QUADERNI DEL DIPARTIMENTO
DI STATISTICA E MATEMATICA
APPLICATA ALLE SCIENZE UMANE
"DIEGO DE CASTRO"

SEZIONE MATEMATICA

Sergio MARGARITA

Sugli errori di approssimazione nel calcolo di medie associative

Quaderno n. 7

1999

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TORINO

QUADERNI
del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata
alle Scienze Umane "Diego de Castro"

sezione Matematica

N. 1 Guido A. Rossi, Luisa Tibiletti
HIGHER ORDER POLYNOMIAL UTILITY FUNCTIONS:
ADVANTAGES IN THEIR USE

N. 2 Mariacristina Uberti
A NOTE ON SHIU'S IMMUNIZATION RESULTS

N. 3 Elisa Luciano
LOADINGS AND DEDUCIBLES:
CAN A VICIOUS CIRCLE ARISE?

N. 4 Elisa Luciano
OPTIMAL DESIGN OF PREMIUM SCHEDULES
IN A BILATERAL SETTING

N. 5 Mariacristina Uberti
IMMUNIZATION OF PORTFOLIOS WITH LIABILITIES

N. 6 Ugo Merlone
ERROR EXTIMATIONS IN A CLASS OF CONCAVE SEPARABLE
PROBLEMS

N. 7 Sergio Margarita
SUGLI ERRORI DI APPROSSIMAZIONE NEL CALCOLO DI MEDIE
ASSOCIATIVE

I QUADERNI
possono essere richiesti a:
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata
alle Scienze Umane "Diego de Castro" - sezione Matematica
Università di Torino - Piazza Arbarello, 8 - I - 10122 Torino (Italy)
tel. +39-11-6706224 - fax +39-11-670-6238/6239

Sugli errori di approssimazione nel calcolo di medie associative

Sergio Margarita

Dipartimento di Statistica e Matematica applicata alle scienze umane "Diego de Castro"
Università di Torino
Piazza Arbarello 8
10122 Torino (TO)
Tel.: +39 0116706233 Fax: +39 0116706238
e-mail: serge.margarita@torino.alpcom.it

Riassunto

In questo lavoro, si considerano alcuni aspetti degli errori commessi approssimando la funzione di trasformazione di una media con una diversa funzione, con specifico riferimento alle medie associative, la cui principale applicazione in teoria delle decisioni è quella di definizione del *certo equivalente* di una variabile aleatoria. Sulla base del teorema di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti, si studiano in particolare le conseguenze su tale grandezza che derivano dall'approssimazione della funzione di trasformazione con una diversa funzione. Si esamina inoltre, nel caso di funzione di trasformazione polinomiale, l'influenza che ha sulla media il cambiamento di grado del polinomio.

1. Introduzione

Una delle applicazioni delle medie associative, nell'ambito della teoria delle decisioni, riguarda il problema della valutazione di importi monetari aleatori ed in particolare la determinazione del certo equivalente di una variabile aleatoria. In tali applicazioni la funzione di trasformazione della media assume il significato di funzione di utilità (von Neumann e Morgenstern, 1944). Si tratta tuttavia di una media associativa nel senso del teorema di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti.

Tali funzioni vengono in genere approssimate con leggi analitiche atte a garantire alcuni requisiti di plausibilità, ad esempio in termini di avversione al rischio (Pratt, 1964 e Arrow, 1965).

In questo lavoro, con riferimento al teorema di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti, si studia l'influenza che ha sulla media l'adozione di diverse funzioni di trasformazione. Le differenze che ne derivano potranno essere ricondotte ad errori di approssimazione, sia di troncamento, sia dovuti ad errori di specificazione della funzione adottata.

Questa nota è organizzata nel seguente modo: il punto 2 tratta il caso in cui, oltre a conoscerne alcune proprietà, si dispone di informazioni sufficienti ad individuare una funzione di trasformazione che si riterrebbe di dover utilizzare nel calcolo della media ma la si vuole sostituire con un'altra funzione; il punto 3 considera il caso in cui si conoscono soltanto alcune proprietà della funzione da sostituire, insufficienti ad individuarla. Al punto 4, come caso particolare, vengono prese in considerazione funzioni di trasformazione polinomiali, e relative inverse, di diverso grado e si analizza l'influenza che il cambiamento di grado del polinomio adottato ha sul calcolo della media.

2. Funzione di trasformazione parzialmente nota

Supponiamo di conoscere alcune proprietà della funzione di trasformazione e che siano note alcune informazioni su tale funzione, ma di volerla sostituire con una funzione diversa, per esempio per renderne più agevole il trattamento.

Dal teorema di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti (de Finetti, 1931; Hardy & al., 1952), se X è una variabile aleatoria con supporto chiuso e limitato $[a,b]$, F la sua funzione di ripartizione, e u la funzione di trasformazione associata, interpretabile come preferenza o utilità (continua e strettamente crescente su $[a,b]$, definita a meno di una trasformazione lineare affine), allora la media di Chisini associativa e monotona è e può solo essere espressa nella forma:

$$\tilde{x} = u^{-1}\left[\int_{\mathbf{R}} u(x)dF(x)\right].$$

Si farà qui riferimento alla formulazione originaria del teorema, rinviando il lettore a (Rossi, 1994) per un'estensione e un'analisi più approfondita.

Dovendo operare su diverse funzioni di trasformazione, useremo una notazione che assegna ad $\tilde{x}$ un indice corrispondente alla funzione di volta in volta adoperata:

$$\tilde{x}_u = u^{-1}\left[\int_{\mathbf{R}} u(x)dF(x)\right].$$

Ovviamente al variare della funzione di trasformazione considerata varierà la media corrispondente. Supponiamo di disporre di una funzione u ma di voler usare una diversa funzione di trasformazione. Vogliamo allora fornire una maggiorazione dell'errore commesso sulla media dovuto all'uso di una diversa funzione di trasformazione al posto di u.

Poniamo, senza perdita di generalità, $a = 0$ e quindi consideriamo l'intervallo $I = [0,b]$. Sia u continua, derivabile, strettamente crescente e strettamente concava su I, con $u(0) = 0$.

2.1 Approssimazione per eccesso

Supponiamo di disporre di una funzione p che approssimi per eccesso la funzione u.

Sia p una funzione continua, derivabile, strettamente crescente su I e sia inoltre

$p(x) \geq u(x) \quad \forall x \in I$.

Anche se si può pensare che esista un $x \in I$ tale che $p(x) > u(x)$, considereremo nel seguito le disuguaglianze attenuate.

Si ha:

$$\int_I p(x)dF(x) \geq \int_I u(x)dF(x) \Rightarrow \int_I p(x)dF(x) - \int_I u(x)dF(x) \geq 0$$

e

$$0 \leq \int_I [p(x) - u(x)]dF(x) \leq \max_{x \in I} |p(x) - u(x)|,$$

essendo F una funzione di ripartizione.

Adottando la metrica lagrangiana come misura della distanza tra le due funzioni:

$$d(p, u) = \max_{x \in I} |p(x) - u(x)|$$

possiamo scrivere:

$$\int_I p(x)dF(x) = \int_I u(x)dF(x) + k,$$

con

$$0 \leq k \leq \max_{x \in I} |p(x) - u(x)| = d(p, u).$$

Poniamo $y = \int_I u(x)dF(x)$ e $y + k = \int_I p(x)dF(x)$.

Come è d'uso, consideriamo come distanza fra le medie

$$\widetilde{x}_u = u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right] \qquad \text{e} \qquad \widetilde{x}_p = p^{-1}\left[\int_I p(x)dF(x)\right]$$

la grandezza $d(\widetilde{x}_u, \widetilde{x}_p) = |\widetilde{x}_u - \widetilde{x}_p|$.

Si ha:

$$d(\widetilde{x}_u, \widetilde{x}_p) = \left|u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right] - p^{-1}\left[\int_I p(x)dF(x)\right]\right| =$$

$$= \left|u^{-1}(y) - p^{-1}(y + k)\right|.$$

Essendo p e u strettamente crescenti, da

$$p(x) \geq u(x) \quad \forall x \in I$$

segue[1]

$$u^{-1}(x) \geq p^{-1}(x) \quad \forall x \in J$$

dove $J = im(u) \bigcap im(p) \neq \emptyset$ è l'intervallo[2] nel quale sono definite le due funzioni u^{-1} e p^{-1}.

Quindi possiamo scrivere

$$p^{-1}(y+k) = u^{-1}(y+k) - h,$$

con

$$0 \leq h \leq \max_{x \in J} \left| u^{-1}(x) - p^{-1}(x) \right| = d\left(u^{-1}, p^{-1}\right).$$

Sarà quindi:

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_p\right) &= \left| u^{-1}(y) - \left[u^{-1}(y+k) - h \right] \right| = \\ &= \left| u^{-1}(y) - u^{-1}(y+k) + h \right| \leq \\ &\leq \left| u^{-1}(y) - u^{-1}(y+k) \right| + |h| = \end{aligned}$$

---

[1] Infatti, essendo p e u strettamente crescenti, lo sono anche p^{-1} e u^{-1}. Di conseguenza, se $\forall x \in I$, $p(x) \geq u(x)$, allora, per ogni $p(x)$ e $u(x) \in im(p)$ si ha

$$p^{-1}(p(x)) \geq p^{-1}(u(x))$$

ossia

$$x \geq p^{-1}(u(x)).$$

Quindi se, per ogni $u(x) \in im(u) \bigcap im(p)$,

$$u^{-1}(u(x)) \geq p^{-1}(u(x))$$

allora

$$u^{-1}(x) \geq p^{-1}(x) \quad \forall x \in J.$$

[2] Non è restrittivo escludere il caso $J = \emptyset$, corrispondente ad una pessima approssimazione in cui gli insiemi immagine delle due funzioni sono disgiunti. Non essendo $\tilde{p}$ influenzato da trasformazioni lineari affini di p, si potrebbe anche imporre che sia $p(0) = 0$.

$$= \left|u^{-1}(y+k) - u^{-1}(y)\right| + |h| =$$

$$= \left|D\left(u^{-1}\right)(c) \cdot k\right| + |h|$$

con c punto di Lagrange, $y < c < y + k$ (indicando con $D\left(u^{-1}\right)$ la derivata dell'inversa di u).

Essendo $D\left(u^{-1}\right)(x)$ (strettamente) crescente su J, e positiva, risulta:

$$\left|D\left(u^{-1}\right)(c) \cdot k\right| + |h| \le \left|D\left(u^{-1}\right)(y+k) \cdot k\right| + |h| =$$

$$= D\left(u^{-1}\right)(y+k) \cdot k + h.$$

Inoltre

$$D\left(u^{-1}\right)(y+k) \cdot k + h \le D\left(u^{-1}\right)(y+k) \cdot d(p,u) + d\left(u^{-1}, p^{-1}\right) \le$$

$$\le D\left(u^{-1}\right)(M_u) \cdot d(p,u) + d\left(u^{-1}, p^{-1}\right),$$

dove $M_u = \max_{x \in I} u(x) = u(b)$.

Pertanto, se $u'(b) \neq 0$

$$d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_p\right) \le \frac{1}{u'(b)} d(p,u) + d\left(u^{-1}, p^{-1}\right).$$

Abbiamo quindi ottenuto una maggiorazione dell'errore sul valor medio in funzione di una misura dell'errore di approssimazione. In particolare, la disuguaglianza ottenuta mette in relazione la distanza tra i valori medi con la distanza tra le due funzioni e la distanza tra le funzioni inverse.

Sfruttando le proprietà di u, possiamo esprimere una relazione tra $d(p,u)$ e $d\left(u^{-1}, p^{-1}\right)$.

Infatti, dalla stretta concavità di u risulta la stretta decrescenza di u', e quindi, posto $h > 0$ e $k = u(x+h) - u(x) > 0$ (Grafico 1):

$$u'(x+h) < \frac{k}{h} < u'(x),$$

da cui, con $u'(x+h) \neq 0$ e $u'(b) \neq 0$:

$$h < \frac{k}{u'(x+h)} \leq \frac{k}{u'(b)}.$$

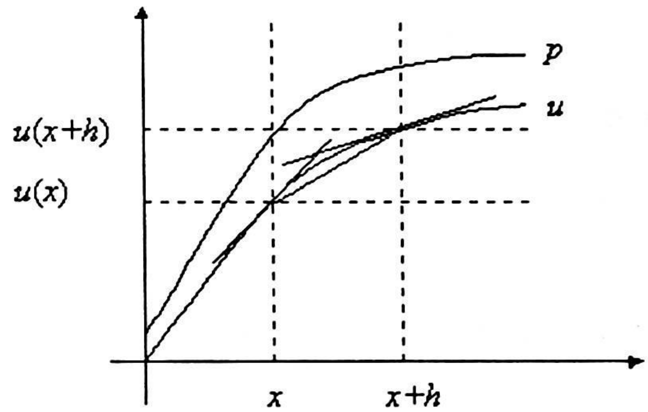

Grafico 1.

Se $k = d(p,u)$ e $h = d\left(u^{-1}, p^{-1}\right)$, si ha:

$$d\left(u^{-1}, p^{-1}\right) \leq \frac{d(p,u)}{u'(b)}.$$

In conclusione, si ottiene la seguente

Formula 1. $$0 \leq d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_p\right) \leq 2\frac{d(p,u)}{u'(b)}. \quad \blacksquare$$

2.2 Approssimazione per difetto

Procediamo nello stesso modo per considerare il caso in cui si abbia a che fare con una funzione q che approssimi per difetto la funzione u. Date le analogie, esporremo in modo sintetico il procedimento.

Sia quindi q una funzione continua, derivabile, strettamente crescente su I, con

$$q(x) \leq u(x) \quad \forall x \in I.$$

Si ha:

$$\int_I q(x)dF(x) \le \int_I u(x)dF(x) \Rightarrow \int_I u(x)dF(x) - \int_I q(x)dF(x) \ge 0$$

e

$$0 \le \int_I [u(x) - q(x)]dF(x) \le \max_{x \in I} |u(x) - q(x)|.$$

Con la stessa definizione di distanza usata nel caso precedente, possiamo scrivere:

$$\int_I q(x)dF(x) = \int_I u(x)dF(x) - k,$$

con

$$0 \le k \le \max_{x \in I} |u(x) - q(x)| = d(u, q).$$

Poniamo $y = \int_I u(x)dF(x)$ e $y - k = \int_I q(x)dF(x)$.

La distanza $d(\tilde{x}_u, \tilde{x}_q) = |\tilde{x}_u - \tilde{x}_q|$ fra i valori medi

$$\tilde{x}_u = u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right] \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_q = q^{-1}\left[\int_I q(x)dF(x)\right]$$

è uguale a:

$$d(\tilde{x}_u, \tilde{x}_q) = \left|q^{-1}\left[\int_I q(x)dF(x)\right] - u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right]\right| =$$
$$= |q^{-1}(y-k) - u^{-1}(y)|.$$

Va notato che, essendo $q(x) \le u(x) \quad \forall x \in I$, la relazione tra le funzioni inverse risulta scambiata rispetto al caso precedente, e dalla stretta crescenza di q e u, segue[3]

$$u^{-1}(x) \le q^{-1}(x) \quad \forall x \in J,$$

con $J = im(u) \cap im(q)$.

Posto

$$q^{-1}(y-k) = u^{-1}(y-k) + h.$$

[3] La dimostrazione è analoga a quella riportata nella nota 1.

con $0 \le h \le \max_{x \in J} \left| u^{-1}(x) - q^{-1}(x) \right| = d\left(u^{-1}, q^{-1}\right)$,

sarà:

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_q\right) &= \left| u^{-1}(y-k) + h - u^{-1}(y) \right| = \\ &= \left| u^{-1}(y-k) - u^{-1}(y) + h \right| \le \\ &\le \left| u^{-1}(y-k) - u^{-1}(y) \right| + |h| = \\ &= \left| D\left(u^{-1}\right)(c) \cdot (-k) \right| + |h| = \\ &= \left| D\left(u^{-1}\right)(c) \cdot k \right| + |h| \le \\ &\le \left| D\left(u^{-1}\right)(y) \cdot k \right| + |h| = \\ &= D\left(u^{-1}\right)(y) \cdot k + h \end{aligned}$$

con c punto di Lagrange, $y - k < c < y$.

Si giunge quindi alla stessa conclusione e, se $u'(b) \neq 0$, allora

$$d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_q\right) \le \frac{1}{u'(b)} d(u, q) + d\left(u^{-1}, q^{-1}\right).$$

Procedendo analogamente al caso precedente, si giunge alla stessa relazione che dipende soltanto dalla funzione u:

Formula 2. $$0 \le d\left(\tilde{x}_u, \tilde{x}_q\right) \le 2 \frac{d(u, q)}{u'(b)}. \quad \blacksquare$$

2.3 Il caso generale

Quanto ottenuto ci permette di generalizzare i risultati e di considerare una funzione che approssima la funzione u non necessariamente solo per difetto o per eccesso; da quanto visto sopra e seguendo il metodo utilizzato, disporre di due limitanti, una per eccesso e una per difetto, non porta a vantaggi in termini di approssimazione dell'errore, a meno che siano diverse le distanze tra tali funzioni e la funzione u. In questo caso risulta significativa soltanto la funzione avente distanza minore da u.

Consideriamo una funzione r continua, derivabile e strettamente crescente su I.

Definiamo i seguenti insiemi:

$$I^+ = \{x \in I : r(x) \geq u(x)\} \quad \text{e} \quad I^- = \{x \in I : r(x) < u(x)\}$$

e sia inoltre (Grafico 2)

$$d^+(u,r) = k_1 = \max_{x \in I^+} |u(x) - r(x)| \quad \text{e} \quad d^-(u,r) = k_2 = \max_{x \in I^-} |u(x) - r(x)|.$$

Per la funzione $r^*(x) = r(x) + k_2$ valgono[4] le ipotesi definite al precedente punto 2.1 con

$$d(r^*, u) = k_1 + k_2 = d^+(u,r) + d^-(u,r).$$

Essendo, per l'invarianza della media rispetto a trasformazioni lineari affini, $\tilde{x}_{r^*} = \tilde{x}_r$ e quindi $d(\tilde{x}_r, \tilde{x}_u) = d(\tilde{x}_{r^*}, \tilde{x}_u)$, risulta

Formula 3. $$0 \leq d(\tilde{x}_r, \tilde{x}_u) \leq 2\frac{d^+(u,r) + d^-(u,r)}{u'(b)}. \quad ■$$

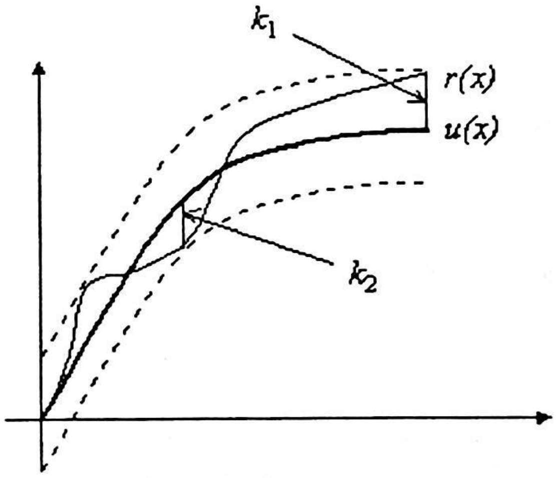

Grafico 2.

Ovviamente, le disuguaglianze ottenute sono significative se forniscono informazioni aggiuntive rispetto a quelle ottenibili sulla base delle proprietà della funzione di trasformazione e della media $\tilde{x}$.

---

[4] Analogo ragionamento può essere fatto ponendo $r^*(x) = r(x) - k_1$, considerando il precedente punto 2.2.

Infatti per esempio, essendo tutte le quantità $\widetilde{x}_u, \widetilde{x}_p, \widetilde{x}_q, \widetilde{x}_r$ comprese tra 0 e b, lo è anche la distanza tra due di questi valori. Il termine maggiorante ottenuto in precedenza dovrà quindi essere (almeno) minore di b.

Inoltre, se supponiamo che $im(u) \subseteq I$ [5], essendo u strettamente concava e strettamente crescente, u^{-1} risulta strettamente convessa[6]. Pertanto dalla disuguaglianza di Jensen si ottiene

$$u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right] \le \int_I \left(u^{-1} \circ u\right)(x)dF(x) = \int_I xdF(x) = m$$

dove m è la media di x e quindi $\widetilde{x}_u \le m$, ritrovando la caratteristica relativa all'avversione al rischio.

3. Approssimazioni con minori informazioni sulla funzione di trasformazione

Nel caso in cui non siano disponibili informazioni aggiuntive sulla funzione di trasformazione oltre alle consuete proprietà, si può cercare una maggiorazione e una minorazione del valore medio sulla base di due funzioni, una maggiorante e una minorante della funzione stessa.

3.1 Sia quindi u continua, derivabile, strettamente crescente e strettamente concava su I, con $u(0)=0$.

Siano u_1, u_2 due funzioni continue, derivabili, strettamente crescenti su I, rispettivamente minorante e maggiorante di u:

---

[5] Se così non fosse, potremmo applicare una trasformazione lineare affine alla funzione u.

[6] Se u è strettamente concava, allora, $\forall x \ne x_0$, si ha

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Posto $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $x = u^{-1}(y)$ e $x_0 = u^{-1}(y_0)$, si ottiene

$$y < y_0 + \frac{1}{D\left(u^{-1}\right)(y_0)}\left(u^{-1}(y) - u^{-1}(y_0)\right),$$

con $D\left(u^{-1}\right)(y_0) > 0$, essendo la funzione strettamente crescente.

Pertanto, essendo

$$u^{-1}(y) > u^{-1}(y_0) + D\left(u^{-1}\right)(y_0)(y - y_0)$$

$$u_1(x) \le u(x) \le u_2(x) \quad \forall x \in I.$$

Si ha

$$\int_I u_1(x)dF(x) \le \int_I u(x)dF(x) \le \int_I u_2(x)dF(x)$$

e

$$u_2^{-1}(x) \le u^{-1}(x) \le u_1^{-1}(x) \quad \forall x \in im(u_1).$$

Pertanto

$$u_2^{-1}\left(\int_I u_1(x)dF(x)\right) \le u^{-1}\left(\int_I u(x)dF(x)\right) \le u_1^{-1}\left(\int_I u_2(x)dF(x)\right)$$

ossia

Formula 4. $$u_2^{-1}\left(\int_I u_1(x)dF(x)\right) \le \tilde{x}_u \le u_1^{-1}\left(\int_I u_2(x)dF(x)\right). \quad \blacksquare$$

3.2 Se, oltre alle ipotesi fatte, supponiamo di conoscere la media della trasformata di x tramite u, $m = \int_I u(x)dF(x)$, pur non essendo nota la funzione di trasformazione, allora per la crescenza di u_1 e u_2, vale la doppia disuguaglianza più restrittiva

$$u_2^{-1}\left(\int_I u(x)dF(x)\right) \le \tilde{x}_u \le u_1^{-1}\left(\int_I u(x)dF(x)\right)$$

ossia

$$u_2^{-1}(m) \le \tilde{x}_u \le u_1^{-1}(m).$$

4. Funzione di trasformazione polinomiale

Nell'ambito della teoria delle decisioni, l'uso di polinomi (di ordine superiore al secondo) come funzioni di utilità è stato ampiamente dibattuto, e ne sono state discusse le caratteristiche, specialmente in termini di relazione con i momenti della distribuzione (Benishay, 1987, 1992). Si possono inoltre definire condizioni sui valori dei coefficienti del polinomio atte a garantire i requisiti abituali delle funzioni di utilità, in termini di utilità

---

la funzione u^{-1} risulta strettamente convessa.

marginale e di avversione al rischio, assoluta e relativa (Pratt, 1964 e Arrow, 1965; Rossi e Tibiletti, 1996).

Vogliamo qui, nel caso di funzione di utilità polinomiale, analizzare l'effetto sulla media indotto da un cambiamento del grado del polinomio considerato.

Pertanto, nell'espressione

$$\tilde{x} = u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right]$$

faremo riferimento a funzioni del tipo[7]

$$u(x) = P_n(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n .$$

Supponendo $a_1 \neq 0$, possiamo considerare tale polinomio come una serie del tipo

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x^i \quad , \text{con} \quad a_i = 0 \quad \forall i > n$$

e pertanto sfruttare il procedimento di inversione delle serie[8] per determinare la funzione u^{-1}.

Infatti, data una serie del tipo

$$y = y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \qquad a_1 \neq 0$$

la sua inversa[9] sarà, formalmente,

$$x = x(y) = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots .$$

Sostituendo nella prima uguaglianza l'espressione di x ottenuta dalla seconda espressione e applicando il principio di identità dei polinomi si possono determinare i primi coefficienti:

$$y = a_1\left(b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots\right) + a_2\left(b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots\right)^2 + \ldots =$$

$$= a_1b_1y + \left(a_1b_2 + a_2b_1^2\right)y^2 + \ldots$$

[7] Rispetto alla forma generale

$$u(x) = P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

si considera per semplicità il caso $a_0 = 0$, $x_0 = 0$.

[8] In alternativa, si possono usare le forme risolutive per i polinomi di grado fino al quarto.

[9] Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'inversa, per la quale sia $y(0) = 0$, è che sia $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$ (Cartan, 1961)

Ponendo

$$\begin{cases} a_1 b_1 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$b_1 = a_1^{-1}$$

$$b_2 = -a_1^{-3} a_2 .$$

Procedendo ricorsivamente si ottengono i coefficienti successivi (Abramowitz e Stegun, 1972):

$$b_3 = a_1^{-5}\left(2a_2^{\ 2} - a_1 a_3\right)$$

$$b_4 = a_1^{-7}\left(5a_1 a_2 a_3 - a_1^{\ 2} a_4 - 5a_2^{\ 3}\right)$$

$$b_5 = a_1^{-9}\left(6a_1^{\ 2} a_2 a_4 + 3a_1^{\ 2} a_2 a_3 + 14a_2^{\ 4} - a_1^{\ 3} a_5 - 21a_1 a_2^{\ 2} a_3\right)$$

$$b_6 = a_1^{-11}\left(7a_1^{\ 3} a_2 a_5 + 7a_1^{\ 3} a_3 a_4 + 84a_1 a_2^{\ 3} a_3 - a_1^{\ 4} a_6 - 28a_1^{\ 2} a_2 a_3^{\ 2} - 42a_2^{\ 5} - 28a_1^{\ 2} a_2^{\ 2} a_4\right)$$

$$b_7 = a_1^{-13}\left(8a_1^{\ 4} a_2 a_6 + 8a_1^{\ 4} a_3 a_5 + 4a_1^{\ 4} a_4^{\ 2} + 120a_1^{\ 2} a_2^{\ 3} a_4 + 180a_1^{\ 2} a_2^{\ 2} a_3^{\ 2} + \right.$$
$$\left. + 132a_2^{\ 6} - a_1^{\ 5} a_7 - 36a_1^{\ 3} a_2^{\ 2} a_5 - 72a_1^{\ 3} a_2 a_3 a_4 - 12a_1^{\ 3} a_3^{\ 3} - 330a_1 a_2^{\ 4} a_3\right)$$

.....

.....

Il generico termine n-esimo b_n, che dipende dai termini $a_1, a_2, \ldots, a_n$, può essere espresso (si veda Morse e Feshbach, 1953, pagina 412 - Inversion of series) come:

$$b_n = \frac{1}{n a_1^{\ n}} \sum_{s,\,t,\,u,\ldots} (-1)^{s+t+u+\ldots} \left[\frac{n(n+1)\ldots(n-1+s+t+u+\ldots)}{s!\,t!\,u!\ldots} \right] \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^s \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^t \ldots$$

dove

$$s + 2t + 3u + \ldots = n - 1 .$$

Il calcolo di $\tilde{x} = u^{-1}\left[\int_I u(x)dF(x)\right]$ sarà quindi influenzato dal grado dei due polinomi u e u^{-1}: scelto infatti il grado di u, occorrerà stabilire a quale grado arrestare il polino mio inverso u^{-1}.

Considerando per u un polinomio di grado n, possiamo porre:

$$\int_I u(x)dF(x) = \int_I \left(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right)dF(x) =$$

$$= \int_I a_1 x dF(x) + \int_I a_2 x^2 dF(x) + \ldots + \int_I a_n x^n dF(x) =$$

$$= a_1 \int_I x dF(x) + a_2 \int_I x^2 dF(x) + \ldots + a_n \int_I x^n dF(x) =$$

$$= a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots + a_n \mu_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

dove μ_i è il momento i-esimo della distribuzione, e pertanto $\tilde{x} = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right]$.

La serie inversa di u sarà del tipo

$$b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i y^i$$

e ne considereremo, per la funzione u^{-1} la ridotta m-esima, ossia il polinomio di grado m:

$$u^{-1}(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_m y^m = \sum_{i=1}^{m} b_i y^i .$$

Per $y \to 0$, l'errore commesso sarà un infinitesimo di ordine maggiore o uguale a $m+1$.

Volendo determinare l'influenza sul valore di $\tilde{x}$ del cambiamento di grado dei due polinomi, consideriamo separatamente i seguenti casi:

- a parità di grado di u, come varia $\tilde{x}$ arrestando il polinomio u^{-1} al grado $m+1$ anziché m
- a parità di grado di u^{-1}, come varia $\tilde{x}$ arrestando il polinomio u al grado $n+1$ anziché n.

Indichiamo con ${}_n\widetilde{x}_m$ il valore medio ottenuto con un polinomio u di grado n ed un polinomio u^{-1} di grado m.

4.1 Nel primo caso, fissato n, si ha:

$$ {}_n\widetilde{x}_m = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right] = b_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^2 + \ldots + b_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^m $$

e

$$ {}_n\widetilde{x}_{m+1} = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right] = b_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^2 + \ldots + b_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^{m+1}. $$

Quindi

Formula 5.

$$ {}_n\widetilde{x}_{m+1} = {}_n\widetilde{x}_m + b_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^{m+1}. \quad \blacksquare $$

4.2 Nel secondo caso, fissato m, si ha

$$ {}_n\widetilde{x}_m = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right] = b_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^2 + \ldots + b_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^m $$

e

$$ {}_{n+1}\widetilde{x}_m = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i\right] = b_1\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i\right)^2 + \ldots + b_m\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i\right)^m. $$

Effettuando la sostituzione

$$ \sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + a_{n+1}\mu_{n+1}, $$

per il generico j-esimo addendo ($j = 1, 2, \ldots, m$), la differenza fra le due espressioni è data da

$$ b_j\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + a_{n+1}\mu_{n+1}\right)^j - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right)^j\right]. $$

L'espressione in parentesi quadra può essere riscritta come

$$\sum_{k=0}^{j}\left[\binom{j}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^{j-k} \cdot (a_{n+1}\mu_{n+1})^k\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^j = \sum_{k=1}^{j}\left[\binom{j}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^{j-k} \cdot (a_{n+1}\mu_{n+1})^k\right]$$

In definitiva, si ha

Formula 6. $${}_{n+1}\widetilde{x}_m = {}_n\widetilde{x}_m + \sum_{j=1}^{m}\left\{b_j \sum_{k=1}^{j}\left[\binom{j}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^{j-k} \cdot (a_{n+1}\mu_{n+1})^k\right]\right\}. \quad \blacksquare$$

4.3 Infine, se si considera simultaneamente l'incremento del grado dei due polinomi u e u^{-1}, rispettivamente da n a $n+1$ e da m a $m+1$, si ottiene la seguente

Formula 7.

$${}_{n+1}\widetilde{x}_{m+1} = {}_n\widetilde{x}_m + \sum_{j=1}^{m}\left\{b_j \sum_{k=1}^{j}\left[\binom{j}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^{j-k} \cdot (a_{n+1}\mu_{n+1})^k\right]\right\} + b_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \mu_i\right)^{m+1}. \quad \blacksquare$$

Poiché l'interpretazione più importante riguarda la teoria dell'utilità e una funzione di utilità polinomiale dovrebbe, nei casi più tradizionali, avere coefficienti di segno alterno - con il primo positivo - mentre non è detto che i momenti della distribuzione della variabile aleatoria siano tutti positivi, non è immediato ricavare forme generali più semplici di tali espressioni. Questo studio non esaurisce sicuramente l'argomento che potrà essere sviluppato in prosieguo di tempo.

Bibliografia

Abramowitz M., Stegun C.A., (eds), Handbook of Mathematical Functions, Graphs and Mathematical Tables, 9th printing, Dover, New York, 1972.

Arrow K., Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Lectures, Helsinki, 1965.

Benishay H., A Fourth-Degree Polynomial Utility Function and its Implications for Investors' Responses toward Four Moments of the Wealth Distribution, Journal of Accounting, Auditing and Finance, vol. 2-3, p. 203-238, 1987.

Benishay H., The Pratt-Arrow Requirement in a Fourth Degree Polynomial Utility Function, Journal of Accounting, Auditing and Finance, vol. 7, p. 97-115, 1992.

Cartan H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris, 1961.

de Finetti B., Sul concetto di media, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 2, 1931.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, seconda edizione, 1952.

Morse P.M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, Part I, McGraw-Hill, New York, p. 411-413, 1953.

Pratt J.W., Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica 32, 1-2, p. 122-136, 1964.

Rossi G.A., Rational Behaviour: a Comparison between the Theory Stemming from de Finetti's Work and some other Leaing Theories, Theory and Decision, 36, p.257-275, 1994.

Rossi G.A., Tibiletti L., Higher Order Polynomial Utility Functions: Advantages in their Use, Quademi del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Umane "Diego de Castro", n. 1, Sezione Matematica, 1996.

von Neumann J., Morgenstem O., Theory of games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, 1944.