari e la piattaforma potessero giocare il ruolo di esperto e hanno evidenziato la necessità della presenza di un tutor, esperto al di sopra dei pari, che potesse intervenire laddove l'interazione con i compagni e la piattaforma non fosse sufficiente a mediare con successo la competenza in gioco.

Qui ci focalizziamo sulla definizione e l'uso di applicazioni, realizzate con GeoGebra e incorporate all'interno del DIST-M, e in particolare all'integrazione tra GeoGebra e il modulo Lesson di Moodle. Tali applicazioni, progettate a diversi livelli di difficoltà e con vari scopi, possono essere raggruppate in tre tipologie:

1. *Tutorial* (TT): permettono allo studente di esercitarsi e verificare l'acquisizione di abilità di base relative a definizioni e procedure di calcolo. Nel caso in esame, sono stati resi disponibili agli studenti in vista di attività successive, lasciando loro la discrezionalità di farne o meno uso.
2. *Domande Grafiche Interattive* (DGI): permettono allo studente la manipolazione vincolata di oggetti grafici allo scopo di investigare e congetturare, in un'ottica orientata alle competenze.

3. *Domande Semi-aperte Interattive* (DSI): consentono la costruzione di frasi attraverso la giustapposizione di *oggetti linguistici*, che consistono in tessere (blocchi-parole) recanti al loro interno singole parole o gruppi di parole. Questa applicazione si pone come via di mezzo tra le domande a risposta chiusa (quiz) e le domande a testo libero, poiché permette la costruzione di un testo a partire da un insieme più o meno ampio di parole che è valutabile automaticamente. Nel caso di studio, è stato utilizzato per supportare lo studente nel passaggio da un registro colloquiale a un registro più colto (Ferrari, 2004), richiedendogli di riformulare il proprio testo libero in un testo equivalente costruito attraverso i blocchi-parole disponibili, che erano stati opportunamente scelti per favorire una comunicazione più adeguata all'ambito scientifico.

Tutte le applicazioni sono state progettate in modo tale da generare dinamicamente un codice numerico in base alle interazioni/manipolazioni fatte dallo studente. Tale codice, insieme alla informazione ad esso associata, viene memorizzato in Moodle e consente al progettista di tenerne conto per personalizzare il percorso di apprendimento all'interno della Lesson. Infatti, tali applicazioni sono state integrate all'interno della Lesson, andando ad ampliare le possibili domande che consentono di definire la struttura di pagine ad albero di decisione. Il codice ultimo restituito dall'applicazione permette quindi di indirizzare lo studente a una opportuna pagina successiva a seconda della sua interazione con l'applicazione.

L'articolo si evolve partendo dalla indicazione dei riferimenti teorici alla base del DIST-M per passare alla descrizione del disegno di un'attività del DIST-M in cui vengono usate le applicazioni GeoGebra sopra citate, successivamente poi descritte in dettaglio per permetterne la riproducibilità a un docente/progettista che volesse realizzarne di simili in una propria attività.

Il contesto di riferimento: dal quadro teorico alla progettazione didattica

Oggi l'uso di piattaforme di e-learning come supporto all'insegnamento/apprendimento è sempre più diffuso. Dopo l'iniziale approccio di tipo contenutistico, cioè l'offerta online di materiali didattici digitali, più o meno organizzati, ma troppo simili a quelli tradizionali, la ricerca si è rivolta a capire come sfruttare le potenzialità di questi sistemi per dare un valore aggiunto ai processi educazionali. Molta è la letteratura che evidenzia che la chiave del successo non sta nella scelta degli strumenti da utilizzare o della corrente teorica a cui ispirarsi, quanto piuttosto nella necessità di una fine progettazione delle attività online che integri teorie di apprendimento e quadri specifici di dominio, processi da mettere in atto, coinvolgimento attivo dello studente, sia in un lavoro individuale che all'interno di un gruppo, personalizzazione dei percorsi didattici e strumenti di lavoro e di comunicazione (Laurillard, 2015).

In quest'ottica risulta naturale che il nostro lavoro si inquadri in un network di teorie, che va dal socio-costruttivismo e dalla visione vygotskijana dell'apprendimento prima socializzato e poi interiorizzato (Vygotsky, 1980), alla più specifica corrente dell'approccio discorsivo all'apprendimento della matematica, dove quest'ultima è concettualizzata come una forma di comunicazione e l'apprendimento visto come un cambiamento nel discorso (Sfard, 2009). Le attività che stiamo progettando si riferiscono da un lato al contesto dell'apprendimento collaborativo (King, 2007; Weinberger et al., 2009) e dall'altro all'uso dello storytelling in matematica come mezzo efficace per l'integrazione del pensiero narrativo e del pensiero paradigmatico (Zan, 2012; Zazkis & Liljedahl, 2009). Più in particolare, le prime attività oggetto di lavoro sono focalizzate sulle competenze argomentativa e comunicativa in matematica. Le potenzialità dell'e-learning rispetto a questioni semiotiche e linguistiche sono ancora largamente sottostimate e non pienamente sfruttate. Una piattaforma di e-learning fornisce una vasta gamma di opportunità per pianificare attività volte a migliorare la competenza linguistica, compresa la competenza nell'uso del linguaggio verbale e nell'argomentazione (Albano&Ferrari, 2013). Infatti gli strumenti di comunicazione sincrona e asincrona (chat e forum) così come quelli di cooperazione (workshop, wiki) permettono attraverso la progettazione di diverse situazioni di comunicazione e di compiti che forzino gli studenti a un uso più colto delle risorse linguistiche (Ferrari, 2004) e alla realizzazione del coordinamento di sistemi semiotici (Duval, 2006). Va anche evidenziata l'importanza del fatto che la comunicazione in questi ambienti di e-learning sia una comunicazione scritta. Come sottolineato da Schafersman (1991), lo scrivere è strettamente legato allo sviluppo del pensiero critico, perché forza gli studenti a organizzare i propri pensieri, dai dati al ragionamento e alle conclusioni che dovranno essere esposte in un maniera convincente.

Nell'ambito del quadro di riferimento teorico sopra detto, abbiamo cominciato a progettare e implementare attività didattiche che potessero supportare lo studente nel passaggio dal ragionamento alla costruzione di argomentazioni verbali. A tal fine abbiamo disegnato uno script collaborativo (Figura 1) dove lo studente è immerso in una storia, *Programma Discovery*, che lo vede come protagonista nei panni di uno scienziato della NASA, parte di una équipe impegnata a valutare i dati statistici inviati da una sonda su un nuovo pianeta per poter scoprire se c'è possibilità di vita, in vista di una imminente fine della terra a causa dell'impatto previsto con un meteorite. Il lavoro dello studente ha quindi a che fare con contenuti di statistica descrittiva, che devono essere elaborati, attraverso task alternativamente in maniera individuale e in gruppo, per il successo della missione. Proprio il contesto di équipe pone allo studente esigenze tanto comunicative (perché deve farsi capire) quanto argomentative (perché deve difendere le proprie tesi).

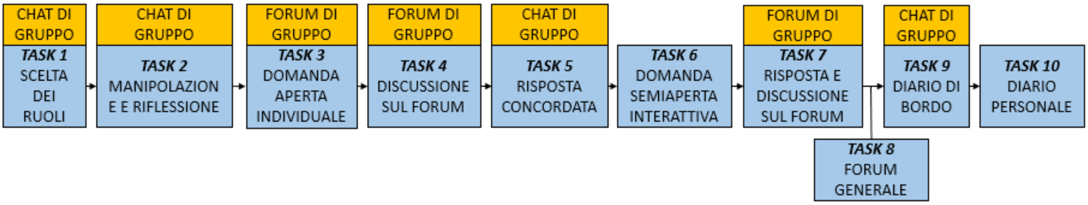


Figura 1: Disegno del DIST-M

In questo articolo non abbiamo il tempo di soffermarci sulla descrizione dettagliata dello script e dei risultati delle prime sperimentazioni, per cui rinviamo a Albano, Dello Iacono, Mariotti (2016). Andremo invece a dettagliare l'uso che abbiamo fatto di GeoGebra nell'implementazione dello script. A partire da una fase esperienziale (task 1), in cui lo studente manipola un oggetto GeoGebra, gli viene posta una domanda che richiede una risposta motivata (task 3). Alternando fasi individuali e sociali, così come fasi di comunicazione informali e formali, lo studente viene accompagnato nel passaggio dal ragionamento e da una comunicazione in un registro colloquiale all'argomentazione e a una comunicazione in un registro colto. Quest'ultima viene fortemente favorita da una richiesta di riformulazione della precedente risposta (completamente libera nell'organizzazione e nel dizionario) in una nuova risposta mediata dall'uso di un'applicazione GeoGebra creata *ad hoc* (DSI) che rende disponibili un dizionario finito e una specifica organizzazione del testo in termini di proposizione reggente e proposizione causale (task 6).

Integrazione di GeoGebra nella piattaforma Moodle

Moodle è una piattaforma di e-learning, free e open-source, che permette di organizzare e gestire risorse e attività online, al fine tanto di presentare dei contenuti didattici quanto di facilitare processi cognitivi. Tra le attività di particolare interesse richiamiamo la Lesson, che è un modulo che consente di predisporre varie pagine HTML di organizzarle in maniera adattativa così da poter essere fruite secondo diversi percorsi. Alcune pagine, infatti, contengono domande (a scelta multipla, a risposta breve, a corrispondenza) la cui risposta da parte dello studente guida la presentazione da un'opportuna pagina (o gruppo di pagine) successiva. In modo questo modulo permette l'implementazione di una navigazione personalizzata da parte di ciascuno studente, e quindi permette la costruzione automatizzata e l'offerta a ciascuno studente di un percorso di apprendimento personalizzato.

Sebbene Moodle sia una piattaforma di tipo generale, va sottolineato che è supportata da una vasta comunità di utenti e di sviluppatori, che hanno reso possibile l'integrazione all'interno di Moodle di vari strumenti relativi a uno specifico dominio di conoscenza. Per la matematica, Moodle è integrabile con il software di matematica dinamica GeoGebra (http://www.geogebra.org), molto utilizzato nell'insegnamento della geometria, dell'algebra, dell'analisi e della statistica a qualsiasi livello scolastico. GeoGebra consente di realizzare, con semplicità, costruzioni matematiche interattive, dando la possibilità allo studente di manipolare i parametri della costruzione. Supporta due linguaggi di scripting: GGBScript e Javascript, che possono essere attivati, tra l'altro, cliccando con il mouse su un oggetto (ad esempio un pulsante) oppure in seguito all'aggiornamento delle proprietà di un oggetto. In particolare, GGBScript è un linguaggio molto semplice da utilizzare, anche per i meno esperti in programmazione e, con poche e semplici istruzioni, è possibile realizzare applicazioni anche sofisticate, che possono essere eseguite sia su PC che tu dispositivi mobili (smartphone e tablet). GeoGebra, inoltre, è facilmente integrabile all'interno di Moodle, sia grazie a plugin costruiti ad-hoc, sia grazie alla possibilità di incorporare in qualsiasi pagina di Moodle, un frame che richiama l'applicazione GeoGebra. Nel primo caso, GeoGebra viene a far parte della lista delle attività del menu di Moodle e la piattaforma tiene traccia del punteggio, del tempo di uso, delle costruzioni di ogni tentativo dello studente. Nel secondo caso, una volta realizzata offline una costruzione dinamica con GeoGebra e caricata in un repository online (https://www.geogebra.org/materials), questa viene richiamata incorporando l'HTML in una qualsiasi pagina di Moodle (Figura 2).

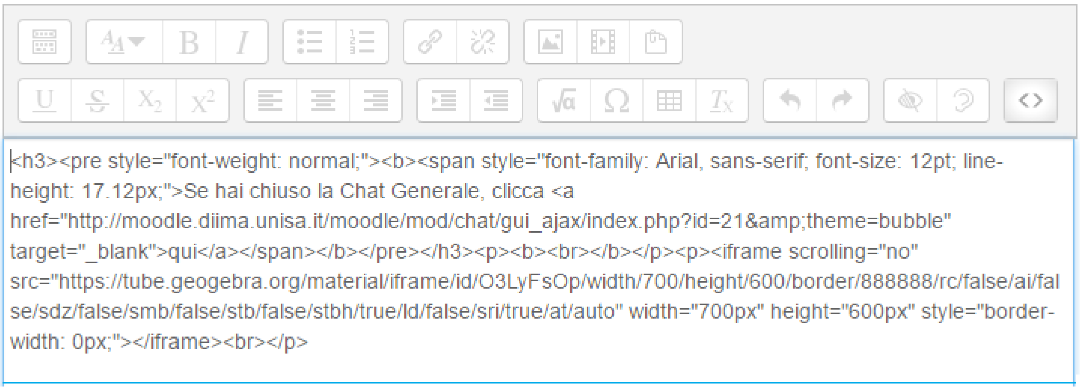


Figura 2: Esempio di HTML incorporato all'interno di una pagina di Moodle

Le applicazioni che abbiamo realizzato e che descriviamo nel seguito sono tali da restituire un codice numerico, opportunamente costruito caso per caso, che una volta inserito nella text box della domanda a risposta breve di Moodle, permette di direzionare lo studente verso una specifica pagina della Lesson. Nella Figura 3 vediamo un esempio in cui il codice inserito corrisponde all'indirizzamento dello studente verso la pagina "Un altro scienziato".

Figura 3: Personalizzazione attraverso la Lesson

Così facendo, è possibile sfruttare al massimo sia le potenzialità di personalizzazione di Moodle, sia quelle di GeoGebra per la creazione di quesiti interattivi e dinamici che vadano oltre le domande offerte dalla piattaforma.

Definizione di applicazioni GeoGebra integrate in Moodle

In questo paragrafo descriviamo tre tipologie di applicazioni che abbiamo realizzato con GeoGebra e integrato in Moodle: Tutorial (TT), Domande Grafiche Interattive (DGI) e Domande Semiaperte Interattive (DSI).

Tutorial

Sono applicazioni nate con l'idea di simulare i tutorial dei videogiochi di strategia, che prevedono una serie di attività iniziali volte a preparare l'utente alle fasi successive. Prevedono l'interazione da parte dello studente con un oggetto grafico (tabella, grafico, …) per ottenere la risposta ad una determinata domanda e sono integrati all'interno di pagine Moodle contenenti domande a risposta breve, come descritto nel paragrafo precedente. Il tutorial è un'applicazione realizzata in modo tale da riconoscere la correttezza o meno della risposta, intesa come configurazione finale sottomessa dallo studente, e in base a questo restituisce un preciso codice. Lo studente deve inserire nell'apposita text box della risposta breve, e, in funzione del codice inserito, gli viene presentato il successivo task.

Per il caso di studio specifico sono stati realizzati tutorial che consentono allo studente di manipolare grafici o tabelle statistiche. A titolo di esempio, ne descriviamo uno: L'Areogramma.

Questo tutorial presenta allo studente una tabella contenente le frequenze relative dei colori di 20 rocce trovate su un nuovo pianeta. Le richieste per lo studente sono due. Da un lato deve rappresentare su un areogramma le informazioni presenti in tabella, muovendo i punti blu che appaiono sulla circonferenza (Figura 4). Ad ogni manipolazione dello studente cambiano, automaticamente e in maniera dinamica, anche le frequenze percentuali, che lo studente può visualizzare sulla destra del grafico. E' chiaro che la corretta rappresentazione sull'aerogramma presuppone che lo studente sia in grado di convertire le frequenze relative in frequenze percentuali. Dall'altro lato, gli viene chiesto di inserire il valore in gradi dell'angolo relativo a uno specifico settore in una casella di testo, posta al di sotto del grafico (Figura 4). Questo presuppone che lo studente sia in grado di legare le frequenze percentuali agli angoli dei settori.

Figura 4: Tutorial L'Areogramma

Per realizzare questa applicazione GeoGebra, è stata disegnata una circonferenza e sono stati disegnati su di essa i quattro settori circolari. Gli unici elementi lasciati liberi alla manipolazione sono i punti sulla circonferenza. Tutti gli altri elementi sono fissati. Il testo sulla sinistra del grafico è stato realizzato con la funzione *Testo* di GeoGebra, mentre la tabella, che compare sempre sulla sinistra del grafico, è un'immagine importata nel foglio GeoGebra tramite il comando *Inserisci immagine da file*. Per calcolare la frequenza percentuale di ciascun colore di roccia relativo ad uno specifico settore circolare, sono state utilizzate cinque variabili, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, una per ciascun settore circolare ed a ciascuna variabile è stato assegnato il seguente valore:

$$a_i = round(Area[s_i] / Area[c]\ 100)$$

dove $Area[s_i]$ è l'area dello specifico settore circolare e *Area[c]* è l'area del cerchio. La funzione *round* di GeoGebra arrotonda all'intero più vicino. Il valore di ciascuna variabile è stato, poi, richiamato nel testo che compare sulla destra del grafico.

Per sottomettere la sua consegna, lo studente deve cliccare sul pulsante *Controlla* e gli viene restituito un codice, che differisce a seconda che la consegna sia corretta (in corrispondenza del valore *true* della variabile booleana *a*) o meno (in corrispondenza del valore *true* della variabile booleana *b*). Il pulsante *Controlla* contiene all'interno il seguente codice GGBScript:

$$Se[a1 \stackrel{?}{=} 35 \wedge a2 \stackrel{?}{=} 25 \wedge a3 \stackrel{?}{=} 20 \wedge a4 \stackrel{?}{=} 20 \wedge angolo \stackrel{?}{=} 72, ImpValore(a,true), ImpValore(b,true)]$$

che si attiva cliccando sull'oggetto. Il codice è del tipo *Se[Condizione, Oggetto a, Oggetto b]*, che restituisce una copia dell'*Oggetto a* allorché la *Condizione* è soddisfatta, oppure una copia dell'*Oggetto b* se la *Condizione* non è soddisfatta. Il codice sopra, quindi, attribuisce il valore *true* alla variabile *a* (attraverso il comando *ImpValore*) se lo studente ha costruito il corretto areogramma ed ha calcolato correttamente l'ampiezza dell'angolo marrone, altrimenti attribuisce il valore *true* alla variabile *b*.

Per tutti i tutorial, in seguito alla risposta dello studente, la piattaforma non fornisce un vero feedback di correttezza ma, in caso di risposta errata, compare il prof. Garcia, con volto triste, che chiede allo studente, sempre nell'ottica della storia, di spiegare il proprio ragionamento e di specificare quali controlli ha utilizzato per verificare il proprio procedimento. In caso di risposta esatta, invece, il prof. Garcia compare sorridente e chiede lo studente di spiegare il proprio ragionamento con l'obiettivo di lasciare appunti per gli altri scienziati che si troveranno ad affrontare la medesima situazione.

Nel caso del Tutorial l'areogramma, ad esempio, il codice inserito all'interno della pagina di Moodle per richiamare l'applicazione GeoGebra è il seguente (Figura 5):

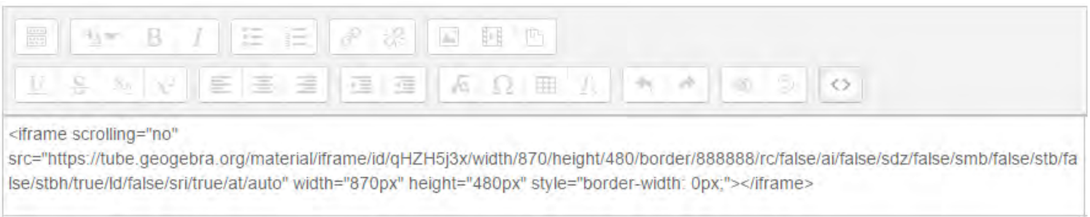


Figura 5: Codice HTML incorporato all'interno della pagina Moodle

Domanda Grafica Interattiva

Questa applicazione è una costruzione interattiva, realizzata con GeoGebra, simile ad un tutorial, che prevede altresì l'interazione dello studente con un oggetto grafico per ottenere la risposta ad una domanda specifica (Dello Iacono, 2015). Ci sono due differenze sostanziali con un TT. Innanzitutto, una DGI è stata disegnata in modo da distinguere non solo se una configurazione è corretta (risposta esatta) o meno (risposta errata), ma anche se è parzialmente corretta (risposta semi-esatta). Inoltre ciascuna tipologia di risposta non è univocamente determinata e l'applicazione è in grado di valutare automaticamente la correttezza, semi-correttezza o l'erroneità di più configurazioni equivalenti. Infine, a differenza del TT, la DGI restituisce un codice non solo in corrispondenza della configurazione sottomessa dallo studente (tramite il pulsante *Controlla*), ma genera e visualizza, istante per istante, un codice generato dinamicamente, in funzione della manipolazione da parte dello studente dei parametri lasciati liberi. Questo codice tiene traccia della configurazione finale lasciata dallo studente e consente, pertanto, di individuare non solo se la risposta data è esatta, semi-esatta o errata, ma quale tra quelle corrette o semi-corrette è stata prodotta. In questo modo la personalizzazione successiva può essere molto accurata. Come avviene per i tutorial, lo studente inserisce il codice fornito nella text box della risposta breve e la piattaforma, in funzione del codice inserito, lo indirizzerà verso un percorso personalizzato.

Nel caso di studio specifico, la DGI presenta grafico a torta con un raggio unitario e un settore circolare con un angolo al centro di ampiezza 72°, che rappresenta la quantità di roccia rossa trovata sul nuovo pianeta (20%). Allo studente, sempre nell'ottica della storia, viene chiesto di rappresentare la stessa informazione su un areogramma più grande, con un raggio maggiore. Per farlo, può modificare sia l'ampiezza dell'angolo del settore circolare, muovendo i punti sulla circonferenza, sia la dimensione del raggio (da 1 a 4) (Figura 6).

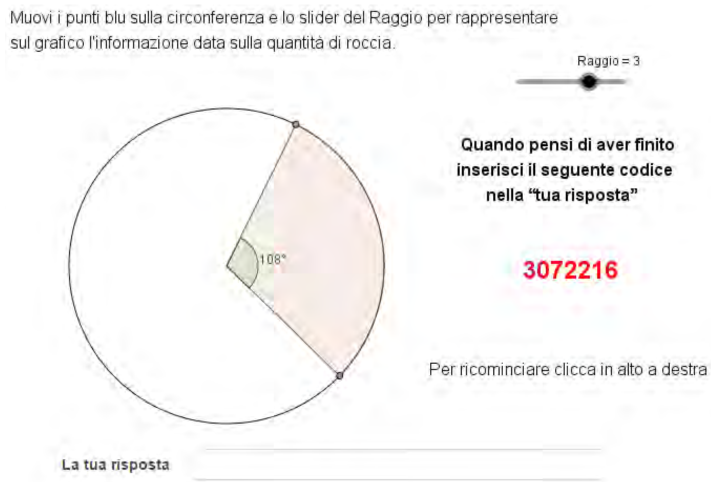


Figura 6: Domanda Grafica Interattiva in Programma Discovery

Per realizzare tale applicazione, è stata disegnata una circonferenza con raggio fissato e al raggio è stato assegnato il valore di una variabile *r*, visualizzata sotto forma di *slider*. In questo modo, manipolando lo slider, lo studente è in grado di modificare il raggio della circonferenza dinamicamente. L'applicazione restituisce un codice dinamico in funzione della manipolazione da parte dello studente. Il codice è visualizzato attraverso la funzione *Testo* di GeoGebra, che richiama il valore della variabile *codice,* che è stato generato come giustapposizione di due stringhe: la prima, di 4 caratteri, ottenuta moltiplicando il valore del raggio per 1024 (numero a scelta del progettista) e la seconda ottenuta moltiplicando l'ampiezza dell'angolo, arrotondata all'intero più vicino, per 2 (numero a scelta del progettista). La stringa così ottenuta è la seguente:

*1024 * Raggio 2*round(angolo / °)*

Il comando / ° consente di rendere l'ampiezza dell'angolo un numero puro. Il risultato, per un angolo di ampiezza 108° e con un raggio di misura 3 unità, è 3072216 (Figura 6). La formula usata per creare il codice è stata pensata in questo modo per non consentire allo studente di risalire al modo in cui è stato generato e allo stesso tempo ci consente di risalire sia all'ampiezza dell'angolo e sia al valore del raggio, scelti dall'utente. Ad esempio nel caso del codice 3072216 ricaviamo il raggio dividendo il numero 3072 (i primi 4 caratteri) per 1024 e otteniamo l'angolo dividendo il restante numero, 216, per 2.

La risposta fornita dallo studente è etichettata come esatta, se sia l'angolo che il raggio sono stati correttamente fissati; come semi-esatta, se l'angolo è corretto ma il raggio non è stato variato; come errata, se l'angolo è errato.

Così come avviene per i tutorial, allo studente è chiesto di riportare il codice generato dall'applicazione nella risposta della domanda, inserita all'interno della Lesson. A seconda della risposta fornita, sfruttando le funzionalità della Lesson, siamo in grado di somministrare un'opportuna domanda aperta di riflessione. Il codice dinamico ci permette in questo caso di sapere non solo che lo studente ha risposto correttamente, ma anche quale dei valori ammissibili per il raggio ha scelto. Questa informazione viene sfruttata per fornire allo studente uno stimolo più preciso per favorire l'apprendimento nella sua zona di sviluppo prossimale.

Domanda semiaperta interattiva

Si tratta di un'applicazione, realizzata con GeoGebra, che prevede come risposta una frase che lo studente deve costruire assemblando delle tessere (blocchi-parole) disponibili, tramite trascinamento. L'applicazione è in grado di risalire alla frase costruita dallo studente e pertanto di valutarla automaticamente rispetto agli scopi di uso.

Nel caso di studio, la DSI è stata utilizzata per favorire il passaggio dal ragionamento all'argomentazione. Pertanto allo studente viene sottoposta una domanda che prevede una risposta costituita da un'affermazione e da una motivazione, legate tra loro da una congiunzione causale. La valutazione prevede il controllo della correttezza tanto dell'affermazione quanto della motivazione. Se sono entrambe corrette, la risposta è valutata come esatta; se la risposta è corretta, ma la motivazione è errata, allora la risposta è valutata come semi-esatta; se l'affermazione è sbagliata, allora la risposta è valutata come errata. I blocchi disponibili permettono di costruire più risposte esatte, semi-esatte o errate.

Lo scopo della DSI da un punto di vista tecnologico, è quello di riuscire a somministrare, anche se in parte, domande a risposta aperta valutate automaticamente dalla piattaforma. Non si tratta, ovviamente, di una domanda completamente a risposta aperta, ma può risultare un'ottima alternativa, se i blocchi-parole sono scelti in modo da poter riprodurre il pensiero reale dello studente in una situazione simile. Da un punto di vista didattico, invece, lo scopo è quello di favorire lo sviluppo di competenze matematiche di tipo argomentativo, agevolando il passaggio da un registro colloquiale ad un registro più evoluto, vicino al modo con cui un matematico costruisce un'argomentazione (Ferrari, 2004). A tal proposito, i blocchi-parole disponibili sono stati pensati e predisposti per mettere in evidenza la struttura causale di un'argomentazione (Albano, Dello Iacono, Mariotti, 2016). L'applicazione riconosce le frasi indipendentemente dall'ordine in cui si susseguono le proposizioni principale e subordinata e valuta come equivalenti tutte le congiunzioni causali.

Nel caso di studio specifico, la DSI dà la possibilità allo studente di manipolare 30 blocchi-parole per costruire la propria risposta motivata, costruibile con 4 blocchi-parole (Figura 7).

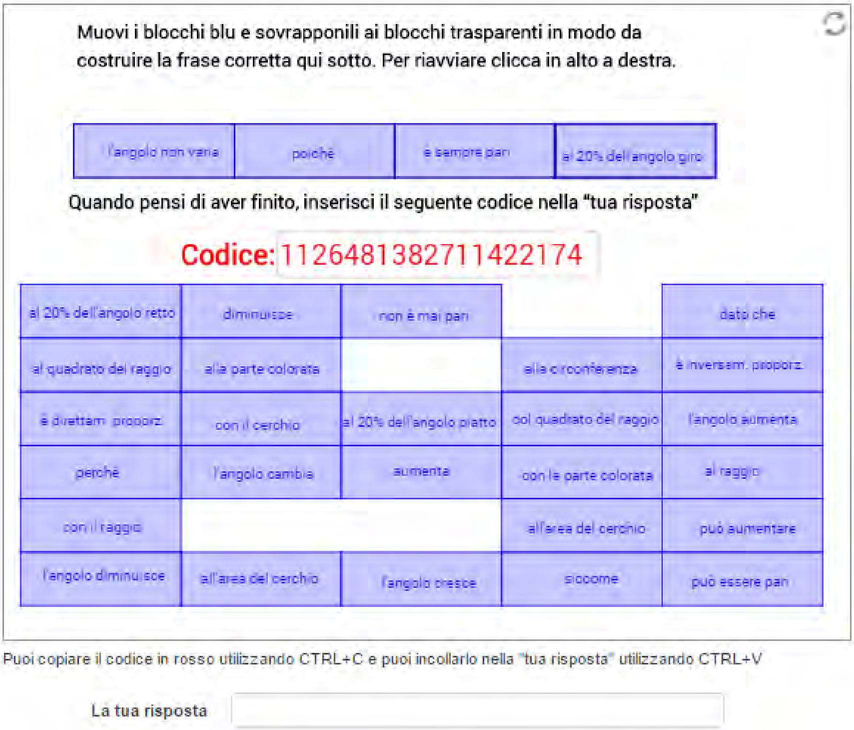


Figura 7: Domanda Grafica Interattiva in Programma Discovery

Ciascuna tessera è stata realizzata attraverso la funzione *Poligono* di GeoGebra, con i vertici nascosti per non dare la possibilità allo studente di deformarla. Il testo in ciascuna tessera, è stato inserito come *Legenda*, che è stata visualizzata al posto del nome dell'oggetto. Per consentire allo studente di costruire la frase facendo coincidere i blocchi-parole scelti con i 4 blocchi disponibili (Figura 7), è stata utilizzata l'opzione di GeoGebra *Vincola alla griglia*.

La DSI, in maniera simile a quanto già descritto per la DGI, restituisce un codice che cambia dinamicamente in funzione della manipolazione da parte dello studente e, in particolare, in funzione della posizione di ciascuna tessera. Così siamo in grado di risalire esattamente alla risposta costruita dallo studente e quindi di indirizzare in maniera personalizzata il percorso successivo.

Il codice dinamico è generato, anche in questo caso, come giustapposizione di stringhe e ciascuna stringa è funzione della posizione di uno o più tessere della stessa tipologia. Abbiamo, infatti, individuato tre tipologie di tessere: tessere "affermazione", per costruire la proposizione principale; tessere "congiunzione", relative alle congiunzioni causali; tessere "motivazione", per costruire le proposizioni subordinate.

Ad esempio, la variabile *codice 6* contiene una stringa così generata:

$$abs(x(A\_1) + x(B\_1) + x(C\_1) + x(D\_1)) + abs(y(A\_1) + y(B\_1) + y(C\_1) + y(D\_1))$$

ossia è funzione delle coordinate dei punti A1, B1, C1 e D1, che sono le coordinate di una specifica tessera (nel caso specifico, di una tessera risposta). La funzione *abs* di GeoGebra restituisce il valore assoluto dell'argomento. Unendo stringhe di questo tipo, generiamo il codice che viene visualizzato allo studente (Figura 7).

L'applicazione valuta corretta una risposta in cui tale è sia l'affermazione che la motivazione;

semi-corretta se solo l'affermazione è corretta; errata se l'affermazione è tale.

Poiché le frasi che si possono costruire a partire dalle tessere date sono in numero finito, siamo in grado di sapere a priori i codici che possono essere generati. Pertanto all'interno della Lesson di Moodle viene effettuato un controllo secondo una casistica predefinita, che prevede, a seconda dei casi, l'opportuno indirizzamento per una pagina successiva, attraverso la restituzione di un codice che viene utilizzato dallo studente in maniera analoga a quanto visto nei casi precedenti.

Conclusioni

Molti sono gli studi presenti in letteratura a riguardo delle potenzialità dell'uso di GeoGebra per l'apprendimento della matematica. In questo lavoro abbiamo presentato come questo strumento possa essere integrato in attività online sulla piattaforma di e-learning Moodle. A differenza dell'integrazione attraverso plug-in, la definizione delle nuove applicazioni descritte è innovativa per un duplice motivo. Da un lato, attraverso l'integrazione nel modulo Lesson di Moodle, permette al progettista di personalizzare in maniera più fine i percorsi di apprendimento sulla base di veri e propri task e non solo sulla base di domande a risposta chiusa o breve o a completamento, dal momento che i task possono essere disegnati in maniera opportunamente significativa rispetto all'apprendimento in gioco ed essere dinamici e interattivi. Dall'altro lato, è stato visto come GeoGebra possa permettere anche la definizione di applicazioni puramente linguistiche, e non solo di coordinamento di sistemi semiotici, tali da favorire un approccio discorsivo all'apprendimento della matematica.

Quanto presentato vuol essere solo uno spunto per la comunità di docenti che usano GeoGebra a considerare le potenzialità di questo software da un altro punto di vista, che integri l'uso che da diversi anni molti ne fanno in aula con altri strumenti e contesti, dall'apprendimento a distanza all'apprendimento basato sul gioco.

Bibliografia

Albano, G., Dello Iacono, U., Mariotti, M. A. (2016). Argumentation in mathematics: mediation by means of digital interactive storytelling. *Form@re*, 16(1), 105-115.

Albano, G., Dello Iacono, U., Fiorentino, G. (2016). An online Vygotskian learning activity model in mathematics. *Journal of e-Learning and Knowledge Society*, 12(3).

Albano, G., Ferrari, P.L. (2013). Linguistic competence and mathematics learning: the tools of e-learning. *Journal of e-Learning and Knowledge Society (Je-LKS) (eISSN 1971-8829)*, Vol. 9, No. 2, pp. 27-41.

Dello Iacono, U. (2015). Un modello di attività vygotskijana integrando Moodle e GeoGebra. In Rui et al., Teach Different! *Proc. of EMEMITALIA2015*, Genova University Press, pp. 243-246.

Duval, R. (2006). The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 61 n°1, pp. 103-131.*

Ferrari, P.L. (2004). Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning. In Johnsen Høines, M. & Berit F., A. (Eds.), *Proc. of the PME 28* (2, pp. 383-390). Bergen (N).

King, A. (2006). Scripting collaborative learning processes: A cognitive perspective. In: F. Fischer, I. Kollar, H. Mandl, & J. Haake (eds.), *Scripting computer-supported collaborative learning: Cognitive, computational and educational perspectives.* New York: Springer.

King, A. (2007). Scripting collaborative learning processes: A cognitive perspective. In: F. Fischer, I. Kollar, H. Mandl, & J. Haake (eds.*), Scripting computer-supported collaborative learning: Cognitive, computational and educational perspective*s (pp. 13-37). New York: Springer.

Laurillard, D. (2015) *Insegnamento come scienza della progettazione. Costruire modelli pedagogici per apprendere con le tecnologie*. Franco Angeli Ed.

Schafersman, S.D. (1991). An introduction to critical thinking. Retrieved September 10, 2016, from http://facultycenter.ischool.syr.edu/wp-content/uploads/2012/02/Critical-Thinking.pdf

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Edizioni Erickson.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press.

Weinberger, A., Kollar, I., Dimitridias Y., Makitalo-Siegl, K., Fischer, F. (2009). Computer. supported collaboration scripts. In N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, A. Lazonder, S. Barnes (eds.): *Technology-Enhanced Learning*, pp 155-173.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri) formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.35 A N.2 marzo 2012

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri) formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.35 A N.4 settembre 2012.

Zazkis, R., Liljedahl, P. (2009). *Teaching mathematics as storytelling*. The Netherlands: Sense Publishers.

COMUNICAZIONI

MOOC DI GEOMETRIA: PRESUPPOSTI, OBIETTIVI E RISULTATI

Virginia Alberti[1], Sara Labasin[2], Ferdinando Arzarello[3], Eugenia Taranto[3], Arianna Coviello[4]

[1] I.I.S. "B. Castelli", Brescia (BS) - [2]L.S. "P. Gobetti", Torino (TO)

[3]Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino, Torino (TO)

[4] L. S. "G. Galilei", Alessandria (AL)

alberti.virginia@gmail.com

Abstract

Nell'ottobre 2015 ha preso vita il progetto Math MOOC UniTo: MOOC (Massive Open Online Course) nati da docenti dal Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promossi dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e destinati alla formazione di docenti di matematica in servizio di scuola secondaria, sui Nuclei delle Indicazioni Nazionali (Numeri, Geometria, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni). La finalità che si persegue con questo progetto è quella di tracciare la strada per una nuova modalità di formazione, che tenga conto delle esigenze della nuova società in termini di ICT (Information Communication Technology), creatività e condivisione e di monitorarne i passaggi al fine di valutarne l'impatto e la ricaduta nelle pratiche didattiche, affinché l'utilizzo della tecnologia generi un apprendimento consapevole. L'intento del contributo è quello di riportare quanto è emerso dalla primissima esperienza di formazione docenti interamente a distanza del *MOOC Geometria*, erogato per otto settimane fino a gennaio 2016 e con un ulteriore appuntamento, mediante webinar, il 14 marzo, in concomitanza di una nota ricorrenza matematica: "il Pi Day". Tale esperienza ha permesso al team dei designer/formatori di riflettere sulle opportunità che consente una formazione di docenti a distanza e di orientare in maniera più consapevole le scelte per proposte successive di MOOC, in modo da rispondere in maniera ottimale alle esigenze di formazione manifestate dalla community nata a seguito della partecipazione al *MOOC Geometria*.

Introduzione

Math MOOC UniTo è un progetto che ha preso vita nell'ottobre 2015 (Labasin et al., 2015). Si tratta di MOOC (Massive Open Online Course) nati dal Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promossi dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e destinati alla formazione di docenti di matematica in servizio di scuola secondaria sui Nuclei delle Indicazioni Nazionali (Numeri, Geometria, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni). Sono quindi MOOC creati da insegnanti per insegnanti, in collaborazione con i ricercatori in Didattica della Matematica del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino.

Gli insegnanti-autori si sono dedicati, durante il Master, alla creazione, alla progettazione e produzione di percorsi per studenti di scuola secondaria, considerando sia le competenze richieste per il XXI secolo, sia gli stili di apprendimento della nuova generazione. Si è puntato sul fatto che le proposte dovevano essere accattivanti, multimodali e multimediali, venendo incontro all'apprendimento sociale via web messo in atto dai discenti; in più tali proposte dovevano permettere di stimolare le abilità di problem solving ed implementare le capacità di pensiero critico.

Questi materiali sono quindi diventati i contenuti dei MOOC che i docenti-autori hanno progettato ed erogato mediante la piattaforma Moodle di *DI.FI.MA. in Rete* – http://difima.i-learn.unito.it/ – (Figura 1), in collaborazione con alcuni docenti e ricercatori universitari.

Figura 1. I MOOC di Math MOOC UniTO su DI.FI.MA.

La finalità che si persegue prioritariamente con il progetto Math MOOC UniTo è quella di tracciare la strada per una nuova modalità di formazione, che tenga conto delle esigenze della nuova società in termini di ICT (Information Communication Technology), creatività e condivisione, e di monitorarne i passaggi al fine di valutarne l'impatto e la ricaduta nelle pratiche didattiche, affinché l'utilizzo della tecnologia generi un apprendimento consapevole. Secondariamente si aspira alla creazione di una community di docenti sull'intero territorio nazionale che siano attivi e motivati al confronto con colleghi, disponibili alla condivisione di idee in termini di strategie d'insegnamento e di buone pratiche, sensibili a sperimentare nuovi percorsi e nuove metodologie anche con le nuove tecnologie, propensi alla collaborazione e alla condivisione di contenuti.

L'intento del contributo è quello di raccontare quanto è emerso dalla primissima esperienza di formazione docenti interamente a distanza e mostrare come tali obiettivi siano stati effettivamente raggiunti.

Il MOOC Geometria: design e metodologia

Dal 26 ottobre 2015, per un totale di 8 settimane di attività, si è erogato il primo dei 4 MOOC in cantiere, meglio noto come "MOOC Geometria" (Figura 2).

Al MOOC si sono iscritti 424 docenti di matematica sia di scuola secondaria di primo (45%) che di secondo (49%) grado, tutti italiani: 82% donne e 18%.

Le attività proposte sono state suddivise in 6 moduli, con cadenza settimanale o bi-settimanale, catalogati in 4 macro temi (Tabella 1). Sono tutte attività basate sulla metodologia della didattica laboratoriale, fatta eccezione per quelle sulla valutazione che hanno preso in considerazione anche una nuova metodologia, nota come MERLO (Arzarello et al., 2015).

Un modulo introduttivo ha permesso ai docenti corsisti di prendere confidenza con la piattaforma e la modalità di erogazione del corso; il modulo conclusivo era invece dedicato alla progettazione e alla revisione tra pari di un'attività didattica, da realizzarsi facendo uso di uno specifico software, come sarà spiegato nel seguito.

Il design di ciascun modulo è stato strutturato ad hoc sia nella scelta degli strumenti, sia nelle modalità per veicolare le proposte di formazione. Esso tendeva ad accompagnare il corsista, ad orientarlo e a stimolarlo nel raffinamento delle proprie pratiche d'insegnamento, verso attività di tipo anche laboratoriale. Mirava a curare la tipologia di comunicazione e di interazione in considerazione dell'ingresso delle nuove tecnologie nell'attività didattica, della proposta d'uso di manuali non più solo cartacei ma multimediali e in considerazione dell'utenza sempre più multitasking e a contatto con il digitale. Per questo si è cercato di monitorare in modo sistematico, ma *con discrezione*, la fruizione dei docenti corsisti durante tutto il periodo di erogazione del MOOC, sfruttando appieno sia le potenzialità di tracciamento dell'ambiente d'apprendimento in rete, sia creando dei gruppi di docenti formatori del master che, secondo un format predefinito, raccoglievano le pratiche di accesso, fruizione, interazione, collaborazione. La *discrezione* si delinea nel fatto che si è cercato di intervenire qualora un supporto degli esperti fosse necessario, in modo però da non influenzare imponendo uno standard predefinito. Non si è delineata nessuna netiquette nelle conversazioni dei docenti corsisti, proprio per fotografare il più possibile la situazione di partenza e rilevare cambiamenti anche minimi in termini di prassi.

Figura 2. Il corso MOOC Geometria.

Macro Temi	Nodi concettuali/Consegne	Moduli	N° di settimane
Attività pratico-manipolative	Distanza	*Modulo 1* "Rampe, vele, parchi e piegature della carta"	1
	Angolo	*Modulo 2* "Da orologi, girandole, pattinatori allo spettacolo di Natale"	2
Problem Solving e Dimostrazione	Argomentare, congetturare, dimostrare	*Modulo 3* "Eredità, un problema di Polya e quale dimostrazione"	2
Valutazione	Valutare intelligenze diversificate e competenze	*Modulo 4* "Valutazione e INVALSI"	1
	Riconoscere rappresentazioni diverse con stesso significato	*Modulo 5* "Metodologia MERLO"	1
Progettazione	Progettare un'attività didattica con uno specifico software e revisionare l'attività proposta da un altro collega	*Modulo 6* "Project Work e Peer Review"	1

Tabella 1. I moduli del MOOC Geometria

Attività settimanali e strumenti tecnologici

Il design settimanale del MOOC prevedeva per i docenti corsisti la visione di video di pochi minuti (realizzati mediante il software PowToon) in cui veniva introdotto l'intero percorso di formazione ed anche video in cui interveniva un docente universitario che introduceva il nodo concettuale su cui verteva la proposta formativa. Settimanalmente ogni modulo conteneva specifiche bacheche di comunicazione (quali forum, padlet o tricider). I corsisti, navigandole e sperimentandole, erano invitati, prioritariamente, a lasciare commenti sul materiale fruito e/o a condividere esperienze inerenti il proprio insegnamento, le proprie pratiche didattiche, il proprio sviluppo professionale. Secondariamente, proprio perché ne facevano uso in prima persona (secondo il learning by doing declinato da Dewey (1916)), i corsisti erano invitati a riflettere sulle potenzialità e valenze didattiche di tali bacheche proposte, per un possibile utilizzo in classe con i propri studenti della Google generation, a favore della co-costruzione di saperi disciplinari con proposte laboratoriali.

Dal questionario finale, chiedendo – con domande a risposta multipla che prevedevano più di un'opzione di risposta – a chi erano rivolti i post sia in fase di scrittura che di lettura, è emerso che l'89% dei corsisti postava sulle bacheche indirizzando il messaggio ai colleghi, mentre il 31% reputava i post indirizzati al team del MOOC. Per le risposte ai post: il 30% orientava all'autore il proprio reply, il 52% all'audience formatasi sulla questione e il 34% all'intera audience del MOOC.

Per supportare la narrazione del percorso di formazione da docente (autore) a docente (fruitore), le attività settimanali sui nodi concettuali erano presentate ai corsisti mediante Sway (Figura 3), un'app web-based versatile e free di digital storytelling, friendly nella fruizione su ogni device. La scelta di Sway è dipesa dal fatto che, oltre alla semplicità di fruizione e all'essere accattivante nell'impatto visivo, consente facilmente di integrare al suo interno, anche con codice embed, diversi tipologie di contenuti selezionabili sul web con apposito motore di ricerca nel rispetto del copyright[1] o uplodabili dal proprio pc. I contenuti possono essere non solo di testo, ma anche interattivi e multimediali quali immagini, video, file audio, mappe, grafici interattivi, fogli di calcolo e file Geogebra scaricabili o utilizzabili direttamente sulla piattaforma.

Figura 3. Gli Sway del MOOC Geometria.

Altra ragione per cui si è predisposto e proposto Sway è stata quella di mettere insieme il nodo concettuale trattato con le raccolte delle attività dedicate sullo stesso per facilitare la creazione di library.[2]

Questa app è stata apprezzata dai corsisti, infatti hanno duplicato, hanno raccolto in learning diary, hanno riusato e alcuni hanno proposto attività con Sway nel loro Project work finale.

1 Cosa non del tutto trascurabile in ambito educativo

2 Lo Sway degli Sway del nodo concettuale

I webinar

Il MOOC Geometria si è svolto interamente a distanza, con 3 webinar tenuti da esperti (Prof.ri O. Robutti, F. Arzarello e Dott.ssa A. Coviello), ovvero seminari interattivi[3] (Figura 4), di circa un'ora e mezza ciascuno, tenuti sulla piattaforma DI.FI.MA in Rete, grazie alla risorsa BigBlueBotton (http://bigbluebutton.org/). I corsisti non erano dei semplici uditori, ma avevano l'opportunità di essere parte attiva durante la web conference: potevano intervenire via chat testuale, tutorata dai docenti referenti dell'erogazione del corso; potevano commentare; condividere risorse via url e porre domande in relazione alla presentazione delle slide del relatore.

La registrazione dei webinar e la successiva pubblicazione nel corso ha permesso, inoltre, di supportare l'intento di creazione di comunità di pratica (Wenger, 1998).

Figura 4. Il webinar del prof. Arzarello del MOOC Geometria

La partecipazione ai webinar è stata alta (da 90 partecipanti nel primo a 50 partecipanti nell'ultimo), nonostante l'adesione non fosse tra i criteri previsti per accedere al riconoscimento intermedio di formazione. Questa tipologia di interazione sincrona è stata molto apprezzata dai corsisti, come si è potuto rilevare dagli interventi sul forum e nel questionario di customer satisfaction erogato a fine MOOC. Conferma ulteriore è stata anche la partecipazione al webinar proposto a MOOC ormai concluso, ovvero il webinar del 'Pi Day' svoltosi il 14 marzo 2016.

Attività finali per il rilascio della certificazione

Alla fine di ogni modulo, vi era un semplice test volto a verificare che tutti avessero conseguito gli obiettivi di apprendimento prefissati[4] e, dunque, a rilasciare un badge che testimoniasse tali risultati.

La conclusione del MOOC prevedeva la realizzazione della progettazione di un'attività didattica, Project Work, da parte di ogni docente corsista, mediante uno specifico software web-based, Learning Designer (LD)[5] (Laurillard, 2012), reperibile all'url http://learningdesigner.org/.

Inoltre era anche prevista un'attività di revisione tra pari, Peer review, del Project Work realizzato

3 L'esperto, visibile tramite webcam, teneva un seminario mostrando slide condivise sullo schermo e una chat testuale sincrona permetteva ai corsisti di interagire commentando e/o facendo domande.

4 Esplicitati ai corsisti mediante i criteri di assegnazione dei badge, criteri che talvolta richiedevano l'assunzione di responsabilità e la dichiarazione della stessa per l'assolvimento di alcune consegne relativamente allo svolgimento di attività previste.

5 LD aiuta a pianificare una lezione, ossia a creare un lesson plan che faciliti l'integrazione della tecnologia.

da un collega corsista, rifacendosi a precise linee guida[6] predisposte ad hoc dal team del MOOC.

A tutti coloro che hanno ottenuto i badge di tutti i moduli ed espletato le sopra descritte attività finali, è stato rilasciato un certificato di partecipazione.

I numeri sono molto rappresentativi: si contano 424 iscritti, con almeno un rappresentante per ogni regione italiana, e di questi il 36%[7] ha concluso il MOOC nella totalità delle attività previste e ha quindi conseguito i badge rilasciati dalla piattaforma e l'attestato della certificazione finale rilasciato dall'Università (Figura 5).

Figura 5. Badge e attestato finale del MOOC Geometria.

Il GeoGebrabook del MOOC

Nel MOOC è stato proposto anche un GeoGebrabook del corso dal titolo MathMoocUniTO (Figura 6), incorporato nel LMS DI.FI.MA. in Rete e reperibile all'url https://ggbm.at/TRGn4O8V nei materiali della community di GeoGebra.

Tale ebook, generato con l'account MoocMasterUniTO, nella sua proposta iniziale ha raccolto i fogli creati per le attività di formazione dedicate ai nodi concettuali di Geometria e l'intera library di risorse video, audio e di narrazione del MOOC pubblicata e distribuita sotto licenza "Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License". Il GeoGebrabook doveva, inoltre, incorporare e raccogliere tutte le risorse prodotte dagli autori impegnati nel progetto dei MOOC del Dipartimento di Matematica "G. Peano" e create con il software GeoGebra.

Figura 6. Il GeoGebrabook del MOOC Geometria.

6 Le linee guida per la Peer Review scaricabili all'url : http://1drv.ms/1TaVU2b

7 Dato non trascurabile rispetto al 5% riportato dalla letteratura (Bayne & Ross, 2013).

Successivamente, vista la ricchezza delle condivisioni dei corsisti sia nei forum dei moduli di apprendimento/formazione e sia nei Project Work, si è pensato di richiedere l'autorizzazione alla pubblicazione delle applet prodotte dai corsisti con GeoGebra, invitando anche ad inserire il foglio con le adeguate specifiche di fruizione/interazione per studenti e con le linee guida per i docenti desiderosi di proporre l'applet nella propria pratica didattica. Questa integrazione di materiali ha portato alla generazione di un capitolo dedicato, il capitolo 7: 'Le risorse condivise dai corsisti', in cui sono presenti 18 applet afferenti ad esperienze attinenti a percorsi del MOOC di Geometria di corsisti che hanno autorizzato alla pubblicazione.

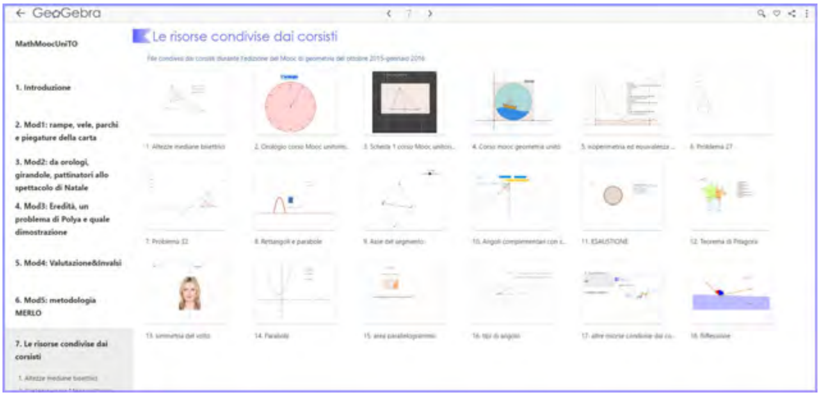


Figura 7. Le risorse dei corsisti del GeoGebrabook Math MOOC UniTO del MOOC Geometria.

Conclusioni

Un aspetto molto interessante riguarda la comunità di pratica e di riflessione che si è venuta a creare all'interno di questo ambiente online. A tal proposito, il team del MOOC avrebbe piacere, in un prossimo futuro, di coinvolgere alcuni corsisti al fine di permettere di raccontare la loro esperienza e mostrare ad un ampio uditorio i lavori prodotti nel MOOC.

Significativo è sottolineare che il 97% di chi ha compilato il questionario finale (152 rispondenti) ha riconosciuto la potenza dell'apprendimento sociale in termini di formazione professionale via MOOC. Emerge consapevolezza sulla forza della condivisione e sull'influenza di "stili" d'insegnamento legati a buone pratiche esperienziali, che hanno creato punti di rottura con vecchie pratiche di insegnamento frontale ed hanno stimolato ed aperto a proposte laboratoriali legate anche all'utilizzo di software come GeoGebra, ma non solo.

Si osservi che di quanti hanno compilato il questionario finale (e quindi concluso l'esperienza formativa a distanza): il 68% si era iscritto perché ne sentiva la necessità; il 76% ha ritenuto che il MOOC Geometria abbia soddisfatto le proprie aspettative e il 75% ha ritenuto adeguatamente buona la corrispondenza fra offerta formativa e durata del MOOC. Accanto a questi dati e alla consapevolezza della ricchezza della condivisione in una community, si rileva che il 98% dei rispondenti al questionario finale ha dichiarato la propria disponibilità ed intenzione a partecipare ad un altro MOOC[8] del progetto MATH MOOC UniTO. Inoltre, sempre in merito al questionario finale, c'è da rilevare che il 93% dei corsisti ha ritenuto efficaci i metodi didattici impiegati nel corso; che il 99% ha reputato utile il materiale didattico fornito e l'83% ha riconosciuto un cambiamento nella propria pratica didattica dopo la frequenza del MOOC di Geometria. Su richiesta dei corsisti il percorso formativo è ancora attualmente fruibile nei contenuti e si rilevano accessi negli 11 mesi successivi (Figura 8).

8 Il MOOC Numeri in partenza in termini di erogazione a fine ottobre del 2016

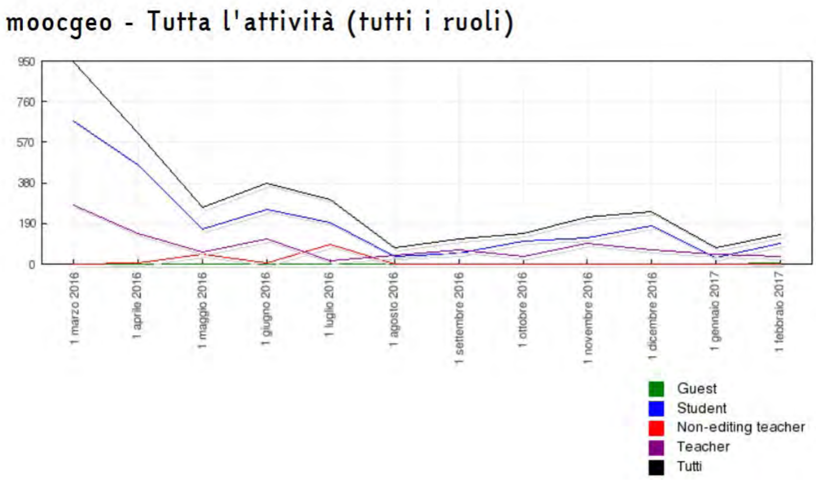


Figura 8. Gli accessi del MOOC Geometria dopo la chiusura del corso.

Ringraziamenti

Si ringrazia il team MOOC Geometria per la collaborazione alla progettazione del MOOC: Silvia Beltramino, Roberta Ferro, Francesca Finoglio, Sara Gaido, Maria Cristina Garassino, Laura Mantello, Ornella Robutti, Annarosa Rongoni.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: a new tool and a new challenge in mathematics teaching and learning. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 57-64. Hobart, Australia: PME.

Bayne S., Ross J. (2013). The pedagogy of the Massive Open Online Course: the UK view. The Higher Education Academy.

Dewey, J. (1916). Democracy and education: an introduction to the philosophy of education. *Free Press;* Reprint edition (February 1, 1997).

Labasin, S., Alberti, V., Taranto, E. & Arzarello,F. (2015). Math MOOC UniTo: una proposta di formazione per docenti di matematica. Atti del VII Convegno Nazionale di DI.FI.MA.

Laurillard, D. (2012). Teaching as a design science. London: Routledge.

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning, and identity. Cambridge university press.

L'ESPERIENZA DELLA QUALITY CLASS

Barbara Brignone, Elena Furlan,
Francesca Marzolla, Anna Vicidomini
Università degli Studi di Torino - Quality Class
barbaracn83@libero.it

Abstract

Questa comunicazione ha lo scopo di raccontare la nostra esperienza nella Quality Class organizzata ogni anno dal prof. Lambrecht Spijkerboer con l'aiuto di Monica Mattei e giunta alla 21ª edizione. Questo progetto coinvolge una quindicina di studenti universitari ed insegnanti neo-abilitati provenienti da vari paesi e crea un ambiente di scambio internazionale sul tema della didattica della matematica. L'iniziativa dura 10 giorni, nella prima parte del periodo, dedicata esclusivamente ai partecipanti, si svolgono workshop, lezioni e attività volte a creare un gruppo classe coeso che lavora sulla didattica; negli ultimi cinque giorni la classe partecipa alla sessione annuale di un convegno internazionale di didattica della matematica, nel nostro caso si è trattato del CME 2016 (Children's Mathematical Education).

Il workshop preparato dal nostro gruppo riguarda la probabilità. Il percorso è pensato per l'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado e il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado ma può essere riadattato per altri livelli d'istruzione. Il filo conduttore delle attività proposte è il concetto di probabilità attraverso le sue diverse sfaccettature: classica, frequentista e soggettiva. Si è voluto evidenziare che il concetto classico di probabilità presenta dei limiti e non è quindi sufficiente a descrivere tutte le situazioni; inoltre si è sottolineato il legame tra probabilità e realtà per sviluppare nei ragazzi la capacità di prendere decisioni valutando in modo critico.

Le attività sono pensate per favorire i collegamenti tra i vari nuclei della matematica (funzioni e relazioni, spazio e figure, dati e previsioni, aritmetica e algebra) utilizzando diverse metodologie didattiche (lavoro a gruppi, discussioni e intervento dell'insegnante) e integrando diversi tipi di strumenti (materiali poveri, software e carta e penna).

Quality Class: l'insegnamento è qualità.

Nel mese di luglio 2016 abbiamo partecipato ad un'esperienza internazionale di formazione e approfondimento professionale chiamata "Quality Class" che si è svolta a Wrocław (Breslavia) in Polonia. L'ideatore di questo progetto è il Prof. Lambrecht Spijkerboer (NE) formatore e consulente della STA (Schoolontwikkeling, Training en Advies), personal trainer per insegnanti che da qualche anno viene affiancato dalla Dott.ssa Monica Mattei (IT) dell'Università di Torino. Il nostro dipartimento, grazie al supporto della Prof.ssa Ornella Robutti, partecipa da diversi anni a questo progetto di condivisione e scambio di esperienze sulla didattica della matematica, dando l'opportunità ad insegnanti neo abilitati di conoscere culture differenti e sperimentare, in qualità di studenti, tecniche di insegnamento nuove ed efficaci. Uno degli obiettivi della Quality Class è quello di stimolare i neodocenti alla formazione continua, anche attraverso appuntamenti internazionali.

La nostra intensa esperienza, durata dieci giorni, è stata ideata in modo da creare in poco tempo un gruppo di lavoro ben coeso ed organizzato, sia nei momenti didattici sia in quelli di svago e divertimento. Nei primi cinque giorni, il "cuore" della QC, abbiamo presentato i workshop preparati nei mesi precedenti con i nostri rispettivi connazionali e abbiamo condiviso i sistemi scolastici dei diversi paesi partecipanti al progetto (Polonia, Olanda, Italia); nei restanti cinque giorni abbiamo partecipato attivamente al convegno internazionale CME '16 (Children's Mathematical Education) dal titolo "Inquiry based mathematical education" articolato in sessioni in plenaria, workshop e comunicazioni. Il Prof. Spijkerboer ha organizzato una sessione speciale dedicata esclusivamente alla QC con la partecipazione del Prof. Ferdinando Arzarello, ospite al convegno. I giorni della conferenza sono stati i “polmoni” della nostra esperienza, ci hanno permesso di respirare appieno l’aria di un congresso internazionale, seguiti ed accompagnati da numerosi momenti di scambio, riflessione e consigli dei nostri “coach”.

I workshop presentati nei primi giorni hanno delineato una particolare propensione ad attività pratico-matematiche quali gli origami, le dimostrazioni geometriche attraverso la visualizzazione di oggetti reali (tende da campeggio), giochi da tavolo (il gioco del 24), modellizzazioni matematiche e tanto altro.

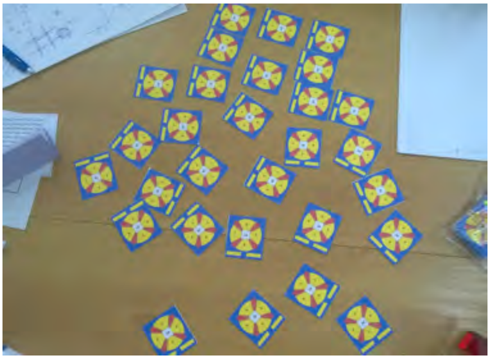


Figura 1: costruzione di solidi con la carta.

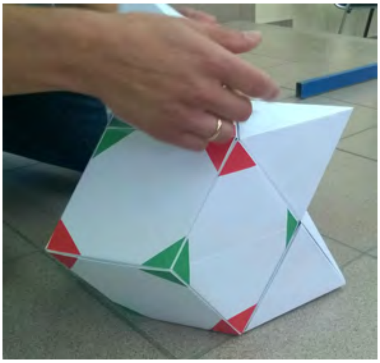


Figura 2: gioco matematico “24”.

Gli organizzatori hanno previsto una proficua sessione di feedback in seguito ad ogni attività proposta in modo da focalizzarne i punti di forza e di debolezza. La loro attenzione è stata posta sugli argomenti, ma soprattutto sull’organizzazione e sullo svolgimento delle attività; si è discusso di gestualità, tono di voce, colori, strumenti, comportamenti dell’insegnante nella gestione dei gruppi e della classe, etc…

Due considerazioni importanti ci hanno fatto riflettere sulle nostre attività didattiche. In primo luogo il modus operandi dei nostri compagni ci ha permesso di percepire molto della loro cultura, ad esempio gli argomenti affrontati dai ragazzi polacchi sono stati molto vari ma con un comune approccio all’insegnamento; per loro sono prioritarie la velocità di esecuzione e il risultato. Diventa, quindi, importante riflettere sulle “abitudini” di insegnamento e prendere in considerazione nuove idee pedagogico-didattiche. In secondo luogo è stato fondamentale partecipare in qualità di insegnanti e di studenti per acquisire una doppia visione: dell’insegnare e dell’apprendere. Un’esperienza che ognuno di noi vorrebbe poter ripetere, rivivere, almeno non dimenticare e far fruttare nel tempo e che innova il modo di insegnare.

Figura 3: Anna, Elena, Barbara, Francesca.

Il nostro workshop

Il workshop che abbiamo presentato nel progetto QC è pensato per studenti dai 14 ai 16 anni e può essere affrontato a diversi livelli di difficoltà. Abbiamo scelto di parlare del concetto di probabilità e delle sue diverse sfaccettature poiché, ad oggi, nella scuola italiana, nonostante venga citato dalle Linee Guida delle diverse tipologie di scuole, questo argomento è ancora poco affrontato. Inoltre, la probabilità risulta essere una tematica largamente diffusa nei programmi scolastici di altri Paesi.

Nella progettazione delle nostre cinque attività abbiamo creato un percorso attraverso la probabilità classica, frequentista e soggettiva, tenendo presente che:

> *"Il concetto di probabilità è primitivo, ovvero vicino a quello del senso comune. Per dirlo in modo scherzoso, il concetto di probabilità è quello che si ha "prima di andare a scuola" (D'Agostini, gennaio 1999, 28)*

Nella seguente tabella vengono riassunti gli obiettivi, le metodologie e i materiali utilizzati nel nostro progetto.

OBIETTIVI	METODOLOGIE	MATERIALI
• conoscere il concetto di probabilità (classica, frequentista e soggettiva) • riconoscere le connessioni tra i diversi concetti di probabilità in contesti reali • creare connessioni tra i nuclei fondanti della matematica • creare competenze di cittadinanza	• Problem solving • Attività laboratoriale • Lavoro a gruppi • Brainstorming • Discussione • Cooperative learning	• schede di lavoro semistrutturate • pc e web • materiali poveri • carta e penna

Tabella 1: Obiettivi, metodologie e materiali.

Attività 1 - La condanna di Denisio

Abbiamo introdotto la probabilità classica come casi favorevoli su casi possibili attraverso un'attività a gruppi[1]; a ciascuno di essi abbiamo fornito una scheda semistrutturata con la storia di Denisio, due bicchieri e quattro palline (2 bianche e 2 nere). L'obiettivo dell'attività è quello di capire come distribuire le palline nei due bicchieri in modo tale da ottenere, con una sola estrazione, la massima probabilità di estrarre una pallina bianca. L'esplorazione del problema può avvenire tramite diagrammi ad albero e si presta a possibili generalizzazioni (n palline bianche ed n palline nere). La miglior distribuzione di palline si ha nel caso 3 (Fig. 4).

1 Attività tratta dal canale Youtube "Didattica della matematica" della Prof.ssa Ornella Robutti: https://www.youtube.com/watch?v=53jf2Gr0B3w

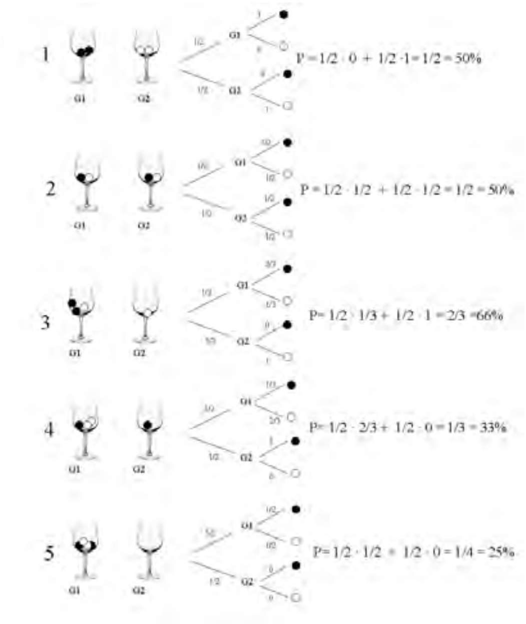


Figura 4: la condanna di Denisio.

Attività 2 - Dadi e puntine

Questa attività ha l'obiettivo di indurre a ragionare sui limiti e sulle potenzialità della probabilità classica. Gli studenti possono cogliere le differenze fondamentali causate dalla geometria dell'oggetto correlando così due nuclei fondanti della matematica: la geometria e la probabilità. Infatti, nel caso del lancio di dadi si può ricorrere alla probabilità classica (poiché la probabilità di avere una faccia piuttosto che un'altra è la stessa) mentre nel lancio delle puntine (le due modalità di caduta hanno diversa probabilità) non è possibile ed è necessario ricorrere al concetto frequentista di probabilità.

Nell'attività proposta gli allievi hanno utilizzato due dadi da noi forniti e un pc; hanno costruito la distribuzione di probabilità della somma che si ottiene dal lancio di due dadi.

		DADO 1					
		1	2	3	4	5	6
DADO 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

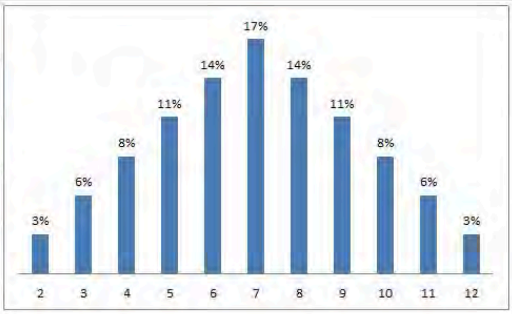


Tabella 2: distribuzione di probabilità della somma che si ottiene dal lancio di due dadi.

Hanno scoperto che il numero più frequente è il sette e, grazie ad un simulatore di lanci online[2], hanno constatato che all'aumentare dei lanci la frequenza relativa si avvicina alla probabilità teorica del 17% di ottenere come somma il numero sette. In questo modo è possibile verificare sperimentalmente la legge dei grandi numeri.

10 LANCI	20%
50 LANCI	14%
150 LANCI	18%
250 LANCI	17%

Tabella 3: frequenze relative percentuali dell'evento "esce somma 7" ottenute con il simulatore di lancio dadi all'aumentare del numero di lanci.

La seconda parte dell'attività prende in considerazione le due possibili modalità di caduta di una puntina da disegno[3]. Infatti, lanciando una puntina, essa può cadere con la punta in su (evento *s*) oppure con la punta in giù (evento *g*), ma in questo caso non è possibile applicare la probabilità in senso classico, come nel dado, poiché i due eventi non hanno la stessa probabilità proprio a causa della struttura geometrica dell'oggetto.

Abbiamo proposto agli studenti di lanciare per 10 volte 20 puntine, contando le frequenze assolute e calcolando poi quelle relative per 3, 6, 10 lanci. Dopo le dovute osservazioni abbiamo fornito dati aggiuntivi come da Tabella 4 in modo da far stimare con più precisione le probabilità dei due eventi *s* e *g*.

Numero di lanci di una singola puntina	FREQUENZE ASSOLUTE Punta in su	FREQUENZE ASSOLUTE Punta in giù	FREQUENZE RELATIVE Punta in su	FREQUENZE RELATIVE Punta in giù
10	7	3	0.7	0.3
100	63	37	0.63	0.37
1000	573	427	0.573	0.427
2000	1198	802	0.599	0.401
3000	1795	1205	0.598	0.402

Tabella 4: Frequenze assolute e relative per 10, 100, 1000, 2000, 3000 lanci di puntine da disegno.

Dai risultati si osserva che p(*s*) = 0.598 per 3000 lanci e si avvicina sempre più a 0.58 all'aumentare dei lanci; mentre p(*g*) = 0.402 e si avvicina a 0.42 all'aumentare dei lanci.

Attività 3 - Giochi d'azzardo

Questa attività, sul concetto classico di probabilità, ha l'obiettivo di sviluppare le competenze di cittadinanza e sottolineare l'importanza di "*giocare per divertirsi e non per vincere*", poiché ogni gioco d'azzardo ha sempre il "banco" vincitore.

In un'ottica di cooperative learning abbiamo proposto ad alcuni gruppi il gioco del lotto e ai restanti il gioco della roulette francese in modo tale da costruire con l'intera classe le due rette legate ai coefficienti di perdita di ciascun gioco e osservare in quale dei due vi è maggiore perdita.

Ad ogni gruppo abbiamo fornito una tabella dei pagamenti delle scommesse, ad esempio, la

2 http://gwydir.demon.co.uk/jo/probability/dice.htm

3 Ispirata dalla Cassetta degli attrezzi del prof. Alessio Drivet: https://sites.google.com/site/oggettimatematici/home/p-1/puntine-da-disegno

giocata su singolo numero della roulette francese è pagata 35 a 1, cioè scommettendo 1 posso vincere e guadagnare 35 con probabilità 1/37[4] oppure perdere 1 con probabilità 36/37. Gli studenti hanno simulato dieci giocate e concluso in perdita o in vincita, è stato loro domandato se conviene continuare a giocare.

Riflettendo su tale interrogativo i gruppi hanno costruito (con l'aiuto di schede guidate) la funzione discreta che rappresenta la quantità media vinta o persa dopo *n* giocate avendo scommesso la somma di denaro *B* per ogni giocata *Q(n,B)*. Supponendo *B* unitario (1 euro) hanno ottenuto come funzione un insieme di valori che hanno disegnato con l'aiuto di un software (Geogebra o Foglio di Calcolo). Il grafico ottenuto è un insieme di punti allineati e il coefficiente angolare della retta interpolante prende il nome di *coefficiente di perdita* ed è definito come segue:

$$c_{perdita} = P_v * v - P_p * p$$ [5]

Poiché la funzione Q(n) è direttamente proporzionale al numero di partite allora la sua equazione è:

$$Q(n) = c_{perdita} * n$$

Nella Tabella 5 vengono riportati i coefficienti di perdita di alcuni giochi d'azzardo e nella Figura 5 vengono riportati i grafici delle rette interpolanti le funzioni *Q(n)*.

Gioco	Black Jack	Roulette	Video Lottery Terminal	Miliardario	Slot Machine	Win for Life	Super Enalotto	Ambata	Terno
$c_{perdita}$	-0,01	-0,027	-0,15	-0,28	-0,3	-0,35	-0,4	-0,43	-0,64
$c_{perdita}$ dopo 5 giocate	-0,05	-0,135	-0,75	-1,4	-1,5	-1,75	-2	-2,15	-3,2
$c_{perdita}$ dopo 100 giocate	-1	-2,7	-15	-28	-30	-35	-40	-43	-64

Tabella 5:Coefficiente di perdita per alcuni giochi d'azzardo dopo 1, 5, 100 giocate.

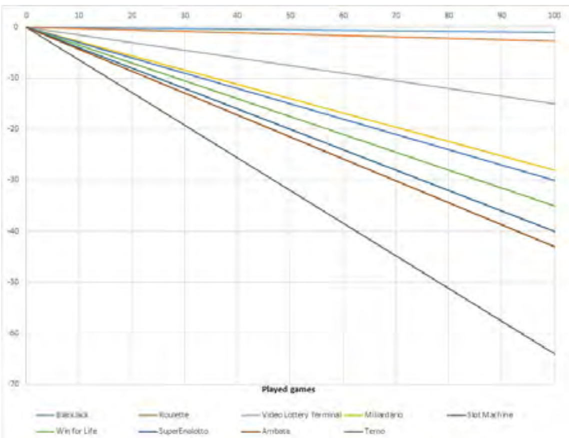


Figura 5:Grafici delle rette interpolanti della funzione quantità media vinta.

4 La roulette francese ha 37 numeri dallo 0 al 36.

5 dove Pv=probabilità di vincere per ogni giocata; Pp= probabilità di perdita per ogni giocata; v=vincita per aver scommesso 1; p= perdita per aver scommesso 1. Nel gergo delle scommesse si usa dire che la vincita è ad esempio 35 a 1 (v a p) ovvero se gioco 1 posso vincere 35 o perdere 1

Attività 4 - la speranza di vita

L'attività è stata pensata per ampliare maggiormente il concetto di probabilità e per sviluppare le competenze di cittadinanza, nello specifico, intese come capacità di reperire ed interpretare informazioni sui cittadini e per i cittadini (tavole di mortalità ISTAT).

Il lavoro è stato introdotto con la domanda provocatoria "*sarai in vita nel 2050?*" . L'allievo è così costretto a ragionare sul fatto che per trovare la probabilità dell'evento, differentemente dal caso delle puntine, non è possibile ripetere tante volte il lancio, che qui consisterebbe nel ripetere più volte la vita di una persona nelle stesse identiche condizioni. Ci sono però situazioni reali (ad esempio calcoli assicurativi, amministrazione dei propri beni,..) in cui diventa fondamentale stimare la probabilità di eventi come questi.

Inizialmente abbiamo chiesto agli allievi di riflettere su quali sono le informazioni, reperibili pubblicamente, che consentono di dare una risposta ragionata. In seguito abbiamo fornito le tavole di mortalità ISTAT, che riportano i dati su un campione iniziale di 100.000 persone nate nello stesso anno (http://demo.istat.it/unitav2012/index.html?lingua=ita).

I dati possono essere utilizzati per tracciare un grafico del numero dei vivi in funzione dell'età. La bozza di tale grafico può essere realizzata dallo studente guardando i dati e il suo andamento può essere verificato rappresentando i dati con un foglio di calcolo. Questo tipo di richiesta serve per sviluppare il senso del grafico, osservare caratteristiche dell'andamento di dati e favorire nello studente l'interconnessione tra nuclei matematici.

Nel seguito abbiamo posto alcune domande per agevolare la riflessione e per arrivare a fare una stima sulla probabilità di essere vivi nel 2050: "*nel 2000, quale era la probabilità per una ragazzo italiano di 20 anni di sopravvivere altri 5 anni?*[6] *E per un uomo di 80 anni?*" . E' importante che, oltre a eseguire un calcolo, gli studenti notino le differenze tra le domande riferite al passato e la domanda riferita al futuro e osservino le problematiche legate ad una stima di questo tipo: ad esempio, il fatto che da qui al 2050 eventi eccezionali e imprevedibili possano cambiare radicalmente lo stato delle cose rispetto alla previsioni.

Attività 5 - Le previsioni del tempo

Per introdurre la probabilità da un punto di vista soggettivo "alla De Finetti" abbiamo creato un'attività basata sulla riflessione che lui stesso presenta in suo scritto. Tale concezione di probabilità può essere applicata in tutti i casi in cui le leggi dei fenomeni studiati non sono note a priori, ma possono essere determinate solo a posteriori, sulla base dell'osservazione e delle misure statistiche. I due tipi di probabilità, classica e frequentista, hanno una caratteristica fondamentale in comune: entrambe richiedono che i vari eventi possano essere ripetuti e verificati in condizioni uniformi o approssimativamente tali. In altri termini, si richiede che quanto avvenuto nel passato possa ripetersi in futuro. Ma esistono anche fenomeni che non possono essere assolutamente ridotti a queste condizioni generali, perché considerati eventi unici e irripetibili. Per esempio: "qual è la probabilità che avvenga una catastrofe?" o semplicemente "qual è la probabilità che questa sera piova?". Lo stesso De Finetti afferma che: "La probabilità è il grado di fiducia nel verificarsi dell'evento; "pertanto dipende dalla persona che la valuta e dalle informazioni disponibili". Lui stesso propone la seguente situazione:

Un amico afferma di "essere sicuro al 100%" di aver fatto un'ottima prova di esame ad un concorso ed aver ottenuto il massimo dei voti. Allora De Finetti propone di dire all'amico: "Facciamo un gioco. Puoi fare due cose: o estrai una palla rossa da un sacco che ne contiene 98 rosse e 2 bianche e se prendi una palla rossa io ti do un milione di euro, oppure decidi di aspettare l'esito del risultato del test e io ti do un milione di euro se veramente hai preso il massimo dei voti. Cosa preferisci fare, estrarre la palla o aspettare?" Se l'amico decide di estrarre

6 E' possibile stimare questa probabilità considerando il numero dei ragazzi di 25 anni sul numero dei ragazzi di 20 anni.

allora significa che la probabilità che egli associa all'evento (che in un primo momento ci ha dichiarato del 100%) è inferiore al 98%; in questo caso gli riproponiamo il gioco con un sacco che contiene sempre 100 palle ma con, ad esempio, 95 palle rosse e 5 palle bianche. Continuiamo a rifargli il gioco cambiando la proporzione delle palle bianche e rosse nel sacco, fino a quando non ci dice di essere indifferente riguardo al prendere il premio a seguito di un'estrazione di una palla rossa o in seguito al realizzarsi dell'evento incerto. A questo punto abbiamo misurato la probabilità soggettiva che il nostro amico associa al realizzarsi dell'evento, che è pari al rapporto tra il numero di palle rosse ed il numero totale di palle presenti nel sacco (100).

Nella nostra attività abbiamo, in primis, chiesto di fare le previsioni meteorologiche della serata fornendo agli studenti mappe fisiche del territorio, archivio delle previsioni del tempo e spostamento delle perturbazioni in tempo reale.

In un secondo tempo abbiamo fornito il testo di De Finetti con la richiesta di stimare numericamente le loro previsioni. Questo ha consentito di creare una discussione sulla soggettività della previsione fatta da ogni gruppo. Si può ampliare il discorso facendo creare al gruppo classe una tabella che relazioni l'evento con un valore numerico, ad esempio si può associare 0 a "E' impossibile che, non è vero che.."; 0,5 a "Non saprei decidere tra il sì e il no, forse", etc.

Conclusioni

Il workshop proposto alla Quality Class si è dimostrato essere una scelta audace molto interessante. I nostri colleghi hanno accolto le proposte di lavoro positivamente ed hanno partecipato attivamente collaborando e dimostrando la validità delle attività stesse. Attualmente il progetto è in via di realizzazione in una classe reale.

L'esperienza della QC ci ha permesso di acquisire nuovi strumenti per rendere più efficace il lavoro in team (dei docenti e degli studenti) e di apportare miglioramenti riguardanti la metodologia: non solo il "cosa" insegnare ma "come" insegnarlo verso una nuova dimensione della scuola.

Ringraziamo tutti coloro che hanno permesso la realizzazione del percorso da noi effettuato in particolar modo la Prof.ssa Robutti, la dott.ssa Mattei e il Prof. Alessio Drivet.

BIBLIOGRAFIA

Agnoli, P.; Piccolo, F. (2014). *Probabilità e scelte razionali: una introduzione alla scienze delle decisioni*. Armando Editore.

Barozzi, G.; Bergamini, M.; Trifone, A. *Statistica & Probabilità.blu*. Zanichelli.

Barra, M. et al. (2016). *Progetto Alice n°49, Rivista di matematica e didattica*, vol. XVII. Pagine Editore. Pag.190.

Zanasi, R. (2015), *Matematica e gioco d'azzardo*. Mencaroni Spartaco.

http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/26_2matem.pdf

http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/7definiz.html

http://gwydir.demon.co.uk/jo/probability/dice.htm

https://sites.google.com/site/oggettimatematici/home

https://www.youtube.com/user/DIFIMARobutti

TERRENI INFIDI: BICICLETTE CHE SBANDANO

Emanuele Ciancio, Annalisa Baderna, Patrizia Laiolo
Convitto Nazionale Umberto I, Torino
eciancio@cnuto.it

Abstract

Presentiamo un lavoro svolto con gli studenti del triennio del liceo classico e scientifico all'interno di un progetto di collaborazione più ampio con altre scuole e istituti di ricerca universitari. Di fronte alla presentazione di un problema aperto, che prevede necessariamente una sola risposta, gli studenti hanno avuto modo di modellizzare la situazione attraverso mezzi diversi tra cui GeoGebra, ed effettuare congetture e verificarle, e infine presentare i risultati del lavoro. Il file GeoGebra prodotto ha permesso di sintetizzare i risultati e generalizzare il problema.

Introduzione: il progetto

Il presente si lavoro si inquadra in un progetto didattico più ampio che coinvolge la partecipazione di diversi soggetti tra cui il Liceo Scientifico Internazionale e Classico Europeo Umberto I, il Liceo Francese Jean Giono, il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino e il Collegio Carlo Alberto.

Il progetto nasce nell'ambito delle scuole francesi ed è noto come "Math en Jeans", acronimo di "**M**éthode d'**A**pprentissage des **Th**éories mathématiques **en J**umelant des **É**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir". Esso ha lo scopo di coinvolgere studenti delle scuole medie e superiori su problemi aperti.

La filosofia del progetto si articola in questi tre momenti:

- Scoprire gli aspetti ludici e sorprendenti della matematica attraverso la pratica della ricerca
- Sviluppare la curiosità e il piacere del fare matematica in modo autonomo e creativo
- Favorire l'incontro tra scuola e Università avvicinando gli studenti al mestiere della ricerca

In pratica gli studenti sono invitati ad affrontare problemi pensati e proposti da ricercatori universitari, che sono strutturati come vere e proprie piste di ricerca autonoma. Sono cioè "problemi aperti" che non presentano una soluzione univoca, ma si prestano ad essere sviluppati ed arricchiti di nuove domande, ogni volta che viene compreso qualcosa da parte degli studenti. Ogni gruppo di lavoro produrrà quindi una "soluzione" del problema del tutto originale e non necessariamente prevista. Naturalmente in questo percorso gli studenti sono accompagnati dai docenti della scuola e anche dai ricercatori universitari che suggeriscono strategie o evidenziano errori, nello spirito di chi guida e accompagna un percorso di ricerca personale.

Il problema

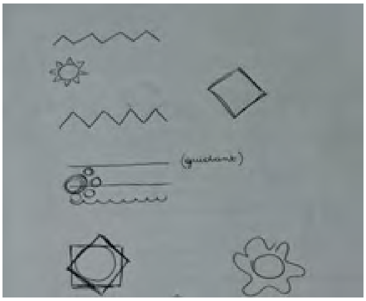
All'interno di questo contesto, la nostra scuola ha lavorato insieme al Lycee Francais Jean Giono, al Collegio Carlo Alberto e il Dipartimento di Matematica dell'Università. Il lavoro ha coinvolto circa 15 allievi del triennio scientifico e classico che hanno lavorato su diversi problemi. In questo articolo ne proponiamo uno in cui l'uso di GeoGebra ha permesso una formalizzazione significativa.

Il problema che presentiamo è il seguente. Si tratta di progettare una ruota di bicicletta che si muova su terreno il cui profilo è una funzione periodica "a dente di sega" i cui "denti sono triangoli non necessariamente rettangoli. La ruota deve essere progettata in modo tale che il sellino della bicicletta rimanga sempre alla stessa altezza permettendo al ciclista di non sobbalzare ad ogni salto. Per rendere l'idea il terreno è rappresentato da questa linea.

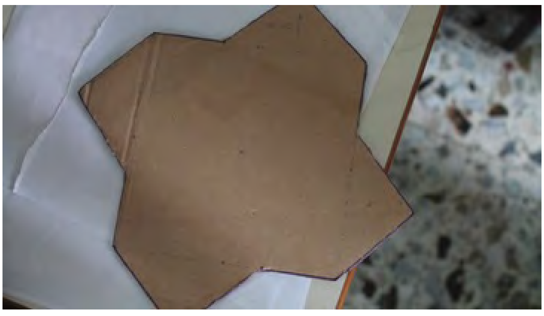
Le fasi del lavoro

A. La prima fase del lavoro è consistita nella formulazione di congetture riguardo alla forma della ruota e nella semplificazione del problema. Per cominciare, si è scelto un profilo di strada costituito da triangoli isosceli successivi.

La prima congettura proposta dagli studenti è stata quella della ruota a "ingranaggio", ovvero un profilo di ruota dentata, i cui "denti" si incastrassero perfettamente nei all'interno dei triangoli.

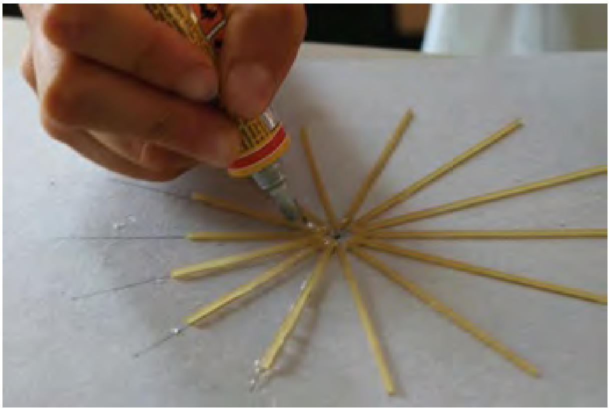


B. La seconda fase del lavoro è stata la verifica della congettura. Per fare questo si è costruita materialmente la strada e la ruota dentata con del cartone. Si è poi provato a fare scorrere la ruota sulla strada puntando una matita al centro della ruota e osservando la traccia lasciata su un foglio posto dietro. Si è scoperto che il mozzo della ruota dentata (e di conseguenza il sellino della bicicletta) non tracciava affatto una linea retta.



C. Il passaggio successivo, dopo aver scoperto che le ruote non funzionavano se l'incastro era perfetto (ruota a stella e strada dentata) è stato riflettere sul perché la ruota circolare funzioni senza sobbalzi sulla strada piana: in questo caso la distanza tra il mozzo e la strada è costante e questo fa in modo che il mozzo tracci una parallela alla strada. Negli altri casi affinché il mozzo tracci ancora una linea orizzontale la distanza tra la strada e il mozzo è variabile e viene a ridefinirsi il concetto di raggio della ruota (sempre uguale nel primo caso e variabile nel secondo con ruote di forme diverse).

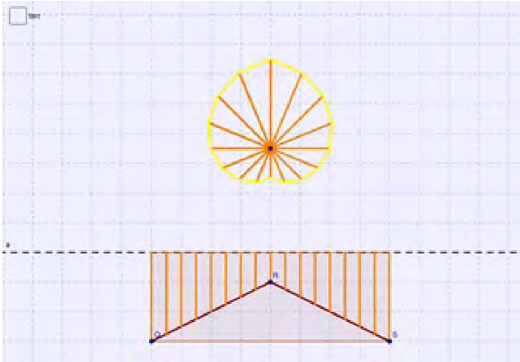
D. Una volta compreso che la costruzione della ruota passava dal disegno dei suoi raggi, si è modellizzato il problema realizzando raggi diversa lunghezza proporzionali alle distanze successive tra la strada accidentata e una linea orizzontale ideale. Per far questo si sono utilizzati oggetti comuni come spaghetti che sono stati successivamente disposti a raggiera in modo da suggerire la forma effettiva della ruota.



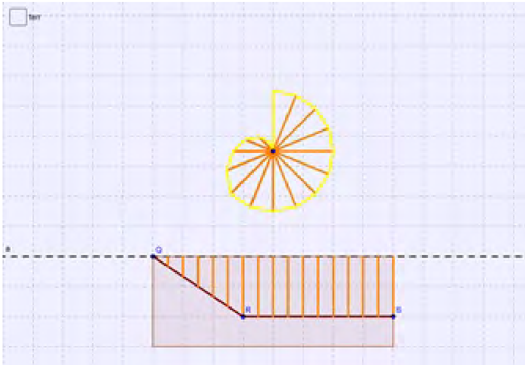
E. Parallelamente è avvenuta la modellizzazione con GeoGebra, in cui gli spaghetti erano sostituiti da segmenti di lunghezza variabile.

Il file GeoGebra

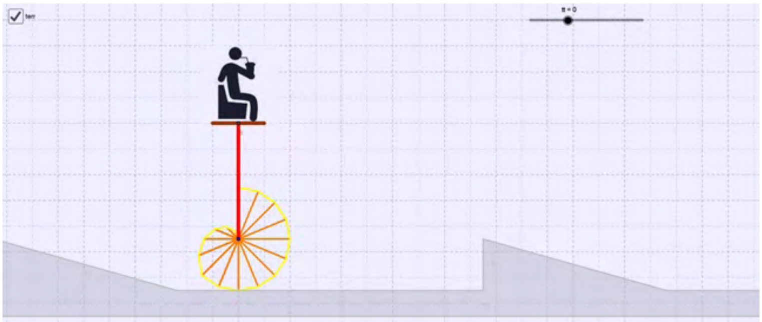
A. Inizialmente si è costruito il file disegnando un triangolo della strada e una retta orizzontale al di sopra di esso e un numero n (necessariamente finito) di raggi, ovvero di segmenti di lunghezza pari alla distanza di ogni punto della strada dalla linea orizzontale. Gli n segmenti sono poi stati allineati lungo i raggi di un poligono regolare di n lati, e gli estremi liberi dei segmenti sono stati infine uniti da una spezzata.

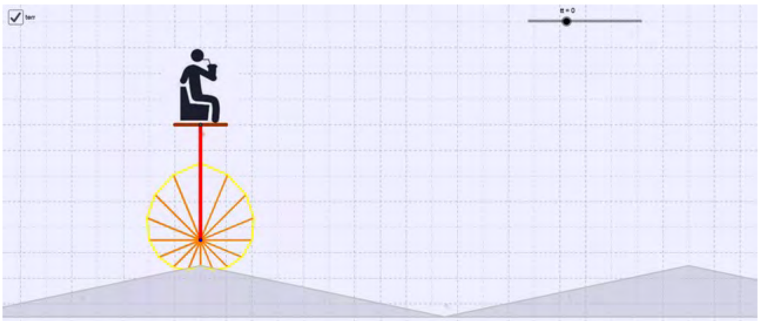


B. Sfruttando la possibilità di variazione dei parametri tipica di GeoGebra si è potuto modificare il profilo della strada (e quindi la forma del triangolo) e ottenere forme diverse per la ruota

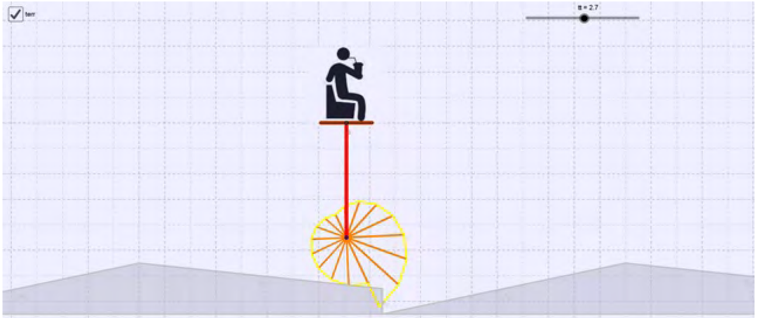


C. Si è cercato di produrre un'animazione che verificasse la bontà della costruzione. Si è allora disegnata la bicicletta con la ruota progettata e la si è posta in rotazione simulando il movimento della bicicletta.





D. A questo punto si è visto che la ruota non poggiava perfettamente sulla strada in tutti i punti. Questo è stato un momento didattico significativo perché ha portato a una discussione vivace. La discussione infatti ha messo in luce alcuni limiti della costruzione. In particolare è emerso il limite della modellizzazione discreta rispetto a quella continua. Aver scelto un numero necessariamente finito di raggi ha provocato il fatto che i tratti della spezzata che costituisce il profilo della ruota, siano di lunghezze diverse, pertanto un angolo descritto dalla rotazione della ruota corrisponde di volta in volta a tratti di strada diversa. Per ovviare a questo problema si è dovuta riscalare la strada di un fattore medio proporzionale alla lunghezza media dei tratti di spezzata.



Conclusioni

Il progetto è stato sicuramente valido dal punto di vista didattico. In particolare i punti di forza sono stati:

- La consegna semplice ma chiara
- La possibilità di arrivare alla soluzione con approcci diversi
- La pluralità di mezzi utilizzati per la modellizzazione (cartone, spaghetti, GeoGebra)
- La possibilità di usare GeoGebra per esplorare varianti del problema e quindi generalizzarlo
- La ricchezza matematica insita nel problema

Una parte non secondaria del lavoro è stata la parte di documentazione e divulgazione del progetto. Si è partecipato alla Notte dei Ricercatori con uno stand in cui si sono coinvolte persone di diverse età, dai bambini agli adulti, realizzando materiale didattico e multimediale (oltre al file GeoGebra anche un video).

ANALISI MATEMATICA OGGI: UN PERCORSO PER L'UNIVERSITÀ

Walter Dambrosio
Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Torino
walter.dambrosio@unito.it

Abstract: In questo lavoro presentiamo il percorso didattico sperimentato negli ultimi due anni nell'insegnamento di Analisi Matematica presso il corso di Laurea in Informatica dell'Università di Torino. Il percorso sviluppa i concetti di base dell'Analisi (in particolare la derivata e l'integrale definito) utilizzando in modo integrato i registri grafico, numerico e simbolico ai diversi livelli (lezioni teoriche, esercitazioni, esame). Particolare attenzione è rivolta alla costruzione dei significati dei concetti matematici e alla loro comprensione in termini applicativi e non solo teorici, con possibili aperture verso altre discipline. L'uso di software dinamici come GeoGebra è introdotto per favorire la visualizzazione, la modellizzazione e la congettura nell'affrontare problemi e attività. Illustreremo la programmazione didattica del corso, alcuni esercizi assegnati, le metodologie e le tecnologie didattiche utilizzate (flipped classroom, applet di GeoGebra, software di Calcolo simbolico, ...). Il corso muove le basi dai materiali UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica nei tempi attuali, si fonda su presupposti teorici sviluppati nella ricerca in didattica dell'analisi (Tall, il "Five college Project") e si presenta come una naturale estensione a livello universitario del percorso della scuola secondaria di secondo grado secondo le Indicazioni Nazionali 2010.

Sezione 1 - Motivazione ed obiettivi

1.1 Un breve sguardo alle Indicazioni Nazionali 2010

Il recente cambiamento dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore (a livello di metodologie e di contenuti) ha inizio con la pubblicazione di "Matematica 2003" e "Matematica 2004" da parte dell'UMI; si tratta di due volumi in cui vengono proposte attività da svolgere in aula per sviluppare le competenze che si ritengono fondamentali per la formazione di un cittadino consapevole (Progetto "La matematica per il cittadino").

Gli argomenti vengono organizzati in nuclei fondanti, che diventeranno le materie oggetto di studio nelle Indicazioni Nazionali 2010 [3]; esse sono Aritmetica e algebra, Geometria, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni. Ciascuna materia prevede una programmazione trasversale nell'arco dei cinque anni e per ciascuna di esse nelle Indicazioni Nazionali sono descritte le conoscenze e le competenze da raggiungere nel primo biennio, nel secondo biennio e nell'ultimo anno. Si tratta di una rivoluzione rispetto all'impostazione tradizionale, in cui allo studio delle singole materie era destinato un ben preciso anno di scuola; nella nuova ottica ogni argomento accompagna lo studente nell'arco dei cinque anni.

Leggendo con attenzione le Indicazioni Nazionali, in particolare quelle per il Liceo Scientifico, si nota come, unitamente all'introduzione di nuovi argomenti di studio (ad esempio il calcolo delle probabilità, la statistica, le equazioni differenziali), si sia proceduto a modificare l'impostazione classica basata su un intensivo approccio algebrico: il concetto di funzione riveste un ruolo primario e l'algebra stessa diventa uno strumento per lo studio delle caratteristiche delle funzioni. Ad esempio, lo studio delle funzioni lineari e quadratiche e dei loro zeri diventa la motivazione per lo studio delle equazioni di primo e secondo grado; analogamente, si pone l'accento sullo studio delle funzioni esponenziali e logaritmiche e non sulla risoluzione di equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Si tratta quindi di un cambiamento molto profondo, che arriverà a regime, anche come mentalità dei docenti, in una decina di anni; è importante sottolineare che il cambiamento dei contenuti si accompagna anche ad un cambiamento radicale dell'approccio didattico e metodologico.

Lo studente deve acquisire conoscenze e competenze, mentre le abilità di calcolo rivestono un ruolo secondario; a questo scopo le Indicazioni Nazionali suggeriscono, in accordo con le ricerche in didattica della matematica, di integrare profondamente i registri grafico, numerico e simbolico. In molte occasioni si evidenzia la necessità di accompagnare il calcolo esatto con quello approssimato e ovunque si ribadisce l'importanza dell'aspetto grafico.

1.2 L'Analisi Matematica nei corsi di Laurea di tipo scientifico

L'insegnamento dell'Analisi Matematica nei corsi di Laurea di tipo scientifico è attualmente molto tradizionale: in linea di massima, la maggior parte degli insegnamenti è caratterizzata da un'impostazione teorica e formale e dalla richiesta di svolgimento di esercizi quasi esclusivamente di calcolo simbolico. In relazione a quanto osservato nella Sezione 1.1, ne risulta spesso uno scarso raccordo tra le richieste dei docenti dei corsi universitari del primo anno con la preparazione degli studenti in uscita dalla scuola secondaria di secondo grado.

Le metodologie didattiche nei corsi universitari sono spesso altrettanto tradizionali (anche a causa dell'alto numero di studenti che seguono i corsi, a dire il vero) e l'uso delle tecnologie è eccezionale. Da questo punto di vista un fattore che gioca un ruolo fondamentale è la poca conoscenza da parte dei docenti dei risultati sulla didattica dell'analisi presenti in letteratura.

Le conseguenze di questa impostazione nei corsi di Laurea in cui la matematica non riveste un ruolo centrale sono uno scarso interesse da parte degli studenti nei confronti dell'insegnamento, un elevato numero di studenti che non riescono a superare l'esame e la demotivazione degli studenti più deboli.

Alla luce di queste osservazioni, negli ultimi anni nell'insegnamento di Analisi Matematica per il corso di Laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Torino (in collaborazione con Alberto Boscaggin) abbiamo iniziato una sperimentazione per una didattica più efficace e stimolante, con alcuni obiettivi chiari e definiti: aumentare l'interesse degli studenti verso la materia; motivare anche gli studenti con risultati peggiori in matematica nella scuola superiore; migliorare i risultati degli studenti, mantenendo comunque un buon livello di preparazione.

Sezione 2 - Il progetto didattico

2.1 Contenuti e metodologie

Per raggiungere gli obiettivi didattici elencati alla fine della Sezione 1.2 abbiamo lavorato sia a livello di contenuti (teorici e pratici), sia a livello di metodologie.

Da un punto di vista teorico, la novità principale (peraltro già presente in alcuni libri di testo) è stata la presentazione dei concetti dell'analisi nella loro prospettiva storica, ribaltando il classico percorso **limiti-derivate-integrali.** Il primo concetto introdotto, seppur a livello solo intuitivo, è stato quello di derivata di una funzione in punto, a partire da alcuni suoi significati (pendenza di una funzione in un punto, velocità istantanea, tasso di variazione istantaneo); successivamente, è stato introdotto il concetto di integrale definito, come strumento per risolvere i problemi fisici del calcolo del lavoro compiuto da una forza non costante o dello spostamento netto in un moto rettilineo a partire dalla velocità. Il passaggio conclusivo di questa parte è l'introduzione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, come elemento di collegamento tra le due nozioni presentate in precedenza.

In questa fase i concetti sono presentati in modo intuitivo, lavorando esclusivamente sugli aspetti numerici e grafici (tabelle, rappresentazioni grafiche). La formalizzazione è rimandata ad un momento successivo, con l'introduzione della definizione di limite.

Questo approccio consente da un lato di introdurre i concetti di derivata ed integrale definito puntando sui loro significati, dall'altro di far emergere negli studenti una forte motivazione all'introduzione di un nuovo strumento matematico quale è il limite.

I registri grafico e numerico saranno quindi integrati da quello simbolico solo nella fase conclusiva; questo è a mio avviso didatticamente efficace, soprattutto nel contesto dell'integrazione definita: infatti, strumenti anche semplici di calcolo approssimato consentono di determinare immediatamente una stima di un integrale definito ed inoltre si riesce a sottolineare con maggiore intensità il fatto che il calcolo simbolico/esatto non è sempre possibile.

A livello di metodologie, l'uso di software di visualizzazione, approssimazione e calcolo simbolico (ad esempio Geogebra) durante le spiegazioni consente agli studenti di cogliere in modo migliore i significati dei concetti esposti, svincolandosi dagli aspetti di calcolo; inoltre, viene incoraggiato l'uso di questi strumenti per la correzione e l'autovalutazione degli esercizi svolti in modo autonomo da parte degli studenti.

In alcuni casi, nonostante l'elevato numero di studenti presenti in aula, abbiamo sperimentato l'uso della Flipped-classroom, anche con lo scopo di incoraggiare gli studenti a trovare risorse online; i video consigliati sono stati reperiti tra i corsi online del MIT [4].

L'insegnamento si appoggia su un corso disponibile sulla piattaforma Moodle, nel quale gli studenti possono trovare tutto il materiale didattico e prove di autovalutazione/simulazione di parte delle prove d'esame. Queste prove di autovalutazione sono state molto apprezzate dagli studenti, che le hanno svolte in gran maggioranza, ed ha portato un sensibile aumento del tasso di superamento delle prove d'esame.

2.2 Qualche esempio didattico

In questo Paragrafo presentiamo alcuni esempi di esercizi e di problemi che evidenziano il taglio didattico del percorso e forniscono interessanti spunti di riflessione.

<u>La funzione derivata ed il ruolo di GeoGebra (si veda anche [2])</u>: si tratta di un'esplorazione grafico/numerica sulla funzione derivata della funzione f(x)=log x.

Lo studente è dapprima invitato a tracciare un grafico qualitativo della derivata di f, sfruttando le relazioni che intercorrono tra una funzione e la sua funzione derivata.

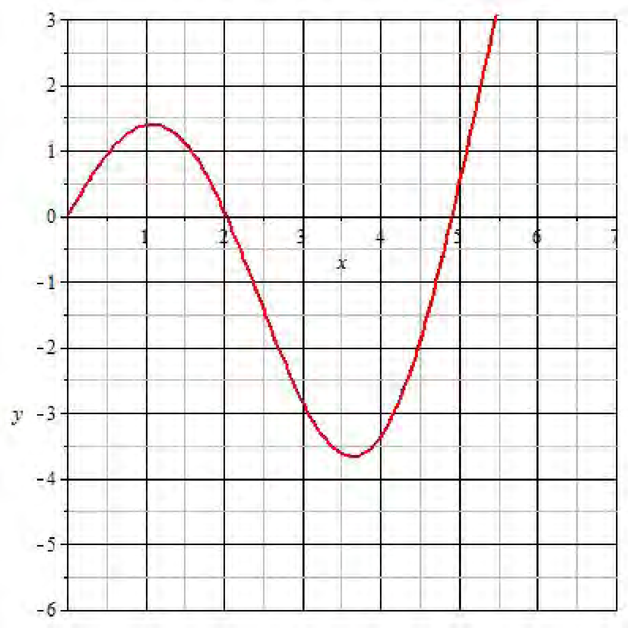
In un secondo momento, utilizzando il foglio elettronico, può tabulare i valori approssimati della derivata di f, usando i quozienti di Newton con passo assegnato, e tracciare un grafico approssimato della derivata di f stessa.

Dall'analisi dei grafici ottenuti e dei valori tabulati lo studente può congetturare che l'espressione della derivata di f è 1/x; la dimostrazione di questo fatto potrà avvenire quando saranno note le tecniche di calcolo simbolico necessarie.

L'esercizio consente allo studente di ragionare sul significato di derivata e di funzione derivata e di consolidare le proprie conoscenze sul delicato passaggio dalla derivata in un punto alla funzione derivata. Inoltre, permette di costruire un significato alla formula D(log x)=1/x, alla quale gli studenti, anche dopo la dimostrazione, non sono in grado di assegnare la corretta spiegazione.

<u>Un esempio di esercizio d'esame sulla funzione derivata</u>: si tratta di un esercizio in cui i concetti di derivata e funzione derivata sono contestualizzati in un problema classico di cinematica. A partire dal grafico di una funzione gli studenti devono essere in grado di valutare in modo approssimato la derivata della funzione in un punto e di tracciare il grafico della derivata della funzione, interpretando questi concetti matematici in termini fisici. L'integrazione tra gli aspetti numerici e grafici è di nuovo il nodo centrale dell'esercizio.

Un oggetto si muove di moto rettilineo; la sua posizione f sulla retta varia nel tempo secondo il grafico rappresentato in figura:



La posizione è misurata in metri ed il tempo in minuti.

Si richiede di:

- descrivere l'andamento della posizione nel tempo.
- stimare la velocità del moto all'istante t=2.5 minuti
- tracciare un grafico qualitativo della velocità dell'oggetto.

La forma di un grafico: si tratta di un'attività di consolidamento sulla funzione composta (si veda anche [6]). Lo studente è invitato ad esplorare con Geogebra le possibili forme del grafico di una funzione composta al variare di un parametro e a congetturare quali siano le forme effettive, dimostrando quindi quanto congetturato.

Si considerino le funzioni

$$f(x)=x^2+c, \quad g(x)=\log (x^2+c),$$

con c in R.

Usando lo slider di Geogebra, tracciare i grafici di f e di g al variare di c nell'intervallo [-3,3]. Cosa si osserva? Quali sono le possibili forme del grafico di g?

Quali sono le possibili forme del grafico di

$$h(x)=\log (x^2+bx+c)$$

al variare di b e c? Da cosa dipendono? Giustificare la risposta.

La pila di mattoni e la serie armonica: si tratta di un esempio didattico per l'introduzione della serie armonica. Lo studente è guidato alla costruzione di una serie armonica e alla dimostrazione della sua divergenza attraverso un classico problema di statica.

Si impila un certo numero di mattoni uguali e di ugual peso, facendo in modo di mantenere la pila in equilibrio.

Come si nota dalla figura (tratta da https://thatsmaths.com/2014/06/12/biscuits-books-coins-and-cards-massive-hangovers/), con un numero sufficiente di libri quello in cima alla pila è completamente esterno rispetto a quello alla base, ossia la distanza tra i centri di massa di questi due mattoni è maggiore della lunghezza dei mattoni.

Di quanto si riescono a distanziare i centri di massa aumentando il numero di mattoni?

Sezione 3 - Conclusioni: dalla scuola secondaria all'università… e viceversa

Il percorso presentato nasce dall'analisi dei contenuti delle Indicazioni Nazionali 2010 e da varie letture sulla didattica dell'analisi a livello universitario e pre-universitario [1, 5]. Esso tiene conto delle diverse conoscenze e capacità matematiche degli studenti in arrivo al primo anno di università rispetto agli anni passati; inoltre, riflette un nuovo ruolo della matematica all'interno del percorso di studi universitario.

I risultati sull'insegnamento di Analisi Matematica per la Laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Torino sono davvero incoraggianti: non solo è aumentato il numero di studenti che superano l'esame, ma è anche molto cresciuto il numero di studenti che si presentano per sostenere l'esame. Nel passato il corso di Analisi Matematica, pur essendo previsto al primo anno di studi, era spesso seguito al termine del ciclo di studi e la percentuale di studenti iscritti al primo anno che si presentava all'esame era molto bassa; con l'introduzione di questo percorso la maggior parte degli studenti del primo anno sostiene regolarmente l'esame. Inoltre, i giudizi stessi degli studenti mostrano un maggior interesse ed una maggiore motivazione nei confronti della materia.

La sperimentazione ormai consolidata e diventata pratica comune per l'insegnamento di Analisi Matematica per la Laurea in Informatica verrà estesa nei prossimi anni anche ad altri insegnamenti di matematica di base dell'Università degli Studi di Torino.

Il percorso didattico e molte attività si prestano ad una trasposizione nella scuola superiore, seppur con un minor livello di approfondimento. In particolare, potrebbero essere oggetto di riflessione nell'organizzazione di un curriculum per la scuola secondaria la diversa consequenzialità nell'introduzione dei concetti di derivata, integrale definito e limite, l'uso di GeoGebra e delle tecnologie come strumenti di esplorazione, scoperta e congettura in varie situazioni (derivate delle funzioni elementari, teorema fondamentale del calcolo integrale, …), l'integrazione a vario livello dei diversi aspetti di calcolo simbolico, approssimato e grafico.

Bibliografia e sitografia

[1] Calculus in context: http://www.math.smith.edu/Local/cicintro/

[2] Impedovo M. (1999). Matematica: insegnamento e Computer Algebra. Springer Ed.

[3] Indicazioni Nazionali 2010: http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[4] MIT Calculus Courses: https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/

[5] Tall D. (2012). A Sensible Approach to the Calculus. In *Handbook on Calculus and its Teaching*, Ed. François Pluvinage & Armando Cuevas.

[6] UMI Matematica 2003: http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

IDENTIFYING HIGH-QUALITY GEOGEBRA MATERIALS FOR TEACHING MATHEMATICS

IDENTIFICARE MATERIALI DI GEOGEBRA DI ALTA QUALITÀ PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Barbara Kimeswenger
Private University College of Education of the Diocese of Linz, Austria,
barbara.kimeswenger@ph-linz.at

Abstract

Nowadays, there are an enormous number of educational resources for mathematics teaching online available varying in their quality. Therefore, it is often difficult for teachers to find suitable materials to use in their own mathematics lessons. For this reason, this study aims to identify important factors contributing to the quality of educational resources. Particularly, I focus on dynamic materials created by different users and offered on the GeoGebra Materials platform. This project investigates what quality criteria for dynamic materials and how their educational values can be described. I conducted interviews with international GeoGebra experts characterized by their extensive experience with this software to examine the aforementioned issues. Additional to this qualitative approach, the relevance of the emerged findings was examined with quantitative research approaches. In summary, I developed eight dimensions describing main factors contributing to the quality of dynamic materials based on the collected data. Results of this project offer new inputs for the design of manual and/or automatic ranking and recommendation systems to make it easier for teachers and students to find high-quality materials on platforms such as GeoGebra Materials.

Introduction

During the past decades, authors of different educational backgrounds have created a vast number of instructional resources and uploaded them on various online repositories (Trgalova et al., 2009; Trgalova and Jahn, 2013). The quality of these resources is often inconsistent, because they are created by a variety of users and these websites are not supported by an editorial team either (Ott and Hielscher, 2014). For this reason, it is often difficult for teachers to find materials suitable for their own mathematics lessons during a reasonable amount of time when searching within this vast pool. As this problem is well known for repository designers, different platforms have implemented various ways to assess their resources. Online materials can be evaluated automatically or manually; for instance, by answering a questionnaire, clicking on a "like" button, or writing comments. To address the mentioned difficulties, it would be advantageous to create an environment allowing teachers to easily and quickly find high-quality resources for their classes (Kimeswenger, 2016, 2017).

In this paper, I will review materials for mathematics teaching created with the Dynamic Mathematics Software GeoGebra (Kimeswenger and Hohenwarter, 2015). I will discuss the term user-generated Open Educational Resources as an important term for my work. In addition, I will introduce the platform GeoGebra Materials offering more than a half a million of free and public dynamic materials ready to be applied in different classrooms all over the world (November 2016). Then, I will suggest how my findings could be used to be able to improve search systems of online platforms in order to facilitate finding "good" ready-to-use resources (Kimeswenger, 2017). I will also give an example of a specific high-quality dynamic material created by GeoGebra to illustrate its potential according to an expert author who participated in this project. Then, I will outline eight main quality dimensions emerged in this study focusing on describing the importance of authors for the quality of their developed resources in detail. At the end of this paper, I will also present how new developments based on the findings of this study have already been implemented on the GeoGebra Materials platform.

Open Educational Resources created with GeoGebra

In the following, I discuss the term and idea of Open Educational Resources and describe the instructional materials focused in this study in further detail. The resources addressed in this project have been created and applied by members of the worldwide GeoGebra community to support the learning and teaching of mathematics at all levels. These resources are freely available for non-commercial use and offered on various online repositories. These materials are considered educational because they fit one or more of the following three criteria outlined by Camilleri et al. (2014, p. 9): (i) they are released or produced for formal or non-formal education, (ii) are applied in an educational program or courses, or (iii) are available on an online material repository supporting formal and non-formal education. In addition, these materials can be described as Open Educational Resources (OERs) (UNESCO, 2002). In the past decades, OERs have become important in the educational community, as they are accessible and can be easily shared causing the emergence of a variety of web-based repositories offering such OERs (Trgalova et al., 2009).

Rolfes (2010) emphasized benefits of Open Educational Resources for teachers and educators through: (i) reusing common materials, and (ii) saving time and money. He highlighted the potential of adopting other users' resources that may support generating new ideas for teaching or improving classroom activities as well as noted that user-generated OERs usually cost less money than materials developed by professional editorial teams. Camilleri et al. (2014) also emphasized the benefit of such materials in saving expenses, as outlined below.

Quantity vs. quality of available user-generated resources

Camilleri et al. (2014, p. 10) differentiated between user-generated and organizationally-produced resources:

> "Organisationally-produced ('big') OERs are ones that arise from projects such as OpenLearn. These are usually of high quality, contain explicit teaching aims, are presented in a uniform style and form part of a time-limited, focused project with a portal and associated research and data.
>
> User-generated ('little') OERs are usually low cost resources. They are produced by anyone, not just educators, may not have explicit educational aims, have inconsistent production quality and could be shared through a range of third party sites and services."

On the one hand, an advantage of "little" OERs is that ample materials are available for immensely diverse purposes. On the other hand, the Internet offers immeasurably large and diverse user-generated OERs for teaching and learning mathematics making it difficult for ordinary teachers and students to navigate (Trgalova et al., 2009; Trgalova and Jahn, 2013):

> "Moreover, available resources do not often have the required quality to be used in a classroom. The difficulty for a teacher to evaluate quality and adequacy of a resource to her/his specific context is an obstacle to the ICT integration." (Trgalova et al., 2009, p. 1162)

The quality inconsistency of resources is often caused by varying file and design formats, the different needs of teachers, and the diverse skills of authors.

Dynamic materials on the GeoGebra Materials platform

Based on the literature reviews (Fahlgren, 2015; Hötzl, 2001), in addition to being OERs, the type of resources addressed in this study can also be called pedagogical resources, learning objects or dynamic software environments. Another frequently used term to refer to educational resources created with GeoGebra is "dynamic materials" indicating that the resources are created with a Dynamic Mathematics Software and this allows dynamic interaction between the student and the resource.

The repository addressed in this study, the GeoGebra Materials (2016) platform contains such dynamic materials in different languages, designed for students at various grade levels. Since dynamic worksheets can be uploaded, edited, copied, and organized into collections (so called GeoGebra Books) by every user of the community, this website is subject to the aforementioned problem of inconsistent quality of instructional resources (Kimeswenger and Hohenwarter, 2014, 2015).

Figure 1 shows a screenshot of the main page of the GeoGebra Materials platform, providing a selection of "featured" and "newest" materials developed by different authors. The number of available user-generated educational resources on the GeoGebra Materials platform is rising steadily. While in March 2016, about 370 000 public materials had been created by the GeoGebra community and offered on this platform, just a few months later – in November 2016 – the number had almost doubled to more than 630 000 resources.

Considering this growth rate, the enormous quantity and variability of quality will make it even more difficult for teachers in the future to quickly find appropriate resources without the assistance of a new kind of review system and search options for the instructional materials on the platform.

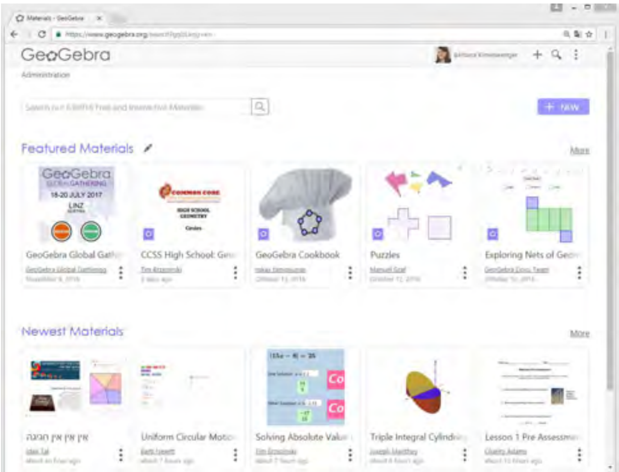


Figure 1. GeoGebra Materials platform (https://www.geogebra.org/materials) (November 2016)

Rolfes (2010) highlighted that quality control needs to be integrated into OER websites in order to provide user-friendly environments. My study underlines the importance of questioning the potential of available teaching resources and aims to develop new ideas to improve the search and the rapid finding possibilities of "good" and suitable materials within this extensive mass of materials. In addition to the specific use of research results, the emerged new conceptual design might be also applied on different online platforms with user-generated OERs. Participants of this project voiced the necessity to develop ways to evaluate public online materials that are available on the Internet. Some of the GeoGebra users interviewed for this study claimed that it was not always easy to find high-quality resources on the GeoGebra Materials platform that are complying with their own quality standards. Thus, it seems advisable to critically examine the review and ranking systems of search results on such a platform, revising the algorithms used based on the criteria defined in this study.

Quality and its assessment

In this section, I summarize three crucial aspects of this study, highlight the importance finding ways to identify high-quality dynamic materials and describe how this quality could be assessed properly and conveniently. These considerations are needed to rethink the conceptual design of a review system for the GeoGebra Materials platform to offer relatively good quality measures for instructional resources. Figure 2 shows following three important aspects of this study: (i) "quality", (ii) "assessing quality", (iii) and assessing quality of dynamic materials using a "review system".

Figure 2. Three important aspects of this study

Developing review system for online material platforms

Various online platforms – for instance, GeoGebra Materials (2016), I2Geo (2016) and LearningApps (2016) – offer a large number of Open Educational Resources on the Internet. Quality inconsistency is particularly problematic on user-generated Educational Resource platforms lacking a dedicated editorial team. In exchange for the no or low costs of resources on these platforms quality inconsistency is more prevalent due to the different skills and expertise of their creators (Camilleri et al., 2014; Ott and Hielscher, 2014) and some other factors. Researchers introduced various review and recommendation systems for platforms attempting to handle search for appropriate materials within large pools of resources with varying quality. Often, the aim of such review systems is to place high-quality materials on the top of the search results list. This is a major principle that several platforms have implemented in different ways (Libbrecht et al., 2008; Ott and Hielscher, 2014; Trgalova et al., 2009).

For instance, Trgalova et al. (2009, p. 1163) characterize quality of dynamic geometry resources with nine "relevant indicators" in the Intergeo project: 1) metadata; 2) technical aspect; 3) mathematical dimension of the content; 4) instrumental dimension of the content; 5) potentialities of dynamic geometry; 6) didactical implementation; 7) pedagogical implementation; 8) integration of the resource into a teaching sequence; 9) usage reports. They formulated several quality criteria based on these indicators and defined questions as the following example shows. The criterion "VALIDITY" was developed based on the third indicator "mathematical dimension of the content", resulting in the question: "Are the activities in this resource correct from the mathematical point of view?". The project members of Intergeo developed a questionnaire to evaluate dynamic geometry resources on their platform named I2Geo, based on the aforementioned quality indicators. For assessing quality of a specific resource on the platform I2Geo, users can answer questions – 9 broad statements that can be extended optionally to 59 questions – using a four-point scale from "I agree" to "I disagree" (Kortenkamp et al., 2009; I2Geo, 2016; Trgalova et al., 2011; Libbrecht et al., 2008). Other ways to intentionally contribute as a user to an evaluation of a resource are "likes", comments or star ratings. Those features are often implemented on platforms offering a vast number of resources for teaching mathematics – for instance, on CK-12 (2016), Curriki (2016) or LearningApps (2016). However, these assessment possibilities depend strongly on the willingness of the individual users to participate in the evaluation of the provided materials, and in many cases, only a small number of viewed resources are reviewed by users. For this reason, different online platforms with educational resources have also implemented systems that consider for reviewing and recommending resources automatic quality criteria (Kimeswenger, 2016; Ott and Hielscher, 2014; Siersdorfer et al., 2010).

In summary, I am interested in developing a conceptual design for reviewing and recommending dynamic materials on an online platform by not using traditional practices like using solely questionnaires. Thus, I consider both ways of evaluation: (i) intentional evaluation of the quality of mathematical resources by users; and (ii) automatic review of the quality of mathematical materials. This research investigates crucial aspects to identify and assess “good” materials for teaching and learning mathematics. These initial considerations lead me to the research questions of this project:

Research questions

Q1: What quality criteria for dynamic materials exist according to experts?

Q2: How do experts describe the educationally valuable use of dynamic materials?

Q3: How could the conclusions from research questions 1 and 2 contribute to the conceptual design of a new review system and the further development of platforms, e.g. “GeoGebra Materials”?

Research design

This research based on Grounded Theory focuses on aspects contributing to the quality of dynamic materials created by GeoGebra users (Strauss and Corbin, 1996). I conducted interviews with expert authors of such resources and analyzed the collected data by constant comparison. This investigation was essential to be able to (i) identify quality criteria for dynamic materials according to experts and (ii) to describe their uses in an educationally valuable way (see research questions 1 and 2). Furthermore, findings emerged from the analysis allowed me (iii) to develop a new conceptual design of a review system for platforms, such as GeoGebra Materials (see research question 3). I interviewed experts (primarily mathematics teachers and mathematics educators) to enquire about their perspectives of “good” materials. For this purpose, I focused on international “GeoGebra experts” characterized by their extensive experience with this software. Most of the participants had been working on the development of such instructional resources for many years and were deeply involved in various projects. I considered different nationalities, educational backgrounds and cultures in this study, and interviewed experts from Hong Kong, Uruguay, England, Austria, Hungary and Germany. Since the GeoGebra Materials platform is applied by users from all over the world, I selected these participants in order to investigate various perspectives concerning decisive criteria for a high-quality material for mathematics teaching.

Additionally, I conducted and analyzed an interview with a developer of another online sharing platform, also providing free and public user-generated OERs for teaching mathematics. This participant was of great interest to this project, because he also was a researcher investigating quality criteria of educational resources. Moreover, he published papers addressing possibilities to evaluate OERs on platforms automatically.

My research is based on a flexible design structured in multiple data collection phases and includes a continuous analysis process (Robson, 2011; Creswell, 2012; Strauss and Corbin, 1996). Overall, four qualitative and two quantitative research stages were needed to investigate the outlined research questions.

Based on the first round of interview analysis, I developed a category system describing eight core dimensions that contribute to the quality of a dynamic material. I also created a list of quality criteria for dynamic resources based on the expert interviews.

In addition, I conducted quantitative research using an online questionnaire for mathematics teachers, based on the findings of the initial four stages. I received 84 responses of Italian and Austrian participants. This online questionnaire supported the results that emerged from the previous research stages.

Results

In this section, I outline some initial results from my data analyses. First of all, I highlight two aspects needed to be considered to evaluate the quality of dynamic materials: (i) school context in which a dynamic material was used, and (ii) person presenting it.

In addition to examine user's own quality standards, I also consider the context in which a material is used:

> "The quality of a resource depends on its intrinsic characteristics, as well as on its adequacy to the context in which it will be used. A given resource can be "good" in one context and "poor" in another. Thus clarifying its educational goals and the school context in which its use is intended is also essential in determining and improving the quality of the resource." (Trgalova et al., 2009, p. 1162)

I decided to conduct interviews to investigate different perspectives of experts on quality considering their varying cultural and educational backgrounds of participants. I asked them how they describe the educationally valuable use of dynamic materials (see research questions 1 and 2).

As noted, whether a material is high quality or not, especially in a mathematics lesson, highly depends on its presenter – for instance, on the teacher or professor in a math class in primary school or university. The following paragraph shows an interview excerpt carried out with a mathematics educator from Hong Kong with ample experience with different teachers. This section emphasizes the participants' perspective that the presenter strongly influences whether a material is used in an educationally valuable way:

> "*Interviewer:* How would you describe the educationally valuable use of dynamic materials?
>
> *Mathematics educator F:* I think whether it could be a good use depends highly on the teacher. I have seen that in a project with about ten teachers. I have seen a piece of applet used by one teacher with very good results. The teacher delivered it in a very good way. But for other teachers the effect was totally the opposite. The teachers didn't even prepare for the lesson. They didn't know how to use it or what is the purpose of using it. That was totally a disaster by using the same applet. I think the teacher is a very crucial matter." (Interview 2015-07-13)

In addition to the presenter or teacher, other factors could strongly influence the potential of dynamic materials. During the expert interviews, participants presented a selection of resources created with GeoGebra that were of high quality according to their perspectives. Various dynamic materials – mainly dynamic worksheets and GeoGebra Books – were therefore discussed during the interviews. A wide range of materials was part of the study illustrating important factors influencing the quality of certain resources. In the following section, I present one of these materials outlined during the conducted interviews.

Example of a high-quality material – constructing quadrilaterals

The following example offers an idea about the aspects that were discussed by experts contributing to the understanding of resource quality. In this case, the participant presented a dynamic worksheet about constructing quadrilaterals by four sides. In addition to an applet, the screenshot of this material shown in Figure 3 includes instructions and questions for students. The interviewed participant explained the purpose of this dynamic worksheets, as following:

> *Mathematics educator F:* [The dynamic worksheet] is about constructing quadrilaterals by four sides. Well, here you don't see any sliders or any checkboxes because I want students to explore first if it is always possible to construct a quadrilateral with four given lengths of

different sides. They always think it is possible to construct a quadrilateral every time. Why not? But if I give them the sides [of a specific quadrilateral] – 1 cm, 2cm, 3cm, the three sides are short, but the fourth side is very long, say 10 cm – then, they realize that they can't close the quadrilateral. So, they would be aware that you can't always construct a quadrilateral with any given four sides. The length of the sides matters. (Interview 2015-07-13)

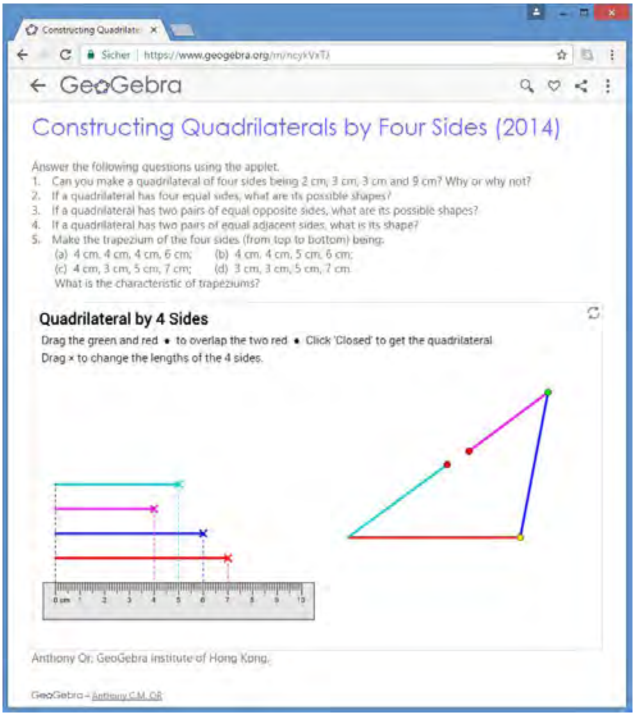


Figure 3: Dynamic worksheet about constructing quadrilaterals by four sides, https://www.geogebra.org/m/ncykVxTJ (Interview 2015-07-13)

Quality criterion	Question	How?
"Supporting the learning of mathematics"	"Does the dynamic material support the learning of mathematics?"	Allows students to explore with quadrilaterals
		Supports students to be surprised
		Supports students' motivation
		Supports students' mathematical understanding
		Encourages students to develop their own assumptions

Table 1. Quality criterion "Supporting the learning of mathematics"

According to the expert, the dynamic worksheet shown is Figure 3 is high quality, because it supports the learning of mathematics. The material allows students to be surprised after exploring the given quadrilateral. They can adjust the length of each side by dragging and considering the ruler's labelling. Students should understand that not all of the four lengths could be randomly chosen in order to receive a closed quadrilateral. After this realization, students should be motivated to conduct their own assumptions describing cases whether or not a quadrilateral can or cannot be constructed. This short interview part shows that many different aspects contribute simultaneously to the quality of a certain resource, as summarized in Table 1. In addition to the aforementioned aspects, the mathematics educator from Hong Kong discussed other factors influencing the potentials and usability of dynamic materials – for instance, he referred to guidelines to design user-friendly resources in order to support students in learning mathematics.

After interviewing and analyzing perspectives of different experts, the following results emerged.

Eight quality dimensions of dynamic materials

I developed eight main "quality dimensions" as crucial factors obtained from the data, also discussed in previous work (see Kimeswenger, 2016, 2017). These aspects illustrated in Figure 4 contribute and influence the quality of a dynamic materials, and are the following: (a) author, (b) mathematical content, (c) resource type, (d) supporting the learning of mathematics, (e) integration into teaching, (f) advantages of dynamic material, (g) design and presentation, and (h) technical aspects.

This system also contains the dimension "supporting the learning of mathematics" outlined in the previous example about constructing quadrilaterals by four sides.

Figure 4: Overview of the eight main "quality dimensions" obtained from the analysis of the expert interviews

Table 2 gives an overview of the outlined quality dimensions and possible related questions teachers could ask when they are searching for appropriate materials to support their mathematics lessons. In the first place, a teacher has to scrutinize if she or he has the same quality standards as the author of the selected resource. Different aspects – for instance, the nationality, cultural and educational background – influence if user's standards comply with those of the author. For instance, certain dynamic materials might be interesting and suitable for Italian university professors, but inappropriate for Austrian primary school teachers. An obvious condition of a material is for example that the contained text or instructions appear in a language the users understand. Additionally, the presented mathematical content has to be appropriate for the intended students. The level should be adapted to the prerequisites of pupils in order neither to underchallenge, nor to overwhelm them. The teacher has to select an appropriate type of resource. For instance, if she or he wants to spend only a short sequence on the material, she or he should not select an entire worksheet collection (GeoGebra Book). For this case, a single dynamic worksheet can support teaching and could be managed to discuss in a short time. A selected dynamic material should always support the learning of mathematics. For this reason, the teacher has to decide HOW the dynamic resource can assist her or his teaching. Different representations can, for instance, help visualizing a mathematical concept, modelling a situation or support discovering characteristics of a mathematical concept. Above all, the way has to be considered in which the dynamic material will be integrated into teaching. Moreover, since the applied material is created using a Dynamic Mathematics Software, the teacher should benefit from the advantages of the dynamics and consciously use dynamic elements, such as drag mode, sliders or traces. The design of the chosen dynamic material should be as user-friendly as possible to avoid potential obstacles with regard to the handling. Particularly, irritating technical errors should not appear and neither hinder mathematical learning.

Quality dimension	Question
Author	Is it advantageous that users and authors have the same quality standards and similar characteristics?
Mathematical content	Is the presented mathematical content appropriate?
Resource type	Is the resource type appropriate?
Supporting the learning of mathematics	Does the dynamic material support the learning of mathematics?
Integration into teaching	Does the dynamic material support the teaching of mathematics?
Advantages of dynamic material	Does the dynamic material add value to the learning experience?
Design and presentation	Is the design user-friendly?
Technical aspect	Does the dynamic material function properly?

Table 2. Quality dimensions and questions of this study emerged from the data analysis

All of the listed dimensions – author, mathematical content, resource type, supporting the learning of mathematics, integration into teaching, advantages of dynamic material, design and presentation, and technical aspect – are important. The questions presented in Table 2 should be considered when reviewing dynamic materials and are decisive for selecting suitable resources for teaching. In the following, I outline the importance of the author for the quality of the created resource.

Quality dimension "author"

As already outlined in previous work (see Kimeswenger, 2016, 2017), the majority of experts stated that there is a strong correlation between the quality of the author and the created material (see Figure 5). For this reason, the creator of the material is listed first in my developed system highlighting the importance of this dimension.

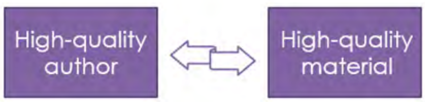


Figure 5. Correlation between quality of author and dynamic material

During the interviews, several experts explained a common strategy when they search for "good" online materials for their own teaching: looking for resources of already known "high-quality authors". They named certain users offering always "good" work on the GeoGebra Materials platform according to their perspectives. For example, a British expert mentioned a particular author whose "materials are brilliant and if you see something of [him] then it is a guarantee of quality." (Interview 2015-07-15). Different experts highlighted several times that the creators strongly influence the quality of their developed instructional resources. For this reason, they open the profile page of these already known "high-quality authors" to be able to rapidly search suitable resources for own teaching. The British expert explained the following:

"If you get to know people who produce quality materials, they don't tend to produce quality materials by accident. Once, you find one or two things by somebody which is good, you can expect pretty much more materials with high quality." (Interview 2015-07-15)

As discussed in the beginning of the paper, materials offered on the GeoGebra Materials platform are inconsistent quality, because users with different quality standards share their resources on this website. On the one hand, this makes it often difficult for ordinary teachers to find suitable resources quickly. On the other hand, these vast number of user-generated OERs contain resources of different languages, varying circumstances such as technical requirement, diverging curriculums, or quality standards. The challenge for every platform is to recommend users both materials and authors of high quality. If teachers search within repositories, they expect to find resources related to their needs and educational backgrounds complying with their own quality standards. In addition, a platform should draw the attention of users to high-quality authors who have similar views on learning (Kimeswenger, 2017). This would simplify finding "good" materials within a huge number of resources in repositories.

High-quality authors - identification and recognition

The previous section proposed to identify the high-quality authors on the GeoGebra Materials platform. Additionally, experts suggested to allow users to follow certain authors on this website. For this reason, the "Followers" Badge was released on the resource-sharing platform GeoGebra Materials (March 2016) based on the results of this study. The interview analysis showed that a platform should enable users to quickly find materials of specific authors who adhere to similar quality standards. Moreover, resources created by "followed authors" should get higher priority among their search results.

Different social networking sites have already implemented certain ways to organize content and to support their online community. For instance, Twitter's user recommendation service is called WTF ("Who to Follow") enabling millions of connections every day between users based on common connections, shared interests and other relevant factors. Facebook and LinkedIn are also examples of social networking sites suggesting their users to follow other users based on similar interests (Pankaj et al., 2013).

The already implemented "Followers" Badge on the GeoGebra Materials platform could help identifying high-quality authors elected by other users. It is a further step to allow users following each other and to support building social communities with common interests and needs on this platform. Furthermore, the "Followers" Badge represents some kind of recognition requested by the mathematics educator from Hong Kong during the interview:

> If the material is good [on the platform GeoGebra Materials], I think the designer has paid a lot of effort. He or she need more encouragement or appreciation. (Interview 2015-07-13)

Caprotti (2007, p. 7) also highlighted that authors should be respected and recognized for their high-quality resources. Users are more motivated to share materials if their work is recognized – "Credits to creators".

Conclusion

The study focused following key issue: What is a high-quality online material for learning mathematics? Teachers should be supported when they search for resources for their own classrooms in the Internet. It would be desirable to find suitable materials quickly complying with users' own quality standards. This project investigates important aspects to identify such "good" instructional resources.

I developed following eight dimensions considering them as relevant factors for evaluating the quality of a certain dynamic material for teaching mathematics: (i) author, (ii) mathematical content, (iii) resource type, (iv) supporting the learning of mathematics, (v) integration into teaching, (vi) advantages of dynamic material, (vii) design and presentation, and (viii) technical aspects.

Whether or not a dynamic material is high quality seemed to be a subjective decision and depended on the particular person using it. However, teachers can consider the outlined dimensions (i-viii) when they review and select suitable resources for their own classes.

Findings of the collected data showed that the author can be regarded as core dimension influencing all of the other listed items for reviewing materials' quality. There exists a strong correlation between the quality of the author and the created materials according to the expert interviews. For this reason, the possibility to follow certain authors has been implemented on the GeoGebra Materials platform based on these results. In addition to this development, the algorithm determining the resources ranking after searching has been also improved on the platform. Now, the system considers factors contributing to the quality of a dynamic material developed in this study – for instance, additional information concerning users and authors. Further implementations on the GeoGebra Material platform are needed following the aim of a continued improvement to enhance the resource search. In general, platforms containing user-generated Educational Resources have to consider users' needs and educational backgrounds for recommending them appropriate resources and good authors.

Further analysis of the collected qualitative and quantitative data will examine the complexity of the quality of dynamic materials in greater detail. With this background knowledge, I will develop additional suggestions for review and recommendation systems for platforms such as GeoGebra Materials.

References

Camilleri, A. F., Ehlers, U. D., & Pawlowski, J. (2014). *State of the Art Review of Quality Issues related to Open Educational Resources (OER)*. Seville: Publications Office of the European Union.

Caprotti, O., & Seppälä, M. (2007). Evaluation criteria for eContent quality. *JEM-Joining Educational Mathematics*, 1–8.

CK-12 (2016). Online Platform. www.ck12.org, retrieved on 2016-03-16.

Creswell, J. W. (2012). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches* (3rd ed.). London: SAGE Publications.

Curriki (2016). Online Platform. www.curriki.org, retrieved on 2016-03-16.

Fahlgren, M. (2015). Designing for the integration of dynamic software environments in the teaching of mathematics. Dissertation, Karlstad University Studies.

GeoGebra Materials (2016). Online Platform. www.geogebra.org/materials, retrieved on 2016-11-30.

Hötzl, R. (2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(1):63–86.

I2Geo (2016). Platform. http://i2geo.net, retrieved on 2016-09-01.

Kimeswenger, B., & Hohenwarter, M. (2014). GeoGebraBooks für Tablets. In *Proceedings of the 48th Conference of Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (pp. 611–614). Koblenz, Germany.

Kimeswenger, B., & Hohenwarter, M. (2015). GeoGebraBooks – Dynamische Materialien und ihre Qualitätssicherung. *IMST-Newsletter*, 14(43), 11–14.

Kimeswenger, B. (2016). Addressing Quality Aspects of Dynamic Mathematics Materials. Presented at 13th International Congress on Mathematical Education Hamburg.

Kimeswenger, B. (2017). Identifying and assessing quality criteria for dynamic mathematics materials on platforms. Presented at CERME Dublin.

Kortenkamp, U., Dohrmann, C., Kreis, Y., Dording, C., Libbrecht, P., & Mercat, C. (2009). Using the Intergeo Platform for Teaching and Research. In *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 1–5). Metz, France.

LearningApps (2016). Online Platform. http://learningapps.org/, retrieved on 2016-09-01.

Libbrecht, P., Desmoulins, C., Mercat, C., Laborde, C., Dietrich, M., & Hendriks, M. (2008). Cross-Curriculum Search for Intergeo. In *Proceedings of the 7th Conference on Mathematical Knowledge Management* (Vol. 5144, pp. 520–535). Birmingham, UK.

Ott, M., & Hielscher, M. (2014). Kriterien für die automatisierte Bewertung von user-generated educational Microcontent. In *E-Learning Fachtagung Informatik. Proceedings Series of the Gesellschaft für Informatik* (Vol. P-233, pp. 73–84). Freiburg, Germany.

Pankaj, G., Ashish, G., Jimmy, L., Aneesh, S., Wang, D., & Reza, Z. (2013). WTF: The Who to Follow Service at Twitter. *In WWW '13 Proceedings of the 22nd International Conference on World Wide Web* (pp. 505–514). New York, USA.

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods.* Chichester: John Wiley & Sons.

Rolfes, V. (2010). What Are the Benefits and Pitfalls of Open Educational Resources (OERs)? http://ezinearticles.com/?What-Are-the-Benefits-and-Pitfalls-of-Open-Educational-Resources-(OERs)?&id=5638015, retrieved on 2016-09-14

Siersdorfer, S., Chelaru, S., Nejdl, W., & San Pedro, J. (2010). How useful are your comments? In *Proceedings of the 19th International Conference on World Wide Web* (Vol. 15, pp. 891–900). Raleigh, USA.

Strauss, A., & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Weinheim, Germany: Beltz Psychologie Verlags Union.

Trgalova, J., & Jahn, A. P. (2013). Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM*, 45(7), 973–986.

Trgalova, J., Jahn, A. P., & Soury-Lavergne, S. (2009). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 1161–1170). Lyon, France.

Trgalova, J., Soury-Lavergne, S., & Jahn, A. P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project. *ZDM*, *43(3)*, 337–351.

UNESCO. (2002). Education News. UNESCO promotes new initiative for free educational resources on the Internet. http://www.unesco.org/education/news_en/080702_free_edu_ress.shtml, retrieved on 2016-11-29

IL NUOVO MOOC NUMERI: OBIETTIVI E ASPETTATIVE

Sara Labasin[1], Virginia Alberti[2], Ferdinando Arzarello[3], Ornella Robutti[3], Eugenia Taranto[3]

[1]L.S. "P. Gobetti", Torino (TO) - [2] I.I.S. "B. Castelli", Brescia (BS)

[3]Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino, Torino (TO)

saralabasin@yahoo.it

Abstract: Il MOOC Numeri è il nuovo (secondo) MOOC promosso dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino per la formazione di docenti di matematica della scuola secondaria. Si tratta dunque di formazione online, su piattaforma Moodle di DI.FI. MA., progettata e preparata da docenti in collaborazione con i ricercatori di Didattica della Matematica del Dipartimento di Matematica "G. Peano", per promuovere innovazione didattica e uso ragionato delle tecnologie all'interno di una comunità di pratica e di condivisione.

Introduzione

Il progetto Math MOOC UniTo consiste nell'erogazione di MOOC (Massive Open Online Course) creati da insegnanti per insegnanti, al fine di promuovere la formazione di docenti in servizio di scuola secondaria sui Nuclei delle Indicazioni Ministeriali (Numeri, Geometria, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni). Gli insegnanti-autori sono stati corsisti del Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promosso dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e lavorano alla progettazione, produzione ed erogazione dei MOOC in collaborazione con alcuni docenti e ricercatori universitari del medesimo Dipartimento.

Dopo il successo riscosso con il primo MOOC erogato, il "MOOC Geometria", un nuovo team si sta dedicando a concludere la realizzazione del secondo MOOC, ovvero "Numeri", la cui erogazione è prevista a partire da ottobre 2016. Come Geometria (Labasin et al., 2015), anche Numeri sarà un corso aperto e gratuito, disponibile online sulla piattaforma Moodle di Di.Fi.Ma., che propone la fruizione di materiali creati mediante strumenti tecnologici che favoriscono la comunicazione e la condivisione. Attraverso l'utilizzo diretto di tali risorse il docente sperimenterà modalità per socializzare la propria esperienza e verrà sollecitato a pensare come queste possano essere riutilizzate nella propria pratica didattica, attraverso formati innovativi per migliorare l'apprendimento degli studenti e stimolare il loro interesse. Il progetto monitorerà la partecipazione e il coinvolgimento dei docenti in questa nuova modalità di formazione, nonché la ricaduta delle proposte nella prassi della didattica della matematica per verificare lo sviluppo professionale e la creazione di comunità di pratica fra i docenti.

I corsi si svolgeranno interamente a distanza e rispondono in maniera immediata alla richiesta di una formazione che si adatti ad ogni esigenza di luogo, orario e tempi di apprendimento. Il completamento delle attività richieste per ogni modulo viene attestato con l'assegnazione di un badge. Al termine del percorso, si ottiene un ultimo badge, che rappresenta la certificazione del conseguimento delle competenze previste per il percorso formativo.

Per la ricerca sul MOOC si collaborerà anche con l'équipe diretta dal prof. Luc Trouche (ENS di Lione), coordinatore dell'equipe pedagogica di eFAN Maths che ha erogato, da marzo a maggio 2016, un MOOC per la formazione docenti in Francia. La finalità che si persegue è di continuare a tracciare la strada per una nuova modalità di formazione e di monitorarne i passaggi al fine di valutarne l'impatto e la ricaduta nelle pratiche didattiche, affinché l'utilizzo della tecnologia generi un apprendimento consapevole.

La progettazione e il gruppo di lavoro

Le idee di fondo che guidano il progetto Math MOOC UniTo sono quelle di poter offrire un'esperienza autentica di formazione per docenti, che si basino sulle innovazioni proposte dalla ricerca didattica e che scardinino le pratiche d'insegnamento in matematica basate esclusivamente sulla trasmissività. Si vuole inoltre contribuire nella riflessione sul ruolo che l'apprendimento online massivo e aperto avrà nei processi di apprendimento del XXI secolo in matematica; far riflettere sulle buone pratiche di innovazione che si generano con l'utilizzo di software disciplinari e sulle community ad essi connesse anche nell'ambito del cloud computing.

Le parole chiave sono:

> ***innovazione didattica***: proposte in linea con la ricerca che promuovono il coinvolgimento attivo e la costruzione di significati di nodi concettuali cruciali relativi al nucleo Numeri;
>
> ***uso della tecnologia 1***: proposte di strumenti informatici per la didattica (come GeoGebra) per generare e supportare un apprendimento consapevole ed effettivo;
>
> ***uso della tecnologia 2***: sulla scia del "learning by doing" (Dewey, 1916), utilizzo della tecnologia nel corso finalizzato all'apprendimento della stessa per riproporla nella didattica quotidiana;
>
> ***creazione di una comunità di insegnanti***: condivisione di esperienze e materiali, supporto reciproco nell'esperienza didattica.

Per il MOOC Numeri si è costituito un gruppo di lavoro più ampio rispetto a quello del MOOC di Geometria, con la definizione di differenti ruoli per porre una maggiore attenzione alle singole parti: coordinamento, regia, ricerca, predisposizione materiali, digitalizzazione, beta testing. Il team risulta quindi composto da 24 persone, che dal 30 marzo 2016, hanno iniziato a confrontarsi sul percorso formativo da proporre a partire dalla presa visione del MOOC Geometria, del suo svolgimento e dei sui esiti.

Alcuni materiali erano già stati predisposti in parallelo a quelli di Geometria e sono stati rivisti e aggiornati, altri invece sono stati pensati e organizzati in modo nuovo, mentre altri ancora sono stati elaborati a partire da una nuova idea di contenuto e hanno richiesto tempo e molta revisione.

A. I nodi matematici concettuali e le tematiche su cui si è definito di impostare i materiali sono:

- Il senso del numero
- La ricorsione
- I linguaggi matematici (naturale e algebrico)
- La valutazione
- La metodologia MERLO (Arzarello et. al, 2015)

Definiti i gruppi di lavoro per ogni argomento, sono seguiti incontri di coordinamento in presenza, sostenuti anche da attività di coordinamento a distanza, attraverso un "blocco di appunti" online. Questo tool è stato contenitore dei materiali organizzati, digitalizzati e revisionati secondo la struttura elaborata, ma anche il "tavolo" di lavoro utilizzato per raccogliere idee, progettare e disegnare l'architettura dell'intero corso e delle singole sezioni. Il blocco delle note sincronizzate e condivise ha facilitato e supportato scelte di ordine operativo, organizzativo e di design.

La struttura del MOOC Numeri

Il corso è stato organizzato nei seguenti Moduli, come esposto nella Tabella 1.

Nodi concettuali/Consegne	**Moduli**
Prendere confidenza con la piattaforma	*Modulo introduttivo*
Il senso del numero	*Modulo 1* "Meteoriti, batteri e chicchi di riso: i numeri e il loro significato"
Riconoscere rappresentazioni diverse con stesso significato	*Modulo 2* "Metodologia MERLO"
Valutare intelligenze diversificate e competenze	*Modulo 3* "Valutazione e INVALSI"
La ricorsione	*Modulo 4* "Salire le scale"
I linguaggi matematici (naturale e algebrico)	*Modulo 5* "Aritmetica, Algebra e i linguaggi matematici"
Progettare un'attività didattica con uno specifico software e revisionare l'attività proposta da un altro collega	*Modulo 6* "Project Work e Peer Review"
Sperimentare con la propria classe o un'attività del MOOC oppure il proprio Project Work	*Modulo 7 (facoltativo)* "Sperimentazione"

Tabella 1: I moduli del MOOC Numeri

La durata del MOOC è stata pensata per cinque settimane, una per ogni modulo, più alcuni giorni di introduzione al MOOC e un mese tra realizzazione del Project Work finale e la Peer Review del lavoro di un collega.

La grafica nella piattaforma Moodle di DI.FI.MA. è stata impostata con grid (griglia) per rendere più efficace la navigazione all'interno del corso da un modulo all'altro (Figura 1). Per ogni modulo si è predisposta una tabella riassuntiva dei materiali presenti e della modalità di fruizione (Figura 2).

Figura 1 – Impostazione a grid

UNITS	MODALITA' di FRUIZIONE
1) Riflessioni sulla valutazione Presentazione della lettura dati INVALSI	Video Video
2) Esempi di utilizzo dei quesiti INVALSI e dei dati forniti alle scuole	Due attività
3) Proposta di attività	Scelta di due quesiti afferenti a una Macro-area sulle tre proposte
4) Somministrazione e analisi dei risultati	Report quesiti somministrati e riflessioni sull'esperienza
5) Condividi le tue idee	Aggiungi degli esempi, vota e commenta su tricider

Figura 2 – Tabella riassuntiva del modulo 3

Nel MOOC Geometria non si erano date indicazioni specifiche di comportamento, in quanto date per scontate in una comunità di insegnanti. L'esperienza ci ha fatto notare che talvolta, anche involontariamente, gli interventi venivano fatti come se si fosse in un social network; pertanto è stata pubblicata una netiquette del MOOC Numeri, cioè un insieme di regole di buon senso, di buone maniere e di altre buone prassi normalmente osservate in ogni interazione sociale. Leggiamo, a esempio:

> *Ti invitiamo, quindi, a prestare attenzione nel postare sugli spazi dedicati della formazione ricordandoti che la piattaforma è un ambiente d'apprendimento vero e proprio e che l'interazione è tra pari, docenti, colleghi e non sempre lo stile comunicativo adottato sui social network può essere appropriato. (…) Ti invitiamo a non modificare autonomamente*

le impostazioni di documenti del percorso di formazione condivisi con i membri della community nella digitazione (fogli di calcolo) ma, eventualmente, di segnalare modifiche auspicabili nel forum tecnico.

Per favorire l'utilizzo di ogni strumento proposto, cercando di prevenire le possibili difficoltà dei corsisti, sono stati predisposti tutorial specifici. Supporto per tempo è stato anche dato per l'utilizzo del tool Learning Designer (LD), scelto per pianificare, online, il Project Work finale relativo alla progettazione. LD è uno strumento web-based creato dal London Institute of Education (Laurillard, 2012) ed è stato progettato con lo scopo di facilitare i docenti nella progettazione di attività didattiche con metodologie innovative. Il fatto che sia in inglese potrebbe costituire un ostacolo per alcuni e pertanto sono stati inseriti anche dei video esplicativi al suo utilizzo (Figura 3).

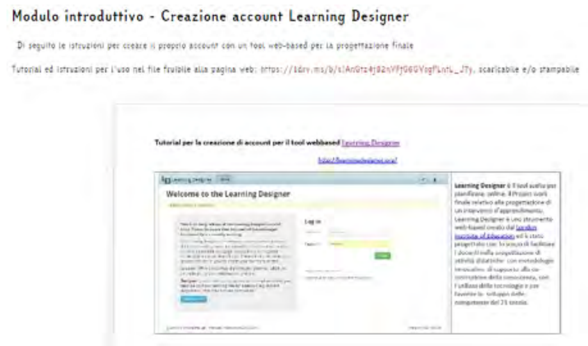


Figura 3 – Tutorial Learning Designer

Riguardo ai materiali si è lavorato con una attenzione equa agli ordini di scuola, con proposte anche per il secondo biennio e ultimo anno di secondaria di secondo grado. Le proposte didattiche e gli approfondimenti sono stati pensati per fornire al docente non solo le indicazioni, ma anche le schede di lavoro e la proposta di utilizzo delle tecnologie corredata da procedure guidate di esplorazione (vedasi attività con GeoGebra o con foglio di calcolo – Figura 4)

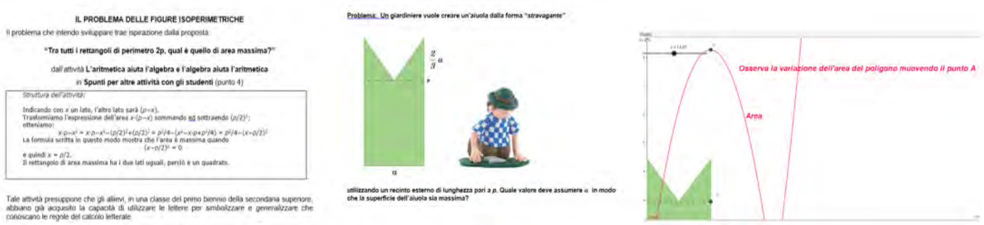


Figura 4 – Esempio di attività con guida all'insegnante e file GeoGebra

Relativamente al Modulo finale del MOOC (Modulo 6, Tabella 1): per la progettazione del Project Work non si intendono dare indicazioni specifiche se non di partire dai contenuti proposti, mentre per la Peer Review si intende fornire uno schema dettagliato al fine di favorire il confronto dei dati che si raccoglieranno, lasciando poi spazio ad un commento finale libero. La scheda proposta è impostata, come in Figura 5, sui seguenti punti:

- Connessioni con il mondo reale
- Creatività
- Collaborazione
- Uso della tecnologia
- Generale

Pratiche didattiche	Giudizio					Osservazioni/Commenti
	1	2	3	4	5	
Connessioni con il mondo reale						
Il punto di partenza della lezione/progetto stimola la curiosità ed è collegato direttamente alla vita degli studenti, ad esempio, affronta i problemi nella loro comunità o risponde ad un'esigenza reale al di là della classe.						
L'attività permette agli studenti di capire come si applicano le procedure che imparano in situazioni di vita reale.						
Alcune delle attività di apprendimento sono svolte al di fuori della classe, ad esempio le misurazioni, le osservazioni, etc.						
L'insegnante offre l'accesso a conoscenze matematiche attraverso diversi canali (intuizione, modellizzazione, diagrammi, astrazione, applicazione) e su diversi livelli di competenza matematica.						

Figura 5 – Schema Peer Review

Quest'anno la novità è rappresentata dalla possibilità di aderire ad una seconda parte, la sperimentazione (Figura 6), nella quale i corsisti sono invitati a fare nelle proprie classi una attività proposta nel MOOC o il proprio Project Work. Il gruppo di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Torino seguirà con particolare cura le fasi di monitoraggio al fine di valutare l'impatto che la formazione attraverso il MOOC potrebbe generare nelle pratiche didattiche dei docenti.

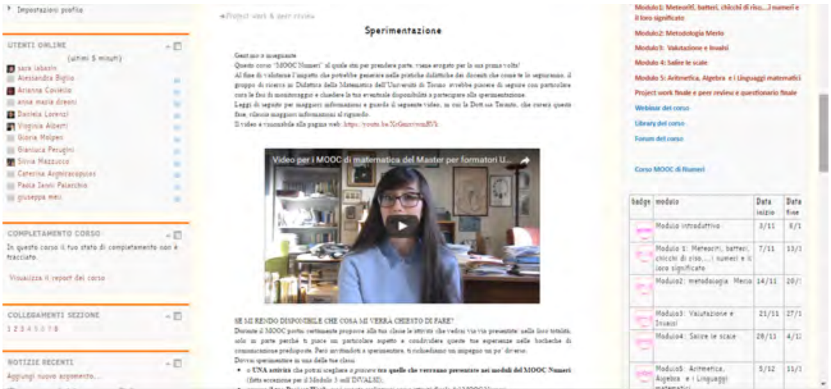


Figura 6 – Sperimentazione

La ricerca e la collaborazione con l'equipe francese

Per la ricerca sul MOOC si collaborerà anche con l'équipe diretta dal prof. Luc Trouche (ENS di Lione), coordinatore dell'equipe pedagogica di eFAN Maths che ha erogato, da marzo a maggio 2016, un MOOC per la formazione docenti in Francia.

Il confronto con il panorama internazionale ci sembra vitale per un'efficace e valida trasmissione di buone pratiche didattiche, e soprattutto per paragonare le metodologie di erogazione dei MOOC per la formazione docenti, in un'ottica di confronto costruttivo, con l'intento di sapere gestire in maniera ottimale la partecipazione dei corsisti e consolidare un proficuo tasso di completamento di tali corsi online, attestato come molto basso (5%) dalla letteratura (Bayne & Ross, 2013).

Aspettative

Le aspettative del gruppo di ricerca sono quelle di intercettare il bisogno formativo dei docenti e di avere quindi un cospicuo numero di iscritti pari a quello dello scorso anno. In particolare di incrementare la percentuale di insegnanti che completano il percorso formativo; a tal fine è stato organizzato un monitoraggio più puntuale per ogni settimana e per le consegne finali circa le difficoltà manifestate in corso d'opera e le possibili soluzioni.

Si spera che la community che si verrà a creare all'interno del corso sia disponibile al confronto e alla condivisione delle riflessioni e dei materiali didattici.

Ultimo, ma non meno importante, ci si aspetta di raccogliere dati utili alla ricerca che è in corso sull'incidenza che una formazione di questo tipo può avere nelle pratiche didattiche, in particolare se è strumento per motivare maggiormente docenti e studenti nel lavoro didattico ottenendo risultati migliori e di maggior coinvolgimento.

Ringraziamenti

Si ringrazia il team *MOOC Numeri* per la collaborazione alla progettazione del MOOC: Susanna Abbati, Silvia Beltramino, Agnese Berra, Arianna Coviello, Paola Curletti, Marina Dalè, Roberta Ferro, Francesca Finoglio, Santina Fratti, Maria Cristina Garassino, Luigia Genoni, Fraslinda Giustino, Carlotta Idrofano, Laura Mantello, Silvia Paruzza, Daniela Pavarino, Lucia Poli, Annarosa Rongoni, Germana Trinchero.

Bibliografia

Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: a new tool and a new challenge in mathematics teaching and learning. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 57-64. Hobart, Australia: PME.

Bayne S., Ross J. (2013). The pedagogy of the Massive Open Online Course: the UK view. The Higher Education Academy.

Dewey, J. (1916). Democracy and education: an introduction to the philosophy of education. *Free Press;* Reprint edition (February 1, 1997).

Labasin, S., Alberti, V., Taranto, E. & Arzarello, F. (2015). *Math MOOC UniTo: una proposta di formazione per docenti di matematica*. Atti del VII Convegno Nazionale di DI.FI.MA.

Laurillard, D. (2012). Teaching as a design science. London: Routledge.

INSERIRE BELLE FIGURE NEI PROPRI DOCUMENTI OSSIA: COME USARE GEOGEBRA CON LATEX

Enrico Martoglio
I.I.S.S. "Einaudi – Casaregis – Galilei", Genova
martoglio.enrico@ecg-genova.gov.it

Abstract: La produzione di testi tecnico-scientifici di elevata qualità è talvolta resa difficoltosa dall'utilizzo dei più comuni *word processor* di tipo WYSIWYG. Il software LaTeX, così incomprensibilmente sconosciuto nel mondo scolastico così come in quello accademico, permette la redazione di testi esteticamente ineccepibili, consentendo con una facilità estrema l'inserimento di formule matematiche e di immagini. Queste ultime possono essere semplici scatti fotografici o – in questo contesto più interessante – grafici prodotti dai più diffusi software per la didattica della Matematica, come ad esempio GeoGebra.

Introduzione

Sovente, i testi che trattano di Matematica (siano essi articoli scientifici settoriali, classiche dispense a carattere didattico, video-presentazioni) prevedono l'inserimento di figure e grafici che possano agevolare il fruitore nella comprensione dei concetti enunciati a parole.

Oppure, al termine della creazione di una costruzione comunque complessa effettuata con un software di matematica (ad esempio: GeoGebra), permane l'intenzione di produrre un testo scritto che possa spiegare il senso di quello che si è appena realizzato. Va da sé che l'autore voglia inserire nel proprio documento di testo una o più figure, a coronamento visivo dei propri risultati.

Solitamente, l'approccio più diffuso è quello dell'utilizzo di un software di video scrittura di tipo WYSIWYG (*What You See Is What You Get*), ossia quella categoria di programmi che permettono all'utente di scrivere testi immediatamente visualizzati sullo schermo del computer e che – se stampati – hanno lo stesso aspetto del documento visualizzato sul monitor. I nomi più conosciuti di questi software sono Microsoft Word, Apple Pages, LibreOffice Writer.

Invece, il software LaTeX prevede un approccio differente: così come nella realizzazione di pagine web si può scrivere il codice HTML con un semplice editor di testo (Blocco note, ad esempio) e solo successivamente visualizzare il risultato delle istruzioni fornite mediante un browser (come Mozilla Firefox), anche LaTeX – un linguaggio di mark up anch'esso – utilizza la stessa logica. Infatti, dopo aver scritto il codice relativo al documento mediante un qualsiasi editor di testo, occorre procedere alla sua compilazione per poter visualizzare il prodotto finito, solitamente un file di tipo *.pdf*.

Generalmente, questo secondo tipo di paradigma viene chiamato WYSIWYM (*What You See Is What You Mean*), poiché con LaTeX l'utente si può concentrare di più sul contenuto del documento piuttosto che sulla sua estetica, in quanto la cura di questo ultimo aspetto è delegato al programma in modo del tutto automatico.

Inserire una figura GeoGebra con un programma wysiwyg

In linea di massima, si possono utilizzare due soluzioni: *screenshot* della schermata (premendo il tasto *Stamp* della tastiera, solitamente in alto), successivo *copia-e-incolla* nel documento di testo ed eventuale rifilatura della figura per eliminare le parti ritenute superflue mediante i comandi di gestione delle immagini fornite dal programma; oppure, esportazione della vista grafica in formato *.png*, *.eps*, *.GIF* (animato o meno) con i comandi reperibili nel menu di GeoGebra *File → Esporta*, salvataggio in una apposita cartella e seguente inserimento nel proprio elaborato.

Né la prima strada, né la seconda garantiscono buoni risultati: nelle varie fasi di esportazione e manipolazione l'immagine perde di risoluzione, se ingrandita eccessivamente può diventare sgranata e in caso di ripensamento occorre ripetere tutte le fasi sopra elencate per generare una nuova figura.

Inserire una figura GeoGebra con latex

Oppure (ed è questa l'intenzione di questo intervento), è possibile generare ed esportare il codice *PStricks* o *PFG/TikZ* relativo a un'immagine, utilizzando i comandi GeoGebra: *File → Esporta → Vista Grafici come PSTricks o PFG/TikZ...*, ottenendo linee di comando immediatamente integrabili in un file di codice *LaTeX*.

Ad esempio, una generando con GeoGebra il codice *PFG/TikZ* relativo al grafico di una semplice cubica di equazione $y = x^3 - 2x^2 + 3x$, si ottiene in automatico il seguente codice:

```
\documentclass[10pt]{article}
\usepackage{pgf,tikz}
\usetikzlibrary{arrows}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\definecolor{ffqqqq}{rgb}{1.,0.,0.}
\definecolor{cqcqcq}{rgb}{0.752941176471,0.752941176471,0.752941176471}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,x=1.0cm,y=1.0cm]
\draw [color=cqcqcq,dash pattern=on 2pt off 2pt, xstep=1.0cm,ystep=1.0cm] (-9.78,-6.76) grid (10.42,6.14);
\draw[->,color=black] (-9.78,0.) -- (10.42,0.);
\foreach \x in {-9.,-8.,-7.,-6.,-5.,-4.,-3.,-2.,-1.,1.,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,9.,10.}
\draw[shift={(\x,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {\footnotesize $\x$};
\draw[->,color=black] (0.,-6.76) -- (0.,6.14);
\foreach \y in {-6.,-5.,-4.,-3.,-2.,-1.,1.,2.,3.,4.,5.,6.}
\draw[shift={(0,\y)},color=black] (2pt,0pt) -- (-2pt,0pt) node[left] {\footnotesize $\y$};
\draw[color=black] (0pt,-10pt) node[right] {\footnotesize $0$};
\clip(-9.78,-6.76) rectangle (10.42,6.14);
\draw[line width=2.8pt,color=ffqqqq,smooth,samples=100,domain=-9.780000000000003:10.420000000000003] plot(\x,{((\x))^(3.0)+(-2.0*(\x))^(2.0)+3.0*(\x)});
\begin{scriptsize}
\draw[color=ffqqqq] (-3.42,-6.5) node {$f$};
\end{scriptsize}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Figura 1. Codice LaTeX automaticamente generato
da GeoGebra relativo al grafico di una funzione cubica

Non è questa la sede per spiegare il significato dei comandi LaTeX che compaiono nella figura 1, anche perché alcune righe servono per la definizione di alcuni parametri iniziali e non sono strettamente necessarie alla realizzazione di una figura. Ai più curiosi viene consigliata la lettura dei manuali riportati in bibliografia.

Tuttavia, è interessante notare come il codice generato da GeoGebra sia immediatamente compilabile dal motore LaTeX e fruibile mediante un qualsiasi programma per la visualizzazione di documenti in formato *.pdf*, nonché stampato su carta. Come accade sovente in una conversione da un formato ad un altro, sono quasi sempre necessari piccoli aggiustamenti o modifiche personali per soddisfare il proprio gusto estetico o particolari esigenze.

Ad esempio, il codice della figura 1 è stato depurato di alcuni comandi ritenuti superflui o perfezionabili, per ottenerne uno nuovo – più snello e intuitivo – riportato qui di seguito:

```
\documentclass[10pt]{article}
\usepackage{pgf,tikz}
\begin{document}
    \begin{tikzpicture}[>=latex,scale=0.7]
        \draw [color=lightgray,dashed] (-6.5,-6.5) grid (6.5,6.5);
        \draw[->,color=black] (-6.5,0) -- (6.5,0) node[below] {\footnotesize $x$};
        \foreach \x in {-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6}
        \draw[shift={(\x,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {\footnotesize $\x$};
        \draw[->,color=black] (0,-6.5) -- (0,6.5) node[right] {\footnotesize $y$};
        \foreach \y in {-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6}
        \draw[shift={(0,\y)},color=black] (2pt,0pt) -- (-2pt,0pt) node[left] {\footnotesize $\y$};
        \draw[color=black] (0pt,-10pt) node[right] {\footnotesize $0$};
        \clip(-6.5,-6.5) rectangle (6.5,6.5);
        \draw[ultra thick,color=red,samples=200,domain=-4:3] plot(\x,{((\x))^(3.0)+(-2.0*(\x))^(2.0)+3.0*(\x)});
        \draw[color=red] (-2.5,2.5) node {$f$};
    \end{tikzpicture}
\end{document}
```

Figura 2. Modifiche apportate al codice LaTeX della precedente figura 1

che fornisce come risultato la cubica seguente:

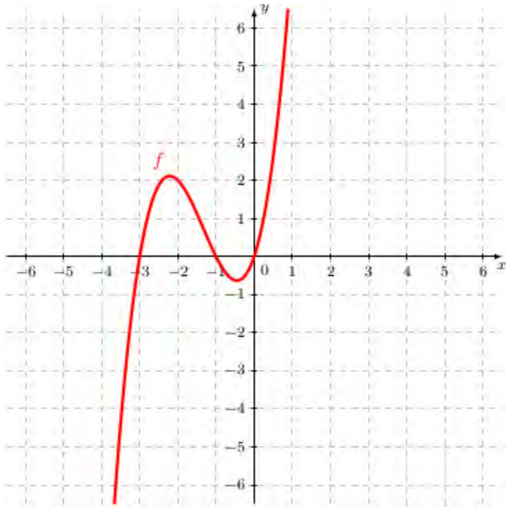


Figura 3. Risultato della compilazione del codice riportato in figura 2

Le righe di comando relative alla vera e propria figura permettono la definizione di un'immagine vettoriale, con tutti i vantaggi associati a questa tecnica. Uno per tutti, si ricorda la possibilità di ingrandire arbitrariamente la figura senza che si verifichi alcuna perdita di risoluzione dell'immagine stessa.

Sitografia e manuali

Battaia, L. (2006). LaTeX, naturalmente! Una miniguida di avvio per principianti assoluti.

Reperibile al sito: goo.gl/J52g1y. Ultimo accesso: 12/12/2016

Battaia, L. (2009). GeoGebra per LaTeX.

Reperibile al sito: goo.gl/W82ifH. Ultimo accesso: 12/12/2016

Oetiker, T (2000). Una (mica tanto) breve introduzione a LaTeX 2E , ovvero LaTeX 2E in 93 minuti

Reperibile al sito: goo.gl/5gVX3h. Ultimo accesso: 12/12/2016

ATTIVITÀ PER UNA MATEMATICA ACCESSIBILE E INCLUSIVA – INTRODUZIONE

Carlotta Idrofano*[1]*, Monica Mattei*[2]*, Daniela Pavarino*[3]*,
***Ornella Robutti*[4]*, Annarosa Rongoni*[5]*, Cinzia Soldera*[6]**

L.S. "M. Curie", Pinerolo (TO)[1]*, Università degli Studi di Torino*[2,4]*, IC "Govone", Priocca (CN)*[3]*,*
IC "Galileo Ferraris", Livorno Ferraris (VC)[5]*, IC "Serra", Crescentino (VC)*[6]*,*
carlotta.idrofano@gmail.com

Abstract

Il presente articolo, a partire da una panoramica sul mondo dei Bisogni Educativi Speciali e sulla normativa che garantisce e tutela la piena inclusione di tutti gli studenti nella vita scolastica, intende presentare il lavoro svolto e i risultati ottenuti dal progetto di ricerca "Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo" finanziato dalla Fondazione CRT e sviluppato dal Dipartimento di Matematica con il coordinamento della Prof.ssa Ornella Robutti e la supervisione del Prof. Ferdinando Arzarello.

Bisogni Educativi Speciali

L'espressione "Bisogni Educativi Speciali" (BES) indica qualsiasi difficoltà evolutiva di funzionamento in ambito educativo e/o di apprendimento che necessita di educazione speciale individualizzata finalizzata all'inclusione (Ianes, 2005, Ianes e Macchia, 2008) ed è entrata in uso nella scuola italiana a seguito dell'emanazione della Direttiva ministeriale del 27 dicembre 2012 "Strumenti di intervento per alunni con Bisogni Educativi Speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica". La direttiva riconosce infatti che *l'area dello svantaggio scolastico è molto più ampia di quella riferibile esplicitamente alla presenza di deficit. In ogni classe ci sono alunni che presentano una richiesta di speciale attenzione per una varietà di ragioni: svantaggio sociale e culturale, disturbi specifici di apprendimento e/o disturbi evolutivi specifici, difficoltà derivanti dalla non conoscenza della cultura e della lingua italiana perché appartenenti a culture diverse. […] Quest'area dello svantaggio scolastico, che ricomprende problematiche diverse, viene indicata come area dei Bisogni Educativi Speciali (in altri paesi europei: Special Educational Needs). Vi sono comprese tre grandi sotto-categorie: quella della disabilità; quella dei disturbi evolutivi specifici e quella dello svantaggio socioeconomico, linguistico, culturale.*

L'area dei bisogni educativi speciali non è quindi una "nuova categoria" di disturbi ma una macro-categoria che ingloba al suo interno diversi tipi di disturbi, come schematizzato nella seguente figura 1.

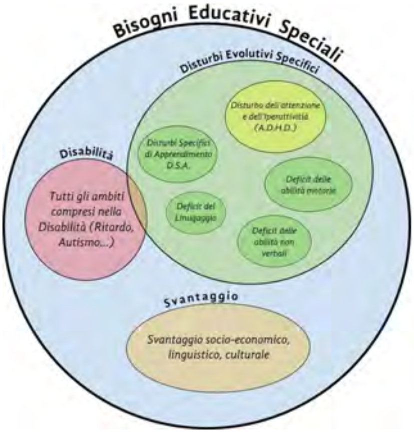


Figura 1. Bisogni Educativi Speciali.

La Direttiva, da un punto di vista operativo, sottolinea inoltre la necessità che le scuole offrano adeguata e personalizzata risposta affinché venga potenziata la cultura dell'inclusione, sottolineando che un *approccio educativo, non meramente clinico […] dovrebbe dar modo di individuare strategie e metodologie di intervento correlate alle esigenze educative speciali, nella prospettiva di una scuola sempre più inclusiva e accogliente.*

Sebbene il fine dell'articolo non sia quello di analizzare nello specifico le varie tipologie di bisogni educativi, si ritiene opportuno richiamare brevemente l'attenzione su due tipologie, quella degli studenti DSA e degli studenti svantaggiati, che sono sempre più presenti nelle classi, fornendo alcune osservazioni di interesse didattico.

Le Linee guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con disturbi specifici di apprendimento allegate al Decreto Ministeriale del 12 luglio 2011 indicano chiaramente che tali disturbi, che interessano studenti con funzionamento intellettivo adeguato all'età anagrafica, hanno matrice evolutiva e sono modificabili attraverso interventi mirati: *posto nelle condizioni di attenuare e/o compensare il disturbo, infatti, il discente può raggiungere gli obiettivi di apprendimento previsti. È da notare, inoltre (e ciò non è affatto irrilevante per la didattica), che gli alunni con DSA sviluppano stili di apprendimento specifici, volti a compensare le difficoltà incontrate a seguito del disturbo.*

È dunque cruciale il ruolo dell'insegnate non solo nell'individuazione di un potenziale disturbo specifico dell'apprendimento ma anche, e soprattutto, nella progettazione di una didattica che tenga in considerazione le modalità di apprendimento e le caratteristiche cognitive specifiche di ogni studente e cerchi di valorizzarne le potenzialità per il raggiungimento del successo formativo.

Recenti studi evidenziano inoltre come non esista ancora una definizione operativa unanime e condivisa di discalculia, testimoniata anche dall'utilizzo di test di rilevazione diversi nelle varie nazioni e di standard che non tengono in dovuta considerazione i fattori non cognitivi (Lewis & Fischer, 2016). Una stessa tipologia di diagnosi può quindi includere studenti con profili cognitivi anche molto diversi tra loro (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014) con una conseguente ulteriore complessità nell'individuare un efficace intervento didattico.

Vogliamo infine soffermarci sull'area dello svantaggio, sempre più presente nella realtà della scuola, a cui afferiscono non solo studenti stranieri ma anche studenti che vivono in contesti socio-economici e culturali deprivanti o che, per svariati motivi personali, stanno attraversando un periodo di difficoltà. L'apertura all'area dello svantaggio è stata promossa dall'introduzione del modello diagnostico ICF (International Classification of Functioning) definito nel 2002 dall'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS). Tale modello considera la persona nella sua totalità, in una prospettiva bio-psico-sociale, in cui le difficoltà di apprendimento non hanno necessariamente solo un'origine sanitaria ma possono derivare da un disagio legato all'interazione con l'ambiente.

Solo a partire dalla Direttiva Ministeriale 2012 tale bisogno ha iniziato a essere tutelato e, come meglio specificato nella successiva Circolare ministeriale 8 marzo 2013, per favorire la piena inclusione nella vita scolastica possono essere previsti dei provvedimenti di carattere transitorio, messi dunque in atto per il tempo strettamente necessario, privilegiando le strategie educative e didattiche attraverso percorsi personalizzati più che strumenti compensativi e misure dispensative.

Normativa per l'inclusione

L'importante traguardo raggiunto con la recente normativa che garantisce e tutela il diritto di ogni studente a essere incluso pienamente nella vita scolastica è il frutto di un lungo percorso che attraversa l'ultimo secolo di storia della normativa scolastica italiana.

Le varie fasi storiche di questo processo sono state accompagnate da leggi, decreti, direttive, circolari, note, chiarimenti e linee guida che hanno sancito il progredire del cammino. Tali tappe fondamentali possono essere schematicamente riassunte nelle seguenti:

- fino al 1960: separazione ed esclusione
- 1960 – 1970: passaggio dalla medicalizzazione all'educazione e al riconoscimento del Principio di educabilità
- 1970 – 1977: inserimento
- 1977 – 1994: integrazione
- dal 1994: inclusione

È opportuno ricordare che la Costituzione Italiana stessa, fondamento della Repubblica, ancor prima della normativa scolastica afferma che la scuola è per tutti (art. 34) e sancisce negli art. 2 e 3 i diritti alienabili della persona e l'obbligo a rimuovere gli ostacoli che, limitando l'uguaglianza, impediscono il pieno sviluppo e l'effettiva partecipazione sociale delle persone.

Nella normativa scolastica italiana, un importante punto di riferimento è sicuramente costituito dalla nota Legge n. 170 dell'8 Ottobre 2010 "Nuove norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico" finalizzata a favorire il successo scolastico, a garantire una formazione adeguata e a promuovere lo sviluppo delle potenzialità degli studenti DSA, riducendo i disagi relazionali ed emozionale attraverso *l'uso di una didattica individualizzata e personalizzata, con forme efficaci e flessibili di lavoro scolastico che tengano conto anche di caratteristiche peculiari dei soggetti, quali il bilinguismo, adottando una metodologia e una strategia educativa adeguate.*

La legge e il correlato Decreto n. 5669 del 12 Luglio 2011 sottolineano più volte la necessità di una didattica individualizzata e personalizzata come strumento di inclusione, lasciando intendere la centralità delle metodologie didattiche, e non solo degli strumenti compensativi e dispensativi, per il raggiungimento del successo formativo degli studenti con DSA *adottando proposte di insegnamento che tengano conto delle abilità possedute e potenzino anche le funzioni non coinvolte nel disturbo.*

Ricordiamo infine che le Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione sottolineano che *la scuola italiana sviluppa la propria azione educativa in coerenza con i principi dell'inclusione delle persone* e mettono lo studente *al centro dell'azione educativa in tutti i suoi aspetti: cognitivi, affettivi, relazionali [...]* con particolare cura per gli *allievi con disabilità o con bisogni educativi speciali, attraverso adeguate strategie organizzative e didattiche, da considerare nella normale progettazione dell'offerta formativa.*

Quindi *le finalità della scuola devono essere definite a partire dalla persona che apprende* e la *definizione e la realizzazione delle strategie educative e didattiche devono sempre tener conto della singolarità e della complessità di ogni persona, della sua articolata identità, delle sue aspirazioni, capacità e delle sue fragilità, nelle varie fasi di sviluppo e di formazione* favorendo lo star bene a scuola. Infine, le Indicazioni ribadiscono che *la scuola realizza appieno la propria funzione pubblica impegnandosi [...] per il successo scolastico di tutti gli studenti [...]. Questo comporta saper accettare la sfida che la diversità pone: innanzitutto nella classe, dove le diverse situazioni individuali vanno riconosciute e valorizzate, evitando che la differenza si trasformi in disuguaglianza.*

Il progetto di ricerca

Il progetto di ricerca "Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo" finanziato dalla Fondazione CRT e sviluppato dal Dipartimento di Matematica con il coordinamento della Prof.ssa Ornella Robutti e la supervisione del Prof. Ferdinando Arzarello si fonda sulla consapevolezza che le classi sono costituite da studenti che hanno abilità diverse, modalità di apprendimento diverse, tempi di apprendimento diversi, bisogni (speciali) diversi e sul conseguente bisogno di rinnovamento della didattica al fine di includere appieno tutti nel progetto educativo. Nasce dunque la necessità della creazione di scenari didattici che siano plasmati sulla classe, partendo dal riconoscimento delle diverse abilità degli studenti, viste non come una mancanza ma come una potenzialità arricchente (Healy & Powell, 2013), per una didattica che sia "denominatore comune" per tutti gli alunni e che non lasci indietro nessuno (Circ. min. 8, 6 marzo 2013).

Nel progetto di ricerca, che ha visto coinvolti diversi insegnanti[1] delle scuole secondarie di primo e secondo grado del Piemonte e della Lombardia, sono stati analizzati e applicati i risultati della più recente ricerca in Didattica della Matematica con l'obiettivo di:

- progettare attività didattiche di carattere fortemente inclusivo, pensate per tutti gli studenti, con particolare attenzione ai ragazzi con Bisogni Educativi Speciali,
- curare l'accessibilità dei materiali cartacei e dei file forniti, in modo che il problema posto non sia lui stesso un problema,
- creare ambienti di apprendimento che favoriscano la collaborazione e il lavoro tra pari,
- stimolare l'interesse dei ragazzi, promuovendo il loro apprendimento attraverso attività significative,
- favorire lo "star bene a scuola" prestando particolare attenzione anche agli aspetti emotivi.

Inoltre, il progetto è stato una utile opportunità formativa per gli insegnanti coinvolti, fornendo loro sia dei riferimenti teorici che pratici utili per un rinnovamento della didattica in ottica inclusiva.

Le attività progettate[2], ex-novo o a partire da attività M@t.abel, sono state sperimentate nell'anno scolastico 2015/2016 in una ventina di classi coinvolgendo circa 430 ragazzi, di cui il 15% con Bisogni Educativi Speciali. La sperimentazione è stata attuata seguendo una metodologia composta di vari strumenti specifici di indagine:

- Questionario iniziale (serie di esercizi, talvolta tratti da prove INVALSI, utili per capire la conoscenza pregressa relativamente ai concetti oggetto della successiva attività)
- Attività
- Questionario finale (coincidente con il questionario iniziale, proposto con l'obiettivo di verificare se la comprensione del concetto trattato fosse cambiata significativamente)
- Questionario di gradimento (questionario, comune a tutte le attività, contenente domande riguardanti la sfera emotivo-motivazionale, proposto con l'obiettivo di capire quali fossero state le emozioni degli studenti coinvolti)
- Questionario tipo INVALSI (proposto qualche settimana dopo il termine dell'attività, contenente 3 – 4 quesiti tipo INVALSI per verificare se gli studenti hanno fatto propri i concetti introdotti).

Quadro di riferimento teorico

Nel progettare le attività, il riferimento teorico principale è stato rappresentato dal pensiero dell'educatore e pedagogista Celestine Freinet (1859-1952) e del filosofo e pedagogista statunitense John Dewey (1896-1966) i quali, seppure vivendo in contesti socio-economici e

1 Gli insegnanti che hanno partecipato al gruppo di ricerca sono: S. Abbati, B. Baldi, S. Beltramino, A. Berra, E. Calemma, A. Cena, P. Curletti, M. Dalè, A. Drivet, S. Fratti, L. Genoni, A. Ghersi, P. Gulino, C. Idrofano, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni, D. Sasso, C. Soldera, G. Trinchero, R. Valentini

2 Si rimanda all'articolo dei medesimi autori "Attività per una matematica accessibile e inclusiva – Applicazioni" apparso nel presente volume per una descrizione e una analisi più dettagliata delle attività presentate.

culturali diversi, hanno teorizzato e messo in atto dei modelli educativi che presentano molti aspetti comuni e che hanno influenzato la pedagogia moderna.

Il lavoro di Frenet parte dalla constatazione che il modello di scuola francese è anacronistico, passivo, lontano dalla realtà e quindi innaturale: si tratta di una scuola che *non prepara più alla vita; non è rivolta verso l'avvenire e neppure verso il presente*. (Freinet, 1973) Al contrario, Freinet osserva che i bambini, ancora prima di andare a scuola, imparano molte cose: a parlare, a correre, ad andare in bicicletta, … tutto questo in maniera naturale, spinti dalla curiosità e da uno slancio interiore. Il modello di scuola che Frenet propone è quindi basata sul "metodo naturale" cioè sulla predisposizione che hanno naturalmente i bambini verso il conoscere e che non può che essere fondata sull'esperienza. Quindi, così come i bambini esplorano il mondo che li circonda per tentativi e imparano dagli errori, così il processo di apprendimento dello studente deve partire dall'esperienza, che rappresenta la legge stessa della vita, procedendo per tentativi ed errori. La scuola di Freinet è una scuola che non mette al centro i libri e un sapere pre-costituito ma lo studente con le sue abilità e i suoi bisogni: *dalle sue esigenze […] deriveranno le tecniche da dominare, le materie da insegnare, il sistema di apprendimento, le modalità dell'educazione* (Freinet, 1973). Una scuola che si limiti a partire dall'insegnamento delle regole non può essere per Freinet di aiuto all'apprendimento, bensì solo di ostacolo.

Analogamente, Dewey, padre della "scuola attiva", vede come fondamento della scuola l'esperienza, strettamente collegata all'interazione con l'ambiente circostante, dove procedendo per tentativi ed errori, facendo delle ipotesi e mettendole alla prova si creano le condizioni pedagogiche che promuovono lo sviluppo del pensiero. Il modello proposto è quindi quello di una scuola in cui le classi tradizionali con gli studenti seduti ai banchi e il maestro alla cattedra vengano sostituite da laboratori in cui i ragazzi possano lavorare insieme, sviluppando naturalmente uno spirito cooperativo, e il maestro sia una guida che li aiuta e supporta nel processo di esplorazione e di apprendimento.

Le attività proposte devono stimolare l'interesse e il coinvolgimento dello studente, quindi devono partire da problemi reali e richiedere l'utilizzo di materiali della vita quotidiana. Freinet, per esempio, nelle sue classi utilizza il cosiddetto "calcolo vivente" in cui l'apprendimento della matematica è motivato dalla necessità di risolvere problemi matematici che nascono dalla vita di classe.

In tempi più recenti, lo stesso Francesco Antinucci individua nella modalità di apprendimento percettivo-motoria, che *non avviene né attraverso l'interpretazione di testi, né attraverso la ricostruzione mentale* ma *attraverso la percezione e l'azione motoria sulla realtà* (Antinucci, 2001) un efficace approccio all'apprendimento in quanto, essendo basato sull'esperienza, è naturale e spontaneo, a differenza della modalità simbolico-ricostruttiva, basata sulla decodifica dei simboli e la ricostruzione nella mente di ciò a cui essi si riferiscono, che richiede allo studente uno sforzo enorme di comprensione e concettualizzazione. Nel processo percettivo-motorio invece *la conoscenza emerge gradualmente* sotto la guida di un maestro che sia disponibile a *orientare e correggere il fare esperienziale del discente*.

Dal punto di vista cognitivo i modelli di scuola di Freinet e Dewey trovano giustificazione nella "teoria delle intelligenze multiple" di Howard Gardner il quale considera come priva di fondamento la concezione di intelligenza come un fattore unitario e misurabile e identifica invece almeno sette tipologie differenti di intelligenza (tra cui quella spaziale, quella logico-matematica, quella linguistica, quella musicale, quella cinestetica, quella intrapersonale e quella interpersonale), ognuna deputata a un differente settore dell'attività umana (Gardner, 2011). Tali diverse tipologie possono essere più o meno sviluppate in ogni studente: risulta pertanto fondamentale utilizzare diversi canali di apprendimento in modo che ogni studente possa mettere in atto le proprie abilità e sviluppare quelle carenti.

Attività inclusive

Le attività didattiche realizzate, ex-novo o a partire da quelle presenti nel piano nazionale Mat@.abel, sono il risultato di uno studio e un lavoro accurati da parte del gruppo di ricerca, che si è adoperato in ogni fase, dalla progettazione alla realizzazione in classe, affinché le attività risultassero inclusive e accessibili.

Inclusione nella… progettazione

La fase di progettazione è sicuramente il punto focale e più delicato perché un'attività possa raggiungere gli obiettivi prefissati. In questa fase il ruolo dell'insegnante nel promuovere i processi di apprendimento è cruciale: possiamo a ben ragione paragonare il suo ruolo a quello di un "ingegnere didattico". *Infatti l'insegnante progetta le situazioni e organizza il contesto in base all'argomento matematico che deve essere insegnato e alle caratteristiche degli studenti; inoltre, le interazioni della classe sono immaginate in base al "contratto didattico", che è il sistema delle aspettative, esplicite e implicite, reciproche tra l'insegnante e gli studenti riguardo alla conoscenza matematica* (Arzarello & Paola, 2007). La progettazione di un'attività, e a maggior ragione di un'attività inclusiva, non può essere qualcosa "a priori" ma, al contrario, deve essere costruita e plasmata sulla classe, sulle potenzialità degli studenti e sulle loro difficoltà.

La didattica laboratoriale, nell'accezione del Laboratorio di Matematica (UMI, 2001, UMI, 2003) è alla base della progettazione delle attività inclusive sperimentate. Tale metodologia, che trova le sue radici teoriche nell'attivismo pedagogico e nel costruttivismo, fornisce infatti una strategia di insegnamento particolarmente proficua nei confronti degli studenti con bisogni educativi e permette di creare un ambiente di apprendimento che promuove la motivazione e l'inclusione attraverso percorsi di tipo cooperativo che valorizzano le competenze di ciascuno studente.

Con "laboratorio di matematica" si *intende un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, strumenti, idee, con lo scopo principale di creare un ambiente di insegnamento–apprendimento adatto alla costruzione di significati, che è strettamente legata, da una parte, all'uso di strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni sociali che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività* (Paola, 2004). Il laboratorio può essere paragonato a una bottega rinascimentale dove l'apprendista impara facendo e vedendo fare, quindi non solo per tentativi e errori ma anche per imitazione degli altri apprendisti e del capomastro. Si tratta dunque di un ambiente in cui lo studente si mette in gioco, sperimenta con mano, costruisce il suo sapere nel confronto con gli altri compagni e viene stimolato e guidato nell'apprendimento dall'insegnante (UMI, 2001).

Il laboratorio implica un coinvolgimento percettivo-motorio e non solo intellettuale, nella consapevolezza che un approccio attivo al sapere favorisce lo studente nella fase di appropriazione e di costruzione di significatività. Diversi studi cognitivi hanno infatti mostrato l'importanza della manipolazione diretta nella costruzione dei processi di pensiero caratteristici della matematica. Pertanto, l'approccio sperimentale non può essere uno strumento occasionale e i laboratori *luoghi separati in cui rinchiudere la pratica sperimentale*. Al contrario, è necessario, in una visione globale, che *tutta la scuola diventi un "laboratorio" e che lo spirito dell'indagine passi attraverso tutte le discipline* (Fierli, 2007).

L'attività laboratoriale permette inoltre un'approccio sensato alla matematica, dove l'aggettivo "sensato" è da intendersi con un triplice significato: quello di legato all'esperienza, alla percezione, ai sensi; quello di legato allo sviluppo e all'uso del sapere teorico; e infine quello di ragionevole, ossia adeguato alle esigenze e alla situazione attuali della classe (Paola, 2004).

Le caratteriste fondamentali del Laboratorio di Matematica sono essenzialmente tre (Paola, 2004):

1) l'uso di strumenti (poveri o ricchi, tecnologici o meno) come mediatori nei processi di insegnamento–apprendimento. Tali strumenti devono essere criticamente studiati e consapevolmente utilizzati per favorire l'evoluzione dai sensi personali degli studenti (pre-concezioni, immagini mentali, significati posseduti prima dell'attività didattica) verso i significati istituzionali (obiettivi di apprendimento) individuati dall'insegnante. È pertanto necessario che gli artefatti utilizzati nell'attività didattica diventino a tutti gli effetti strumenti di insegnamento–apprendimento e che quindi le loro modalità di utilizzazione siano consapevolmente coerenti con il progetto didattico e funzionali al conseguimento degli obiettivi:

2) una "didattica lunga", volta alla costruzione di significato, ossia una didattica sensata. Per costruire significati è infatti necessario rispettare i diversi tempi di apprendimento degli studenti, lasciando loro il tempo di provare, di fare, di riflettere individualmente e in piccoli gruppi, di condividere, sotto la guida dell'insegnante, le conoscenze e i significati che via via si costruiscono ed evolvono:

3) una specifica attenzione agli aspetti legati all'interazione sociale e alla gestione delle emozioni e degli atteggiamenti degli studenti di fronte alla materia di studio e di fronte ai successi e agli insuccessi. Nel laboratorio è necessario prestare attenzione non solo alle conoscenze e alle competenze in possesso degli studenti, ma anche a come tali conoscenze e competenze vengono comunicate, discusse e condivise, nella consapevolezza che emozioni e atteggiamenti influiscono in modo sostanziale sui percorsi di insegnamento–apprendimento. Nel laboratorio è opportuno prestare attenzione ai processi di pensiero attivati dagli studenti nella risoluzione di un problema o nella sistemazione delle conoscenze più ancora che ai prodotti della loro attività. Pertanto è fondamentale che l'insegnante costruisca ambienti di apprendimento che favoriscano il coinvolgimento e la curiosità degli studenti.

Sottolineiamo che la metodologia del laboratorio non deve essere fraintesa con un approccio alla conoscenza semplificato o superficiale; rimane indubbio che *l'approccio metodologico – disciplinare costituisca le fondamenta su cui si basa l'intero edificio della conoscenza matematica e il cemento che dà unità e coerenza a tutte le sue parti* (Chiappini, 2007). Quello che cambia è la sequenza, l'ordine delle fasi di apprendimento: l'approccio metodologico disciplinare non è più il punto di partenza ma il punto di arrivo, la cui padronanza è l'obiettivo ultimo da raggiungere; si parte quindi da una forma di apprendimento-insegnamento di tipo percettivo-motorio per arrivare gradualmente e in modo sensato a una forma di apprendimento-insegnamento costruttivo-simbolico.

Il laboratorio di matematica è inoltre sempre più strettamente legato all'uso delle tecnologie informatiche, il cui uso non è da intendersi come dispensativo della conoscenza ma, al contrario, come strumento che favorisce l'investigazione della conoscenza da apprendere e coadiuva la sua costruzione attraverso un uso consapevole. La ricerca sottolinea infatti come la tecnologia possa essere efficacemente sfruttata per consentire di "instrumentare" tecniche matematiche che, con la mediazione della tecnologia, sono in grado di rendere investigabile la conoscenza da apprendere (Chiappini, 2007).

Con l'obiettivo di favorire l'inclusione di tutti gli studenti, nella attività progettate il lavoro è stato suddiviso in fasi successive, procedendo in maniera graduale e rispettando i tempi di apprendimento dei ragazzi. Inoltre, sono stati utilizzati canali di apprendimento diversi: da quello cinestetico e percettivo-motorio a quello visivo non verbale, per favorire le diverse abilità di ogni studente.

Particolare cura è stata poi rivolta nella preparazione dei materiali, quali le schede da dare agli studenti durante l'attività o da proiettare con l'uso della LIM, sia dal punto di vista della sintassi che dal punto di vista dell'aspetto grafico. In particolare, per quanto riguarda la sintassi si è ricorsi all'utilizzo di frasi brevi e semplici, che utilizzano parole di uso comune e familiari per gli studenti. Le domande sono state poste in modo semplice e chiaro, in modo che fossero davvero comprensibili a tutti. Per quanto riguarda l'aspetto grafico delle schede, si sono utilizzati caratteri grandi in stile bastone, privilegiando l'uso del maiuscolo e mettendo le parole chiave in neretto. Inoltre le consegne, spesso in colore rosso, sono state incorniciate per focalizzare l'attenzione dello studente. Si è infine fatto uso di immagini collegate al testo, eventualmente accompagnate da didascalie e dall'uso dei colori.

Inclusione nella… sperimentazione

Nella fase di sperimentazione dell'attività si è prestata particolare attenzione ad alcuni importanti aspetti: il setting della classe, ossia la disposizione dei banchi, il lavoro a coppie o a piccoli gruppi di tipo eterogeneo, l'apprendimento tra pari e, infine, la discussione, sia a piccoli gruppi che collettiva.

Setting della classe e ruolo dell'insegnante

Se la disposizione tradizionale delle classi con i banchi disposti in file rivolte verso la cattedra e l'insegnante poteva essere idonea per una lezione di tipo frontale, tale disposizione non risulta più adatta per una attività di tipo laboratoriale in quanto non facilita l'interazione tra gli studenti. È stato pertanto necessario rivedere l'organizzazione degli spazi di apprendimento partendo dall'idea, già presente in Frenet, che *la natura e il tipo di lavoro scolastico devono determinare la struttura dei locali*. In particolar modo, i banchi sono stati spesso organizzati in piccole isole disposte a "lisca di pesce", per favorire il lavoro di gruppo. Tale tipo di disposizione ha l'ulteriore vantaggio di far convergere facilmente l'attenzione verso l'insegnante, qualora necessario.

Nella didattica laboratoriale cambia infatti anche il ruolo dell'insegnante: da quello di detentore della conoscenza a quello di guida degli studenti nel processo di scoperta e di costruzione del sapere. In particolare l'insegnante diventa "direttore d'orchestra" impegnato nel coordinare gli allievi-musicanti che suonano ognuno uno strumento diverso e che costituiscono più una orchestra jazz che a un'orchestra sinfonica.

Apprendimento tra pari e lavoro a coppie/piccoli gruppi eterogenei

Nelle diverse attività sperimentate si è favorito l'apprendimento tra pari (peer education): gli alunni, divisi in piccoli gruppi, hanno interagito e collaborato tra di loro al fine di raggiungere un obiettivo comune, attraverso un lavoro di scoperta che ha portato a un apprendimento significativo. Tale strategia educativa fa infatti leva sul coinvolgimento emotivo e cognitivo del gruppo come strumento che promuove la motivazione all'apprendere.

L'importanza dell'esperienza nel gruppo quale elemento facilitatore dell'apprendimento del singolo che vi appartiene è stata più volte sottolineata anche da Vygotsky. È solo nel gruppo, infatti, che il soggetto può riscontrare e, quindi, usufruire di una "zona di sviluppo prossimale" definita come l*a distanza tra il livello attuale di sviluppo così come è determinato dal problem solving autonomo e il livello di sviluppo potenziale così come è determinato attraverso il problem solving sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci* (Vygotsky, 1980).

Tale metodologia si basa sul riconoscimento che ogni studente possiede delle proprie abilità e dei punti di forza che devono essere valorizzati e condivisi: ciascuno ha qualcosa da dare e da ricevere (Ianes & Cramerotti, 2013). Il gruppo classe è quindi una preziosa risorsa che deve essere resa attiva durante il processo di apprendimento, dal momento che l'insegnamento efficace non può ridursi a un processo di trasmissione di sapere ma richiede, al contrario, la partecipazione e la collaborazione di tutti.

L'apprendimento cooperativo può realmente creare un ambiente di apprendimento inclusivo;

infatti, ogni componente del gruppo, con le sue proprie caratteristiche, può contribuire all'apprendimento di tutti e ognuno può diventare risorsa e strumento compensativo per gli altri, con effetti positivi non solo sull'apprendimento ma anche sulla propria autostima. Lo stesso Vygotsky sostiene che il mettere insieme delle diversità, di cui ognuno è portatore, offre la possibilità a tutti di arricchirsi. Da questo punto di vista è risultato importante formare gruppi a carattere eterogeneo.

Inoltre, l'apprendimento cooperativo ha dei risvolti positivi anche sul piano sociale, infatti può migliorare e rinforzare significativamente le relazioni interpersonali tra studenti BES e gli altri studenti favorendo il rispetto reciproco e la loro inclusione nella vita di classe. Ricordiamo infine che la comunicazione tra pari è per lo studente fonte di minore ansia rispetto a quella con l'insegnante: questo aspetto favorisce la creazione di un ambiente di apprendimento più sereno e rilassato.

Discussione a piccoli gruppi e collettiva

Durante lo svolgimento delle attività si sono favorite situazioni che permettessero la discussione e il confronto all'interno dei gruppi di lavoro: attraverso domande di esplorazione presenti nelle schede stesse o attraverso domande poste dall'insegnante ai singoli gruppi. La discussione, intesa come *polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, …) che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento* (Bussi, Boni & Ferri, 1995) è infatti un aspetto molto importante nelle attività di carattere inclusivo: favorisce il confronto e il coinvolgimento di tutti gli studenti, la creazione di congetture e la loro confutazione o prova. Lo studente diventa in questo modo responsabile del suo apprendimento in una prospettiva costruttivista.

Alla fine di ogni attività o in momenti cruciali della stessa, si sono promosse discussioni collettive di bilancio con lo scopo di *valutare collettivamente le strategie usate dai singoli allievi nella soluzione di un problema e costruire (quando è possibile) una o più rappresentazioni e soluzioni condivise da tutta la classe e consistenti con quelle costruite a livello adulto per mezzo di concetti e procedure matematiche* (Bussi, Boni & Ferri, 1995).

Il ruolo dell'insegnante è stato quello di moderatore della discussione dove i protagonisti sono stati gli allievi: a lui è spettato il compito di inserire una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenzarne in modo determinante lo sviluppo attraverso i suoi interventi, orientandola verso la costruzione del sapere. Particolare attenzione è stata posta nel lasciare spazio agli studenti per esprimere le loro idee e osservazioni, ascoltando la polifonia di voci senza soffocarle nel tentativo di convogliarle rapidamente nel verso predefinito della lezione.

Questionario di gradimento

Al termine di ogni sperimentazione è stato richiesto agli studenti di compilare, in forma anonima, un "questionario di gradimento" atto a indagare gli aspetti emotivo-motivazionali che li avevano accompagnati durante lo svolgimento dell'attività.

L'interesse per tali aspetti è supportato dalla ricerca in ambito psico-pedagogico che negli ultimi anni ha dimostrato un crescente interesse rispetto alle componenti emotivo-motivazionali, in quanto è stato riconosciuto che esse contribuiscono alle ragioni che sottostanno al comportamento degli studenti di fronte all'apprendimento della matematica e aiutano quindi ad analizzare, da un'altra angolazione, le diverse difficoltà. La ricerca evidenzia come le emozioni che gli studenti provano di fronte a un problema matematico, siano esse positive o negative, e come queste vengono elaborate dall'intelligenza emotiva (Goleman, 1995) hanno una diretta influenza sulla motivazione dello studente ad apprendere. La motivazione infatti *costituisce una variabile cruciale che interviene nell'apprendimento matematico facilitando od ostacolando il* *processo di acquisizione* (Lucangeli & Fabris, 2001). L'apprendimento non coinvolge solo le capacità cognitive dello studente ma anche gli aspetti metacognitivi, le componenti emotive, la motivazione, le convinzioni, i condizionamenti culturali, il sostegno ambientale, …

Tra i diversi aspetti motivazionali coinvolti nei processi di apprendimento, e ai vissuti che si accompagnano a tale processo, sono cruciali la percezione di competenza, l'autoefficacia, lo stile attributivo e l'autostima.

È inoltre stata dimostrata l'esistenza di una correlazione tra la stima che gli studenti hanno di loro stessi, la percezione di competenza e di autoefficacia acquisiti e la performance nelle diverse aree di apprendimento (Wilson & Wright, 1993). Pertanto una indagine su come gli studenti si auto- percepiscono può permettere di individuare aspetti problematici nell'affrontare la disciplina. Sembra infatti che non sia l'attività matematica in sé a produrre stati emotivi positivi o negativi quanto piuttosto un costrutto che risente delle convinzioni del soggetto stesso su di sé e sulle proprie capacità nonché delle convinzioni indotte dall'ambiente circostante.

Riportiamo in figura 2 il testo del questionario somministrato nelle classi.

Questionario

1. Come ti è sembrata l'attività?
• Facile • Difficile • Noiosa • Interessante
•Altro: …………………………
Motiva la tua risposta
………………………………………………………………………………

2. Hai capito cosa dovevi fare?
• Sì, bene • Sì, abbastanza • No

3. Nel caso tu non abbia capito cosa dovevi fare, quale è stata la maggiore difficoltà?
……………………………………………………………………………………
…………………

4. Quale argomento è stato trattato nell'attività?
………………………………………………….
Come ti sembra ora questo argomento?
• Più chiaro di prima • Più confuso di prima
• Uguale a prima, non è cambiato niente

5. È stato utile lavorare in gruppo?
• Sì • Abbastanza • No
Motiva la tua risposta.
…………………………………………………………………

6. Ti è piaciuto questo modo di lavorare?
• Sì • Abbastanza • No
Motiva la tua risposta
…………………………………………………………………………………

7. Come ti sei sentito facendo l'attività? (Puoi mettere anche più crocette per dire come ti sentivi durante l'attività)
• Contento • Agitato • Nervoso • Arrabbiato
• Libero di esprimermi • A disagio • Tranquillo
•Altro: ………………………………………

8. Fisicamente come ti sei sentito? (Puoi mettere anche più crocette)
• Rilassato • Stavo bene • Ho avuto mal di pancia
• Ho avuto mal di testa •Mi batteva forte il cuore
• Non riuscivo a stare fermo • Teso •Altro: …………..

9. In questa attività pensi di:
• essere stato molto bravo • essere stato bravo
• aver fatto poco • non aver fatto nulla

10. Cosa ti è piaciuto in questa attività?
……………………………………………………………

11. C'è stata qualche difficoltà? Se sì quale?
…………………………………………………..

12. Cambieresti qualcosa per migliorare l'attività? Spiega cosa.
……………………..

Figura 2. Questionario di gradimento.

Analisi delle sperimentazioni

Diverse delle attività sperimentate sono state osservate da alcune tesiste del Corso di Laurea in Matematica che hanno filmato il lavoro di gruppo e i momenti di discussione e successivamente analizzato il materiale video e cartaceo raccolto (questionario iniziale e finale, schede di lavoro e questionari di gradimento).

L'analisi dei test di gradimento ha fornito un feedback positivo in merito al successo delle attività e, in particolare, all'inclusione e al coinvolgimento degli studenti: quasi la totalità degli studenti ha ritenuto utile e divertente lavorare in gruppo, dati confermati anche dall'osservazione diretta, in cui si è notato un grande coinvolgimento da parte di tutti, nessuno escluso. In particolar modo è spesso risultato difficile, per l'osservatore esterno, distinguere i ragazzi con bisogni educativi dagli altri, a testimonianza del loro coinvolgimento attivo nelle attività. Questa tesi viene confermata anche dalla percentuale molto alta di allievi che sostengono di essere stati bravi durante l'attività partecipando in modo attivo (oltre il 75% del totale), segno di una buona percezione di sé e del proprio lavoro (tabella 1).

9. In questa attività pensi di:			
essere stato molto bravo	8%	aver fatto poco	15%
essere stato bravo	75%	non aver fatto nulla	2%

Tabella 1. Domanda 9, questionario di gradimento.

Molto soddisfacenti sono anche le alte percentuali (oltre il 95%) di studenti che sostengono di aver capito la consegna e di trovare l'argomento trattato più chiaro rispetto a prima: indice della validità delle strategie adottate riguardo al design dell'attività e alle metodologie didattiche utilizzate.

Dalle risposte ottenute nei questionari di gradimento (tabella 2) possiamo constatare che le attività hanno anche favorito lo "star bene" a scuola, dal momento che le sensazioni provate sono state per lo più la tranquillità, la contentezza e la percezione di essere liberi di esprimersi. Parimenti, da un punto di vista più fisico, le risposte si sono concentrate su "rilassato" e "stavo bene".

7. Come ti sei sentito facendo l'attività?	
Contento	25%
Agitato	9%
Nervoso	5%
Arrabbiato	1%
libero di esprimermi	24%
a disagio	3%
Tranquillo	33%

8. Come ti sei sentito fisicamente?	
rilassato	33%
stavo bene	39%
mal di pancia	0%
mal di testa	0%
mi batteva forte il cuore	6%
non riuscivo a stare fermo	10%
teso	11%

Tabella 2. Domande 7 e 8, questionario di gradimento.

Per quanto riguarda l'analisi delle prove di verifica tipo INVALSI, i risultati ottenuti sono molto incoraggianti: nelle classi in esame si è notato un aumento del rendimento medio (rispetto alle classi di controllo) e, soprattutto, si è notato un miglioramento significativo da parte degli studenti BES.

Nell'impossibilità di analizzare nel dettaglio i questionari somministrati nelle varie attività, riportiamo a titolo d'esempio (figura 3) i risultati del questionario proposto al termine dell'attività "Adattamento de l'Albero maestro" in 5 classi prime della scuola secondaria di primo grado e in 3 classi di controllo (per un totale di circa 150 ragazzi coinvolti di cui 24 BES). Nelle classi di controllo, a parte un caso isolato di uno studente DSA che ha totalizzato un punteggio di 3.5/4, nessun altro BES ha oltrepassato la soglia della sufficienza (tutti punteggi pari o inferiori a 2/4). Nelle tre classi che hanno effettuato la sperimentazione, invece, molti BES hanno raggiunto la sufficienza (18 studenti su un totale di 24). Tra le insufficienze, due su sei non sono gravi (2/4 esercizi corretti) e, dato fondamentale, otto alunni con BES hanno ottenuto un punteggio pieno.

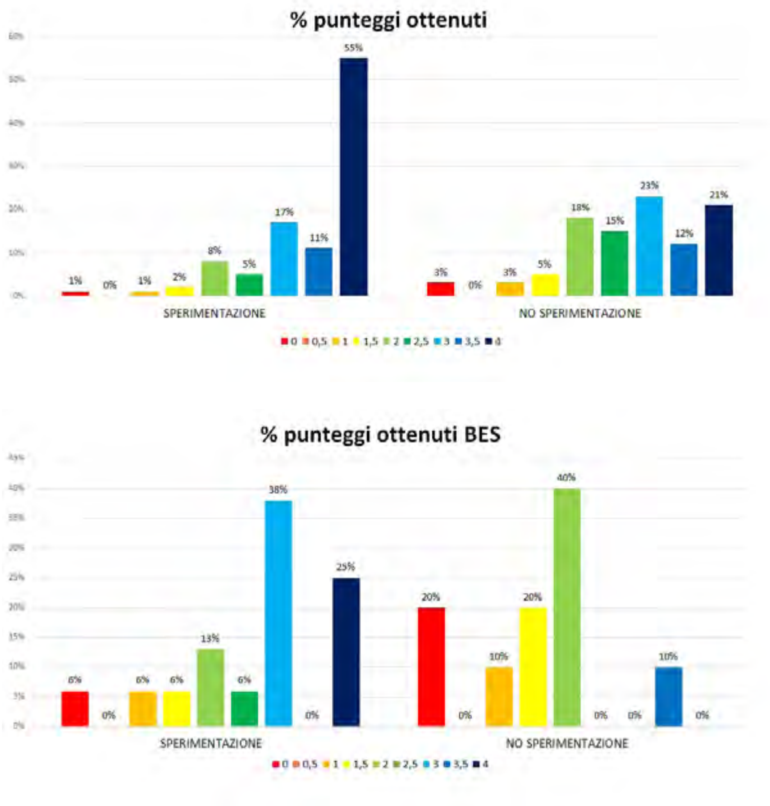


Figura 3. Risultati questionario finale.

In conclusione, i risultati ottenuti in questo primo anno di lavoro sono in generale incoraggianti e stimolano quindi il proseguimento dell'attività del gruppo di ricerca nella direzione di nuovi traguardi verso una vera inclusione.

Bibliografia

Antinucci, F. (2001). *La scuola si è rotta*. Bari: Laterza.

Arzarello, F., & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. *In Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*Vol. 2, pp. 17-24). Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. G. B., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Centro documentazione educativa.

Chiappini, G. (2007). Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la sua costruzione. *Innovazione Educativa*, ottobre 2007, 9-12.

Fierli, M. (2007). Mettere indagine e progetto al centro della didattica delle scienze. *Innovazione Educativa*, ottobre 2007, 5-6

Freinet C. (1973). *La scuola del popolo*. Roma: Editori Riuniti.

Gardner, H. (2011). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences.* Basic books.

Goleman, D. (1995). *Emotional intelligence.* Bantam Books. Trad. ita. Intelligenza emotiva. Milano: Rizzoli, 1996.

Healy, L., & Powell, A. B. (2013). Understanding and overcoming “disadvantage” in learning mathematics. *In Third international handbook of mathematics education* (pp. 69-100). New York: Springer.

Karagiannakis, G., & Baccaglini-Frank, A. (2014). *The DeDiMa battery: a tool for identifying students’ mathematical learning profiles*. Health Psychology Review, 2(4).

Ianes, D. (2005). *Bisogni educativi speciali e inclusione: valutare le reali necessità e attivare tutte le risorse*. Trento: Erickson.

Ianes, D., & Cramerotti, S. (2013). *Alunni con BES bisogni educativi speciali.* Trento: Erickson.

Ianes, D., & Macchia, V. (2008). *La didattica per i bisogni educativi speciali: strategie e buone prassi di sostegno inclusivo*. Trento: Erickson.

Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education* 47.4: 338-371.

Lucangeli, D., & Fabris, M. (2001). *Processi emotivo-motivazionali coinvolti nell’apprendimento della matematica.*

Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca, Direzione Generale per la formazione, UMI, Società Italiana di Statistica, Mathesis, Liceo SA Vallisneri (2003). *Matematica 2003. Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Paola, D. (2004). Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di Matematica. *Progetto Alice*, 5(13), 103-121.

Vygotsky, L. S. (1980). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri.

Wilson, J., & Wright, C. R. (1993). The Predictive Validity of Student Self-Evaluations, Teachers’ Assessments, and Grades for Performance on the Verbal Reasoning and Numerical Ability Scales of the Differential Aptitude Test for a Sample of Secondary School Students *Atti Ending Rural Appalachia Schools. Educational and psychological measurement,* 53(1), 259-270.

LAVORARE CON LE CONICHE PER CONOSCERLE MEGLIO

Margherita Motteran
Esperto INVALSI e INDIRE in Didattica dalla matematica
motteran_m@alice.it

Abstract: In questo lavoro si propongono due attività di laboratorio finalizzate ad approfondire la conoscenza delle sezioni coniche utilizzando il software GeoGebra. Nella prima, si accompagnano gli studenti della scuola secondaria di secondo grado alla scoperta dell'equazione generale delle coniche, evidenziando che ellisse, iperbole e parabola fanno parte della stessa famiglia di curve. Nella seconda, si intendono scoprire assieme agli studenti le proprietà focali delle coniche e si descrivono alcune utili applicazioni.

In this paper we propose two laboratory activities targeted to improve the knowledge of conic sections, using the software GeoGebra. In the first one, we will accompany the students of the secondary school of second degree to the discovery of the general equation of the conic sections, pointing out that ellipse, hyperbola and parabola belong to the same family of curves. In the second one, we intend to introduce the students to the study of the focal properties of conic and describe some useful applications.

Introduzione

Un obiettivo perseguito costantemente dalla ricerca matematica è la costruzione di modelli unificanti, all'interno dei quali possano essere studiati problemi a prima vista diversi tra loro.

L'ellisse, l'iperbole e la parabola furono scoperte da Menecmo, un matematico greco del quarto secolo a. C. allievo di Eudosso, che, per risolvere il problema della duplicazione del cubo, studiò le proprietà delle intersezioni fra un cono circolare retto e un piano. Dopo circa un secolo e mezzo, le conoscenze teoriche sviluppate dai matematici greci vennero organizzate e arricchite negli otto libri delle "Coniche" di Apollonio Rodio, autore dei termini "ellisse", "parabola" e "iperbole", che, derivando tutte le sezioni coniche da un unico cono circolare retto a doppia falda, propose una teoria generale che le riguardava tutte. Molti secoli dopo, Descartes (La Géometrie, 1637) affermò che sono "curve geometriche" quelle che possono essere espresse da una sola equazione algebrica in x e y e pochi anni più tardi (1655) John Wallis, un matematico inglese, affermò che le curve corrispondenti a equazioni di secondo grado in x e y sono le coniche, già definite geometricamente, introducendo così la definizione moderna di conica come luogo di punti del piano le cui coordinate soddisfino a un'equazione di secondo grado in due variabili. Una conferma ulteriore dei legami esistenti fra ellisse, iperbole e parabola si può riscontrare anche nelle analogie fra le loro proprietà focali.

Molti studenti della scuola secondaria di secondo grado non acquisiscono una visione unitaria di queste curve e pensano che l'ellisse, la parabola e l'iperbole siano oggetti matematici senza connessioni tra loro. Ciò è probabilmente da imputarsi al fatto che li studiano come luoghi geometrici distinti, dei quali ricordano solo le diverse equazioni canoniche presenti nei manuali. L'equazione generale delle coniche è presente soltanto in alcuni manuali di matematica del triennio della scuola secondaria di secondo grado, ove spesso è proposta senza un adeguato percorso introduttivo. Per quanto riguarda le proprietà focali delle coniche, esse sono poco conosciute nella scuola secondaria di secondo grado, anche perché spesso manca il tempo per trattarle adeguatamente in classe.

Con due attività di laboratorio abbastanza semplici, utilizzando il software GeoGebra, si possono accompagnare gli studenti a scoprire l'equazione generale e le proprietà focali delle coniche. Prerequisito necessario per realizzarle è la conoscenza delle equazioni canoniche di tali curve.

Prima attività: Alla scoperta dell'equazione generale delle coniche.

- Si apre GeoGebra (Vista Algebra), si inserisce l'equazione canonica di un'ellisse, ad esempio $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Si ottengono l' equazione e il grafico rappresentati nella Figura 1.

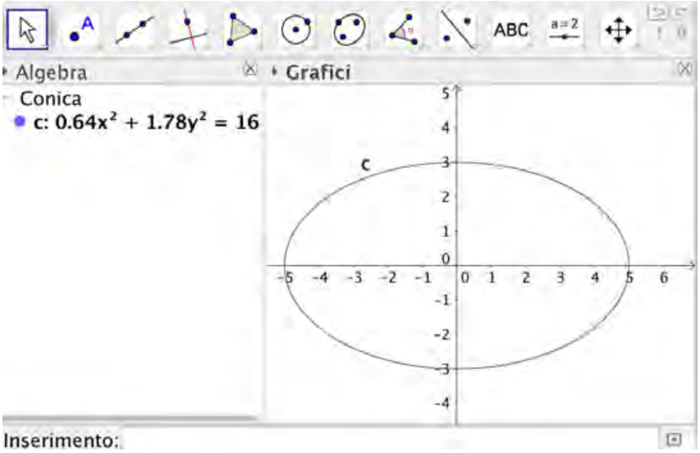


Figura 1: Output dell' ellisse

Si chiede agli studenti come mai in "Vista Algebra" si legge l'equazione: $0.64x^2 + 1{,}78y^2 = 16$. L'equazione scritta inizialmente è riportata nella icona delle "Proprietà"(Figura 2).

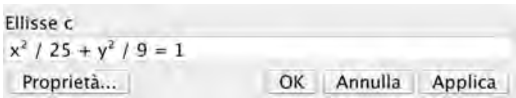


Figura 2: Proprietà dell'ellisse

Se gli studenti sembrano incerti sulla risposta da dare l'insegnante suggerisce di dividere tutti i coefficienti per 16. Calcolando i reciproci dei coefficienti trovati si ritrova l'equazione canonica, che l'insegnante scrive alla lavagna unitamente a quella letta in "Vista Algebra".

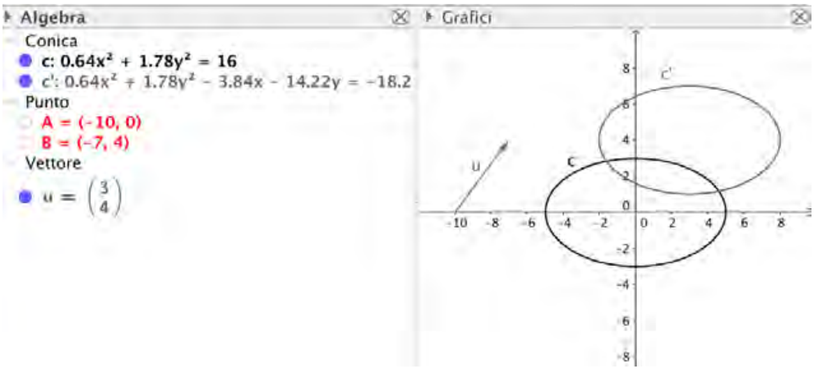


Figura 3: Output dell' ellisse traslata

- Si trasla, quindi, la conica secondo un vettore, nell' esempio il vettore $u = (3,4)$, ottenendo le equazioni e il grafico rappresentati nella Figura 3.

Come mai nell'equazione: $0.64x^2 + 1{,}78y^2 - 3{,}84x - 14{,}22y = -18{,}2$ ci sono termini di primo grado? Si può osservare che l'equazione dell'ellisse traslata è: $0.64(x-3)^2 + 1{,}78(y-4)^2 = 16$, e contiene certamente termini di primo grado..

- Ora si ruota di 30° in senso antiorario l'ellisse rappresentata nella Figura 1, ottenendo le equazioni e il grafico rappresentati nella Figura 4.

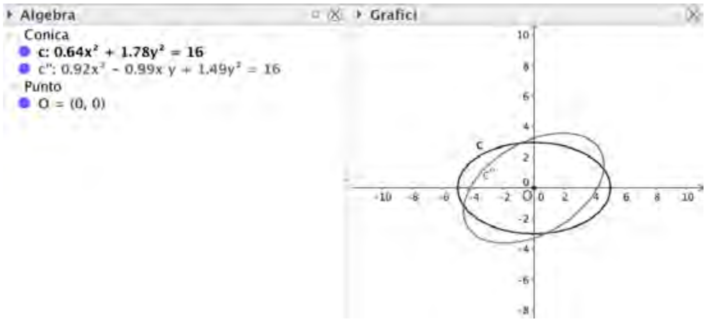


Figura 4: Output dell' ellisse rutata di 30° in senso antiorario

Come mai nell'equazione di *c*" non ci sono termini di primo grado?

In una classe si è provato a ricavare l'equazione di *c"*, perché le coordinate dei fuochi $F(-2\sqrt{3}, -2)$ e $F'(2\sqrt{3}, 2)$ si determinano facilmente. La semplificazione della formula:

$$\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+(y+2)^2}+\sqrt{\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+(y-2)^2}=10$$

richiede abbastanza tempo: perché non riflettere, invece, sulle simmetrie di *c*? Anche *c"* è simmetrica rispetto all'origine; la sua equazione, quindi, non poteva contenere termini di primo grado. Perché?

Si copia sulla lavagna l'equazione di *c*" riportata in Vista Algebra.

Si continua l'attività, traslando *c*" secondo un vettore, nell' esempio il vettore $u = (6,5)$. Si ottengono le equazioni e il grafico rappresentati nella Figura 5.

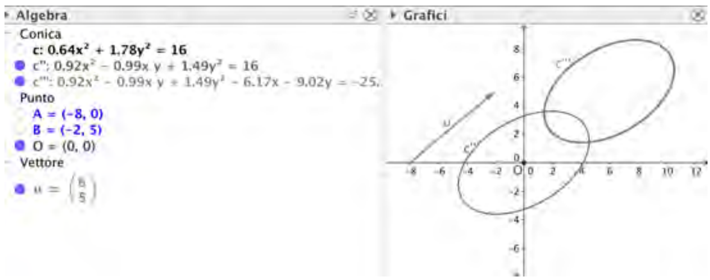


Figura 5: Output dell' ellisse rutata e traslata

Si copia sulla lavagna anche l'equazione di *c"'*.

- L'insegnante chiede se una circonferenza può essere considerata una particolare ellisse. Si decide che lo è e si scrive alla lavagna l'equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$.

Sulla lavagna si leggono queste equazioni:

ELLISSE $c: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $c: 0,64x^2 + 1,78y^2 = 16$

$c': 0,64x^2 + 1,78y^2 - 3,84x - 14,22y = -18,2$

$c'': 0,92x^2 - 0,98xy + 1,49y^2 = 16$

$c''': 0,92x^2 - 0,99xy + 1,49y^2 - 6,17x - 9,02y = -25,05$

una circonferenza: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$

Figura 6: Equazioni di ellissi

- L'insegnante propone di inserire in un file GeoGerbra l'equazione canonica di un'iperbole con i fuochi sull'asse delle ascisse, ad esempio: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Si ottengono l' equazione e il grafico rappresentati nella Figura 7.

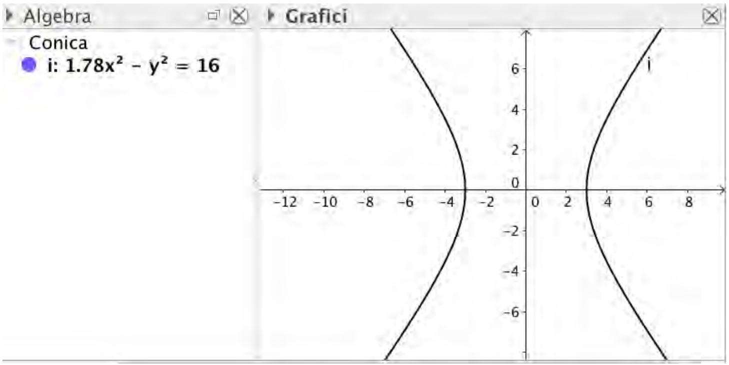


Figura 7:Output dell' iperbole

Si scrivono sulla lavagna l'equazione canonica dell'iperbole e quella presente in Vista Algebra.

- L'insegnante chiede quali termini ci dovrebbero essere nell'equazione della conica ottenuta traslando l'iperbole i, ad esempio secondo il vettore n (3,4). La risposta ora è facile e trova conferma in Vista Algebra di GeoGebra (Figura 8).

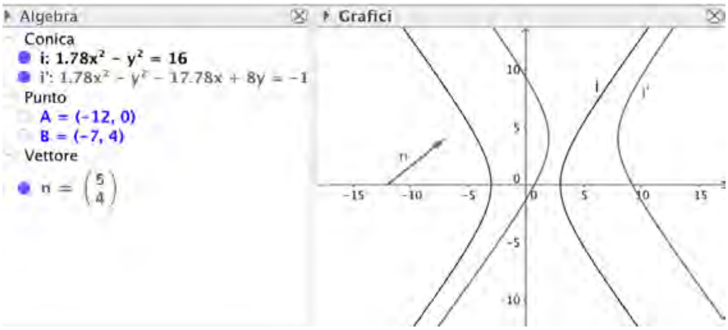


Figura 8: Output dell' iperbole traslata

Si scrive sulla lavagna l'equazione riportata in Vista Algebra.

- L'attività prosegue chiedendo agli studenti da quali termini dovrebbero essere formate le equazioni dell'iperbole i", ottenuta ruotando i di 30° attorno all'origine, e dell'iperbole i"' ottenuta traslando i". Dopo l'applicazione di ogni trasformazione, si confrontano le risposte con la Vista Algebra di GeoGebra (figure 9 e 10) e si scrivono sulla lavagna le equazioni scritte sullo schermo.

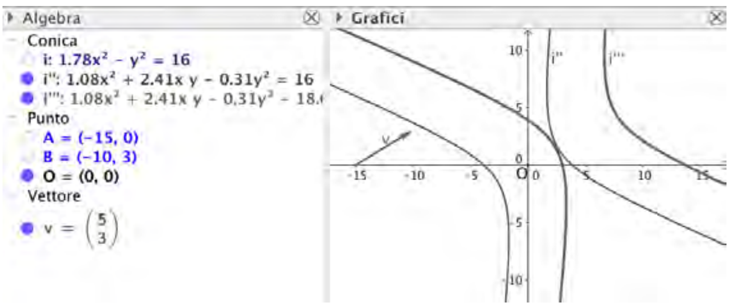


Figura 9: Output dell'iperbole traslata

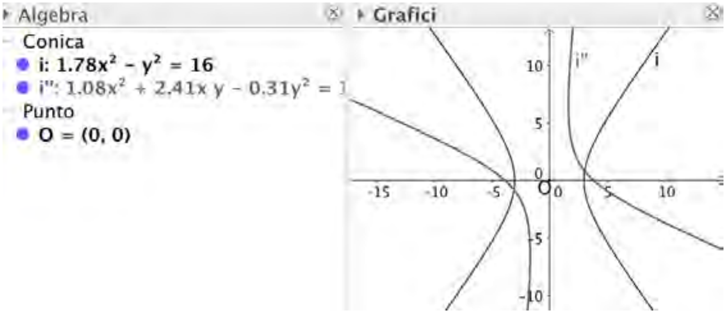


Figura10: Output dell' iperbole traslata e ruotata

- L'attività continua, inserendo in un file GeoGebra l'equazione di una parabola p con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, ad esempio: $y = x^2 - 3x + 2$. Traslandola, ad esempio secondo il vettore $w = (-2, -4)$, si ottiene la parabola p' rappresentata in Figura 11 e, ruotandola di 30° in senso orario attorno all'origine, si ottiene quella disegnata nella Figura 12.

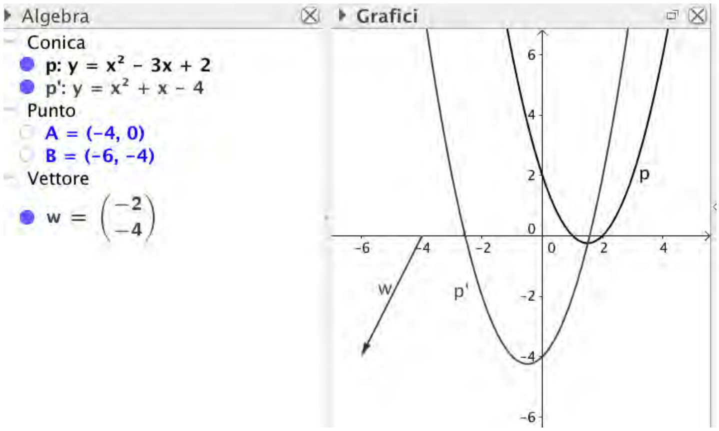


Figura11: Output della parabola traslata

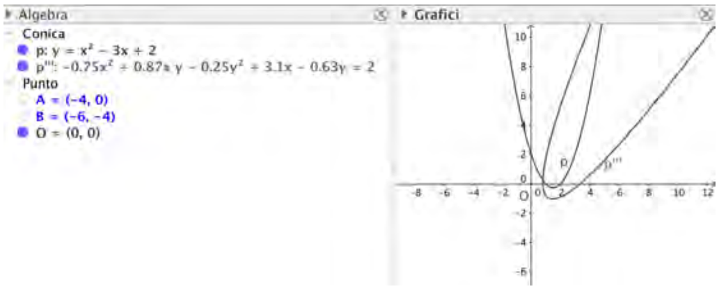


Figura12: Output della parabola ruotata

- Si copiano sulla lavagna le tre equazioni rappresentate nelle Figure 11 e 12.
- Si confrontano le equazioni scritte sulla lavagna (Figura 13).

ELLISSE $c: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $c: 0{,}64x^2 + 1{,}78y^2 = 16$

$c': 0{,}64x^2 + 1{,}78y^2 - 3{,}84x - 14{,}22y = -18{,}2$

$c'': 0{,}92x^2 - 0{,}98xy + 1{,}49y^2 = 16$

$c''': 0{,}92x^2 - 0{,}99xy + 1{,}49y^2 - 6{,}17x - 9{,}02y = -25{,}05$

una circonferenza: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$

IPERBOLE $i: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; $i = 1{,}78x^2 - y^2 = 16$

$i': 1{,}78x^2 - y^2 - 17{,}78x + 8y = -12{,}44$

$i'': 1{,}08x^2 + 2{,}41xy - 0{,}31y^2 = 16$

$i''': 1{,}08x^2 + 2{,}41xy - 0{,}31y^2 - 18{,}05x - 10{,}19y = -44{,}42$

PARABOLA $p: y = x^2 - 3x + 2$

$p': y = x^2 + x - 4$

$p''': -0{,}75x^2 + 0{,}87xy - 0{,}25x^2 + 3{,}1x - 0{,}63y = 2$

Figura 13: Equazioni di coniche

Sono tutte equazioni di secondo grado in *x* e *y*, con numero di termini diverso. Si concorda che l'equazione più generale è quella che contiene tutti i termini possibili. Essa si può scrivere nella forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si osserva che la mancanza di qualche termine nell'equazione di una conica dipende dalla specificità della curva e dalla sua posizione nel piano cartesiano.

L'insegnante chiede quanti punti sono necessari per individuare una conica. Nelle classi, qualcuno ha risposto che bastano tre punti, per altri ne servono sei, ma, poiché uno dei coefficienti è definito a meno di una costante moltiplicativa, si è concluso che ne sono necessari 5.

- Uno degli strumenti di costruzione di GeoGebra è, infatti *conica per cinque punti.*

Applicandolo, si può ottenere, ad esempio, un'ellisse (Figura 14). Aumentando l'ordinata del punto *B*, la curva cambia e, dopo un po', si vede un'iperbole (Figura 15). Perché?

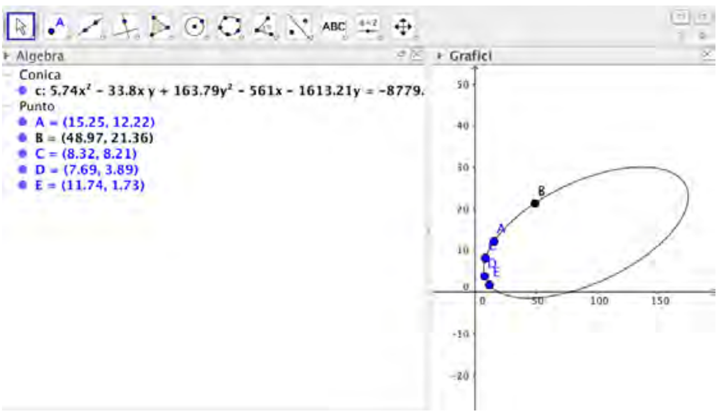


Figura14: Ellisse per 5 punti

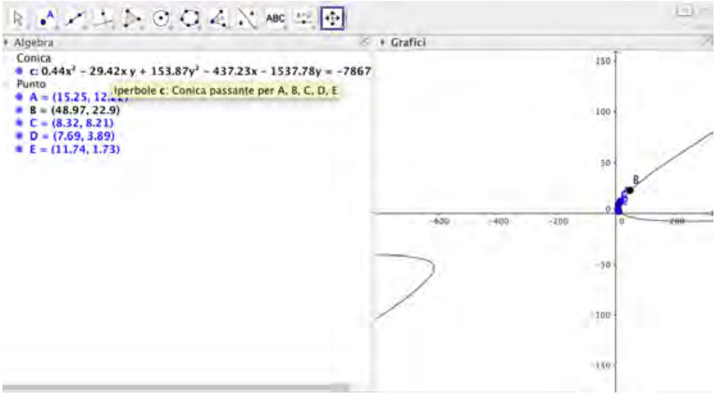


Figura15: Iperbole per 5 punti

L'insegnante introduce l'asserzione di Keplero (1604, Astronomiae pars Optica) che immaginò, tenendo fisso uno dei fuochi di un'ellisse, di far andare l'altro all'infinito, muovendolo lungo l'asse focale. Secondo l'astronomo, l'ellisse diventa una parabola e, facendolo poi ricomparire dall'altra parte rispetto al fuoco rimasto fisso, si ottiene un'iperbole. Cosa accade ai fuochi dell'ellisse quando si sposta il punto B? Perché in Vista Grafica è difficilissimo, forse impossibile, mostrare la parabola?

- Cosa si vede in Vista Grafica se tre dei punti utilizzati sono allineati? Compare una conica degenere. Se i punti non allineati sono quattro in Vista Algebra si legge "c non definito".

Seconda attività: Alla scoperta delle proprietà focali delle coniche.

Proprietà focali dell'ellisse

- Si apre GeoGebra (Vista Algebra) e si inserisce l'equazione canonica di un'ellisse, ad esempio $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Si tracciano la retta *t*, tangente all'ellisse in un suo punto *A*, la semiretta *n* perpendicolare a *t* in *A* e la semiretta *AF* di origine *A* e passante per il fuoco *F* dell'ellisse.

Si traccia la semiretta *s'*, simmetrica di *s* rispetto a *n*. Si nota che *s*' passa per il fuoco *F'* dell'ellisse (figura 16).

Si verifica che, spostando il punto *A* sull'ellisse, la semiretta s', simmetrica di *s* rispetto alla semiretta *n*, passa sempre per il fuoco *F*' dell'ellisse (Figura 17).

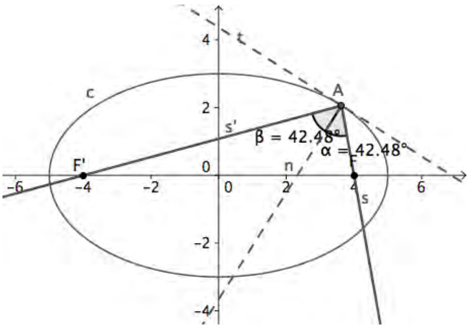


Figura 16 : Proprietà focali dell'ellisse

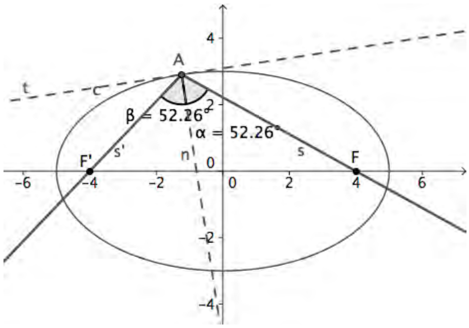


Figura17: Proprietà focali dell'ellisse

In altri termini, la perpendicolare alla tangente a un'ellisse in un suo punto *A* (detta la perpendicolare all'ellisse in *A*) è bisettrice dell'angolo formato dalle due semirette con origine in *A* e passanti per i fuochi della curva, indipendentemente dalla posizione di *A*. Ne consegue, per le leggi della riflessione, che un fascio di raggi con origine in uno dei fuochi di uno specchio ellittico viene riflesso sull'altro fuoco, come si può evidenziare spostando il punto *A* (Figura 18).

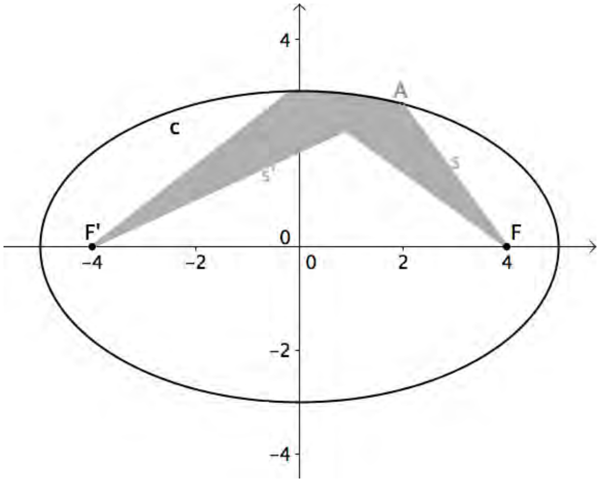


Figura18: Schema della riflessione in uno specchio ellittico

Proprietà focali dell'iperbole

- Si inizia scrivendo nella barra di inserimento di GeoGebra l'equazione di un'iperbole *i*, nel nostro esempio: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, e si evidenziano i fuochi *F*(10,0) ed *F'*(−10,0). Si tracciano la retta *t*, tangente all'iperbole in un suo punto *A*, la semiretta *n* perpendicolare a *t* in A e la semiretta *AF* di origine *A* e passante per il fuoco *F* dell'iperbole. Si costruiscono la semiretta *r'* simmetrica di *r* rispetto ad *n* e, infine, la semiretta *r"* simmetrica di *r'* rispetto al punto *A*. Si nota che r" passa per F' (Figura 19). Si verifica che, spostando il punto *A* sull'iperbole, la semiretta *r"*, passa sempre per il fuoco *F'* dell'iperbole (Figura 20).

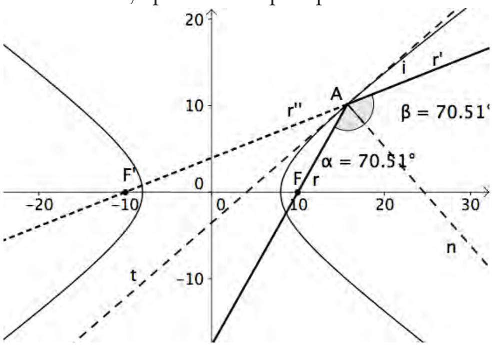


Figura 19 : Proprietà focali dell'iperbole

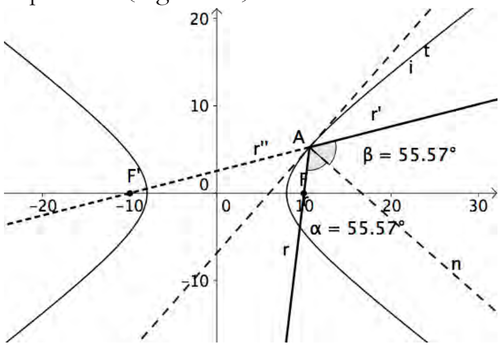


Figura 20: Proprietà focali dell'iperbole

- Cosa accade se ripetiamo la costruzione iniziando con una semiretta con l'origine in un punto *A* dell'iperbole e tale che il suo prolungamento passi per uno dei fuochi? Si può rispondere ragionando sulle costruzioni precedenti ma è utile riferirsi alla rappresentazione grafica di Figura 21.

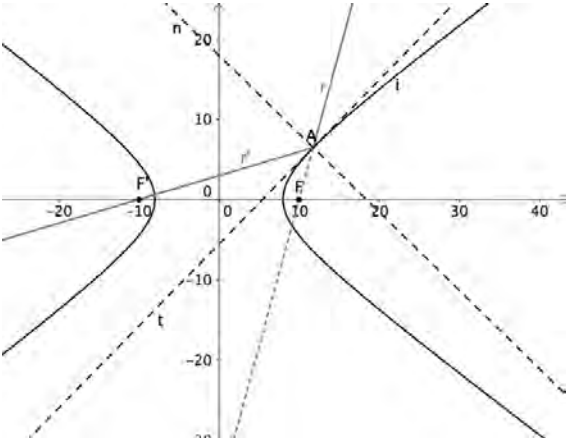
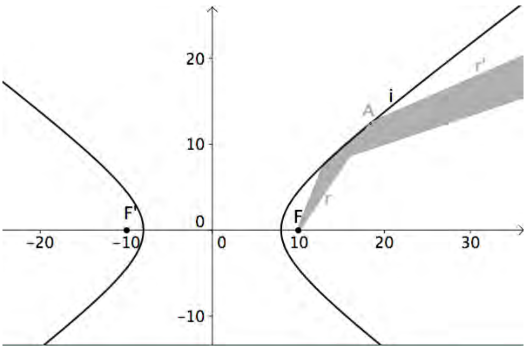


Figura 21: Proprietà focali dell'iperbole

Si nota che la semiretta simmetrica di *r* rispetto ad *A* passa per il fuoco interno all'altro ramo dell'iperbole, indipendentemente dalla posizione di *A* sulla curva.

Si ragiona sulle figure, si traccia qualche altro disegno e si conclude che, se *s* è la retta passante per un punto *A* e per uno dei fuochi di un'iperbole ed *s'* è la retta passante per *A* e per l'altro fuoco, la retta passante per *A* e perpendicolare all'iperbole è bisettrice di due angoli opposti formati dalle due rette.

- Ricordando le leggi della riflessione, se i rami di un'iperbole fossero riflettenti, cosa avverrebbe di un raggio luminoso con origine nel fuoco *F* che incidesse il ramo di destra dell'iperbole (Figura 20)? Come per l'ellisse, applicando il comando "Traccia" al punto *A* e alle semirette *r* ed *r'*, si può schematizzare come vengono riflessi da uno specchio iperbolico un fascio di raggi con l'origine in uno dei fuochi (Figura 22) e uno che incida l'iperbole e sia tale che i prolungamenti dei suoi raggi passino per uno dei fuochi dell'iperbole (Figura 23)



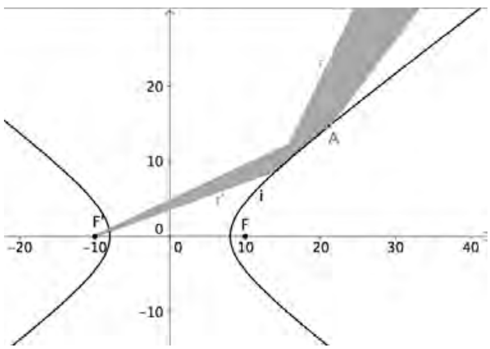


Figure 22 e 23: Schemi della riflessione in uno specchio iperbolico

Nella Figura 22 si nota che il fascio riflesso non converge sul fuoco *F'*, perché su questo punto convergono i prolungamenti dei raggi riflessi. Nella Figura 23, invece, il fascio incidente è tutto esterno alla parte di piano contenente i fuochi della curva e il fascio riflesso converge sul fuoco interno al ramo non toccato dal fascio incidente.

Proprietà focali della parabola

- La ricerca delle proprietà focali della parabola può sembrare più complicata che per l'ellisse ma, ricordando l'idea di Keplero, possiamo vedere la parabola come un caso limite di un'ellisse, nella quale uno dei fuochi sia così lontano dall'altro che la semiretta s passante per il punto A della parabola e il fuoco estremamente lontano risulti parallela all'asse della parabola. Proviamo a verificare cosa accade se iniziamo la nostra ricerca costruendo una parabola *p* e una retta *s* passante per il punto *A* e parallela all'asse della parabola. Si prosegue tracciando la retta *t* tangente a *p* in *A* e la retta *n* passante per *A* e perpendicolare a *p*. Si traccia, infine, la retta *s'* simmetrica di *s* rispetto a *n*. Si vede che *s'* passa per il fuoco *F* della parabola (Figura 24).

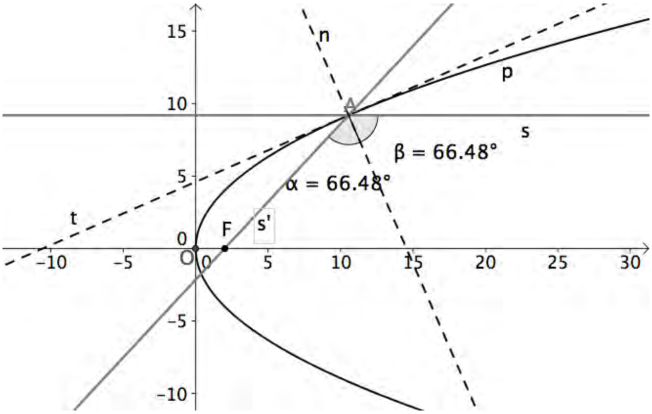


Figura 24: Proprietà focali della parabola

Si verifica che questo avviene indipendentemente dalla posizione di *A* sulla parabola.

Riflettendo sulle evidenze emerse, si conclude che, se *s* è la retta passante per un punto di una parabola *p* e parallela all'asse della curva ed *s'* è la retta passante per *A* e per il fuoco di *p*, la retta passante per *A* e perpendicolare alla parabola è bisettrice di due degli angoli opposti formati dalle due rette, mentre la tangente in *A* alla parabola è bisettrice degli altri due.

- Se un arco di parabola è riflettente, cosa avviene di un raggio luminoso con origine nel fuoco *F* che incida la parabola? Si verifica che in uno specchio parabolico un fascio di raggi paralleli all'asse si riflette concentrandosi sul fuoco, mentre uno emesso da una sorgente posta sul fuoco dopo la riflessione si trasforma in un fascio di raggi paralleli all'asse (Figura 25).

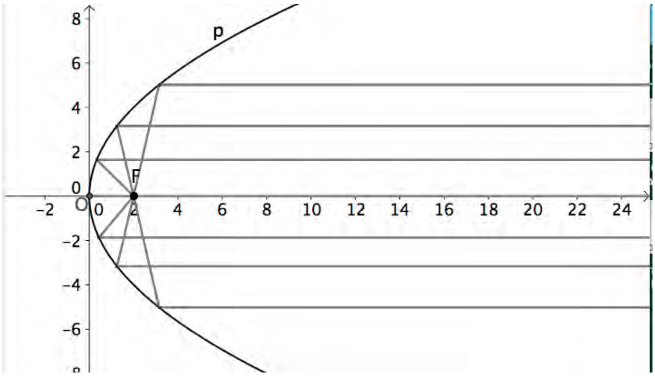


Figura 25: Schema della riflessione in uno specchio parabolico

Qualche applicazione delle proprietà focali delle coniche

Le proprietà focali delle coniche sono state applicate nella costruzione di manufatti fin dall'età ellenistica. L'esempio più insigne è il faro di Alessandria d'Egitto, costruito verso il 280 a.C. Di esso, distrutto nel 1480, ci restano soltanto descrizioni di storici arabi ma, sulla base della destinazione dell'opera e delle conoscenze tecnologiche dell'epoca, possiamo ritenere che il riflettore fosse stato ottenuto utilizzando uno specchio parabolico. Gli studenti forse non ci pensano ma le proprietà focali della parabola sono state utili anche per costruire il faro della loro bicicletta…

Citiamo due altri esempi di applicazione di tali proprietà, che forse sono meno noti di altri.

- Ogni telescopio Cassegrain contiene uno specchio parabolico e uno iperbolico.

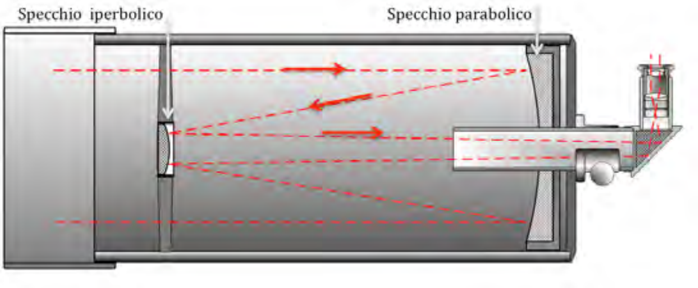


Figura 26: Schema di un telescopio Cassegrain

Il paraboloide concentra i raggi paralleli all'asse del paraboloide in un unico fuoco al finito del paraboloide, che coincide con uno dei fuochi dell'iperboloide à lo specchi iperbolico li riflette (cfr. Figura 26) e, concentrando tutti questi raggi nell'altro fuoco al finito dell'iperboloide, li manda nel sistema ottico utilizzato per analizzarli.

- Nei riflettori ellittici, ogni raggio luminoso emesso in uno dei due fuochi, anche se molto debole, genera un raggio riflesso che passa per l'altro fuoco (Figura 27). Le onde luminose riflesse dallo specchio ellittico percorrono tutte la stessa distanza e giungono contemporaneamente (in fase) all'altro fuoco.

Nelle lampade come quella rappresentata in Figura 28, si collocano oltre 20 riflettori ellittici. Sono strumenti complessi che consentono al chirurgo di variare il campo luminoso, senza alterare l'intensità della luce

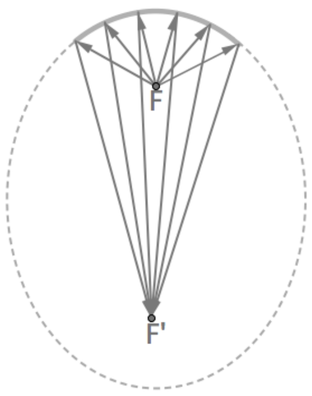


Figura 27: Riflessione con specchio ellittico

Figura 28: Lampada medicale

Appunti

Le attività laboratoriali proposte in questo lavoro sono state presentate durante un corso di formazione diretto a docenti di matematica. Esse offrono spunti per stimolare la riflessione e la partecipazione attiva degli studenti, ai quali si chiede anche di formulare congetture, ovvero di operare come è spesso avvenuto in matematica, dove le congetture hanno preceduto le dimostrazioni. Agli insegnanti è affidato il compito di sottolineare che le congetture non sono dimostrazioni.

Questi materiali sono stati messi a disposizione dei partecipanti al corso, come spunti da utilizzare adattandoli alla loro programmazione didattica. Ai docenti è stato consigliato di porre domande e, per quanto possibile, di lasciare i propri studenti liberi di scegliere arbitrariamente le equazioni da inserire e le traslazioni o le rotazioni da applicare, al fine di ottenere un maggior numero di esempi da confrontare.

L'ultimo incontro si è svolto a qualche mese di distanza dai precedenti ed è stato destinato a una riflessione collettiva sulle attività svolte in classe. Alcuni docenti hanno utilizzato tutti questi spunti, altri no. Nella maggior parte delle classi sono state poste domande mirate, alcune delle quali sono riportate in questo lavoro. In alcune classi è stata proposta anche una dimostrazione sintetica di una delle proprietà focali delle coniche, in altre si è dato un poco di spazio allo sviluppo storico della conoscenza delle sezioni coniche o della tecnologia che ne ha applicato le proprietà.

Bibliografia

Bottazzini, U. Freguglia, P. Toti Rigatelli, L. (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Firenze: Sansoni.

Boyer , C. B. (1980). *Storia della matematica*. Milano: Arnoldo Mondadori.

Kline, M. (1991). *Storia del pensiero matematico*. Torino: Giulio Einaudi.

Loria, G. (1987). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano: Istituto Editoriale Cisalpino-Goliardica.

Russo, L. (2003). *La rivoluzione dimenticata*. Milano: Feltrinelli

Stillwell, J. (2002). *Mathematics and its History*. New York: Springer

L'APPRENDIMENTO ATTRAVERSO LA 'LOGICA DELLA RICERCA': UN'ANALISI DI ATTIVITÀ-GIOCO DI GEOMETRIA ELEMENTARE ALL'INTERNO DI AMBIENTI DI GEOMETRIA DINAMICA

Carlotta Soldano[1], Daniele Manzone[2]
Università degli Studi di Torino[1], Scuola Sec. di 1° grado Emanuele Artom[2]
carlotta.soldano@gmail.com

Abstract

Lo studio si focalizzerà sulle attività-gioco costruite per la scoperta di alcuni teoremi di geometria elementare sulla posizione reciproca tra due circonferenze e sull'analisi dei processi cognitivi messi in atto dagli studenti della scuola secondaria di primo grado coinvolti nelle sperimentazioni. Ciascuna attività-gioco è costituita da un file GeoGebra contenente il gioco e da un questionario volto a guidare gli studenti nell'investigazione delle proprietà geometriche. Il gioco, coinvolgendo una figura geometrica dinamica e parametri e variabili numeriche associate ad essa, promuove la coordinazione dell'informazione grafica e numerica e la conversione tra i due registri semiotici. Con lo svolgimento in prima persona dell'attività, nella fase di gioco e nella successiva riflessione sui significati, gli studenti sono protagonisti della scoperta del teorema matematico e della ricerca della veridicità delle relazioni geometriche, si formano opinioni situate che permettono la loro partecipazione attiva al dialogo educativo, con i docenti e soprattutto tra pari nel lavoro in gruppo, e producono esempi e controesempi significativi. Attraverso l'analisi del dialogo e degli esempi prodotti da tre studenti coinvolti nella sperimentazione, verrà messo in luce l'influenza di questo approccio sul modo di ragionare e di argomentare degli studenti.

Introduzione

Lo sviluppo di competenze logico-argomentative è fondamentale per la formazione e lo sviluppo cognitivo degli studenti. Grazie ad esse è possibile, non solo sostenere le proprie tesi e valutare criticamente le tesi altrui, ma anche comprendere il pensiero scientifico e matematico. Numerose ricerche in didattica della matematica si sono occupate delle difficoltà riscontrate dagli studenti nell'approccio alla dimostrazione e hanno evidenziato come il senso della dimostrazione sia una delle principali difficoltà in ambito matematico. Le rilevazioni nazionali e internazionali (INVALSI, TIMSS), mostrano che gli studenti italiani sono molto deboli nella formulazione di risposte aperte, ossia di quelle risposte che necessitano la capacità di produrre argomentazioni. Riflettere su come ragioniamo o come dovremmo ragionare, può aiutare gli studenti nell'approccio al pensiero matematico teorico. Gli studi sviluppati da J.Hinitkka (1998, 1999), logico e filosofo finlandese, mostrano che le logiche attivate in alcune situazioni di indagine nella vita quotidiana, quelle attivate dai detective nelle loro ricerche e quelle che caratterizzano i giochi di interazione strategica, condividono le basi epistemologiche della logica matematica classica. Egli chiama *Logica della Ricerca* (Logic of Inquiry) la logica che caratterizza tali attività e mostra la sua coerenza con la logica matematica classica. A partire da essa, Hintikka sviluppa la *Semantica della Teoria dei Giochi* che permette di interpretare attraverso *giochi semantici* le formule logiche-matematiche. Ad esempio la formula logica viene interpretata attraverso un gioco semantico in cui un giocatore, detto *falsificatore*, sceglie un valore per la variabile e il suo avversario, detto *verificatore*, deve trovare un valore per la variabile tale per cui risulti vera. La dinamica sviluppata in questo gioco semantico costituisce un test di validità della formula se, per ogni situazione che il falsificatore può presentare al verificatore, quest'ultimo ha comunque la possibilità di trovare un valore che la verifichi. La verità della formula matematica è stabilita dall'esistenza di una strategia vincente per il verificatore, mentre la sua falsità è determinata dall'esistenza di una strategia vincente per il falsificatore.

Nella sperimentazione in classe, la logica della ricerca viene presentata agli studenti in modo informale, attraverso l'analisi di un episodio relativo al famoso detective Sherlock Holmes[1]. In primo luogo, il ragionamento di Sherlock Holmes viene analizzato mettendo in luce le sue domande implicite, i fatti da lui osservati e già conosciuti, le ipotesi formulate per collegare i fatti. Successivamente, il ragionamento del detective viene ricostruito in forma deduttiva: le ipotesi che costituisco la probabile spiegazione dei fatti osservati e noti vengono assunte come premesse da cui è ragionevole "dedurre" i fatti osservati. Particolare cura viene conferita all'osservazione che Sherlock, nella formulazione delle sue ipotesi, può sbagliarsi e che quindi le sue deduzioni hanno solamente un certo grado di probabilità di essere vere.

Illustriamo quanto spiegato facendo riferimento ad un dialogo estratto dal primo episodio di una serie televisiva britannica che reinterpreta in chiave moderna le avventure del detective Sherlock Holmes. Il dialogo si sviluppa tra John Watson e Sherlock Holmes il giorno successivo al loro primo incontro avvenuto nel laboratorio di medicina dell'università di Bart. Fin dal primo momento in cui si sono conosciuti, Sherlock sembra sapere già moltissimi dettagli della vita personale di Watson, in particolare sa che Watson è un medico militare che ha combattuto in Afghanistan o Iraq. Questo fatto sorprende Watson che desidera sapere come l'investigatore sia riuscito a scoprirlo.

> *Sherlock:* Quando ci siamo conosciuti prima e le ho chiesto Afghanistan o Iraq lei mi è parso sorpreso
>
> *John:* Come lo sapeva?
>
> *Sherlock:* Non lo sapevo l'ho capito! Il taglio di capelli e il portamento tipicamente militari e la frase che ha detto appena entrato nella stanza "è molto diverso dai miei tempi", indicava i suoi studi alla Bart, quindi un medico militare è ovvio. Ha il volto e le mani abbronzate, ma non oltre i polsi. È stato all'estero ma non per vacanza. Zoppica quando cammina ma non chiede una sedia per riposare quando è fermo. Come se se ne dimenticasse quindi è almeno parzialmente psicosomatico. Il che significa che le circostanze della ferita sono state traumatiche quindi significa che è rimasto ferito in missione. Ferito in missione, abbronzato quindi significa Afghanistan o Iraq.

<table>
<tr><th>Modo di ragionare di Sherlock</th><th>Ricostruzione in forma deduttiva</th></tr>
<tr><td>Domanda implicita:
Chi è quest'uomo?</td><td rowspan="4">Se Watson è un militare
allora è ragionevole che abbia un taglio di capelli molto corto e un portamento eretto

Se Watson è un dottore
allora è ragionevole che entrando in un laboratorio di medicina dell'università di Bart dica "è molto diverso dai miei tempi"

Se Watson è stato recentemente in Afghanistan o Iraq
allora è ragionevole che sia stato ferito</td></tr>
<tr><td>Fatti osservati:
taglio dei capelli; portamento; infortunio alla gamba; abbronzatura non oltre i polsi; fase pronunciata "è molto diverso dai miei tempi"</td></tr>
<tr><td>Fatti noti:
guerra in Afghanistan e Iraq</td></tr>
<tr><td>Ipotesi formulata come probabile spiegazione dei fatti:
Watson è un medico militare che è stato ferito in Afghanistan o Iraq</td></tr>
</table>

Tabella 1. Analisi del modo di ragionare di Sherlock.

1 Detective ideato nei romanzi di Arthur Conan Doyle

Le attività proposte agli studenti, di seguito chiamate *attività-gioco*, sono state progettate su DGS e sono finalizzate alla scoperta di alcuni teoremi di geometria elementare. Esse consistono in un gioco a coppie in cui i giocatori devono manipolare una figura dinamica per raggiungere un particolare obiettivo. Il file su cui gli studenti agiscono è costruito a partire dal teorema di geometria che si desidera far scoprire agli studenti e le regole del gioco sono volte ad innescare tra i giocatori un gioco semantico relativo ad una formula logica $\forall x \exists y\, S[x, y]$, come descritto precedentemente. Oltre al gioco, l'attività prevede la compilazione di un questionario per guidare gli studenti nell'interpretazione geometrica dei fatti osservati e delle azioni compiute nel gioco, al fine di giungere alla scoperta del teorema. In questa fase, gli studenti agiscono come detective collegando i fatti osservati nei vari registri di rappresentazione semiotica (Duval, 2006).

Presentazione attività

Le attività-gioco svolte in classe sono state progettate sul DGS GeoGebra e hanno guidato gli studenti alla scoperta-congettura-dimostrazione di un teorema di geometria elementare:

Teorema sulle posizioni reciproche di due circonferenze

1. Due circonferenze sono tangenti internamente se e solo se la distanza tra i loro centri è uguale alla differenza fra i loro raggi.
2. Due circonferenze sono tangenti esternamente se e solo se la distanza tra i loro centri è uguale alla somma fra i loro raggi.
3. Due circonferenze sono secanti se e solo se la distanza tra i loro centri è maggiore della differenza fra i loro raggi e minore della somma tra i raggi.
4. Due circonferenze sono interne se e solo se la distanza tra i loro centri è minore della differenza fra i loro raggi.
5. Due circonferenze sono esterne se e solo se la distanza tra i loro centri è maggiore della somma fra i loro raggi.

Ogni attività presentata è stata pensata per gruppi di tre studenti (due giocatori e un arbitro), frequentanti il secondo anno di una scuola secondaria di primo grado (7mo grado). La prima attività ha avuto bisogno di una clessidra per forzare il ragionamento degli studenti ad essere il più veloce possibile, coinvolgere parallelamente i diversi registri grafico e numerico e impedire la ripetizione di cicli infiniti di mosse. L'arbitro aveva il compito di impostare il valore della distanza fra i due centri, di gestire la clessidra, di sorvegliare il rispetto delle regole e di contare i punti conquistati da ogni giocatore in ogni sfida.

PRIMA ATTIVITÀ-GIOCO

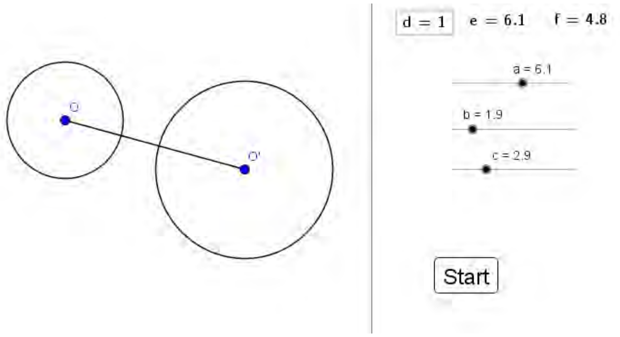


FIGURA 1. Attività-gioco 1

Il file GeoGebra presentato ai ragazzi è diviso in due viste grafiche:

- la vista di destra, nel seguito chiamata "numerica", dà la possibilità di variare alcuni parametri[2] quali la distanza tra i due centri delle circonferenze (slider *a*, impostato a priori dall'arbitro), il raggio della circonferenza di centro *O* (slider *b*, manovrato dal verificatore) e il raggio della circonferenza centro *O'* (slider *c*, manovrato dal falsificatore); nella parte superiore della finestra numerica sono riportati i valori della differenza tra le misure dei due raggi, della distanza tra i due centri e della somma delle misure dei due raggi.
- la vista di sinistra presenta la situazione geometrica, rappresentando, al variare del valore dei parametri numerici, la sincrona variazione della posizione delle due circonferenze e la loro rappresentazione.

Le regole del gioco sono state presentate agli studenti attraverso il seguente testo:

> All'interno del vostro gruppo stabilite un verificatore che comanda lo slider *b*, un falsificatore che comanda lo slider *c* e un arbitro che comanda lo slider *a* e la clessidra. L'obiettivo del verificatore è fare in modo che al termine della sua mossa $e=d$ oppure $e=f$, mentre l'obiettivo del falsificatore è fare in modo che al termine della sua mossa $e \neq d$ e $e \neq f$. L'arbitro all'inizio della partita sceglie il valore di *a* e gira la clessidra. I giocatori durante il proprio turno devono cercare di raggiungere il proprio obiettivo prima dello scadere del tempo dato dalla clessidra. Appena il giocatore raggiunge l'obiettivo, l'arbitro gira la clessidra e il turno passa all'avversario. Il giocatore che non riesce a raggiungere l'obiettivo nel tempo a disposizione perde. L'arbitro segna un punto al vincitore e fa ricominciare il gioco da capo. Cliccate su "start" per riportare il gioco ai valori di partenza. Osservazione: più un giocatore è veloce nel compiere la propria mossa e meno sarà il tempo a disposizione dell'altro giocatore quindi più alta sarà la probabilità di vincere.

Come si può notare dal regolamento, la distanza fra i due centri è impostata a priori dall'arbitro ed è una costante di ogni sfida. Ogni volta che il verificatore termina la sua giocata, cioè ogni volta che si ha coincidenza tra la distanza dei due centri e la somma oppure la differenza tra le misure dei raggi, la finestra grafica mostra un esempio di circonferenze tangenti internamente o esternamente, mentre ogni volta che il falsificatore termina la sua mossa, cioè ogni volta che la distanza tra i due centri è diversa sia dalla somma che dalla differenza delle misure dei due raggi, la finestra grafica mostra un non-esempio (Antonini, 2003) di circonferenze tangenti.

Quando le due circonferenze sono secanti il file mostra i punti *P* e *Q* di intersezione, quando le circonferenze sono tangenti il file mostra il punto *T* di tangenza, mentre quando le circonferenze sono esterne non vi sono punti rappresentati eccetto i due centri, come si può vedere dal potenziale spazio degli esempi (Watson & Mason, 2005) associato al gioco e presentato nella seguente tabella.

2 Gli studenti non erano a conoscenza del significato geometrico dei diversi slider e dei diversi valori calcolati, ma hanno condotto il gioco utilizzando i termini generici *a, b, c, d, e, f,* come si vede dalla figura 1.

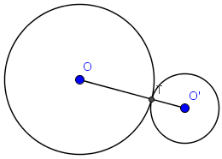
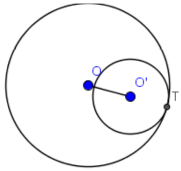
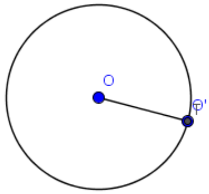
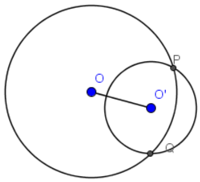
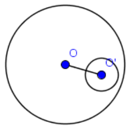
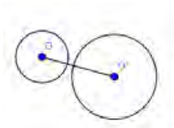
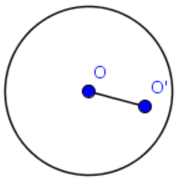
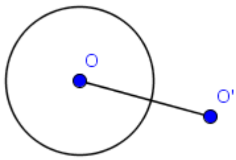
<table>
<tr><td rowspan="2">Verificatore</td><td>Esempi standard</td><td>Circonferenze tangenti esternamente

e=f</td><td>Circonferenze tangenti internamente

e=d</td></tr>
<tr><td>Esempio non standard</td><td colspan="2">Esempio degenere di circonferenze tangenti

d=e=f   c=0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Falsificatore</td><td>Non-esempi standard</td><td>Circonferenze non tangenti (secanti)

e≠d, e≠f</td><td>Circonferenze non tangenti

(interne) (esterne)
e≠d, e≠f</td></tr>
<tr><td>Non-esempi non standard</td><td>Esempio degenere di circonferenze non tangenti (interne)

e≠d, e≠f   c=0</td><td>Esempio degenere di circonferenze non tangenti (esterne)

e≠d, e≠f   c=0</td></tr>
</table>

Tabella 2. Spazio degli esempi associato all'attività-gioco 1.

Il questionario di riflessione, che ha guidato gli studenti alla formulazione del teorema e alla traduzione delle intuizioni attraverso i diversi registri, comprende le seguenti domande

1. Quali sono le possibili posizioni reciproche tra le due circonferenze ogni volta che il verificatore raggiunge l'obiettivo?
2. Quali sono le possibili posizioni reciproche tra le due circonferenze ogni volta che il falsificatore raggiunge l'obiettivo?
3. Che cosa rappresentano i valori degli slider *a, b* e *c* nelle due circonferenze?
4. Che cosa rappresentano i valori *d, e, f*?

Le prime due domande servono a spostare l'attenzione degli studenti dalla vista numerica alla situazione geometrica, in particolare facendo riferimento alla reciproca posizione delle due circonferenze. La terza domanda collega il valore degli slider alla lunghezza dei raggi e alla distanza tra i due centri e l'ultima domanda fornisce ai valori dei parametri il loro significato geometrico.

SECONDA ATTIVITÀ-GIOCO

La seconda attività prevede l'utilizzo dello stesso file GeoGebra della prima, ma con una variazione del regolamento, in modo da esplorare i non-esempi di tangenza e definire i casi in cui le circonferenze siano interne, esterne o secanti.

> All'interno del vostro gruppo stabilite nuovamente un verificatore che comanda lo slider *b*, un falsificatore che comanda lo slider *c* e un arbitro che comanda lo slider *a*. In questo gioco l'obiettivo del verificatore è fare in modo che al termine della sua mossa il numero *e* sia compreso tra *d* ed *f*, $d<e<f$, mentre l'obiettivo del falsificatore è fare in modo che al termine della sua mossa il numero *e* sia minore di *d* oppure maggiore di *f*, $e<d$ oppure $e>f$. Il giocatore che non riesce a raggiungere l'obiettivo perde e il gioco ricomincia da capo. L'arbitro segna un punto al vincitore e fa ricominciare il gioco da capo.

La distanza fra i due centri è anche in questo gioco impostata a priori dall'arbitro. Ogni volta che il verificatore termina la sua giocata, cioè ogni volta in cui il valore della distanza tra i due centri è compreso tra la somma e la differenza delle misure dei raggi, la finestra grafica mostra un esempio di circonferenze secanti, mentre ogni volta che il falsificatore termina la sua mossa, cioè ogni volta che la distanza tra i due centri è minore della differenza dei due raggi o maggiore della somma dei due raggi, la finestra grafica mostra un non-esempio di circonferenze secanti, in particolare i due casi rappresentano rispettivamente due circonferenze interne o esterne.

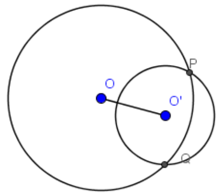
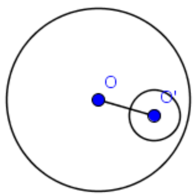
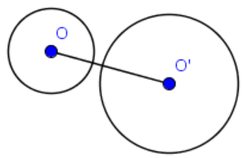
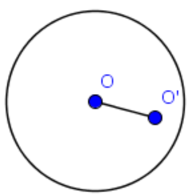
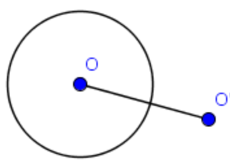
<table>
<tr><td rowspan="2">Verificatore</td><td>Esempio standard</td><td colspan="2">Circonferenze secanti

$d<e<f$</td></tr>
<tr><td>Esempi non standard</td><td colspan="2">Impossibili da creare</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Falsificatore</td><td>Non-esempi standard</td><td>Circonferenze non secanti

$e<d$</td><td>Circonferenze non secanti (esterne)

$e>f$</td></tr>
<tr><td>Non-esempi non standard</td><td>Esempio degenere di circonferenze non secanti (interne)

$e<d \quad c=0$</td><td>Esempio degenere di circonferenze non secanti (esterne)

$e>f \quad c=0$</td></tr>
</table>

Tabella 3. Spazio degli esempi associato all'attività-gioco 2.

Il questionario di riflessione comprende le seguenti domande

1. Quali sono le possibili posizioni reciproche tra le due circonferenze ogni volta che il verificatore raggiunge l'obiettivo?
2. Quali sono le possibili posizioni reciproche tra le due circonferenze ogni volta che il falsificatore raggiunge l'obiettivo?
3. Se hai trovato dei valori di *c* che impediscono al verificatore di raggiungere l'obiettivo, descrivi le posizioni reciproche delle due circonferenze e le loro caratteristiche geometriche.
4. Collega termini e formule matematiche che secondo te sono in relazione. *d(O,O')* è la distanza tra i due centri delle circonferenze, *R* è il maggiore dei due raggi delle circonferenze ed *r* il minore dei due.

circonferenze secanti	$d(O,O')=R+r$
circonferenze tangenti internamente	$d(O,O')>R+r$
circonferenze tangenti esternamente	$R-r<d(O,O')<R+r$
circonferenze interne	$d(O,O')=R-r$
circonferenze esterne	$d(O,O')<R-r$

Mentre le prime due domande sono analoghe alla prima attività e servono a tradurre gli obiettivi dei due giocatori in relazione alla situazione geometrica, la terza domanda forza all'analisi delle situazioni degeneri che in questo caso, sono un esempio di strategia vincente per il falsificatore. L'ultima domanda, conclusiva dell'intera trattazione, fornisce ai ragazzi il linguaggio matematico di formulazione del teorema che hanno intuito svolgendo le due attività.

Metodologia di raccolta dati e di analisi

Le attività-gioco presentate sono state proposte a studenti del secondo anno della scuola secondaria di primo grado (7mo grado), che ignoravano la trattazione fino al momento dello svolgimento delle attività. La non conoscenza da parte degli studenti è stata la base su cui sono state costruite le attività, infatti l'obiettivo è proprio guidare i ragazzi alla scoperta di relazioni a loro sconosciute.

La durata di ogni attività è stata di circa due ore, nella prima parte (un'ora e mezza) ogni gruppo da tre studenti aveva a disposizione un computer o un tablet per giocare con l'attività e rispondere alle domande del questionario, nell'ultima parte della lezione l'insegnante ha ripreso le scoperte fatte dagli studenti e sistematizzato la conoscenza matematica.

Per lo svolgimento dell'analisi a posteriori è stata utilizzata la videoregistrazione delle attività: i gruppi che hanno lavorato con i tablet sono stati filmati tramite telecamere, mentre dei gruppi che hanno lavorato al computer è stata catturata, oltre alle immagini registrate tramite webcam e ai suoni registrati dal microfono, la registrazione dello schermo su cui hanno lavorato durante il gioco e la compilazione del questionario, attraverso il software Camtasia. Oltre che sulla videoregistrazione, l'analisi si è basata sulla trascrizione delle frasi pronunciate dagli studenti e dagli insegnanti e sui protocolli prodotti dagli studenti.

Analisi

Uno dei gruppi osservati nella prima attività è formato da Guglielmo, Bianca e Alessandro, sul lavoro di questi tre studenti concentreremo la nostra analisi. Durante il gioco gli studenti focalizzano la loro attenzione sui valori numerici delle variabili e non commentano ciò che appare nella finestra grafica. Prima di passare alla scheda contenente le domande sull'attività, Alessandro e Bianca osservano che se non ci fosse la clessidra il verificatore avrebbe la possibilità di vincere sempre. Dall'affermazione è possibile capire che gli studenti hanno compreso il corretto risultato del gioco semantico, pur non conoscendo ancora la matematica su cui è basato.

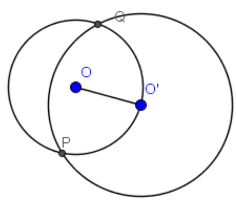
La prima domanda del questionario crea qualche difficoltà agli studenti che non conoscono il significato dell'espressione "posizioni reciproche" e decidono di chiedere aiuto al professore.

Studente	**Dialogo**	**Azioni compiute ed esempi prodotti in GeoGebra**
Guglielmo	Non abbiamo capito "posizioni reciproche"	
Professore	Possibili reciproche vuol dire come sono messe le due circonferenze. [...] Se si toccano…	
Guglielmo	Si toccano in un punto	
Professore	Andate a vedere… provate più volte, non solo una volta	
Guglielmo	Per raggiungere l'obiettivo si devono toccare in un punto	
Alessandro	E invece quali sono le posizioni reciproche tra le due circonferenze ogni volta che C raggiunge l'obiettivo è qualsiasi: può toccarsi in due punti oppure non toccarsi	
Bianca	No può toccarsi sempre in due punti (guardando un caso di circonferenze secanti)	Muove lo slider c producendo un esempio di circonferenze secanti
Guglielmo	Può toccarsi in due punti oppure non toccarsi	
Bianca	Ah giusto!	Muove lo slider c producendo un esempio di circonferenze interne.

Tabella 4. Trascrizione e commenti di un estratto del video relativo all'attività-gioco 1.

Una volta chiarito il significato dell'espressione "posizioni reciproche" Alessandro e Guglielmo rispondono alle prime due domande ripensando alle precedenti partite. Bianca, invece, decide di esplorare la situazione per formulare la risposta: utilizzando il gioco produce una configurazione vincente per il falsificatore e, a partire da essa, generalizza la risposta. Il disaccordo di Guglielmo la induce ad esplorare anche altri casi e a formulare la risposta corretta.

Nella formulazione delle risposte alle successive due domande, riguardanti gli slider *a*, *b* e *c* e i valori delle variabili *d*, *e* ed *f* , gli alunni ripetono lo stesso tipo di approccio nei confronti del gioco: Alessandro e Guglielmo ripensano a quanto avevano osservato nelle partite precedenti, mentre Bianca utilizza il gioco nel momento stesso in cui avviene il dialogo sia per scoprire la risposta che per verificare quanto affermano i compagni. Gli studenti hanno opinioni contrastanti per quanto riguarda la natura geometrica dei valori *d* ed *f*: Alessandro e Bianca congetturano che *d* ed *f* rappresentino i valori delle lunghezze dei due raggi, mentre Guglielmo non condivide la loro risposta. Il dissenso di Guglielmo induce Alessandro ad utilizzare il gioco per mostrare evidenze della correttezza di quanto affermano lui e Bianca.

Alessandro	Posso provarvi che è il raggio? Vi provo che è il raggio!	Muove lo slider a fino a portare O' ad appartenere alla circonferenza di centro O 

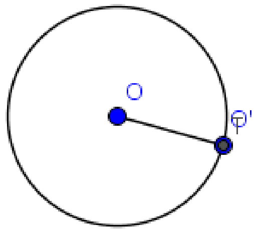
Guglielmo	Non è il raggio! Non è il raggio…perché se alteri la circonferenza non puoi alterare il raggio di un'altra… di un altro cerchio! ma non puoi alterare… se muovi la circonferenza di un cerchio non puoi muovere il raggio dell'altra	
Alessandro	Se alteri...	
Guglielmo	No perché cambiano entrambi i valori! Ne cambi uno se muovi quello, cambi la lunghezza di un raggio, non puoi cambiare la lunghezza anche dell'altro raggio	
Alessandro	Noti? Noti? Vedi? È scomparso il punto T e mettendo questo su 0 vuol dire che è il punto esatto. Noti? È 2.9 2.9 2.9 ragazzi Bum!	Muove lo slider c su 0 formando un esempio di circonferenze tangenti in cui una delle due ha raggio nullo. 

Tabella 5. Trascrizione e commenti di un estratto del video relativo all'attività-gioco 1.

Alessandro utilizza il valore della variabile *e*, ossia della distanza tra i centri, per misurare la lunghezza del raggio della circonferenza di di centro *O*. La sua tesi sarebbe verificata se, nella finestra numerica, il valore di *e* coincidesse con il valore di *d* o *f*. Nella prima configurazione prodotta da Alessandro ciò non si verifica, ma riducendo a 0 il raggio della circonferenza di centro *O'*, *e* risulta uguale sia a *d* che a *f*. Il risultato prodotto è dovuto al fatto che *r'=0*, questo fa sì che sia la somma che il valore assoluto della differenza dei raggi coincidano con il valore di *r*. Nonostante la configurazione prodotta sia un caso molto particolare, Alessandro ritiene che abbia valenza generale e che dimostri ciò che lui e Bianca affermano. Le evidenze mostrate da Alessandro non convincono Guglielmo che, senza utilizzare il gioco ma ripensando a quanto aveva osservato precedentemente, argomenta le ragioni del dissenso: nella finestra geometrica varia il raggio di una sola circonferenza mentre nella finestra numerica cambiano sempre i valori di entrambe le variabili, pertanto questi ultimi non possono rappresentare i raggi delle due circonferenze. Questa osservazione costituisce un "contro-esempio dinamico" alla congettura dei compagni.

Mentre i due ragazzi chiamano il professore per spiegare le ragioni del loro disaccordo, Bianca, utilizzando il gioco, si convince che Guglielmo ha ragione ad affermare che *d* ed *f* non sono i raggi delle due circonferenze. Il seguente estratto mostra come Bianca cerchi di spiegare ai compagni la ragione della sua conversione.

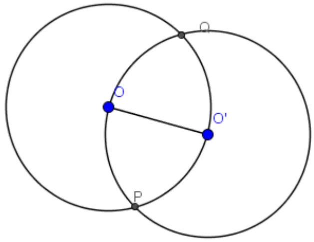
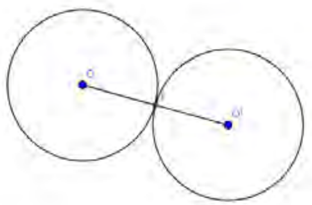
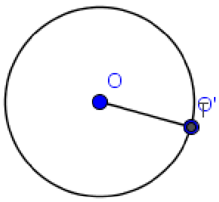
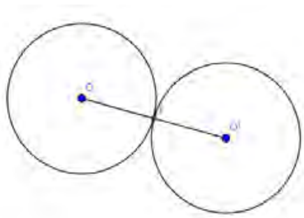
Bianca	Aspetta… se tu metti così, il raggio è la stessa cosa, no? Cioè è uguale sia di qua che di qua in teoria, però qua non è uguale… quindi è un'altra cosa, capisci?	Commenta l'esempio prodotto 
…	…	…
Bianca	Vedi sono due cose diverse mentre qui (indicando circonferenze di uguale raggio tangenti esternamente) dovrebbero essere uguali in teoria. Prova a mettere la circonferenza di O' sul centro di O. Ok dovrebbero essere più o meno uguali come raggio, perché comunque è la stessa cosa, invece uno è 0 e l'altro è 8.6	Bianca commenta l'esempio prodotto da Alessandro e guida i movimenti del compagno per riportarlo nella configurazione precedente 
Alessandro	Però proviamo a fare come ho fatto prima, così vediamo davvero che si forma un punto T, che sarebbe l'intersezione tra i due. Se uno è 0 ed è quindi equivalente al punto	Alessandro decide di tornare all'esempio che secondo lui costituisce prova della sua congettura 
Bianca	Però come mi spieghi che se io attacco la circonferenza di centro O' a quella di centro O come mi spieghi che i raggi sono diversi? Dovrebbero essere uguali i raggi! Ecco così vedi uno è 0 e l'altro 4.8… e poi non può essere 0!	Ritornano ad osservare l'esempio 
Alessandro	0 perché…Capito! Fatemi vedere… d non è il raggio, f lo è!	
Bianca	d che cos'è allora?	
Alessandro	La differenza tra il raggio di questi due!	

Tabella 6. Trascrizione e commenti di un estratto del video relativo all'attività-gioco 1.

Bianca esplorando il file costituisce un controesempio alla congettura formulata precedentemente secondo la quale *d* ed *f* fossero i raggi delle due circonferenze. Per aiutare Alessandro a comprendere le ragioni della sua conversione prova a guidare i movimenti del compagno nella scoperta del controesempio. Bianca ricopre il ruolo di mediatrice nel dialogo che Alessandro ha stabilito con gioco. L'osservazione di Bianca riguardo al valore nullo di *d* si rivela fondamentale per la comprensione di Alessandro, che giunge a formulare la congettura corretta.

Conclusioni

In ogni attività-gioco gli studenti hanno agito come detective alla ricerca dell'enunciato del teorema: porsi domande, osservare fatti e relazioni, formulare ipotesi e verificarne la correttezza, creare esempi, non-esempi, controesempi e casi particolari e degeneri sono le principali attività che hanno caratterizzato i loro comportamenti. Analizzando il ragionamento di Alessandro, Guglielmo e Bianca è possibile mettere in luce somiglianze e differenze con lo schema illustrato nell'introduzione relativo al ragionamento di Sherlock.

Modo di ragionare di Alessandro, Guglielmo e Bianca	**Ricostruzione in forma deduttiva**
Domanda contenuta nella scheda: Cosa rappresenta il valore di *d*?	*Se d* è il raggio della circonferenza di centro *O* e *O'* appartiene a tale circonferenza *allora d=e*
Fatti osservati: il raggio della circonferenza di centro O coincide con la distanza tra O e O'; d=2.9, e=2.9	
Fatto noto agli studenti: *e* è la distanza tra O e O'	
Ipotesi formulata come probabile spiegazione dei fatti: *d* è il raggio della circonferenza di centro O, *f* è il raggio della circonferenza O'	*Se d* fosse il raggio della circonferenza di centro *O* *allora* variando il raggio della circonferenza di centro *O* soltanto il valore di *d* dovrebbe variare ASSURDO: varia anche *f*
Fatti in contraddizione con l'ipotesi: Frase di Guglielmo: contraddizione nella conversione tra la finestra grafica e numerica percepita dinamicamente Controesempio di Bianca: simultanea presenza di circonferenze con lo stesso raggio nella finestra grafica e di valori di *d* ed *f* diversi nella finestra numerica	Se *d* fosse il raggio della circonferenza di centro *O* ed *f* fosse il raggio della circonferenza di centro *O'* allora quando le circonferenze hanno lo stesso raggio *d* ed *f* dovrebbero coincidere ASSURDO: *d* ed *f* hanno valori diversi CONCLUSIONE: *d* ed *f* non sono i raggi delle circonferenze
Nuovo fatto osservato da Bianca: quando le circonferenze hanno lo stesso raggio *d* ha valore nullo	
Nuova ipotesi formulata da Alessandro come probabile spiegazione dei fatti: *d* è la differenza tra i raggi	*Se d* è la differenza tra i raggi delle due circonferenze *allora* quando le circonferenze hanno lo stesso raggio la loro differenze deve essere 0, inoltre quando i centri di ogni circonferenza appartengono all'altra e la circonferenza di centro *O'* ha raggio nullo *d* coincide con *e*

Tabella 7. Analisi del modo di ragionare di Alessandro, Guglielmo e Bianca.

Confrontando la tabella 1 con la tabella 7 è possibile mettere in luce analogie e differenze tra il modo di ragionare degli studenti e il modo di ragionare di Sherlock Holmes.

La prima osservazione riguarda la domanda che innesca la ricerca: mentre Sherlock formula la domanda implicitamente e autonomamente, nelle attività-gioco le domande di ricerca sono per la maggior parte formulate esplicitamente nella scheda. Abbiamo osservato dei casi in cui gli studenti presi dalla curiosità di casi particolari abbiano formulato altre domande di ricerca ma generalmente l'indagine viene subito rifocalizzata sulle domande contenute nell'attività dagli altri componenti del gruppo. La seconda osservazione riguarda la difficoltà di autocritica da parte dello studente che formula l'ipotesi: ad Alessandro è bastato osservare un caso particolare che verificava la sua ipotesi per assumerla come sempre vera. Al contrario, Sherlock prima di accettare la sua ipotesi, pensa alla possibile esistenza di fatti in contraddizione con essa. L'assenza di autocritica da parte di colui che formula l'ipotesi nelle attività-gioco viene sopperita dalla presenza dei compagni pronti a presentare argomentazioni riguardo al loro dissenso e a far evolvere l'attività verso la corretta soluzione. Riteniamo che il gioco abbia un ruolo fondamentale nell'attivazione dello spirito critico negli studenti. Durante il gioco, infatti, gli alunni, ignari del teorema di geometria su cui esso si basa, osservano fatti alla ricerca di una strategia vincente per battere l'avversario, ciascuno è attento a certi particolari, a noi non conosciuti poiché le mosse non vengono generalmente giustificate. Le osservazioni compiute durante il gioco influenzano l'intera attività, infatti, se Guglielmo non avesse fatto esperienze di casi particolari nella prima parte, probabilmente si sarebbe lasciato anche lui convincere dall'esempio (degenere) mostrato da Alessandro per provare la sua congettura. L'esperienza del gioco rende ogni studente un esperto di certi fatti, incentivando la dialettica all'interno del gruppo.

Attraverso i meccanismi d'indagine messi in atto durante il gioco, gli studenti hanno acquisito familiarità con le regole logiche-strategiche del ragionamento matematico. In particolare hanno fatto esperienza del fatto che un esempio che verifica una congettura non è sufficiente a provarne la validità in generale. Pur non conoscendo che cosa sia un controesempio, ne hanno prodotti molti e hanno fatto esperienza del suo ruolo in matematica. Gli studenti hanno convertito agevolmente risultati grafici e numerici per valutarne la coerenza in linea, riteniamo, con le Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici, che indicano la conversione tra i diversi registri semiotici come un'importante competenza matematica. Infine, gli studenti sono agevolati nell'individuazione di relazioni di causa-effetto tra l'uguaglianza dei valori numerici e il tipo di configurazione geometrica prodotta. Questa esperienza favorisce la comprensione di teoremi matematici espressi nella forma "se… allora..." e "...se e solo se...". Pur non ricostruendo in forma deduttiva il loro ragionamento gli studenti formulano e confutano continuamente deduzioni matematiche costruite empiricamente, grazie alla mediazione del software GeoGebra.

Bibliografia

Antonini, S. (2003). *Non-Examples and Proof by Contradiction*. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 49-56.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103-131

Hintikka, J. (1998). *The principles of mathematics revisited*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as inquiry: a logic of scientific discovery*. Springer Science + Business Media Dordrecht

Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Routledge.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.

GEOGEBRA, MATEMATICA E DISEGNO ARCHITETTONICO. ANALISI MATEMATICA E GEOMETRICA NEI PROFILI DEGLI ORDINI ARCHITETTONICI: ESEMPI DALLA "REGOLA DELLI CINQUE ORDINI D'ARCHITETTURA DI M. IACOMO BAROZZIO DA VIGNOLA"

***Martino Pavignano*[1], *Maria Luisa Spreafico*[2], *Ursula Zich*[3]**

[1]dottorando BAP, Politecnico di Torino, DAD,
[2]RC Geometria, Politecnico di Torino, DISMA,
[3]RC Disegno, Politecnico di Torino, DAD
maria.spreafico@polito.it

Abstract

Il contributo propone l'utilizzo di GeoGebra come strumento per indagare dinamicamente il disegno architettonico dal punto di vista matematico. Le applicazioni presentate sono state realizzate da un gruppo interdisciplinare di ricercatori e dottorandi dei dipartimenti di Scienze Matematiche e di Architettura e Design del Politecnico di Torino. La scelta di un'opportuna fonte grafica, criticamente desunta dalla sterminata mole di "dati grafici e testuali" che il contesto architettonico mette a disposizione degli studenti, permette infatti di sperimentare attivamente sia un processo di studio delle fonti, che più fasi di indagine geometrica e matematica.

1. Introduzione

I software di matematica dinamica come GeoGebra[1] possono rappresentare un'interessante ed efficace strumento di sintesi, critica e rappresentativa, tra gli aspetti tecnici-estetici e tra la sfera artistica-scientifica (Serpe Frassia 2015, 365) che caratterizzano gran parte dell'ambiente costruito. Ma questi software, espressamente progettati per studiare e rappresentare la matematica, quali innovazioni, o nuovi approcci critici, sono in grado di apportare se applicati in ambito puramente architettonico? Ad una prima indagine, permettono, ad esempio, di confrontare rapidamente la 'geometria teorica' che sottende la forma architettonica ideale con la geometria effettivamente disegnata e/o costruita.

Se, come suggerisce Mario Botta: «architettura e matematica sono discipline che […] hanno sempre coltivato interessi di reciprocità», trovando nella mutua complementarietà «continue occasioni di crescita e confronto» (Botta 2003), allora nell'attuale contesto matematico-architettonico, l'interdisciplinarietà di questo contributo vuole evidenziare come la matematica continui a svolgere il ruolo «di grande mediatrice fra la scienza e la tecnica nonché tra la scienza e l'arte» (Geymonat 1980), rivelandosi essa stessa soggetto-oggetto e strumento-intento della produzione architettonica.

Per esempio, molti studi sono stati indirizzati verso l'analisi delle costruzioni della voluta del capitello ionico.[2] A scala architettonica risultano fondamentali le analisi su casi applicativi

1 Da qui in avanti GeoGebra. https://www.geogebra.org/about. Cfr. Impedovo (2001) per il concetto di matematica dinamica.

2 Tra questi, a proposito della sua rappresentazione nella trattatistica architettonica, si possono ricordare Losito (1993), Goredeau (2012), Fazzina (2016) e Andrey e Galli (2004). In quest'ultimo gli autori propongono alcune innovative soluzioni di approssimazione matematica della voluta che, non trattando esplicitamente del rapporto tra le spirali di tipo logaritmico e le costruzioni grafiche delle volute, lasciano aperte ulteriori interpretazioni (Spreafico et al. 2016).

operate da Angelini e Migliari (1998). In campo più propriamente matematico sono di notevole interesse le riletture analitiche e geometriche di architetture e paesaggi esposte in Carlini e Tedeschini (2016) così come l'utilizzo di strumenti matematici per l'interpretazione di spirali e volute operate da Gattuso e Serpe (2012) e da Serpe e Frassia (2013). Sia la letteratura matematica che quella architettonica sono quindi pervase da numerose 'riletture' e 'analisi geometriche' di architetture e relativi progetti, mettendo in evidenza un contesto potenzialmente fertile per nuovi approcci didattici multi-disciplinari e multi-scalari.

Ecco quindi che, partendo da un precedente lavoro di ricerca, presentato dagli autori nell'ambito del XXVIII Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione (Spreafico et al. 2016),[3] in questa sede se ne propongono alcune interazioni che possono essere proposte nelle scuole secondarie di primo e secondo grado, utilizzando GeoGebra per le sue dinamiche esplorative-rappresentative, abbracciando discipline diverse e diventandone strumento sinergico. Il programma permette infatti di gestire la descrizione degli elementi geometrici sia a partire dalla geometria intrinseca degli elementi sia usando la geometria analitica.

2. Approccio metodologico

Posto che indagare criticamente un oggetto architettonico implica necessariamente un approccio metodologico caratterizzato da una sequenza di passi che portano alla definizione del 'processo di conoscenza' dello stesso, come prevede ad esempio il Progetto Logico del Rilievo (Marotta 2001), un ruolo rilevante è associato alle fonti grafiche.

Queste descrivono le consistenze – di progetto e di rilievo – più o meno materiali del manufatto e si avvalgono di codici grafici eterogenei e trasversali che «grazie all'utilizzo di più disegni [...], attraverso una rigorosa sistematizzazione metodologica» permettono al disegno di diventare «un vero strumento di indagine» identificandosi come strumento primo dell'analisi grafica (Docci 2009, 3-4) [Fig.01]. Nel merito, la geometria – alla base dei processi di rilevamento, restituzione, modellazione e composizione – è strumento attivo di lettura e interpretazione della forma, teorica e non.

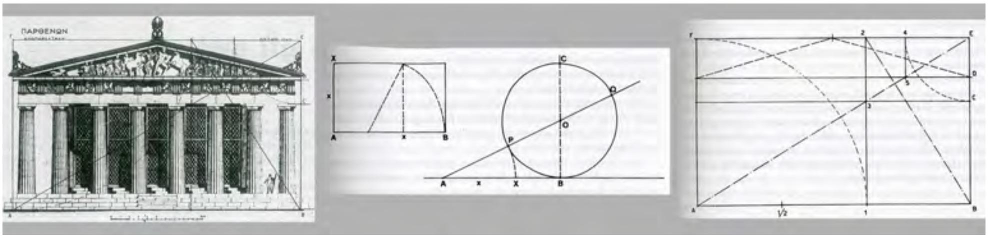


Figura 1 – Esempio di analisi grafica delle proporzioni architettoniche applicata al fronte principale del Partenone (da Docci, Gaiani e Maestri 2011, 102-103).

L'uso di GeoGebra come strumento di lettura e interpretazione di una fonte grafica risulta «facile et spedito», tanto da ricordare l'approccio culturale denunciato da Giacomo Barozzi detto il Vignola nella prefazione *A i lettori* della sua *Regola*[4] e riscontrabile nelle tavole di chiara impostazione raffaellesca,[5] ci ha accompagnato nella scelta della fonte da indagare. Le potenzialità dinamiche del software, che permettono di visualizzare aspetti teorici normalmente sottesi rendendoli più accessibili – coniugando geometria, algebra, grafici e non solo in un'unica

3 Il contributo ha come oggetto l'ordine architettonico, matematicamente analizzato in quanto macro-insieme di micro-elementi generati da profili che, estrusi/rotati, ne originano gran parte delle componenti.

4 Barozzi (1562), tav. iii.

5 Cfr. Cfr. Di Teodoro, F. P. (2003). *Raffaello, Baldassar Castiglione e la Lettera a Leone X, con l'aggiunta di due saggi raffaelleschi*. San Giorgio di Piaro: Minerva.

applicazione *user-friendly* – si rivelano infatti ottimali per indagare la complessità intrinseca della trattatistica architettonica, mediando tra testo e immagine esplicitandone relazioni più o meno biunivoche, nel pieno rispetto della cultura politecnica (Marchis 2012, 146).

2.1. Perché la Regola

L'identificazione della fonte grafica che fornisce la base delle interazioni che seguono è stata fatta proprio in funzione delle stesse. Questa deve infatti essere comprensibile, sia nei testi che nei grafici e di rapida consultazione. Si è quindi scelto di analizzare, tra i tanti, un trattato architettonico del XVI secolo: la *Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola*.[6] La *Regola*, pensata come sistema proporzionale (per gli ordini classici romani) di facile applicazione, permette di definire, tramite semplici rapporti algebrici, i vari elementi componenti l'ordine, che viene descritto per mezzo di tavole calcografiche di estremo nitore [Fig.02]. Proprio grazie alla sua struttura formale e alla sua tipologia editoriale, [7] che risulta essere ben diversa rispetto ai trattati coevi,[8] la *Regola* ben si presta ad essere fatta oggetto di questa analisi interdisciplinare.

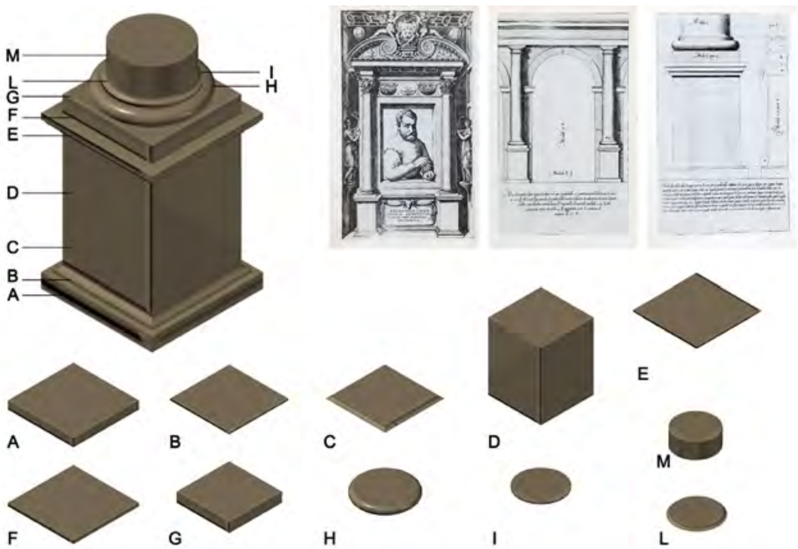


Figura 2 – Composizione e scomposizione in singoli solidi (di traslazione e di rotazione) del piedestallo tuscanico sulla base delle Tavv. VI e VII della Regola. Elaborazione degli autori.

3. Interazioni tra matematica e disegno architettonico: esperienze laboratoriali

Grazie all'immediatezza di alcune funzioni di GeoGebra (costruzione di rette e circonferenze con determinate condizioni), è possibile ridisegnare molti degli elementi architettonici descritti nella *Regola*, sia interpretando le 'indicazioni grafiche' che seguendo le descrizioni testuali.

6 Edito a Roma, nel 1562. Cfr. Tuttle, R. J. et al. (eds) (2002). Jacopo Barozzi da Vignola. Milano : Electa.

7 L'opera è composta da 32 tavole *in folio*. Queste descrivono i cinque ordini della classicità romana dal generale al particolare, secondo un approccio metodologico ormai affermato nel campo del rilievo architettonico. Cfr. Docci, M. e Maestri, D. (2009). Manuale di rilevamento architettonico e urbano. Roma-Bari: Laterza.

8 Per esempio quelli di Sebastiano Serlio (1537-1575), e Andrea Palladio (1570). Per approfondire: Evers, B. (ed.) (2003). *Teoria dell'architettura. 117 trattati dal Rinascimento a oggi.* Colonia: Taschen; Kruft, H. W. (1988). *Storia delle teorie architettoniche. Da Vitruvio al Settecento.* Roma-Bari: Laterza.

Il lavoro si può adattare a vari livelli di conoscenza della matematica: ai ragazzi del primo e secondo biennio delle secondarie di secondo grado, per esempio, può essere richiesta l'uso di GeoGebra per il ridisegno, con il riconoscimento delle equazioni, fornite dal programma stesso, degli elementi descritti. Se proposta ai ragazzi dell'ultimo anno delle medie superiori, questa sperimentazione può essere lo spunto per parlare di parametrizzazioni e superfici di rotazione e traslazione.

3.1. GeoGebra strumento di riconoscimento e ridisegno di alcuni elementi della forma architettonica

Come esempio si descrive il ridisegno del profilo di una porzione della parte basamentale della colonna di ordine tuscanico, seguendo le indicazioni sugli elementi (tori, cilindri, gole e parallelepipedi) e le proporzioni di questi elementi così come descritte dal Vignola. Dal momento che gli elementi tridimensionali si possono ottenere facendo traslare o ruotare le curve semplici che rappresentano la sezione di questi oggetti, ha senso lavorare su un piano cartesiano, disegnando solo il profilo dei vari elementi. La prima parte del lavoro richiede esclusivamente strumenti di geometria elementare: saper tracciare la retta per due punti, circonferenze (dato centro e raggio, o passanti per tre punti o tangenti ad una data retta in un punto e di raggio fissato).

Si può dunque far suddividere agli studenti il foglio di lavoro con rette parallele all'asse delle ascisse che mantengano tra loro distanze proporzionali seguendo il disegno della fonte grafica. Scegliendo poi un punto di partenza opportuno, si possono seguire i comandi di GeoGebra di costruzione di rette perpendicolari a rette fissate e passanti per un punto o circonferenze di centro e raggio fissati, per ricostruire il profilo. Si possono anche analizzare le posizioni reciproche dei centri delle circonferenze coinvolte e le proporzioni dei loro raggi.

Questa prima parte può essere svolta anche dagli studenti del primo biennio delle superiori. Per gli studenti delle classi successive, sarà invece interessante, dopo aver determinato con GeoGebra le equazioni delle rette, cercare una parametrizzazione di ogni singolo elemento. Un ulteriore approfondimento può essere dato dalla scrittura dei solidi di rotazione e di traslazione.

Si mostra come esempio il profilo succitato, mettendo a confronto la rielaborazione degli autori con il disegno estrapolato dalla *Regola* del Vignola.

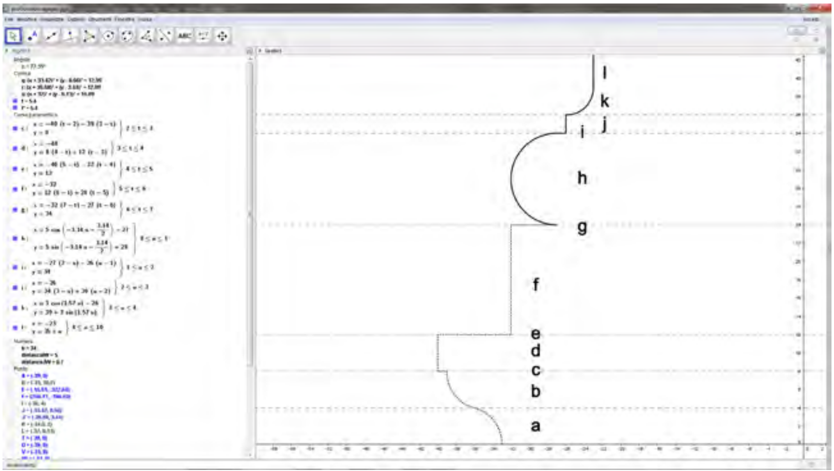


Figura 3 – Schema proporzionale porzione di base tuscanica. Elaborazione degli autori.

Nella Fig. 03 si è scelto di parametrizzare una porzione particolarmente significativa dell'ordine tuscanico, che contiene sia elementi di traslazione sia elementi di rotazione.

Dato che GeoGebra utilizza già le coordinate xy, per ottenere la traslazione del profilo lungo un'asse perpendicolare al piano sezione, qui indicato come z, si considera il punto (x(t),y(t)) e si costruisce la superficie di traslazione (uno dei quattro lati della colonna). Nel caso in figura avremo

$$(x(t), y(t), x(t)*tg(s)) \text{ con } t \in [0,7], s \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Dove t è il parametro del profilo che genera il solido di traslazione

Per ottenere gli altri lati si procede in modo analogo. Per ottenere la rotazione (completa) del profilo, basta considerare la superficie:

$$(x(u)\cos\vartheta, y(u), x(u)\sin\vartheta) \text{ con } u \in [0,10], \vartheta \in [0,2\pi]$$

3.2. GeoGebra strumento conoscitivo per un ridisegno analitico seguendo la "regola", ovvero della rappresentazione d'architettura

È possibile utilizzare GeoGebra per ripercorrere alcune costruzioni geometriche del disegno architettonico, così come descritte nei trattati, a parole o solamente tramite grafici, e confrontare il disegno ottenuto con quelli proposti dagli autori.

In questo caso è fondamentale poter importare tramite GeoGebra le immagini digitali delle fonti, in modo che si possa sovrapporre la costruzione elaborata con GeoGebra al disegno originale. È possibile selezionare le costruzioni in modo che queste possano essere sviluppate anche dagli studenti del biennio delle scuole secondarie di secondo grado.

Come esempio si mostra come sia possibile ripercorre la costruzione geometrica della gola rovescia, elemento architettonico il cui profilo è costituito da due archi di circonferenza.

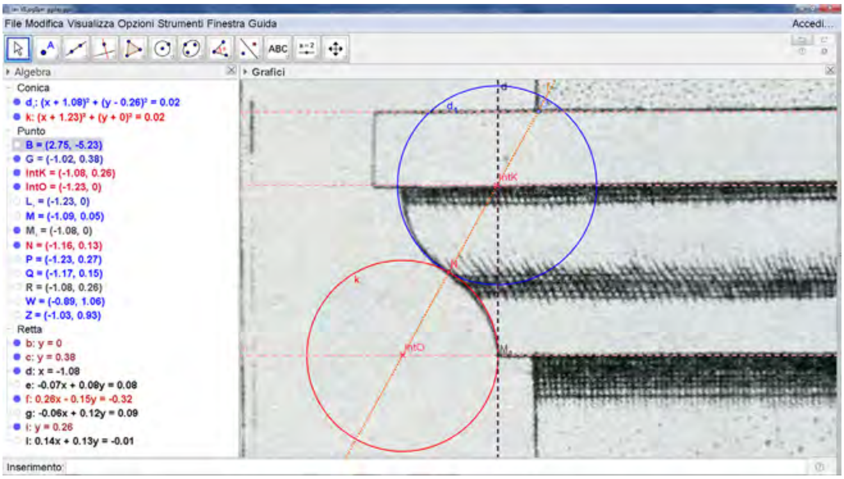


Figura 4 – Studio analitico della gola rovescia.

In questo caso, dopo aver importato l'immagine del disegno vignolesco e utilizzato GeoGebra per tracciarne la costruzione spiegata dal Barozzi, si è osservato che il risultato si discosta leggermente dal disegno dell'autore. Analoghe differenze si possono rilevare qualora si provasse a riproporre l'originale con applicativo CAD e a confrontare questa tipologia di ridisegno assistito con il grafico risultate da un percorso di reinterpretazione manuale della *Regola* (Pavignano 2009, 14-30).

Le costruzioni stesse, insieme alle eventuali insorgenza di discrepanze in fase di confronto tra la fonte e l'interpretazione su GeoGebra, possono diventare interessanti spunti di discussione per la classe. Può infatti risultare costruttivo sottolineare e analizzare queste "difformità", dal momento che sussistono notevoli differenze sia tra le diverse tipologie di rappresentazione quali disegno manuale e disegno assistito (Pavignano 2009, 31) che tra le fonti grafiche di molteplice natura (Pavignano 2012, 114-116).

3.3. GeoGebra strumento interpretativo per la rappresentazione di sintesi

Scegliendo opportunamente tavole di disegni e immagini di realizzazioni architettoniche è possibile approssimare o interpolare con funzioni e/o curve parametriche alcuni tratti delle opere. In questo caso il lavoro è maggiormente stimolante nelle classi finali delle scuole secondarie di secondo grado, quando la conoscenza della matematica è più approfondita.

Nel precedente lavoro, abbiamo utilizzato GeoGebra per fare alcune osservazioni sulla percezione delle volute dei capiteli ionici disegnati dal Vignola (Spreafico et al. 2016, 1289). L'analisi è sorta dal confronto tra la forma delle volute così come descritte dal Barozzi e la spirale logaritmica. Il risultato ha permesso di notare come tratti di spirali di questo tipo approssimino quest'ultima, quand'anche sottoposta ad operazioni di adattamento al grafico originale, risulti essere quella che meglio approssima quella utilizzata in questo specifico disegno architettonico, sottolineando quindi, ancora una volta, come la spirale logaritmica sia quella più usata in natura e in generale percepita come maggiormente armoniosa dal nostro occhio.

Si è quindi provato ad approssimarne la costruzione con diversi tratti o porzioni di spirali logaritmiche di entrambe le volute disegnate dal Vignola, ovvero sia sulla spirale derivata dalla costruzione di Giuseppe Salviati[9] sia su quella desunta delle congetture di Albrecht Dürer (come elaborate da Guillaume Philandriet).[10] Considerata l'equazione parametrica generale della spirale logaritmica:

$$x = ae^{b}\cos(t)\,, y = ae^{b}\sin(t)$$

Si possono allora determinare l passaggio per due punti, per tracciare un arco di logaritmica che interpreti una porzione di voluta. Il nodo cruciale è proprio la scelta dei due punti che si può effettuare in vari modi, che portano ad approssimazioni e discussioni diverse. In questo caso GeoGebra permette molto rapidamente di visualizzare le varie porzioni di logaritmica trovate, di cogliere immediatamente le soluzioni più soddisfacenti, dal punto di vista percettivo, e di controllare anche la regolarità delle curve a tratti individuate (continuità e derivabilità nei punti di connessione).

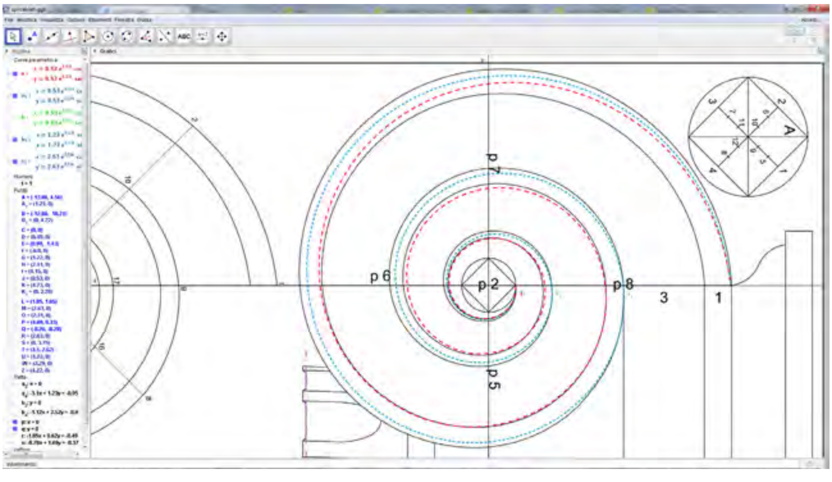


Figura 5 – Approssimazioni della voluta ionica secondo Salviati.

9 Pubblicata nel 1552 da Francesco Marcolini a Venezia. Losito 1993, 133

10 Egli basa le sue congetture sugli studi di Dürer. *Ibidem*, 196

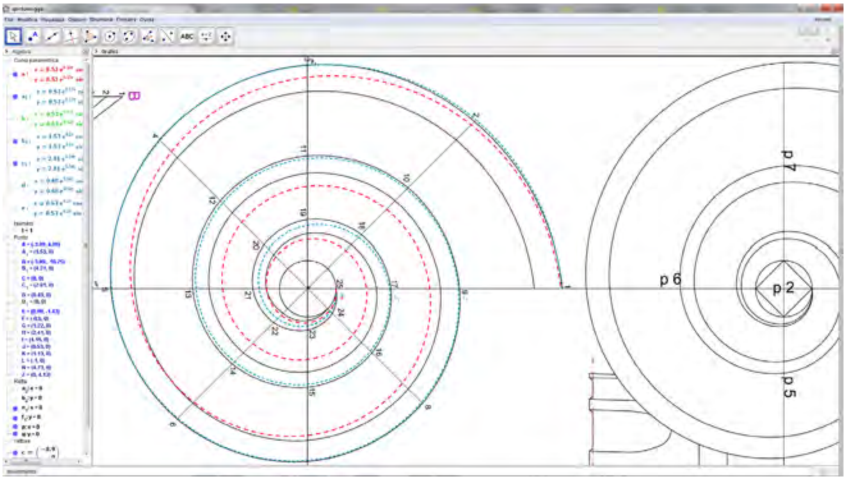


Figura 6 – Approssimazioni della voluta ionica secondo Dürer.

Per esempio, nelle Figg.05 e 06, si è costruita una spirale logaritmica (curva rossa e tratteggiata) passante per il punto di contatto della spirale più esterna con l'abaco e per il punto nel quale le spirali toccano l'occhio della voluta (quindi è la medesima spirale per i due disegni). Si può notare che nella spirale del Salviati la logaritmica è quasi sempre compresa tra le due spire (esce solo nel secondo avvolgimento ma discostandosi di poco da quelle disegnate). Quindi la percezione visiva è accompagnata da questa curva 'interpolante' e la spirale risulta più gradevole di quella di Dürer. Nel caso della spirale di Dürer invece, la stessa spirale logaritmica si discosta molto da quella disegnata, soprattutto nei due avvolgimenti più interni.

In seconda istanza si è approssimata ogni spira (avvolgimento della voluta) con una spirale logaritmica (curve azzurre). In questo caso le terne di logaritmiche usate nei due casi sono molto diverse tra loro (nella spirale di Dürer l'approssimazione è molto buona nei primi due giri, ma non nell'ultimo avvolgimento, vicino all'occhio). Nel caso della spirale di Salviati, i tre tratti delle spirali logaritmiche utilizzate sono sempre compresi tra le due spirali disegnate; le equazioni hanno parametri molto più vicini. Ovviamente questo implica comportamenti diversi per i coefficienti angolari nei punti di contatto delle spirali: essi presentano una variazione significativa in quella di Dürer, mentre nell'altra voluta si evidenzia un'approssimazione migliore della derivabilità nel punto che unisce le spire. Questo può essere proposto come esercizio sulla derivabilità in un punto, che nasce dalla ricerca di una 'proporzione architettonica' mediatrice tra la rigorosa costruzione geometrica e le qualità estetiche della forma naturale "perfetta".

4. Proiezioni per future applicazioni e conclusioni

Queste esperienze, proprie di una riflessione sull'uso della geometria per l'analisi di un oggetto architettonico e dei parametri critici per la scelta della fonte grafica idonea per lo studio, sono da prendere come spunti per analoghi lavori da svolgere nelle classi, coinvolgendo, accanto alla matematica, discipline diverse come il disegno geometrico e la storia dell'arte.

Gli esempi descritti, infatti, mostrano un nuovo utilizzo della matematica che, trasversalmente ad altre discipline ad essa naturalmente legate, tramite l'utilizzo di software di matematica dinamica come GeoGebra, propongono un approccio decisamente coinvolgente per gli studenti. Dal punto di vista dei contenuti matematici i casi di studio mostrano come si possa spaziare dall'utilizzo di semplici elementi di geometria sintetica e analitica, per descrivere rette e segmenti, circonferenze ed archi, fino a funzioni parametriche e alla descrizione di superfici di traslazione e rotazione. Questo rende adattabile il percorso a varie tipologie di corsi di studi. Infatti, esercizi analoghi a quelli proposti nelle sezioni 3.1 e 3.2 possono essere proposti anche nella scuola secondaria di primo grado, mentre per analisi più approfondite, come lo studio delle spirali affrontato in 3.3 o la descrizione analitica delle superfici fatta in 3.1, sono più adatte all'ultimo triennio delle scuole secondarie di secondo grado.

In tutti i casi, la capacità di mostrare agli studenti non solo un'applicazione diversa della matematica, ma anche un profondo legame con le altre discipline, può far capire come la matematica stessa non sia solo strumento di indagine analitica, ma possa sottendere più profondamente agli sviluppi del disegno architettonico, e non solo.

Ne consegue che sia possibile proporre esperienze che sviluppino le capacità discrezionali di individuare le geometrie di base utili a una descrizione della complessità architettonica, per macro-volumi, ma anche per micro-dettagli, lavorando su una molteplicità di fonti grafiche che spazino tra progetto e rilievo, tra sintesi comunicativa ed invenzione.

Bibliografia

Andrey, D. e Galli, M. (2004). Geometric Methods of the 1500s for Laying Out the Ionic Volute. Nexus Network Journal, 2, 2004, 31-48.

Barozzi da Vignola, G. (1562). *Regola delli cinque ordini di architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola*. [Roma]: s.e.

Carlini, A. e Tedeschini Lalli, L. (2016). Interrogare lo spazio. Roma: Gangemi.

Docci, M. (2009). Disegno e analisi grafica con elementi di storia dell'arte. Nuova edizione. Bari-Roma: Laterza.

Docci, M, Gaiani, M. e Maestri, D., (2011). *Scienza del disegno*. Novara: CittàStudi.

Fazzina, V. (2016). L'analisi grafica come strumento di conoscenza: studio della geometria della voluta ionica nei trattati di architettura dal XV al XVII secolo. In Bertocci, S. e Bini, M. (eds.). *Le Ragioni del Disegno. Pensiero, Forma e Modello nella Gestione della Complessità*. Atti del 38° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione. Firenze, 15-16-17 settembre 2016. Roma: Gangemi, pp. 311-318.

Gattuso, C. e Serpe, A. (2012). Ornamenti architettonici e modelli matematici. In L. Campanella, L. e Piccioli, C. (eds). *Diagnosis for the Conservation and Valorization of Cultural Heritage*. Atti del terzo convegno internazionale, Napoli 13-14 dicembre 2012. Napoli: Ethos, pp. 169-177.

Geymonat, L. (1980). Prefazione. Alberti, L. B., *Ludi matematici (Ludi rerum mathematicarum)*. A cura di Rinaldi, R. Firenze/Milano: Guanda.

Goredeau, J. (2012). Going round in circles. Circumambulate the Vitruvian Volute in Early Modern Architectural Theory. *Horti Hesperidum. Studi di Storia del Collezionismo e della Storiografia Artistica*, II, 2012, 61-102.

Impedovo, M. (2001). Computer algebra e insegnamento della matematica, *Quaderni del Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione Generale Classica*, 44.

Lockwood, E.H. (1967). *A Book of Curves*. Cambridge University Press, 173-164.

Losito, M. (1993). La ricostruzione della voluta ionica vitruviana nei trattati del Rinascimento. *Mélanges de l'Ecole francaise de Rome. Italie et Méditerranée*. 105, 1, 1993, 133-175.

Marchis, V. (2012). Un Politecnico in Europa. La nascita di un ateneo in un contesto internazionale (1906-61). In Marucco, D. e Accornero, C. (eds.). *Torino città internazionale: storia di una vocazione europea*. Roma: Donzelli Editore, pp. 133-146.

Marotta, A. (2001). Un "progetto logico di rilievo" tra proposta e sperimentazione. L'esempio nella cattedrale di San Donato a Mondovì. In Davico, P., Minchi Giorgetti, C. e Opalio, A. (eds.). *Rilievo e forma urbana. Il disegno dei portici. Il disegno della città*. Contributi al convegno. Torino, 6-7 dicembre 2001. Torino: Celid, pp. 31-41.

Pavignano, M (2009). *"Regola delli cinque ordini d'architettura": il disegno degli ordirni secondo Jacopo Barozzi da Vignola. Problematiche di restituzione grafica*. Tesi di laurea in Storia e Conservazione dei Beni Architettonici e Ambientali – Settembre 2009. Rel. Zich, U., corr. Di Teodoro, F. P.. Torino: Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura 2.

Pavignano, M. (2012). *Per un'analisi grafica e storica della "Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola"*. Tesi di laurea specialistica in Architettura (Restauro e Valorizzazione) – Settembre 2012. Rel. Zich., U., corr. Di Teodoro, F. P.. Torino: Politenico di Torino – Facoltà di Architettura 2.

Sala, N. e Cappellato, G. (2003). *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*. Presentazione di Mario Botta. Milano: Franco Angeli.

Serpe, A. e Frassia, M. G. 2013. Laboratorio interdisciplinare tra matematica, informatica e disegno la voluta ionica del Vignola. In Robutti, O. e Mosca, M. (eds.). *I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola: concetti, processi, valutazioni*. Atti del VI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2013. Torino 2-4 ottobre 2013 – Liceo M. D'Azeglio. Torino: Ledizioni, pp. 365-376.

Spreafico, M. L., Casnati, G., Notari, R., Pavignano, M. e Zich, U. (2016). Analisi matematica e geometrica nei profili degli ordini architettonici: esempi dalla "Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola". In Bertocci, S. e Bini, M. (eds.). *Le Ragioni del Disegno. Pensiero, Forma e Modello nella Gestione della Complessità*. Atti del 38° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione. Firenze, 15-16-17 settembre 2016. Roma: Gangemi, pp. 1282-1290.

WORKSHOP

COSA SUCCEDE IN CLASSE SE ANDIAMO ALLA RICERCA DI VARIAZIONI IN MATEMATICA?

***Silvia Beltramino*[1], *Germana Trinchero*[2]**
Liceo Scientifico "M.Curie" di Pinerolo[1], *IIS Santorre di Santarosa*[2]
silvia.beltramino@gmail.com

Abstract

L'obiettivo di questo laboratorio è illustrare con alcuni esempi pratici la metodologia della cosiddetta "ricerca variata". Il metodo consiste nel proporre agli studenti problemi in contesti prevalentemente matematici e nell' invitarli ad avanzare osservazioni e formulare ipotesi; in questo modo gli studenti sono coinvolti in un processo di ricerca di invarianti e di variazioni e si avvicinano alla costruzione di problemi che poi dovranno risolvere, il tutto accompagnato dalla necessità di sviluppare il linguaggio e la fase argomentativa.

Lo schema tradizionale (situazione data dal docente, problema posto dal docente, risoluzione da parte dello studente e dimostrazione) viene superato nella speranza di generare una comprensione più profonda e ampia.

L'articolo è scritto a più mani dai componenti di due gruppi di ricerca che in ambiti differenti hanno lavorato in questi anni sul metodo della ricerca variata: il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica[1] coordinato dal prof. Ferdinando Arzarello e il gruppo di PLS Task-design con GeoGebra[2] coordinato dalla prof.ssa Ornella Robutti. Gli esempi descritti sono frutto di alcune sperimentazioni nei due gruppi di ricerca.

Metodo della ricerca variata

Spesso le classi sono ambienti culturali in cui le attività quotidiane dei docenti e allievi si intrecciano alle pratiche quotidiane. Sono questi intrecci che principalmente definiscono e danno significato agli argomenti che vi si insegnano. Gli allievi a partire da tali pratiche elaborano, più o meno consciamente e più o meno coerentemente dei "protocolli di regole da seguire"... il senso della Matematica nasce proprio da questi intrecci. Il guaio è che spesso si corre il rischio di creare una differenza tra quello che noi docenti intendiamo trasmettere agli allievi e il senso che loro attribuiscono alle pratiche didattiche, creando così un ampio spazio per generare errori di vario tipo, misconcetti, sensazioni di ansia, paura della Matematica, inadeguatezza, ecc. Ma quali possono essere alcune pratiche didattiche che permettano di costruire un corretto senso della matematica nei nostri allievi? Come possiamo aiutarli a pensare matematicamente?[3]

---

1 I componenti del Gruppo di ricerca in didattica della matematica dell'Università di Torino sono i docenti F. Arzarello, S. Beltramino, N. Bruno, A. Delù, P. Gianino, D. Merlo, M. Mosca, A. Ruzittu, C. Sabena, C. Simondi, L. Atzori, B. Villa e E. Vio

2 I componenti del Corso Lauree Scientifiche "TaskDesign con GeoGebra" sono i docenti F. Arzarello, M.C. Balcet, S. Beltramino, F. Broglio, G. Capecchi, L. Cordiali, P. Eandi, V. Ferrazza, F. Magonara, D. Martorano, M. Mattei, D. Merlo, A. Quintavalle, O. Robutti, G. Trinchero e A. Lasa dell'Universidad Pública de Navarra durante la sua permanenza a Torino.

3 Schoenfeld in Problematizing the didactic triangle (2012) descrive l'imparare a pensare matematicamente come - da una parte - sviluppare un punto di vista matematico, valorizzare i processi di matematizzazione e astrazione e avere la predilezione per applicarli; e - dall'altra parte - di sviluppare le competenze proprie degli strumenti del mestiere, e utilizzare questi strumenti con l'obiettivo di migliorare questa comprensione "strutturale" dei fenomeni, cioè sviluppare il senso per la matematica (mathematical sense-making).

Il metodo della ricerca variata prova a dare delle risposte in quest'ottica. Come già affermato ci si propone di presentare agli studenti un contesto puramente matematico in cui loro stessi diventano studenti investigatori, alla ricerca di possibili osservazioni, di regolarità e di invarianti. La richiesta non è quella di risolvere un problema ma si chiede agli studenti che cosa osservano, invogliandoli a comunicare le osservazioni facendo particolare attenzione al linguaggio, ma nello stesso tempo iniziano lentamente a chiedersi se le loro osservazioni sono vere e corrette e se sono di carattere generale o meno. Nascono quindi piccoli problemi a cui loro stessi i compagni cercano delle risposte. In una fase successiva, guidati dal docente, gli studenti provano a fare delle piccole variazioni alla situazione: le osservazioni avanzate sono ancora valide? Che cosa rimane invariato e che cosa no? Le variazioni hanno un carattere comune? Una radice comune oppure no? La fase finale è sempre una fase di istituzionalizzazione e di formalizzazione da parte del docente.

Alcuni esempi: A caccia di quadrati

L'attività è stata proposta nella scuola primaria, secondaria di primo grado e nella classe prima della scuola secondaria di secondo grado. Qui si fa riferimento alla sperimentazione in due classi prime di scuola secondaria di secondo grado.[4]

L'attività prende avvio con la seguente consegna:

Guardate la seguente tabella.

$1 \cdot 3$	3
$2 \cdot 4$	8
$3 \cdot 5$	15
$4 \cdot 6$	24
$5 \cdot 7$	35

Che cosa osservate?

Dal punto di vista metodologico, dopo aver esplicitato la richiesta di osservare la tabella, gli studenti lavorano da soli per circa 10 minuti per poi condividere le proprie osservazioni in piccoli gruppi omogenei con lo scopo di arrivare a osservazioni condivise dal gruppo. Ne segue una lezione dialogata, guidata dal docente, per condividere le osservazioni.

Il contesto è prettamente matematico e apparentemente semplice, in questo modo non si esclude nessuno e anche gli allievi più deboli sono incentivati ad avanzare osservazioni. Inoltre non c'è un esplicito problema da risolvere, così si supera la paura di poter avere una risposta sbagliata.

Si osserva da parte degli allievi una particolare attenzione al linguaggio: come faccio a dire che cosa ho osservato e a farmi capire? Inoltre gli studenti pongono molta attenzione a riconoscere tra le affermazioni avanzate quelle veritiere e quelle no, ricercando spontaneamente una regolarità, verificata poi con l'aiuto di un foglio di calcolo. Riportiamo alcuni esempi di osservazioni:

- sono sempre delle moltiplicazioni
- i fattori distano sempre 2 tra loro
- il primo fattore è sempre il successivo del primo fattore della riga precedente
- i risultati sono in ordine crescente, crescono sempre di più e se sottraiamo il prodotto di una riga con il prodotto della riga precedente otteniamo sempre un numero dispari, anzi si ottengono tutti i numeri dispari in successione partendo da 5

4 Si tratta della 1° Bnr del Liceo Scientifico "M. Curie" di Pinerolo e della 1° A Liceo opzione Scienze Applicate dell'I.I.S. "G. Peano" di Torino

- i risultati sono quasi dei quadrati: sono sempre il precedente di un quadrato perfetto, del quadrato perfetto del numero che sta in mezzo tra i due fattori

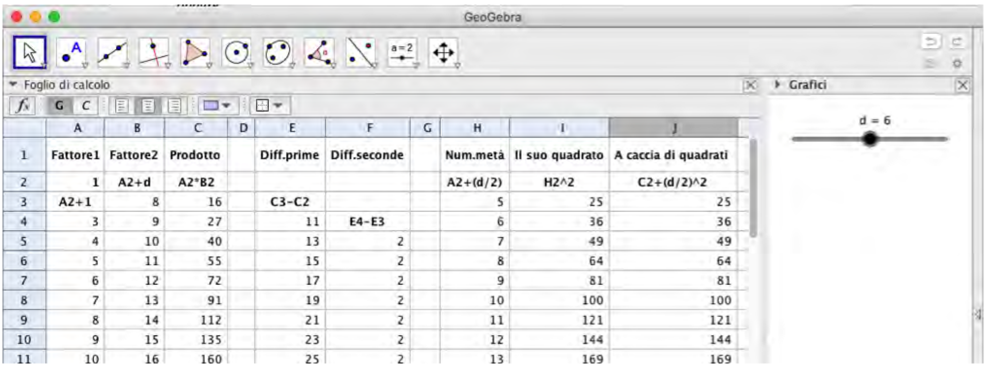
Per agevolare l'esplorazione alla ricerca di esempi, controesempi o regolarità, si propone agli allievi l'utilizzo di un foglio di calcolo. In Fig. 1 si riporta il foglio di calcolo impostato dagli studenti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Fattore1	Fattore2	Prodotto		Diff.prime	Diff.seconde		Num.metà	Il suo quadrato	A caccia di quadrati
2	1	A2+2	A2*B2					A2+1	H2^2	C2+1
3	A2+1	4	8		C3-C2			3	9	9
4	3	5	15		7	E4-E3		4	16	16
5	4	6	24		9	2		5	25	25
6	5	7	35		11	2		6	36	36
7	6	8	48		13	2		7	49	49
8	7	9	63		15	2		8	64	64
9	8	10	80		17	2		9	81	81
10	9	11	99		19	2		10	100	100

Figura 1. Foglio di calcolo per verificare le osservazioni avanzate in precedenza sulla tabella.

Il prosieguo è quasi *normale*: che cosa succede se si modifica la distanza tra i due fattori? Si troverebbero ancora i quadrati se la distanza tra i fattori fosse di 4? E se fosse di 6?

Il foglio di calcolo viene quindi arricchito con uno slider che regola la distanza tra i fattori (Fig. 2).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Fattore1	Fattore2	Prodotto		Diff.prime	Diff.seconde		Num.metà	Il suo quadrato	A caccia di quadrati
2	1	A2+d	A2*B2					A2+(d/2)	H2^2	C2+(d/2)^2
3	A2+1	8	16		C3-C2			5	25	25
4	3	9	27		11	E4-E3		6	36	36
5	4	10	40		13	2		7	49	49
6	5	11	55		15	2		8	64	64
7	6	12	72		17	2		9	81	81
8	7	13	91		19	2		10	100	100
9	8	14	112		21	2		11	121	121
10	9	15	135		23	2		12	144	144
11	10	16	160		25	2		13	169	169

Figura 2. Foglio di calcolo arricchito con lo slider d per la distanza tra i due fattori.

Inoltre il foglio di calcolo avvicina gli studenti al linguaggio algebrico grazie all'uso delle formule (riportate in alto alle colonne): l'espressione n(n+d) assume un senso, gli studenti inizialmente scrivono tale espressione come Fattore1(Fattore1+distanza). Al termine di questa fase, nella discussione matematica che è seguita, si è giunti alla seguente formalizzazione:

- se i fattori distano tra loro 2 allora aggiungendo 1 al loro prodotto si ottiene il quadrato del numero che sta a metà tra i due fattori
- se i fattori distano tra loro 4 allora aggiungendo 4 al loro prodotto si ottiene il quadrato del numero che sta a metà tra i due fattori
- se i fattori distano tra loro 6 allora aggiungendo 9 al loro prodotto si ottiene il quadrato del numero che sta a metà tra i due fattori

Le frasi sono volutamente simili, viene così spontaneo affermare: «se i fattori distano tra loro ... allora aggiungendo ... al loro prodotto si ottiene il quadrato del numero che sta a metà tra i due fattori» (si veda Fig 3)

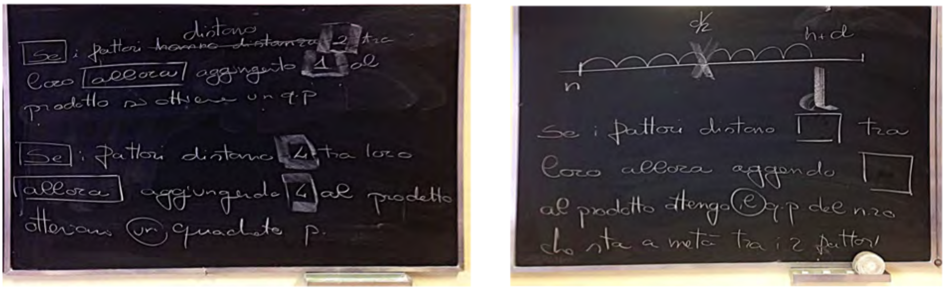


Figura 3. Esempi di lavagne al termine della discussione matematica per generalizzare

Con una discussione successiva si arriva alla formalizzazione verbale prima (si vedano Fig. 3 e 4), e mediante il linguaggio algebrico successivamente:

- $n \cdot (n+2) + 1 = (n+1)^2$
- $n \cdot (n+4) + 4 = n \cdot (n+4) + 2^2 = (n+2)^2$
- $n \cdot (n+6) + 9 = n \cdot (n+6) + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \left(n + \frac{6}{2}\right)^2$
- $n \cdot (n+d) + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(n + \frac{d}{2}\right)^2$

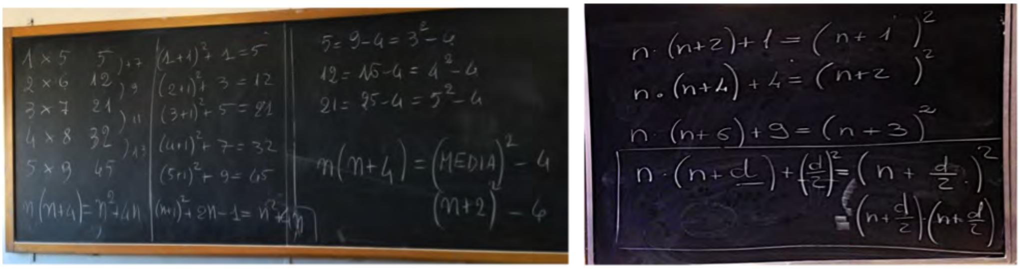


Figura 4. Esempi di lavagne al termine della generalizzazione: il quadrato di binomio.

Il gioco del “Se fosse” è proseguito in maniera spontanea dai ragazzi stessi con le seguenti domande: Se si inizia da zero, vale lo stesso? Vale solo se *d* pari? Qual è il significato della differenza tra i risultati? Possiamo utilizzare ora la parola *sempre*?

La seconda attenzione degli studenti era rivolta alle differenze prime costanti, ecco le nuove indicazioni di lavoro:

Osservate la tabella.

0	*0*
1	*3*
2	*6*
3	*9*
4	*12*
5	*15*
6	*18*

Quali osservazioni potete fare? Giustificate le vostre osservazioni.

Il lavoro con gli studenti segue lo stesso procedimento descritto in precedenza. Grazie all’aiuto di GeoGebra si arriva così all’introduzione degli andamenti lineari.

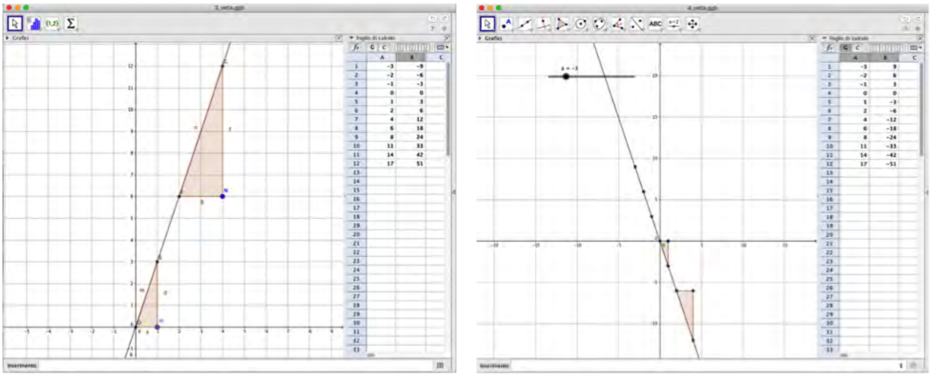


Figura 5. Esempi di videate di GeoGebra: si osservi il doppio registro numerico e grafico. Nella videata a destra compare uno slider per rispondere alle domande «Che cosa succede se la differenza costante delle ordinate fosse -3?» «E se fosse +2?» «E se la differenza non fosse costante?»

Parabola

L'attività è stata utilizzata nelle classi o per introdurre la parabola o come problema di approfondimento a seguito della spiegazione della parabola. È costituita da sette sezioni caratterizzate dall'alternanza di fasi di lavoro in piccoli gruppi e momenti di confronto intergruppo, configurati come una discussione matematica mediata dal docente. Le prime quattro sezioni sono proponibili in due ore, la quinta sezione è relativa ad un compito da svolgere a casa, le ultime tre sezioni si possono svolgere in un'ora di lezione.

1) Osservazione

Viene fornita agli studenti la seguente tabella:

0	1
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26

Essa è pensata come ascisse e ordinate della parabola di equazione .

Si invitano gli studenti a riflettere liberamente. Esempi di osservazioni:

- Le differenze prime sono i numeri dispari
- Le differenze seconde sono costanti: si ottiene il numero 2
- La seconda colonna è il quadrato della prima più uno
- Ricorda la tabella usata per costruire una retta

Gli studenti espongono le proprie osservazioni un gruppo per volta. Il docente media la discussione e cerca di valorizzare le osservazioni più utili al fine dell'attività. In particolare si cerca di sfruttare il collegamento con il "quadrato più uno" per formalizzare l'equazione . A questo punto si evidenzia la somiglianza con le tabelle usate per disegnare le rette e si propone di utilizzare il software GeoGebra. Si consiglia di scrivere le osservazioni più importanti in un riquadro sulla lavagna che può essere riguardato anche durante le altre fasi.

2) GeoGebra e osservazione

Dapprima gli studenti vengono invitati a riscrivere la tabella. Devono sfruttare la relazione per inserire la formula nel foglio di calcolo. Viene richiesta la creazione di una lista di punti. Il docente non deve interferire nella ricerca della formula: può semplicemente aiutare i gruppi in caso di problematiche tecnologiche legate all'utilizzo di GeoGebra. Si richiede di scrivere le proprie osservazioni. Potrebbero emergere tentativi di formalizzazione oppure osservazioni legate al grafico come: non è una retta, è fatto di soli punti.

3) Discussione

Nel caso non sia già emersa, si invitano gli studenti a riflettere sulle formule inserite, così da giungere alla formalizzazione della funzione $y = x^2 + 1$. Il docente invita la classe a pensare alle limitazioni (per esempio i numeri naturali che originano dei punti nel grafico) e se queste siano necessarie: *Solo i numeri naturali hanno il quadrato? E se considerassimo i numeri negativi? E i razionali? E i reali?* Si chiede ai ragazzi di inserire la funzione appena formalizzata nella barra apposita su GeoGebra per mostrare che segue i punti già disegnati. Si torna alle altre osservazioni, portando a riflettere se le differenze prime siano veramente i numeri dispari e le seconde davvero costanti, servendosi del foglio di calcolo. Il docente può concludere questa prima sessione dell'attività con una domanda: *le differenze seconde sono sempre costanti anche per altre parabole? Potremmo provare a formulare una congettura?*

4) Compito a casa

Come sarebbe se invece di $y = x^2 + 1$ avessimo $y = 2x^2 + 1$? E con $y = -x^2 + 3x - 1$? Valgono sempre le congetture sulle differenze prime e seconde? Prova con altri due esempi a tua scelta e scrivi le tue osservazioni a livello della tabella e del grafico.

5) Discussione

Ognuno espone i risultati trovati. Possono emergere molte osservazioni:

- Le differenze seconde sono il doppio del coefficiente di x^2
- Se è negativo il grafico viene capovolto
- Più è grande più la parabola è stretta
- In generale valgono le regole delle differenze prime e seconde

Il docente cerca di mediare la discussione favorendo le osservazioni collegabili con le caratteristiche dei parametri che verranno esposte in seguito. Si consiglia di inserire le osservazioni più interessanti in un riquadro visibile durante lo svolgimento delle successive fasi.

6) GeoGebra e osservazioni

Il docente evidenzia come possa essere più utile, invece di fare mille esempi con numeri diversi, cercare di generalizzare, guidando la classe alla formulazione di $y = ax^2 + bx + c$.

Suggerisce poi di utilizzare uno strumento di GeoGebra per variare i numeri a proprio piacimento senza dover rifare ogni volta la tabella. Gli studenti dovrebbero inserire a questo punto gli slider. Variare e osservare nuovamente, con particolare attenzione ai casi limite, un coefficiente o due pari a zero. Osservare anche i cambiamenti nelle differenze divise. Ogni gruppo scrive le proprie osservazioni.

7) Discussione

Potrebbero emergere osservazioni del tipo:

- Se a, b, c sono 0 allora…
- Cambio c e non cambiano le differenze…nel grafico cambia l'intersezione…
- Cambio b e non cambiano le differenze seconde…cambia la posizione…
- Cambio a e cambia la forma…cambiano le differenze seconde…sempre il doppio di a…

Il docente media la discussione cercando di evidenziare le osservazioni significative e il collegamento con le osservazioni precedenti. Pone una domanda: *le differenze funzionano sempre così? Perché?* Il docente indirizza i ragazzi verso le giuste generalizzazioni, contenute nella tabella sottostante, e li invita a calcolare i valori iniziali delle differenze, sottolineando l'introduzione del passo *h*.

x	f(x)	df(x)	ddf(x)
x_0	$a(x_0)^2 + bx_0 + c$		
$x_0 + h$	$a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$	$ah^2 + 2ahx_0 + bh$	
$x_0 + 2h$	$a(x_0 + 2h)^2 + b(x_0 + 2h) + c$	$3ah^2 + 2ahx_0 + bh$	$2ah^2$
$x_0 + 3h$	$a(x_0 + 3h)^2 + b(x_0 + 3h) + c$	$5ah^2 + 2ahx_0 + bh$	$2ah^2$
$x_0 + 4h$	$a(x_0 + 4h)^2 + b(x_0 + 4h) + c$	$7ah^2 + 2ahx_0 + bh$	$2ah^2$
$x_0 + 5h$	$a(x_0 + 5h)^2 + b(x_0 + 5h) + c$	$9ah^2 + 2ahx_0 + bh$	$2ah^2$

Il correlativo cognitivo del cambiamento è l'attenzione a ciò che cambia e a come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione. Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai valori quantitativi ma anche e soprattutto alle loro differenze e ai modi di rappresentarle e manipolarle per ragionarci.

Le differenze finite sono uno strumento potente che permette, tra le altre cose, di preparare il calcolo differenziale fin dai primi anni e nel contempo uno strumento facilmente implementabile con i software didattici. Sfruttando le differenze finite si propone agli studenti un'ulteriore attività presentando in classe la seguente tabella e chiedendo agli studenti: *Che cosa osservate?*

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

In seguito è possibile, utilizzando GeoGebra, procedere a un'esplorazione attraverso il trascinamento gli slider (si vedano le Fig. 6, 7 e 8): si esplora il file per cercare la relazione tra i valori m, n, p dell'equazione della parabola $y = mx^2 +nx + p$, i valori nella tabella, la rappresentazione grafica e le differenze finite. La ricerca induce a congetturare.

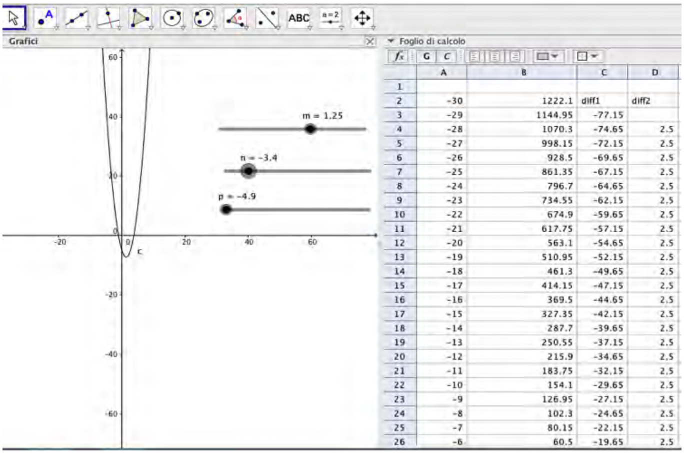


Figura 6. Esempi di videate di GeoGebra: con il doppio registro numerico e grafico. Nella videata a sinistra compaiono gli slider m, n, p corrispondenti alla parabola $y = mx^2 + nx + p$: Cosa succede al variare di essi? Se si modificano il valore di n, le colonne f(x), diff1 cambiano mentre diff2 non cambia; gli studenti intuiscono che la crescita/decrescita della parabola dipende da n, ma così non è per la sua concavità.

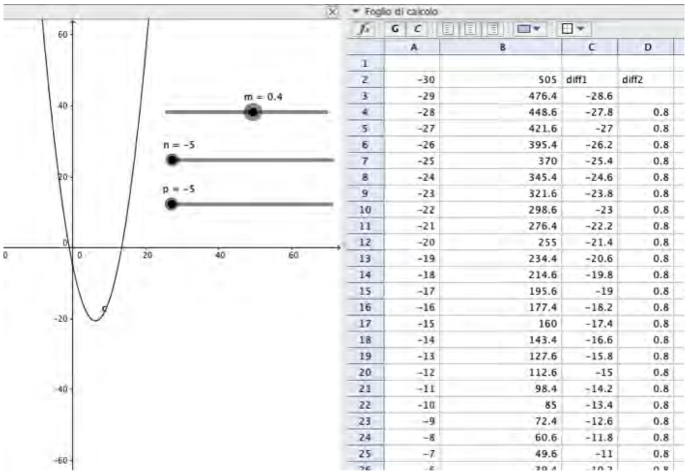


Figura 7. Se si modifica il valore di m, cambiano f(x), diff1, diff2. Gli studenti argomentano quindi che la concavità della funzione dipende solo da m

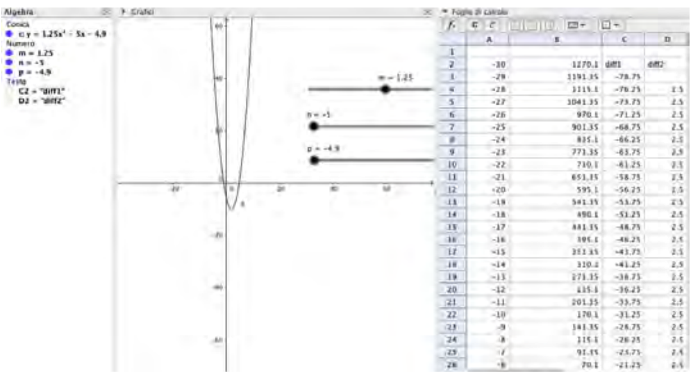


Figura 8. Se si modificano il valore del termine noto p, solo la colonna delle f(x) cambia mentre le altre non cambiano; argomentano quindi che il modo in cui la funzione cresce/decresce non dipende da questo termine

Che cosa è successo in classe?

L'attività è stata proposta in tre classi di scuola secondaria di secondo grado.[5] Osservando la tabella iniziale gli studenti avanzano alcuni considerazioni:

Figura 9. Alcuni protocolli degli studenti

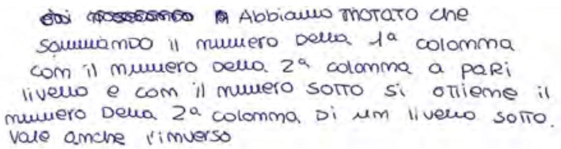


Figura 10. Protocolli studenti

x	x^2+1	Δf	Δ^2f
1	2		
2	5	3	
3	10	5	2
4	17	7	2
5	26	9	2

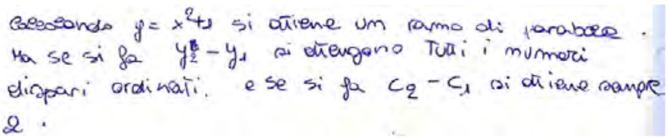


Figura 11. Protocolli studenti

Un aspetto da non trascurare e a nostro avviso molto interessante è quello del graduale sviluppo del linguaggio (Fig. 12).

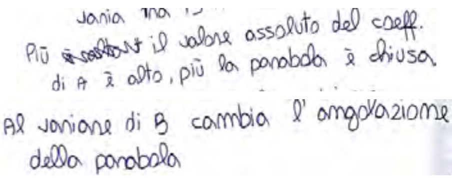


Figura 12. Protocolli studenti

La lezione dialogata successiva ha permesso al docente di formalizzare le conoscenze e sistemare il linguaggio.

I rifugi e l'asse del segmento

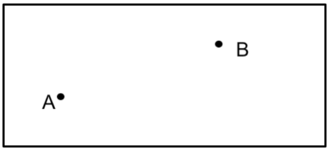
L'ultimo esempio è un'attività proposta in due classi della scuola secondaria di primo grado[6].

5 La terza A del Liceo scienze umane indirizzo economico sociale "Santorre di Santarosa", in una terza del Liceo Scientifico "Valsalice" di Torino e nella 2°C del L.S. "F. Juvarra" di Venaria Reale (TO).

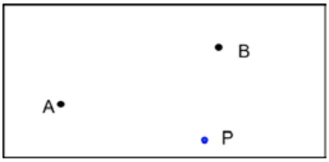
6 La 2°A dell'I.C. di Airasca e la 1°A dell'I.C. di Airasca presso la sede staccata di Scalenghe

L'attività inizia con la seguente indicazione di lavoro:

Nel rettangolo è rappresentato lo schema di un videogioco.



I punti A e B rappresentano due rifugi in cui Paolo è salvo. Paolo può correre solo in linea retta per raggiungere i due rifugi.
Se Paolo si trova nel punto P, in quale rifugio gli conviene andare per essere salvo? Perchè?



Se Paolo si sposta in un altro punto, sarà sempre conveniente lo stesso rifugio individuato prima? Perché?
Colorate di giallo la zona di piano in cui a Paolo conviene andare nel rifugio A e di azzurro la zona in cui a Paolo conviene andare nel rifugio B. Che cosa osservate?

Gli studenti hanno lavorato in piccoli gruppi omogenei (4 ragazzi per gruppo), si riportano qui alcune risposte:

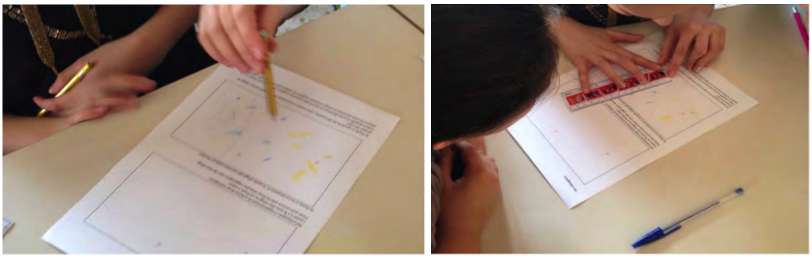


Figura 13. Fase di lavoro di un gruppo, i ragazzi hanno descritto il loro modo di lavorare: "Abbiamo scelto a caso dei punti del piano: chiudevamo gli occhi e con la matita toccavamo a caso il foglio, poi per ogni punto abbiamo misurato la distanza e abbiamo colorato di giallo o blu il punto a seconda della misura"

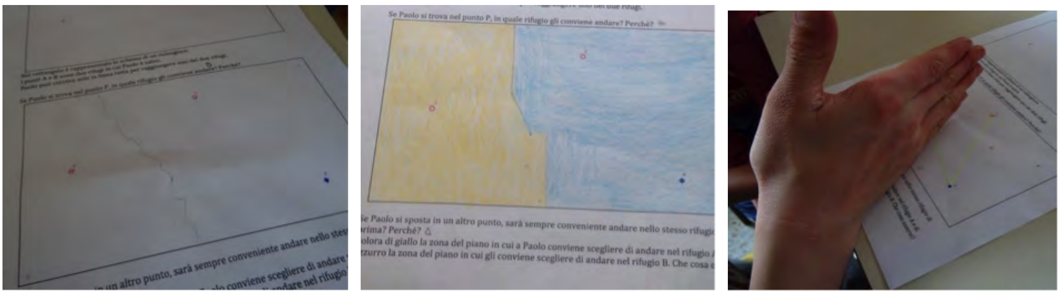


Figura 14. Altri due gruppi hanno dichiarato di essere "andati a caso" e di aver intuito che "se Paolo sta pressappoco su una linea in mezzo ad A e B, allora la distanza è la stessa"

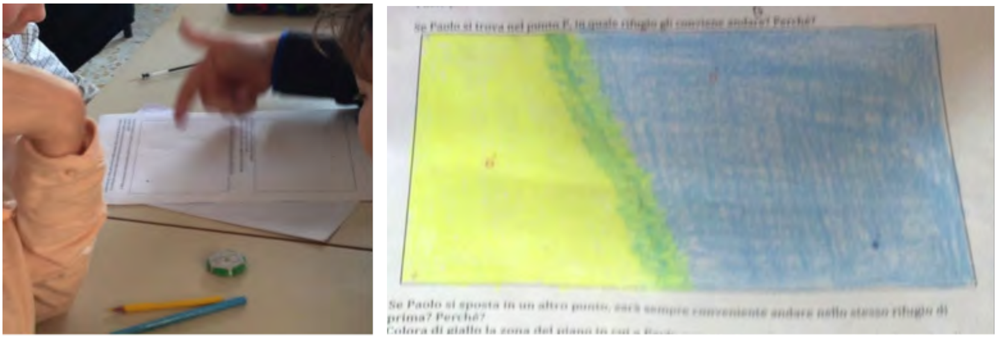


Figura 15. Momento di lavoro in gruppo e risultato finale. Le parole dei ragazzi: "Abbiamo discusso molto: esiste una zona a metà sfumata in cui è lo stesso per Paolo andare nel rifugio A o nel rifugio B, l'abbiamo colorata di verde"

Nella lezione dialogata successiva l'insegnante riprende il lavoro dei ragazzi e in particolare il prodotto dell'ultimo gruppo… si riporta brevemente un estratto della discussione:

> Insegnante: "Perché avete deciso di fare una fascia?"
>
> Marco: "Perché c'è una zona che è indifferente andare a A o B"
>
> Anna: "Per me non è vero, perché se sei più a sinistra sei più vicino a A o se sei a destra è più vicino a B"
>
> Insegnante: "A sinistra o destra di cosa?"
>
> Anna: "Della fascia… guarda" (indica)
>
> Luca: "Non c'è una zona, la linea non ha dimensione"
>
> Marco: "Ma se è una linea, allora non va fatta a stima... bisogna farla con la squadra e la fascia verde è stretta come una linea"

Il lavoro continua proponendo tre rifugi *E se i rifugi fossero tre, esiste una zona verde in cui la distanza è la stessa dai tre rifugi?*

La risposta viene trovata indagando con GeoGebra

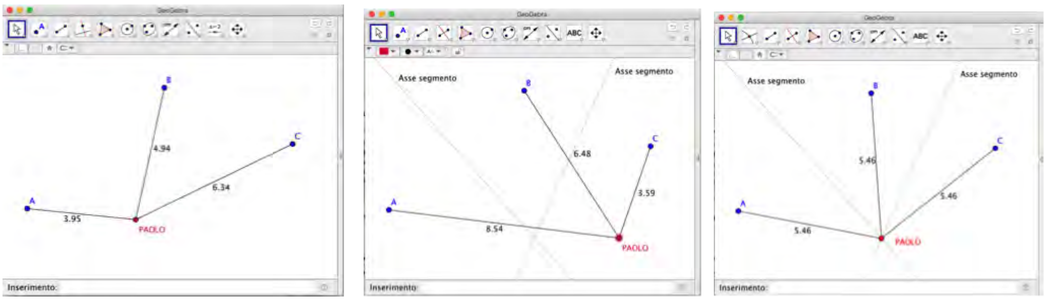


Figura 16. Videate di GeoGebra create dagli studenti per individuare la risposta.

Gli studenti sono stati coinvolti nella fase di ricerca e esplorazione, senza essere invitati a farlo hanno iniziato anche a modificare le posizioni dei rifugi, così le ulteriori domande a cui si può cercare una risposta possono essere: *E se i rifugi fossero allineati? E se fossero tre punti a caso su una circonferenza? E se i rifugi fossero quattro?*

Bibliografia

Arzarello, F. (2016). *Apprendere la Matematica: gli studenti come ricercatori.* 3° scuola estiva UMI-CIIM, http://www.umi-ciim.it/attivita-della-ciim/scuole-estive/3a-scuola-estiva-2016/

Boaler, J., & Staples, M. (2008). *Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School*. Teachers College Record

Schoenfeld, A. (2012). Problematizing the didactic triangle, *ZDM*

Silver, E. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: what might we learn? *ZDM Mathematics Education* 41: 827–832

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). *Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform*

GEOGEBRA NON È UNA LAVAGNA DINAMICA ESPERIENZE DAI CORSI DE LA CASA DEGLI INSEGNANTI – CTS

Ada Sargenti, Maria Cantoni, Donatella Merlo
La Casa degli Insegnanti
adasar@gmail.com

Abstract

Il lavoro con GeoGebra comporta per noi una riflessione sulle metodologie di insegnamento della matematica che ci paiono doversi modificare in funzione dell'uso del software. Esso dovrebbe portare nella direzione di studenti attivi nella costruzione del loro sapere con docenti più attenti alle difficoltà che emergono nell'evolversi del lavoro, in un processo sempre controllato.

Ciò che vogliamo qui esemplificare è come lo strumento sia in grado di dare vantaggio "economico" e procedurale, ma soprattutto divenga suggeritore di processi intelligenti. Essi ci portano in campi inesplorati e ci concedono di costruire realtà nuove. Sono presentati tre esempi per diversi livelli scolari: secondaria di I e II grado e primaria.

Introduzione

I primi corsi ufficiali da parte de La Casa degli Insegnanti, che è partner nel GeoGebra Institute di Torino, hanno avuto luogo nell'anno scolastico 2010-11. Più che "corsi" noi preferiamo chiamarli "percorsi" perché gli obiettivi sono ben più articolati rispetto alla semplice conoscenza del software. Nella progettazione delle proposte fatte negli anni entrano infatti in gioco molti aspetti di formazione. Il lavoro con GeoGebra comporta per noi una riflessione sulle metodologie di insegnamento della matematica che ci paiono doversi modificare in funzione dell'uso del software.

GeoGebra porta la mente a formulare ipotesi, a tenere presente ciò che man mano emerge dall'analisi della situazione e permette il giusto richiamo alle conoscenze che spesso non sono attive se non sollecitate. *Vedremo allora come un utilizzo precoce del software, fin dalla scuola primaria, consenta agli allievi di raggiungere con più facilità le astrazioni geometriche con cui dovranno confrontarsi nei gradi scolastici successivi fino al biennio della scuola superiore e oltre. Immaginiamo quindi un percorso a ritroso servendoci di alcuni problemi-tipo di cui studieremo le strategie risolutive con l'uso di GeoGebra.*

Un esempio per la scuola secondaria di II grado

Parlando con i docenti di scuola secondaria emerge spesso che GeoGebra viene affiancato ad una tradizionale didattica in cui il docente spiega e fa esercizi e poi fa "vedere" con GeoGebra che quanto spiegato o risolto … è proprio così! Si ritiene infatti che la dinamicità del software da sola supplisca alle difficoltà che gli studenti incontrano nella comprensione dei concetti. Sicuramente la dinamicità è un aspetto importante, ma va collegata alla scoperta ed alla riflessione personale perché altrimenti rimane un gioco che può anche risultare sterile.

Un esempio significativo di questa situazione è un problema per una classe terza di scuola secondaria di II grado, preso da un libro di testo molto diffuso. In esso si chiede di trovare il luogo del baricentro G di un triangolo di cui sono date le coordinate di due vertici (A e B), al variare del terzo (P) su una retta r data. L'obiettivo è quello di impratichirsi nella risoluzione di esercizi della geometria analitica, cosa per altro anche importante, ma che può diventare un meccanismo sterile, senza senso per gli studenti, se visto fine a se stesso. Alla fine dell'esercizio il testo propone un file GeoGebra in cui il grafico “conferma” dinamicamente quanto ottenuto per via algebrica, forse nell’ottica di superare questo meccanicismo improduttivo.

Infatti il suggerimento è quello di usare la funzionalità *Traccia* appunto per visualizzare il fatto che il luogo descritto dal baricentro è una retta parallela a *r* (Figura 1), cosa che comunque dovrebbe già essere ampiamente giustificata dal fatto che il luogo trovato per via algebrica ha la stessa pendenza della retta *r*.

I dati del problema sono per altro molto particolari: infatti il lato AB risulta esso stesso parallelo alla retta *r* su cui si muove il terzo vertice. Avrebbe allora molto più senso utilizzare GeoGebra per provare a rispondere ad alcune domande che il grafico suggerisce:

- Il fatto che il luogo del baricentro sia una retta parallela a *r* dipende dal fatto che anche AD è parallela a *r*?
- Che cosa accade se modifichiamo l’equazione della retta *r*?
- Che cosa accade se la posizione di A e B viene modificata?
- Insomma che cosa accade se generalizziamo il problema?
- Perché questo accade?
- Quale la giustificazione geometrica?

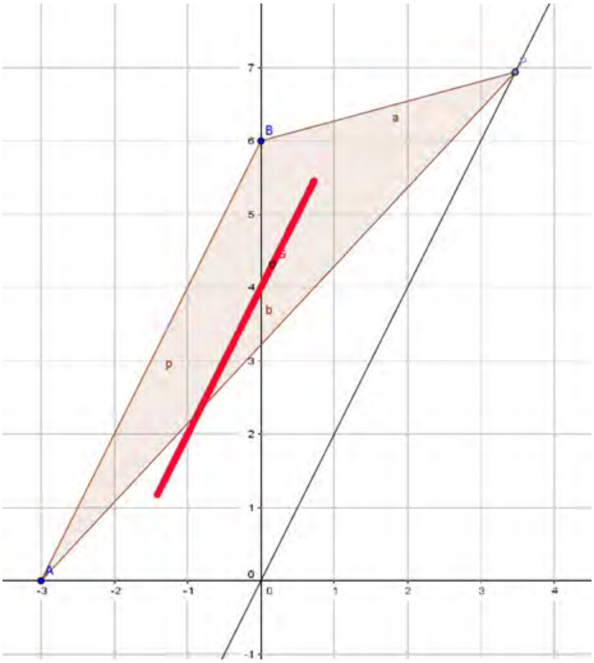


Figura 1. Rappresentazione grafica del problema.

Alcune di queste questioni sarebbero difficilmente affrontabili da un punto di vista algebrico perché la generalizzazione dei dati porterebbe a calcoli complessi. È pertanto comprensibile la scelta dell’autore di dati “semplici” per i calcoli. Meno comprensibile risulta “appiccicare” l’uso di GeoGebra ad un problema semplice in cui il software nulla aggiunge alla conoscenza e alla comprensione senza procedere ad un approfondimento.

L’uso di GeoGebra richiede infatti una metodologia didattica, applicabile anche a questo esercizio, molto più ricca di senso e riflessioni per gli studenti.

Intanto si può partire da un triangolo qualsiasi, quindi si può osservare che cosa accade al baricentro variando i due vertici A e B (Figura 2*a*). Si può inoltre modificare più volte la retta su cui si muove P ed osservare cosa accade al luogo di G (Figura 2*b*).

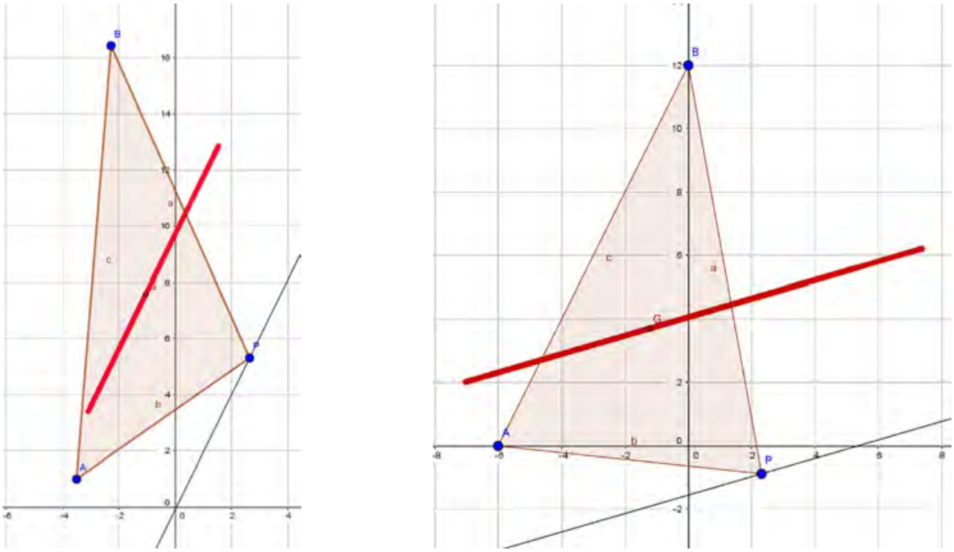


Figura 2. Rappresentazione al variare di A e B (a) e di r (b)

L'osservazione dovrebbe portare prima alla scoperta delle regolarità nel comportamento (il luogo di G è una retta parallela a *r*, indipendentemente dalla posizione di A e B) e quindi alla ricerca di una giustificazione logica delle osservazioni.

Siccome si parla di rette parallele, è un'ottima occasione per recuperare il teorema di Talete e vederne quindi una applicazione. La possibilità di tracciare con GeoGebra la parallela a *r* passante per il punto medio F di AB consente di visualizzare la situazione e giustificare quindi il parallelismo osservato.

La mediana PF che si modifica al variare di P sulla retta *r* (Figura 3) risulta essere una trasversale *in movimento* tra le rette. Poiché il rapporto tra i segmenti che vengono individuati su di essa è costante (2:1) mentre si muove, le tre rette sono tra loro parallele.

Solo dopo che il senso del tutto è stato acquisito, si può passare alle esercitazioni con i calcoli, magari a questo punto anche un po' più complessi di quelli proposti nell'esercizio del testo.

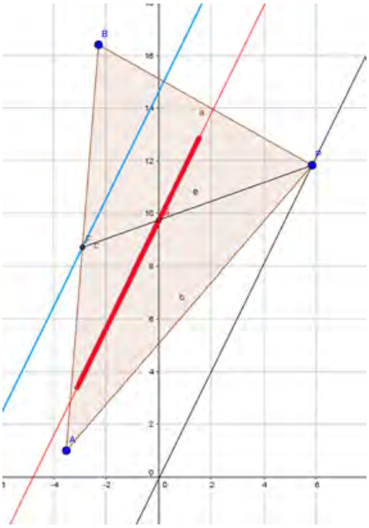


Figura 3

Il problema può dunque risultare utile anche nel biennio, quanto si affronta il problema dei luoghi geometrici e come applicazione del teorema di Talete, se viene svincolato dall'interpretazione analitica.

Evidentemente un processo in cui gli studenti in prima persona scoprono, riflettono e giustificano una proprietà ha una valenza didattica superiore rispetto ad una passiva accettazione di quanto viene spiegato e ad una meccanica applicazione di procedure risolutive. E sicuramente GeoGebra può diventare un utile strumento se pensato come aiuto agli studenti per la comprensione dei concetti in modo autonomo.

Un esempio per la scuola secondaria di I grado

Il problema della scuola secondaria di primo grado si pone quasi sempre come legato ad una matematica che soggiace alla misura e non prepara al futuro approfondimento, soprattutto in rigore ed astrazione, che verrà chiesto successivamente agli studenti.

Non crediamo sia sostanzialmente questo il problema, ma piuttosto la visione, all'interno del triennio, di un corpo di 'nozioni' portate agli allievi come patrimonio già costruito dall'alto ed offerto come cosa di cui "nutrirsi" e usare all'interno di esercizi "adeguati".

Se questo fosse vero, non crediamo però che avvenga solo a questo livello scolare, ciò accompagna spesso lo studente in tutto il suo percorso scolastico.

Vogliamo allora sottolineare alcune esperienze prese all'interno di un 'itinerario' completamente diverso, a partire dalle suggestioni della realtà, da costruire con gli allievi stessi. Tutto ciò che si raggiunge col passaggio dalle cose concrete alle prime immagini mentali che diverranno poi concetti, dovrà essere stabile strumento su cui fondare ed evolvere con gli allievi una nuova idea di matematica. È questo che abbiamo cercato di socializzare coi colleghi nei corsi di GeoGebra, aiutati dalle potenzialità dello strumento tecnologico e ci siamo messi in comunicazioni con il lavoro delle scuole successive e precedenti.

Quale livello possiamo raggiungere alla scuola secondaria di primo grado? Nelle nostre ipotesi tale livello scolare ha un compito più importante di ciò che non si creda. La mente degli studenti evolve velocemente a quell'età nella capacità di astrazione e va sfruttata convenientemente. Essa dovrà allora essere in grado di consegnare alla scuola successiva delle menti aperte a cogliere sempre più il lavoro che la mente sa fare nello strutturare il risultato di esperienze, riflessioni, scoperte, il tutto accompagnato da un linguaggio che è insieme strumento e nuova realtà da elaborare.

Nella breve presentazione abbiamo potuto esprimere solo un cenno di tutto ciò che avrebbe avuto bisogno di un lungo discorso, ma l'abbiamo evidenziato con uno spunto didattico che pensiamo abbia "parlato" in tale direzione: abbiamo visto l'uso del teorema di Pitagora in una situazione matematica originale, il teorema di Pitagora visto come 'strumento' per … , il teorema di Pitagora che pare sempre la "cosa" più scontata per i ragazzi di quell'età!

Una suggestione che abbiamo preso al volo

Chapter 1, entitled "Mamikon's Sweeping-Tangent Theorem," was the starting point of π standard calculus problems by a geometric method that makes little or no use of formulas.

Il testo richiamava l'equivalenza dell'area di una corona circolare con quella di una circonferenza.

Abbiamo analizzato con GeogGebra la situazione da un punto di vista nuovo.

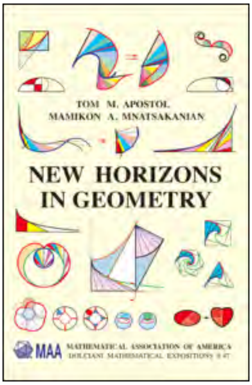


Figura4

Sempre di fronte ad un problema ci si dovrebbe domandare quali siano gli strumenti che si hanno a disposizione perché il lavoro da compiere possa essere proficuo. Tutto ciò ha portato anche a "prendere in mano" la proprietà distributiva.

Quando gli allievi si trovano l'area di una corona circolare si portano, a livello di calcolo, ad una scrittura del tipo

1) $6^2\ \pi - 3^2\ \pi$ = ...

Rivediamo un momento la proprietà (qualche calcolo si fa già alla scuola primaria dove viene 'nominata'!) come gli allievi la vedono in qualche esempio

7 * 23 = 7 (20 + 3) = 7 * 20 + 7 * 3 = ...

⇒ ⇒ ⇒

un'evoluzione di scrittura da sinistra a destra che non è mai accompagnata dalla presa di coscienza che possa essere anche 'letta' da destra a sinistra perché il linguaggio usato è altro da quello della lingua naturale. Ma la proprietà distributiva è alla base della sintassi algebrica. Che significa "sommare" monomi simili altrimenti? …

Possiamo allora rivedere la 1) andando alla suggestione della rappresentazione grafica $\pi(6^2 - 3^2) = AB^2\ \pi$! proprietà distributiva e Teorema di Pitagora! Allora una circonferenza di raggio AB così raggiunta è equivalente alla corona circolare!

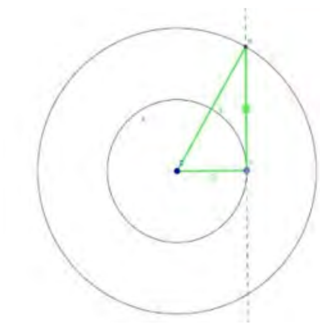


Figura 5

Vediamo dove GeoGebra ci conduce ... anche animando la situazione.

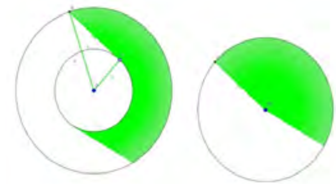


Figura 6

GeoGebra ci consente la massima variabilità e di andare oltre e vedere la situazione in 3D.

Abbiamo qui analizzato anche la situazione inversa: a partire da una circonferenza siamo arrivati alla variabilità delle corone circolari. Abbiamo studiato le infinite corone circolari equivalenti ad una circonferenza e l'equivalenza di cilindri e coni relativi, di cui diamo un'immagine in Figura 7.

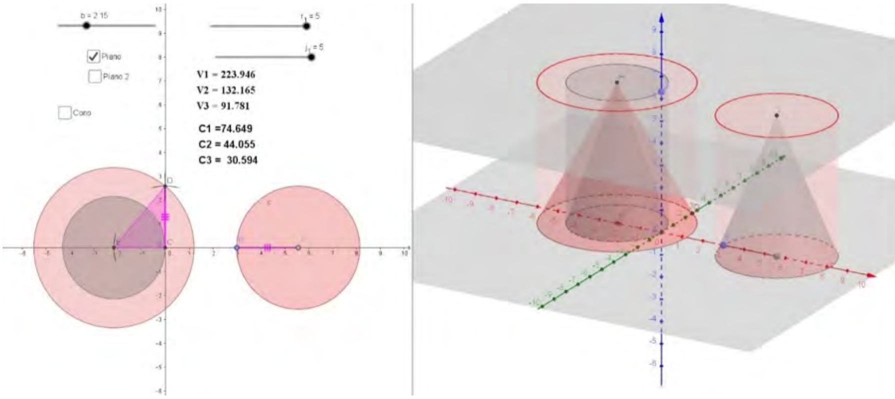


Figura 7

Il teorema di Pitagora ci ha portato a ritroso ad accennare al percorso per arrivare ad esso con qualche cosa di più che la sua solita formulazione.

Le dimostrazioni che la scuola fa per giungervi di solito è data da disegni scontati nella loro validità mentre è proprio questa da approfondire. Si basa su composizioni di poligoni che rimandano alle forme e alle loro proprietà relative a lati ed angoli ed di conseguenza alle tassellazioni che essi ci consentono e perché.

Abbiamo sperimentato come GeoGebra ci aiuti moltissimo in questo cammino di riflessioni e costruzioni (Figure 8, 9 e 10).

Figura 8

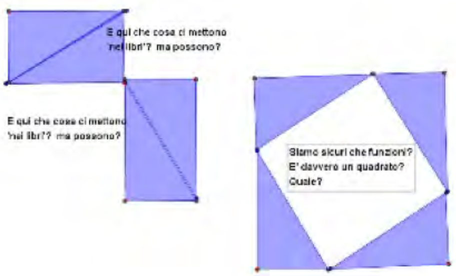


Figura 9

Figura 10

Qui nascerebbero lunghi discorsi che dobbiamo immaginare …, ma non possiamo che fermarci.

Un esempio per la scuola primaria

Nella scuola primaria il problema del "metodo" si pone in modo prioritario perché i concetti geometrici vengono accostati per la prima volta e il modo in cui sono accostati determinerà pesantemente anche le acquisizioni successive.

Bisogna quindi fare una seria riflessione su ciò che viene passato come geometria ma geometria di fatto non è. Se guardiamo qualsiasi pagina di sussidiario della scuola primaria ce ne possiamo accorgere facilmente: accanto a testi che riportano "definizioni" di enti geometrici supportate da immagini che spesso inducono a concettualizzazioni del tutto fuorvianti, troviamo anche qualche testo che cerca un approccio più coerente ma non riesce comunque a discostarsi da un'impostazione molto tradizionale e poco vicina al pensiero dei bambini.

Uno dei problemi che assillano maggiormente gli insegnanti riguarda l'introduzione del concetto di angolo. Basterebbe partire da ciò che dicono i bambini "è un posto dove stare in una stanza, se sei in centro non sei nell'angolo" … "è quello spazio che sta vicino a una punta … è la punta …" per accorgersi di quante conoscenze e misconoscenze ci siano inizialmente e quindi quanto lavoro occorra fare con loro per portarli verso il concetto geometrico. La realtà che ci circonda ci obbliga a partire dal 3D ma per capire l'angolo bisogna: riportarlo sul piano, condividere l'idea di punto e costruire quella di retta e semiretta. Da qualunque parte si prenda il problema, si arriva sempre agli enti primitivi (punto, retta, piano) che però sono pure astrazioni da costruire nella mente.

Questo passaggio all'astrazione è proprio ciò che manca perché gli enti geometrici vengono confusi dai bambini con oggetti reali e la didattica non fa un buon servizio alla geometria se rinforza questa idea. Ci sono dei passaggi fondamentali da non trascurare: per astrarre completamente l'angolo si deve arrivare a vederlo nella mente come una coppia di semirette aventi la stessa origine (vertice, punto). Essendo le semirette infinite, il piano risulta quindi diviso in due parti. L'angolo come parte di piano è un'idea che ci serve per dare un senso alle prime esperienze concrete ma … che "parte di piano" intendono i bambini? Spesso è solo una piccola "zona" intorno al vertice, come anche le rappresentazioni convenzionali inducono a credere. Diventa poi importante completare l'idea di angolo vedendolo anche come rotazione di una semiretta intorno ad un punto per poter ragionare sull'ampiezza e quindi sulla misura. Questi tre modi di "vedere" l'angolo devono coesistere perché ciascuno di essi ci svela un aspetto diverso dell'angolo.

GeoGebra non ci costruisce automaticamente gli angoli, ci consente di misurarli ma solo se li abbiamo costruiti bene cioè ci devono essere o tre punti non allineati o due semirette che hanno l'origine in comune.

Fin dalla scuola dell'infanzia[1] con giochi di intrecci di cordicelle i bambini possono ricavare l'idea che per avere un poligono servono almeno tre segmenti e scoprono quindi il triangolo e altri poligoni con 4 o più lati.

Ma se andiamo oltre nell'esplorazione delle figure e ne consideriamo la variabilità pur restando fermi sui triangoli anche bambini molto piccoli, manovrando cordicelle, si accorgono subito del ruolo che giocano gli angoli nel dare forma alle figure.

1 attività svolta da Anna Aiolfi, scuola dell'infanzia Andersen di Spinea (VE).

Figura 11

Allora perché non partire dagli angoli per costruire i poligoni? GeoGebra ci viene in aiuto perché possiamo costruire inizialmente degli angoli da manipolare come se fossero oggetti concreti. Basta usare lo strumento poligono rigido per generarli e poi completarli con le semirette. Per fare questo con i bambini si può partire con giochi di cordicelle tese che poi diventano "angoli" nel momento in cui si accorgono che è possibile allungare all'infinito le cordicelle mantenendo la stessa "apertura". Ma finché non hanno "portato in testa" l'angolo come due semirette che hanno l'origine in comune, il concetto astratto di angolo non c'è. Riportando il tutto su GeoGebra, dalla classe terza in poi si può iniziare il discorso ponendo loro un problema con un certo grado di astrazione:

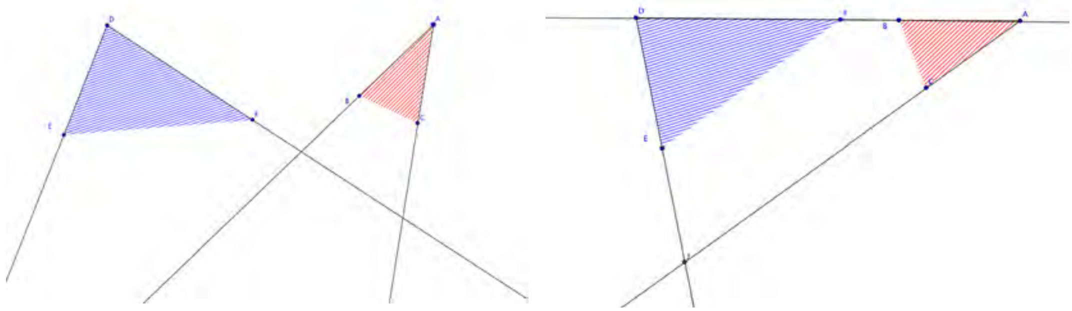


Figura 12

"Come si devono disporre due angoli nel piano per formare un triangolo? Perché? Che cosa potete dire del terzo angolo?" e poi anche: *"Quali altre figure potete ottenere a partire dall'intersezione di due angoli? Perché?"*

Lavorando in questo modo con gli angoli si evita di costruire nei bambini l'idea che l'angolo si possa vedere solo "dentro un poligono" e si può anche portarli a ragionare sull'angolo come ente che divide il piano in due parti "complementari" (angolo convesso e angolo concavo, diverso dall'angolo esterno!). Dall'intersezione di queste parti di piano si generano i poligoni, la diversa posizione reciproca delle semirette genererà poligoni con diverse caratteristiche. Ad esempio se due semirette sono su rette parallele otteniamo varie tipologie di trapezi … Si avvia così il ragionamento geometrico su "famiglie di figure" generate da diverse relazioni fra i loro componenti che sono sempre: punti, rette, semirette, angoli, segmenti che "giacciono" (parola che può entrare a far parte del vocabolario geometrico dei bambini) su un piano infinito.

Vengono in mente le belle storie di Flatlandia che ci aiutano a capire come un mondo a due dimensioni sia veramente qualcosa di problematico anche solo da immaginare per noi esseri tridimensionali in un mondo tridimensionale.

Il problema del terzo angolo che si genera da solo porta a ragionare sulla somma degli angoli interni del triangolo: si può iniziare simulando con Geogebra le stesse manipolazioni che si fanno di solito con carta e forbici, cioè avvicinare i tre angoli e far vedere che formano un angolo piatto.

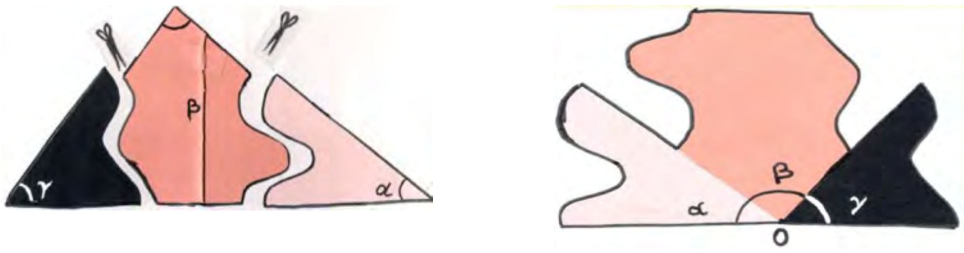


Figura 13

Ma come sappiamo una manipolazione non porta mai al perché "geometrico". Per arrivare a questa "dimostrazione" occorrerebbe il teorema delle parallele che i bambini non hanno. Potrebbero invece aver fatto esperienze con angoli opposti al vertice, attraverso giochi di cordicelle che si intersecano, e conoscere le traslazioni. Avendo questi due strumenti, si può dare una spiegazione, meno legata al concreto, del perché funziona quella manipolazione e condurre i bambini verso un ragionamento geometrico di altro livello.

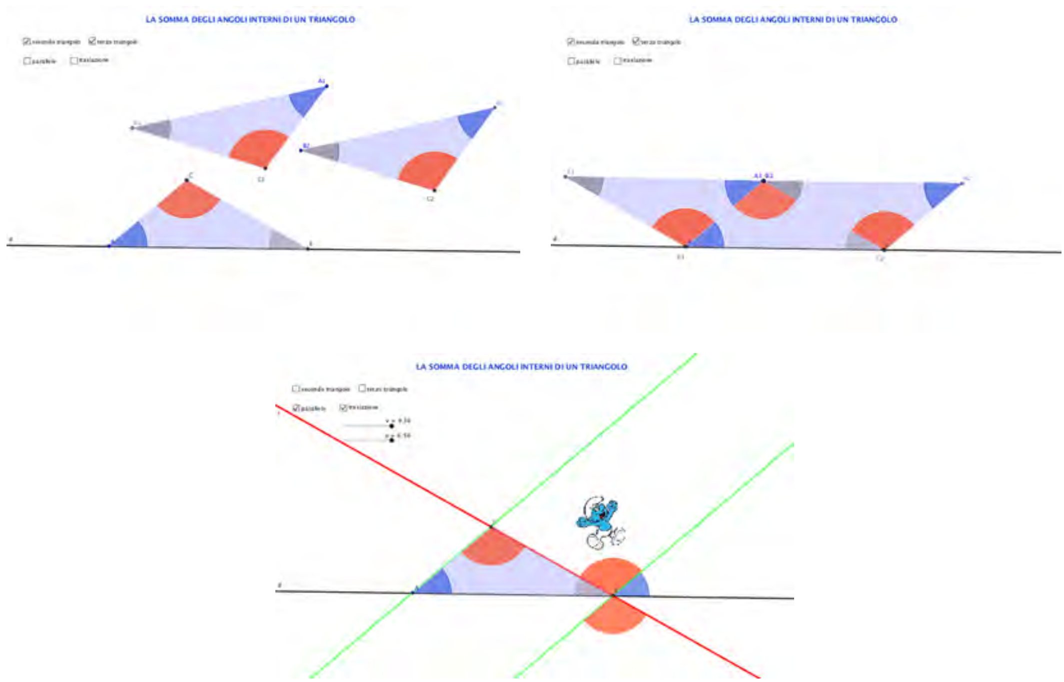


Figura 14

Figura 15

Ciò che sicuramente non funziona è usare GeoGebra come in Figura 15, solo per misurare gli angoli.

Il disegno è molto simile a quello presentato sopra, ci sono due rette parallele che giustificano l'uguaglianza di certi angoli … Perché misurare? Perché trasformare un ragionamento squisitamente geometrico in un'operazione empirica di misura?

Il triangolo ci offre tante opportunità di lavoro, è una figura fondamentale per tanti motivi ma soprattutto perché è l'unica "rigida", che non si deforma. Un'altra caratteristica interessante da esplorare con i bambini è data dall'esigenza di una relazione tra le misure dei lati: se queste misure non rispettano una certa regola il triangolo non si forma.

Stiamo ovviamente riferendoci alla relazione triangolare che possiamo affrontare con i bambini anche partendo da un semplice problema che si può rappresentare molto bene con delle cannucce.

> *"Un contadino vuole costruire nel suo giardino una recinzione di forma triangolare. Ha a disposizione 5 assi di queste lunghezze: 11m, 2m, 8m, 9m, 4m. Quali assi sceglierà per la costruzione del recinto? Ha una sola possibilità o più di una?*
>
> *Risolvete la situazione, spiegate come avete fatto e i vostri ragionamenti"*

I bambini hanno a disposizione delle cannucce che tagliano nelle misure indicate trasformando metri in centimetri.

Un gruppo spiega così:

"Abbiamo scoperto che possiamo formare quattro tipi di triangolo usando tutte le misure possibili:

9 – 8 – 4 11 – 8 – 9 11 – 8 – 4
2 – 11 - 9

Abbiamo trasformato i metri in centimetri e abbiamo trovato 4 tipi di triangoli. Per formare questi triangoli abbiamo messo insieme diverse misure." (Branko, Fede, Clarissa, Sara, Achraf)

La cannuccia però inganna e consente di chiudere anche un triangolo che non si dovrebbe chiudere (2-11-9).

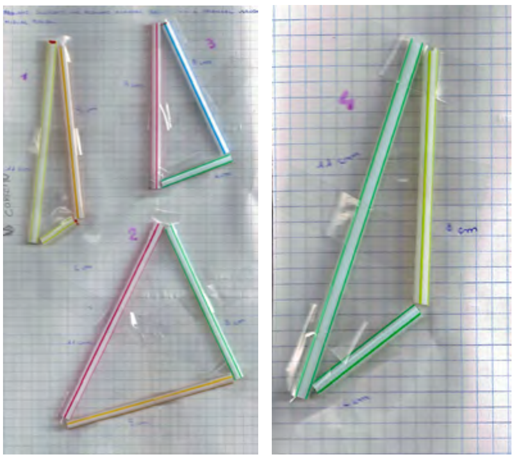
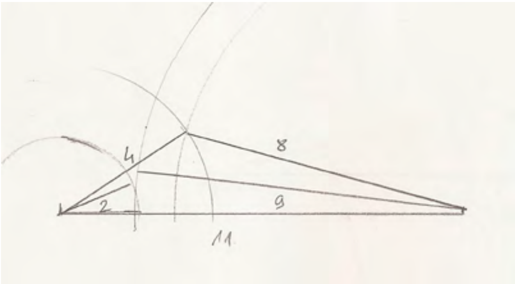


Figura 16



Come uscire da questo problema? L'insegnante introduce il compasso per disegnare i triangoli trasportando le misure date. I bambini non sono molto abili nell'usarlo ma cominciano a vedere che con 9 e 2 potrebbe anche non formarsi …

Figura 17

Interviene allora GeoGebra che consente di esplorare tutte le possibilità.

Il file GeoGebra (Figura 18), realizzato da me, è inviato alla classe. I bambini fanno ruotare i segmenti e il tipo di ragionamento cambia, si sposta facilmente sul piano aritmetico e, facendo ruotare i segmenti-lati intorno a un vertice, si accorgono che stanno descrivendo un cerchio?

I triangoli F, H ed M non si formano perché fissando il segmento da 11 gli altri due non riescono a formare sommati un numero maggiore di 11. Il triangolo che sembrava costruibile con le cannucce, passando al compasso e poi ai numeri, si rivela impossibile da costruire. Il fatto che 11 sia 9+2 fa vedere che anche nel caso di uguaglianza il triangolo non c'è e quindi motiva il fatto che la somma di due lati debba essere "maggiore" del terzo.

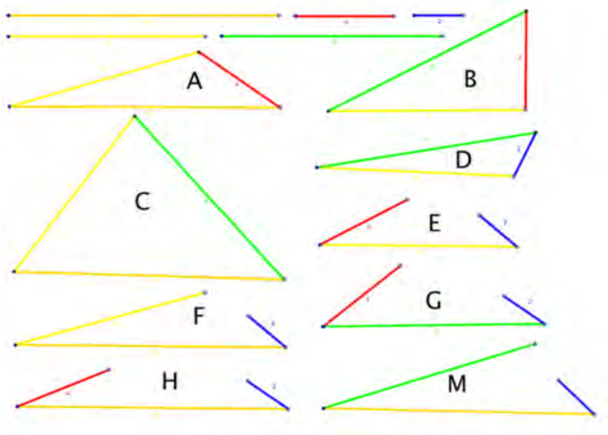


Figura 18

Costruire tutti i triangoli possibili è anche un bel gioco di combinatoria che porta verso la generalizzazione della relazione e quindi al significato più profondo della disuguaglianza triangolare: in un triangolo, la somma delle lunghezze di due lati è "sempre" maggiore della lunghezza del terzo (soprattutto fa riflettere sull'uso di quel "sempre").

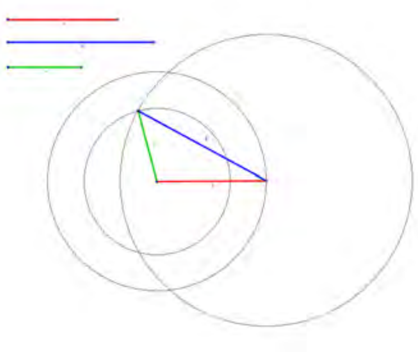


Figura 19

I bambini di questa classe non avevano mai fatto esperienze con il software GeoGebra perché l'insegnante non lo conosceva abbastanza da poterli guidare.

Ciò che si sarebbe potuto fare, dopo aver utilizzato il file già costruito per simulare la situazione, era farli ragionare sull'uso del compasso come strumento per costruire infiniti segmenti uguali e, da lì, arrivare ad alcune semplici costruzioni come quella del triangolo dati i tre lati.

Questo è un problema di costruzione che si può affrontare con gli allievi fin dalla scuola primaria, se opportunamente preparati.

La situazione si può simulare facilmente anche usando cordicelle tese di misure assegnate, ma lavorando con materiali concreti non si riesce ad avere la visione d'insieme della situazione che offre la pagina di GeoGebra, mantenendone nello stesso tempo la dinamicità.

Nella scuola primaria si parte spesso da esperienze corporee ma alla fine si deve imparare a ragionare con la testa, eliminando ciò che la situazione reale non può dare, per astrarre gli enti geometrici e considerare solo più le relazioni reciproche tra di essi. Il modello che si costruisce con GeoGebra, pur restando un modello, consente di ritornare sui propri passi infinite volte senza perdere il senso complessivo della situazione. Cosa che con i materiali concreti non sarebbe possibile.

Questi giochi di smontaggio e rimontaggio virtuale delle figure sono molto utili per far interiorizzare le caratteristiche delle forme e dare ai bambini strumenti indispensabili per affrontare la geometria nei gradi scolari successivi. Senza GeoGebra molti di questi passaggi risultano difficoltosi o non possono avvenire in modo così "pulito".

Bibliografia

Accomazzo, P., Beltramino, S.& Sargenti, A. (2013). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*. Milano: Ledizioni.

Accomazzo, P., Beltramino, S.& Sargenti, A. (2014). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra II*. Milano: Ledizioni.

Cantoni, M., Manara, C.F. (1999). *Logica e realtà virtuale in geometria*. Nuova Secondaria, 17, 4 , 41- 47.

Cantoni, M., Merlo, D.(2013). *Costruiamo la geometria insieme ai bambini*. Atti del VI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica (DI.FI.MA.2013) I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola: Concetti, processi, valutazione.

Cantoni, M., Merlo, D. (2014). *Un percorso 'a ritroso' di geometria nella scuola dell'obbligo: GeoGebra strumento protagonista*. Atti del IV GeoGebra Italian Day - 2014 La formazione docenti con GeoGebra.

Damiani, P., Merlo, D., Sargenti, A. & Testa, C. (2014). *Verso una "didattica inclusiva della* *matematica" attraverso l'utilizzo di GeoGebra*. Atti del IV GeoGebra Italian Day - 2014 La formazione docenti con GeoGebra.

Gallo, E., Cantoni, M. (2014). *Uso implicito delle trasformazioni: manipolare, congetturare, dimostrare*. Torino: Conferenza dell'11 marzo 2014, in Podcast sul sito de 'La Casa degli insegnanti' http://www.lacasadegliinsegnanti.it/podcastgenerator/.

Gallo, E., Cantoni, M. (2014). *Uso esplicito delle trasformazioni nella soluzione di problemi*. Torino: Conferenza del 15 aprile 2014, in Podcast sul sito de 'La Casa degli insegnanti' http://www.lacasadegliinsegnanti.it/podcastgenerator/. Torino.

Manara, C.F. (1994). *L'evoluzione della geometria nel secolo XIX e conseguenze didattiche*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 17, 619-661.

Merlo, D. (2010). *Il ragionamento geometrico nello spazio e nel piano. Un percorso di geometria per la scuola primaria*. Torino: Rivista dell'Associazione Mathesis.

PNSD ON THE ROAD CON GEOGEBRA

Maria Giovanna Frassia, Annarosa Serpe
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria, ITALIA
annarosa.serpe@unical.it

Abstract

L'inserimento della modellizzazione nei curricula di Matematica si rivela di fondamentale importanza per lo sviluppo di competenze inerenti il problem-solving in quanto promotore della relazione tra la Matematica e realtà sensibile. La disamina delle relazioni che intercorrono tra mondo reale e i modelli che lo rappresentano costituisce il punto di partenza per attività relative alla modellizzazione matematica. L'utilizzo del computer nelle suddette attività crea terreno fertile per l'apprendimento, stimola la discussione, accresce la motivazione e al contempo permette di riconoscere l'importanza della Matematica nella quotidianità.

In questo lavoro viene proposto uno dei laboratori realizzati nell'ambito del Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD), per le attività di formazione dei docenti di scuola secondaria di II grado.

Il laboratorio afferisce allo studio delle equazioni di I grado e presenta una ingegneria didattica basata sull'*Extended modelling cycle-regarding technology*" di Seller e Greefrath e si avvale del software di geometria dinamica GeoGebra.

Introduzione

L'impiego opportuno di risorse tecnologiche nella didattica della Matematica permette di creare nuove opportunità nei processi d'insegnamento-apprendimento e al contempo operare collegamenti attivi tra le idee e i contenuti matematici.

È fondamentale, quindi, che le tecnologie vengano sfruttate al meglio non solo nell'ambito della didattica disciplinare, ma anche in altri ambiti afferenti al mondo della scuola. Sulla base di questi presupposti è nato il Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD).

Il PNSD è il documento di indirizzo del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca per il lancio di una strategia complessiva di innovazione della scuola italiana e per un nuovo posizionamento del suo sistema educativo nell'era digitale. È un pilastro fondamentale della legge 107/2015 - denominata "La Buona Scuola" - rappresenta una visione operativa che rispecchia la posizione del Governo rispetto alle più importanti sfide di innovazione del sistema pubblico che pone al centro l'innovazione del sistema scolastico e le opportunità dell'educazione digitale.

Il PNSD si propone di rispondere alle sfide che la società affronta nell'interpretare e sostenere *the long life learning*.

L'importanza dell'educazione digitale è stata riconosciuta anche nella raccomandazione del parlamento europeo e del consiglio del 18 dicembre 2006 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962/ce), nella quale si legge:

> "*Le competenze sono definite in questa sede alla stregua di una combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto. Le competenze chiave sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione.*"

e dove vengono delineate otto competenze chiave, tra cui la competenza digitale.

In questa prospettiva, l'Ufficio Scolastico Regionale (USR) della Calabria ha promosso l'iniziativa "PNSD on the road" al fine di concentrare l'attenzione dei docenti sulle direttive del piano e di raggiungere come obiettivo la formazione di tutti gli animatori digitali della regione.

Per tutti i dettagli si rimanda al WEB Site URL:

http://www.istruzione.calabria.it/wp-content/uploads/2016/03/PNSD-on-the-road_per-i-docent.pdf

Nell'ambito della suddetta iniziativa sono stati progettati e realizzati numerosi laboratori didattici finalizzati alla formazione degli insegnanti calabresi; all'interno di questa si colloca il laboratorio "*Dal problema reale al modello matematico: le equazioni lineari*" che presenta una ingegneria basata sull'*Extended modelling cycle-regarding technology*" (Seller e Greefrath, 2010) e si avvale del software di geometria dinamica GeoGebra.

La modellizzazione matematica al computer

Insegnare tenendo presente il binomio matematica-realtà significa promuovere un apprendimento attivo in classe, aiutare ad affrontare lo studio come scoperta e favorire la comprensione dei concetti matematici (Niss, 2003). In quest'ottica la pratica della modellizzazione va oltre la mera riproduzione seriale di oggetti, situazioni e/o simulazioni in quanto educa a riflettere in maniera approfondita su una questione; aiuta a familiarizzare con molti aspetti importanti e a riscoprire concetti noti in una cornice nuova.

Fare una matematica per problemi è importante perché i problemi della vita reale (Siller, & Greefrath, 2010) aiutano gli studenti:

- a capire e a fronteggiare situazioni della loro quotidianità;
- a raggiungere i requisiti necessari per passare dal piano della realtà a quello della matematica;
- ad avere un quadro chiaro della matematica e a riconoscere quali sono gli strumenti necessari per vivere;
- nella motivazione allo studio della Matematica;

e in ultimo, ma non meno importante consentono un insegnamento della matematica con uno sfondo teorico.

Inoltre, in letteratura sono riconosciuti i seguenti principi per la progettazione di problemi riconducibili alla vita reale (Wedelin, & Adawi, 2015):

- **Principio 1**: la soluzione di un problema deve essere di interesse pratico o teorico.
- **Principio 2**: Il problema non deve essere banale per stimolare le capacità di modellizzazione e la comunicazione.
- **Principio 3**: Il problema non deve essere banale per stimolare le capacità di problem-solving e la comunicazione.
- **Principio 4**: Il problema non dovrebbe richiedere troppa nuova teoria da imparare prima che il problema possa essere risolto.
- **Principio 5**: Il problema dovrebbe essere facile da ricordare come caso.
- **Principio 6**: Fornire una teoria adeguata.
- **Principio 7**: Creare un insieme di problemi con variazioni.

L'importanza della modellizzazione e della risoluzione di problemi riconducili alla vita reale, nel campo della didattica, è stata discussa e riconosciuta da diversi ricercatori, a titolo di esempio si menzionano Lester, & Kehle, 2003; Stillman, Kaiser, Blum, & Brow, 2013; Stillman, Blum, & Salett Biembengut, 2015.

Inoltre, l'inserimento della modellizzazione nei curricula di Matematica si rivela di fondamentale importanza per lo sviluppo di competenze inerenti il problem-solving in quanto promotore della relazione tra la Matematica e realtà sensibile.

Il modello maggiormente condiviso nell'ambito della modellizzazione matematica è quello ciclico (Figura 1) di Blum e Leiss (2007).

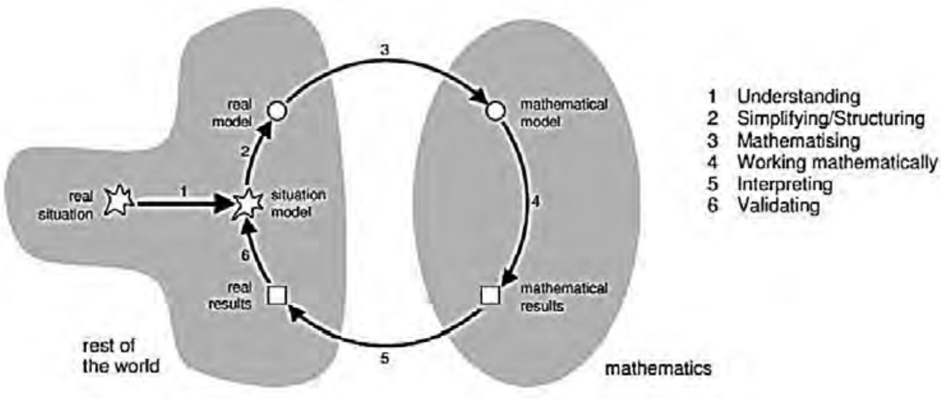


Figura 1. Modello circolare di Blum & Leiss (2007).

Il modello in Figura 1 presenta i seguenti steps:

- comprensione di un particolare fenomeno della realtà che può essere modellizzato;
- definizione di un contesto e dei relativi vincoli;
- identificazione di variabili chiave; l'esplicita definizione delle relazioni tra le variabili;
- traduzione di queste relazioni;
- analisi ed interpretazione dei risultati; il raffinamento del modello e la relativa comprensione attraverso un processo iterativo, ripetendo gli stessi steps.

Diversi studi riconoscono che un uso mirato in classe di particolari tecnologie genera maggiori possibilità nei processi di modellizzazione matematica.

Ad esempio, l'uso di determinati software didattici assicura un progresso completo nel processo d'apprendimento (Bork, 1981; Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao, & Maschietto, 2016).

Siller e Greefrath (2010) hanno implementato il *Modelling cycle* di Blum e Leiss introducendo il mondo della tecnologia, cioè il mondo in cui i problemi possono essere risolti con l'aiuto delle tecnologie.

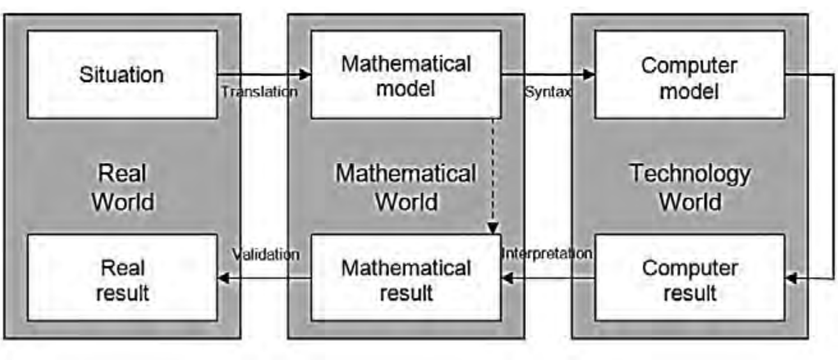


Figura 2. Modello circolare esteso alle tecnologie di Siller & Greefrath (2010).

I tre mondi - Mondo reale, Mondo della Matematica e Mondo della Tecnologia - si influenzano a vicenda; in particolare l'uso delle tecnologie aumenta le possibilità di risoluzione di alcuni modelli matematici. Per esempio, l'uso del computer nella pratica didattica facilita la discussione di problemi afferenti la vita quotidiana degli studenti accrescendone la motivazione.

Un esempio di laboratorio sulla modellizzazione matematica con l'uso della tecnologia

Il laboratorio ha lo scopo di far progettare agli insegnanti in formazione un'attività inerente l'introduzione delle equazioni lineari a partire da un problema reale, identificando e/o ipotizzando tutti gli steps del modello in Figura 2.

L'ideazione e la scrittura del testo del problema rappresentano un passo fondamentale; infatti lo scopo è quello di individuare un problema di interesse e significativo per gli studenti, anche in riferimento ai principi enunciati nel precedente paragrafo.

Inoltre, la risoluzione del problema deve avvalersi della tecnologia mediante l'uso del software di geometria dinamica GeoGebra.

Individuato il testo de problema, gli insegnanti estrapolano le fasi indicate nel modello in Figure 2 in relazione alla situazione problematica in questione, evidenziando le competenze che gli studenti dovrebbero maturare nei vari steps del modello.

In sintesi, l'attività laboratoriale degli insegnanti in formazione è strutturata in tre fasi.

La prima fase è stata dedicata allo studio dei modelli di Blum e Leiss (Figura 1) e di Siller e Greefrath (Figura 2) e dei principi proposti da Wedelin e Adawi per la progettazione di problemi riconducibili alla vita reale.

La seconda fase è caratterizzata dalla progettazione di situazioni problematiche riconducibili alla vita reale, in modo particolare vicine alla realtà degli studenti.

A titolo di esempio, qui di seguito, si riporta uno dei problemi formulati dagli insegnanti durante l'attività laboratoriale.

Sotto la guida degli autori, uno degli insegnanti in formazione, in seguito ad una situazione realmente verificatasi in classe, ha ideato il seguente problema:

> *Anna e Maria sono due cugine, entrambe hanno ricevuto una borsa di studio pari a 150,00€ per l'ottimo rendimento scolastico. Decidono di comune accordo di destinare una parte della cifra per l'iscrizione in palestra e la rimanente parte come donazione per un'associazione benefica per la salvaguardia dell'ambiente.*
>
> *Anna e Maria abitano lontano per cui si iscrivono a due diverse palestre; la palestra a cui si iscrive Anna prevede il pagamento di una quota di iscrizione di 30,00 € e di una settimanale di 10,00 €, mentre quella a cui si iscrive Maria prevede una quota di iscrizione di 20,00 € e di una settimanale di 12,00 €.*
>
> *Anna e Maria vogliono destinare la stessa cifra per l'associazione; per quante settimane potranno seguire le lezioni in palestra?*

La terza fase è stata dedicata a trasporre il problema nei vari steps che conducono alla risoluzione seguendo il modello in Figure 2.

In Figura 3, sono riportati i vari steps del problema collegati i tre mondi (reale, matematico e tecnologico).

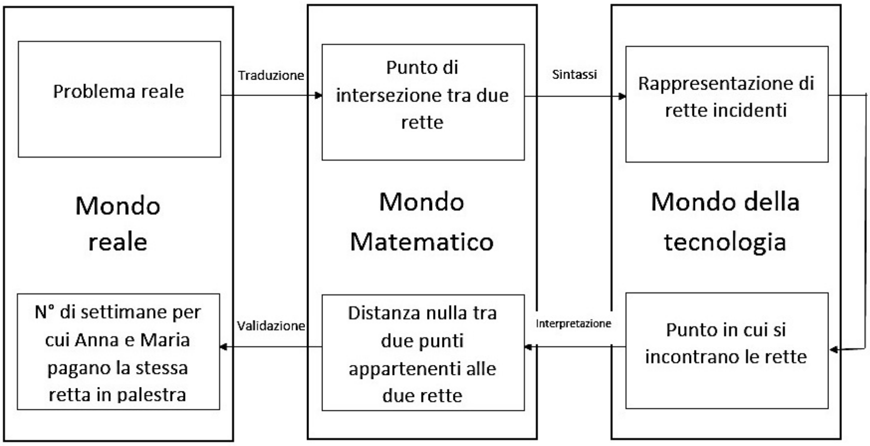


Figura 3. Modello circolare esteso alle tecnologie di Siller & Greefrath in relazione al problema proposto.

Il processo di risoluzione del problema ha inizio nel mondo reale con la lettura del testo alla quale segue una discussione finalizzata all'individuazione dei dati del problema, evidenziando anche i dati inutili e/o superflui.

A questo punto la situazione problematica viene tradotta nel linguaggio matematico: determinare il punto di intersezione tra due rette.

In questo step avviene il processo di modellizzazione nel quale vengono determinate le due rette di pagamento offerte dalle due palestre.

$$y = 30 + 10x$$
$$y = 20 + 12x$$

Il processo di sintassi consente di rappresentare le due rette nel piano cartesiano.

Per la rappresentazione delle due rette nel piano cartesiano viene utilizzato il software GeoGebra (Figura 4).

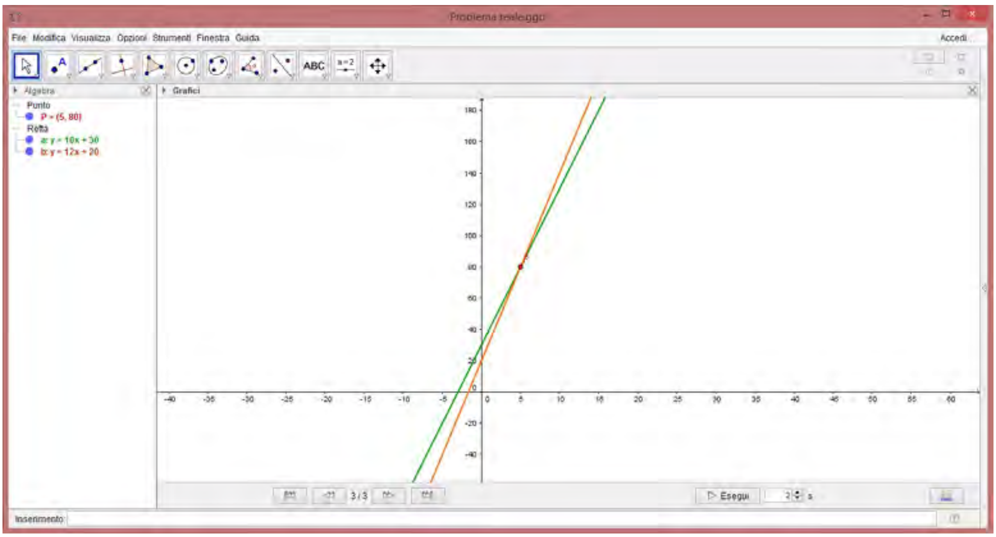


Figura 4. Risoluzione del problema reale con GeoGebra.

La sintassi del software prescelto non richiede specifiche conoscenze; infatti, basta, scrivere le equazioni delle due rette nella barra d'inserimento. Il punto di intersezione tra le due rette si ottiene mediante lo strumento "*punto d'intersezione*", disponibile nella barra degli strumenti di GeoGebra.

Dopo aver identificato con l'uso della tecnologia il punto d'intersezione tra le due rette è necessario interpretarlo matematicamente: distanza nulla tra due punti appartenenti alle due rette.

Lo step finale consiste nella validazione nel mondo reale della soluzione matematica trovata.

A questo punto l'attività laboratoriale preparata dagli insegnanti è pronta per essere sperimentata in classe.

Il modello di ingegneria didattica progettato necessita, però, all'atto della validazione di una discussione ben articolata inerente la soluzione algebrica del problema con gli studenti.

Conclusioni

Il modello proposto in Figura 2 adattato alla situazione problematica proposta consente di analizzare le competenze sviluppate ad ogni steps. Nello specifico, in riferimento alla Figura 5, si rilevano le seguenti competenze:

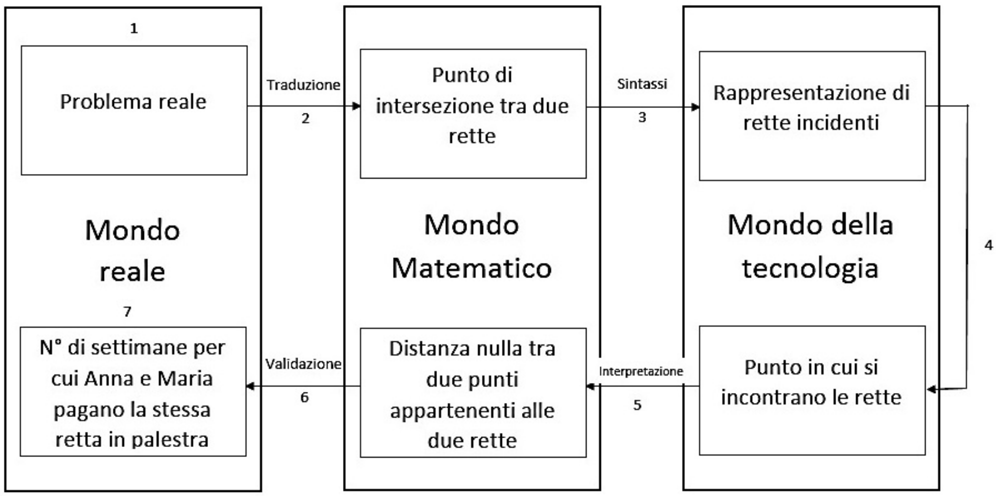


Figura 5. Modello circolare esteso alle tecnologie nel problema su….

1. nella comprensione, analisi e strutturazione del problema reale.
2. nella creazione di un modello matematico attraverso termini relativi al mondo reale e nell'uso di saperi matematici per la risoluzione di problemi.
3. nella manipolazione di variabili del modello matematico.
4. nell'uso dello strumento informatico.
5. nell'interpretazione dei risultati nel modello matematico.
6. sulla riflessione e la validazione del modello e nell'interpretazione dei risultati matematici della situazione reale.
7. nella comunicazione del modello e dei relativi risultati.

Bibliografia

Bork, A. (1981). *Learning with computers*. Digital Press, Bedford, Mass.

Doerr, H.M. (1996). STELLA ten years later: A review of the literature. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, (pp.201-224).

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education. In *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education* (pp. 1-34). Springer International Publishing.

Galbraith, P.L., Stillman, G., Brown, P., & Edward, I. (2007). Faciliting middle school modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, &S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp.130-140). Chichester: Horwood.

Goos, M. (1998). Technology as a tool for transforming mathematical tasks. In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, & I.D. Huntley (Eds.), *Mathematical modelling: Teaching and assessment in a technology-rich world* (pp. 103-113). Chichester: Horwood.

Lester, F., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modelling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Model and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp.501-518). Mahwath, NJ: Erlbaum.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

Rivera, S., Londono, S., & Lopez, C. (2015) Measurement of area and volume in an authentic context: An alternative learning experience through mathematical modelling. In G.A. Stillman, W. Blum, & M.S. Biembengut (Eds.) *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp.229-240). Cham: Springer.

Siller, H.S., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceeding of the Sixty European Conference on Research on Mathematics Education* (pp. 1150-1160). INRP.

http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Stillman, G.A., Kaiser, G., Blum, W., & Brow, J.P. (Eds.) (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice,* International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer Science + Business Media Dordrecht.

Stillman, G.A., Blum, W., & Salett Biembengut, M. (Eds.) (2015). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice Cultural, Social and Cognitive Influences,* International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer International Publishing Switzerland.

Wedelin, D., & Adawi, T. (2015). Applied Mathematical Problem Solving: Principles for Designing Small Realistic Problems. In *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 417-427). Springer International Publishing.

Legge 107/2015, comma 56. url: http://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2015/07/15/15G00122/sg

Raccomandazione del parlamento europeo e del consiglio del 18 dicembre 2006. url: http://www.amblav.it/Download/l_39420061230it00100018.pdf

http://www.istruzione.calabria.it/wp-content/uploads/2016/03/PNSD-on-the-road_per-i-docent.pdf

ATTIVITÀ PER UNA MATEMATICA ACCESSIBILE E INCLUSIVA – APPLICAZIONI

Carlotta Idrofano[1], Monica Mattei[2], Daniela Pavarino[3], Ornella Robutti[4], Annarosa Rongoni[5], Cinzia Soldera[6]

L.S. "M. Curie", Pinerolo (TO)[1], Università degli Studi di Torino[2,4], IC "Govone", Priocca (CN)[3], IC "Galileo Ferraris", Livorno Ferraris (VC)[5], IC "Serra", Crescentino (VC)[6]

carlotta.idrofano@gmail.com

Abstract

L'articolo intende presentare e analizzare alcune delle attività progettate in ottica inclusiva dalle insegnanti del gruppo di ricerca "Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo" finanziato dalla Fondazione CRT e sviluppato dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino con il coordinamento della Prof.ssa Ornella Robutti e la partecipazione del Prof. Ferdinando Arzarello[1].

Adattamento de «L'albero maestro»

Nucleo: Geometria, nodo concettuale altezza e perpendicolarità nel piano

Grado: primo anno scuola secondaria di I grado

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali per il curricolo

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che si intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive.

Obiettivi dell'attività

- Costruire il significato di distanza tra due punti, tra un punto e una retta, tra due rette
- Costruire il significato di perpendicolarità, distinguendolo da quello di verticalità, e il significato di altezza
- Formulare congetture e saperle argomentare

Prerequisiti: conoscere il sistema metrico decimale; saper utilizzare gli strumenti da disegno; saper utilizzare i primi semplici comandi del software GeoGebra

Materiali: cartoncini, materiale da disegno geometrico (squadre, righello), stuzzicadenti, perline, nastro adesivo, metro, rotelle metriche, fili, filo a piombo. Strumenti tecnologici: LIM e PC

1 Per un approfondimento relativo al progetto di ricerca, alle sue finalità e ai suoi obiettivi, nonché ad alcune metodologie utilizzate nelle sperimentazioni (quali il "questionario di gradimento"), si rimanda alla lettura dell'articolo apparso nel presente volume, dei medesimi autori, "Attività per una matematica accessibile e inclusiva – Introduzione".

Tempistiche: 6 ore

Descrizione dell'attività

Fase 1a

L'insegnante consegna a ogni allievo un foglio rettangolare di formato A4 con disegnato un cerchio contenente una barca (Scheda 1.1). Propone quindi la relativa consegna visualizzandola alla LIM e leggendola ad alta voce.

Fase 1b. Modello di cartone

Si fornisce a ogni studente un modellino di cartone della barca e uno stuzzicadenti da utilizzare come albero maestro. Gli studenti sono chiamati a fissare l'albero maestro della barca aiutandosi con il nastro adesivo. Il modello così costruito viene posizionato sul disegno in modo da verificare se l'albero maestro è stato disegnato correttamente. Il modellino di cartone consente la manipolazione; la barca fornita, libera dal vincolo dell'inclinazione data nel foglio, dovrebbe rendere più agevole posizionare correttamente l'albero maestro. L'insegnante propone parallelamente un modello di barca di cartone di dimensioni tali che sia visibile a tutti gli studenti e chiede di essere aiutata nel posizionamento dell'albero maestro. Potrà, utilizzando il modello, far emergere il concetto di verticale in contrapposizione a quello di perpendicolare, aiutandosi anche con del filo a piombo (fig. 1).

Figura 1. La barca con l'albero maestro perpendicolare e il filo a piombo verticale.

Fase 1c. Modello dinamico con GeoGebra

L'insegnante consegna la Scheda 1.2 che deve essere compilata da ciascuno studente a seguito dell'esplorazione del file GeoGebra proposto. Si invitano gli studenti a fare delle osservazioni riguardanti in particolare la posizione della barca e la relativa posizione dell'albero maestro (fig. 2). È possibile utilizzare il comando traccia di GeoGebra per stimolare ulteriori riflessioni.

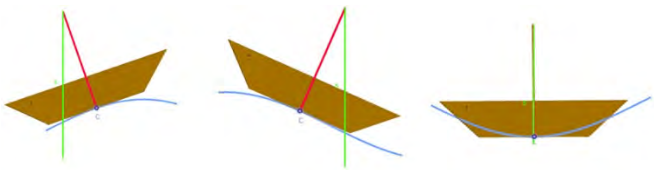


Figura 2. Posizione reciproca dell'albero maestro (rosso) e del filo a piombo (verde).

Fase 2a. Distanza punto retta

L'attività prevede l'uso del corpo e si svolgerà in palestra o in altro spazio idoneo. Viene messo un oggetto a una certa distanza dal muro e si collocano 4-5 studenti lungo il muro in posizioni diverse. L'insegnante propone le seguenti domande stimolo: "Chi di voi è più vicino all'oggetto? Perché?", "In quale modo possiamo verificare se avete ragione?", "C'è una posizione in cui collocarsi per essere più vicini possibile all'oggetto?" Vengono forniti nastri con cui tracciare i percorsi che collegano ogni ragazzo all'oggetto. L'insegnante deve stimolare gli studenti a riflettere sulle caratteristiche del segmento più breve. Dovrà quindi emergere il concetto di distanza inteso come lunghezza del tratto più breve che congiunge un punto a una retta, segmento che ha sempre condizioni di perpendicolarità.

Fase 2b. Modello dinamico con GeoGebra

Dopo aver effettuato l'esperienza e aver individuato ipotesi risolutive, si chiede agli allievi di verificarle attraverso l'esplorazione del file dinamico di GeoGebra "punto_retta" e la compilazione della Scheda 2.1 (fig. 3) in cui vengono visualizzate, al variare del punto *P*, la lunghezza del segmento *PA* e l'ampiezza dell'angolo formato tra *PA* e la retta. In questo modo emergerà chiaramente che quando la lunghezza del segmento che congiunge un punto a una retta raggiunge il minimo, l'angolo tra tale segmento e la retta risulta retto. Viene così definita la distanza punto retta.

Figura 3. File GeoGebra "punto_retta" e relativa scheda.

Schede per lo studente

Analisi della ricaduta dell'attività sugli studenti BES

L'attività, progettata per favorire l'inclusione, è stata efficace per le modalità interattive, l'aspetto pratico delle attività proposte, la semplicità dell'approccio, le metodologie non consuete, il lavoro in gruppi che ha facilitato la comunicazione soprattutto nei più fragili, la destrutturazione dello spazio aula, adeguandolo alle necessità progettuali, che ha fatto diventare "coinvolgente" l'attività. Al termine dell'attività gli studenti, in particolare quelli in difficoltà, hanno dimostrato di saper collegare il concetto di distanza a quello di angolo retto e di perpendicolare e di saper distinguere tra perpendicolare e verticale. La partecipazione è stata favorita dall'entusiasmo di affrontare attività in modo diverso dalla lezione frontale; i ragazzi BES si sono messi in gioco senza particolare timore anche nelle attività che richiedevano l'uso del corpo. Inoltre si è osservato che alcuni ragazzi BES, avendo conseguito consapevolezza delle proprie capacità, si sono proposti per aiutare altri compagni in difficoltà nelle varie fasi del lavoro.

Analisi del questionario di gradimento

L'attività è stata gradita da tutti gli studenti, in particolare dagli alunni BES. Si riportano di seguito alcune frasi tratte dai loro protocolli che evidenziano il riscontro positivo: "È stato molto utile perché ognuno dava la sua opinione e potevamo confrontarle fino a trovare quella giusta"; "L'attività mi è sembrata interessante perché gli argomenti/esercizi richiedevano un po' di fantasia ☺"; "Mi sentivo intelligente quando dicevo qualcosa di giusto"; "È stato molto utile perché uno si può aiutare con l'altro"; "Era bello e ci faceva molto pensare quindi capivamo di più".

Lo scaffale

Premessa

L'attività si inserisce in un percorso più articolato di passaggio dalla geometria nel piano alla geometria nello spazio. In precedenza gli allievi avevano già, nell'ordine:

- affrontato la lettura di "Flatlandia" di E. A. Abbot
- visionato il cortometraggio realizzato da M. Emmer sul medesimo testo
- utilizzato il software dinamico SketchUp per condurre attività di tipo esplorativo
- realizzato modelli in carta di solidi, costruiti a partire da consegne verbali sulle loro caratteristiche

Nucleo: Geometria; nodo concettuale: altezza e perpendicolarità nello spazio

Grado: terzo anno scuola secondaria di I grado

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali per il curricolo

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana, contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.

Obiettivi dell'attività

- Stimolare negli allievi la percezione visuo-spaziale dei poliedri
- Individuare piani paralleli

- Riconoscere condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani nello spazio

Prerequisiti: aver acquisito i concetti di altezza nel piano e di figura solida

Materiali: carta lucida, cannucce colorate, nastro adesivo, penne, stuzzicadenti, forbici, pennarello indelebile

Tempistiche: 3 ore

Descrizione dell'attività

Fase 1

Ai ragazzi viene distribuita la Scheda 1 con il test iniziale. L'insegnante pone la questione alla classe e poi lascia il tempo necessario alla riflessione individuale, in modo che ogni allievo si appropri del problema e inizi a cercare strategie opportune per risolverlo. Dopo una decina di minuti di lavoro individuale per trovare una soluzione, si ritirano le schede. La loro analisi consentirà di verificare se gli studenti possiedono un'idea intuitiva di altezza nello spazio e se sono o meno capaci di argomentare e formalizzare. È importante che le immagini siano scelte in modo da non rappresentare poliedri regolari e che gli oggetti siano palesemente di dimensioni differenti.

Fase 2

Si avvia una discussione collettiva preliminare sulle risposte date dai ragazzi. Buona parte dell'attività è basata sulla conversazione degli alunni a seguito dell'esperienza pratica. Occorre dedicare tempo sufficiente agli allievi perché possano argomentare, discutere le proprie soluzioni, sostenere le affermazioni, validare la propria attività matematica. Dovrebbe così emergere che Gianni deve misurare l'altezza dell'oggetto e valutare se è minore di 35 cm in modo da poter essere inserito nello scaffale.

Fase 3

A seguito del dibattito la classe viene suddivisa in piccoli gruppi di lavoro il più possibile eterogenei. A ogni gruppo viene consegnato lo sviluppo piano di un solido, precedentemente realizzato dal docente su materiale trasparente (si veda per i tasselli dello sviluppo la Scheda 2), che dovrà essere ricostruito dai ragazzi. Questo tipo di approccio laboratoriale e il lavoro percettivo-motorio permettono il confronto e la collaborazione tra gli studenti. Insieme cercano di far combaciare le facce in modo che il solido si chiuda (fig. 4).

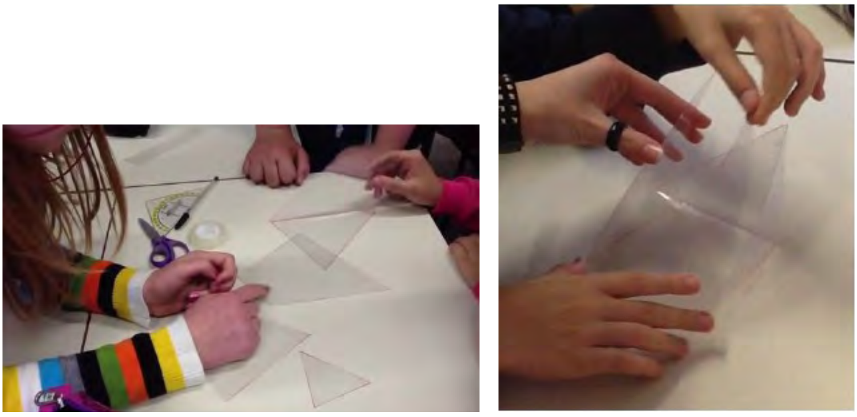


Figura 4. I gruppi cercano di ricostruire il solido.

Fase 4

Una volta costruiti i solidi, viene chiesto ai ragazzi di individuarne l'altezza/e. Anche in questo momento è importante il ruolo del docente nell'orchestrazione della discussione: deve infatti raccogliere tutte le ipotesi che emergono dai ragazzi e lasciar loro libertà di esprimersi. Nel caso in cui venga individuata solamente un'altezza, l'insegnante può appoggiare il solido su un'altra faccia e ripetere la richiesta. In questo modo gli allievi, attraverso l'esperienza pratica, giungono a comprendere che l'altezza non è unica e che essa può cadere sia internamente che esternamente al solido.

Fase 5

Dopo aver individuato intuitivamente le altezze si procede "materializzandole". Agli studenti vengono forniti dei filamenti di plastica rigida o altro materiale (stecchini, cannucce, …) e si chiede loro di costruire le altezze e di applicarle al solido. A tal proposito torna utile aver costruito i solidi con materiale trasparente perché, in questo modo, possono essere visualizzate anche le altezze tracciate internamente al solido (fig. 5).

Figura 5. Alcuni solidi con rappresentate le altezze.

Fase 6

Dopo aver analizzato il lavoro dei singoli gruppi e aver discusso con tutta la classe quali siano state le difficoltà incontrate o gli eventuali errori, si perviene a una definizione precisa di altezza nello spazio. La formalizzazione è pertanto l'ultima parte dell'attività. Si ricorda infatti che è sempre utile con i ragazzi, sia DSA che normodotati, iniziare da una situazione concreta per poi astrarre e giungere alla teoria.

Fase 7

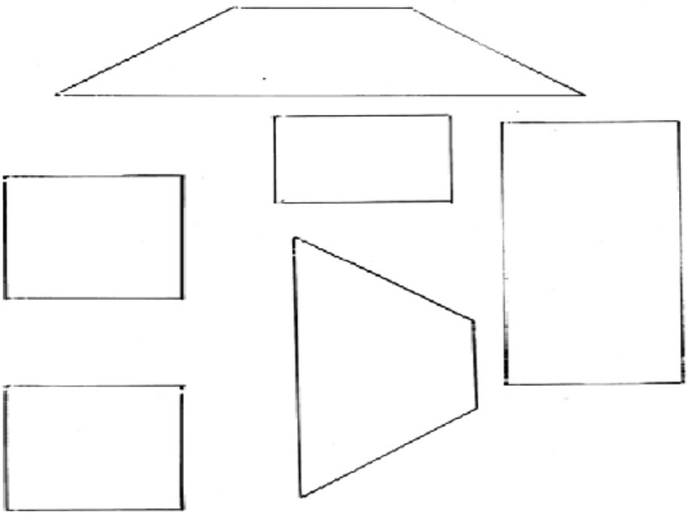
In conclusione viene riproposto il test iniziale per valutare l'efficacia dell'attività e quanto è stato appreso dai ragazzi.

Schede per lo studente

SCHEDA 1

GIANNI STA RIORDINANDO CAMERA SUA. NON HA ANCORA TROVATO DOVE SISTEMARE GLI OGGETTI CHE VEDI FOTOGRAFATI QUI DI SEGUITO. VORREBBE DISPORLI SU UNO SCAFFALE CHE HA I PIANI POSIZIONATI A 35 CM L'UNO DALL'ALTRO. RIUSCIRÀ A METTERLI SULLO SCAFFALE? UTILIZZANDO LE IMMAGINI, SPIEGA COME FARESTI PER AIUTARLO A RISPONDERE.

SCHEDA 2: ESEMPIO DI SVILUPPO DI SOLIDO



Analisi della ricaduta dell'attività sugli studenti BES

L'attività, pensata per includere i ragazzi con bisogni educativi speciali e permettere loro di apprendere in condizioni di massima accessibilità (impiego di caratteri grandi e scritte in stampatello maiuscolo, domande poste in modo chiaro, esclusione di elementi distrattori), è stata per gran parte basata sulla costruzione dei poliedri e sulla discussione orale. In questo modo gli allievi non hanno dovuto leggere e scrivere e si sono concentrati su un apprendimento di tipo percettivo-motorio. In aula si è innescata una discussione alla pari tra tutti gli studenti, discussione in cui è stato pressoché impossibile distinguere gli allievi con bisogni educativi speciali dagli altri. Anche l'alunno con disabilità grave è riuscito a partecipare al dialogo didattico durante l'attività di manipolazione, intervenendo con osservazioni pertinenti (sua l'osservazione secondo la quale, durante la fase di costruzione del solido, la disposizione proposta dai compagni non era corretta in quanto: "Così il solido non si chiude!").

In questa fase è stato possibile osservare non solo le competenze disciplinari degli alunni ma anche quelle trasversali (capacità di discutere e di sostenere le proprie idee, di utilizzare mani e oggetti, di relazionare con i compagni e lavorare in gruppo) e comportamentali o soft skills (autonomia, fiducia in sé, flessibilità, comunicatività con gli altri, capacità decisionale, motivazione, intraprendenza, creatività).

Proporre attività dove sia possibile valorizzare le competenze trasversali e comportamentali, in cui di solito gli allievi BES hanno minori difficoltà, è un utilissimo strumento di didattica inclusiva.

Si è osservata qualche difficoltà in più nella fase di formalizzazione astratta della definizione di altezza: il lessico impiegato è risultato ancora impreciso e approssimativo, ma è risultato evidente che il concetto è stato compreso. Un esempio per tutti: un ragazzo BES ha indicato come risposta al quesito iniziale della Scheda 1 che “stanno sullo scaffale gli oggetti che non sono troppo grandi”. Dalla discussione seguente è emerso come, con il termine “grande”, egli intendesse riferirsi proprio all’altezza del solido, concetto che quindi ha dimostrato di possedere.

Analisi dei questionari di gradimento

Dall’analisi dei questionari di gradimento risulta che l’argomento trattato è stato compreso dagli studenti anche se, spesso, nelle risposte non padroneggiano ancora un linguaggio specifico. Nella maggior parte dei casi il concetto spiegato risulta più chiaro di prima.

Per quanto riguarda il lavoro di gruppo sono emersi nuovamente giudizi positivi: gli studenti pensano che siano utili l’aiuto degli altri e il confronto delle idee per arrivare a un risultato comune. Molto apprezzato è stato il non trovarsi da soli di fronte al problema, ma unire le forze per risolverlo. Quest’ultimo aspetto è emerso principalmente dai ragazzi con bisogni educativi speciali. Per quanto riguarda le emozioni, la maggior parte dei ragazzi ha indicato di essere stata bene e di essersi sentita rilassata durante l’attività. La parte che hanno apprezzato maggiormente è stata la costruzione dei poliedri e l’individuazione delle altezze perché ha permesso di costruire qualcosa insieme. L’aspetto pratico e il lavoro in gruppo sono stati ritenuti stimolanti, come pure la collaborazione e la discussione collettiva delle risposte.

Infine, riguardo alle difficoltà, le principali sono state la realizzazione del solido con il nastro adesivo dopo aver scelto la disposizione delle facce. Inoltre non è stato gradito dover fare il test prima e secondo alcuni sarebbe stato preferibile aver avuto più tempo a disposizione.

Dall’analisi nello specifico delle risposte dei ragazzi BES si evince un notevole apprezzamento dell’attività svolta. La parte che è piaciuta di più è stata l’attività manuale nella costruzione dei solidi, anche se riconoscono di aver avuto delle difficoltà. Il lavorare con compagni e amici ha permesso loro di partecipare e contribuire alla realizzazione finale. Durante la sperimentazione sostengono di essere stati tranquilli e rilassati e di aver imparato cose nuove in un modo divertente. Infine, hanno trovato stimolante l’essere portati a ragionare e a confrontarsi con gli altri.

La diagonale

Nucleo prevalente: Numeri

Grado: primo biennio scuola secondaria di II grado, con possibile adattamento per la scuola secondaria di I grado

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali

Linee generali e competenze

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni).

L’uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l’illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

Obiettivi specifici di apprendimento – Primo biennio

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale.

Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Obiettivi dell'attività

- Visualizzare il concetto di *numeri primi tra loro*
- Individuare strategie appropriate per la risoluzione di problemi
- Riconoscere diverse forme di rappresentazione (verbale, numerica, simbolica, grafica) e saper passare da una all'altra
- Acquisire forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare)

Prerequisiti: conoscere e saper applicare la relazione di divisibilità nell'insieme dei numeri naturali

Materiali: carta e matita. Strumenti tecnologici: PC

Tempistiche: 3 ore

Descrizione dell'attività

Fase 1

Viene proposta una semplice situazione riguardante rettangoli disegnati su carta quadrettata e aventi come lati un numero intero di quadretti; si chiede di scoprire, esaminando vari casi, se una diagonale del rettangolo passa per almeno un vertice di un quadretto interno al rettangolo (Scheda 1). Gli studenti lavorando in piccoli gruppi omogenei, con carta e matita, analizzano la situazione e riconoscono che la diagonale può passare oppure non passare per un vertice di un quadretto interno.

Fase 2

Si esplora la situazione utilizzando GeoGebra (fig. 6) e si richiede di formulare una congettura (Scheda 2); al termine vengono presentate e discusse le conclusioni dei vari gruppi.

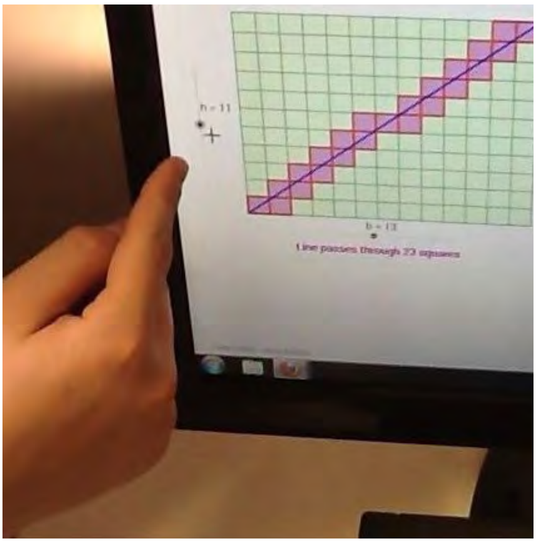


Figura 6. Esplorazione con GeoGebra.

Fase 3

Si individua la relazione tra il numero b di quadretti lungo la base, il numero h di quadretti lungo l'altezza e il numero n di quadretti attraversati da una diagonale nel caso in cui b e h siano primi tra loro (Scheda 3).

Fase 4

Si esamina il caso generale in cui b e h non siano primi tra loro (Scheda 4).

Schede per lo studente

Scheda 1

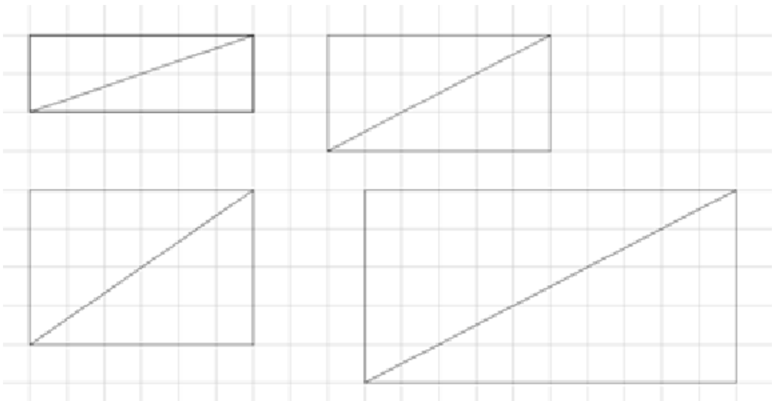
Durante un'ora di supplenza due compagni di banco, Alberto e Bea, cercano di far passare il tempo chiacchierando e disegnando sul loro quaderno a quadretti delle figure geometriche.

Disegnano alcuni rettangoli aventi come base e altezza un numero intero di quadretti e osservano le figure ottenute.

Alberto: "Che strano, le diagonali dei rettangoli passano sempre per almeno un vertice di un quadretto interno, guarda!"

Conta i vertici dei quadretti interni attraversati dalla diagonale del rettangolo nei seguenti casi, che cosa osservi?

Analizza le situazioni e discuti le tue osservazioni con i tuoi compagni.



Scheda 2

Bea: "Secondo me questo fatto non è vero sempre. Esisterà sicuramente almeno un caso in cui la diagonale non attraversa alcun vertice dei quadretti interni al rettangolo."

Chi ha ragione?

Apri il file https://www.geogebra.org/m/A7csyzGr ed esamina vari casi. Che cosa osservi? Può accadere che la diagonale non passi per alcun vertice dei quadretti interni?

Scheda 3

Alberto e Bea si chiedono anche se sia possibile trovare una relazione tra il numero di quadretti lungo la base e lungo l'altezza e il numero di quadretti attraversati da una diagonale.

Alberto: "Proviamo a esaminare vari casi per cercare di scoprire qualche regolarità."

Bea: "Potremmo iniziare dal caso in cui il numero *b* dei quadretti lungo la base e il numero *h* dei quadretti lungo l'altezza siano primi tra loro, compiliamo una tabella."

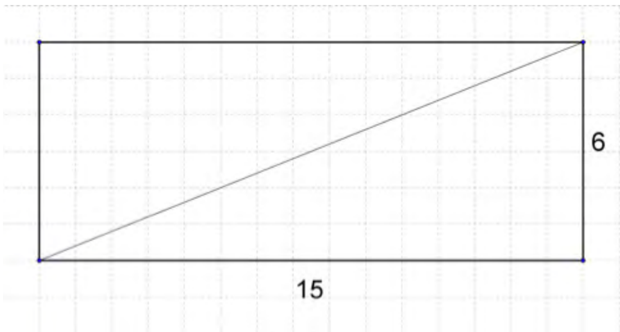
Numero di quadretti base (b)	Numero di quadretti altezza (h)	Numero di quadretti attraversati dalla diagonale (n)
1	5	
2	15	
9	8	
22	9	
45	28	
225	128	

Quale formula hanno utilizzato Bea e Alberto per compilare le ultime righe?

Puoi spiegare perché la formula funziona?

Scheda 4

E se *b* e *h* non sono primi tra loro? Sapresti scrivere una formula che ti permetta di calcolare *n*?



Analisi della ricaduta dell'attività sugli studenti BES

L'attività ha suscitato l'interesse anche di coloro che abitualmente è difficile coinvolgere: tutti hanno partecipato alla discussione del problema nell'ambito del proprio gruppo e durante la successiva sistematizzazione.

Nella fase 1, di esplorazione iniziale, sono emerse difficoltà, nella formulazione della congettura, nel riconoscere che i numeri *b* e *h* devono essere primi tra loro, con affermazioni del tipo: *n* e *h* sono entrambi dispari, uno pari e uno dispari o entrambi primi. In un gruppo è scattato l'automatismo di applicare il teorema di Pitagora per determinare la diagonale del rettangolo.

Analisi dei questionari di gradimento

Dal questionario di gradimento è emerso che l'attività è risultata interessante per più della metà degli studenti (69%), facile per il 5%, facile e interessante per il 10%, noiosa per il16% e che le consegne sono state comprese dal 58% degli studenti. Il lavoro di gruppo e l'attività laboratoriale sono risultati utili per l'89%. Lo stato d'animo prevalente è stato di benessere, 69%.

Bibliografia e sitografia

Abbott, E. A. (2011). Flatlandia. Adelphi Edizioni spa.

www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/la-foto/

http://nrich.maths.org/737

https://www.geogebra.org/

I POLIGONI STELLATI : UN ESEMPIO DI CODING CON GEOGEBRA

Liliana Paparo
IIS A. Badoni di Lecco
liliana.paparo@gmail.com

Abstract

Il workshop descrive l'esperienza di realizzazione di un GeoGebraBook dal titolo *Poligoni Stellati* realizzato dagli studenti di una classe prima ITI (indirizzo Informatica e Telecomunicazioni, IIS A. Badoni, Lecco).

L'attività è parte di un progetto interdisciplinare più ampio dal titolo "*Matematica…Stellare*" che ha coinvolto matematica, informatica e disegno, ha impegnato gli studenti nell'arco di un intero primo quadrimestre e di cui il GeoGebraBook è una delle attività.

I poligoni stellati: un esempio di coding con GeoGebra

L'esperienza didattica, realizzata nel corso del primo quadrimestre dell'anno scolastico 2015-16, è consistita nella messa a punto di un percorso che collegasse e desse significato alla trattazione di argomenti della programmazione di matematica della classe I di Scuola Secondaria di Secondo Grado:

- numeri interi, operazioni e relative proprietà
- numeri primi
- relazioni

Si è scelto di approfondire il tema "Poligoni stellati" in considerazione del fatto che le loro particolari caratteristiche bene si prestano alla trattazione dei temi elencati.

Il percorso è iniziato con l'esplorazione di queste figure geometriche e la loro costruzione grafica mediante il software di geometria dinamica GeoGebra e, su queste basi, sono stati inoltre implementati algoritmi per costruirli in modo automatico.

Si è sviluppato successivamente attraverso l'individuazione delle proprietà matematiche caratterizzanti gli stellati e sono stati trattati alcuni collegamenti tra queste figure geometriche ed i numeri primi, l'algoritmo del MCD di Euclide, la funzione di Eulero e, naturalmente, l'aritmetica modulare.

Gli studenti hanno implementato nel foglio di calcolo l'algoritmo di Euclide e le relazioni di congruenza modulo n.

A completamento ed integrazione del percorso, sono stati analizzati gli stellati da un punto di vista artistico nell'ambito della disciplina "tecnologie e tecniche di rappresentazione grafica".

In questo contesto tratterò principalmente dell'aspetto matematico dell'esperienza attraverso la quale è stato possibile, in particolare:

- Approfondire l'argomento numeri naturali ed interi, già ritenuto noto sin dalla scuola primaria.
- Coglierne le opportunità di utilizzo nel contesto del vissuto quotidiano.
- Spiegare e utilizzare il concetto di relazione, limitandone lo studio teorico agli elementi fondamentali.
- Rivalutare tale concetto come semplice e potente strumento per: collegare logicamente enti differenti, compattare diverse pluralità di oggetti e studiarli come un'unità.

- Utilizzare gli stellati per cogliere il legame tra la geometria e l'aritmetica, tra la matematica e l'arte.

I numeri interi, i primi e le loro proprietà vengono spesso considerati dagli studenti come "*quelli che si imparano e si utilizzano quando si è piccoli* ".

Nelle scuole superiori spesso li si accantona come se non avessero più importanza e i numeri "*veri*", o comunque quelli degni di attenzione, fossero quelli appartenenti agli altri insiemi.

È ignoto a molti studenti il loro ruolo centrale che questi numeri hanno, ad esempio, in tutte le procedure di crittografia.

Lo studente è stato accompagnato in modo da rendersi conto della loro importanza e comprendere quanto i numeri interi e le proprietà relative siano anche alla base della disciplina informatica che caratterizza il loro percorso di studio.

Tutte le attività svolte sono state raccolte in un contenitore multimediale che permette di visualizzare gli aspetti salienti dell'esperienza, per una eventuale replica.

L'attività, oltre ad avere una propria finalità, adeguata ad una classe prima di scuola superiore, è propedeutica alla trattazione di alcuni concetti portanti della crittografia. Il tema della crittografia può essere quindi inteso come la sua naturale prosecuzione, e come applicazione/approfondimento dell'argomento "Funzioni" sviluppato nel secondo anno.

In sintesi, questi sono stati gli obiettivi generali di tutta l'esperienza:

- Trattare in dettaglio l'argomento "Poligoni stellati" guidando la classe all'acquisizione consapevole di contenuti matematici ed informatici non banali.
- Sottolineare il legame della matematica con le altre discipline e la realtà.
- Ottenere, mediante l'uso degli strumenti forniti dalle Nuove Tecnologie un buon livello di coinvolgimento della classe ed una conoscenza approfondita dei contenuti.

In particolare, per quanto riguarda la specifica disciplina, gli studenti sono stati sollecitati in modo da imparare a:

- Cogliere il legame tra la matematica e le altre discipline, in particolare disegno e informatica.
- Utilizzare in modo consapevole le procedure del calcolo aritmetico attribuendo loro la corretta importanza e valore.
- Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti informatici (linee guida 1° biennio matematica).
- Utilizzare la rete per ricercare dati e fonti (linee guida 1° biennio tecnologie informatiche).
- Impostare e risolvere problemi con un linguaggio di programmazione (linee guida 1° biennio tecnologie informatiche)

Non trascuriamo anche alcuni obiettivi trasversali importanti, di socializzazione o motivazionali:

- Imparare a condividere idee, materiali ed esperienze
- Lavorare in modo collaborativo per raggiungere un obiettivo comune
- Favorire la consapevolezza della scelta dell'indirizzo di studi entrando nel vivo di attività fondamentali come la strutturazione di semplici segmenti di programmazione
- Promuovere negli studenti il senso di fiducia nelle proprie capacità

In ultimo posso ricordare alcuni obiettivi tecnologici, che, a consuntivo ritengo di poter elencare:

- Per il docente:
  - Cogliere le potenzialità dell'uso della timeline come strumento di pianificazione, controllo e revisione della propria progettazione

    - Predisporre ambienti di apprendimento (corso Moodle) e di condivisione dei materiali (Google Drive)
    - Predisposizione di servizi web, di tools online, di software funzionali all'attività
- Per gli studenti, imparare a:
    - Utilizzare software dedicati
    - Selezionare ed utilizzare strumenti di presentazione multimediali ad alta efficacia comunicativa
    - Utilizzare e condividere le risorse della rete per le attività di studio
    - Effettuare una ricerca guidata in rete di materiali su un tema assegnato

Qui il link per chi desideri esaminare in dettaglio tutti i materiali che gli studenti hanno prodotto nel corso dell'esperienza didattica:

http://56adcaf39442456adcaf39cd30.edu.glogster.com/matematica-stellare/

Il GeoGebraBook presentato al Convegno GeoGebra Day 2016 è parte dell'esperienza didattica fin qui descritta e può essere qui visionato: https://www.geogebra.org/m/x7hK9Rt4#

La realizzazione dei file inseriti nel Book, suddiviso in 6 attività, ha permesso agli studenti di partire dall'acquisizione di nozioni essenziali di matematica discreta, geometria ed uso dello strumento GeoGebra, fino a raggiungere gradualmente, in un crescendo di curiosità e scoperte, un buon livello di approfondimento nei tre ambiti.

L'aspetto del coding è quello che li ha coinvolti maggiormente.

Gli studenti, sollecitati ad esplorare le proprietà geometriche e matematiche dei poligoni stellati, sono partiti dalla realizzazione della costruzione geometrica.

Si sono ben presto resi conto della lunghezza, laboriosità e ripetitività dell'attività con l'aumentare del numero n dei lati del poligono di partenza.

Per poterne esplorare le proprietà e caratteristiche in tempi rapidi, hanno compreso che dovevano rendere automatica la costruzione di uno stellato assegnati il numero n dei lati del poligono di base e quello k del salto gestiti attraverso due rispettivi slider.

Hanno studiato e sperimentato comandi avanzati di GeoGebra ed hanno imparato a lavorare in modo consapevole con:

- i cicli iterativi (comando successione, listaindici),
- le istruzioni condizionali (comando se),
- la scrittura di un testo dinamico, l'uso dei parametri (slider),
- l'uso degli operatori logici (visualizzazione condizionata, caselle di inserimento).

Le attività proposte nel book sono costitute da uno o più file GeoGebra interattivi preceduti da una domanda stimolo rivolta all'utente e seguiti dalla proposta di un'ulteriore attività o una riflessione.

Qui di seguito la sintesi delle varie attività che compongono il book Poligoni Stellati:

1. Presupponendo nota la definizione di poligono stellato, l'utente è invitato ad osservare un primo file contenente gli stellati che si possono costruire a partire da un poligono di 16 lati.

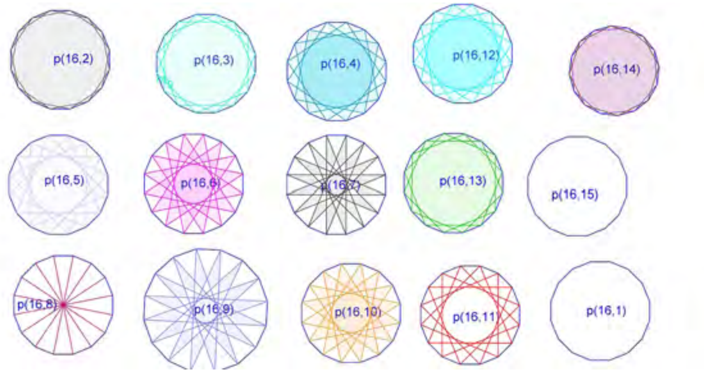


Figura 1

È invitato a riflettere su quanto l'attività sia laboriosa ed ad osservare come, in un secondo file il problema sia stato risolto programmando opportunamente GeoGebra in modo da realizzare automaticamente un poligono stellato con l'uso delle spezzate, una volta assegnati i parametri e che rappresentano rispettivamente il numero dei lati ed il salto.

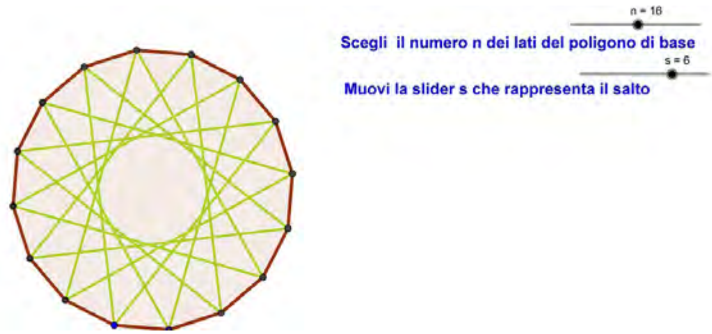


Figura 2

2. Lo studente è guidato, attraverso un testo dinamico, a scoprire la distinzione tra stellato semplice e composto.

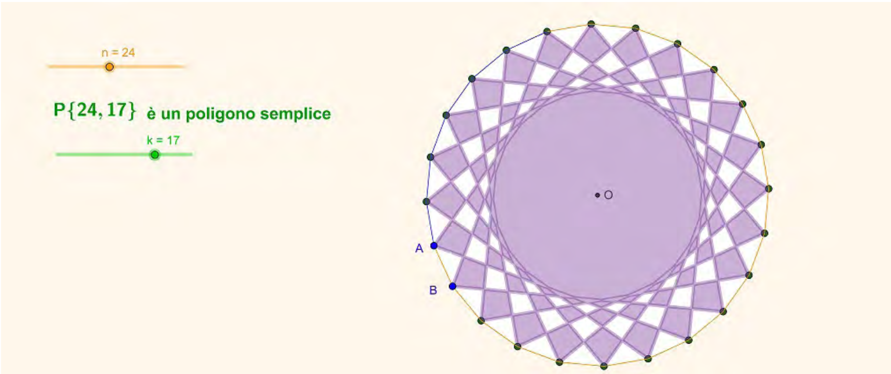


Figura 3

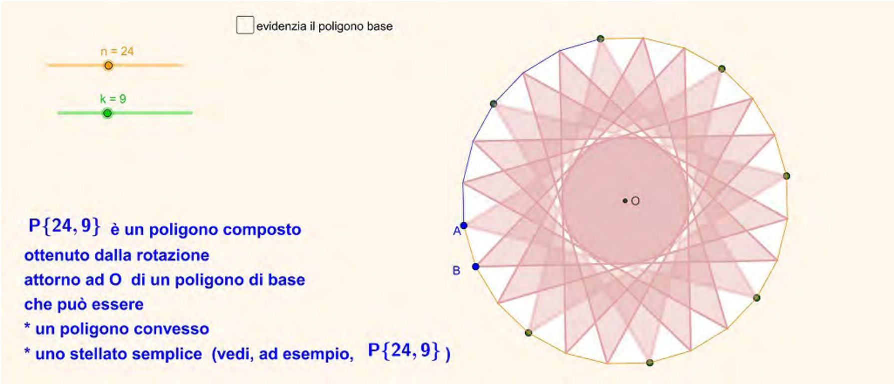


Figura 4

Nel caso di stellato composto, spuntando una casella di controllo, l'utente ha l'opportunità di evidenziare il poligono la cui rotazione genera l'intero stellato.

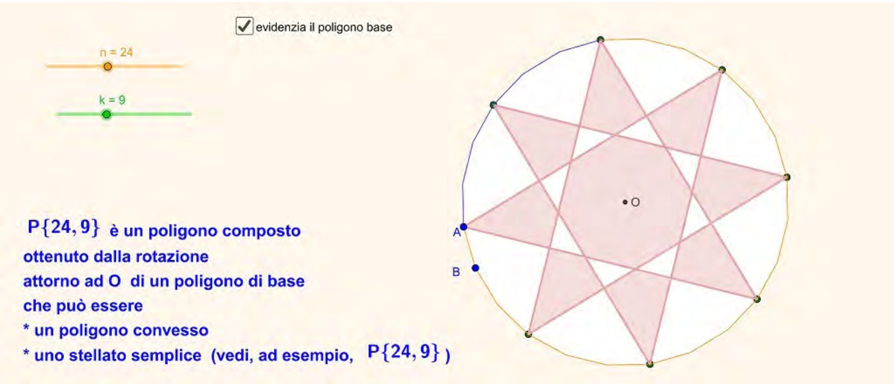


Figura 5

3. È invitato successivamente:

- ad esprimere una congettura in merito alla relazione tra il numero n dei lati del poligono convesso di partenza ed il valore del "salto" k in modo da ottenere uno stellato semplice,
- a verificare la sua congettura nel caso di un ettagono, poi di un ottagono ed infine di un poligono di cui si può stabilire a scelta il numero dei lati. A livello matematico e di programmazione del file GeoGebra, viene introdotta la funzione totiente.

Figura 6

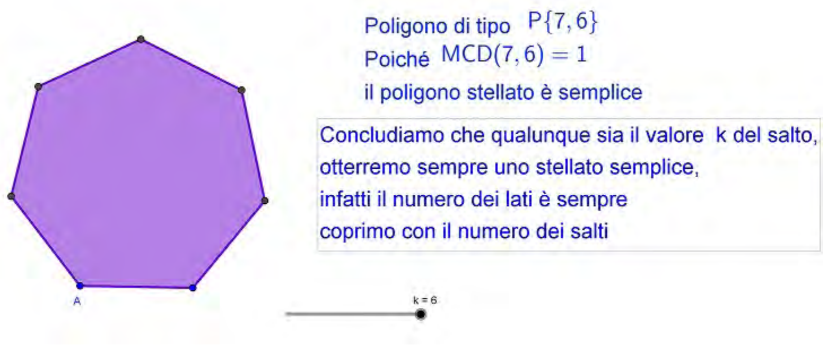


Figura 7

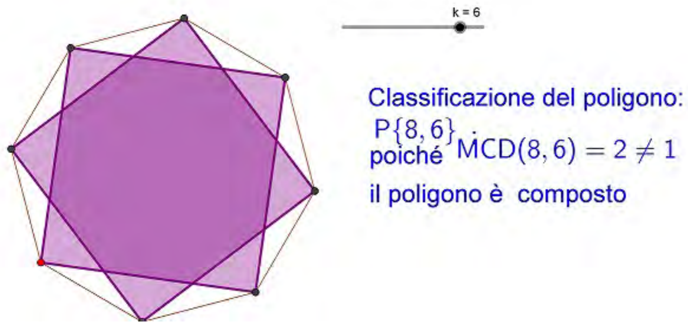


Figura 8

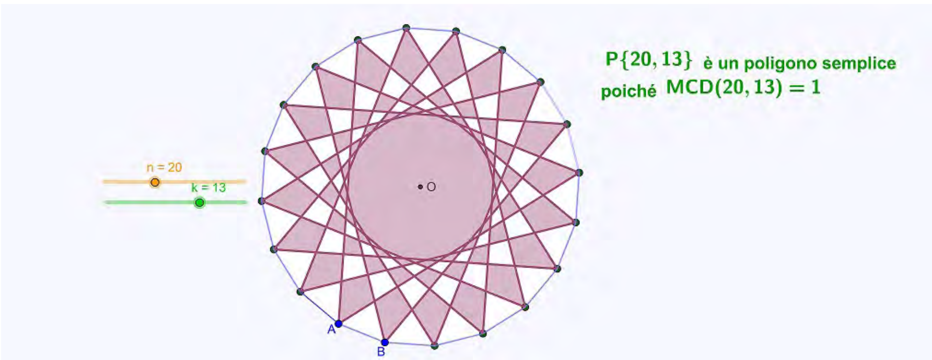


Figura 9

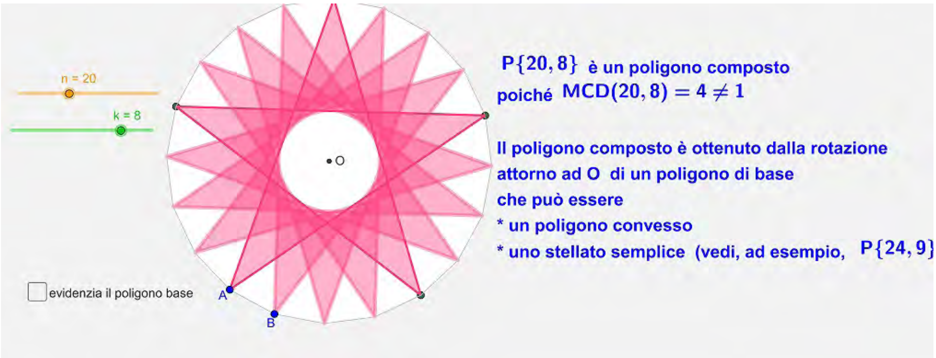


Figura 10

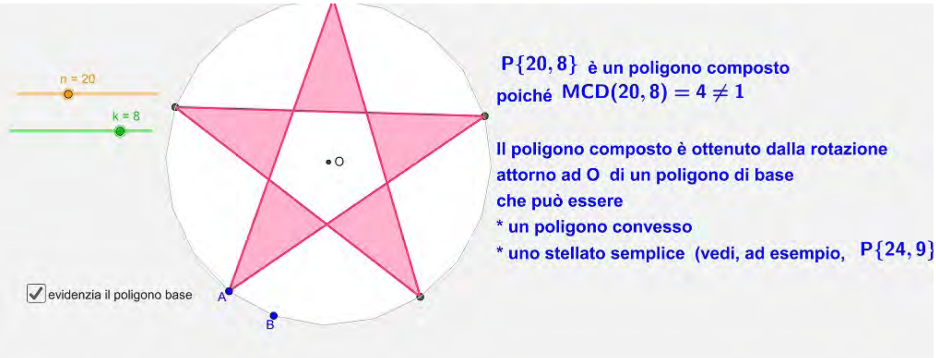


Figura 11

4. È richiesto all'utente di riflettere se si ottengono poligoni diversi per ogni salto assegnato. L'obiettivo è quello di scoprire che $\mathbf{P\{n, k\} = P\{n, n - k\}}$

Figura 12

5. Viene proposta l'analisi degli stellati composti ottenuti rispettivamente da poligoni di 12 o 16 lati. Attraverso l'uso della doppia finestra grafica è possibile visualizzare il poligono regolare la cui rotazione genera lo stellato composto.

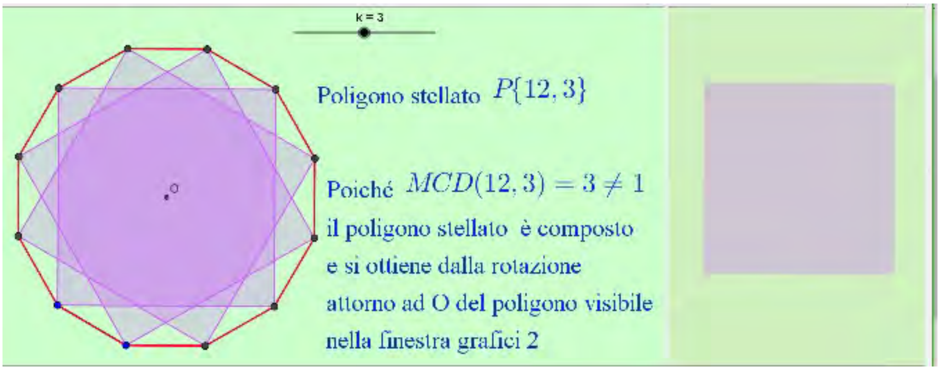


Figura 13

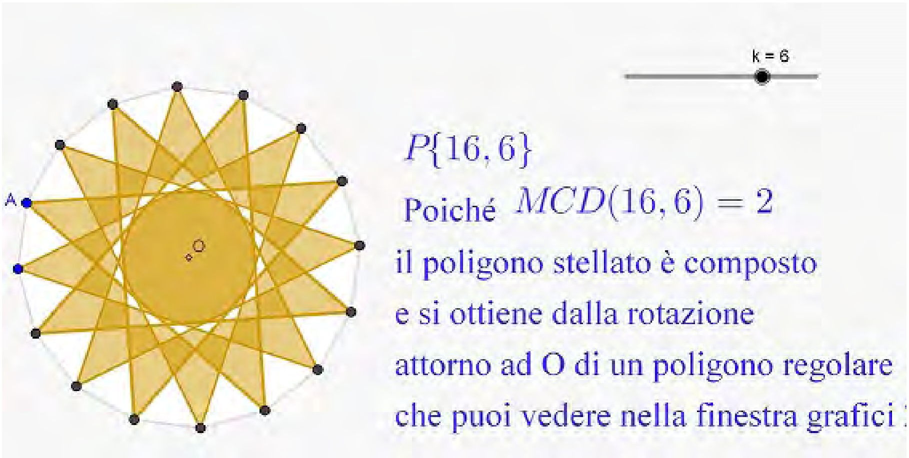


Figura 14

Avendo compreso che $P\{n, k\} = P\{n, n-k\}$ e che, se il salto è 1 o n-1, otteniamo il caso particolare del poligono di partenza, lo studente è invitato a contare gli stellati semplici nel caso n=7, n=12 ed n qualsiasi (fino a 50).

Figura 15

L'ultima attività del GeoGebraBook consiste nel classificare il poligono stellato su cui si basa un'immagine tratta da contesti artistici o architettonici. Qui vediamo un esempio:

Figura 16

Bibliografia

Nolli Nicoletta, Rossetto Silvano, Sclavi Angela, Zoccante Sergio, (2010). *Numeri primi e poligoni stellati.* http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse

Sergio Sammarone. *I poligoni stellati, risorse online Zanichelli per la scuola.* http://online.scuola.zanichelli.it/sammaronedisegno/wp-content/uploads/Zanichelli_Sammarone_Poligoni_Stellati.pdf

Daniele Gouthier. *Infiniti criteri di divisibilità.* http://invitoallanatura.it/2015/infiniti-criteri-di-divisibilita/

Chiara Baldovino. *Rubrica Gyre e Gimble del Progetto Polymath.* *http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Giu_11/PoligonoStellatoRegolare.htm*

Centro Matematita, Unità Città Studi Dipartimento di Matematica, Via Saldini 50, 20133 Milano. *Immagini per la matematica.* http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=270,1026

Paparo Liliana. *Sitografia completa del progetto "Matematica…stellare" suddivisa per : Strumenti, Siti di interesse per le discipline, Siti di attività interattive.* http://edu.symbaloo.com/mix/matematicastellare

GEOGEBRA: ANALISI MATEMATICA DI OPERE D'ARTE

Maria Luisa Spreafico[1], Daniele Tavella[2], Leonardo Vesprini[2], Martina Vita[3]
[1]Ricercatore di Geometria presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
[2]studente di Architettura, Politecnico di Torino
[3] studentessa di Scienze della Formazione Primaria, Università degli Studi di Milano-Bicocca (studentessa dell'ultimo anno del Liceo Scientifico "A.Tosi" di Busto Arsizio durante la sperimentazione)
maria.spreafico@polito.it

Abstract

In questo lavoro mostriamo i risultati di una sperimentazione didattica proposta prevalentemente a studenti del primo anno di Architettura del Politecnico di Torino, nell'ambito all'interno del corso di Istituzioni di Matematiche. Dopo aver scelto l'immagine di un panorama, della mappa di un insediamento urbano o di un'opera d'arte, lo scopo era quello di cogliere alcune linee fondamentali della figura e dedurne, grazie all'uso di GeoGebra, le equazioni matematiche partendo da funzioni elementari e trasformandone i grafici con traslazioni, omotetie, ribaltamenti, per approssimarle al meglio. Il lavoro ha permesso un uso dinamico e applicato della Matematica all'arte.

Introduzione

Vogliamo presentare in questo report i risultati di un lavoro proposto prevalentemente alle matricole di Architettura del Politecnico di Torino, durante l'anno accademico 2015/2016, all'interno del corso di Istituzioni di Matematiche. Tale corso è attualmente l'unico che tratta di matematica nel corso di studi di Architettura.

L'idea è stata quella di fare utilizzare agli studenti le potenzialità di GeoGebra, software per una matematica dinamica (cfr. Impedovo, (2001)), per leggere in termini matematici alcune caratteristiche architettoniche di opere realizzate, o alcuni dettagli di opere d'arte. In questo contesto di letture artistiche si può anche consultare il video della conferenza delle professoresse Elisa Gallo e Maria Cantoni (2011) e il materiale relativo messo a disposizione in rete. Per quanto riguarda invece altre sperimentazioni didattico-matematiche a sfondo architettonico si può leggere l'interessante pubblicazione di Carlini-Tedeschini Lalli (2011).

Nella nostra sperimentazione, dal punto di vista didattico, si è voluto ribaltare la tradizionale idea di studio di funzione: questa volta non era data l'espressione analitica della funzione della quale tracciare il grafico ma, dal grafico, bisognava risalire alle possibili funzioni elementari approssimanti e modificarne il grafico stesso tramite trasformazioni elementari come le traslazioni lungo i due assi, le omotetie e i ribaltamenti. Volutamente, visto il livello di approfondimento di alcuni concetti previsto nel corso, si è scelto di approssimare puntualmente le curve significative individuate.

Il progetto da noi realizzato prevede varie fasi: per prima cosa ogni studente sceglie la foto di un soggetto che per lui risulti particolarmente interessante.

Una volta importata l'immagine nel foglio di lavoro GeoGebra con la funzione "inserisci immagine da", l'allievo la posiziona nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Questo primo passaggio comporta già una lettura matematica di alcuni elementi dell'immagine per sfruttare eventuali simmetrie della figura. Lo studente deve poi individuare alcune curve significative (profili di edifici, strade e piazze, oppure linee di cambio colore in quadri) e trovare rette o porzioni di coniche, oppure grafici di funzioni che meglio approssimano le curve significative trovate in precedenza.

In alcuni casi è stato anche proposto l'uso del calcolo integrale, presente in GeoGebra, per valutare alcune porzioni significative dell'immagine, per esempio: aree edificate e aree verdi in panorami cittadini oppure zone con colori predominanti nel caso di opere d'arte.

In questo report, presentiamo tre lavori particolarmente significativi dal punto di vista dei contenuti matematici, svolti dagli autori Daniele Tavella, Leonardo Vesprini e Martina Vita, sottolineando alcuni punti chiave trattati nei tre elaborati.

Innanzitutto, i loro lavori mostrano diverse scelte di immagini da analizzare; infatti, nell'ordine, vengono proposti: la mappa di un sito (la vista aerea del parlamento di Canberra, Australia; foto tratta da Google maps), un paesaggio urbano (il Gateway di St. Louis: foto tratta da una cartolina) e un quadro (l'Urlo di Munch, terza versione del 1910; foto presa da internet con il filtro "contrassegnata per uso non commerciale"). Per una lettura delle opere di Munch o per ulteriori spunti di opere da indagare si possono consultare manuali di storia dell'arte (per esempio cfr. Cricco, Di Teodoro, (2011)).

In particolare, vedremo come questi studenti hanno fatto scelte opportune del sistema di riferimento, dettate dalla peculiarità dell'immagine scelta. Mostreremo poi metodi diversi per la determinazione dell'equazione di alcune coniche; a questo proposti è interessante il caso della parabola, la cui equazione viene determinata in modo diverso nei tre elaborati. Per quanto riguarda le funzioni illustreremo alcune idee interessanti che sono scaturite durante il lavoro e infine proporremo un'idea per confrontare i campi di colore presenti in un'opera d'arte usando l'integrazione, resa numericamente immediata da GeoGebra.

L'uso di GeoGebra è stato fondamentale. Esso ha infatti permesso di costruire coniche opportune utilizzando sia le funzioni proposte dalla barra degli strumenti, sia considerazioni di carattere geometrico. Inoltre, ha dato la possibilità di modificare velocemente la scrittura analitica delle funzioni visualizzando in tempo reale i relativi grafici. Questo ha permesso agli autori di verificare immediatamente l'esito delle loro scelte di trasformazione e di scegliere quindi i parametri per ottenere la migliore approssimazione.

La proposta di questa attività, facoltativa all'interno del corso, è stata accolta con molto favore da un numero significativo di allievi, coinvolgendoli in una materia, fondamentale per la loro formazione, ma che a volte risulta ostica ed apparentemente lontana dalle loro inclinazioni più artistiche ed architettoniche. Essa ha avuto una ricaduta positiva come motivazione verso i contenuti del corso di Istituzioni di Matematiche e come risultati finali relativi alla valutazione d'esame.

Visti i concetti matematici utilizzati, è possibile proporre questo lavoro nei trienni delle scuole superiori, con richieste modulate a seconda dei programmi svolti.

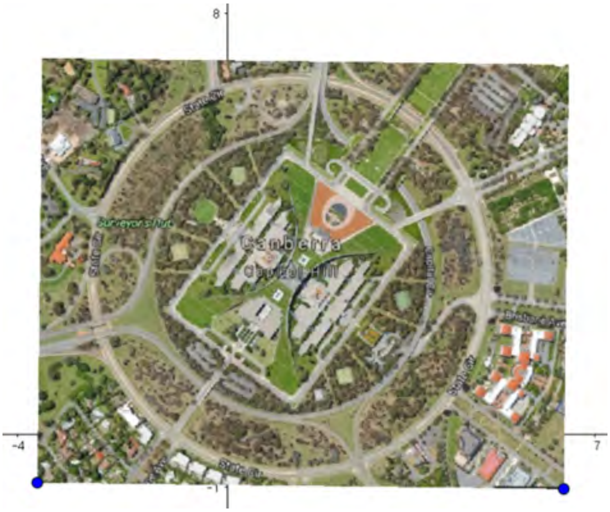
Analisi di un'opera architettonica o un'opera d'arte

In questa sezione abbiamo individuato alcuni punti particolarmente significativi per la proposta didattica ed abbiamo analizzato come essi vengono declinati dai tre autori.

Scelta del sistema di riferimento

Una volta importata l'immagine nel foglio di lavoro GeoGebra, ogni studente sceglie in modo opportuno come posizionarlo rispetto al sistema di riferimento cercando, se possibile, di sfruttare le simmetrie della figura, oppure, facendo in modo che, successivamente, si possano descrivere in modo semplice alcune funzioni trascendenti che si vogliono utilizzare. Questo invita a cogliere le simmetrie di ciò che sta guardando; in particolare, senza ancora averne le equazioni, leggerà la parità o disparità di alcuni grafici.

Le tre scelte fatte dagli studenti sono mostrate nelle Figure 1, 2 e 3:



Per Daniele Tavella la scelta è stata molto naturale perché la vista della mappa presentava due evidenti assi di simmetria ortogonali, che sono stati quindi scelti come assi coordinati. Nella schermata proposta sono anche già evidenziate alcune coniche (che vedremo in seguito) che descrivono strade o che delimitano spazi in cui sono presenti edifici.

Figura 1 (da Google Maps)

Per Leonardo Vesprini è stato importante scegliere come origine degli assi il punto centrale della base della cupola. Infatti, come lui ha osservato, questa scelta comporta naturalmente che l'asse delle ordinate diventi asse di simmetria di alcuni elementi in figura, come la cupola stessa, l'arco e alcune aiuole.

Figura 2 (da cartolina)

Infine Martina Vita ha deciso di posizionare il quadro in modo che fosse semplice descrivere la funzione il cui grafico approssimava la separazione tra il colore blu e le sfumature del giallo e rosso del cielo, che sembrava la curva più complessa da analizzare. Nella figura appare la funzione elementare considerata, che è stata poi modificata, come verrà mostrato in seguito.

Figura 3

Lettura di elementi di geometria analitica

Agli studenti è richiesto di scrivere le equazioni (se possibile anche parametriche) di almeno una retta, una conica (tra ellisse, parabola e iperbole) ed una circonferenza, dopo averle individuate nella figura. Nel nostro caso, per i contenuti svolti nel corso era chiesto di dedurre le equazioni di coniche in forma canonica o semplicemente traslate.

Questo è un ottimo esercizio per mostrare come il nostro occhio possa cogliere alcuni elementi di geometria analitica nel mondo che ci circonda o nell'opera d'arte, semplificando o interpolando alcune linee che naturalmente si sviluppano nell'immagine.

Abbiamo scelto alcune curve per ognuno dei tre lavori, per mostrare diversi procedimenti utilizzati dai tre autori, dando così vari spunti di lavoro al lettore.

Figura 4

Vediamo come sono stati determinati alcuni degli elementi disegnati. Per descrivere la circonferenza gialla, lo Tavella sceglie il punto A(6,0) e chiede a GeoGebra la traccia grafica e l'equazione della circonferenza di centro O(0,0) passante per A (utilizzando l'icona con il disegno della circonferenza e poi la scelta "Circonferenza-dati il centro e un punto"). Ovviamente il programma restituisce l'equazione $x^2 + y^2 = 36$. Le equazioni parametriche sono molto semplici: $x = 6\cos(t), y = 6\sin(t)$.

L'equazione della parabola blu è stata invece determinata come segue: lo studente ha scelto la retta verticale (tracciata in arancione nella figura) e ha poi determinato il fuoco in modo tale che la parabola, determinata da GeoGebra, di data direttrice e fuoco, approssimasse al meglio il profilo delle costruzioni. Per una costruzione può precisa si fissa il vertice della parabola, determinandone le coordinate con GeoGebra. Successivamente, si possono fissare: un punto F sull'asse delle ascisse, il suo simmetrico F' rispetto al vertice e la retta perpendicolare all'asse delle ascisse passante per F'. A questo punto, vincolando F all'asse e muovendolo con lo strumento "Muovi", si visualizza una parabola che cambia forma (cambia la sua apertura mantenendo fisso il vertice). Si sceglie poi la parabola che meglio contiene gli edifici del parlamento. Nel nostro caso l'equazione della parabola determinata da Tavella è: $5.76y^2 - 26x = -12.5$. Le equazioni parametriche sono immediate: $x = \frac{76}{26}t^2 + \frac{12.5}{26}, y = t$.

Analogamente l'iperbole disegnata in verde in figura, che limita la porzione arancione della mappa e la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse. Si fissa arbitrariamente un punto C sull'asse delle ordinate e se ne costruisce il simmetrico C' rispetto all'origine; si fissa inoltre un punto G che apparterrà sicuramente all'iperbole. Si chiede a GeoGebra di determinare l'iperbole di fuochi C e C' e passante per G (utilizzando l'icona coniche e selezionando "iperbole"). A questo punto, muovendo con il comando "Muovi" il primo fuoco C, si può variare l'iperbole e cercare quella desiderata. In questo caso il programma fornisce l'equazione $3.56x^2 - 2.44y^2 = 2.07$. Tralasciamo la parametrizzazione che richiede, ad esempio, l'uso del coseno e del seno iperbolici.

Figura 5

Leonardo Vesprini ha invece utilizzato un altro metodo per ottenere l'equazione di una parabola che approssimasse al meglio l'arco. Ha utilizzato GeoGebra per individuare le coordinate del vertice e di un punto della parabola (nel suo caso il vertice è K(0; 6,65) e il punto della parabola scelto è J(3,96; 0). Per la sua scelta del sistema di riferimento, la parabola risulta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e ha quindi equazione generale $y = ax^2 + c$.

Imponendo le classiche condizioni sul vertice della parabola e il passaggio per K, ha ottenuto l'equazione della parabola cercata $y = -0{,}42x^2 + 6{,}65$.

Infine consideriamo l'Urlo di Munch:

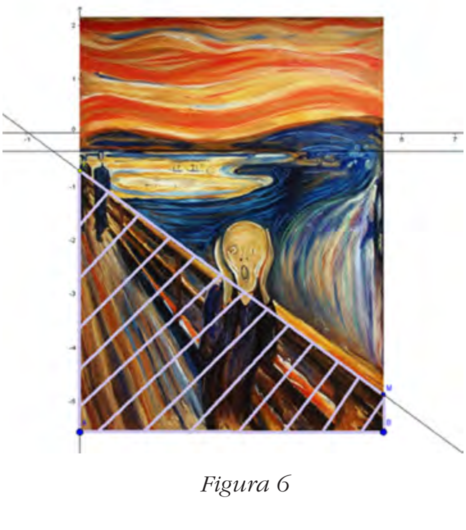


Figura 6

Figura 7

Qui si possono fare due osservazioni interessanti. Innanzitutto, Martina Vita è interessata (anche per il problema delle aree che tratteremo successivamente) a determinare l'equazione della retta che "disegna" la balaustra. Inaspettatamente, facendo tracciare a GeoGebra la retta che descrive il limite superiore della balaustra ci si accorge che mentre nella parte a sinistra del volto la retta descrive il limite superiore del bordo, nella parte a destra la stessa retta approssima la parte inferiore della balaustra. La studentessa ha potuto così anche fare considerazioni sulla percezione visiva di alcuni elementi delle opere d'arte.

L'altra osservazione riguarda un approccio diverso per la determinazione dell'equazione di una parabola. Voleva infatti determinare una parabola che contenesse la macchia di colore giallo che rappresentava il mare [Fig. 7].

In questo caso la parabola non è posizionata simmetricamente rispetto agli assi, ma la studentessa ha individuato come vertice il punto P (2.12, -1.29). Ha utilizzato allora la forma generale della parabola di vertice fissato $y = a(x\text{-}\alpha)^2 + \beta$ dove $\alpha = x_p = 2.12$ e $\beta = y_P = -1.29$.

Restava allora da determinare il coefficiente a. Questo è stato fatto per tentativi successivi, sfruttando la velocità di GeoGebra nella rappresentazione immediata del grafico di funzioni (in alternativa, si può anche costruire uno slider che parametrizzi a).

Nella figura, oltre alla parabola, è già stata evidenziata con l'uso di Paint, la porzione di piano interessante per il calcolo dell'area (vedi sezione successiva).

È interessante notare come, nei lavori dei tre studenti, siano state usate tipologie diverse di equazioni di parabole a seconda della specificità dell'immagine scelta.

Trasformazioni di grafici elementari e relative equazioni

Nel corso di Istituzioni di Matematiche abbiamo lavorato molto sui grafici di funzioni. Lo scopo non era quello di saper studiare e disegnare grafici di funzioni date da leggi particolarmente complicate, perché i tempi del corso non permettono questa scelta, ma era quello di saper manipolare, in modo rapido e dinamico, i grafici delle funzioni elementari. Infatti a lezione era stata posta particolare attenzione alle trasformazioni di grafici facilmente visualizzabili come ribaltamenti, dati dalle espressioni -f(x), f(-x) e |f(x)|, traslazioni lungo gli assi e omotetie, espresse rispettivamente da f(x)+h, f(x+h), e hf(x), f(hx), dove h è un numero reale.

Queste trasformazioni sono state utilizzate da tutti e tre gli studenti per approssimare alcune linee dell'immagine. Vediamo alcune scelte particolarmente significative.

Daniele Tavella ha notato che l'andamento della strada ricorda decisamente il grafico della funzione seno, rappresentato nella figura dalla linea tratteggiata rossa.

Figura 8

Per una migliore approssimazione è stato però necessario "comprimere" verticalmente il grafico, moltiplicandolo per un fattore $0< \alpha <1$.

Tavella ha trovato, per tentativi successivi, che il valore di 2/5 è quello che meglio approssima l'andamento della strada in esame per il più lungo tratto possibile. Quindi la funzione cercata è:

$$y = \frac{2sinx}{5}, -2\pi < x < \pi.$$

Ecco altri interessanti esempi tratti dal lavoro di Tavella.

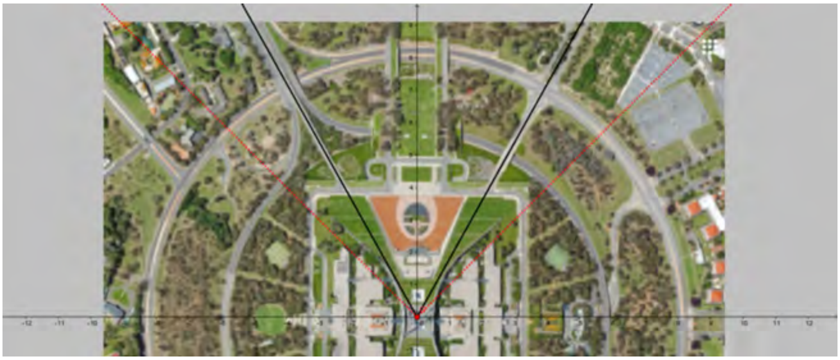


Figura 9

Le due strade che da Nord-Ovest e Nord-Est convergono verso il centro della House of Parliament possono essere interpretate come una funzione modulo, schiacciata verso l'asse delle ordinate. In via sperimentale si deduce che la funzione in questione è $y = \frac{9}{5}|x|$.

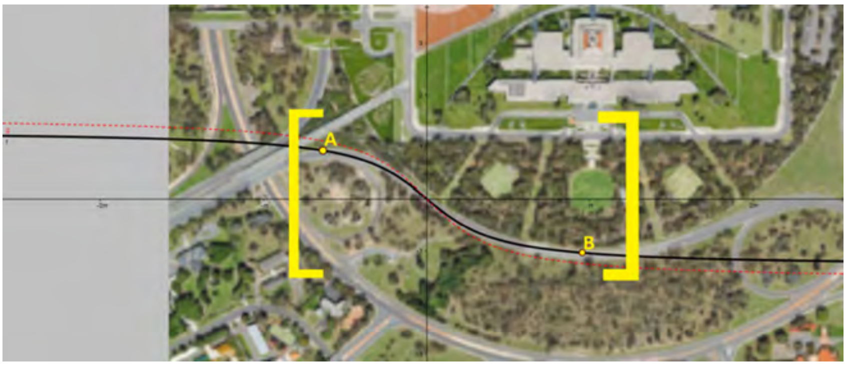


Figura 10

La funzione $y = \frac{5}{6}arctg(-x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{5}{8}\pi, \pi\right]$, descrive con un'approssimazione abbastanza attendibile l'andamento del percorso e la sua unione con il raccordo stradale.

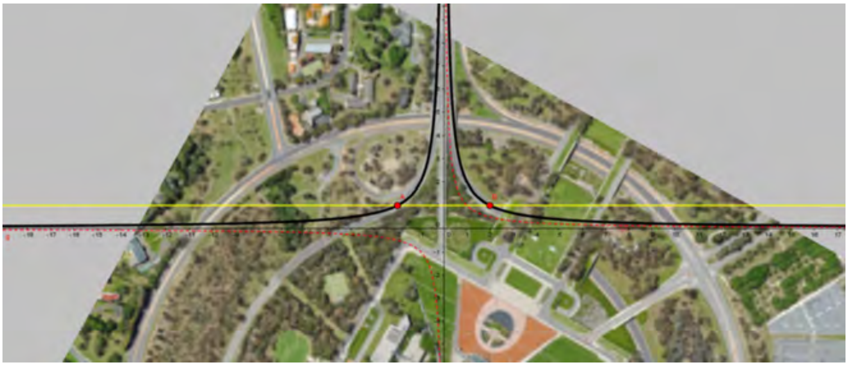


Figura 11

Anche se non in maniera completamente soddisfacente, il tratto di strada in questione può essere descritto a partire dall'equazione $y = \frac{1}{x}$. La migliore approssimazione, al di sopra della linea orizzontale gialla, è data da $y = \frac{2}{|x|}$

Figura 12

Questo tratto di strada, almeno per --3<x<0, è ben descritto dall'equazione y=ln(-2x), ottenuta con semplici trasformazioni a partire dalla funzione elementare y=ln(x).

A questo studente è stato chiesto anche di descrivere una funzione a tratti. Questo esercizio è molto utile perché, in genere, per gli studenti, non è naturale la funzione definita a tratti ed essi preferiscono studiare il grafico di funzioni date analiticamente da un'unica espressione. Questi esempi però mostrano come nella descrizione di linee che si colgono nelle immagini che ci circondano, sia proprio necessario uno spezzamento. Ecco il tratto scelto:

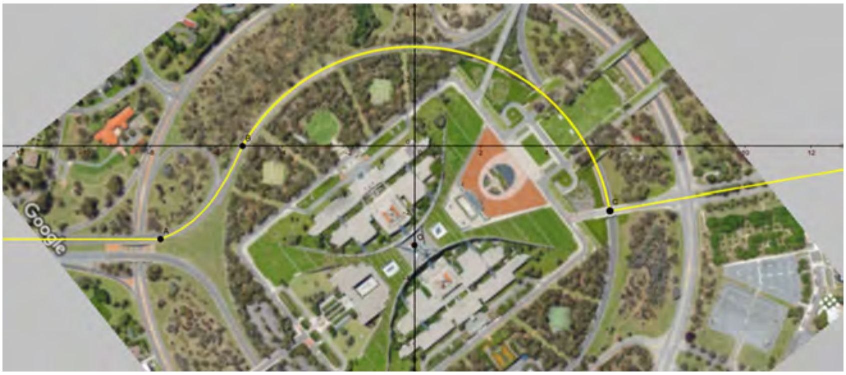


Figura 13

Ne omettiamo le equazioni che sono deducibili da alcune funzioni e coniche studiate nell'elaborato dello studente, con conti non sempre banali.

Vesprini ha invece lavorato maggiormente sull'approssimazione dell'arco. Aveva già provato ad approssimarlo con una parabola (cfr. Figura 5), ma non sembrava un'approssimazione ottimale. Ricordando allora che in molte architetture è utilizzata la funzione catenaria, gli è stato proposto di partire dall'equazione di questa funzione. Ecco i risultati ottenuti.

Figura 14

Figura 15

Inizialmente, partendo dall'equazione della catenaria $y = A\cosh\left(\frac{x}{A}\right)$ dove $\cosh\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{e^{\frac{x}{A}}+e^{\frac{-x}{A}}}{2}$, con alcune prove sperimentali lo studente ha ottenuto che l'apertura dell'arco era meglio approssimata per A=6,65. La catenaria andava poi ribaltata e traslata. La curva rossa in Figura 14 ha equazione $y = -6{,}65\cosh\left(\frac{2{,}2x}{6{,}65}\right) + 13{,}3$

Ha poi provato a modificare la base dell'esponenziale utilizzato nella formula del coseno iperbolico. Questo è stato un ottimo esercizio di manipolazione e modifica di funzioni elementari assegnate.

Sempre per prove successive lo studente è giunto all'equazione: $y = -6{,}65\frac{8^{\frac{x}{6{,}65}} + 8^{\frac{-x}{6{,}65}}}{2} + 13{,}3$ rappresentata dalla linea verde in Figura 15.

Infine, i bordi delle aiuole sono state originalmente approssimate con la funzione arcotangente, come mostra la seguente immagine:

Figura 16

La prima funzione individuata è stata $y = arctg(x + 0{,}2) - 1{,}12$: l'altra funzione arcotangente è ottenuta poi per simmetria.

Nel caso della studentessa Vita, mostriamo solo come abbia lavorato sull'approssimazione delle colline. Inizialmente ha provato a partire da una sinusoide (cfr, Figura 3) ma si è accorta che la sinusoide era smorzata. È stato naturale allora considerare la funzione $f(x) = \frac{sinx}{x}$ e, modificando opportunamente con omotetie, traslazioni e ribaltamenti, è giunta all'equazione:

$$r(x) = -1.2\,\frac{sin\big(1.6(x - 7.55)\big)}{1.6(x - 7.55)}$$

che ha come grafico la sinusoide smorzata rossa della Figura 17.

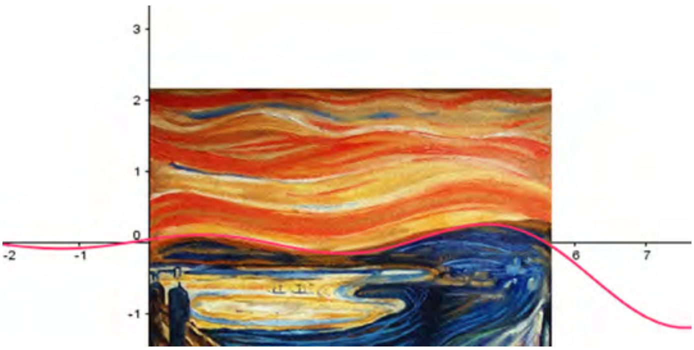


Figura 17

Calcolo di aree

Un'ulteriore interessante funzione di GeoGebra è la possibilità di calcolare numericamente gli integrali (con il comando int[<funzione>, <x iniziale>, <x finale>]) e di poter utilizzare questa funzione per il calcolo delle aree.

La studentessa Vita ha provato a suddividere il quadro di Munch in zone in cui vi fosse un colore dominante. Ha poi calcolato l'area compresa tra due curve e confrontato i valori numerici delle "macchie" di colore. In particolare per il calcolo dell'area blu la studentessa ha levato un'approssimazione del mare in giallo ottenuta con la parabola che aveva precedentemente studiato.

Ecco due dettagli della suddivisione dell'immagine:

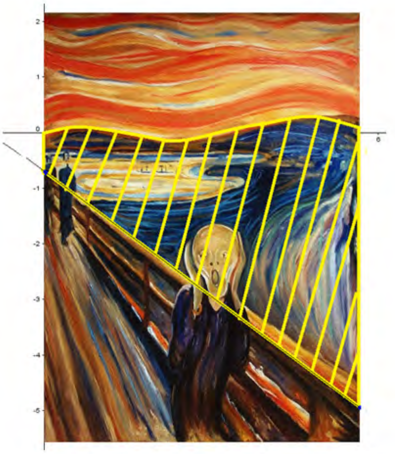


Figura 18

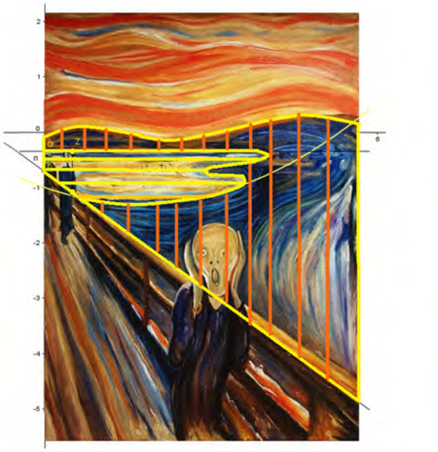


Figura 19

Nella Figura 18 si vedono le tre grandi aree (evidenziate con Paint): il cielo rosso (compreso tra la retta orizzontale, bordo superiore del quadro, e la sinusoide smorzata); il mare blu (compreso tra la sinusoide e la retta che definisce la balaustra); la zona marrone (tra la balaustra e la retta orizzontale, bordo inferiore del quadro). Nella Figura 19, è messa in evidenza la macchia gialla da levare a quella blu.

Proprio con le funzioni suggerite nella precedente descrizione, sono stati calcolati le aree come $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, dove f(x) e g(x) rappresentano rispettivamente, di volta in volta, la funzione che limita superiormente e inferiormente la zona che interessa.

I calcoli effettuati da GeoGebra hanno portato ai seguenti dati numerici sulle aree: Area Marrone = 15.66 unità, Area Blu = 13.21 unità e l'Area Rossa = 12.04 unità. La studentessa ha poi proposto questa sua interpretazione: l'area rossa è con buona approssimazione equiestesa rispetto a quella blu. Il marrone risulta preponderante secondo i calcoli ma non per l'occhio umano in quanto contiene anche parte degli altri due colori.

Martina Vita propone un'interpretazione della sua percezione visiva; quest'argomento è fonte di studio e ricerca (cfr. Arnheim (1962)) e può essere approfondito poi in lezioni trasversali.

Conclusioni

Raccolti alcuni commenti a fine corso degli studenti, posso affermare che per tutti questo approccio dinamico della Matematica, applicato ad elementi per loro interessanti e vicini alla loro indole artistica è stato trovato stimolante. La maggior parte degli studenti ha imparato a gestire le trasformazioni dei grafici, che avevamo spiegato a lezione, in modo autonomo sperimentando le trasformazioni con GeoGebra che ha il pregio di restituire immediatamente il risultato finale e di poter modificare velocemente le funzioni. Coloro che hanno aderito a questa proposta didattica hanno affrontato la parte dello scritto d'esame relativa alle funzioni con più sicurezza e ottenendo risultati molto buoni. La sperimentazione in questa direzione, ma con nuove idee, procederà quindi sicuramente anche nei prossimi anni.

La possibilità di ripetere questo lavoro con immagini il cui soggetto sia caratterizzante per un dato corso di studi (per esempio, immagini di auto per un corso di meccanica, di fiori per un corso di agraria, ecc.), rende questa sperimentazione intrigante per ogni scuola superiore. Inoltre, abbiamo mostrato come la lettura matematica possa essere fatta con contenuti didattici diversi, dal solo utilizzo di elementi di geometria analitica piana all'uso delle funzioni elementari con i loro grafici per finire con applicazioni del calcolo integrale. Questo rende l'idea idonea ad essere utilizzata in tutte le classi dei trienni delle scuole secondarie di secondo grado.

Voglio ringraziare tutti i miei studenti, in particolare i co-autori di questo report, per aver partecipato a questa sperimentazione.

Bibliografia

Arnheim, R. (1954), Art and Visual Perception. A Psychology of the creative Eye. Berkeley: University of California Press. Prima traduzione italiana: (1962). *Arte e percezione visiva*. Milano: Feltrinelli.

Cantoni, M., Gallo, E, (2011). *Guarino Guarini. Arte e Matematica.* http://moodle.lacasadegliinsegnanti.it/course/view.php?id=23#section-3

Carlini, A., Tedeschini Lalli, L. (2012). *Interrogare lo spazio. Esperienze di matematica e architettura*. Roma: Gangemi.

Cricco, G., Di Teodoro, F., (2011) *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte. Edizione. Gialla*. 3. Bologna: Zanichelli.

Impedovo, M. (2001). Computer algebra e insegnamento della matematica. *Quaderni del Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione Generale Classica*, 44.

ALLA SCOPERTA DELLA FUNZIONE INTEGRALE: POTENZIALITÀ DI UN APPROCCIO DINAMICO

***Luciano Zazzetti*[1], *Giovanna Valori*[2]**
[1]*Liceo classico "Leopardi", San Benedetto d.T.,*
[2]*Liceo classico "F. Stabili", Ascoli Piceno*
luciano.zazzetti@gmail.com

Abstract

Anche alla luce delle sollecitazioni che le tracce della seconda prova di matematica pongono, si ritiene opportuno un approccio al teorema fondamentale del calcolo integrale che vada al di là del "semplice" enunciato in forma analitica. Per un apprendimento più significativo si vuole mostrare l'intimo legame tra derivata di una funzione in un punto e funzione integrale. Mentre di norma gli studenti non hanno difficoltà ad apprendere l'enunciato del teorema od anche a tracciare un andamento qualitativo della derivata prima dal grafico di una funzione, l'esperienza mostra che il passaggio inverso risulta meno intuitivo. La combinazione delle capacità dinamiche e semplicità d'uso fanno di GeoGebra uno strumento ideale allo scopo. Nonostante la semplicità d'uso riconosciuta, la costruzione della funzione integrale non risulta così immediata e così può essere opportuno guidare gli studenti. Lo strumento più adatto allo scopo può essere un software che registra quello che avviene sullo schermo insieme ad eventuali commenti del docente o di chi comunque sta registrando le operazioni. Una volta appreso come sia possibile tracciare il grafico di $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ gli studenti possono essere guidati alla scoperta delle relazioni fra le caratteristiche delle funzioni *F(x) e g(x)*. Si propongono attività formative a più livelli di approfondimento e relative schede di lavoro. L'obiettivo è quello di colmare il divario fra capacità di calcolo e comprensione concettuale.

Introduzione

I corsi di analisi matematica che si tengono a livello accademico, spesso sono affrontati con difficoltà dagli studenti la cui preparazione di base si manifesta esclusivamente attraverso abilità procedurali, di cui hanno scarsa consapevolezza, che sono ben distanti da una profonda comprensione concettuale. Già nella scuola secondaria emergono criticità che hanno diverse cause:

- I misconcetti sulla nozione di limite;
- La difficoltà dell'utilizzo della notazione di Leibniz;
- L'utilizzo corretto dei quantificatori;
- La scelta di opportune rappresentazioni;
- Una limitata immagine mentale del concetto di funzione.

Spesso osserviamo una inadeguata comprensione degli aspetti algebrici e grafici di certi concetti e l'incapacità di interpretare o visualizzare relazioni dinamiche in concetti fondamentali dell'analisi matematica. Una funzione assegnata come $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ li può mettere in serio imbarazzo, anche se *g(t)* è "semplice"!

Prendiamo ad esempio la seguente funzione, assegnata ad un appello di Analisi I del Politecnico di Milano. Veniva richiesto solo di disegnare il grafico di $\Phi(x) = \int_0^x g\,(t)dt$ essendo assegnata la funzione *g(t)* come segue:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| > 1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ 1 - t & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

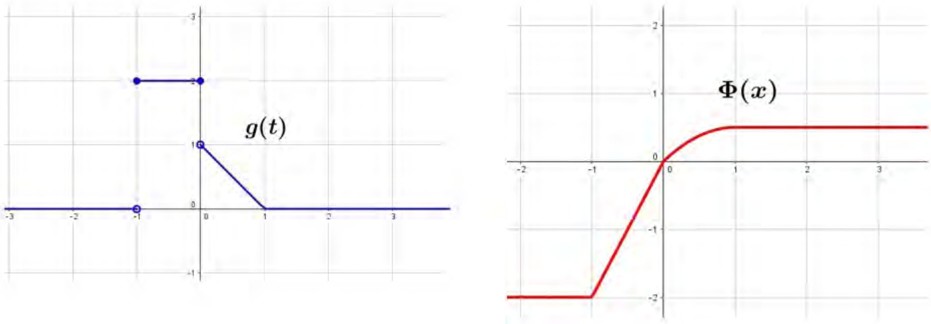


Fig. 1 Testo e soluzione dell'esercizio proposto

O ancora, ricordiamo il problema 2 dell'Esame di Stato 2016, assegnato al Liceo Scientifico, dove si dava il grafico della funzione *f(x)*, continua in [0,+∞) e derivabile in (0, +∞), e si chiedeva di tracciare grafici deducibili da quello di *f(x)*, tra cui quello di

$$F(x) = \int_0^x f\,(t)dt$$

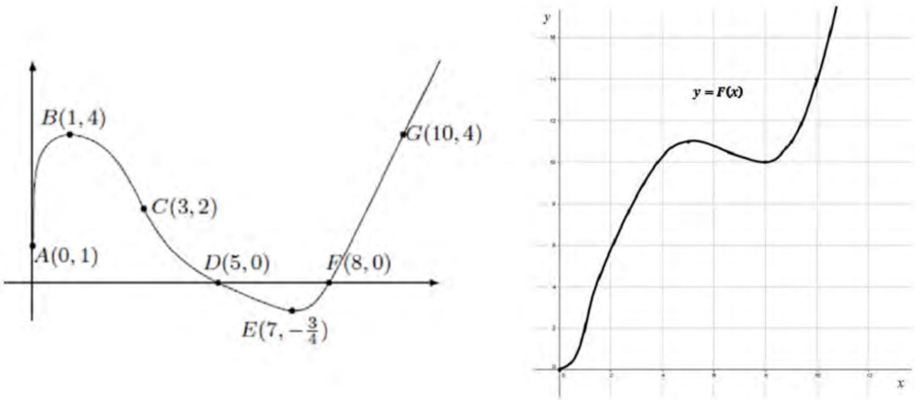


Fig.2 Testo e risposta ad un quesito assegnato in un problema dell'esame di stato 2016.

Secondo gli esperti di Pristem:

"Il problema 2 rappresenta una serie di quesiti impegnativi. Niente di particolare (crescenza/decrescenza, concavità/convessità) ma, nel passaggio dal grafico di una funzione a quello della sua funzione derivata, è necessaria una certa preparazione e ginnastica mentale; poi, per rispondere alle domande successive veniva richiesta anche una certa familiarità con il

significato geometrico dell'integrale definito e con la funzione integrale; i calcoli (non molti) confinati nelle ultime righe del testo."

Uno studente abituato a trattare funzioni in termini di formule e calcoli, che non sia capace di usare differenti forme di rappresentazione dello stesso concetto matematico e di muoversi in modo flessibile da un sistema di rappresentazione ad un altro, potrebbe avere difficoltà nella risoluzione dei problemi visti in precedenza.

Proposta di lavoro

L'uso di multiple rappresentazioni, ciascuna delle quali mette in evidenza una caratteristica di un certo concetto matematico, aiuta gli studenti a sviluppare idee e processi, veicolando i significati e promuovendo una comprensione profonda. GeoGebra stimola lo studente all'uso di tali rappresentazioni multiple e permette inoltre un apprendimento basato sulla scoperta guidata, grazie alla possibilità di effettuare osservazioni ed esplorazioni dinamiche. Lo studente, dall'osservazione, può arrivare a formulare ipotesi e scoprire proprietà e teoremi che il docente non ha proposto a priori. Il calcolo simbolico della vista CAS rappresenta inoltre un avvio alla formalizzazione.

Per tutte queste ragioni vengono presentate alcune attività fruibili in poco tempo, anche negli indirizzi di studio caratterizzati da una matematica debole (2 ore settimanali nel secondo biennio e ultimo anno). L'obiettivo di queste attività è l'investigazione della funzione integrale ed in particolare di come essa costituisca un modo per connettere il concetto di integrale definito con quella di primitiva. Lo stile è quello delle *Esplorazioni Matematiche Con GeoGebra*. L'intento è anche quello di aggiungere un piccolo contributo alle tante proposte già presenti.

Prerequisiti alle attività:

- applicazioni del calcolo differenziale allo studio delle caratteristiche di una funzione;
- concetto di primitiva e di integrale indefinito;
- integrale secondo Riemann e proprietà dell'integrale definito (in particolare: additività rispetto al dominio di integrazione).

Piano di lavoro:

- Attività 1: Problemi introduttivi tratti dalla fisica.
- Videolezione: Costruzione della funzione integrale con GeoGebra (*http://bit.ly/2jfNOJH*).
- Attività 2: Esplorazioni e congetture.
- Attività 3: Verso il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Attività 1: Problemi introduttivi tratti dalla fisica

Attività 1.1

Scheda studente

Un ragazzo si sta muovendo in linea retta, in bicicletta, ad una velocità costante (10 m/s nel grafico sottostante). Si inizia a studiare il moto ad un certo istante iniziale t_0. Nel grafico la velocità è in m/s ed il tempo in secondi.

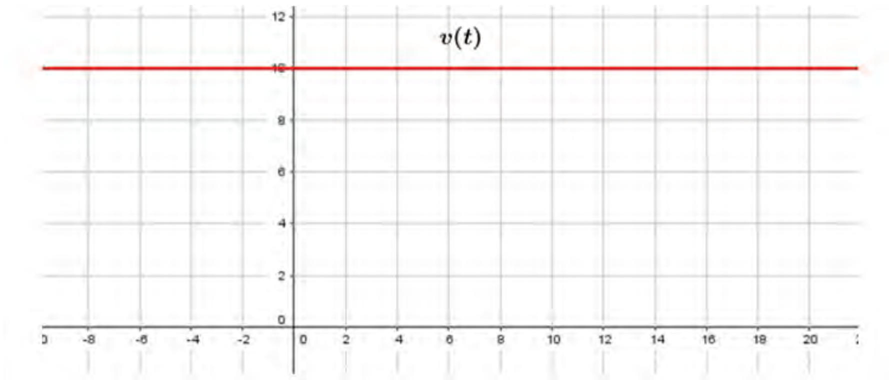


Fig.3 Grafico velocità-tempo per un moto rettilineo uniforme

- Completa la tabella assumendo t_0=0 s calcolando lo spostamento come "area"

Istante di tempo t in secondi	Spostamento in metri
0	
2	
4	
7	

- Qual è il senso fisico di calcolare lo spostamento per istanti di tempo negativi?
- Aggiungi sopra qualche valore dello spostamento per istanti di tempo negativi.
- Dal punto di vista grafico/matematico come puoi giustificare il risultato che ottieni?

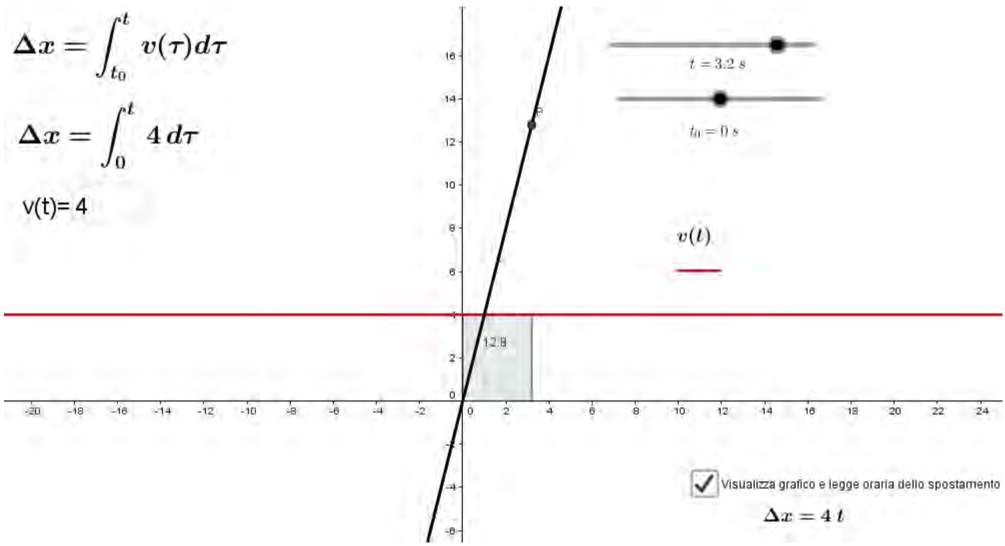


Fig.4 Foglio di supporto all'attività 1.1

Attività 1.2

Scheda studente

Un corpo viene lanciato verso l'alto con una velocità v_0 = 20 m/s. Assumi g= 10 m/s² e fissa l'origine del sistema di riferimento nel punto di lancio.

- Scrivi l'equazione oraria della velocità e rappresenta il diagramma velocità-tempo nei 4 secondi successivi all'istante di lancio.

Fig. 5

- Completa la tabella assumendo t_0=0 s calcolando lo spostamento come "area"

Istante di tempo *t* in secondi	0	1	2	3	4
Spostamento in metri $= \int_0^t v\,(\tau)d\tau$					

- Prova a fornire una interpretazione fisica e geometrica dei risultati.

- Traccia un grafico qualitativo dello spostamento $\Delta x = \int_0^t v\,(\tau)d\tau$ e verifica che ottieni quello già studiato in fisica.

Fig. 6

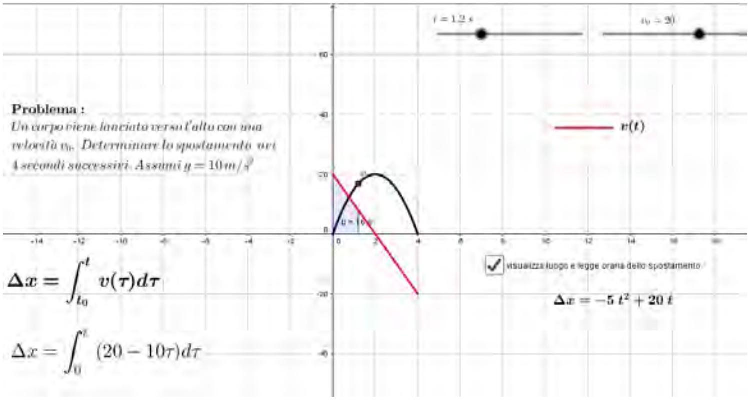


Fig. 7 Foglio di supporto all'attività 1.2

Attività 2 - Esplorazioni e congetture

Dopo aver costruito la funzione integrale $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ (vedi protocollo di costruzione nell'appendice) come luogo dei punti dell'"area", osservandone anche la traccia, gli studenti effettuano esplorazioni al variare dell'estremo superiore di integrazione. La funzione integranda può essere modificata a piacere e ciò permette di effettuare un gran numero di osservazioni e di formulare congetture sulle relazioni tra la funzione integrale e l'integranda. Inoltre gli studenti possono congetturare che la funzione integrale di una funzione integrabile è una funzione continua nell'intervallo in cui è definita; quindi anche se *g* non è continua, la sua funzione integrale lo è. La funzione integrale è più regolare della funzione da cui proviene! Modificando inoltre l'estremo inferiore essi ne osservano l'effetto come traslazione che possono anche giustificare!

Scheda studente

- Costruisci il foglio di lavoro *funzione integrale.ggb* seguendo le indicazioni della videolezione. Fissa *a=0*. Muovendo *x* potrai osservare che la traccia di P dà il grafico della funzione integrale.
- Inserisci una funzione costante: *g(t)*=costante. Osserva la traccia di P, anche per diversi valori della costante. Quale tipo di andamento riconosci?
- Prova ora con funzioni lineari. Che relazioni tra i due grafici osservi? Quali giustificazioni di tipo "geometrico" puoi dare?
- Inserisci ora una funzione di secondo grado con due zeri reali, ad esempio $g(t) = t^2 - t - 2$. Scrivi le relazioni tra i due grafici che osservi. Quali altre osservazioni puoi aggiungere?
- Da quanto osservato fino ad ora quale congettura puoi fare sul legame tra la funzione integrale e *g*?
- Il legame che hai trovato è ancora valido se la funzione *g* è:
  - Discontinua? Prova ad esempio con *g(t)=sgn(t)*.
  - Non derivabile? Prova ad esempio con *g(t)*=|*t*|.
- Riutilizza ora una delle funzioni già utilizzate in precedenza e prova a cambiare il valore dell'estremo inferiore *a*. Quale effetto produce questo cambiamento sul grafico della funzione integrale? Prova a dimostrarlo!

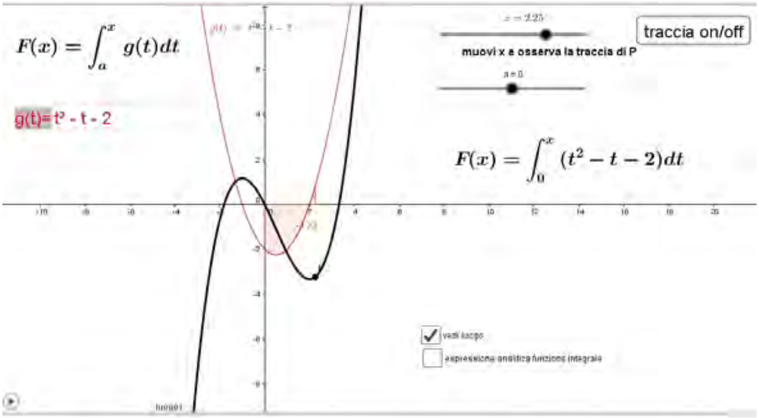


Fig.8.1 Foglio di lavoro relativo all'attività 2: esplorazioni

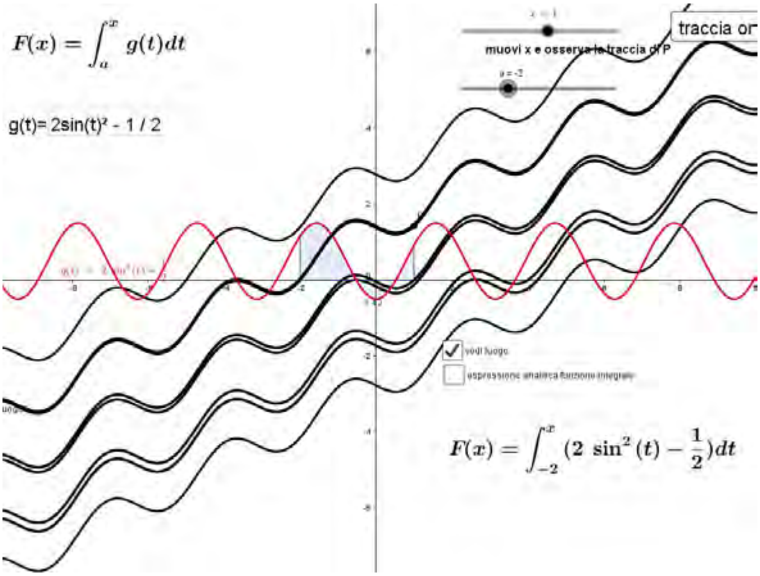


Fig.8.2 Foglio di lavoro relativo all'attività 2: gli effetti del primo estremo di integrazione

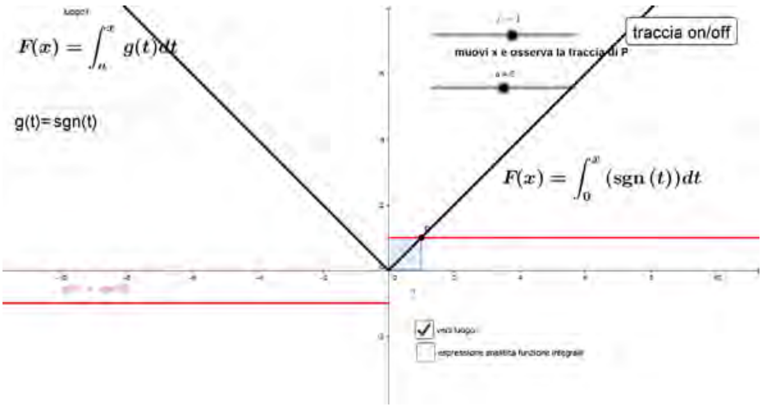


Fig.8.3 Foglio di lavoro relativo all'attività 2: g(t) integrabile ma non continua

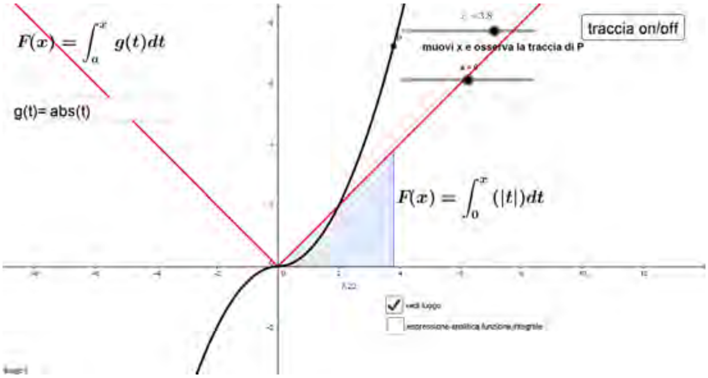


Fig.8.4 Foglio di lavoro relativo all'attività 2. g(t) continua ma non derivabile: effetti sulla funzione integranda

Attività 3 – Verso il Teorema fondamentale

L'attività mira a verificare la validità della congettura sulla relazione tra la funzione integrale e quella integranda. A partire da un generico punto P del grafico di *F(x)*, si costruisce la funzione rapporto incrementale $d_h(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ e si osserva l'andamento di quest'ultima al tendere di *h* a zero. L'attività è propedeutica alla dimostrazione classica del teorema fondamentale.

Scheda studente

- Come puoi esprimere il rapporto incrementale di $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ relativo al punto x ed all'incremento h?
- Crea un nuovo slider *h*, con h variabile tra -0.5 e 0.5 con incremento 0.01;
- Sul tuo foglio di lavoro, definisci il punto Q avente ascissa *x* e ordinata uguale al rapporto incrementale $d_h(x)$;
- Definisci il punto R avente ascissa *x* e ordinata uguale a *g(x)*;
- Costruisci il luogo dei punti Q al variare di *x*;
- Cosa accade quando *h* si avvicina a zero? Esplora qualitativamente e quantitativamente eventualmente utilizzando il foglio di calcolo. La tua precedente congettura sulla relazione tra la funzione integrale e l'integranda è ancora valida?

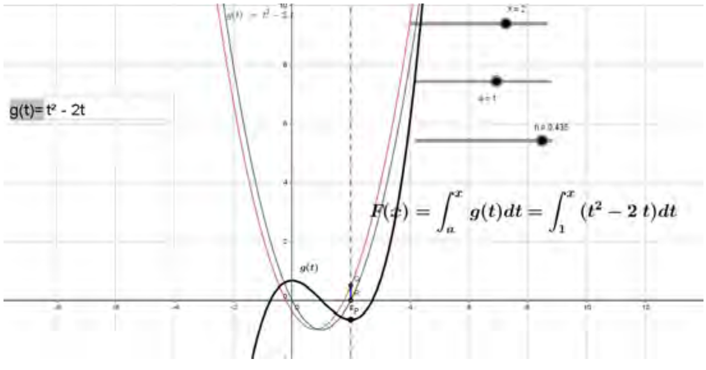


Fig.9 Foglio di lavoro relativo all'attività 3

Conclusioni

L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria di secondo grado dovrebbe essere mirato all'acquisizione di conoscenze generali di concetti e processi dell'analisi matematica fortemente legate all'intuizione. Utilizzando un software dinamico come GeoGebra, gli insegnanti possano aiutare gli studenti a creare connessioni tra gli aspetti grafici, algebrici e numerici di uno stesso concetto per vederlo sotto diverse prospettive, migliorando significativamente la loro comprensione. La "teoria" che andrà successivamente compiuta con il rigore adeguato non rimarrà in tal modo una scatola bella ma vuota.

Appendice: protocolli di costruzione

Protocollo di costruzione della funzione integrale (attività 2)

N.	Nome	Descrizione	Valore	Legenda
1	Funzione g		$g(t) = t^2 - 4$	funzione integranda
2	Numero a		a = 0	primo estremo di integrazione
3	Numero X		X=3.9	secondo estremo di integrazione=variabile indipendente della funzione integrale
4	Numero c	Integrale di g da a a X	c = 4.17	area col segno
5	Punto P	(X, c)	P = (3.9, 4.17)	ha ascissa x e ordinata uguale all'area col segno
6	Testo testo3		muovi x e osserva la traccia di P	
7	Campo di inserimento CampoInserimento1	CampoInserimento [g]	CampoInserimentol	g(t)=
8	Luogo luogo1	Luogo[P, X]	Luogo1 = Luogo[P, X]	

Protocollo di costruzione Teorema Fondamentale (attività 3)

N.	Nome	Descrizione	Valore	Legenda
1	Funzione g		$g(t) = t^2$	funzione integranda
2	Campo di inserimento CampoInserimento1	CampoInserimento [g]	CampoInserimento1	g(t)=
3	Numero a		a = 1.3	primo estremo di integrazione
4	Numero X		X = 2	secondo estremo di integrazione=variabile indipendente della funzione integrale
5	Numero c	Integrale di g da a a X	c = 1.9343	area col segno
6	Punto P	(X, c)	P = (2, 1.9343)	ha ascissa x e ordinata uguale all'area col segno
7	Luogo FunzioneIntegrale	Luogo[P, X]	FunzioneIntegrale = Luogo[P, X]	
8	Numero h		h = 0.121	
9	Numero ch	Integrale di g da a a X + h	ch = 2.4482	
10	Numero dh	(ch - c) / h	dh = 4.2469	
11	Punto Q	(X, dh)	Q = (2, 4.2469)	
12	Luogo luogo2	Luogo[Q, X]	luogo2 = Luogo[Q, X]	
13	Punto R	(X, g(X))	R = (2, 4)	
14	Segmento err	Segmento [Q, R]	err = 0.2469	
15	Retta i	x = x(P)	i: x = 2	

Bibliografia

David Tall (1992) *Student's Difficulties in Calculus Plenary presentation in Working Group 3* – ICME, Québec, August 1992

AP Calculus (2006) *Special Focus:The Fundamental Theorem of Calculus* 2006-2007 Wokshop Materials

Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter, Yves Kreis, Zsolt Lavicza (2008) *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra* ICME 11, Monterrey, Mexico

Ornella Robutti, (2013) *Esplorazioni Matematiche Con GeoGebra,* Ledizioni, Milano, Italy

Haciomeroglu, Erhan Selcuk, Andreasen, Janet B. (2013*), Exploring Calculus with Dynamic Mathematics Software*, Mathematics and Computer Education, Vol 47, nr 1.

http://www.matematica.it/tomasi/matls/index.htm

http://matematica.unibocconi.it/articoli/esame-di-stato-2016-la-prova-di-matematica

http://bit.ly/2jfNOJH (Videolezione: *GeoGebra e la funzione integrale*)