IRIS AperTO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

Matematica e Musica: un’attività didattica interdisciplinare nel progetto Scuole Secondarie Potenziate in Matematica in Piemonte

This is the author's manuscript

Original Citation:

Availability:

This version is available http://hdl.handle.net/2318/1925110 since 2023-08-05T16:54:34Z

Publisher:

L'artistica Editrice

Terms of use:

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

29 November 2026

Matematica e Musica: un'attività didattica interdisciplinare nel progetto Scuole Secondarie Potenziate in Matematica in Piemonte

Massimo Borsero
I.C. "Parri – Vian" – Torino
Dipartimento di Matematica "G. Peano" – Università degli Studi di Torino
Mattia Minetti
I.I.S. "A. Castigliano" – Asti
Elisabetta Piras
Conservatorio "Vecchi Tonelli" – Modena
Dipartimento di Scienze Dell'Educazione "Giovanni Maria Bertin"
Università di Bologna

Sunto. *È possibile che ci sia geometria in alcuni brani musicali? È possibile studiare musica parlando di trasformazioni geometriche? In che cosa consiste l'interdisciplinarità tra la matematica e la musica? Ovvero, quali sono gli aspetti che accomunano il carattere intuitivo e il rigore scientifico della prima con la creatività e le regole della seconda? Il progetto "Musica e Geometria: …note e simmetrie…" è nato a partire da questi interrogativi: un approfondimento didattico interdisciplinare modulare destinato alle studentesse e agli studenti all'interno del progetto Scuole Secondarie Potenziate in Matematica. La sua progettazione e la realizzazione sono state oggetto di analisi e di ricerca in didattica della matematica sia dal punto di vista epistemologico disciplinare (musicale e matematico), sia dal punto di vista meta-didattico e metodologico, indagando le prasseologie di partenza delle varie comunità di insegnanti e come queste entrano in gioco e possono evolvere durante il lavoro condiviso.*

Introduzione

Nonostante la notevole quanto suggestiva letteratura sulla correlazione tra musica e matematica, i tentativi di esplicazione di tale correlazione connessione mostrano aspetti complessi e settoriali, ben lontani dal mero accostamento di codici simbolici e procedure astratte di matrice proporzionale.

Da un punto di vista teorico, se così si può dire, di fatto la musica vive di relazioni matematiche, di proporzioni, di frazioni e simili; d'altro canto, l'arte

dei suoni ha aiutato e ispirato nei secoli soluzioni razionali e specifiche di natura acustica, algebrica, geometrica e altro ancora. Uno sguardo alla panoramica storica ci coinvolge in un contesto in cui il pensiero dell'uomo si articola tra logiche esatte e razionali e ambizioni artistiche e emozionali (Maor, 2018), basta pensare a Pitagora (VI sec. a. C.) e agli assunti a lui associati del legame tra suono e relazioni matematiche; ai principi matematici riscontrabili nelle composizioni di Johann Sebastian Bach (1685-1750), dalla ricorrenza di sezione aurea a importanti assetti strutturali e formali assimilabili a procedimenti geometrici; ancora si può pensare alle pratiche improvvisative come quella del basso continuo[1] o alle varie che animano la musica Jazz; tutto questo ci rimanda immediatamente a un fitto dialogo tra musica e matematica.

Ci sono poi esempi di compositori che asseriscono con forza i principi matematici sui quali basano le loro composizioni, come per esempio Arnold Schönberg[2] o ancor di più Iannis Xenakis[3].

Nei casi menzionati sopra, si pensa alle relazioni in oggetto nel contesto di un fenomeno agìto, quindi in una dimensione produttiva della musica; nondimeno la matematica e la musica convivono nel ragionamento astratto sulla musica, che domina diverse prassi analitiche attuali[4] che prendono spunto da logiche geometriche e algoritmiche per spiegare e comprendere i brani musicali, concatenazioni armoniche e strutture formali (Fig.1 e Fig. 2 nella pagina successiva).

Questo è solo un accenno ad alcuni strumenti di analisi di cui si avvalgono attualmente gli studiosi di questo settore, che grazie alle nuove tecnologie esplorano con grafici, colori e animazioni gli aspetti più profondi delle composizioni del passato e del presente. Si tratta di procedure molto specifiche,

[1] Il basso continuo è la parte più grave di un brano, su cui strumenti di natura polifonica (per esempio organo e clavicembalo) costruiscono figurazioni e accordi adeguati. Spesso il basso continuo è "cifrato" (o numerato), e i numeri indicano le armonie che devono essere realizzate in corrispondenza dell'indicazione. Si tratta di una pratica diffusa in particolare nei secc. XVII e XVIII, sia come accompagnamento di parti melodiche, che come linea guida di brani musicali, spesso per strumenti a tastiera. Per una descrizione sistematica cfr. Christensen (2003).

[2] Arnold Schönberg (1874-1951), è considerato l'"inventore" della tecnica compositiva chiamata "dodecafonia", sebbene altri compositori fossero arrivati contestualmente al medesimo principio. Questo consiste nell'equivalenza dei 12 semitoni della scala cromatica, quindi nell'assenza un polo percettivo di natura tonale (Schönberg, 1947).

[3] Iannis Xenakis (1922-2001), compositore, architetto e ingegnere. Negli anni '50 del Novecento sperimenta la teoria della musica "stocastica", in cui si esplicita il processo compositivo globale dei brani, tramite il calcolo delle probabilità, mentre gli elementi costituivi risultano aleatori. In quest'ottica, Xenakis cerca di assimilare la musica ai fenomeni biologici (Xenakis, 1971).

[4] Per approfondimenti e notizie su questo tipo di analisi musicali Cfr. Grande (2020).

sovente attuate da studiosi con competenze sia scientifiche che musicali, per lo più operate "a posteriori" rispetto all'opera analizzata, in buona sostanza, quando ascoltiamo una Mazurka di Chopin[5], comunemente non si attiva in noi uno schema astratto similare a quelli che abbiamo sfiorato, né abbiamo traccia che Chopin componesse con altre logiche rispetto alla sua ispirazione, coniugata alle regole della grammatica musicale del suo tempo, ma l'analisi ci dimostra che il pensiero matematico è sotteso, sia per chi ascolta, sia per chi compone.

Le acquisizioni scientifiche, comunque, anche quando iper-specialistiche e, in un certo senso "per addetti ai lavori", rendono giustizia a una disseminazione e circolazione di contenuti importanti in vari settori della disciplina a cui afferiscono.

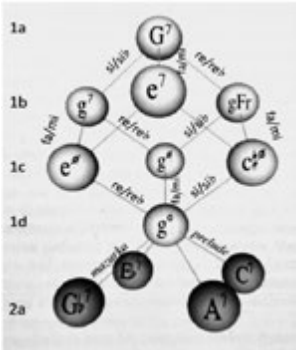


Fig. 1 - Schema geometrico di D. Timoczko (2011, p. 289); spiega la trasformazione possibile a livello analitico da un certo tipo di accordo (una settima di dominante SOL7), attraverso l'abbassamento di un semitono di ciascun suono, a un altro (settima diminuita sol°).

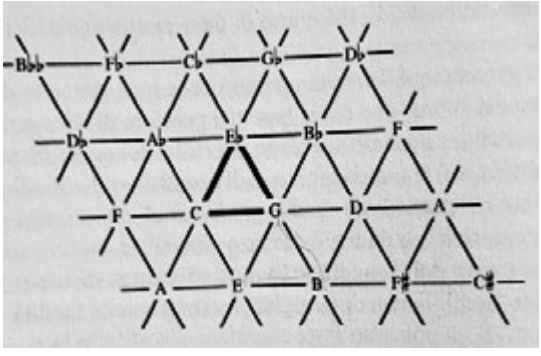


Fig. 2 - Tonnetz, dal tedesco "rete di note". Qui è rappresentato un Tonnetz di base; nel Tonnetz le note sono rappresentate in una griglia, secondo una particolare logica. In questo caso, a seconda di come si sposta il triangolo sui suoi lati, si vengono a formare accordi diversi, il primo è DO, MIb SOL, poi può essere MIb SOL SIb etc. (Cohn, 2007, p. 66).

[5] Questo tipo di analisi e altre similari è dedicata soprattutto al repertorio musicale a partire dal tardo Ottocento in poi, in cui si manifestano importanti innovazioni rispetto al linguaggio tonale, per cui l'analisi musicale "tradizionale" non fornisce più gli strumenti concettuali e lessicali adeguati.

Parlando di legami tra musica e matematica nel campo della didattica, senza volersi addentrare in ambiti legati a chi fa di queste due discipline una professione (matematici di professione e musicisti), ma pensando a studenti in formazione, l'approccio basato sull'interdisciplinarità è senz'altro maggiormente noto ed efficace. Tale approccio si basa sull'idea di "pensiero complesso". Com'è noto, quando Morin nel 1999 esprime le sue teorie sull'organizzazione della conoscenza (Fig. 3), parla di un processo circolare tra separazione e interconnessione, analisi e sintesi, in cui la separazione delle conoscenze non prevarica l'interconnessione (Morin, 1999, pp. 18-21).



Fig. 3 - L'organizzazione della conoscenza per E. Morin.

Questa dinamica salvaguarda senz'altro i contenuti specifici delle diverse discipline nel processo di apprendimento, ma lo scopo didattico è quello dell'interconnessione, per favorire un apprendimento metacognitivo, consapevole e significativo. Questo, nella sua più classica accezione (Ausebel, 1978; Novak, 2001), presuppone delle condizioni specifiche in un contesto di ricezione e scoperta, sintetizzabili in:

- esistenza di esperienze precedenti;
- disponibilità di materiale significativo;
- scelta di apprendere in modo significativo.

L'interconnessione tra musica e matematica consente di realizzare la prima condizione, in quanto, come dimostra quanto scritto sopra, se le nozioni e le regole di musica e matematica possono essere sconosciute, e talvolta spaventare perché lontane da un sapere "comune", le esperienze musicali, come quelle matematiche, in modo variamente consapevole, non sono mai assenti nella vita di un individuo. La seconda condizione è strettamente collegata alla prima, infatti, sulla base di prerequisiti individuati e individuabili, la scelta dei materiali si pone come fondamentale, anche e soprattutto in virtù di un'ottimale interconnessione. La terza condizione pertiene la motivazione, che, come

è noto, è propellente e motore della buona riuscita del processo di apprendimento (Bandura, 2000).

L'interdisciplinarità implicita nell'interconnessione delle due discipline, prende forma nella pratica, laddove si realizza nelle attività didattiche l'omologia sia materiale, che formale, quindi sia i materiali in sé, sia le strutture formali e procedurali individuabili come omologhe.

Se, come si è detto all'inizio, musica e matematica possono essere accomunate normalmente in un affascinante connubio non bisognoso di ulteriori specificazioni, nell'azione didattica, l'interdisciplinarità diventa invece un sofisticato mezzo pedagogico per il raggiungimento di risultati e aperture non sempre quantificabili a priori in una programmazione per soli obiettivi.

Questo rientra nella logica della valorizzazione della didattica per competenze, laddove si punta a un'azione didattica interdisciplinare che incarna contestualmente procedure e contenuti di entrambi gli ambiti disciplinari, in cui si punta a sviluppare un tipo di competenza che sia l'integrazione di conoscenze (sapere), abilità (saper fare), capacità metacognitive e metodologiche (sapere come fare, trasferire, generalizzare, acquisire e organizzare informazioni, risolvere problemi), capacità personali e sociali (collaborare, relazionarsi, assumere iniziative, affrontare e gestire situazioni nuove e complesse, assumere responsabilità personali e sociali (Da Re, 2013).

Quadro Teorico

Un tema di particolare interesse per la ricerca nel campo della didattica è quello dell'interdisciplinarità. Essa studia da tempo questo tema fornendo esempi di sperimentazioni realizzate negli ultimi decenni in vari contesti (Williams e al., 2016; Maass e al., 2013; Staats e al., 2013; Youngblood, 2007).

La matematica e la musica sono due discipline che da sempre sono considerate antitetiche per una presunta inconciliabilità tra gli aspetti rigorosi e razionali dell'una e quelli creativi e artistici dell'altra. Tuttavia in letteratura è presente un'ampia trattazione di tipo matematico-acustico sulle scale, a partire dagli studi sul monocordo di Pitagora di Samo (VII-VI secolo a.C.), le varie tipologie di temperamenti (scala temperata), gli intervalli a partire dalla serie armonica di un suono fondamentale. Anche il ritmo si presta a questo genere di discorsi calcolando, soprattutto nelle scuole secondarie di I grado, la durata dei suoni in frazioni, ecc.

La musica fu posta in relazione alla matematica anche nel suo aspetto compositivo. Questo tipo di analisi musicale ha avuto illustri cultori in tutti i secoli: J. S. Bach, J.-F. Rameau, G. Tartini (Trattato di musica secondo la vera

scienza dell'armonia, 1754), I. Xenakis (Musica formalizzata, 1971), P. Boulez e P. Glass (dagli studi di matematica hanno tratto ispirazione per la loro arte), per citarne alcuni.

Di questo ultimo aspetto ci siamo occupati nel nostro lavoro di ricerca, per cercare risposta ad alcune domande di ricerca di particolare interesse nella didattica. La prima questione riguarda gli aspetti epistemologici (Brousseau, 2006 a, b) di queste materie:

In che cosa consiste l'interdisciplinarità tra la matematica e la musica? Ovvero, quali sono gli aspetti che accomunano il carattere intuitivo e il rigore scientifico della prima con la creatività e le regole della seconda? In altre parole, quali sono gli elementi epistemologici comuni ad entrambe le discipline, che emergono dall'attività?

La seconda interessa invece gli aspetti didattici (Chevallard, 1999) relativi all'insegnamento delle due discipline da parte delle rispettive comunità di insegnanti:

Quali prasseologie[6] degli insegnanti di matematica e di musica entrano in gioco? In che modo queste si modificano durante l'attività? Qual è il rimando degli studenti al termine dell'attività?

Con queste premesse ha preso avvio l'attività didattica interdisciplinare "Tra musica e geometria: …note e simmetrie…", di seguito descritta.

L'attività didattica

L'attività è stata progettata per studenti del terzo anno di Scuola secondaria di primo grado, all'interno del progetto Scuole Secondarie Potenziate in Matematica (SSPM) in Piemonte. Scuole Secondarie Potenziate in Matematica è un progetto di potenziamento della cultura matematica in un circolo virtuoso in cui i ricercatori e le ricercatrici in didattica della matematica formano i docenti, che a loro volta insegnano a studenti e studentesse, promuovendo un apprendimento attivo e inclusivo, centrato sull'indagine scientifica e sull'argomentazione[7]. Senza particolari modifiche, l'attività può diventare trasversale ed essere proposta in modo verticale anche a studenti della scuola secondaria di secondo grado.

[6] Una "prasseologia" è un costrutto teorico usato per descrivere le pratiche di una cerca ciascuna comunità di pratica (nel nostro caso degli insegnanti). In estrema sintesi, è costituita da un compito, una tecnica per risolverlo e un apparato teorico che giustifica l'uso e il funzionamento della tecnica. Per ulteriori approfondimenti, si veda, ad esempio, Chevallard, 1999.

[7] Per maggior informazioni sul progetto, cfr https://frida.unito.it/wn_pages/tmContenuto.php/456_matematica-teorie-e-applicazioni/45/

Prerequisiti: È necessario che gli studenti posseggano le seguenti conoscenze, che fanno parte degli apprendimenti della scuola secondaria di primo grado per entrambe le discipline: dal punto di vista matematico si richiedono come prerequisiti il piano cartesiano e le trasformazioni geometriche piane (simmetrie, traslazioni e rotazioni), mentre dal punto di vista musicale è importante che gli studenti sappiano leggere e scrivere semplici melodie sul pentagramma (limitatamente alla sola chiave di violino).

Obiettivi: Le competenze generali matematiche che verranno implementate consistono nell'essere in grado di analizzare le situazioni e tradurle in termini matematici, mentre quelle musicali si possono riassumere con il saper sviluppare una riflessione sulla formalizzazione simbolica nella musica.

Obiettivi specifici matematici:

- Conoscere e utilizzare le principali trasformazioni geometriche e i loro invarianti: traslazioni, simmetrie, rotazioni;
- Eseguire in modo espressivo, collettivamente e individualmente, brani ritmici (body percussion) e melodici vocali (a 1 o 2 voci).

Obiettivi specifici musicali:

- Conoscere, descrivere e interpretare in modo critico semplici brani musicali;
- Decodificare e utilizzare la notazione tradizionale.

Materiali: Sono richiesti materiali semplici, in dotazione ad ogni scuola: un videoproiettore o LIM, i video da YouTube di cui sono forniti i link in sitografia), lavagna e gessetti colorati, carta lucida (o fogli di carta da forno), nastro di carta da scontrini fiscali, forbici, nastro adesivo.

Il percorso didattico e le sue fasi

Il percorso è strutturato in maniera da presentare i vari argomenti secondo una consequenzialità didattica che può facilitare la comprensione aggiungendo via via nuovi elementi collegati ai precedenti. Tuttavia, non è necessario svolgere per intero quanto proposto. Sono possibili anche soluzioni alternative che permettono all'insegnante di scegliere di affrontare soltanto alcune parti, senza perdere lo sguardo d'insieme e gli obiettivi specifici: la struttura modulare del progetto è pensata per questo scopo.

Durante il lavoro con gli studenti si rivela importante la compresenza di insegnanti di matematica con i docenti di musica, salvo il caso in cui il docente di matematica possieda anche buone conoscenze e competenze musicali.

Nella Tabella 1 di seguito è schematizzata la struttura delle varie parti di attività, per permettere lo sguardo d'insieme.

ATTIVITÀ	FASE	PROPOSTA
1	1 – Introduzione	Ritmo
		Sequenza poliritmica
		Canone ritmico
		Mirroring
	2 – Canone e traslazione (I parte)	Discussione sulle melodie a canone
		Discussione traslazione
		Esercitazione
	3 – Canone e traslazione (II parte)	Coro-laboratorio
		Riflessioni sul canone
		Esercitazione
2	1 – Retrogradazione e simmetria assiale	Le chiavi musicali
		Simmetria assiale
		Simmetrie d'autore
	2 – Simmetrie e inversione retrograda	
		Esercitazione
3	1 – Nastro di Möbius e Canone del granchio	Analisi del video
	2 – Costruiamo il Nastro di Möbius e Canone del granchio	Attività

Tabella 1: Schema dell'attività

Attività 1: La prima attività è dedicata al ritmo, alla melodia, e alla conoscenza del canone musicale in cui compare la trasformazione geometrica della traslazione.

FASE 1 – Introduzione: Nell'introduzione al laboratorio l'insegnante mostra agli studenti il quadro barocco Il tempio della Musica (1618) del medico e filosofo inglese R. Fludd (Fauvel, Flood e Wilson, 2003) in Fig. 4 e invita gli studenti a cercare gli elementi musicali nascosti nel dipinto. L'intento è di porre l'attività sotto forma di sfida, in modo da coinvolgere gli studenti e stimolare l'interesse verso l'argomento. Inoltre, l'insegnante di musica può cogliere l'occasione per una digressione storico-musicale, in quanto il dipinto

riassume alcuni tratti dell'evoluzione della teoria musicale dalle origini fino al XVI secolo. Per approfondimenti sul tema si può fare riferimento ai principali manuali di Storia della musica, tra cui Allorto (1989); Grout (1980); Mila (1993); e anche Vinciguerra (2016).

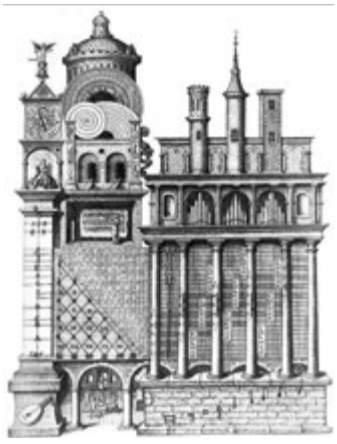


Fig. 4 - Il tempio della musica di Robert Fludd, 1617

Per avviare gli studenti al senso del ritmo e alle melodie polifoniche, l'insegnante propone alcuni esercizi di body percussion (cfr. Terry, 2017; Strobino, 2007; Perini & Spaccazocchi, 2009, vol. 1-2; Paduano & Pinotti, 2019a,b,c).

Come afferma infatti Enrico Strobino,

> Fra le molte strade oggi disponibili nel campo della didattica musicale utili a disegnare un orizzonte nuovo, ricco e creativo, coinvolgente, fondato sull'incontro coi suoni e le musiche, diretto e aperto a tutti, la body percussion, nelle sue varie forme, rappresenta sicuramente un'importante opportunità, proponibile a tutti i livelli. […] (Paduano e Pinotti, 2019a, pp. 7-8).

Secondo gli esperti di questa metodologia, il principio basilare dell'apprendimento musicale e del fare musica è il corpo: il corpo in movimento, il corpo in relazione con gli altri, l'esplorazione sonora, timbrica delle diverse parti, il far risuonare e vibrare il proprio corpo insieme a quello degli altri, il battito cardiaco, il flusso sanguigno e linfatico, il circuito nervoso e le trasmissioni sinaptiche… tutto questo ci fa scoprire una modalità tanto antica quanto attuale che è quella di imparare, di apprendere gli elementi del linguaggio musicale in maniera diretta, senza filtri preconcettuali o passaggi cognitivi.

Per ciascun esercizio la modalità di apprendimento è l'imitazione dell'insegnante, che esegue il ritmo e lo fa immediatamente ripetere al gruppo alcune volte, finché sarà stato interiorizzato. A questo punto proseguirà l'esercizio o passerà oltre.

- Ritmo. Brevi sequenze ritmiche che gli studenti ripeteranno collettivamente per imitazione utilizzando il proprio corpo (inizialmente battendo le mani, successivamente battendo i piedi, schioccando le dita, …). L'insegnante scriverà alla lavagna i ritmi svolti in notazione musicale.
- Sequenza poliritmica. I ragazzi vengono suddivisi in due gruppi. Il docente insegna per imitazione, come al punto precedente, una breve sequenza ritmica (una battuta) diversa per ciascun gruppo. Una volta imparati con sicurezza i ritmi, l'insegnante, come un direttore d'orchestra, fa suonare i vari gruppi in maniera alternata e poi sovrapposta. L'esercizio può essere iterato aumentando il numero dei gruppi. È divertente a invertire le parti del corpo a piacimento. Qualora lo schiocco delle dita si rivelasse complicato per i ragazzi, lo si può sostituire con il battito delle mani sul banco.
- Canone ritmico. Si formano due gruppi. L'insegnante insegna a tutti una breve sequenza ritmica composta da due battute diverse tra loro. La farà ripetere più volte finché saranno tutti sicuri. Quindi farà iniziare l'esercizio ad un gruppo e quando questo suonerà la battuta 2, l'altro inizierà ad eseguire la sequenza dall'inizio. Si creerà una sovrapposizione delle due battute che vengono eseguite contemporaneamente dai due gruppi, con uno sfasamento di una battuta. Questo esercizio può essere ripetuto proponendo frammenti ritmici sempre più lunghi ed elaborati. Un valido aiuto è fornito da eventuali insegnanti in compresenza che possono distribuirsi in modo omogeneo in ciascun gruppo per aiutare i ragazzi a "non perdere" il ritmo. È fondamentale che l'insegnante conduttore abbia preparato prima i frammenti ritmici da proporre evitando di improvvisare.
- Mirroring. Questa parte di attività di svolge a coppie: I due studenti (che chiameremo A e B) si dispongono uno di fronte all'altro. A sarà la guida e B colui/colei che segue: rimanendo fermi sul posto, A farà dei movimenti con le mani, le braccia, la testa, il corpo, … lentamente; B dovrà seguire i suoi movimenti, come allo specchio. Dopo alcuni minuti, il conduttore ferma il gioco e i componenti invertono i ruoli.

Quest'ultimo esercizio, come anche i precedenti tratti dalla body percussion, sono caratterizzati da una prevalente componente corporea. Si è scelto

di inserirli all'inizio del percorso, dedicandovi ampio spazio data l'importanza dell'embodiment nel processo di scoperta e apprendimento.

La teoria dell'embodiment, nei suoi sviluppi iniziali provenienti dalle scienze cognitive, metteva in luce che non solo abitiamo i nostri corpi, ma li usiamo letteralmente per pensare (Seitz, 2000). Sempre secondo Seitz, "il corpo struttura il pensiero tanto quanto la cognizione plasma le esperienze corporee" (ivi, p. 36).

Molti ricercatori in didattica della matematica negli ultimi anni si sono interessati a questo tema, rendendo popolare lo studio del corpo e del coinvolgimento corporeo nell'apprendere la matematica, vale a dire dei "«modi corporei di pensare» che nascono dall'attività in classe e la costituiscono" (Ferrara e Seren Rosso, 2015, p.6).

Anche per i musicisti il corpo ha un ruolo essenziale. Chiunque canti o suoni uno strumento sa quanto sia importante la postura del corpo e i movimenti che compie. E quanto sacrificio costi fare in modo che il proprio corpo (mani, piedi, voce, respirazione ecc.) impari a svolgere quelle azioni precise indispensabili per ottenere il suono desiderato. Si riscontrano in questo molte analogie con quanto avviene in matematica. Gli esercizi proposti sono in linea con queste riflessioni. Questo processo è iniziato appositamente in questo ordine: prima l'aspetto corporeo e intuitivo e, a seguire, la formalizzazione simbolica, musicale e matematica, che è venuta dopo.

FASE 2 – Canone e Traslazione (parte I): In questa fase l'insegnante avvia una breve discussione sull'analogia tra il pentagramma e il piano cartesiano: l'asse delle ascisse è rappresentata dal tempo del brano (tactus), l'asse delle ordinate dalla frequenza (altezza del suono), ciascun asse è caratterizzato da un'unità di misura (Arbonés e Milrud, 2010).

Nella Fig. 5 sotto la trascrizione della melodia "Fra Martino" in notazione musicale e in simbologia matematica sul piano cartesiano.



Fig. 5 - Nell'immagine sono utilizzate entrambe le rappresentazioni, matematica (sopra) e musicale (sotto). Ogni nota è riportata sul piano cartesiano rispettandone le proporzioni dell'altezza e della durata (Rielab. da Scimemi, 1998, p. 80).

Poiché nella scuola secondaria di primo grado non si parla ancora di funzioni definite a tratti, si consiglia di semplificare la trascrizione, qualora l'insegnante lo ritenga necessario, indicando ogni nota con un punto. In questo modo verranno rispettate le proporzioni delle altezze, pur perdendo quelle delle durate (per la comprensione di questo e dei prossimi esempi è già sufficiente).

Si affronta successivamente il legame tra la traslazione in matematica e il canone in musica.

Dopo aver visto ed eseguito esempi di canoni ritmici è ora il momento di definire in modo più formale la forma musicale del canone, e le sue caratteristiche peculiari:

> "Il canone è quella forma musicale contrappuntistica nella quale due o più voci si imitano a vicenda, severamente e senza interruzione per tutta la durata della composizione. La voce proponente detta […] Antecedente o Dux è quindi la regola, il modello per le voci imitanti dette Conseguenti o Comes. […]" (Nielsen, 1961, pp. 67-68).

E aggiunge Gardiner (2013):

> "Nel canone, che significa 'regola', la melodia è progettata per essere suonata o cantata in modo circolare nella più stretta forma di imitazione contrappuntistica" (p. 622).

Esistono diverse tipologie di canone, che si caratterizzano in base a come sono ricavate le voci conseguenti (Comes). Come riporta Grout (1980):

"Le voci aggiunte possono essere scritte per esteso dal compositore o possono essere cantate derivandole dalla voce singola [Dux], modificata secondo particolari indicazioni. La voce aggiunta si può ricavare in vari modi. Ad esempio, la seconda voce può iniziare dopo la voce originale a un certo numero di tempi o battute; la seconda voce può essere un'inversione della prima – cioè, si muove sempre con gli stessi intervalli ma eseguiti in direzione opposta; oppure la voce derivata può essere la voce originale letta al contrario – e allora si dice canone retrogrado, o cancrizans ("Krebs" in tedesco, per analogia con il movimento del granchio)" (p. 193).

Esistono anche tipologie di canone dalla struttura più complessa, come i canoni mensurali (per aumentazione o aumentazione) su cui non ci soffermiamo, e anche i canoni doppi, tripli, e così via.

Come è possibile osservare le trasformazioni geometriche sullo spartito musicale?

Un canone così costruito può essere analizzato dal punto di vista geometrico osservando che le voci conseguenti (comites) sono delle traslazioni orizzontali della voce Dux (cfr. Cognazzo, 2001). Il tema musicale è eseguito traslato di una certa quantità di tempo in orizzontale sullo spartito.

- Discussione sulle melodie a canone. Con l'ausilio del video YouTube in Fig. 6 l'insegnante fa riflettere gli studenti sul fatto che alcune melodie particolari possono essere eseguite in forma di canone a più voci. Si inizia dal celebre brano Fra Martino che può essere eseguito ad 1, 2, 3 oppure, nella forma più completa, a 4 voci (Arbonés e Milrud, 2010; Ubaldi, 1986).

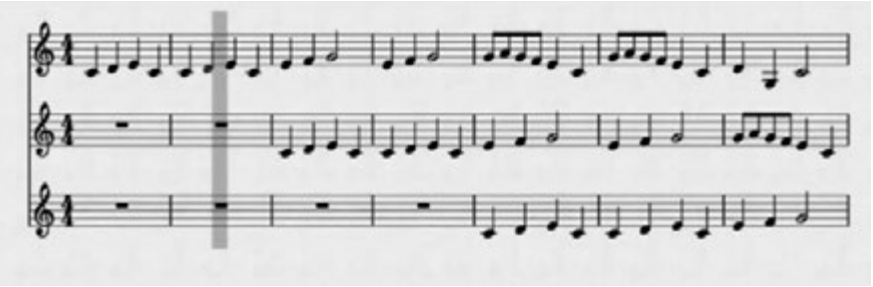


Fig. 6 - Fra Martino campanaro a 3 voci (estratto del video). Si notano i tre pentagrammi e la barra verticale colorata che indica l'avanzamento dell'esecuzione e aiuta a seguire.

- Discussione sulla traslazione. Si riprende il concetto di traslazione dal punto di vista geometrico, che i ragazzi hanno già affrontato osservando le analogie con lo spartito di Fra Martino.

> "In musica, si dice basso ostinato la figura melodica che si ripete incessantemente, invariata e alla stessa altezza, per tutta una composizione o una parte di essa; appare di solito nel basso, che prende in tal caso il nome di basso ostinato" (www.treccani.it).

Si introduce qui il concetto di invariante melodico in musica, cioè di elemento che si ripete uguale (come in questo caso) o simile per un certo numero di battute o, come qui, per tutto il brano.

> Parallelamente, in matematica l'invariante è un concetto matematico generale, legato a quello di trasformazione. Di un qualsiasi ente geometrico o analitico o fisico, si chiama invariante di fronte ad una data trasformazione ogni carattere quantitativo, che si conservi inalterato, quando a questo ente viene applicata la trasformazione considerata (ibidem).

FASE 3 – Canone e Traslazione (parte II)

- Coro-Laboratorio. L'insegnante di musica insegna un semplice canone a 2 voci, scelto a piacere tra le numerose raccolte pubblicate (ad es.: Ubaldi, 1986; Amico, 2020; Gohl e Schumacher, 2015). Prima si impara la melodia, e solo quando il coro è sicuro sulla parte, si prova la sovrapposizione delle due voci con i diversi ingressi differiti.

Per lo svolgimento dell'attività è necessaria una competenza musicale declinata in particolare alla musica corale. Presuppone che l'insegnante conosca i fondamenti della direzione di coro, quali intonazione, basi di vocalità, esecuzione e insegnamento di una melodia con o senza l'accompagnamento strumentale. Stimola poi gli studenti alla ripetizione in stile imitativo, replicando il canto ascoltato.

- Riflessioni sul canone. Si è scelto un canone strumentale abbastanza noto per rappresentare meglio quanto esaminato finora: il Canone in Re di J. Pachelbel (Grout, 1980). Il brano è strutturato in modo molto preciso: la prima voce che compare è il basso ostinato (basso continuo) e seguono le 3 voci (violini I, II, III) che eseguono la stessa identica melodia con uno sfasamento di 2 battute (Arbonés & Milrud, 2010, p. 75).

L'insegnante mostra alla classe il video YouTube che permette di ascoltare il brano e osservare il progressivo avanzare della partitura. Si suggerisce di suddividere la classe in 3 gruppi e chiedere di osservare l'avanzare della parte di un violino e contemporaneamente guardare cosa succede nella parte sottostante (Fig. 7), questo per stimolare l'attenzione e il coinvolgimento dei ragazzi, aiutarli a concentrarsi su due parti invece di quattro che potrebbero risultare troppo dispersive per l'occhio non allenato. Segue una discussione collettiva su ciò che di significativo è stato notato.

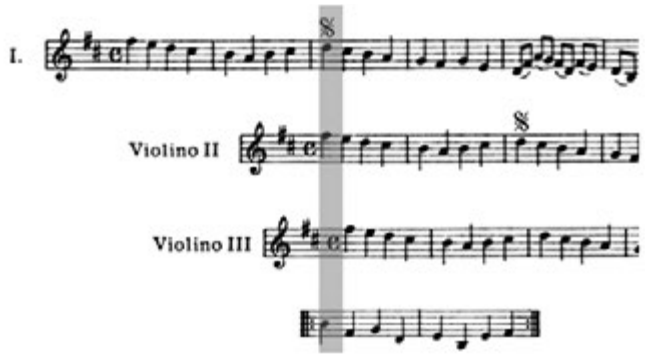


Fig. 7 - Immagine tratta dal video YouTube "Pachelbel Canon (Scrolling)" con scorrimento dello sparito. La barra in evidenza nell'immagine tiene il segno, collegando video e audio.

Attività 2: le simmetrie e la musica

FASE 1 – Retrogradazione e simmetria assiale

- Le chiavi musicali. Per capire meglio le proposte che seguono, l'insegnante propone un breve approfondimento teorico sulle diverse chiavi musicali chiamate in musica Setticlavio (Fig. 8, cfr. Bottino, 1997).

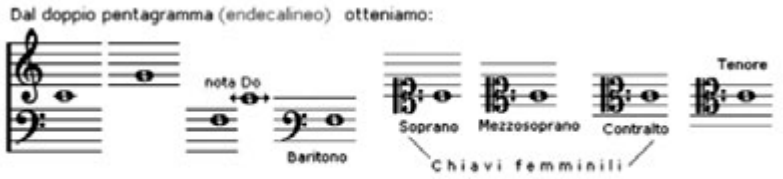


Fig. 8 - Il setticlavio

- Simmetria assiale. Si riprende il concetto geometrico di simmetria in geometria distinguendo tra simmetria assiale (Fig. 9, se l'asse è verticale è detta "riflessione muro", se orizzontale "riflessione lago") e simmetria centrale o rotazione di 180° (simmetria rispetto ad un punto, o rotazione di "mezzo giro") che i ragazzi hanno già affrontato (cfr. Scimemi, 1998).

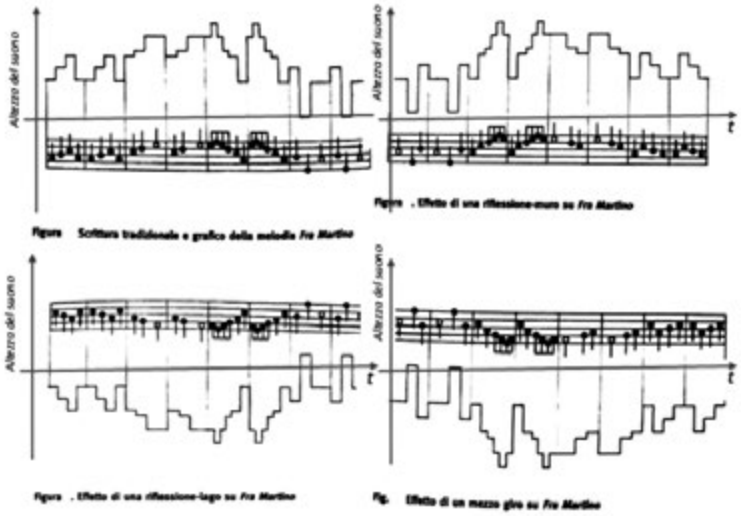


Fig. 9 - Fra Martino, spartito e grafico sul piano cartesiano. Melodia, riflessione muro, riflessione lago, effetto di mezzo giro.

FASE 2 – Simmetrie e inversione retrograda. L'obiettivo di questa fase è mettere alla prova gli studenti su quanto appreso.

- Simmetria rispetto all'asse verticale corrispondente al termine della battuta di arresto. (In musica si chiama retrogradazione o inversione retrograda una melodia riscritta iniziando dall'ultima nota e ripercorsa al contrario). In riferimento alla terminologia introdotta prima, la chiameremo "riflessione-muro" (Fig. 10, Scimemi, 1998)

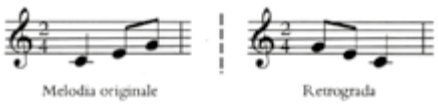


Fig. 10 - Riflessione-muro

- Simmetria rispetto all'asse orizzontale corrispondente al secondo rigo su cui si trova la nota sol. (In musica si chiama inversione una melodia riscritta con le note che salgono o scendono di uno o più semitoni, in base a dove è posto l'asse di simmetria). La chiameremo "riflessione-lago" (Fig. 11, ibidem)

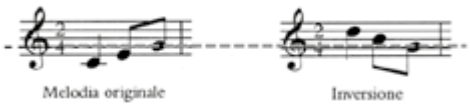


Fig. 11 - Riflessione-lago

- Composizione delle due simmetrie corrispondente alla rotazione di 180° rispetto alla battuta di arresto. (In musica si chiama inversione retrograda). Possiamo chiamarla "effetto di mezzo giro" (Fig. 12, ibidem)



Fig. 12 - Effetto di mezzo giro

Gli studenti sono invitati a sperimentare in maniera laboratoriale questi concetti attraverso l'utilizzo dell'artefatto della carta lucida. L'attività, come esemplificata in Fig. 13, si compone di questi passaggi:

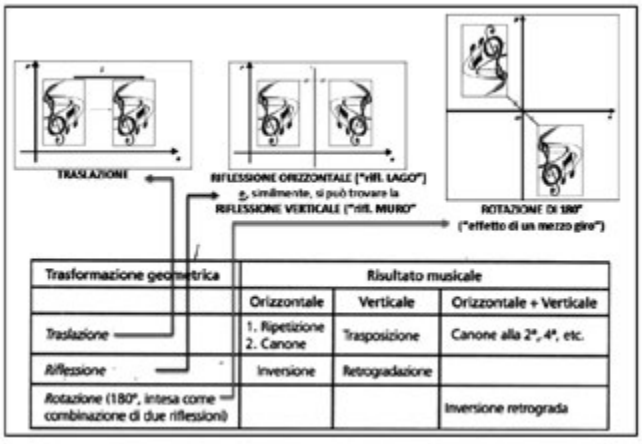
ESERCITAZIONE 3: Questo è il canone del tema dei "Diversi canoni sulle prime otto note fondamentali dell'aria precedente", BWV 1087.
Trascrivilo in:
I. riflessione-muro (retrogrado) **II. Riflessione-lago (simmetria verticale: l'asse è la 2° riga)** **III. Effetto di un mezzo giro (inversione retrograda)**



Fig. 13 - Attività sulle riflessioni descritte in precedenza

1) Ricalcare sulla striscia di carta lucida le note dello spartito nel riquadro. NB: il pentagramma non va ricalcato, soltanto la chiave di violino e le note ma occorre segnare con dei trattini l'inizio e la fine di ogni linea del pentagramma come riferimento.
2) Prendere la striscia così preparata, girarla opportunamente e presentarla sullo spartito originale in modo da ottenere e visualizzare ciascuna trasformazione. NB: nella riflessione-lago e nel mezzo giro, come accade negli esempi sopra, l'asse di simmetria è, per nostra convenzione, la riga del SOL.
3) Una volta comprese tutte e tre le simmetrie, trascrivere per ognuno dei tre casi sul pentagramma bianco le note che si vedono in trasparenza sulla carta lucida.

Al termine dell'Attività 2 si riassume quanto finora è stato intuito, osservato e ascoltato.



Trasformazione geometrica	Risultato musicale		
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale + Verticale
Traslazione	1. Ripetizione 2. Canone	Trasposizione	Canone alla 2ª, 4ª, etc.
Riflessione	Inversione	Retrogradazione	
Rotazione (180°, intesa come combinazione di due riflessioni)			Inversione retrograda

Fig. 14 - La tabella (sotto) mette in relazione ogni trasformazioni geometrica con il corrispondente risultato musicale. Alla terminologia matematica/musicale viene associata la rappresentazione sul piano cartesiano (sopra), con particolare riferimento alla simbologia grafica e lessicale utilizzata nelle spiegazioni precedenti.

Nella Fig. 14 è rappresentata la sintesi di tutto il discorso sulle traslazioni, dove si può osservare l'accostamento tra i contenuti, che si trovano ai confini delle due discipline.

Attività 3: Alla scoperta del Nastro di Möbius

FASE 1 – Nastro di Möbius e Canone del granchio. Si approfondisce lo studio delle simmetrie in musica attraverso l'analisi di un'altra composizione di J. S. Bach, tratta dalla raccolta di brani l'"Offerta Musicale" BWV 1079. L'insegnante di musica può illustrare la genesi dell'opera e i motivi che hanno spinto l'autore alla composizione.

In particolare, si vuole analizzare il canone n. 1 della parte III chiamato Crab Canon, Canone del granchio. Il video YouTube illustra il carattere retrogrado del canone e come questo può essere eseguito una volta trascritto sopra al lato di un nastro di Moebius (Figura 15).



Fig. 15 - Immagine tratta dal video YouTube "J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip" che mostra la costruzione del nastro contenente lo spartito del canone e lo scorrimento durante l'esecuzione. I due diapason giallo e grigio si muovono in sincrono: l'uno segue la melodia eseguita dall'inizio alla fine, e contemporaneamente, l'altro segue la sua retrograda, cioè le stesse note, in ordine inverso, dall'ultima alla prima.

FASE 2: Costruiamo il nastro di Möbius- L'insegnante invita gli studenti a costruire il nastro di Möbius, utilizzando un nastro di carta. Ogni studente incollerà opportunamente i due lati corti della striscia, dopo aver compiuto una rotazione di 180° di un'estremità. L'insegnante può fornire agli studenti strisce di carta prestampate con lo spartito del canone di Bach analizzato nella Fase 1 (Fig. 16).



Fig. 16 - Gli studenti realizzano il nastro di Moebius

Conclusioni

Ora che è stata descritta l'attività, è possibile riprendere le domande di ricerca poste in precedenza, per tentare di fornire delle risposte. Per prima cosa tra le proprietà di particolare interesse, si nota che l'attività è stata un valido catalizzatore per la ricerca degli aspetti epistemologici affini a entrambe le discipline, che permettono un attraversamento dei temi comuni ad esse in cui si ampliano i due confini completandosi a vicenda. Si scopre una nuova parte di conoscenza, che è il frutto di entrambi i saperi collegati e intrecciati, come parti di "un'eterna ghirlanda brillante" (Hofstadter, 1979). In particolare, gli aspetti comuni riscontrati sono:

- l'embodiment è presente sia nei processi di apprendimento della matematica («modi corporei di pensare») sia in quelli della musica (la body-percussion, il gesto del direttore che «si fa suono», «il respiro è già canto (Corti, 2006), oltre al mirroring come approccio al concetto di simmetria per entrambe;
- il canone è inteso come regola in entrambi i contesti;
- l'invariante è uno schema, un modello, una caratteristica che si ripete: vale sia per proprietà aritmetiche e/o geometriche sia per particolari incisi ritmici e/o melodici;
- la rappresentazione grafica: la musica può rappresentare la geometria e viceversa (le note dello spartito possono essere rappresentate sul piano cartesiano con funzioni definite a tratti);
- le traslazioni, le simmetrie orizzontali e verticali, oltre alle rotazioni di 180° si applicano alle figure geometriche sul piano così come alle melodie musicali in particolari canoni a più voci.

L'esempio principale di questo attraversamento dei confini è sicuramente il parallelismo tra le due simbologie, che abbiamo visto associate nello stesso grafico come composizione di spartito e piano cartesiano. Tuttavia, se ne scoprono anche altri: il legame tra i gesti-suono nella body-percussion e le trasformazioni nel piano si concretizza attraverso il ricorso all'embodiment, in un processo di body cognition che favorisce l'apprendimento tra le due discipline. Anche il linguaggio testimonia questo attraversamento del confine. In alcuni casi vi è un'esatta corrispondenza di terminologia, come ad esempio per il concetto di invariante o di rappresentazione grafica, in altri ogni disciplina fa riferimento a termini propri che si differenziano da quelli dell'altra. In questo caso è sufficiente, esplicitare i termini e la relazione di analogia che intercorre tra essi (vedi Fig. 14). Una volta chiarite le questioni lessicali, diventa abbastanza intuitivo cercare l'associazione partendo da esempi concreti (figure geometriche e brani musicali) per arrivare a formalizzare i concetti (metodologia bottom-up) oppure enunciare le regole teoriche e poi mostrarne le applicazioni (metodologia top-down).

Il secondo tema di ricerca è quello delle comunità diverse, che hanno prasseologie didattiche solide e distinte in classe, ma che attraverso l'attività si possono modificare per trovare punti in comune. Nelle attività nelle classi si sono osservate diverse tra queste prasseologie. In particolare:

- il contratto didattico che contribuisce ad una gestione "economica" della dinamica internazionale, e induce la creazione di routine scolastiche positive. Favorisce la relazione didattica che si instaura tra insegnante e discente, sia in qualità di studente che di docente in formazione;
- la scelta di fornire esempi come introduzione agli argomenti;
- l'utilizzo di materiali multimediali per stimolare l'interesse e facilitare la comprensione grazie alla coesistenza di animazioni visive e acustiche;
- la scelta di privilegiare un apprendimento di tipo esperienziale, che viene proposto prima della spiegazione teorica dei contenuti, soprattutto se astratti o ricchi di simbologia specifica;
- l'utilizzo massiccio dell'embodiment come supporto alla didattica, sia nelle spiegazioni (sguardo, gesti deittici, segni scritti,…) che nelle attività laboratoriali da svolgere insieme (body-percussion, mirroring…);
- il lavoro di gruppo in cooperative learning;
- la costruzione di artefatti concreti, che possono essere chiamati "artefatti di confine" per la loro natura di mediatori didattici tra contenuti diversi.
- la produzione di brani corali.

Le prasseologie didattiche qui richiamate, che sono state inserite nella progettazione, sono patrimonio distintivo dei docenti di matematica e di quelli di musica, declinate nei rispettivi ambiti specifici. Attraverso l'attività, tutti gli insegnanti hanno fatto esperienza di come queste possono entrare in relazione, dialogare ed essere applicate insieme se si tratta di affrontare tematiche di confine, che si comprendono in profondità solo attraverso la condivisione dei contributi di entrambi.

Riferimenti Bibliografici

Allorto R. (1989), Nuova Storia della Musica (II ed.). Ricordi, Milano

Amico P. (2020), Semplicemente coro: Canto infinito, Momenti Musicali, Ribera

Arbonés J., Milrud P. (2010), L'armonia è questione di numeri. Matematica e Musica. Ed. It. (2015). RBA Mondo matematico, Milano

Ausebel D.P. (1978), Educazione e processi cognitivi: Guida psicologica per gli insegnanti, Franco Angeli, Milano

Bandura A. (2000), Autoefficacia. Teoria e applicazioni, Centro Studi Erickson, Trento

Bottino G. (1997), Teoria della musica: appunti pratici e sintetici (2nd ed.). Ugo Boccassi Alessandria.

Brousseau G. (2006a). Epistemologia e didattica della matematica. In: La matematica e la sua didattica. 4, 621-655

Brousseau G. (2006b), Epistemologia e formazione degli insegnanti. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno. Atti del Convegno internazionale omonimo. Castel San Pietro Terme, 23 settembre 2006

Chevallard Y. (1999), L'analyse de pratiques professorales dans la théorie anthropologique du didactique. In: Recherches en Didactique des Mathématiques,19(2), 221-266

Christensen J.B. (2003), Fondamenti di prassi del basso continuo nel secolo XVIII. Metodo basato sulle fonti originali, UtOrfeus, Bologna

Cognazzo R. (2001), Il viandante e la sua ombra. In: P. Bellingeri et al. (Eds.), Il ritmo delle forme: Itinerario matematico (e non) nel mondo della simmetria (pp. 97-100). Mimesis, Milano

Cohn R. (2007), Introduction to Neo-Riemann operation, parsimonious trichords and their Tonnetz representation, in « Journal of Music Theory», 41-1

Corti F. (2006), Il respiro è già canto: Appunti di direzione corale. Feniarco, San Vito al Tagliamento

Da Re F. (2013), La Didattica per competenze. Apprendere competenze, descriverle e valutarle, Pearson, Milano

Fauvel J., Flood R., & Wilson, R. (2003), Music and Mathematics from Pythagoras to Fractals. Oxford: Oxford University Press

Ferrara F., Seren Rosso M. (2015), Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: Sviluppi e riflessioni recenti. In: L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate. pp. 321-342

Gardiner J. E. (2013), Music in the castel of heaven: A portrait of Johann Sebastian Bach, United Kingdom: Pearson Book Ltd. (trad. it La musica nel castello del cielo: Un ritratto di Johann Sebastian Bach, Einaudi, Torino, 2015)

Gohl M., Schumacher J. (2015). Sing along, sing together. Edition Peters

Grande A. (2020), Una Rete di Ascolti. Viaggio nell'universo musicale neo-riemanniano, Aracne Editrice, Canterano (RM)

Grout D. J. (1980), A History of Western Music (3rd ed.). New York – London: W.W. Norton & Company (trad. It. Storia della musica in Occidente, Feltrinelli, Milano, 2014)

Hofstadter D. R. (1979), Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid. Basic Books. (trad. it. Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante, Adelphi, Milano,1984)

Maass K., Garcia Fco. J., Mousoulides N. & Wake G. (2013), Designing Interdisciplinary Tasks in an International Design Community. In Claire Margolinas (Ed.). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom, 367-375

Maor E. (2018), La musica dai numeri. Musica e matematica da Pitagora a Schönberg, Codice Edizioni, Torino

Morin E. (1999), La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero, Raffaello Cortina Editore, Milano

Mila M. (1993), Breve storia della musica (3rd ed.). Einaudi, Torino

Nielsen R. (1961), Le forme musicali. Bongiovanni, Bologna

Novak J.D. (2001), L'apprendimento significativo, Centro Studi Erickson, Trento

Paduano C., Pinotti R. (2019a). Body percussion: Attività pre-musicali e percorsi didattici per l'utilizzo della body percussion nella scuola di base. Vol. 1, Progetti Sonori, Mercatello sul Metauro

Paduano C., Pinotti R. (2019b). Body percussion: Tecniche basilari, percorsi didattici e proposte di performance per l'utilizzo della body percussion nella scuola di base. Vol. 2, Progetti Sonori, Mercatello sul Metauro

Paduano C., Pinotti R. (2019c). Body percussion: Studi, tecniche e brani di body percussion all'interno di diversi generi musicali. Vol. 3, Progetti Sonori, Mercatello sul Metauro

Perini, L., Spaccazocchi, M. (2009). Noi e la musica. (Vol. 1 e 2). Progetti Sonori, Mercatello sul Metauro

Schönberg A. (1947), Style and Idea, Philosophical Library, New York. Edizione italiana: Stile e idea, traduzione di Moretti G., Pestalozza L., Feltrinelli, Milano, 1982.

Scimemi B. (1998), Contrappunto musicale e Trasformazioni geometriche, in: M. Emmer (Ed.), Matematica e Cultura: Atti del convegno di Venezia, 1997 (pp. 77-86). Milano: Springer

Seitz J. (2000), The Bodily Basis of Thought. New Ideas in Psychology. 18. 23-40

Staats S., Johnson J. (2013), Designing Interdisciplinary Curriculum for College Algebra. In: Claire Margolinas (Ed.). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom, 389-399

Strobino E. (2007), Dum Dum Tak: I colori del ritmo, Mercatello sul Metauro: Progetti Sonori.

Tartini G. (1754), Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia. In https://books.google.it/books/about/Trattato_di_musica_secondo_la_vera_scien.html?id=jMcZOn4zZw0C&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Terry K. (2017), Tra musica e danza: Keith Terry racconta la Body Music in un'intervista di Valentina Iadeluca. In Il corpo nel suono, Vol. 1, Canterano: Gioacchino Onorati – Aracne, pp. 11-23

Timoczko D. (2011), A Geometry of music. Harmony and counterpoint in the extended common practice, Oxford University Press, Oxford

Ubaldi G. (1986), Cantintondo: 138 canoni di tutto il mondo. Carrara, Bergamo

Vinciguerra R. (2016), Una fantastica storia della musica raccontata ai ragazzi. Curci, Milano

Williams J., Roth W. M., Swanson D., Doig B., Groves S., Omuvwie M., Borromeo Ferri R., Mousoulides N. (2016). Interdisciplinary Mathematics Education: A state of the art. ICME 13, Springer Open

Xenakis I. (1971), Musique Architecture, Casterman, Torunai. Edizione italiana: Musica Architettura, Spirali, Milano, 2003.

Youngblood D. (2007), Multidisciplinarity, interdisciplinarity, and bridging disciplines: A matter of process. In: Journal of Research Practice, 3(2), Article M18. Retrieved in http://jrp.icaap.org/index.php/jrp/article/view/104/101

Riferimenti sitografici ai materiali utilizzati

www.treccani.it

http://leboisdesarts.altervista.org/

Anonimo, Fra Martino: www.youtube.com/watch?v=wHf4XFTW3Lc

Bach J.S., "Diversi canoni sulle prime otto note fondamentali dell'aria precedente", BWV 1087 www.youtube.com/watch?v=6h6AabkLvEE

Bach J. S. “Crab Canon” Canone n. 1 – parte III dall’“Offerta musicale” BWV 1079 godel-escher-bach.fandom.com/wiki/Crab_Canon

www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU

Nastro di Möbius: it.wikipedia.org/wiki/Nastro_di_M%C3%B6bius

Pachelbel J., Canone in Re: www.youtube.com/watch?v=Rk5DWqls0gg

Torino, 5 maggio 2022