DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (14), 30 - 58, DOI: 10.33683/ddm.23.14.2 OPEN ACCESS

Circonferenze e spirali in un percorso di educazione matematica informale tra scuola e museo

Circumferences and spirals in an informal mathematics education path between school and museum

Raffaele Casi•, Cristina Sabena°, Massimo Borsero•• e Chiara Pizzarelli°°
•Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino – Italia
°Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino – Italia
••Istituto Comprensivo "Parri – Vian", Torino – Italia
°°Istituto Comprensivo "Alberti – Salgari", Torino – Italia

✉ raffaele.casi@unito.it, cristina.sabena@unito.it, massimo.borsero@unito.it, chiara.pizzarelli@unito.it

Sunto / Questo lavoro si ispira alla prospettiva dell'educazione matematica informale, nella quale l'attività matematica è libera dai vincoli imposti dalle tradizioni curricolari, dai libri di testo e dalle prove di valutazione. In tale prospettiva, è stato progettato un percorso didattico che integra delle attività di insegnamento-apprendimento della matematica in aula e una visita-laboratorio al museo di Palazzo Madama a Torino. Il percorso è centrato sul tema delle circonferenze e spirali. Nell'articolo vengono discusse le scelte progettuali alla luce del quadro teorico delineato e vengono presentati i risultati di una sperimentazione svolta attraverso la metodologia del *teaching experiment* in due classi prime di scuola secondaria di primo grado, con particolare attenzione al ruolo dell'insegnante, all'integrazione tra le attività di visita-laboratorio al museo e il curriculum della classe e alla valutazione attuata nel percorso.

Parole chiave: educazione matematica informale; musei; circonferenze; spirali; valutazione formativa.

Abstract / The work presented in this article is inspired by the perspective of informal mathematics education, in which mathematical activity is free from the constraints imposed by curricular traditions, textbooks and assessment tests. From this perspective, a learning path has been designed integrating classroom mathematics teaching-learning activities and a visit-workshop to the museum of Palazzo Madama in Turin. The path focuses on the theme of circumferences and spirals. The article discusses the design choices in the light of the theoretical framework and presents the results of an experimentation carried out through the methodology of the teaching experiment in two 6th grade classes of lower secondary school, with particular attention to the teacher's role, the integration between the museum activities and the class curriculum and the formative assessment methodology implemented.

Keywords: informal mathematics education; museums; circumferences; spirals; formative assessment.

«Curricula around the world have unfortunately become so technical and precarious in the manner in which mathematics is presented that it is difficult for teachers and mathematics educators to come up with meaningful perspectives to teaching and learning. We have to reinvent contexts that may make meaningful the experience of learning mathematics».
(Radford, 2021, p. 150)[1]

1 Introduzione

Negli ultimi anni assistiamo a una crescita delle iniziative di divulgazione matematica, ad esempio nei festival della scienza o nelle "Notti della ricerca", nelle quali l'incontro con la matematica avviene al di fuori delle tradizionali istituzioni educative e tipicamente attraverso attività ludico-ricreative. Tali proposte hanno spesso un alto gradimento e un'elevata partecipazione di pubblico, anche non specialista, che ci fa interrogare sul potenziale educativo dei contesti informali. Come sottolineano Bakker et al. (2021) alla luce di una indagine internazionale riguardo ai temi sui quali dovrebbe concentrarsi la ricerca in educazione matematica nel prossimo decennio,

> «[...] sebbene sia impegnativo dal punto di vista metodologico e teorico, è di grande importanza studiare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica nei vari contesti. Dopo tutto, gli studenti non imparano solo a scuola, ma anche in contesti informali».
> (Bakker et al., 2021, p. 16, traduzione degli autori)

Nella nostra ricerca siamo impegnati a studiare il potenziale didattico per gli studenti e per la formazione dei docenti di matematica di spazi di apprendimento informale quali i musei, in particolare i musei di tipo storico e artistico, molto diffusi nel nostro Paese. L'idea è nata dal coinvolgimento di alcuni degli autori in due progetti di prevenzione della dispersione scolastica in zone svantaggiate delle città di Napoli e di Torino: il progetto *Proud of You*[2] (2018-19) e il progetto *Next-Land*[3] (2020-22). In questi progetti, musei e territorio cittadino sono diventati protagonisti di progettazioni didattiche finalizzate a obiettivi di educazione alla cittadinanza attiva e di sviluppo di atteggiamenti positivi verso la matematica, e più in generale verso la scuola (Carotenuto et al., 2020).
Tra le criticità emerse dall'osservazione delle attività implementate (nella scuola primaria e secondaria di primo grado),[4] ci ha particolarmente colpiti ciò che denominiamo *effetto parentesi*: l'attività al museo, pur essendo stata valutata positivamente da studenti e insegnanti, non ha poi avuto seguito nel percorso didattico della classe, risultando separata dalla vita scolastica di studenti e studentesse. Per affrontare tale criticità e studiarne possibili soluzioni, abbiamo progettato e sperimentato un per-

1. «I curricula in tutto il mondo sono purtroppo diventati così tecnici e precari nel modo in cui la matematica viene presentata che è difficile per gli insegnanti e i ricercatori in didattica della matematica proporre prospettive significative per l'insegnamento e l'apprendimento. Dobbiamo reinventare contesti che possano rendere significativa l'esperienza dell'apprendimento la matematica» (Radford, 2021, p. 150, traduzione degli autori).
2. Il progetto *Proud of You* è nato ed è stato gestito all'interno dell'associazione *Next-Level*, che opera nel campo della promozione sociale e culturale dei giovani, ed è stato finanziato dal Fondo di beneficenza della banca italiana Intesa San Paolo e dalla società di Gestione dei Servizi Aeroportuali Campani (GESAC). Il gruppo di lavoro sulla matematica comprendeva per la sede di Torino Cristina Sabena (coord.), Valentina Leo e Daniele Manzone. Per la sede di Napoli, Maria Mellone, Gemma Carotenuto, Paola Lattaro e Rosalia Lo Sapio.
3. Il progetto *Next-Land* (2020-22), sempre con la direzione di *Next-Level*, è stato finanziato da Fondazione Vodafone Italia, Fondazione Compagnia di San Paolo, Fondazione CRT, Camera di Commercio di Torino. Il gruppo di lavoro sulla matematica era composto da Cristina Sabena (coord.), Raffaele Casi, Valentina Leo e Chiara Pizzarelli.
4. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

corso di educazione matematica che integra l'esperienza al museo con quella d'aula. Il museo scelto è Palazzo Madama a Torino, nel quale è possibile per le classi di scuola secondaria di primo grado partecipare a una visita-laboratorio centrato sul tema delle spirali (si veda Casi et al., 2023). La didattica d'aula cui facciamo riferimento, ma anche alcune scelte fondamentali della progettazione della visita-laboratorio al museo, sono fondati sulle metodologie innovative elaborate negli ultimi decenni dalla ricerca in didattica della matematica in Italia: il laboratorio di matematica e la produzione di congetture e argomentazioni da parte degli allievi (Anichini et al., 2004), anche in collegamento con il "metodo della ricerca variata" (Arzarello, 2019; Swidan et al., 2023); la multimodalità dell'apprendimento, che avvalora il ruolo del corpo, dei gesti e degli artefatti per l'insegnamento-apprendimento della matematica (Arzarello, 2006); l'utilizzo di macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) e della discussione matematica (Bartolini Bussi et al., 1995); la valutazione formativa (Cusi et al., 2017). Per ovvie ragioni di spazio, questi elementi teorici, che pur costituiscono un sostrato imprescindibile del lavoro, non saranno approfonditi nell'articolo. Nel prossimo paragrafo verrà dato spazio invece all'innovativa prospettiva dell'educazione matematica informale (in inglese, *informal mathematics education*) e successivamente presenteremo e discuteremo alla luce di tale prospettiva le principali scelte progettuali che abbiamo operato. Queste scelte, e la loro ricaduta didattica, saranno quindi illustrate attraverso le evidenze emerse dalla sperimentazione svolta in due classi prime di scuola secondaria di primo grado secondo la metodologia del *teaching experiment*.

2 L'educazione matematica informale

Studiare l'apprendimento matematico che avviene al di fuori del contesto d'aula non è una novità nel panorama della didattica della matematica. A partire dagli anni Settanta, alcuni ricercatori sono stati affascinati dalla matematica generata e usata al di fuori delle istituzioni deputate all'insegnamento. Il filone di ricerca della cosiddetta *street* o *everyday mathematics* (matematica della strada o nel quotidiano) ha evidenziato come bambini che imparano a risolvere i problemi "sul campo", spesso lo facciano in modo diverso da chi impara a scuola. Una conoscenza "pratica" della matematica – cioè la matematica della strada – viene contrapposta quindi alla matematica appresa a scuola. Gli studi di Nunes et al. (1993), che hanno indagato le conoscenze matematiche di alcuni giovani venditori e venditrici di strada nei mercati di Recife (Brasile), oltre ad avere implicazioni sul tema più ampio della giustizia sociale, hanno messo in evidenza il carattere situato dell'apprendimento matematico, mostrando come i giovani fossero in grado di svolgere con rapidità e sicurezza operazioni aritmetiche – ad esempio, moltiplicazioni – se situate nel contesto di compravendita in strada, mentre operavano con molta più difficoltà nel contesto scolastico. Questi risultati hanno contribuito a porre l'attenzione critica dei ricercatori sul tema dei "problemi autentici" per l'insegnamento-apprendimento della matematica. Più recentemente, il tema della relazione tra formale e informale nell'educazione matematica vede emergere l'interesse verso altri tipi di contesti rispetto alla matematica della strada. Nemirovsky et al. (2017) nella sezione dedicata alle *"Futuristic Issues"* del *Compendium for Research in Mathematics Education*, propongono il filone emergente dell'educazione matematica informale, nel quale «i confini del lavoro matematico non sono necessariamente individuati dalle tradizioni curricolari, dai libri di testo e dalle prove di valutazione, essendo così più aperti a ciò che i partecipanti ricordano, inventano, associano, o sentono» (Nemirovsky et al., 2017, p. 970, traduzione degli autori). Pur mantenendo questa finalità, l'educazione matematica informale (a differenza della matematica della strada) è un approccio educativo e di ricerca caratterizzato da attività che si svolgono in ambienti intenzionalmente progettati per favorire l'apprendimento matematico, con la presenza di educatori specializzati e l'utilizzo di tecnologie, artefatti o esposizioni progettate per stimolare il pubblico a confrontarsi con la matematica (Nemirovsky et al., 2017). Le attività di educazione matematica informale differiscono dalle attività didattiche che si svolgono usualmente in aula per tre caratteristiche: la partecipazione avviene su base volontaria; i confini tra le discipline coinvolte sono fluidi, consentendo di spaziare ad esempio dalla matematica alla letteratura, all'arte e così via; le attività proposte non sono accompagnate da tradizionali forme di valutazione. Si noti come la distinzione tra le tipologie di attività non sia strettamente legata all'ambiente: è infatti possibile che in ambienti come un museo o un doposcuola, tipicamente caratterizzati come ambienti informali, si svolgano attività di educazione matematica formale, e viceversa, è possibile attuare attività di educazione matematica informale all'interno delle aule scolastiche.

Tipicamente, studenti e insegnanti incontrano esperienze di educazione informale nelle uscite didattiche. Affinché le uscite didattiche possano essere esperienze significative per gli studenti, la letteratura concorda sul fatto che devono essere pianificate in modo da essere connesse con l'attività didattica in aula, includendo in particolare attività dedicate prima e dopo l'esperienza: si vedano a tal proposito le revisioni della letteratura sul tema delle visite scolastiche realizzate da Behrendt e Franklin (2014) e da DeWitt e Storksdieck (2008). Dal lavoro di Kelton (2021), volto ad analizzare se e come le uscite didattiche nei musei possano essere correlate produttivamente agli apprendimenti matematici in classe, emerge inoltre come il lavoro collaborativo tra studenti sia significativo al fine di dare senso all'esperienza e collegare ambienti di apprendimento diversi. Per raggiungere questi obiettivi, è necessaria una riflessione (e probabilmente un cambiamento) da parte degli insegnanti. In uno studio di Griffin e Symington (1997), condotto in Australia con un campione di 29 insegnanti e oltre 700 studenti frequentanti classi dal grado 5 al grado 10, i ricercatori hanno rilevato che la maggior parte degli insegnanti coinvolti ha attuato, anche nell'ambiente informale del museo, un tipo di didattica centrata sul compito (ad esempio, completare schede) anziché privilegiare approcci orientati all'apprendimento (ad esempio, cercare informazioni, condividerle, discuterle), con scarsi collegamenti tra l'esperienza museale e gli argomenti studiati in aula. Questo risultato conferma anche la nostra esperienza personale e in questa direzione due co-autori[5] sono impegnati in un percorso di formazione insegnanti sul tema dell'educazione matematica informale (si veda www.informalmath.unito.it; Casi & Sabena, in stampa).

3 Le scelte progettuali

Alla luce del quadro presentato, abbiamo individuato tre variabili da tenere in considerazione nella progettazione di un percorso di educazione matematica informale che si sviluppa tra scuola e museo. In primo luogo, al fine di evitare l'effetto parentesi dell'esperienza al museo, abbiamo deciso di progettare le attività didattiche d'aula con gli insegnanti delle classi coinvolte, co-autori di questo contributo.[6] Come secondo passo, abbiamo analizzato le connessioni tra gli argomenti matematici presenti nella visita-laboratorio museale e gli obiettivi del curriculum presenti nelle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012). Infine, richiamando i principi dell'educazione matematica informale definiti da Nemirovsky et al. (2017), con particolare riferimento all'assenza di forme tradizionali di valutazione, abbiamo ritenuto importante tenere in considerazione altre modalità di valutazione dell'esperienza, proponendo come strumento il *quaderno di documentazione*, una sorta di diario di bordo delle attività svolte che consente di registrare, oltre alla narrazione delle attività, anche i pensieri, i

5. Raffaele Casi e Cristina Sabena.
6. Massimo Borsero e Chiara Pizzarelli.

ricordi e le idee degli studenti e delle studentesse durante le fasi di lavoro (Katz & Chard, 1996). L'utilizzo di tale strumento e la sua condivisione all'interno e all'esterno della classe permettono di dare valore al lavoro e agli apprendimenti degli alunni, sia nei confronti di sé stessi, sia nei confronti degli altri, sia, infine, nei confronti di una più ampia comunità di apprendimento (Krechevsky et al., 2009). Il percorso progettato pone al centro la visita-laboratorio "Vortici di idee" al museo di Palazzo Madama a Torino, di cui diamo di seguito una breve descrizione. "Vortici di idee" si articola attorno al tema delle spirali, che sono studiate nella visita-laboratorio sia come oggetto artistico, sia come oggetto matematico. Dal punto di vista artistico, le spirali sono presenti nei numerosi decori barocchi del palazzo (si vedano per esempio i decori del mancorrente dello spettacolare scalone juvarriano e i decori a conchiglia disseminati in varie parti dello scalone, Figura 1a), ma anche come elemento architettonico nelle scale del palazzo, risalenti a varie epoche (Figure 1b e 1c).

Figura 1. Vari tipi di spirali osservabili a Palazzo Madama: **a)** Decori a spirale nello scalone juvarriano; **b)** Viretto medievale; **c)** Scala della torre panoramica.

Dal punto di vista matematico, le spirali vengono affrontate come oggetti cinetici, ossia come curve generate dalla rotazione di un punto intorno a un centro e da un movimento di avvicinamento e/o allontanamento dal centro. La visita-laboratorio prevede tre attività che permettono di sperimentare in modo percettivo-motorio la spirale e di avvicinarsi alla sua definizione intesa nei seguenti modi.

- Curva che congiunge punti ottenuti camminando lungo un percorso dapprima circolare, riducendo poi gradualmente la distanza dal centro. La curva è esperita in prima persona attraverso una coreografia (Figura 2).

Figura 2. Esperienza percettivo-motoria della spirale sul loggiato dello scalone juvarriano.

- Curva continua del piano generata da uno spiralografo (Figura 3). Si tratta di una macchina matematica composta da un piano rotante su cui è posizionato un foglio circolare bianco e su cui è fissato un binario rettilineo che percorre un diametro, su cui è possibile far scorrere un pennarello; vi è poi una manovella laterale che consente di regolare la velocità e il senso di rotazione del piano.

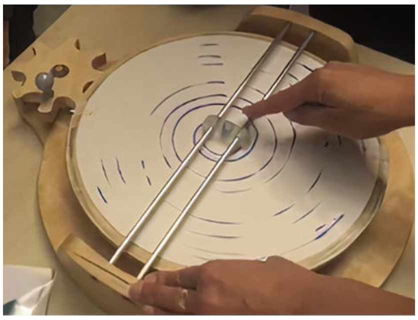


Figura 3. Spiralografo archimedeo.

– Curva continua dello spazio, dunque un'elica, generata da un elicografo (Figura 4). Questa macchina matematica è costruita in modo da sfruttare due movimenti analoghi a quelli dello spiralografo, ma in questo caso il foglio su cui tracciare la curva è arrotolato intorno a un cilindro che ruota grazie a una manovella e il binario rettilineo lungo cui far scorrere il pennarello è parallelo all'asse del cilindro.

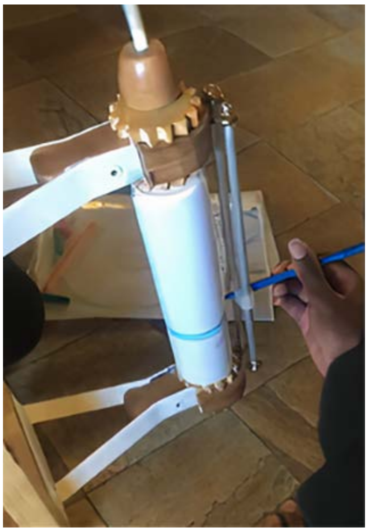


Figura 4. Elicografo.

"Vortici di idee" è stato progettato da un team di esperti in didattica della matematica e di insegnanti,[7] all'interno della prima edizione del progetto *Next-Land* (si veda www.next-level.it/progetti/next-land-2; Casi et al., 2022) e tra settembre 2020 e ottobre 2021 ha visto la partecipazione di più di 300 studentesse e studenti delle scuole secondarie di primo grado di quartieri di Torino svantaggiati dal punto di vista socio-economico. Dall'osservazione sul campo di alcuni incontri di questa prima esperienza, e dal monitoraggio realizzato in collaborazione con il personale del museo e con gli insegnanti coinvolti, sono emersi punti di forza e aree di miglioramento del progetto. Tra le criticità riscontrate, in particolare due hanno attirato l'attenzione del team di progetto. La prima fa riferimento al ruolo degli insegnanti partecipanti alla visita: alcuni di essi hanno vissuto passivamente l'attività laboratoriale, limitandosi a sorvegliare gli studenti o tentando di attuare modalità di interazione tipiche della didattica formale, in linea con quanto emerge in letteratura, ad esempio nel citato studio di Griffin

7. La progettazione del laboratorio è stata realizzata da Raffaele Casi, Valentina Leo e Chiara Pizzarelli, con la supervisione di Cristina Sabena.

e Symington (1997). La seconda criticità riguarda invece il seguito dell'esperienza al museo: l'attività di visita-laboratorio museale, pur essendo stata valutata positivamente da studenti e insegnanti, non ha poi avuto seguito nel percorso didattico della classe, generando proprio l'effetto parentesi che desideriamo evitare.

Tutto ciò considerato, abbiamo strutturato un percorso didattico di educazione matematica informale integrato tra scuola e museo, nel quale la visita-laboratorio a Palazzo Madama si colloca come punto centrale. La parte restante del percorso è stata strutturata in due tipologie di attività:

– *Attività propedeutiche* alla visita-laboratorio, tali da esplorare alcuni prerequisiti al concetto di spirale, quali la distanza di un oggetto da un punto; distanza variabile o costante; moti uniformi o accelerati.
– *Attività di consolidamento*, successive alla visita-laboratorio, tali da istituzionalizzare la conoscenza acquisita attraverso diverse modalità esperienziali motorie e manipolative, con l'obiettivo di applicare il concetto di variazione della distanza da un punto al concetto di spirale.

Il percorso da svolgere in classe è stato progettato attraverso un lavoro congiunto di insegnanti e ricercatori.[8] La progettazione si è basata su quello che possiamo chiamare un *"principio di doppia continuità didattica"* tra scuola e museo, ovvero sulle metodologie e sui contenuti matematici oggetto delle attività. Per quanto riguarda le metodologie, la scelta è ricaduta in modo naturale sul laboratorio di matematica, ben noto nella tradizione didattica italiana (Anichini et al., 2004; Giacardi, 2016), che ispira la visita museale ed è in linea con le Indicazioni nazionali per il curricolo e la didattica utilizzata quotidianamente dagli insegnanti coinvolti. Abbiamo quindi pensato di introdurre nelle attività d'aula, che precedevano e seguivano l'esperienza al museo, un'altra macchina matematica. La scelta è ricaduta su un piano rotante, che sfrutta lo stesso meccanismo dello spiralografo presente a Palazzo Madama attraverso il moto combinato della rotazione intorno a un centro e della traslazione (avvicinamento o allontanamento) verso o dal centro. La mancanza del supporto meccanico dato dalla guida e dalla manovella è compensata dalla facilità di costruzione della macchina, costituita essenzialmente da un comune vassoio rotante, facilmente reperibile in commercio (rimandiamo al par. 4.2 per una più dettagliata illustrazione della macchina).

Per quanto riguarda i contenuti, abbiamo mirato a un obiettivo didattico che da una parte fosse coerente con il curricolo e dall'altra integrasse un approccio alle spirali come oggetto cinetico, tema della visita-laboratorio presso il museo. L'attenzione è ricaduta sul nodo concettuale della distanza tra punti, in quanto la programmazione didattica prevista dai due insegnanti per il primo quadrimestre si concentrava sugli enti geometrici e le posizioni reciproche tra essi.[9] Gli obiettivi del percorso di educazione matematica informale possono pertanto essere posti in relazione con alcuni aspetti formali dell'insegnamento-apprendimento, nello specifico gli obiettivi didattici presenti individuati dagli insegnanti come parte del curricolo delle classi: in primis il riconoscimento di forme nel piano e nello spazio, le loro rappresentazioni e relazioni tra elementi; in seconda istanza il concetto di trasformazione geometrica, in particolare di traslazione e rotazione, altro importante traguardo di apprendimento previsto dalle Indicazioni nazionali del grado scolare considerato (MIUR, 2012).

La Tabella 1 riassume il percorso didattico complessivo, indicando più nello specifico gli obiettivi, le risorse e i tempi utilizzati.

8. Nel testo ci riferiamo a Chiara Pizzarelli e Massimo Borsero come "insegnanti", poiché la loro partecipazione alla sperimentazione li ha visti in tale veste nella propria classe. Più precisamente, potremmo riferirci a loro come insegnanti-ricercatori, poiché hanno contribuito in tutte le fasi dello studio.
9. Ricordiamo che la visita-laboratorio al museo si è svolta nei mesi di novembre e dicembre 2022.

Attività	Obiettivi	Risorse	Durata
1. La circonferenza con strumenti canonici e non.	Fare esperienza della costruzione di una circonferenza in modo percettivo-motorio con una corda e su carta tramite una squadretta e altri oggetti di forme diverse. Confrontare gli strumenti e riconoscerne gli elementi che li rendono strumenti atti a costruire circonferenze. Collegare il concetto di distanza fissa a strumenti in cui non è visibile il raggio.	Luogo: cortile della scuola e aula. Materiali: corda, squadretta, stampini per biscotti, elastici, oggetti circolari.	2 ore
2. La circonferenza con il piano rotante.	Esplorare le potenzialità di un piano rotante per costruire circonferenze concentriche e non. Approfondire il concetto di distanza di un punto, in circonferenze in cui non è visibile né il raggio, né il centro.	Luogo: aula. Materiali: piani rotanti, slide con circonferenze da replicare.	2 ore
3. Visita-laboratorio a Palazzo Madama: "Vortici di idee".	Riconoscere negli elementi architettonici di Palazzo Madama la figura della spirale. Rappresentare la spirale tramite attività percettivo-motorie e attraverso due differenti macchine matematiche che tracciano la spirale sul piano e nello spazio.	Luogo: Palazzo Madama. Materiali: spiralografo, elicografo.	2 ore
4. Le spirali con lo spiralografo.	Esplorare e indagare le potenzialità dello spiralografo, riprendendo e ampliando le scoperte fatte durante la visita-laboratorio, attraverso successive congetture e verifiche con la macchina matematica.	Luogo: aula. Materiali: piani rotanti, spiralografo.	2 ore

Tabella 1. Descrizione delle attività progettate nel percorso integrato di educazione matematica informale.

Infine, nella fase di progettazione si è scelto di porre particolare attenzione alla modalità di valutazione degli apprendimenti da parte degli studenti. Rimanendo aderenti al quadro teorico dell'educazione matematica informale ed evitando tradizionali forme di valutazione, abbiamo elaborato un quaderno di documentazione,[10] nel quale al termine di ogni incontro ogni studente è chiamato a descrivere l'esperienza vissuta sia attraverso un testo scritto, sia attraverso un disegno e la scelta di parole chiave, aggiungendo osservazioni e riflessioni proprie e/o del gruppo classe. Lo strumento da un lato fornisce una sorta di guida per lo studente, che lo accompagna durante i diversi incontri; dall'altro permette all'insegnante – e in seconda istanza al ricercatore – di osservare quali conoscenze sono state recepite, quali sono state considerate rilevanti, e in che modalità sono state comprese ed acquisite.

10. Nella nostra esperienza abbiamo incontrato spesso il quaderno di documentazione nella scuola dell'infanzia e meno frequentemente o quasi mai dalla scuola primaria in poi.

Si noti come quest'ultima decisione si leghi armoniosamente alla recente legislazione italiana sulla valutazione degli apprendimenti, che all'art. 1 del d.lgs. 62/2017 afferma che

> «La valutazione ha per oggetto il processo formativo e i risultati di apprendimento delle alunne e degli alunni, delle studentesse e degli studenti delle istituzioni scolastiche del sistema nazionale di istruzione e formazione, ha finalità formativa ed educativa e concorre al miglioramento degli apprendimenti e al successo formativo degli stessi, documenta lo sviluppo dell'identità personale e promuove la autovalutazione di ciascuno in relazione alle acquisizioni di conoscenze, abilità e competenze».[11]

In particolare, dalla lettura del dettato normativo emerge che

- la valutazione è un *processo*, non semplicemente un momento finale di un'attività. Il quaderno di documentazione allora consente di raccogliere in un unico documento tutti i vari momenti del percorso integrato: in classe, a casa nei momenti di riflessione, durante la visita-laboratorio a Palazzo Madama;
- la valutazione è uno *strumento* per gli studenti e le studentesse che ha lo scopo di migliorare i loro apprendimenti, non solamente una certificazione statica di livelli di apprendimento. Il quaderno di documentazione accompagna gli allievi fin dall'inizio dell'attività di educazione matematica informale, raccoglie i loro protocolli e riflessioni ed è continuamente aggiornato a mano a mano che l'attività procede;
- la valutazione ha lo scopo di *documentare lo sviluppo dell'identità personale e promuovere l'autovalutazione*. Il quaderno di documentazione, oltre a raccogliere gli elementi indicati in precedenza, può anche essere personalizzato da studenti e studentesse (ovviamente nei limiti degli obiettivi educativi e didattici delle attività). Queste personalizzazioni (ad esempio, la scelta dell'immagine di copertina), unite agli elementi legati alle specifiche fasi dell'attività (ad esempio, indicare tre "parole chiave" per attività) restituiscono un quadro molto più ricco di elementi per ciascuno studente rispetto a una verifica sommativa finale, che necessariamente fotografa solo la fine del percorso ed è sostanzialmente la stessa per tutti.

4 La sperimentazione

Il percorso è stato sperimentato nei mesi di novembre e dicembre 2022 in due classi prime di due scuole secondarie di primo grado di Torino, nelle quali Massimo Borsero e Chiara Pizzarelli erano gli insegnanti titolari e Raffaele Casi era presente come osservatore-partecipante secondo la metodologia del *teaching experiment* (Steffe & Thompson, 2000). Riportiamo in questo paragrafo gli elementi salienti di ciascuna attività, documentando con estratti di dialoghi e di protocolli degli allievi le tracce dell'evoluzione dalle prime intuizioni alla scoperta dei concetti matematici.

4.1 La circonferenza con strumenti canonici e non

Il primo incontro (**Tabella 1**, Attività 1) ha avuto come obiettivo quello di stimolare gli studenti con attività percettivo-motorie che facessero esperire il concetto di distanza fissa.

11. Come si può leggere nel testo del Decreto legislativo n. 62, pubblicato sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, disponibile al link: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2017/05/16/17G00070/sg (consultato il 06.11.2023).

4.1.1 La circonferenza con la corda

Nel cortile della scuola, a ogni gruppo – composto in modo eterogeneo e mantenuto tale per tutto il percorso – è stata assegnata una corda. La richiesta era di descrivere cosa accade quando, a turno, un membro del gruppo tiene un'estremità della corda e rimane fermo in un punto, mentre un altro membro del gruppo tiene l'altra estremità e gli ruota intorno. Durante l'attività l'insegnante ha avuto cura di guidare le osservazioni, ponendo domande ai gruppi relative a quali sensazioni sentissero durante l'attività e a come queste sensazioni cambiassero in funzione della posizione assunta (il centro o un punto della circonferenza). L'attenzione alle riflessioni degli studenti su cosa rimane fisso e cosa cambia ha preso l'avvio già da queste fasi iniziali ed è stata un *fil rouge* per tutto il percorso.
Si noti dal seguente dialogo come gli studenti abbiano fatto riferimento al compasso per aiutarsi nell'argomentare le loro scoperte e avanzato le prime ipotesi sulla differenza tra circonferenza e spirale, in base alla variazione o meno della distanza dal centro.

> Prof: «Cosa avete scoperto?»
> A.: «Ehm… questo è un compasso [indica le compagne con la corda in mano]. Se l'ago del compasso è libero facciamo un cerchio di 360°, se siamo precisi».
> B.: «Però se A. tiene così [indica A., la ragazza che rappresenta il centro, e fa riferimento alla sua mano posizionata sul busto (**Figura 5**)] non diventa un cer… una circonferenza, diventa una spirale!»
> Prof.: «Perché diventa una spirale?»
> B.: «Perché se diventa così si arrotola e fa tanti cerchi».

Figura 5. B. indica la maniera in cui la compagna (A.) tiene la corda.

Su richiesta del docente, B. ha mostrato come ottenere la spirale e, durante l'esecuzione, il dialogo è proseguito così.

> B.: «Diventa sempre sempre più piccolo!»
> Prof.: «Che cosa diventa sempre più piccolo?»
> B.: «La linea… la linea del compasso».
> Prof.: «Cosa intendi per la linea del compasso?»
> B.: «La punta!»
> A.: «L'apertura!»
> Prof.: «Però voi non avete un vero compasso. In questo caso che cos'è che diventa sempre più piccolo?»
> B.: «La corda!»

Prof.: «E invece nella circonferenza cosa succedeva?»
B.: «A. deve tenere questa parte della corda così [fa alzare il braccio alla ragazza posta al centro, si veda la **Figura 6**]».
Prof.: «E tu cosa devi assicurarti di fare?»
A.: «Tenere la corda ben tirata!»
Prof.: «Perché?»
A.: «Così viene più preciso».

Figura 6. B. fa alzare il braccio alla compagna, per tendere la corda.

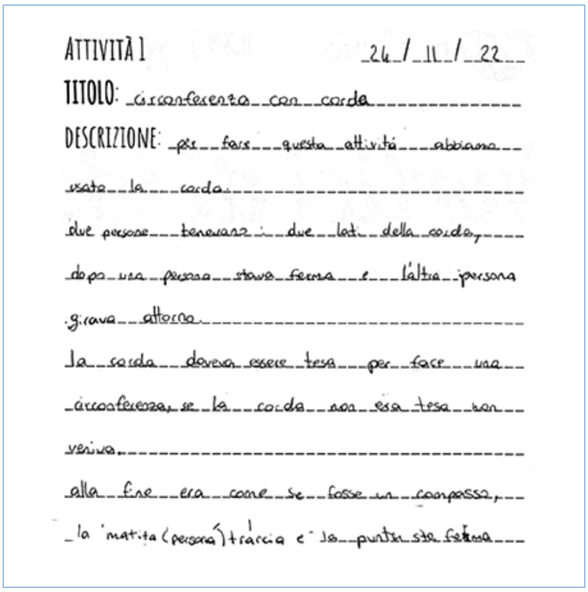
In un altro gruppo, si è osservato come le riflessioni fossero indirizzate sul concetto di tensione della corda, che avvicina gli studenti a osservazioni inerenti alla distanza fissa tra centro e punto della circonferenza. Alla domanda dell'insegnante sulle scoperte fatte, un componente del gruppo ha fornito la seguente descrizione:

L.: «Intorno alla nostra compagna la tensione della corda e la lunghezza rimangono uguali, visto che entrambi tengono salda la corda. Se non la tenessero salda, verrebbe una circonferenza storta, cioè fatta male. Se si avvicinasse un po' di più alla compagna… ehm… non è più… non ha più la tensione di prima e rischia di passare intorno alla compagna e quindi di arrotolare la corda. Invece, se la teniamo al petto, girando si arrotola e quindi riduce anche la lunghezza e non c'è tensione».

La questione della tensione con cui tenere la corda è emersa in diversi gruppi, con osservazioni sull'importanza che essa sia prodotta da entrambi gli attori del movimento, come si evince nel seguente dialogo.

S.: «Quella al centro deve tenerla tesa, secondo me».
Prof.: «Interessante. Provate!»
S.: «[Mentre si preparano per provare con la corda]. Beh, aspetta se ci pensi anche quello fuori… cioè deve essere un lavoro di coppia!»

Dopo una breve discussione in aula, si è richiesto agli studenti di riflettere nel piccolo gruppo sull'attività svolta in cortile e poi descriverla individualmente nel quaderno di documentazione, aggiungendo le proprie osservazioni personali. Diversi protocolli relativi a questa attività presentano riferimenti al compasso e all'analogia con l'esperienza del cordino in cortile (a titolo di esempio ne riportiamo uno in **Figura 7**).



ATTIVITÀ 1 24 / 11 / 22

TITOLO: circonferenza con corda

DESCRIZIONE: per fare questa attività abbiamo usato la corda.

due persone tenevano i due lati della corda,

dopo una persona stava ferma e l'altra persona girava attorno.

la corda doveva essere tesa per fare una circonferenza, se la corda non era tesa non veniva.

alla fine era come se fosse un compasso,

la matita (persona) traccia e la punta sta ferma

Figura 7. Estratto dal quaderno di documentazione di un allievo.

Un gruppo ha usato come titolo dell'attività nel quaderno di documentazione l'espressione "compasso umano". Alla richiesta di spiegazioni del docente un componente del gruppo ha spiegato così l'analogia:

> M. «Non c'era veramente un compasso, noi lo creavamo».
> Prof.: «Nel compasso che elementi ci sono?»
> D. «La punta…»
> Prof.: «E chi era nel vostro esperimento la punta?»
> D. «Chi stava fermo. E abbiamo fatto a turni. E poi chi si muoveva era la mina».
> Prof.: «E dov'è la corda?»
> L. «È il raggio!»
> Prof.: «Ok, cosa succede nel compasso e cosa con la corda?»
> D. «Nel compasso è duro perché rimane sempre fisso, invece se la corda la tenevamo non fissa, ma tirata, uno poteva andare avanti e indietro e creare una circonferenza. Se invece la teniamo tesa e rimani appoggiato con forza riesci a fare sempre lo stesso giro».

4.1.2 La circonferenza con la squadretta

La seconda parte dell'incontro si è svolta in aula. Si è distribuita una squadretta ad ogni gruppo e si è domandato se fosse possibile disegnare una circonferenza con una squadretta e due matite e, in caso affermativo, in che modo. Si è proceduto con la discussione in classe alla ricerca del metodo che il docente auspicava venisse scoperto per disegnare una circonferenza: posizionare una matita (o un dito della mano che faccia da perno) in un vertice del triangolo interno e la penna in un altro vertice, tenere ferma la matita (o il dito) e muovere la squadretta utilizzando la penna. La richiesta successiva era di provare a ripetere il metodo e descrivere che cosa succede; si è chiesto poi di ipotizzare e provare a scoprire cosa accade se si sceglie di muovere la matita (o il dito), lasciando fissa la penna. È seguita la discussione di classe e la compilazione del quaderno di documentazione.
Nella sperimentazione, diversi gruppi hanno provato a disegnare la circonferenza sfruttando la squadretta per limitare gli errori di approssimazione del disegno a mano. Alcuni hanno notato che l'angolo retto del triangolo interno della squadretta utilizzata era in realtà arrotondato, e hanno scelto di sfruttare questa caratteristica per tracciare la circonferenza, muovendo opportunamente la squadretta per utilizzarla come circoligrafo, tracciando un quarto di circonferenza per volta (Figura 8); altri hanno ten-

tato la costruzione tracciando diversi segmenti della stessa lunghezza con il punto medio in comune, congiungendo poi opportunamente a mano libera gli estremi.

Figura 8. Utilizzo dell'angolo retto interno di una squadretta per disegnare la circonferenza.

In un gruppo, ad esempio, gli studenti hanno costruito due diametri perpendicolari tra loro e con lunghezza misurata con la scala graduata della squadretta, per poi aggiungere archi di circonferenza a mano libera (**Figura 9**).

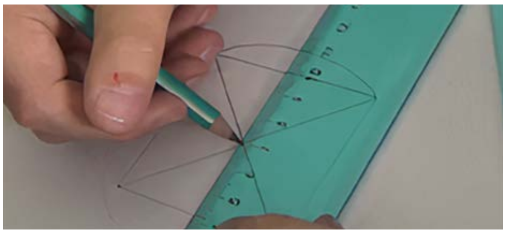


Figura 9. Disegno (errato) di una circonferenza con due diametri perpendicolari e archi a mano libera.

Tali costruzioni sono state occasione per i docenti di avvicinare gli studenti alla proprietà di *equidistanza* dal centro, che riguarda tutti i punti della circonferenza e non solamente alcuni di essi.
I gruppi che hanno trovato un metodo efficace per la costruzione della circonferenza hanno sfruttato la distanza fissa dei lati del triangolo interno alla squadretta. In **Figura 10** si vede una studentessa che costruisce la circonferenza con due matite poste agli estremi di un lato del triangolo interno alla squadretta (**Figura 10a**) e poi prova a verificare se la costruzione ha portato a una circonferenza, misurandone alcuni raggi (**Figura 10b**). Alcune domande guida dei docenti sono state mirate a puntare l'attenzione sul raggio, che è la chiave della costruzione, ma non è "visibile", perché non disegnato con un segmento come nelle classiche rappresentazioni della circonferenza («Come fate ad essere sicuri che questa sia una circonferenza?», «Il diametro è di 6 cm, da dove viene questa misura?», «Posso costruire con questa squadretta una circonferenza con diametro 4 cm?»).

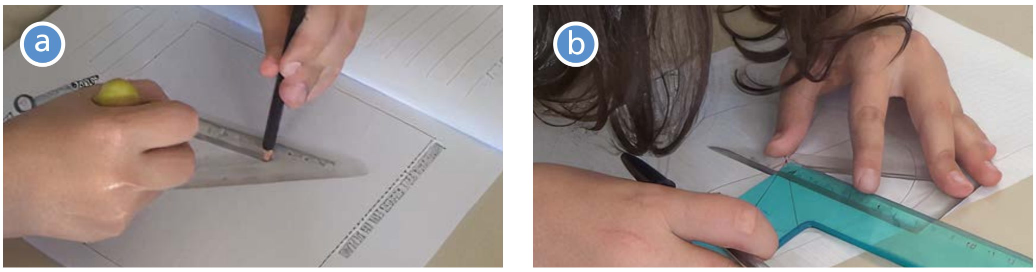


Figura 10a, b. Costruzione della circonferenza con due matite poste agli estremi di un lato del triangolo interno alla squadretta e successiva verifica con la misurazione di alcuni raggi.

Nella discussione di classe tali punti sono stati ripresi. Si noti come nelle argomentazioni si faccia riferimento alle esperienze pregresse, come l'uso del compasso e della corda:

> Prof: «Perché ha funzionato questo metodo?»
> S.: «Perché avevamo appunto questa forma che è una squadretta che aveva dei lati tesi».
> Prof.: «Perché la corda, il compasso e la squadretta fanno costruire la stessa figura?»
> S.: «Perché hai una distanza tra il punto e un altro».
> D.: «Secondo me la squadretta funzionava un po' come con la corda, che fissavi in un punto, in questo caso una matita, ma nell'altro caso con la corda una persona, a una distanza di vertici interni posizioni la matita, che dovrebbe essere la persona che gira, oppure nel compasso la mina, ehm… intanto lo tieni fisso in modo che giri, e anche qua lo tieni teso».

Tali esperienze ritornano non solo nella narrazione degli episodi, ma anche nella terminologia utilizzata da S. per l'argomentazione: i «lati tesi» della squadretta sembrano un chiaro riferimento alla tensione della corda.
La discussione è continuata affrontando la questione della possibilità o meno di costruire una circonferenza qualsiasi con la stessa squadretta.

> Prof.: «Con questa squadretta potete disegnare una circonferenza di raggio 2 cm?»
> D.: «No, solo la distanza dal vertice interno che stai puntando al vertice dove… [prende il pennarello e disegna (**Figura 11**)] ad esempio questo [indica due vertici del triangolo interno] punti una matita, ad esempio qua [indica uno dei due], sta ferma e se lo tieni rigido e nel frattempo disegni [disegna la circonferenza con centro il primo vertice indicato]».
> Prof.: «E quante circonferenze diverse posso costruire con una squadretta così?»
> D.: «Se questo qui riuscisse, potresti puntare una matita qua e costruire una circonferenza».
> Prof.: «E sarà identica a quella di prima?»
> D.: «Dipende. Perché con questa squadretta, ad esempio, non è un triangolo equilatero, altrimenti verrebbero uguali».
> G.: «Io… Non ci sono solo due modi, ma tre [si alza per disegnare (**Figura 12**)]! Puoi usare una matita che punta qua e un'altra che punta qua e fa un cerchio più piccolo. Invece se ne punti una qua e fai un cerchio con questi due [indica i vertici agli estremi dell'ipotenusa], ne riesci a fare una più grande. Invece se punti questo con questo [indica i vertici agli estremi del cateto maggiore] ne fai uno… diciamo medio».

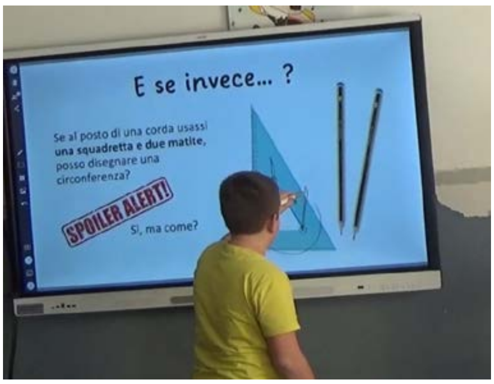


Figura 11. D. spiega come disegnare una circonferenza con una squadretta.

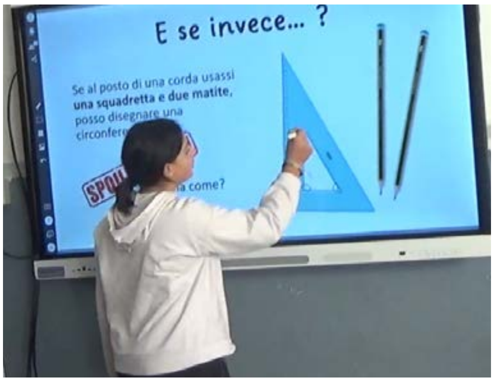


Figura 12. Gesti deittici utilizzati da G. nella spiegazione.

4.1.3 La circonferenza con altri artefatti

Nell'ultima parte del primo incontro si è consegnato ai gruppi una serie di oggetti di varie forme e dimensioni: formine taglia-biscotti a forma di campanella, albero di Natale, chiocciola, fiore, cuore; un coppapasta circolare; una cornice; un elastico; lo strumento musicale triangolo. La richiesta era analoga alla precedente: «Sapreste disegnare una circonferenza con ognuno di questi oggetti e due matite? È sempre possibile? Se sì, perché?». Sono seguite riflessioni mirate a indagare il motivo per cui si disegna sempre la stessa figura, ovvero una circonferenza, con oggetti anche molto diversi tra loro. L'obiettivo era dunque la ricerca dell'*invariante*: la distanza fissa di un punto della circonferenza dal suo centro; distanza che è sempre presente anche quando il raggio non è "visibile", come succede invece nel caso del cordino.

Per i gruppi che nell'attività precedente erano riusciti a utilizzare i lati del triangolo interno alla squadretta, la costruzione di circonferenze con altri oggetti è risultata immediata (Figura 13b); gli altri gruppi sono giunti rapidamente alla soluzione osservando e riproducendo quanto realizzato dai compagni. Ciò ha permesso di analizzare differenze e analogie con la squadretta, in particolare per quanto riguarda l'individuazione del raggio:

> Prof.: «Prima, nella squadretta, il raggio dov'era?»
> L.: «Il raggio era o questo [indica il cateto maggiore del triangolo] o questo [indica il cateto minore (Figura 13a)]».
> Prof.: «E qua [indica lo stampino a forma di campanella] invece dov'è il raggio?»
> A.: «Qua [indica un'estremità della campanella (Figura 13c)] e qua [indica un'altra estremità]».
> Prof.: «Ah, quindi c'è ma non si vede!»
> L.: «Non si vede, però si può intuire, diciamo».

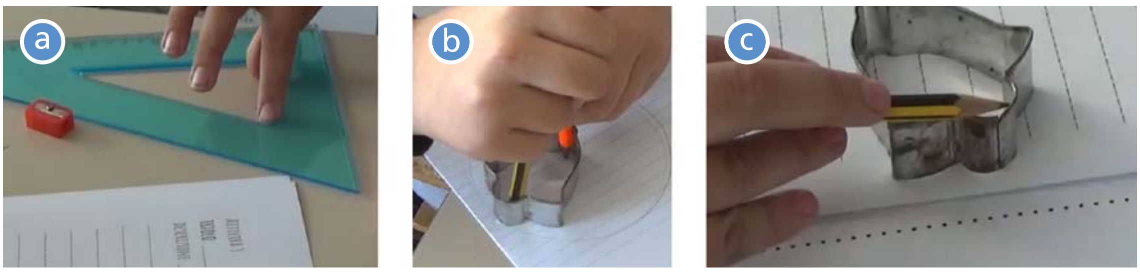


Figura 13. a) L. indica il raggio; b) e c) Circonferenza con la campanella.

Il secondo incontro ha preso l'avvio da una discussione di classe su quanto fatto nell'attività precedente. In questa occasione i docenti hanno cercato di orchestrare la discussione al fine di riprendere i concetti base affrontati e arrivare a una prima definizione di circonferenza. Dall'analisi delle discussioni emergono inizialmente definizioni che fanno riferimento a preconoscenze sulle curve acquisite nella scuola primaria, per poi avvicinarsi alle esperienze fatte nelle attività e arrivare a fare così riferimento al concetto di *distanza*.

> D.: «È una linea chiusa, che non ha né un inizio né una fine, e non ha angoli».
> Prof.: «[Disegna una forma non circolare che rispetta questa definizione, visibile sulla destra nella **Figura 14a**]. Quindi questa è una circonferenza!» [Seguono tentativi di risposta inconcludenti]. «Pensate alle attività che abbiamo fatto la volta scorsa».
> M.: «Ma il cerchio è formato da due archi, invece quello che ha fatto lei non è formato da due archi. Perciò deve avere due archi… ehm…»
> D.: «Che il perimetro ha sempre la stessa distanza dal centro… perché nella figura che ha fatto lei…»
> Prof.: «E qui [indica il disegno alla lavagna] non ha la stessa distanza dal centro?»
> D.: «No, perché… non so come spiegarlo a voce… ad esempio nell'onda lì non è lo stesso di quello dietro, non è la stessa distanza di quello dietro… [si avvicina alla lavagna e prende il pennarello (**Figura 14a**)] qua [cerchia un segmento da un punto interno a un punto sul contorno] non è la stessa distanza di questo [disegna un segmento dallo stesso punto interno a un altro punto sul contorno]. Invece nella circonferenza c'è sempre la stessa distanza [disegna tre raggi (**Figura 14b**)]».

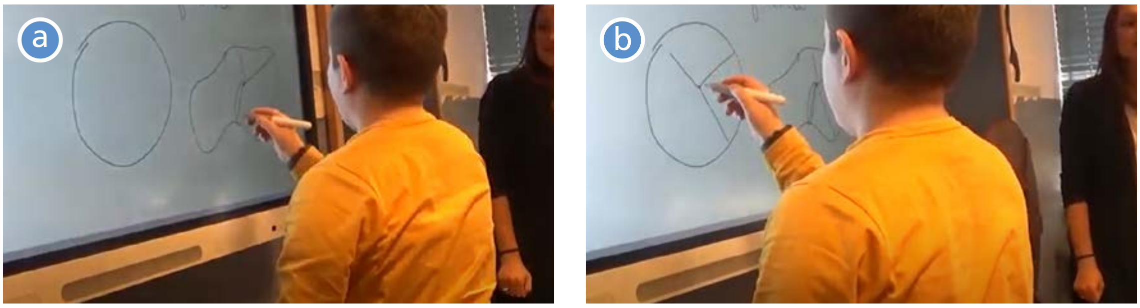


Figura 14a, b. Figure disegnate alla LIM.

4.2 La circonferenza con il piano rotante

L'attività alla base del secondo incontro (**Tabella 1**, Attività 2) ha previsto l'esplorazione del piano rotante. Si tratta di una macchina matematica molto semplice, costituita da due dischi di legno incernierati al loro centro, in modo tale che il disco superiore (più grande) possa ruotare di 360° nei due versi (**Figura 16**). Con questa macchina si scoprono altre possibilità di generare una circonferenza attraverso il movimento, con un cambio di prospettiva per gli allievi. Se nell'attività precedente a generare la figura era la persona che correva o la penna che percorreva una traiettoria a distanza fissa dal centro, ora è il piano d'appoggio a ruotare e la riflessione si sposta su come posizionare opportunamente le matite da tenere fisse per generare circonferenze. Consegnato a ogni gruppo un piano rotante, si è chiesto agli studenti di osservare, congetturare e infine testare le proprie conclusioni. Gli stimoli per avviare e condurre questa attività sono riportati di seguito.

a. Prime domande: «Che cosa accade se tengo la penna ferma e faccio ruotare il piano? È sempre una circonferenza? Siete sicuri che, ovunque mettiate la matita, venga sempre una circonferenza?».

b. Dopo aver mostrato tramite la lavagna LIM immagini di coppie di circonferenze di varie dimensioni e in posizioni reciproche diverse (due circonferenze concentriche di raggio diverso; una circonferenza e un punto; due circonferenze concentriche e una che interseca una di esse; una circonferenza che passa per il centro di un'altra circonferenza di raggio maggiore; alcuni esempi sono riportati in **Figura 15**), chiedere agli studenti di provare a ricreare con il piano rotante le stesse circonferenze, dapprima ipotizzando la posizione iniziale in cui tenere le matite, poi eseguendo il disegno sul piano rotante.

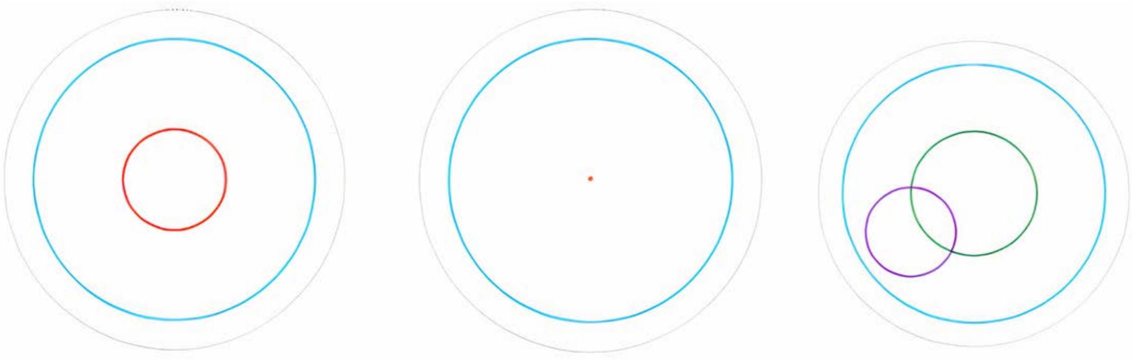


Figura 15. Posizioni diverse di circonferenze, da riprodurre con il piano rotante.

c. Fornire agli studenti una spugnetta intinta di tempera chiedendo ai gruppi di ricreare alcune immagini che mostrano cerchi e circonferenze in posizioni reciproche diverse (una circonferenza e una corona circolare concentrica ad essa; un cerchio con circonferenza che passa per il centro di un'altra circonferenza di raggio maggiore).[12]

Dopo la discussione di classe si è lasciato il tempo agli studenti per compilare il quaderno di documentazione, in cui si è fatta esplicita richiesta di riprodurre con un disegno il piano rotante su cui indicare la posizione delle matite colorate e della spugnetta, e le circonferenze ottenute dopo aver fatto ruotare il piano.
Nelle esplorazioni relative al punto (a) la maggior parte dei gruppi ha rapidamente compreso cosa si ottiene dal movimento del piano rotante e ha notato, in seguito a domande stimolo dei docenti, che esiste il caso degenere della circonferenza come punto, ottenuto quando si posiziona la penna in corrispondenza del centro del piano rotante. Tali osservazioni durante la manipolazione iniziale hanno aiutato ad affrontare il punto (b). La richiesta di creare circonferenze concentriche non ha dato grosse difficoltà ed è stata occasione per discutere ad esempio sulla possibilità di creare o meno sempre due circonferenze distinte con due matite (**Figura 16**):

> Prof.: «Quante circonferenze vengono fuori con due matite?»
> L.: «Ad ogni giro due circonferenze».
> Prof.: «Ma sono sempre diverse queste due circonferenze?»
> L.: «No!»
> A.: «Se le mettiamo in punti diversi sì, se le mettiamo attaccate no».
> L.: «Se le mettiamo in parallelo… no».

12. Per mancanza di tempo quest'ultima attività non è stata sperimentata.

Figura 16. Attività sul piano rotante.

Il richiamo all'idea di parallelismo per intendere una stessa distanza delle matite dal centro è stato oggetto di discussione con il gruppo classe al termine dell'attività, quando il docente ha ripreso l'espressione proprio per volgere ancora l'attenzione degli studenti sul concetto di distanza.
Per il punto (b) la maggior parte delle difficoltà si sono concentrate sul disegno di circonferenze non concentriche, come si evince anche da diversi disegni riprodotti sul quaderno di documentazione (si vedano un esempio rappresentativo dell'errore in Figura 17a e un protocollo corretto in Figura 17b).

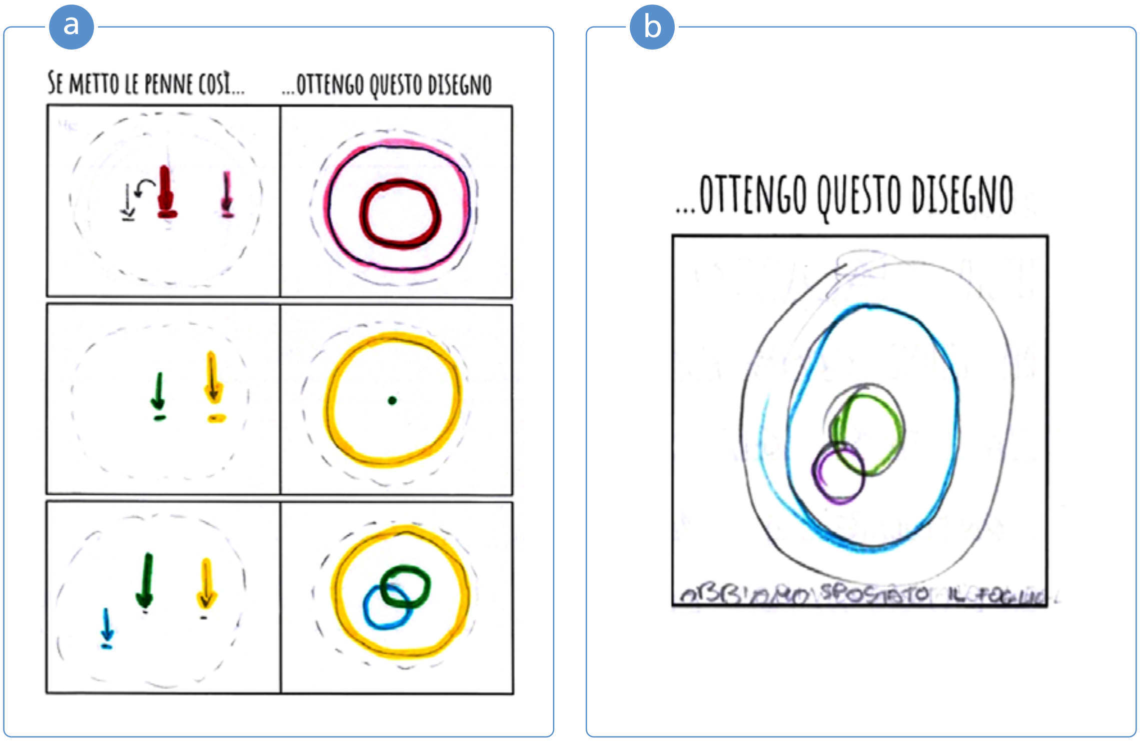


Figura 17a, b. Estratti dai quaderni di documentazione di due allievi.

Uno dei pochi gruppi che è riuscito a trovare correttamente la rappresentazione di una circonferenza non concentrica alle altre è stato guidato dal docente con alcune domande stimolo volte a riflettere sulle proprietà del piano rotante, come si può leggere nel seguente dialogo.

M.: «Se si gira fa sempre un cerchio, invece [la circonferenza non concentrica] è più in basso. Oddio, aspetta… Perché…»
Prof.: «Qual è la proprietà di questo tavolo rotante?»
D.: «Ruota e fa disegnare queste circonferenze».
Prof.: «Giusto, e come sono tutte queste circonferenze tra loro?»
M.: «Arrivano sempre al centro».
Prof.: «Hanno tutte lo stesso centro. Ma quella circonferenza che dovete disegnare ha un centro diverso».
M.: «Ah sì, perciò il giro dovrebbe essere diverso! Perché se ha un punto diverso...»
D.: «Anche perché il tavolo là sotto [capovolge il piano rotante (**Figura 18a**)] ha un suo centro».
Prof.: «Quindi che cosa fa lui?»
D.: «Ruota attorno al suo centro e fa ruotare tutte le linee attorno al suo centro».
Prof.: «Ok, quindi diciamo che se tu vuoi disegnare una circonferenza...»
D.: «… fuori dal centro, devi avere il centro che coincide con il centro del tavolo!»
Prof.: «E quindi come devi fare?» [Lungo silenzio in cui gli studenti girano il piano, poi prendono un nuovo foglio bianco e ridisegnano precisamente le due circonferenze concentriche]. «Benissimo, e adesso? Il viola [colore della circonferenza non concentrica riprodotta nelle immagini della LIM] come deve essere messo?»
D.: «Il suo centro è qua [indica un punto sulla circonferenza concentrica di raggio minore (**Figura 18b**)]».
Prof.: «Bisogna spostare qualcosa, allora! [D. in silenzio stacca il foglio dal piano]».
M.: «Ah! Se lo metti a lato…»
Prof.: «Prova!»
M.: «Quindi basta spostare il foglio (**Figura 18c**)!»

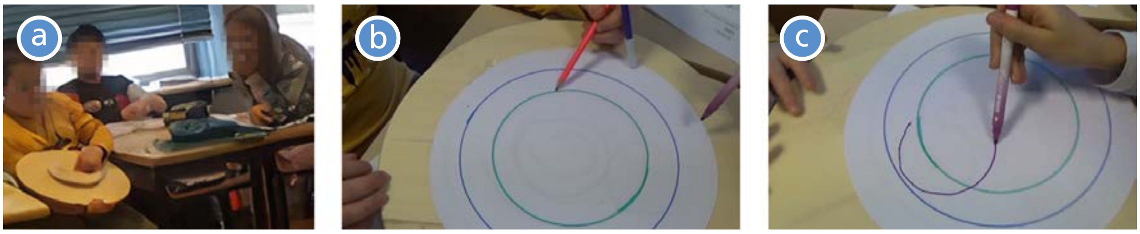


Figura 18a, b, c. Il piano rotante e i disegni di circonferenze.

4.3 Dalla circonferenza alla spirale: la visita-laboratorio a Palazzo Madama

Il passaggio alla spirale, in cui la distanza di un punto dal centro non è fissa, ma variabile, è stata proposta agli studenti tramite la visita-laboratorio "Vortici di idee".
Nella visita-laboratorio al museo (**Tabella 1**, Attività 3) gli studenti sono stati invitati a osservare, disegnare su carta e ricreare con il proprio corpo e con macchine matematiche le spirali (come descritto nel **par. 3**). In un primo momento sono stati coinvolti in una camminata in fila indiana (**Figura 19**): seguendo la guida, si sono mossi a formare una spirale, partendo dal centro di una circonferenza disegnata sulla pavimentazione in marmo presente nel loggiato superiore dello scalone e allontanandosi lentamente da esso. L'obiettivo era quello di dare una prima idea intuitiva di spirale e far percepire con il corpo i movimenti che la creano; interessante a tal proposito una descrizione di una studentessa nel suo quaderno di documentazione: «La nostra guida ci ha fatto sentire proprio come una spirale, mettendoci l'uno dall'altro molto vicini e facendoci allargare piano piano». Quando la visita si è spostata nella corte medievale, al gruppo classe è stata presentata la macchina matematica *spiralografo di Archimede*, che gli studenti sono stati invitati a esplorare.

Figura 19. Coreografia a spirale a Palazzo Madama.

A coppie, gli studenti hanno disegnato con lo strumento alcune spirali richieste (più o meno "fitte", con spire a distanza costante o meno ecc.), come si può vedere nelle Figure 20a e 20b.

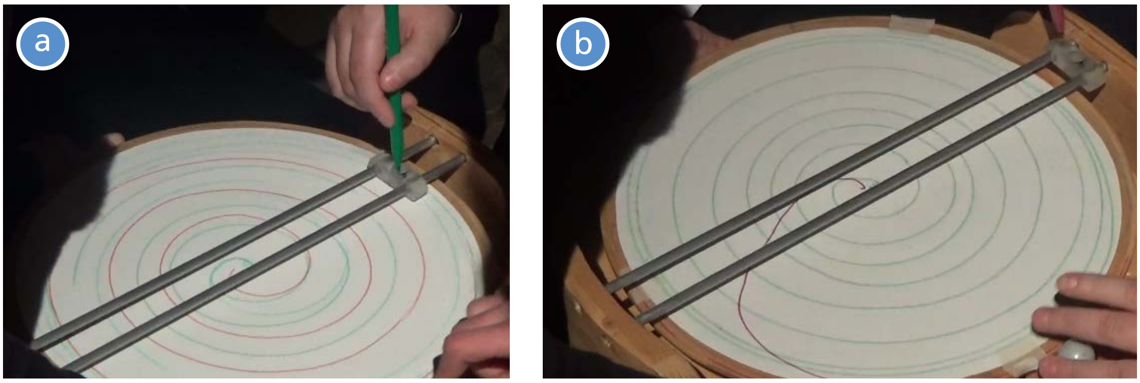
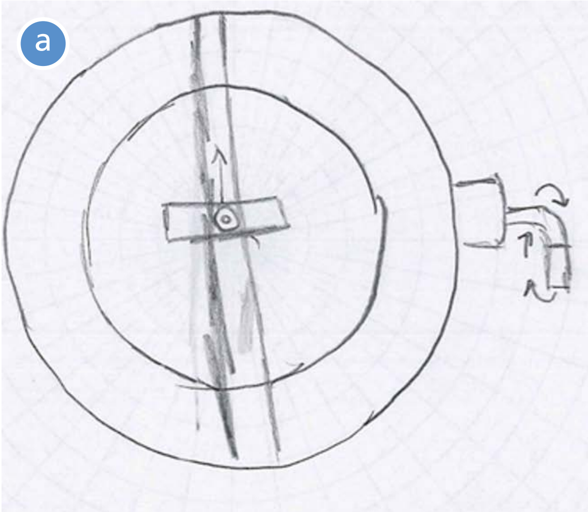


Figura 20a, b. Spirali disegnate con lo spiralografo di Archimede.

Riportiamo un estratto delle istruzioni fornite dalla guida prima che gli studenti potessero provare la macchina:

> «Tu [rivolgendosi al ragazzo che muove il pennarello nella guida rettilinea] inserirai il pennarello in questo foro e lo muoverai in una sola direzione, verso di te o verso di me. Scegli la direzione, poi sarà la stessa per tutti quelli che lo faranno dopo di te. Quando arrivi al limite esterno ti fermi, non tornare indietro, mi raccomando. Inizi a muoverti solo quando lui avrà iniziato a girare. Quindi dal centro verso l'esterno e poi ti fermi. La velocità di movimento la scegli tu, puoi andare molto piano o molto veloce, e vediamo cosa viene. Tu [rivolgendosi al ragazzo che muove la manovella] giri sempre in senso orario. Partiamo!».

Si noti come in alcuni protocolli del quaderno di documentazione sia chiara la descrizione di tali istruzioni, con l'indicazione dei movimenti segnalata da opportune frecce (Figura 21a). Emergono invece alcune difficoltà nell'accuratezza nella riproduzione della spirale che si ottiene da tali movimenti (Figura 21b).



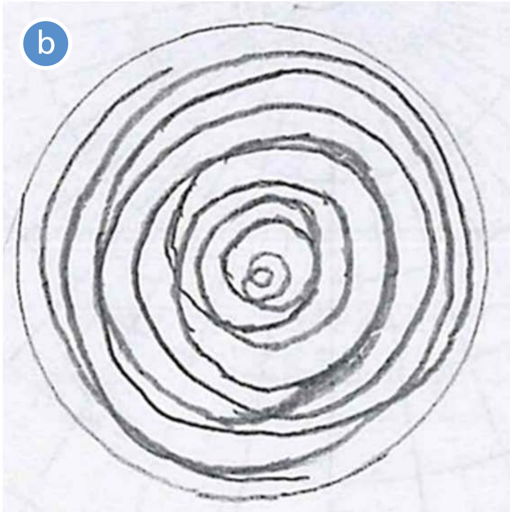


Figura 21a, b. Disegni di allievi.

Al termine delle esplorazioni la guida ha chiesto di fare più giri andando piano o velocemente, accontentandosi di risposte rapide e non argomentate. Tale rigidità nelle istruzioni da seguire per far funzionare la macchina è stata da un lato limitante per la piena comprensione dei concetti matematici sottesi, dall'altro è stato sfruttato dai docenti per l'attività successiva in classe, come vedremo nel **par. 4.4.** Interessante notare che una studentessa, dopo aver disegnato una spirale logaritmica[13] accelerando la traslazione (**Figura 20b**), ha affermato: «Non so se la chiamerei una spirale!». Tale risposta è rimasta inascoltata e non approfondita opportunamente. Anche in questo caso, i docenti hanno potuto riprendere l'argomento in classe.
La visita-laboratorio si è poi spostata lungo le sale e le torri di Palazzo Madama, percorrendo scale a chiocciola di varie epoche. Si è passati in questo modo dalla spirale in due dimensioni all'elica, vista come spirale in tre dimensioni, riprodotta ed esaminata con l'*elicografo* nella parte finale della visita-laboratorio. Gli studenti sono stati invitati a manipolare lo strumento e scoprire come tracciare eliche cilindriche di vario tipo, variando opportunamente le velocità dei moti in funzione delle richieste della guida. Considerando che tale attività non sarebbe stata replicata negli interventi in classe successivi, in questo caso i docenti accompagnatori hanno scelto di intervenire attivamente nel guidare la discussione, con domande di riflessione volte a congetturare, per poi esplorare la congettura con la macchina (**Figura 22a**) e infine riflettere su quanto accaduto (**Figura 22b**). Riportiamo di seguito la domanda stimolo del docente in cui si chiede una spiegazione del motivo per cui le linee parallele, ottenute sul foglio srotolato dal cilindro dell'elicografo, siano più vicine in alcuni punti e più separate in altri. Segue la risposta di uno studente, incentrata sul legame tra velocità dei movimenti e il tempo impiegato:

> Prof.: «A. è andata pianissimo con il cursore e ha disegnato queste linee che sono tutte vicine l'una all'altra. Invece dopo abbiamo di nuovo girato [la manovella] con la stessa velocità però lei è andata velocissima con il cursore e ha disegnato solo queste due linee che sono sempre parallele, ma molto lontane tra loro. La domanda è perché andando piano ne vengono tante e andando veloce ne vengono poche?»
> M.: «Se vai piano fai molte righe perché hai più tempo, invece quando vai veloce fai poche righe».

13. Nella spirale archimedea la traslazione avviene con un moto a velocità costante, mentre nella spirale logaritmica occorre traslare con un moto accelerato.

Figura 22a, b. Utilizzo dell'elicografo.

4.4 L'analisi dello spiralografo in classe

L'attività proposta nell'ultimo incontro, tenutosi in aula (Tabella 1, Attività 4), si è avviata con una discussione riguardo la visita-laboratorio a Palazzo Madama, durante la quale sono stati rievocati i momenti salienti. L'insegnante ha chiesto quindi di descrivere e riassumere le istruzioni fornite dalla guida per l'utilizzo dello spiralografo. In particolare, si sottolineano tre indicazioni: «muovi il pennarello in una sola direzione», «parti dal centro e poi ti fermi quando arrivi al limite esterno», e «ti muovi solo quando il piano inizia a girare». Si è discusso così in classe sulle motivazioni per cui sono state fornite queste precise istruzioni e gli studenti sono stati invitati a congetturare cosa potrebbe accadere se queste non fossero rispettate. Ad esempio, si è proposto di indagare cosa accadrebbe se si girasse in un verso differente, se si partisse dal bordo del piano rotante e si arrivasse fino al centro, e – ancora – cosa accadrebbe se si percorresse tutto il diametro, infine cosa accadrebbe se si muovesse il pennarello prima che la manovella faccia ruotare il piano. La scelta delle domande del tipo «che cosa accadrebbe se…?» si ispira al "metodo della ricerca variata" (Arzarello, 2019; Swidan et al., 2023), utilizzato dagli insegnanti come prassi didattica nelle regolari lezioni di matematica.
Le difficoltà principali in questa attività sono state due:

a. capire che cosa cambia se si sposta il pennarello, non dal centro all'estremità (come da istruzioni della guida di Palazzo Madama), bensì dall'estremità verso il centro;
b. capire che cosa accade se, una volta arrivati al centro, si prosegue percorrendo l'intero diametro.

Per il punto (a), dopo qualche tentativo con un disegno che modellizzava la macchina matematica, la maggior parte dei gruppi sono riusciti a comprendere correttamente che si forma ugualmente una spirale. Si è riscontrata qualche difficoltà relativamente al senso di avvolgimento della spirale in funzione del verso di rotazione del piano rotante. Considerate le difficoltà e i diversi obiettivi, si è scelto di non approfondire tale argomento.
Sul punto (b) è interessante seguire il discorso di un gruppo che, guidato dal docente, è arrivato a correggere la congettura iniziale.

> Prof.: «Se partiamo di qua [indica un'estremità], se giriamo da lì fino al centro cosa viene fuori?»
> A.: «Una spirale normale!»
> Prof.: «Che differenza c'è tra una spirale che inizia dal centro e una che inizia dal bordo?»
> A.: «Ehm… e mi aiutate? [Rivolgendosi ai compagni di gruppo, che però non forniscono input utili]».
> Prof.: «[Prendendo la matita] Perché questa quando disegni parti da fuori e diventa?»
> A.: «Sempre più stretta [percorrendo con la matita la spirale verso il centro]».
> Prof.: «E se parti dal centro?»
> A.: «La fai sempre più larga!»

Prof.: «E se poi arrivi qui [indica il centro] e prosegui, cosa viene fuori?» [Seguono tentativi delle due studentesse coinvolte in cui ripetono il percorso (Figura 23a)].
A.: «Però cosa succede se arriviamo fino a qua… facciamo una doppia spirale! Tecnicamente facciamo… così… [intanto disegna una spirale che cambia verso rispetto alla precedente (Figura 23b)]».
Prof.: «Sei sicura? Tu continua a girare… ok, lui cambia verso quando gira? No, tu giri sempre nello stesso verso e allora anche la matita continua nello stesso verso!»
A.: «Ah! Quindi…» [e disegna la spirale continuando dal tracciato della spirale precedentemente disegnata, mantenendo lo stesso verso (Figura 23c)].

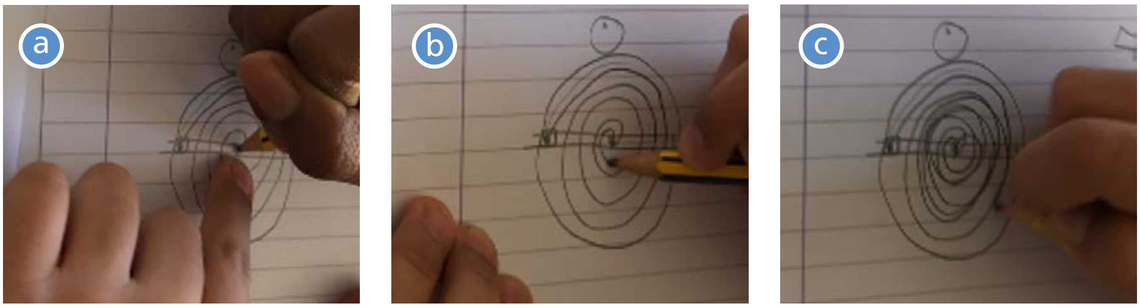


Figura 23a, b, c. Disegni degli allievi: spirali sul piano rotante.

Come produzione finale si è chiesto agli studenti di redigere all'interno del gruppo un testo, il più chiaro e completo possibile, che racchiuda tutte le istruzioni per utilizzare lo spiralografo.

5 Il quaderno di documentazione

Il quaderno di documentazione, come già descritto nel par. 3, ha accompagnato studenti e studentesse lungo tutto il percorso di apprendimento e ha costituito un efficace strumento di valutazione formativa. La struttura del quaderno era sostanzialmente simile nelle varie attività: si è chiesto di dare un titolo a ciascuna attività, descriverla con un testo, rappresentarla graficamente e infine individuare tre parole chiave.
Si osservi ad esempio il seguente protocollo (Figure 24 e 25), relativo a un momento dell'attività con il piano rotante in cui gli studenti hanno sperimentato diverse posizioni della penna (si veda il par. 4.2).

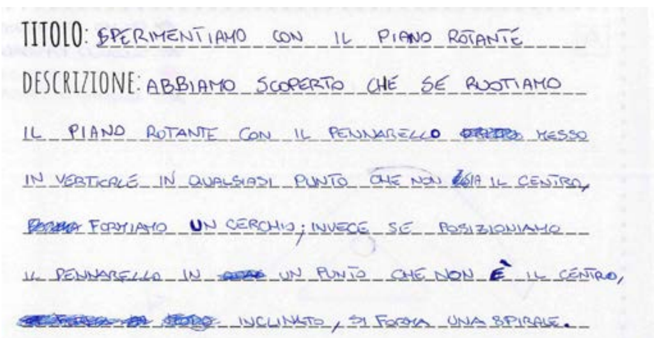

TITOLO: SPERIMENTIAMO CON IL PIANO ROTANTE
DESCRIZIONE: ABBIAMO SCOPERTO CHE SE RUOTIAMO IL PIANO ROTANTE CON IL PENNARELLO MESSO IN VERTICALE IN QUALSIASI PUNTO CHE NON SIA IL CENTRO, FORMIAMO UN CERCHIO; INVECE SE POSIZIONIAMO IL PENNARELLO IN UN PUNTO CHE NON È IL CENTRO, INCLINATO, SI FORMA UNA SPIRALE.

Figura 24. Quaderno di documentazione di un allievo – prima parte.

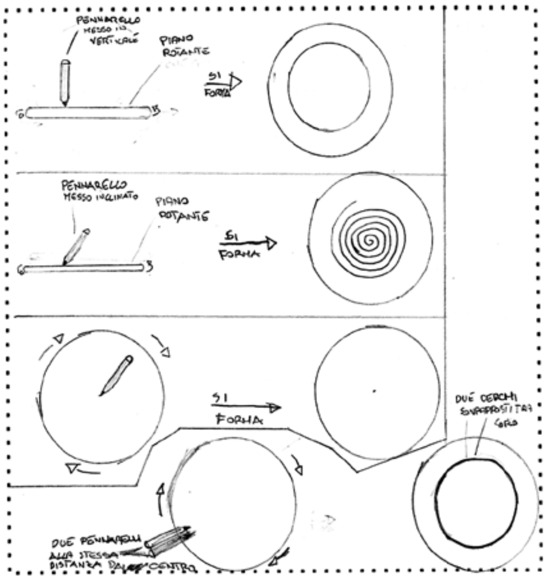
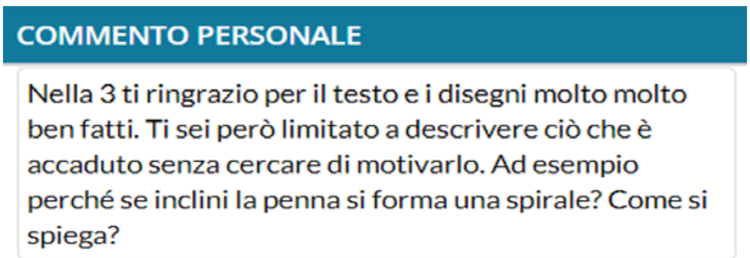


Figura 25. Quaderno di documentazione di un allievo – seconda parte.

Nel titolo lo studente evidenzia il carattere esplorativo dell'attività svolta e la dimensione della scoperta è presente nella descrizione dell'esperienza (**Figura 24**). Nel disegno (**Figura 25**), lo studente rappresenta le varie fasi dell'attività, escludendo esplicitamente il centro dalle casistiche in quanto punto fermo. Interessante il fatto che affermi (e disegni con cura) che quando il pennarello è inclinato si formi una spirale.[14]

Tutti questi elementi hanno consentito agli insegnanti di fornire dei feedback formativi molto estesi e puntuali. Ad esempio, riportiamo in **Figura 26** il feedback formativo che l'insegnante ha fornito a uno studente per mezzo del registro elettronico.


COMMENTO PERSONALE

Nella 3 ti ringrazio per il testo e i disegni molto molto ben fatti. Ti sei però limitato a descrivere ciò che è accaduto senza cercare di motivarlo. Ad esempio perché se inclini la penna si forma una spirale? Come si spiega?

Figura 26. Esempio di feedback formativo dato dall'insegnante.

Come si può vedere in **Figura 26**, al posto di un voto numerico gli studenti e le studentesse hanno ricevuto un testo in cui venivano evidenziati punti di forza e debolezza per ciascuna attività e un commento complessivo su tutto il percorso, in linea con un approccio alla valutazione in ottica formativa.

Un altro esempio dello stretto legame tra attività, quaderno e feedback formativo è relativo a una studentessa che solitamente affronta le attività di matematica in modo molto passivo e con un impegno minimo. In questo caso, però, ha decorato il quaderno da cima a fondo, dimostrando una grande cura

14. La spiegazione di questo fenomeno è che, inclinando il pennarello, gli studenti lo muovevano e non si rendevano conto di spostarlo.

del dettaglio: in **Figura 27** si può notare la personalizzazione della copertina del quaderno e in **Figura 28** le colorazioni attente e funzionali degli elementi principali degli strumenti e delle diverse curve.

Figura 27. Copertina del quaderno di documentazione di un'allieva.

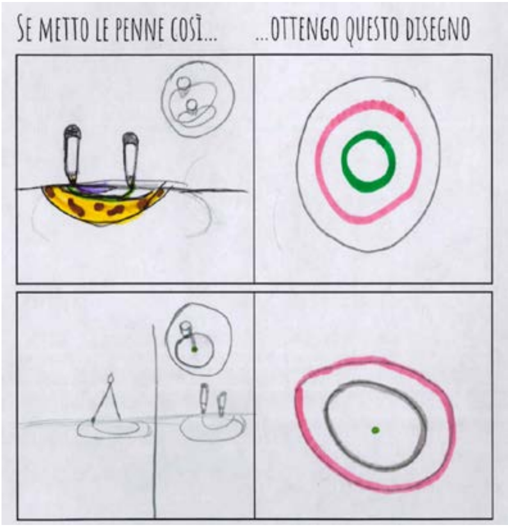


Figura 28. Disegni di un'allieva nel quaderno di documentazione.

Al contrario, i testi sono, come di consueto per questa studentessa, molto sintetici e poco chiari, come emerge dal seguente protocollo (**Figura 29**).

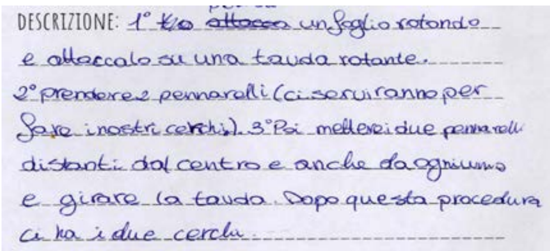
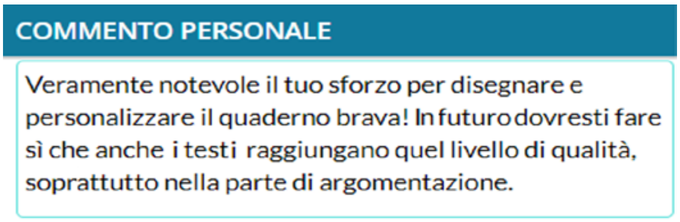


Figura 29. Testo di un'allieva nel quaderno di documentazione.

Nella valutazione tradizionale, questi diversi aspetti si sarebbero persi. Invece, si è potuto fornire il feedback in **Figura 30**, che evidenzia in maniera positiva il contributo grafico e segnala un obiettivo ancora da raggiungere sul piano argomentativo.


COMMENTO PERSONALE

Veramente notevole il tuo sforzo per disegnare e personalizzare il quaderno brava! In futuro dovresti fare sì che anche i testi raggiungano quel livello di qualità, soprattutto nella parte di argomentazione.

Figura 30. Feedback formativo dell'insegnante.

Tutti questi elementi legati alla personalizzazione del quaderno e al suo uso per raccogliere osservazioni varie e non strutturate degli studenti si legano armoniosamente con il quadro teorico dell'educazione matematica informale su cui è basato l'intero percorso.
Naturalmente, il quaderno fornisce molti dati utili a valutare le competenze acquisite da studenti e studentesse, ma non può replicare integralmente tutti gli elementi emersi dalle discussioni matematiche seguite ad ogni attività. Ad esempio, nei quaderni è assente la descrizione del fatto che sia la variazione del raggio durante la rotazione del piano a consentire di passare dal disegno di una circonferenza a quello di una spirale. Questo elemento, invece, è emerso molto chiaramente dalle discussioni con studenti e studentesse. Limitando le considerazioni sull'attività svolta alla sola analisi del quaderno, si potrebbe interpretare tale assenza affermando che gli studenti non ritenessero il fatto rilevante, mentre dalle discussioni emerge proprio l'opposto, come ad esempio nel seguente estratto al termine dell'attività con i piani rotanti.

Prof.: «E quindi qua cosa abbiamo ottenuto?»
N.: «Una spirale».
Prof.: «E come mai una spirale e prima tutte delle circonferenze?»
M.: «Io lo so… cambiava… la penna».
A.: «Si spostava il pennarello».
Prof.: «Si spostava da dove?»
A.: «Dal centro del coso che gira».
Prof.: «Ok si spostava dal centro della circonferenza. E cosa cambiava quindi nella circonferenza?»
N.: «Il raggio».

Questa assenza è stata notata solo a posteriori: il quaderno è rimasto per tutto il tempo in mano agli studenti, che l'hanno consegnato agli insegnanti solo al termine dell'intero percorso. Pertanto, risulta opportuna un'analisi complessiva che combini e integri le varie fonti documentali e osservative.

6 Riflessioni conclusive

A conclusione del lavoro presentiamo alcune riflessioni in relazione al tema emergente dell'educazione matematica informale, anche se siamo consapevoli che gli apprendimenti acquisiti hanno beneficiato notevolmente di metodologie didattiche molto studiate e apprezzate dalla ricerca italiana in didattica della matematica degli ultimi decenni, come il laboratorio con le macchine matematiche, la discussione matematica e il metodo della ricerca variata, ma anche di approcci più recenti, come quelli che prevedono il coinvolgimento di tutto il corpo e le attività matematiche al di fuori della scuola tipiche della educazione matematica informale.

Nelle pagine precedenti abbiamo mostrato come sia possibile coniugare gli stimoli derivanti dall'esplorazione di un luogo di grande valore storico e artistico con una seria riflessione matematica, grazie a una progettazione attenta e a una gestione esperta da parte dei docenti. Il percorso sulle spirali, pensato e sperimentato varcando i confini dell'aula scolastica nell'una e nell'altra direzione, realizza appieno due delle caratteristiche dell'educazione matematica informale: considera in maniera fluida i confini disciplinari (nel nostro caso, matematica, storia e arte) e propone una forma non tradizionale di valutazione (il quaderno di documentazione). La terza caratteristica, la libera scelta di partecipazione da parte degli allievi, non è soddisfatta, in quanto in aperta contraddizione con la volontà degli insegnanti di svolgere il percorso nelle ore curricolari e di coinvolgere quindi le classi per intero in orario scolastico. Avremmo potuto rimanere "fedeli alla linea" e optare per un percorso pomeridiano, opzionale per gli allievi; invece, la nostra scelta è stata dettata dalle nostre convinzioni sul ruolo della scuola nell'educare alla cittadinanza consapevole, a partire dalla conoscenza della propria storia e del proprio territorio, che si riflette in una visione dell'educazione matematica nel quadro di una più ampia formazione culturale del cittadino.
Inoltre, inserire il percorso nelle regolari lezioni ci ha spinto a interrogarci sui possibili collegamenti con il curriculum delle classi, a partire dalla finalità pratica di non stravolgere le programmazioni degli insegnanti e di dare continuità alle modalità di lavoro degli allievi, per evitare l'effetto parentesi di cui parlavamo sopra. Realizzare un percorso integrato tra scuola e museo richiede l'incontro con attori diversi della scena educativa, gli insegnanti e gli esperti del museo, che hanno tempi e modalità diverse di lavoro. Se nel caso della pratica di insegnamento il docente ha a disposizione tempi lunghi, incontri ripetuti e opportunità di tornare a mettersi in dialogo con gli studenti su un certo aspetto anche più volte a distanza di tempo, questo non avviene per l'esperto museale, che può sfruttare solamente il breve tempo della visita-laboratorio per raggiungere gli obiettivi fissati. D'altro canto, a differenza di quanto accade nella maggior parte delle aule scolastiche, il museo offre un ambiente in cui gli studenti si immergono in un contesto ricco di stimoli, vivendo così un'esperienza estetica intensa. Si è generata quindi una tensione tra la forza centrifuga dello «spaesamento estetico» (Farnè et al., 2018, p. 16) che abbiamo sentito come motore per l'esplorazione matematica e quella centripeta della componente formale della didattica, data dallo svolgere le attività a scuola e incarnata, per quanto riguarda i contenuti, dal curriculum. Abbiamo quindi identificato nel lavorare con le curve a partire dai moti e dalla loro combinazione, una via praticabile per rispettare il principio di doppia continuità didattica, intesa come una continuità tra attività a scuola e attività al museo sia sui contenuti matematici sia sulle metodologie didattiche.[15] La **Tabella 1** esprime in una certa misura l'equilibrio raggiunto.
Alla luce della nostra esperienza, possiamo affermare che porsi nella prospettiva dell'educazione matematica informale contribuisce a «reinventare contesti che possano rendere significativa l'esperienza dell'apprendimento della matematica» (Radford, 2021, p. 150), come abbiamo voluto sottolineare nella citazione iniziale. La ricerca didattica italiana ha lavorato molto in questa direzione, con tantissimi progetti a partire dagli anni '90 del secolo scorso, ma pensiamo che la nostra scuola abbia ancora bisogno di riflettere e innovarsi sotto questo aspetto.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (ciclo secondario).* Matteoni stampatore.

15. Ovviamente questo principio può funzionare solo se l'insegnante adotta nelle regolari lezioni una metodologia laboratoriale: in caso contrario potrebbe generarsi una sorta di "effetto parentesi lungo" che include l'intero percorso integrato di educazione matematica informale.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(Extraordinario 1), 267–299.

Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *42A-B*(5), 542–554.

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica.* Centro documentazione educativa.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: Dalla storia alla scuola.* Springer.

Behrendt, M., & Franklin, T. (2014). A review of research on school field trips and their value in education. *International Journal of Environmental and Science Education*, *9*(3), 235–245.

Carotenuto, G., Mellone, M., Sabena, C., & Lattaro, P. (2020). Un progetto di educazione matematica informale per prevenire la dispersione scolastica. *Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *5*(2), 157–172.

Casi, R., Leo, V., Pizzarelli, C., & Sabena, C. (2022). La matematica nei musei con il progetto Next-Land. In E. Luciano, M. Oggero & C. Sabena (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2020-2022* (pp. 105–116). L'Artistica Editrice.

Casi, R., Pizzarelli, C., & Sabena, C. (2023). Spirali tra arte e matematica. In A. Buonocore, G. Gerla, L. Restuccia & C. Toffalori (Eds.), *Matematica 2022. Matematica, Arte e Società* (pp. 77–92). Palermo University Press & New Digital Frontiers.

Casi, R., & Sabena, C. (in stampa). Informal Mathematics in teacher's education. The teachers' voice. In *Proceedings of the Thirteenth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME13). ERME.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente – Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze*, *9*(14), 91–107.

DeWitt, J., & Storksdieck, M. (2008). A short review of school field trips: Key findings from the past and implications for the future. *Visitor Studies*, *11*(2), 181–197. https://doi.org/10.1080/10645570802355562

Farnè, R., Bortolotti, A., & Terrusi, M. (Eds.) (2018). *Outdoor Education: Prospettive teoriche e buone pratiche.* Carocci editore.

Giacardi, L. M. (2016). "Lavorare con le mani e con la mente". Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *39*, 517–549.

Griffin, J., & Symington, D. (1997). Moving from task-oriented to learning-oriented strategies on school excursions to museums. *Science Education*, *81*(6), 763–779. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-237X(199711)81:6<763::AID-SCE11>3.0.CO;2-O

Katz, L. G., & Chard, S. C. (1996). *The contribution of documentation to the quality of early childhood education*. ERIC Digest.

Kelton, M. L. (2021). Mathematics learning pathways on a school fieldtrip: Interactional practices linking school and museum activity. *Visitor Studies*, *24*(2), 220–242. https://doi.org/10.1080/10645578.2021.1939984

Krechevsky, M., Rivard, M., & Burton, F. (2009). Accountability in three realms: Making learning visible inside and outside the classroom. *Theory Into Practice*, *49*(1), 64–71. https://doi.org/10.1080/00405840903436087

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale.* Le Monnier.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 90–101). National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning.* Brill Sense.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Erlbaum.

Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., & Arzarello, F. (2023). The Method of Varying Inquiry for stimulating learning. *For The Learning of Mathematics*, *43*(1), 14–18.