Bollettino dell'Unione Matematica Italiana
https://doi.org/10.1007/s40574-023-00374-8

Tra le carte di Gino Fano: le ricerche sulle varietà a tre dimensioni

Elena Scalambro[1]

Received: 12 March 2023 / Accepted: 17 June 2023

Abstract

This paper investigates G. Fano's contributions to the study of three-dimensional varieties—the so called Fano threefolds—starting from unpublished manuscripts kept in Turin's Special Mathematical Library. The main aspects examined are the evolution of the research path, the placing into the wake of the Italian school of algebraic geometry, Fano's links with the English geometers and his legacy on later studies.

Keywords Gino Fano · Fano threefolds · Manuscripts · Italian School of algebraic geometry

Nonostante la vastità degli interessi di ricerca di Gino Fano (1871–1952) [10], uno dei primi della folta schiera di allievi di C. Segre, i suoi contributi maggiori riguardano lo studio e alla classificazione birazionale delle varietà algebriche tridimensionali (o threefolds), ambito cui il suo nome è ancora oggi associato. L'importanza delle sue ricerche in questo settore era già riconosciuta dai contemporanei di Fano come testimoniato da A. Terracini che, riferendosi all'analisi della cubica di $\mathbb{P}^4$, afferma:

> Era un problema difficile e refrattario, che fin dai primi studi di geometria algebrica sulle varietà ha dovuto imporsi all'attenzione dei geometri «suscitando» come dice lo stesso Fano «viva curiosità», dopo i classici risultati concernenti le cubiche piane e le superficie cubiche generali. I termini impiegati da Fano mi pare implichino una certa modestia: era un problema dalla cui stessa posizione già si poteva presumere che avrebbe dato luogo, nelle mani dello stesso Fano, a sviluppi atti ad illuminare in qualche modo la natura delle varietà algebriche tridimensionali, tanto più riposta nei confronti di quella delle curve e delle superfici [52, p. 488].

Se, da un lato, le ricerche di Fano si sviluppano intorno a una delle questioni centrali della geometria algebrica in campo internazionale, dall'altro si collocano nel solco della

L'autrice fa parte del GNSAGA (INdAM). Nel testo si fa uso delle seguenti abbreviazioni: BSMT = Biblioteca Speciale di Matematica di Torino; *BSP* = Beniamino Segre's Papers; CA = Caltech Archives; c./cc. = carta/e; *FFa* = Fondo Gino Fano; *r* = *recto* della carta; *v* = *verso* della carta.

Elena Scalambro
elena.scalambro@unito.it

1 Dip. di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino, Turin, Italy

Published online: 30 July 2023

continuità con la tradizione geometrica della Scuola di Segre. Si presentano infatti come la naturale estensione in dimensione superiore dei problemi relativi alla classificazione di curve e superfici e sono caratterizzate da un approccio prevalentemente proiettivo che "porta i geometri italiani a divinazioni, più che a risultati, notevoli, ma costituisce, in questo campo più ancora che in altri, il vero limite della Scuola" [5, p. 257].

Nella letteratura relativa alle ricerche di Fano sulle threefolds, emergono due tendenze complementari e talvolta contrapposte. Sul versante storico è ormai consolidato che gli studi di Fano, soprattutto quelli dell'ultimo periodo, si collocano nella fase del declino della Scuola italiana di geometria algebrica, quando i risultati erano intuiti piuttosto che dimostrati. D'altra parte, in ambito matematico, è ampiamente riconosciuta l'originalità delle sue idee geometriche che gli consentono di affrontare questioni complesse, senza avere a disposizione degli strumenti adeguati. La creatività di Fano in campo matematico si rivela così fondamentale, permettendogli di

> tackle these problems almost empty-handed because there was no foundation for higher dimensional algebraic varieties. The modern development has shown that Fano was essentially right and, once the foundations were available, his methods were correct and effective. [46, p. 224]

L'obiettivo di fornire una visione unitaria e storicamente coerente di tali ricerche – unitamente all'individuazione di alcune carte manoscritte inedite risalenti ai primordi degli studi sulle threefolds – porta a riconsiderare questa messe di lavori e risultati di Fano, prestando particolare attenzione al contesto all'interno del quale sono scaturite: quello della Scuola italiana di geometria algebrica nella prima metà del Novecento.

1 Dagli albori delle ricerche sulle threefolds alle carte manoscritte

Il punto di partenza delle ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali si colloca all'interno della tradizione geometrica italiana. Egli, infatti, prende le mosse dal problema di Lüroth in dimensione superiore con l'obiettivo di estendere i risultati di razionalità e di classificazione ottenuti da G. Castelnuovo e F. Enriques per le superfici qualche anno prima [7].

Solitamente l'esordio delle ricerche di Fano in questo settore è collocato nel 1904, quando pubblica un primo lavoro sulla varietà cubica generale di $\mathbb{P}^4$ priva di punti doppi [16]. Al suo interno, con un approccio prettamente proiettivo, sono determinati gli spazi tangenti alla threefold in 2, 3 o 4 punti distinti. In realtà, l'interesse di Fano per le varietà tridimensionali, almeno in relazione al loro gruppo delle trasformazioni proiettive, risale a una decina di anni prima. Nel 1895, confrontandosi con Castelnuovo che in contemporanea si sta occupando delle questioni di razionalità delle superfici, Fano afferma:

> Ho continuato a occuparmi un po' delle M_3 di S_4 con un gruppo transitivo di trasformazioni projettive in sé [...]. Io non ho ancora scritto niente, ma ho abbozzati, in mente, vari casi; si trova, in non so quanti modi, la M_3^3 luogo delle rette che si appoggiano a due coniche con 1 punto comune, e poi delle varietà, che forse si ridurranno a un caso solo [...]. Non so cosa ne caverò ancora in queste vacanze: difficoltà gravi forse non ce ne saranno, ma sono questioni estremamente lunghe.[1]

[1] [36]: G. Fano a G. Castelnuovo, Colognola ai Colli 17.9.1895. Fano denota con S_n lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ e con M_3 le varietà algebriche tridimensionali.

Fano inizia a dedicarsi sistematicamente allo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli con il lavoro presentato all'Accademia delle Scienze di Torino nel 1908, dove dichiara:

> per le varietà algebriche a tre dimensioni l'annullarsi di tutti i generi (analoghi ai precedenti) non è ancora condizione sufficiente perché esse possano rappresentarsi biunivocamente sullo spazio S_3; e scopo di questa breve Nota è appunto di assodare l'esistenza – che si presenta per la prima volta nel caso di varietà a tre dimensioni – di tipi birazionalmente distinti di varietà aventi tutti i generi nulli. [17, p. 973]

Mentre il problema di Lüroth ha risposta affermativa nei casi di dimensione uno e due, il lavoro di Fano del 1908 e le successive ricerche di Enriques [15] conducono a una prima intuizione del fatto che la questione ha risposta negativa per varietà di dimensione tre. Emerge inoltre l'impossibilità di fornire un criterio di razionalità per le varietà a tre dimensioni analogo a quello di Castelnuovo per le superfici (1896), basato sull'annullarsi di alcuni invarianti birazionali come i plurigeneri: lo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli diventa una delle principali vie di ricerca, all'interno della quale Fano si inserisce.

Da questo momento, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali si dipanano in più direzioni, tra cui spicca l'introduzione delle varietà V oggi note come Fano threefolds, caratterizzate modernamente dalla proprietà di avere il divisore anticanonico $|-K_V|$ ampio.

Per proseguire è necessario introdurre alcuni elementi fondamentali della notazione adottata da Fano. Egli considera le famiglie di threefolds M_3^{2p-2} immerse nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{p+1}$ di grado (o "ordine" nella terminologia di Fano) $2p-2$ e con curve-sezioni di genere p [22, pp. 116–117]. Tali varietà tridimensionali contengono come sezioni iperpiane delle superfici $F^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$, aventi quindi il medesimo ordine della varietà di partenza e tutti i plurigeneri uguali a 1; dal punto di vista moderno, sono superfici del tipo K3. Dall'intersezione di due generiche sezioni iperpiane, si ottengono delle curve-sezioni canoniche $C_p^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ dello stesso ordine e di genere p.

Queste particolari varietà di dimensione tre sono introdotte da Fano nel 1928, durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna [22]. Vi sono quindi vent'anni "di silenzio" che separano l'ultimo lavoro a stampa sulle Fano threefolds e la comunicazione presentata a Bologna. La ragione di una tale distanza temporale non risiede però in una perdita di interesse da parte di Fano per questo tema, quanto piuttosto nella necessità di trovare ed elaborare nuovi metodi e strumenti per affrontare la questione, anche procedendo per tentativi ed esplorando strade differenti, come emerge da alcuni appunti sulle varietà tridimensionali conservati presso la Biblioteca Speciale di Matematica dell'Università di Torino,[2] che si articolano in due parti distinte.

Il primo *corpus* di carte [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, cc. 125–130] è costituito dalle minute di alcune lezioni dedicate alle principali differenze che si incontrano nello studio delle superfici algebriche e in quello delle threefolds che Fano avrebbe voluto tenere durante il ciclo di seminari che era stato invitato a presentare ad Aberystwyth nel semestre invernale del 1923. Come dichiarato da lui stesso, questi argomenti non erano poi stati affrontati per ragioni di tempo [19, p. 3]. In apertura, Fano si rifà alle ricerche di Severi degli anni 1906–1909 sulle varietà di dimensione superiore, da cui riprende alcune nozioni fondamentali come quelle di genere geometrico e aritmetico, connessione lineare, irregolarità superficiale e tridimensionale [49]. La posizione iniziale assunta da Fano per affrontare il problema delle varietà tridimensionali consiste nel procedere per analogia con le superfici ma, come mette in

[2] La maggior parte di tali documenti è disponibile in formato digitale in [37].

luce, emergono subito alcune differenze importanti. La prima di esse riguarda alcuni caratteri del sistema canonico, che Fano introduce nei termini seguenti:

> Sulle superficie, il sistema canonico, supposto esistente, è il sistema $\left|C^{'} - C\right|$, liberato dalle eventuali sue componenti eccezionali. E anche se esso non esiste, si possono calcolare i caratteri, genere ω_1 e grado ω_2, del sistema virtuale $\left|C^{'} - C\right|$, che sono invarianti relativi. E tali caratteri sono indipendenti dal genere, in particolare dal genere aritmetico della superficie. Similmente, sopra una V_3, il sistema $\left|F^{'} - F\right|$ è indipendente da F, e, a meno di superficie eccezionali (trasformabili in punti o linee semplici) coincide col sistema canonico, supposto esistente. Indicando con $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ i caratteri virtuali = grado, genere curvilineo, genere aritmetico = di una superficie $\left|F^{'} - F\right|$ si possono questi valutare virtualmente, anche nell'ipotesi che non esista effettivamente una superficie $F^{'} - F$, e quindi nemmeno il sistema canonico. Essi sono invarianti relativi. [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, c. 126*v*].

Tuttavia, a differenza di quanto accade nel caso delle superfici, i caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ appena introdotti non sono indipendenti dal genere aritmetico della threefold P_a, bensì risultano ad esso legati dalla relazione

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Come sottolineato da Fano, i caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ delle varietà tridimensionali erano stati oggetto di studio anche da parte di Marino Pannelli, cultore di geometria algebrica e figura di secondo piano, considerato da Severi – come riporta Tricomi – "uno dei migliori fra gli studiosi italiani di quella disciplina non pervenuti ad una cattedra universitaria" [54, p. 83]. In particolare, Pannelli aveva determinato alcune relazioni tra i caratteri numerici delle threefolds invarianti per trasformazioni birazionali tra cui Ω_2, invariante relativo che tornerà all'interno del secondo gruppo di carte manoscritte di Fano.

Ciò che per Fano costituisce la seconda "differenza notevole" tra le superfici algebriche e le threefolds riguarda le conseguenze dell'annullarsi dei plurigeneri: infatti

> mentre le prime se hanno tutti i generi nulli (genere e plurigeneri) sono razionali, e basta anzi siano nulli $p_a = P_2 = 0$, esistono V_3 a generi tutti nulli eppure non razionali [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, c. 128*r*].

Proseguendo il parallelo con la teoria delle superfici, Fano osserva che le superfici razionali, le involuzioni sulle superfici razionali e le superfici contenenti un fascio razionale di curve razionali sostanzialmente coincidono, ossia costituiscono classi birazionalmente equivalenti di enti algebrici. Invece, passando alle threefolds,

> si hanno 3 diversi tipi di enti, in generale non riducibili l'uno all'altro:
>
> 1) V_3 razionali = cioè rappresentabili su S_3.
> 2) Involuzioni sulle V_3 razionali o in S_3 = trasformate (semplicemente) razionali di S_3.
> 3) V_3 contenenti una congruenza del 1° ordine di curve C razionali. [*ivi*, c. 130*r*]

Fano rivela così qual era stata l'idea che lo aveva guidato nella stesura del suo lavoro del 1908. Qui era giunto all'irrazionalità delle due threefolds $M_3^4 \subset \mathbb{P}^4$ e $M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$ prendendo in esame i sistemi lineari di superfici regolari di generi uno in esse contenuti e il gruppo delle trasformazioni birazionali di tali threefolds, con l'obiettivo di individuare qualche proprietà differente da quelle dei medesimi enti di $\mathbb{P}^3$. In questo modo, aveva potuto dedurre l'impossibilità di rappresentare le threefolds considerate su $\mathbb{P}^3$, ovvero la loro irrazionalità [17, pp. 973–974]. Ad Aberystwyth Fano illustra infine il caso particolare delle threefolds a superfici-sezioni razionali – ossia "contenenti un sistema lineare semplice di superficie razionali" [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, c. 130*v*] – per le quali ha già ottenuto la razionalità, con l'unica eccezione della cubica di $\mathbb{P}^4$.

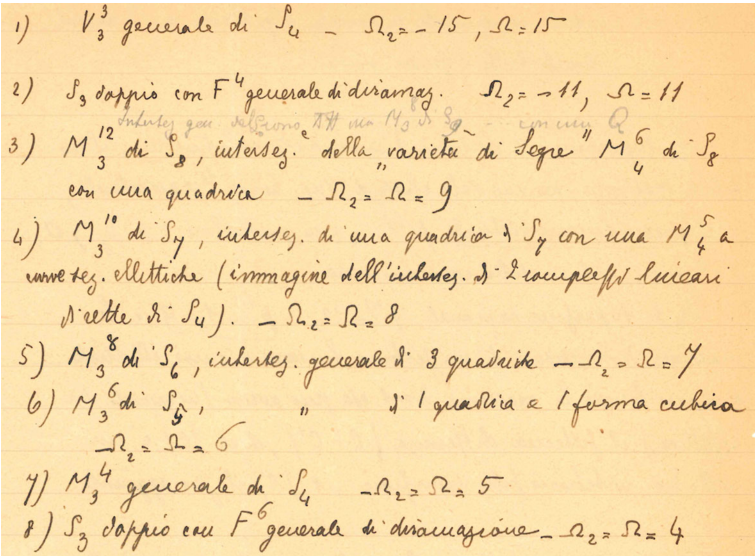
Dal titolo *Appunti e vedute concernenti le varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, cc. 52, 45, 46], il secondo gruppo di carte manoscritte contiene gli studi preliminari della comunicazione presentata da Fano a Bologna. Le minute, probabilmente redatte tra la primavera e l'estate del 1928, portano alla luce una prima classificazione delle Fano threefolds M_3 basata sul carattere numerico Ω_2. All'interno di questi appunti, Fano affronta la questione partendo dall'esigenza di individuare un carattere aritmetico analogo all'invariante di Castelnuovo-Enriques ω per le superfici, invariante relativo il cui valore massimo per una classe di superfici birazionalmente equivalenti è però un invariante assoluto, cioè il genere lineare virtuale $p^{(1)}$ della curva canonica. Ancora una volta, come nelle carte di Aberystwyth, dalle parole di Fano emerge il tentativo di procedere in analogia con lo studio delle superficie algebriche:

> Per le varietà a 3 dimensioni, il carattere analogo a ω è Ω_2, genere aritmetico virtuale della superficie canonica. Anch'esso è un invariante relativo; ma un suo valore estremo, per una data classe di enti birazionalmente identici, costituirà del pari, per la classe, un invariante assoluto. Come tale, conviene prendere il valore assoluto massimo di Ω_2, per enti della classe; lo indico con Ω. [*ivi*, c. 52*r*].

Fano, quindi, considera il massimo del valore assoluto degli Ω_2 calcolati come generi aritmetici virtuali delle superfici canoniche per una certa famiglia di threefolds birazionalmente equivalenti. In tal senso, Ω risulta un invariante assoluto della classe di birazionalità. È poi fornita la prima classificazione delle Fano threefolds basata su questo invariante che sostanzialmente coincide con quella successivamente esposta a Bologna, con l'unica eccezione del caso $p = 8$ (Fig. 1). La differenza primaria con la comunicazione presentata al Congresso risiede nel fatto che a Bologna Fano classifica invece tali varietà in base al valore di p, genere geometrico delle curve-sezioni. Prendendo in considerazione il manoscritto del 1928 e il relativo lavoro a stampa del 1931, la prima classificazione sistematica di Fano delle M_3^{2p-2} può essere sintetizzata come in (Tab. 1).[3]

Nel manoscritto del 1928 la classificazione è seguita da alcune osservazioni. In primo luogo, Fano nota qui per la prima volta che le threefolds $M_3^{12}, M_3^{10}, M_3^8, M_3^6, M_3^4$ sono immerse in $\mathbb{P}^{p+1}$ e hanno grado $2p-2$ e curva-sezione canonica (ovvero – nel linguaggio di Fano – sono del tipo $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$), osservazione che a Bologna estenderà alle $M_3^{14}, M_3^{16}, M_3^{24}$. La seconda considerazione riguarda il fatto che le quattro varietà tridimensionali $M_3^{12}, M_3^{10}, M_3^8, M_3^6$ si possono ottenere come intersezioni di quadriche con varietà a quattro dimensioni $M_4^{p-1} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ a curve-sezioni ellittiche e, fatto ancor più notevole, esse corrispondono "ai soli 4 tipi di $M_4^{p-1}(p = 4, 5, 6, 7)$ che non sono coni" [*ivi*, c. 52*v*]. Nel caso in cui M_4^{p-1} sia un $\mathbb{P}^0$-cono, si ricade nei due casi di ricoprimenti doppi di $\mathbb{P}^3$. È, questa, una considerazione che non sarà riproposta da Fano a Bologna né nei lavori a stampa successivi. Terzo e ultimo rilievo, invece ampiamente ripreso, modificato e ampliato

3 In tabella si adotta la seguente notazione: * = questa threefold non compare nelle carte manoscritte; $\Leftrightarrow$ = varietà birazionalmente equivalenti; $V(d) \subset \mathbb{P}^N$ = ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^N$; $V(d_1, \ldots, d_k) \subset \mathbb{P}^N$ = intersezione completa di k ipersuperfici di grado $d_1, \ldots, d_k$ in $\mathbb{P}^N$; $Gr(n, k)$ = Grassmanniana dei sottospazi vettoriali $(k+1)$-dimensionali di uno spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$ o, equivalentemente, Grassmanniana di $\mathbb{P}^k$ in $\mathbb{P}^n$; H_i = iperpiano.


1) V_3^3 generale di S_4 – $\Omega_2 = -15$, $\Omega = 15$

2) S_3 doppio con F^4 generale di diramaz. $\Omega_2 = -11$, $\Omega = 11$

3) M_3^{12} di S_8, intersez.e della „varietà di Segre" M_4^6 di S_8 con una quadrica – $\Omega_2 = \Omega = 9$

4) M_3^{10} di S_7, intersez. di una quadrica di S_7 con una M_4^5 a curve sez. ellittiche (immagine dell'intersez. di 2 complessi lineari di rette di S_4). – $\Omega_2 = \Omega = 8$

5) M_3^8 di S_6, intersez. generale di 3 quadriche – $\Omega_2 = \Omega = 7$

6) M_3^6 di S_5, " di 1 quadrica e 1 forma cubica – $\Omega_2 = \Omega = 6$

7) M_3^4 generale di S_4 – $\Omega_2 = \Omega = 5$

8) S_3 doppio con F^6 generale di diramazione – $\Omega_2 = \Omega = 4$

Fig. 1 Prima classificazione delle threefolds nelle minute di Fano del 1928

Tab. 1 Classificazione delle Fano threefolds nei lavori di Fano, a confronto con la loro descrizione moderna

p	$\lvert\Omega_2\rvert$	M_3^{2p-2}	**Descrizione moderna sintetica**
13	15	$V_3^3 \subset \mathbb{P}^4 \Leftrightarrow M_3^{24} \subset \mathbb{P}^{14}$	Threefold cubica $V(3) \subset \mathbb{P}^4$
9	11	$\mathbb{P}^3$'doppio'$\Leftrightarrow M_3^{16} \subset \mathbb{P}^{10}$	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 4
8	*	$M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$	$Gr(1,5) \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot H_5 \subset \mathbb{P}^9$
7	9	$M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$	Intersezione di una quadrica generica di $\mathbb{P}^8$ con l'immagine di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ immerso in $\mathbb{P}^8$ mediante il morfismo di Segre
6	8	$M_3^{10} \subset \mathbb{P}^7$	$Gr(1,4) \cdot V(2) \cdot H_1 \cdot H_2 \subset \mathbb{P}^7$
5	7	$M_3^8 \subset \mathbb{P}^6$	$V(2,2,2) \subset \mathbb{P}^6$
4	6	$M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$	$V(3,2) \subset \mathbb{P}^5$
3	5	$V_3^4 = M_3^4 \subset \mathbb{P}^4$	Ipersuperficie quartica $V(4) \subset \mathbb{P}^4$
2	4	$\mathbb{P}^3$'doppio'	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 6

nelle pubblicazioni posteriori al 1928, è la possibilità di particolarizzare le Fano threefolds M_3^{2p-2}, riconducendole a varietà dello stesso tipo aventi un valore maggiore di Ω. Questo significa che – tramite un'apposita mappa razionale sulla quale Fano, tuttavia, non fornisce alcuna informazione – una particolare M_3^{2p-2} può essere ridotta ad una Fano threefold con Ω più alto, che è quindi immersa in uno spazio proiettivo di dimensione maggiore.

A differenza del lavoro pubblicato negli *Atti* dell'ICM di Bologna, nelle carte manoscritte Fano dichiara esplicitamente il proprio "piano di azione", delineando così una sorta di agenda di lavoro. Scrive infatti che le sue ricerche,

> intese a dimostrare, per quanto possibile, la irrazionalità di alcune fra queste varietà, sono state essenzialmente dirette a studiare:
> ***a.*** i sistemi lineari almeno ∞^2 di superficie regolari aventi tutti i generi $= 1$;
> ***b.*** l'insieme (gruppo) delle eventuali trasformazioni birazionali;
> e a cercare di trovare nei sistemi *a.* e nelle trasformazioni *b.* – naturalmente, a loro volta, legati fra loro – qualche proprietà che sia diversa da quelle dello spazio S_3, in modo da poterne concludere che si tratta di enti birazionalmente distinti. [*ivi*, c. 45*r*]

Nell'ultima parte degli appunti del 1928, Fano prende in considerazione una seconda famiglia di varietà tridimensionali V_3 aventi tutti i plurigeneri nulli: si tratta di threefolds singolari che – secondo Fano – sono "riferibili a M_3^n di S_4 con retta $(n-2)^{pla}$ – e quindi ∞^2 coniche, nei piani per questa retta" [*ivi*, c. 46*r*]. Ciò significa che la threefold M_3^n di grado n considerata da Fano contiene una retta di molteplicità $n-2$ e ogni piano passante per tale retta interseca la threefold in un'ulteriore conica. Dopo aver rapidamente passato in rassegna quanto accade per $3 \leq n \leq 6$, l'autore si sofferma sul "carattere nuovo" che si presenta se $n > 6$. Proseguendo il parallelismo con la teoria delle superfici, scrive che a tali varietà.

> corrisponderebbe, per così dire, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali. Per le rigate irrazionali, vien meno la relazione fra il carattere $p^{(1)}$ e la dimensione dei sistemi lineari di curve di genere uno [...]; e anzi, sulle rigate di genere $p > 0$, non esistono, all'infuori delle generatrici, curve di genere $< p$. Così qui, fuori delle superficie appartenenti alla congruenza di coniche, che sono razionali o riferibili a rigate, presumo vi sia un genere minimo delle superficie contenute nella varietà; genere minimo che potrebbe essere quello $\left(= \frac{(n-3)(n-4)}{2}\right)$ della retta $(n-2)^{pla}$, pensata come superficie (piano doppio) bisecante le coniche [*ivi*, cc. 46*r*-46*v*].

Le minute del 1928 si chiudono con l'idea che sta alla base della classificazione delle varietà tridimensionali di Fano. Quelle del primo gruppo – ossia le Fano threefolds $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ – possono essere classificate in base al valore di Ω; le V_3 birazionalmente equivalenti a $M_3^n \subset \mathbb{P}^4$ si classificano invece a seconda della superficie di genere minimo in esse contenuta che biseca la congruenza di coniche appena introdotta. Il primo punto di questo programma sarà ampiamente sviluppato da Fano nel corso delle ricerche successive; il secondo sarà invece limitato alla comunicazione di Bologna.

2 "Esporre il risultato di un po' di lavoro sperimentale": la comunicazione di Bologna

Fano presenta la prima classificazione delle Fano threefolds durante il Congresso Internazionale dei Matematici del 1928 che si svolge a Bologna, in un contesto caratterizzato da una forte presenza della Scuola italiana di geometria algebrica. Castelnuovo, durante la sua celebre conferenza plenaria, sottolinea la portata delle ricerche intraprese da Fano in questi termini:

> Come decidere se una equazione assegnata a quattro incognite rappresenti una varietà razionale o semirazionale? Nulla sappiamo in proposito, nemmeno per i più bassi valori del grado, superiori a 2. Anzi, ricerche che il Fano prosegue da vari anni, e di cui vi parlerà in una sua comunicazione, fanno vedere quanto la questione sia complessa. Egli prende in esame le varietà che hanno nulli tutti i generi e i plurigeneri e le distribuisce in un numero finito di famiglie, di cui la prima si compone di varietà razionali, la seconda di varietà semirazionali e le altre di varietà che si staccano sempre più dalla razionalità. Una classificazione accurata di questi tipi getterebbe molta luce sopra una questione che è necessario risolvere per lo sviluppo futuro della geometria algebrica. [8, p. 200]

Emblematica del posizionamento delle ricerche di Fano nell'alveo della Scuola è l'apertura della comunicazione sulle threefolds:

> La distinzione, che pareva tradizionale, tra scienze di ragionamento e scienze sperimentali è ormai sorpassata. In ogni scienza hanno parte l'esperienza e il ragionamento; la distinzione concerne solo le reciproche proporzioni. In matematica la parte riservata all'esperienza, piccola e limitata alla fase di scoperta, consiste essenzialmente nell'esame accurato di qualche caso particolare. Io mi propongo appunto di esporre qui il risultato di un po' di lavoro sperimentale, e di qualche congettura ulteriore, riguardo a una questione ardua e importante, che da tempo attende invano la soluzione. Chi, anche per poco, si è occupato di geometria algebrica a più dimensioni ha incontrato già sui primordi la questione della razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio a 4 dimensioni (V_3^3 di S_4). [22, p. 115]

Frutto di questo approccio euristico alla disciplina è inscrivere il problema della razionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$ all'interno della questione generale della razionalità delle varietà tridimensionali M_3 aventi tutti i plurigeneri unitari, primo passo compiuto da Fano durante le sue indagini. Il passaggio successivo è rappresentato dallo studio dettagliato di due casi particolari, le threefolds V_3^4 e M_3^6, e dal confronto con quanto accade per la cubica di $\mathbb{P}^4$. Da quest'ultimo Fano matura la convinzione che

> qualora le varietà in parola a generi nulli siano effettivamente non razionali, la M_3^6 di S_5, e così anche la V_3^4 di S_4, debbano essere notevolmente più lontane dalla razionalità che non la V_3^3 di S_4; e perciò per esse debba riuscire più facile l'assodarlo.[4]

Per questo motivo, nel periodo 1908–1915 Fano si era concentrato sulla dimostrazione dell'irrazionalità delle threefolds V_3^4 e M_3^6, come mette in luce a Bologna, a partire dallo studio delle trasformazioni birazionali su di esse [17, 18]. A questo punto, riconosciuta l'appartenenza di queste threefolds particolari alla successione generale delle $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$, delinea la loro classificazione in base al genere p delle curve-sezioni canoniche, individuando le threefolds che si ottengono per $p = 2, \ldots, 9$ e $p = 13$.

Per quanto riguarda il problema centrale della razionalità, coerentemente con quanto annotato all'interno degli appunti del 1928 per Ω, Fano sostiene che "esaminando queste diverse varietà, si ha l'impressione che esse, qualora non siano razionali, tuttavia, al crescere di p, pur con qualche restrizione, vadano gradatamente accostandosi alla razionalità".[5] Inoltre, tali threefolds godono di una proprietà importante: possono essere proiettate dalle curve di

4 Cfr. [22, p. 116] con [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, c. 45*r*]: "Naturalmente, conveniva attaccare dapprima le varietà ultime dell'elenco precedente, che presumevo più lontane dalla razionalità, e per le quali era perciò da ritenersi più facile il conseguire un risultato positivo".

5 Cfr. [22, p. 118] con [BSMT, *FFa*, Scritti. 4, c. 52*v*]: "Si direbbe che il diminuire di p ¨, cioè l'ordine progressivo di cui sopra, corrisponde a un progressivo allontanamento dalla razionalità".

ordine minore in esse contenute (e dunque in particolare, se esiste, da una retta – assunzione successivamente ribattezzata "ipotesi di Fano") in altre varietà dello stesso tipo che corrispondono a valori minori di p ($M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ nello specifico) e che contengono una rigata cubica come immagine della curva centro di proiezione. Questa affermazione rappresenta un miglioramento significativo dell'affermazione contenuta nel manoscritto del 1928 circa la possibilità di ricondurre ogni Fano threefold a una varietà dello stesso tipo, caratterizzata però da un valore maggiore di Ω. Infatti, mentre negli appunti preparatorii si fa soltanto riferimento a delle "opportune particolarizzazioni", Fano qui individua uno strumento preciso: la proiezione della varietà tridimensionale da una curva in essa contenuta. Conclude infine:

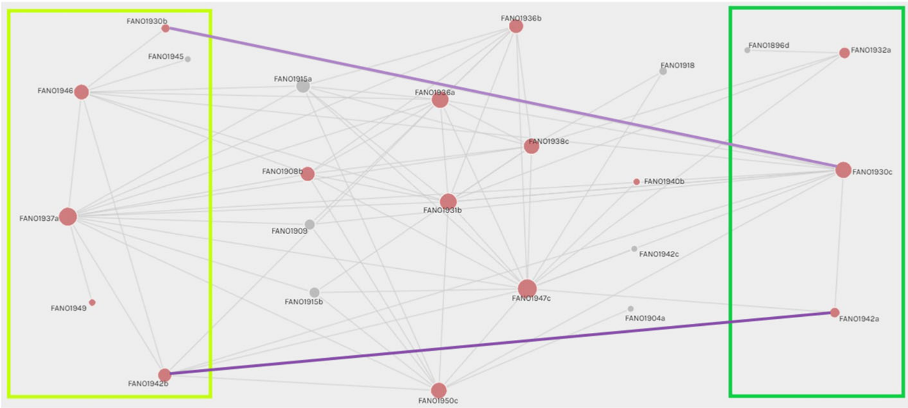
> dal punto di vista birazionale [...], ciascuna delle varietà enumerate comprende come casi particolari le successive (corrispondenti a valori più elevati di p); sicché il crescere di p implica, in massima, una progressiva particolarizzazione della M_3. [22, p. 119]

Occorre tener presente che, fino a questo punto della comunicazione, Fano non ha introdotto gli invarianti Ω e Ω_2. Quest'ultimo compare solo nella seconda metà dell'esposizione, nuovamente introdotto per analogia con l'invariante di Castelnuovo-Enriques per le superfici. Tuttavia, a differenza di quanto compare nel manoscritto del 1928, a Bologna Fano afferma che nel caso delle M_3 tale invariante è pari a $-(p+2)$ e coincide con la dimensione dei sistemi di superfici di generi uno contenute nella threefold aumentata di una unità.

Sorge quindi un interrogativo riguardo al motivo che spinge Fano a introdurre nuovamente Ω_2, dopo aver già fornito una classificazione delle Fano threefolds basata sul valore di p. Da una parte, tale invariante gli consente di classificare non solo le $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$, ma anche le varietà tridimensionali riferibili a una $M_3^n \subset \mathbb{P}^4$ contenenti una retta $(n-2)^{pla}$, già prese in considerazione negli appunti del 1928, cui Fano dedica l'ultima sezione dello scritto dato alle stampe nel 1931. D'altra parte, questo modo di procedere mette in luce la volontà dell'autore di conferire lo *status* di patrimonio a una messe di scoperte e risultati all'interno di un nuovo campo geometrico, in larga parte ancora da esplorare e sviluppare. Questa considerazione è avvalorata dall'introduzione di nuova terminologia matematica da parte di Fano.

Come annotato a latere nel manoscritto del 1928 – probabilmente in un momento successivo rispetto alla prima stesura – egli definisce "semi-razionali" le varietà del primo tipo. Nel lavoro inviato per la pubblicazione all'interno degli *Atti* del Congresso, si illustra la motivazione di tale scelta: nel caso in cui queste varietà non siano effettivamente razionali, esse si presentano come "come intermedie fra gli enti razionali e quelli aventi almeno uno dei generi e plurigeneri maggiore di zero" [22, p. 121]. Fano chiama invece "pseudo-razionali" le threefolds del secondo tipo, aventi "come analogo, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali" [22, p. 120].

Pur non dichiarandolo esplicitamente, per esporre il frutto del suo "lavoro sperimentale" Fano ricorre a entrambe le vie di indagine da lui individuate nelle carte del 1928. Fa infatti riferimento sia all'esame dei sistemi lineari di superfici regolari, con i generi pari a uno, contenuti nella varietà (corrispondente al punto *a.* del manoscritto del 1928) sia allo studio delle trasformazioni birazionali (punto *b.*), il cui gruppo "cresce e si complica rapidamente al crescere di p" [22, p. 117]. Quest'ultimo è strettamente legato all'analisi delle involuzioni sulle threefolds, ambito in cui le ricerche di Fano si intrecciano con quelle di Enriques e di G. Aprile [2, 15]. Lo studio di queste involuzioni, già introdotte nelle minute di Aberystwyth del 1923, è ripreso nel manoscritto del 1928 in relazione alla threefold M_3^6. A Bologna, Fano estende l'analisi delle involuzioni alle threefolds M_3^8, M_3^{10} e V_3^3.



a) Analisi delle superfici-sezioni aventi tutti i generi = 1

b) Studio delle trasformazioni birazionali

Fig. 2 Citational network dei lavori di Fano sulle varietà tridimensionali

3 L'ultimo ventennio di ricerca sulle Fano threefolds: metodi e risultati

Fermo restando che nel nucleo centrale dei lavori sulle Fano threefolds successivi al 1928 sono utilizzati entrambi i metodi di indagine *a.* e *b.* dell'agenda di lavoro di Fano – o, sovente, una loro combinazione – è possibile identificare due gruppi di pubblicazioni in cui è privilegiata una delle due strade (Fig. 2).[6]

In quest'ottica, appaiono particolarmente significative le due note lincee del 1930, dove uno dei due approcci è prevalente rispetto l'altro [20, 21]. Il primo lavoro, intitolato *Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri*, consiste in uno studio di geometria della retta volto ad approfondire alcune proprietà di particolari rigate che avranno un certo ruolo nello studio delle Fano threefolds in quanto immagini della retta da cui si effettua la proiezione della varietà. Obiettivo del secondo scritto è l'analisi della threefold regolare con tutti i plurigeneri nulli M_3^{14}, ottenuta come sezione della Grassmanniana $M_8^{14} \subset \mathbb{P}^{14}$ con $\mathbb{P}^9$ e di "dubbia razionalità" [21, p. 330] per dimostrare che le sezioni iperpiane formano una base minima su di essa. Per fare ciò, Fano ricorre alle trasformazioni birazionali (punto *b.*), mettendo in luce che M_3^{14} è riferibile birazionalmente ad una cubica di $\mathbb{P}^4$ priva di punto doppio. Fano conclude osservando che la threefold in questione può anche essere proiettata da una retta di una sua rigata in una $M_3^{10} \subset \mathbb{P}^7$ contenente una rigata cubica e affermando, pur senza fornire i dettagli dimostrativi, che si può generalizzare questo risultato alle sezioni della Grassmanniana presa in esame con gli spazi $\mathbb{P}^8$ e $\mathbb{P}^{10}$. In conclusione, l'intersezione della Grassmanniana $M_8^{14} \subset \mathbb{P}^{14}$ delle rette di $\mathbb{P}^5$ con qualsiasi spazio proiettivo generico $\mathbb{P}^{14-i}$, con $i \leq 6$, è una varietà M_{8-i}^{14} sulla quale le sezioni iperpiane costituiscono una base minima.

L'apparato degli strumenti elaborati da Fano non si limita però allo studio dell'invariante relativo Ω_2, all'analisi dei sistemi lineari di superfici K3 (punto *a.*) o al confronto tra il gruppo

[6] In figura si illustrano i collegamenti – determinati dalle citazioni – tra i lavori di Fano sulle varietà tridimensionali. Da un lato (riquadro giallo) sono posizionati gli articoli in cui l'autore studia le threefolds a partire dall'analisi delle superfici K3, loro sezioni iperpiane; dall'altro (riquadro verde) i lavori in cui la questione delle varietà tridimensionali è affrontata dal punto di vista delle trasformazioni birazionali. Si evidenziano (tramite collegamento in viola) le coppie di scritti pubblicati nello stesso anno di cui si discute nei paragrafi successivi.

delle trasformazioni birazionali sulle threefolds e quello di $\mathbb{P}^3$ (punto *b.*), con l'obiettivo di mostrare che $Bir\left(M_3^{2p-2}\right) \neq Bir\left(\mathbb{P}^3\right)$. Fano estende anche l'analisi delle involuzioni a diverse famiglie di threefolds ottenendo alcuni risultati parziali di razionalità. Infatti, mentre in termini moderni per le superfici le nozioni di razionalità, unirazionalità e connessione razionale coincidono, così non accade per le threefolds. In quest'ottica di idee si colloca la nota lincea del 1932, dedicata all'analisi dei gruppi di trasformazioni birazionali sulle threefolds [23], in cui Fano perviene al seguente risultato: un'involuzione di $\mathbb{P}^3$ è razionale o irrazionale a seconda che, interpretata come varietà tridimensionale, ammetta o meno gruppi continui finiti di trasformazioni birazionali. Analogo discorso vale per il lavoro del 1936 pubblicato all'interno degli *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* [24], dove Fano analizza nel dettaglio le involuzioni sulle threefolds ottenute nei casi $p = 5, 6, 7$ con l'obiettivo di trovare tipi di involuzioni differenti da quelle di $\mathbb{P}^3$ e provarne così l'irrazionalità. Qui è anche introdotto come strumento ausiliario lo studio dei sistemi omaloidici di superfici.

A riprova della poliedricità di Fano nell'affrontare la questione delle varietà tridimensionali, in un altro scritto del 1936 egli si allontana dall'approccio gruppale a favore di un'impostazione più sintetico-proiettiva, tornando a focalizzarsi sulla successione delle $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ [25]. Quasi contemporaneamente, Fano inizia ad estendere il metodo di proiezione di una varietà tridimensionale da una retta, analizzando ciò che si ottiene al variare del centro di proiezione. La proiezione di M_3^{2p-2} da una conica in essa contenuta è una threefold M_3^{2p-8} a curve-sezioni canoniche che contiene una superficie razionale rigata di quarto grado come immagine della conica di partenza. O, ancora, proiettando M_3^{2p-2} dallo spazio tangente in un suo punto generico si ottiene un'altra varietà tridimensionale M_3^{2p-10} a curve-sezioni canoniche, sulla quale l'immagine dell'intorno del centro di proiezione è una superficie di Veronese. Ma Fano non estende soltanto lo strumento classico della proiezione da una retta in questa direzione, attraverso la scelta di un centro di proiezione appropriato. Nella corposa memoria del 1937 [26], presentata per la pubblicazione all'Accademia d'Italia, Fano introduce il metodo della cosiddetta "doppia proiezione" che permette di riferire birazionalmente ogni Fano threefold ad una varietà più semplice (ma non generale) dello stesso tipo, immersa nello spazio proiettivo di dimensione $p-6$. Infatti, dopo aver proiettato $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ da una sua retta in una $M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ contenente una rigata cubica di $\mathbb{P}^4$, si può proiettare M_3^{2p-6} da tale $\mathbb{P}^4$ in una Fano threefold di ordine ancora inferiore, $M_3^{2p-18} \subset \mathbb{P}^{p-6}$. All'interno di questo lavoro, inoltre, sono analizzati per la prima volta alcuni casi speciali di Fano threefolds che corrispondono a valori di p differenti rispetto a quelli finora presi in considerazione da Fano. Nello specifico, introduce particolari M_3^{2p-2} contenenti un piano ($p = 32$), esclusivamente una retta doppia ($p = 37, 29$), una retta doppia e alcuni piani isolati ($p = 34, 31, 29$), nessuna retta ($p = 37, 33, 28$).

Le varietà tridimensionali sono anche oggetto della comunicazione presentata da Fano al primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Firenze nell'aprile del 1937. In quest'occasione, pur senza apportare aggiunte essenziali agli studi precedentemente pubblicati, Fano fa nuovamente appello a quel "metodo sperimentale" citato a Bologna,

> per quel tanto che si può parlare di metodo sperimentale in matematica: esame accurato dei casi singoli, e successiva ricerca intesa a comprendere i risultati singoli in enunciati generali, e stabilire questi per via deduttiva. [27, p. 246]

Ribadisce inoltre che la massima dimensione di un sistema lineare di superfici regolari di generi uno contenuto in una threefold costituisce un invariante assoluto, specificando che esso è sempre $\geq p + 1$.

Nei due lavori a stampa successivi dedicati alle Fano threefolds, apparsi sulle pagine dei *Commentarii Mathematici Helvetici* nel 1942 quando Fano è ormai esule a Losanna, torna ad affrontare questo studio secondo le due vie corrispondenti ai punti *a.* e *b.* del manoscritto del 1928. Nel primo [28], intitolato *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche*, Fano si concentra sullo studio delle trasformazioni birazionali tra le threefolds, considerando due threefolds regolari e prive di punti multipli in corrispondenza birazionale tra loro, a partire dal caso della $M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$. Le proprietà dedotte sono poi utilizzate per fornire le equazioni esplicite che rappresentano due proiezioni biunivoche di Fano threefolds particolari su $\mathbb{P}^3$: la V_3^3 proiettata da una retta contenuta in un suo piano e la V_3^4, con un'unica quadrica direttrice, da un suo piano.

Dal titolo *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche*, la seconda nota del 1942 è dedicata all'analisi dei sistemi delle superfici-sezioni delle varietà tridimensionali [29]. Qui Fano volge nuovamente l'attenzione al problema della razionalità, adottando però una prospettiva diversa: si concentra infatti sullo studio dei casi delle threefolds aventi come superfici-sezioni delle intersezioni complete. Partendo dal presupposto che, da quanto emerso nei lavori del 1936–37, per $p > 10$ le Fano threefolds sono razionali, con l'unica eccezione del caso dubbio $p = 13$, l'autore vuole mostrare che se le M_3 contengono solo superfici intersezioni complete con forme dello spazio proiettivo in cui sono immerse, esse sono razionali anche nei casi $p = 9$ e $p = 10$ [29, p. 202]. In altri termini, egli stabilisce che per le threefolds a curve-sezioni canoniche contenenti solo superfici intersezioni complete la razionalità si presenta per valori minori di p rispetto alle Fano threefolds generiche.

Il lavoro finale sull'irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$, redatto da Fano durante l'esilio a Losanna e pronto fin dal 1942, è presentato da Severi all'Accademia Pontificia nel febbraio 1943, ma uscirà solo nel 1947 [31]. I contenuti del lavoro, tuttavia, sono noti a livello nazionale e internazionale. Vi accennano, per esempio B. Segre, J.A. Todd, Godeaux e Castelnuovo nelle loro lettere:

> [...] I have already obtained several additional results on cubic surfaces. One of them, by means of which theorem VIII of note I follows at once from theorem VII of the same note, is that "a non-singular cubic surface contains no homaloid linear system of complete intersections". An extension of this result to the non-regular V_3^3 [...], would obviously prove its irrationality. I was told by Fano that this irrationality has been very recently proved by him, on considering the linear system of surfaces of genera 1 lying on V_3^3, but I have not seen the proof. I feel that one should be able to obtain the result also by my methods, but I have not yet had time of thinking seriously about this. [CA, *BSP*: B. Segre a J.A. Todd, Manchester 8.10.1943]

> Pendant la guerre, j'ai eu quelques relations avec M. Fano, réfugié à Lausanne; il a réussi à démontrer l'irrationalité de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions, mais je ne connais pas encore sa démonstration. [CA, *BSP*: L. Godeaux a B. Segre, Liège 13.8.1945]
> Il Prof. Fano è stato malato a Boston [...]. La Memoria sulla varietà cubica che deve esser pubblicata dall'Ac. Pontificia non è ancora uscita; avrà visto il breve estratto pubblicato nei Rendiconti dei Lincei. In questi giorni un giovane di qua, molto intelligente, mi ha comunicato una dimostrazione molto semplice e breve della irrazionalità della varietà cubica fondata su considerazioni topologiche. Ma ho bisogno di pensare ancora alla cosa. [CA, *BSP*: G. Castelnuovo a B. Segre, Roma 19.12.1946]

La memoria del 1947 è anticipata da una breve nota lincea [30] in cui Fano illustra le principali tappe del suo percorso di ricerca, sottolineando lo studio dei sistemi di superfici K3 per determinare l'irrazionalità delle threefolds che si ottengono per $p = 3, 4, 5, 6, 8, 13$. Alla pubblicazione del lavoro farà seguito un'entusiasta recensione di Conforto (1947, MR0038100) che, pur mettendo in luce l'ipotesi assunta da Fano (restrittiva ma "estremamente plausibile"), insiste sui "numerosissimi particolari dimostrativi", sugli "importanti risultati collaterali" e gli "acuti accorgimenti" che rendono questa memoria "tra le più elaborate e profonde che siano state scritte con i metodi della Scuola italiana di geometria algebrica". Quello sulla cubica dello spazio a quattro dimensioni non sarà tuttavia l'ultimo articolo originale di Fano. Pur non sentendosi più efficiente, visto che "sempre più spesso doveva leggere due volte un lavoro" [35, p. 3] per afferrarne i contenuti, Fano non interrompe l'attività di ricerca sulle threefolds tant'è che nel 1949 viene pubblicata la nota *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche* in cui compare per la prima volta la Fano threefold che si ottiene per $p = 12$ [33]. Qui è anche individuato un particolare sistema lineare di superfici che rappresenta una threefold M_3^{32} priva di rette, che corrisponde al valore $p = 17$ della successione delle M_3^{2p-2} [33, p. 154].

L'anno successivo, in occasione del simposio organizzato a Torino per la sua nomina a professore emerito, Fano traccia un bilancio della sua attività di ricerca sulle varietà tridimensionali, scaturita dalla questione della cubica generale dello spazio a quattro dimensioni che "si è presentata in geometria da forse 60 anni, suscitando viva curiosità" [34, p. 21]: non si limita a descrivere i principali contributi della sua lunga carriera accademica ma dedica particolare attenzione al percorso intrapreso, ripercorrendo le principali tappe della sua attività di ricerca sulle threefolds.

4 Verso un dialogo tra la Scuola italiana e la Scuola inglese

Pur presentando alcune lacune e racchiudendo spiegazioni talvolta inadeguate dal punto di vista del rigore, i lavori di Fano sulle M_3^{2p-2} riscuotono un successo immediato, soprattutto in relazione alla questione fondamentali dell'irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$. I suoi contributi al problema dell'assegnazione di condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità delle threefolds sono accolti entusiasticamente tra i membri della Scuola per due ragioni essenziali.

Innanzitutto, costituendo il passaggio dallo studio delle superfici a quello delle threefolds, gli studi di Fano si inseriscono a pieno titolo all'interno del programma di ricerca dei geometri italiani. In secondo luogo, essi aprono la strada a nuove vie di indagine geometrica che rappresenterebbero la "prova della vitalità" della Scuola.[7] I geometri italiani, contrariamente a quanto auspicavano, non riusciranno tuttavia a "mettere la mano sugli istrumenti adatti allo scopo, portando l'ordine e l'armonia anche nel dominio delle varietà a più dimensioni" [11, p. 149].

Fano colloca esplicitamente – e in più occasioni – le proprie ricerche sulle varietà tridimensionali nel solco della tradizione geometrica italiana. Questo dato è corroborato dall'analisi del citational network degli scritti sulle Fano threefolds: la quasi totalità dei lavori citati è infatti costituita da pubblicazioni dei geometri italiani (88% delle citazioni), per un totale di

[7] Questo aspetto di prosperità della Scuola è sottolineato anche all'interno della recensione di Conforto: "La memoria apre altresì la via, come l'autore stesso afferma, ad ulteriori e più approfondite ricerche. Specialmente importanti appaiono quelle ricerche future, che tenderanno a valutare esattamente la portata della anzidetta ipotesi di regolarità e di qualche altra ipotesi di generalità, che l'autore è costretto talvolta a fare in conseguenza della difficoltà dell'argomento".

22 autori.[8] Al loro interno, con almeno 10 riferimenti, accanto a quello di Severi (con 33 citazioni) spiccano i nomi di Enriques (30), C. Segre (18), Castelnuovo (12) e G. Marletta (10).

Gli studi sulle threefolds, intrapresi con spirito pioneristico da Fano, hanno anche dato un importante impulso alle ricerche sviluppatesi in contesti differenti ma in stretto dialogo con la Scuola italiana, anche negli anni del suo declino, quando a livello internazionale si andavano invece affermando correnti e indirizzi di ricerca diversi, nella direzione delle vie tracciate dall'algebra moderna e dalla topologia. È questo il caso della Scuola di geometria inglese [6, pp. 340–349] sulla quale le ricerche dei geometri italiani esercitano una sorta di azione di magistero almeno fino agli anni Trenta. In particolare, gli studi di Fano sono accolti molto positivamente a Cambridge, dove vengono portati avanti in più direzioni dal gruppo di geometri (J.A. Todd, P. Du Val, H.S.M. Coxeter, W.L. Edge, L. Roth, ...) sorto attorno alla figura di H.F. Baker e consolidatosi durante i *tea parties* del sabato pomeriggio da lui organizzati con l'obiettivo di promuovere il dialogo e il confronto sulle principali questioni della geometria [3]. Fano intrattiene scambi regolari con questa comunità matematica come emerge dalla corrispondenza con Baker che, nel dicembre 1931, gli scrive:

> Dear Sir,
> I was very honoured by, and very grateful to you for, your letter of 2 Dec., telling me that you had written further about my little Note of the Del Pezzo ψ^5. I shall look forward to the privilege of an offprint, when the paper is published. And, as soon as possible, I shall study your letter in detail, which I have not been able to do as yet.
> Our students in Cambridge read many of your published papers, and find them very helpful – so that I am particularly grateful to you for writing to me. [BSMT, *FFa*, lettera. 22: H.F. Baker a G. Fano, Cambridge 14.12.1931]

Le ricerche classiche di Fano sulle threefolds sono riprese da Leonard Roth e poi pubblicate per la prima volta in forma organica nel 1955 all'interno del suo trattato *Algebraic threefolds. With special regard to problems of rationality* [47]. Di un certo rilievo è il fatto che Roth, dopo essere stato avviato alla ricerca proprio da Baker, abbia trascorso un anno a Roma come vincitore di una borsa Rockefeller nel 1930–31, instaurando proficue relazioni scientifiche con i matematici italiani: Castelnuovo, Enriques, Severi e T. Levi–Civita [48, 53]. Il geometra inglese, che si dedicherà "per tutta la vita allo studio della geometria algebrica, seguendo i metodi della Scuola italiana" [48, p. 194], recepisce l'eredità di Fano nel campo degli studi sulle threefolds, la cui profonda conoscenza ben emerge da questo volume. Anche i contatti epistolari tra i due matematici, proseguiti almeno fino al trasferimento di Fano in Svizzera, portano alla luce un'ampia condivisione in termini sia di temi di ricerca sia di strumenti e metodi adottati. Gli argomenti centrali sono i risultati di razionalità e irrazionalità delle varietà tridimensionali:

> Per quanto riguarda l'unirazionalità della V_3^8 generale, ho adoperato il metodo da Lei esposto nella prima Nota del'07, cioè ragionando per assurdo ho dimostrato che la V_3^8 non contiene un sistema omaloidico di superficie. Ella si ricorderà che una parte della dimostrazione consiste nel provare che l'intersezione della V_3^8 con una forma di ordine n non può avere un punto multiplo di ordine $> 2n$. Ebbene questo fatto non sussiste più

[8] Per condurre tale analisi, sono state considerate le citazioni contenute nei 16 lavori a stampa di Fano dedicati a queste varietà pubblicati tra il 1904 e il 1950. Su un totale di 165 citazioni, solo 20 scritti recano la firma di autori stranieri: 9 pubblicazioni sono firmate da matematici tedeschi (F. Klein, M. Nöther, T. Reye, G. Salmon, A. Voss, E. Weber), 6 da inglesi (D.W. Babbage, A. Cayley, P. Du Val, L. Roth, J.A. Todd), 2 dallo svizzero L. Schläfli, 2 dal danese H.G. Zeuthen e una dall'austriaco K. Zindler.

> per la V_3^{10} e così c'è pure speranza di stabilire l'unirazionalità di quest'ultima, e tanto meno quella della V_3^{12} di Segre, la quale contiene superficie che non sono intersezioni complete. In proposito, sembra strano che la V_3^{12} che contiene soltanto intersezioni complete sia razionale; ma questo studio è pieno di sorprese. [BSMT, *FFa*, lettera. 23: L. Roth a G. Fano, Londra 18.2.1937]

È Fano, tra l'altro, ad annunciare ai geometri italiani durante il primo Congresso dell'UMI la dimostrazione di Roth dell'irrazionalità di M_3^8, sottolineando la portata di un tale risultato. Da questo, infatti, discende l'esistenza di un'involuzione irrazionale del quarto ordine in $\mathbb{P}^3$. Illustrando il caso $p = 5$, Fano afferma:

> un geometra inglese della scuola di Baker, il Sig. L. Roth, ha annunciato recentemente di aver dimostrato che la M_3^8 di S_6 in parole è irrazionale: risultato importante in quanto implicherebbe l'esistenza in S_3 di una involuzione irrazionale I_4. La dimostrazione non fu ancora pubblicata; da notizie avute per lettera risulta che l'A., riprendendo una vecchia mia direttiva, sia riuscito a dimostrare che tale M_3^8 non può contenere un sistema ∞^3 omaloidico di superficie. [27], pp. 246–247]

All'interno della lettera citata compaiono anche riferimenti puntuali a specifici risultati di Fano sulle threefolds, come quelli che portano Roth ad affermare: "devo dire quanto è soddisfacente sapere che la serie delle V_3^{2p-2} termina per $p = 37$ e che per $p > 10$ esse sono razionali". Per quanto riguarda i metodi, Roth non solo padroneggia gli strumenti introdotti da Fano, come lo studio dei sistemi omaloidici di superfici – "vecchia direttiva" di Fano – e l'analisi delle superfici-sezioni complete della threefold, ma suggerisce anche nuove idee per progredire nella ricerca, coniugando i risultati ottenuti dai geometri inglesi con le tecniche classiche della Scuola italiana, come il metodo delle proiezioni successive. Un'estensione di tale metodo è utilizzata da Roth per affrontare il problema dell'unirazionalità di alcune threefolds. In particolare, egli sfrutta il fatto che se $7 < p < 12$ si può proiettare la M_3^{2p-2} da uno spazio tangente in un suo punto generico, ottenendo un'altra threefold $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-3}$ a curve-sezioni canoniche di genere $p - 4$, contenente una superficie di Veronese F^4. Nel caso in cui $p \geq 12$ è necessario effettuare una seconda proiezione da una conica di F^4: si arriva così a una $M_3^{2p-16} \subset \mathbb{P}^{p-6}$ a curve-sezioni canoniche di genere $p - 7$, contenente un piano come immagine di F^4.

Non si tratta tuttavia di un'interazione a senso unico, dalla Scuola italiana verso quella inglese: sono anche i geometri italiani – Fano *in primis* per quanto riguarda gli studi sulle threefolds – a guardare alla produzione geometrica degli inglesi [41]. Significativo in tal senso è il gruppo di cinque scritti che Fano cita all'interno dei suoi lavori sulle threefolds, firmati dagli inglesi D. Babbage, Du Val, Todd e Roth, pubblicati tra il 1932 e il 1938 (Fig. 3).

Da questi trae sia alcuni risultati specifici, come quelli relativi alla quartica di $\mathbb{P}^4$, sia certi procedimenti, come quello adottato da Roth per lo studio della varietà M_3^{14}. Non è un caso che tutti i geometri inglesi citati da Fano siano studenti di Baker a Cambridge. Oltre a Roth, anche Du Val trascorre un periodo di perfezionamento a Roma (1930–32), grazie a una borsa di studio del Trinity College, lavorando a stretto contatto con Enriques e specializzandosi nella teoria delle superfici algebriche secondo l'indirizzo italiano. Il frutto di questo periodo di studio all'estero sono i due scritti citati da Fano dedicati alla classificazione delle superfici, che rappresentano i primi due lavori di Du Val in italiano [13, 14].

Il dialogo tra le due Scuole – quella italiana e quella di Cambridge – prosegue anche dopo il secondo conflitto mondiale e Fano è ancora tra i protagonisti di questo scambio. Lo testimonia la sua recensione ai contributi di Edge del periodo 1937–40, dedicati alla determinazione "per

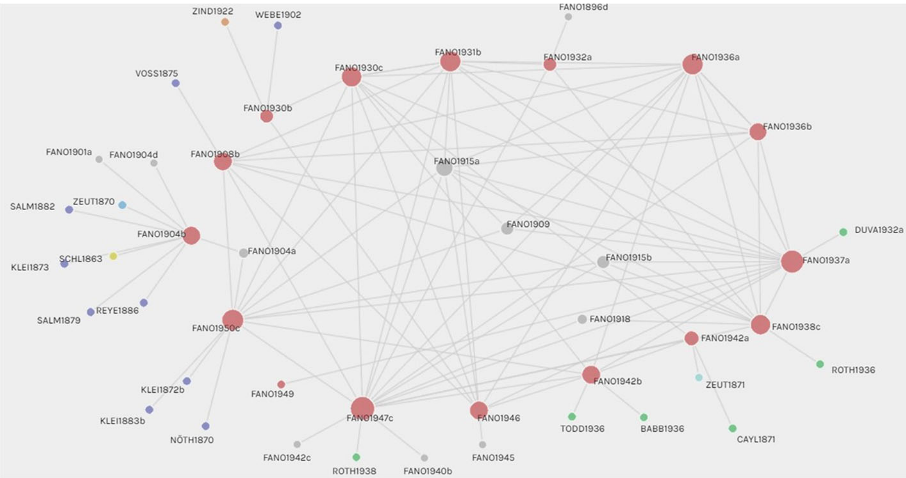


Fig. 3 Citational network degli autori stranieri nei lavori di Fano sulle threefolds

via geometrica" di particolari luoghi legati a una rete di quadriche in $\mathbb{P}^3$ [32, p. 179]. È, questo, un argomento che rientra in quelle "notevoli specializzazioni di situazioni generali" che "da sempre hanno affascinato Edge" [42], pp. 633–634]. Analogamente a quelle dei geometri italiani, le lezioni di Edge

> mantenevano gli standard tradizionali di abilità manipolativa e di intuizione geometrica; di conseguenza erano spesso ritenute impegnative. La routine di "definizione, teorema, dimostrazione" non faceva per lui, né nell'insegnamento né nella ricerca. [42], p. 632]

Il dialogo tra la Scuola italiana e quella inglese è favorito dalla condivisione non solo di argomenti di ricerca (come le threefolds) ma anche di una visione metodologica comune, caratterizzata dallo studio di casi particolari e da un costante appello all'intuizione geometrica. È probabilmente la mancanza di questo punto di vista comune che invece porta a un disincentivo del dialogo con altre tradizioni di ricerca, come quella americana [6]. Anche i geometri statunitensi più vicini all'indirizzo italiano, come Snyder, manifestano un certo disagio nei confronti degli strumenti puramente sintetici e intuitivi che, a partire dagli anni Quaranta, si trasformerà in una sorta di incomunicabilità. Lo stesso Snyder, inviando una sua nota sull'involuzione di ordine due di $\mathbb{P}^3$ appartenente alla varietà cubica di $\mathbb{P}^4$, nel 1923 scriveva a Severi in questi termini:

> Se l'occasione si presenta, vuole, La prego, mostrarla ai signori Enriques e Castelnuovo? Non che essa abbia gran valore, ma mi ricordo del loro interesse e consiglio, che non voglio dimenticare. Il Sig. Enriques mi ha sempre consigliato di far uso dei metodi sintetici, ma non lo posso [fare]… sono restato sempre troppo stupito. [Biblioteca dell'Istituto Matematico di Firenze, *Fondo Domenico Montesano*: V. Snyder a F. Severi, Ithaca (NY) 27.1.1923]

È, questa, una caratteristica che permea i contributi di Snyder in geometria algebrica: pur utilizzando in prima battuta i metodi sintetici, non reputa il lavoro completo finché non raggiunge una formulazione analitica da porre alla base del trattamento dei singoli casi.

5 Uno sguardo all'eredità moderna delle ricerche sulle Fano threefolds

Tracce importanti dell'eredità culturale delle ricerche di Fano sulle threefolds non si riscontrano solo all'interno di tradizioni di ricerca coeve, come quella della Scuola inglese, ma anche in lavori di geometria algebrica decisamente posteriori, pubblicati a partire dagli anni Settanta. Anche in questo caso si assiste ad un'interazione in entrambe le direzioni.

Da un lato, infatti, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali hanno fornito ampio materiale alle ricerche recenti in tale ambito, culminate con la classificazione completa delle varietà di Fano di prima specie ad opera di Iskovskikh [39, 40]. Utilizzando il metodo della doppia proiezione da una retta, egli dimostra in maniera rigorosa quanto "intuito" da Fano – ovvero che, per tali varietà, $3 \leq p \leq 12$ e $p \neq 11$ – e fornisce una descrizione accurata delle Fano threefolds che si ottengono per i possibili valori di p. Iskovskikh non dimostra l'esistenza di una retta su una Fano threefold né la liscezza dell'elemento generale del suo sistema anticanonico, ma – come aveva fatto Fano – assume come ipotesi che la varietà soddisfi queste due condizioni. Entrambe le proprietà saranno dimostrate due anni più tardi da V.V. Shokurov (1980). In un primo lavoro [50], egli prova che l'elemento generale del sistema anticanonico di ogni varietà di Fano tridimensionale è liscio. In un secondo articolo [51], fornisce una dimostrazione completa del fatto che se X è una Fano threefold allora X contiene una retta r $(-K_X \cdot r = 1)$ oppure $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ o X è una varietà di Fano tridimensionale di indice ≥ 2. Shokurov ha dunque il merito di mostrare che le Fano threefolds classificate da Iskovskikh soddisfano automaticamente queste due condizioni, per cui i risultati ottenuti sono sempre validi, senza il bisogno di assumere tali ipotesi. Nel 1981 S. Mori e S. Mukai elaborano la classificazione delle Fano threefolds con numero di Picard maggiore o uguale a 2, a partire dalla classificazione Iskovskikh e utilizzando la teoria di Mori dei raggi estremali [43]. In meno di un ventennio (1973–90) sono anche classificate le varietà di Fano X di dimensione n qualsiasi e di indice $i_X \geq n - 2$ [44]. L'eredità delle ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali investe non solo la questione della classificazione ma anche i problemi di razionalità in dimensione tre. In questo ambito, al controesempio alla congettura di Lüroth rappresentato dalla quartica di $\mathbb{P}^4$ studiata da Manin e Iskovskikh [38], segue la dimostrazione dell'irrazionalità dell'ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^4$ da parte di H.C. Clemens e P.A. Griffiths [9].

L'apice moderno dell'eredità di Fano è probabilmente rappresentato dai contributi di Mori e C. Birkar, entrambi vincitori della Medaglia Fields con motivazioni che richiamano esplicitamente il nome di Fano. Il primo, infatti, è stato insignito del prestigioso premio nel 1990 per aver risolto la congettura di Hartshorne e per gli importanti risultati relativi alla classificazione delle varietà tridimensionali da lui ottenuti lavorando su tale congettura. Birkar è stato invece premiato nel 2018 per la dimostrazione della limitatezza delle varietà di Fano e per i suoi contributi al Minimal Model Program [4].

Dall'altro lato, la geometria algebrica moderna ha contribuito a spiegare e giustificare rigorosamente alcune delle affermazioni contenute negli scritti di Fano, dando solide fondamenta a molti dei metodi utilizzati. In questa direzione un esempio notevole è costituito dal metodo della doppia proiezione, introdotto da Fano ma descritto e dimostrato da Iskovskikh [39, 40]. Dopo le sue brillanti ricerche, si sono susseguiti diversi lavori – come quelli citati nel paragrafo precedente – che hanno approfondito la tecnica di Iskovskikh. Gli studi recenti hanno permesso di rimuovere l'ipotesi di Fano, mostrando che ogni varietà di Fano della serie principale di indice 1 e di prima specie contiene una retta. Sotto queste ipotesi è possibile costruire rigorosamente il morfismo birazionale soggiacente al metodo della doppia proiezione di Fano [12, 45]. Denotando con π_1 la proiezione della threefold M_3^{2p-2} da una retta r molto generale [45, p. 80], con $\widetilde{M}$ il blow-up di M_3^{2p-2} lungo r, con σ_r il relativo morfismo di blow-up e con $E = \sigma_r^{-1}(r)$ il divisore eccezionale, si ottiene un primo diagramma commutativo dove $\varphi_1 = \pi_1 \circ \sigma_r$ è il morfismo che risolve i punti di indeterminazione di π_1. Inoltre, $R^3 = \varphi_1(E)$ è una superficie rigata contenuta in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^4$ e, se $p \geq 5$, φ_1 è una mappa birazionale [45], pp. 81–82, Lemmi 2 e 3]. Infine, $M_3^{2p-6} = \pi_1\left(M_3^{2p-2}\right)$ risulta essere nuovamente una Fano threefold della serie principale di indice 1 e di prima specie che può però avere punti doppi isolati ordinari, corrispondenti alle rette di M_3^{2p-2} incidenti a r. Si nota che già questa prima proiezione abbassa il genere p della curva-sezione canonica. Se $p \geq 7$, effettuando una seconda proiezione – questa volta dal $\mathbb{P}^4$ che contiene R^3 – e denotando con π_2 la mappa corrispondente, con $M_3^{2p-18} = \pi_2\left(M_3^{2p-6}\right)$ l'immagine di M_3^{2p-6} e con $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi_1$ la mappa razionale ottenuta per composizione, si ricava un secondo diagramma commutativo, dove M_3^{2p-6} – se non è singolare – risulta essere una varietà di Fano di indice 2 [45, pp. 83–87]. A sua volta, la M_3^{2p-18} ottenuta tramite questa seconda proiezione ha p ancora più piccolo ed è immersa in uno spazio proiettivo di dimensione minore.

$$
\begin{tikzcd}
r \arrow[d, dotted] & \subset & M_3^{2p-2} \arrow[d, dotted, "\pi_1"] & \subset \mathbb{P}^{p+1} & \widetilde{M} \supset E \arrow[l, "\sigma_r"'] \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[ddl, dotted, "\varphi_2"] \\
R^3 & \subset & M_3^{2p-6} \arrow[d, dotted, "\pi_2"] & \subset \mathbb{P}^{p-1} & \\
& & M_3^{2p-18} & \subset \mathbb{P}^{p-6} &
\end{tikzcd}
$$

La geniale intuizione di Fano sottostante al metodo della doppia proiezione consiste nel proiettare una Fano threefold da una retta in essa contenuta in un'altra varietà dello stesso tipo con p minore che, a sua volta, può essere proiettata in una Fano threefold corrispondente a un valore di p ancora più basso, riconducendosi quindi a un caso precedente. Così facendo – tramite una sorta di procedimento iterativo – Fano e Iskovskikh si riducono a una threefold che, avendo genere della curva-sezione minore rispetto alla varietà di partenza, è già stata classificata.[9]

La geometria algebrica posteriore ha così fornito solide basi allo strumento della doppia proiezione ideato da Fano: sotto un'ipotesi forte (l'esistenza di una retta sulla threefold) e pur senza tutte le cautele necessarie, già nel 1937 egli aveva individuato questo metodo promettente che risulta legittimato dalla costruzione del morfismo di blow-up. Lo scoppiamento, che in questo caso specifico permette di sostituire un insieme finito di punti di una threefold con altrettanti piani proiettivi, sarà introdotto solo negli anni Cinquanta da Hopf.

In un continuo dialogo tra passato e presente, i contributi di Fano allo studio delle varietà tridimensionali forniscono ancora oggi spunti interessanti, come testimoniato dal recentissimo lavoro di M. Andreatta e R. Pignatelli (2023). È qui interpretato in chiave moderna l'articolo di Fano del 1949 – fino a questo momento "dimenticato" – in cui compare per la prima volta una threefold $M_3^{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ a curve-sezioni canoniche, cui gli autori hanno

[9] Cfr. [45], p. 83, Remark]. È Murre a mettere in evidenza questo aspetto: "Now the idea of Fano become clear: by projecting from a line on V we get another Fano V^* with lower g [i.e. p nella nostra notazione] (but with double points)".

attribuito il nome di *Fano Last Fano*. Fornendo diverse dimostrazioni delle affermazioni di Fano – corrette, ma quasi sempre non dimostrate – Andreatta e Pignatelli portano alla luce "la bellezza così come l'eleganza e la semplicità dell'esempio di Fano" [1], p. 5]. Evidenziano poi che la M_3^{22} considerata nello scritto del 1949 ha rango di Picard 2, motivo per cui non è isomorfa alla Fano threefold avente $p = 12$ nella classificazione di Iskovskikh. La *Fano Last Fano* individuata è infine costruita con gli strumenti moderni, come lo schema di Hilbert dei punti su una superficie. Mediante tale costruzione, gli autori individuano la corrispondente varietà di Fano all'interno della classificazione di Mori-Mukai. Attualmente un gruppo di studiosi coordinati da I. Cheltsov si sta occupando dello studio dell'esistenza di metriche di Kähler Einstein su questa *Fano Last Fano*, a conferma del fatto che l'eredità delle ricerche di Fano non è tutt'oggi esaurita.

In conclusione, le carte manoscritte prese in considerazione hanno contribuito a gettar luce sulle origini e sull'evoluzione delle pionieristiche ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali. L'approccio genetico qui adottato ha reso interpretabili i processi di scoperta, studio e rielaborazione scritta scaturiti dall'esigenza di produrre un discorso matematico coerente, elaborato da Fano tramite successive correzioni, ripensamenti e riadattamenti. Dal confronto con i lavori a stampa è emersa l'azione di selezione e riadattamento condotta da Fano all'atto della pubblicazione, insieme alla costante ricerca di nuove tecniche e strumenti di indagine geometrica che gli permettessero di affrontare il complesso studio delle threefolds.

Da un lato, quindi, l'analisi delle carte di Fano ha permesso di mettere in luce il processo sottostante alla sua produzione scientifica, al cui interno linguaggio, metodi e strumenti elaborati rivestono un ruolo determinante, così come il suo netto posizionamento all'interno della tradizione geometrica italiana che, in questi anni, dialoga con la Scuola di Cambridge. Dall'altro lato, l'esame storico-critico delle minute e delle successive pubblicazioni ha portato a una visione dell'opera di Fano su quelle varietà tridimensionali che ancora oggi portano il suo nome più "sfumata" rispetto a quella delineata dalla storiografia esistente, che aveva enfatizzato da un punto di vista prettamente interno i suoi punti di forza e di debolezza.

Funding Open access funding provided by Università degli Studi di Torino within the CRUI-CARE Agreement.

Data availability This case is not applicable for this paper.

Bibliografia

1. Andreatta, M., Pignatelli, R.: Fano's Last Fano. Atti Acc. Naz. Lincei (9) (in press) arXiv:2209.07390v2 [math.AG] (2023).
2. Aprile, G.: Sopra la involuzione non razionale di Enriques. Rass. Mat. Fis. **1**, 133–136 (1921)
3. Barrow-Green, J., Gray, J.: Geometry at Cambridge. Hist. Math. **33**, 315–356 (2006). https://doi.org/10.1016/j.hm.2005.09.002
4. Birkar, C., Cascini, P., Hacon, C.D., McKernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type. J. AMS **23**(2), 405–468 (2010)

5. Brigaglia, A., Ciliberto, C.: Geometria Algebrica. In: Di Sieno, S., Guerraggio, A., Nastasi, P. (eds.) La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali, pp. 185–320. Marcos y Marcos, Milano (1998)
6. Brigaglia, A., Ciliberto, C.: Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20^{th} century. Hist. Math. **31**, 310–319 (2004). https://doi.org/10.1016/j.hm.2003.09.003
7. Castelnuovo, G., Enriques, F.: Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Math. Ann. **48**, 241–316 (1897)
8. Castelnuovo, G.: La geometria algebrica e la scuola italiana. In: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3–10 Settembre 1928, vol. 1, pp. 191–201. Zanichelli, Bologna (1929)
9. Clemens, H.C., Griffiths, P.A.: The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. Math. **2**(95), 281–356 (1972)
10. Collino, A., Conte, A., Verra, A.: On the life and scientific work of Gino Fano. La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI (1) **7**, 99–137 (2014)
11. Conforto, F.: Il contributo italiano al progresso della geometria algebrica negli ultimi cento anni. In: Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839–1939, vol. 1, pp. 125–153. SIPS, Roma (1939).
12. Conte, A.: Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni. Pitagora, Bologna (1982)
13. Du Val, P.: Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(15), 276–279 (1932)
14. Du Val, P.: Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(15), 345–347 (1932)
15. Enriques, F.: Sopra una involuzione non razionale dello spazio. Rend. Acc. Naz. Lincei **5**(21), 81–83 (1912)
16. Fano, G.: Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti. Ann. Mat. Pura Appl. **3**(10), 251–285 (1904)
17. Fano, G.: Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli. Atti R. Acc. Sci. Torino **43**, 973–984 (1908)
18. Fano, G.: Osservazioni su alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli. Atti. R. Acc. Sci. Torino **50**, 1067–1072 (1915)
19. Fano, G.: A Preface to a Series of Special Lectures on 'Italian Geometry.' Walker, Shrewsbury (1923)
20. Fano, G.: Reti di complessi lineari dello spazio S5 aventi una rigata assegnata di rette-centri. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(11), 227–232 (1930)
21. Fano, G.: Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(11), 329–335 (1930)
22. Fano, G.: Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli. In: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3–10 Settembre 1928, vol. 4, pp. 115–121. Zanichelli, Bologna (1931)
23. Fano, G.: Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(15), 3–5 (1932)
24. Fano, G.: Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche. In: Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, pp. 329–349. Ist. Mat. della R. Università, Pavia (1936).
25. Fano, G.: Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche. Rend. Acc. Naz. Lincei **6**(23), 813–818 (1936)
26. Fano, G.: Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve–sezioni canoniche. Mem. R. Acc. d'Italia **8**, 23–64 (1937)
27. Fano, G.: Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche. In: Atti del I Congresso dell'UMI tenuto in Firenze nei giorni 1–2–3 aprile 1937, pp. 245–250. Zanichelli, Bologna (1938).
28. Fano, G.: Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche. Comm. Math. Helv. **14**, 193–201 (1942)
29. Fano, G.: Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve–sezioni canoniche. Comm. Math. Helv. **14**, 202–211 (1942)
30. Fano, G.: Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni. Rend. Acc. Naz. Lincei **8**(1), 463–466 (1946)
31. Fano, G.: Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve–sezioni canoniche. Comm. Acc. Pontif. **11**, 635–720 (1947)
32. Fano, G.: Su alcuni lavori di W.L. Edge. Rend. Acc. Naz. Lincei **8**(3), 179–185 (1947)
33. Fano, G.: Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve–sezioni canoniche. Rend. Acc. Naz. Lincei **8**(6), 151–156 (1949)
34. Fano, G.: Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **9**, 21–45 (1950)

35. Fano, R.: In Loving Memory of my Father Gino Fano. In: Collino, A., Conte, A., Marchisio, M. (eds.) The Fano Conference. Torino 29 September-5 October 2002, pp. 1–4. Dip. di Matematica, Torino (2004).
36. Gario, P. (ed.): Lettere e Quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo: corrispondenza con Gino Fano: http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/lettere_fano.htm (2010). Accessed 18 May 2023.
37. Giacardi, L. (ed.): Corrado Segre e la Scuola Italiana di Geometria Algebrica: http://www.corradosegre.unito.it/ (2013–23). Accessed 18 May 2023.
38. Iskovskikh, V.A., Manin, Y.I.: Three -dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. Sbornik: Mathematics 86.128, 140–166 (1971).
39. Iskovskikh, V.A.: Fano 3-folds. I. Math. URSS Izv. **11**, 485–527 (1977)
40. Iskovskikh, V.A.: Fano 3-folds. II. Math. URSS Izv. **12**, 469–506 (1978)
41. Luciano, E., Scalambro, E.: On Gino Fano's patrimony: Library and Miscellany. Riv. Storia Univ. Torino **10**(1), 45–73 (2021)
42. Monk, D.: Obituary: Professor W. L. Edge: 1904–1997. Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **41.3**, 631–641 (1998)
43. Mori, S., Mukai, S.: Classication of Fano 3-folds with B2 $\geq$ 2. manuscripta math. **36.2**, 147–162 (1981). (**Erratum 2003**, *ibid.* 110.3, 407)
44. Mukai, S.: Biregular classication of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. Proc. Nat. Acad. U.S.A. **86**, 3000–3002 (1989)
45. Murre, J.: Classification of Fano threefolds according to Fano and Iskovskikh. In: Conte, A. (ed.) Algebraic threefolds: proceedings of the 2nd 1981 session of the Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.), held at Varenna, Italy, June 15–23, 1981, pp. 35–92. Springer, Berlin (1982).
46. Murre, J.: On the work of Gino Fano on three-dimensional algebraic varieties. In: Brigaglia, A., Ciliberto, C., Sernesi, E. (eds.) Algebra e geometria (1860–1940): il contributo italiano, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 36, 219–229 (1994).
47. Roth, L.: Algebraic Threefolds. With Special Regard to Problems of Rationality. Springer, Berlin (1955)
48. Segre, B.: Leonard Roth. Bull. Lond. Math. Soc. **8**, 194–202 (1976)
49. Severi, F.: Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche. Rend. Acc. Naz. Lincei **5**(16), 337–344 (1907)
50. Shokurov, V.V.: Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold. Math. URSS Izv. **14**, 395–405 (1980)
51. Shokurov, V.V.: The existence of a straight line on Fano 3-folds. Math. URSS Izv. **15**, 173–209 (1980)
52. Terracini, A.: Gino Fano. Boll. UMI **3**(7), 485–490 (1952)
53. Togliatti, E.: Leonard Roth. Boll. UMI **3**(4), 326–332 (1970)
54. Tricomi, F.: Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario. Mem. R. Acc. Sci. Torino **4**(1), 1–120 (1962)