Covolumes, unités, régulateur: conjectures de D. Bertrand et F. Rodriguez-Villegas

Published version:

DOI:10.1007/s40316-019-00128-z

Covolumes, unités, régulateur : conjectures de D. Bertrand et F. Rodriguez-Villegas

Francesco Amoroso[(1)] et Sinnou David[(2)]

[(1)] *Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139*
Normandie Université, Université de Caen, Campus II, BP 5186
14032 Caen Cedex, France
et
CNRS UMI 3483 Fibonacci
Centro di Ricerca Matematica Ennio de Giorgi, Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 3
56126 Pisa, Italie

[(2)] *Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, CNRS UMR 7586*
Sorbonne Université, 4, place Jussieu
75005 Paris, France
et
CNRS UMI 2000 Relax
Chennai Mathematical Institute
H1, SIPCOT IT Park, Siruseri
Kelambakkam 603103, Inde

Résumé : nous étudions des conjectures de Bertrand et Rodriguez-Villegas sur le comportement du covolume de sous réseaux du groupe des unités (via le plongement logarithmique) et montrons que ces conjectures sont vraies dans plusieurs cas. Ces résultats prolongent nos résultats antérieurs ainsi que ceux de nombreux auteurs dont récemment Chinburg-Friedman-Sundstrom.

Abstract : we discuss two conjectures of Bertrand and Rodriguez-Villegas on the behavior of the (co)volume of subgroups of units (via the logarithmic embedding). We show several results in the direction of these conjectures. They extend some previous results of ourselves and others, among them recently Chinburg-Friedman-Sundstrom.

1 Introduction

Soit K un corps de nombres, de degré $d = [K : \mathbb{Q}]$, notons $\mathcal{O}_K^\star$ son groupe des unités de rang r_K. On considère le plongement logarithmique usuel

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{O}_K^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\sigma_K} \\ \varepsilon & \longmapsto & \mathcal{L}_K(\varepsilon) = (d_v \log|\varepsilon|_v)_{v \in M_{K,\infty}} \end{array} ,$$

où l'indice varie dans l'ensemble $M_{K,\infty}$ de cardinal $\sigma_K := r_K + 1$ des places archimédiennes de K (l'ordre étant sans importance) et où $d_v = [K_v : \mathbb{R}]$ est le degré local (valant 1 pour les places réelles et 2 pour les places complexes). On munit $\mathbb{R}^{\sigma_K}$ de la métrique euclidienne naturelle ; on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire correspondant. Dans ces conditions $\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^\star)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{\sigma_K}$, contenu dans l'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^{\sigma_K} x_i = 0$. C'est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang r_K.

Le problème de Lehmer, ouvert depuis les années 30, [Le] prédit une minoration de la hauteur de Weil logarithmique et absolue d'un nombre algébrique non nul α qui n'est pas une racine de l'unité, uniquement en termes du degré de son corps de définition. Rappelons que la hauteur de Weil logarithmique $h(\alpha)$ d'un nombre algébrique α de degré d est définie par :

$$dh(\alpha) = \log a + \sum_{j=1}^{d} \max(\log|\alpha_j|, 0) \quad ,$$

où $a \in \mathbb{N}$ est le coefficient directeur de l'équation minimale de α sur $\mathbb{Z}$ et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont les conjuguées algébriques de α. Le problème de Lehmer peut alors s'énoncer ainsi

Problème 1.1. *(Lehmer) Il existe un nombre réel $c >$ tel que si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\star \setminus \mu_\infty$ est un nombre algébrique non nul qui n'est pas une racine de l'unité, alors,*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \quad .$$

Ce problème peut ainsi être vu comme une prédiction sur le comportement du premier minimum du réseau $\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^\star)$ (où l'on munit cette fois $\mathbb{R}^{\sigma_K}$ de la métrique L_1 standard et où K est simplement $\mathbb{Q}(\alpha)$). En effet, une réduction facile permet de se ramener au cas où α est une unité. Et pour une unité α, on a $2[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]h(\alpha) = \|\mathcal{L}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\alpha)\|_1$.

A l'autre extrémité du spectre, si Λ est un sous-groupe discret de H, on dispose de la notion de covolume $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ défini comme étant le volume (pour la mesure de Lebesgue associée à cette normalisation) d'une maille fondamentale de Λ vu comme un réseau du sous-espace $\mathbb{R}\Lambda$ de H engendré par Λ. Si E est un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^\star$, on pose alors pour alléger $\mathrm{Vol}_K(E) = \mathrm{Vol}(\mathcal{L}_K(E))$. Plus explicitement, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ est une base quelconque de E,

$$\mathrm{Vol}_K(E)^2 = \sum_{\substack{J \subset M_{K,\infty} \\ \mathrm{Card}(J)=m}} \det\left(d_v \log|\varepsilon_i|_v\right)^2_{\substack{1 \leq i \leq m \\ v \in J}} \quad .$$

Ainsi $\mathrm{Vol}_K(\mathcal{O}_K^\star)$ sera simplement le covolume du groupe des unités $\mathcal{O}_K^\star$ *via* $\mathcal{L}_K$, c'est-à-dire le régulateur de K multiplié par $\sqrt{\sigma_K}$. Des minorations exponentielles en le degré sont connues depuis Zimmert (*confer* [Zi]).

Ces questions (étude du problème de Lehmer, étude du régulateur) sont cependant restées bien distinctes et ont connu des développements parallèles pendant plusieurs décennies. Dans le courant des années 90, D. Bertrand a proposé d'unifier ces questions en proposant l'étude du réseau euclidien $\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^\star)$.

On note $V(K,m)$ l'infimum de $\mathrm{Vol}_K(E)$, pour E parcourant les sous-groupes de rang m de $\mathcal{O}_K^\star$, et $V(m)$ l'infimum de $V(K,m)$ pour K parcourant les corps de nombres tels que $r_K \geq m$. Avec ces notations, une question posée en 1997 par D. Bertrand [Be, Problem (ii), (iii) p. 210] peut s'énoncer ainsi :

Question 1.2 (D. Bertrand)**.**

(i) Est-ce qu'il existe un entier $m \geq 2$ et une constante positive $c(m) > 0$ tel que

$$V(m) \geq c(m) \ ?$$

(ii) Est-ce qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout corps de nombres K (avec $r_K \geq 1$), on ait :

$$V(K,1) \geq c/\sqrt{r_K} \ ?$$

La question (i) a une réponse positive d'après [Am-Da, Corollaire 1.10], dès que $m \geq 3$. En fait, ce corollaire montre que pour tout corps de nombres de degré d et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c(m,\varepsilon) > 0$ tel que

$$V(K,m) \geq c(m,\varepsilon) d^{m/2-1-\varepsilon} \quad .$$

De façon indépendante, F. Rodriguez-Villegas a conjecturé en 2002 une minoration pour la norme L_1 d'un élément non trivial du produit extérieur $\wedge^m \mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^*)$. Cette conjecture a été ensuite renforcée (voir [Ch-Fr-Su], note de bas de page 1) et peut s'énoncer ainsi :

Conjecture 1.3 (F. Rodriguez-Villegas)**.** *Il existe deux constantes absolues $c_0 > 0$ et $c_1 > 1$ telles que pour tout corps de nombres K et pour tout entier m, $1 \leq m \leq r_K$, on ait pour tout $\omega \in \wedge^m \mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^*)$, $\omega \neq 0$:*

(i) $\|\omega\|_1 \geq c_0$ *(version faible) ;*

(ii) $\|\omega\|_1 \geq c_0 \cdot c_1^m$ *(version forte).*

Ici la norme $\|\cdot\|_1$ est par rapport à la base canonique de $\wedge^m \mathbb{R}^{\sigma_K}$ (pour plus de détails, le lecteur pourra se rapporter à l'introduction de [Ch-Fr-Su]). Ainsi, si $\omega = \mathcal{L}_K(\varepsilon_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}_K(\varepsilon_m)$ est un vecteur pur,

$$\|\mathcal{L}_K(\varepsilon_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}_K(\varepsilon_m)\|_1 = \sum_{\substack{J \subset M_{K,\infty} \\ \mathrm{Card}(J)=m}} \left| \det \left(d_v \log |\varepsilon_i|_v \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ v \in J}} \right| .$$

Remarquons que, pour m fixé, les versions faible et forte sont clairement équivalentes et la conjecture 1.3 devient l'analogue L_1 du problème de Bertrand ci-dessus.

Pour $m = 1$, la conjecture 1.3 est équivalente à un problème de Lehmer [Le] (ouvert depuis 1933) rappelé ci-dessus, problème 1.1 sur la hauteur des nombres algébriques. En effet, $\|\varepsilon\|_1 = 2dh(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^*$, où $h(\cdot)$ est la hauteur de Weil. A l'autre extrême, si $m = r_K$, la conjecture suit de la minoration exponentielle du régulateur d'un corps de nombres [Zi].

Remarquons aussi que, si pour des *petites* valeurs de m le choix de la norme est crucial (la conjecture est fausse pour $m = 1$ si l'on remplace la norme L_1 avec la norme L_2), pour des *grandes* valeurs de ce paramètre, on peut interchanger ces deux normes.

Ainsi, il peut paraître opportun d'unifier les questions de D. Bertrand et F. Rodrigues-Villegas, en reformulant cette dernière avec la norme L_2 et en nous limitant pour l'instant aux vecteurs *purs*, c'est-à-dire à des covolumes de sous-réseaux de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$. Nous nous bornerons pour le moment à considérer la conjecture 1.3 pour $m \geq 2$, en remplaçant comme dans la question 1.2 la norme L_1 avec la norme L_2 (ce qui la renforce), et en se limitant à des vecteurs purs. Cela conduit à l'énoncé suivant.

Conjecture 1.4 (D. Bertrand - F. Rodriguez-Villegas)**.**

(i) (version faible) Il existe deux constantes absolues $c_0 > 0$ et $c_1 > 0$ telles que pour tout entier $m \geq 2$, on ait $V(K,m) \geq c_0 \cdot c_1^m$;

(ii) (version forte) Dans l'énoncé (i) ci-dessus, on peut supposer $c_1 > 1$.

Comme pour la conjecture 1.3, pour m fixé les versions faibles et fortes sont clairement équivalentes. Remarquons également que la minoration (i) montrerait non seulement la partie (i) de la question 1.9 mais aussi que $V(m)$ ne décroit pas trop vite en fonction de m. Par ailleurs, la minoration (ii) impliquerait la version forte de la conjecture 1.3.

Parallèlement à la conjecture 1.3, où le cas $m = 1$ est équivalent au problème de Lehmer, ici le cas $m = 2$ implique un analogue de la conjecture de Schinzel-Zassenhaus [Sc-Za], formule (3), qui est elle-même une conséquence du problème de Lehmer (voir la fin du paragraphe 2). Le cas $m = 2$ semble donc hors de la portée des méthodes actuelles.

Etant un réseau euclidien, $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ est en particulier un fibré vectoriel hermitien (suivant la terminologie de J. B. Bost) et donc doté d'une hauteur, qui induit une hauteur sur $\wedge^m \mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ par passage de la structure hermitienne à la puissance extérieure. La conjecture 1.4 se lit donc (pour les vecteurs purs) comme l'assertion que la pente maximale [1] de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ est majorée *indépendamment de K* ou (pour un élément quelconque de

1. En réalité, un invariant légèrement plus fin que la pente maximale, le minimum $\mathrm{Vol}^{1/\mathrm{rg}}$ est pris ici sur les sous-réseaux de rang au moins 2.

$\wedge^m\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star))$ comme l'affirmation que le minimum absolu de la hauteur sur $\wedge^m\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ est minoré par $O(m)$. Le minimum absolu et la pente maximale sont évidemment des invariants très liés, nous renvoyons le lecteur à [Bo], [Bo-Ch], [Ga], [Ga-Re], [An] sur ces questions et des encadrements précis entre ces divers invariants. Vu sous cet angle, la question s'interprète bien sans restriction sur c_1. Evidemment, pour assurer que les covolumes tendent vers l'infini avec m, il est important d'être en mesure d'assurer $c_1 > 1$ (version forte (ii)).

Par ailleurs, la pente maximale et le minimum d'un réseau étant évidemment très liés (Minkowski, *confer* [Ga-Re], théorème 1.1 dans le contexte des fibrés hermitiens en incluant le théorème de Zhang), les covolumes et le premier minimum de la puissance extérieure $\wedge^m\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ sont très liés (*confer* [Ga-Re], théorème 7.1). Il convient toutefois de prêter attention aux constantes de comparaison qui dépendent du rang du réseau ambiant qui dans notre situation est *le* paramètre clef. Afin de conserver une unité de méthodes à ce texte, nous nous limiterons donc, comme dans les résultats partiels antérieurs en direction de ces conjectures, aux vecteurs ω purs, *i. e.* $\omega = \mathcal{L}_K(\varepsilon_1)\wedge\cdots\wedge\mathcal{L}_K(\varepsilon_m)$ où $\varepsilon_i \in \mathcal{O}_K^*$ sont des unités multiplicativement indépendantes (ce qui est équivalent à : $\omega \neq 0$) et reviendrons ultérieurement sur les invariants du réseau puissance extérieure $\wedge^m\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$.

Nous nous proposons de montrer trois familles de résultats en direction de cette conjecture. D'abord nous montrerons un résultat inconditionnel, valable pour des « petites valeurs » du paramètre m et qui généralise [Am-Da, Corollaire 1.10].

Théorème 1.5. *Soit K un corps de nombres de degré d et soit $m \le r_K$ un entier tel que :*

$$3 \le m \le d\exp\left(-35(\log 3d)^{3/4}(\log\log 3d)^{1/4}\right) .$$

1) Si $d \ge 10^{10^5}$,

$$V(K,m) \ge (d/m)^{m/25} .$$

2) Pour tout nombre réel $c_1 > 1$ il existe $c_0 = c_0(c_1,d) > 0$ tel que $V(K,m) \ge c_0 \cdot c_1^m$.

On montrera ensuite des résultats valables sous des contraintes arithmétiques qui portent sur le corps de nombre ou sur le sous-groupe du groupe des unités.

Rappelons que pour les corps de nombres totalement réels, la version forte de la conjecture 1.4 est satisfaite. Plus précisement, Phost [Po] et Costa-Friedman [Co-Fr] (voir également [Ch-Fr-Su], inégalités (4) et (5)) ont montré que, pour un corps K totalement réel de degré d,

$$V(K,m) \ge \frac{(d/m)^{m/2}1.406^m}{(m+2)\sqrt{m}} > 0.0002 \cdot 1.4^m$$

pour $1 \le m < d$. Ce résultat s'obtient à partir de la minoration de la hauteur pour un nombre algébrique totalement réel par $\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ (donc indépendante du degré du corps de définitions) due à A. Schinzel (*confer* [Sc]), et de la géométrie des nombres (minoration de la constante d'Hermite).

Dans le paragraphe 3, nous axiomatiserons (proposition 3.3) cette approche, en explicitant les liens sous-jacents entre la conjecture 1.4 et la théorie de ce qu'on appelle depuis Bombieri et Zannier [Bo-Za] les « corps ayant la propriété (B) », *i. e.* des sous-corps L de $\overline{\mathbb{Q}}$ où la hauteur de Weil est minorée par $c_L > 0$ en dehors des racines de l'unités. Nous montrerons que pour des corps de nombres contenus dans une de ces extensions, la version faible de la conjecture 1.4 est vraie (et aussi pour $m = 1$) pourvu que la ratio $m/[K : \mathbb{Q}]$ soit suffisamment petit (remarque 3.1). De plus, dans la direction de la version forte de la conjecture 1.4, on déduira une généralisation du résultat de [Po] et [Co-Fr] aux corps CM (corollaire 3.5, point 2)) et, à l'aide des minorations explicites de la hauteur de [Pot], aux corps de nombres K totalement p-adiques [2] pour p petit premier :

2. *i. e.* tels que p se décompose complètement dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in K$.

Théorème 1.6. *Soit p un nombre premier, K un corps de nombres totalement p-adique et m un entier, $1 \leq m \leq r_K$.*

1. Si $p \leq 7$, alors

$$V(K,m) \geq \frac{(\sigma_K/m)^{m/2} 1.22^m}{(m+2)\sqrt{m}} \geq 0.002 \cdot 1.2^m \quad .$$

2. Si $p \leq 31$ et K est totalement imaginaire,

$$V(K,m) \geq \frac{(\sigma_K/m)^{m/2} 1.067^m}{(m+2)\sqrt{m}} \geq 0.0005 \cdot 1.06^m \quad .$$

Naturellement, si l'on est prêt à accepter une minoration de la forme $c_0 \cdot c_1^m$ sans exiger $c_1 > 1$ (version faible de la conjecture 1.4), les restrictions sur p sont sans objet.

On regarde enfin des situations relatives à une extension. Soit L/K une extension de corps de nombres ; on note

$$E_{L/K} = \left\{ u \in \mathcal{O}_L^\star, N_{L/K}(u) \in K_{\mathrm{tors}}^\star \right\} \quad .$$

le sous-groupe des unités relatives. Nous montrerons le théorème suivant qui améliore un résultat récent de [Ch-Fr-Su].

Théorème 1.7. *Soit L un corps de nombres de degré D et soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}_L^\star$. On suppose qu'il existe un sous-corps K de L de degré $d \leq D/(400\log(3D))$ tel que $E_{L/K} \subset \Gamma$. Alors,*

$$\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \geq 1,1^D \quad .$$

Les preuves de nos résultats se basent essentiellement sur trois outils. Le premier, est un résultat en direction du problème de Lehmer en dimension supérieure [Am-Da, Théorème 1.6], qui permet de minorer la hauteur d'un point algébrique de $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$, le second, issu du travail de D. Bertrand [Be], permet de relier ces minorations de type Lehmer au produit des premiers minimums successifs du réseau $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ et donc d'estimer les co-volumes de ses sous-réseaux. Toutefois, cette approche de géométrie des nombres ne permet pas de traiter les sous-réseaux de rang très proche de r_K (c'est-à-dire de situations proches du régulateur) en raison du comportement des constantes de la géométrie des nombres (Minkowski, Hermite) en fonction de la dimension de l'espace ambiant (qui est dans le problème étudié ici le paramètre clef puisqu'il s'agit essentiellement du degré du corps de nombres étudié). Pour traiter la situation considérée dans le théorème 1.7, nous faisons donc appel au résultat de Friedman-Skoruppa (*confer* [Fr-Sk]), c'est-à-dire à des méthodes analytiques, qui permet justement d'estimer le covolume de sous-réseaux de grand rang, sous contrainte arithmétique.

Soit K un corps de nombre. Pour m entier strictement positif, notons, suivant [Be], $\mu_K(n) = \inf(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_n))$, où l'*infimum* des produits est pris sur des éléments α_i de K multiplicativement indépendants.

Le résultat suivant, du au premier auteur et E. Viada est une amélioration, avec une bien meilleure dépendance en la dimension de l'espace ambiant, de [Am-Da, Théorème 1.6]. Ce théorème est l'un de nos outils fondamentaux.

Théorème 1.8 ([Am-Vi], Corollary 1.6)**.** *Soit K un corps de nombres de degré d et $n \geq 1$ un entier. Alors*

$$\mu_K(n) \geq d^{-1}\big(1050 n^5 \log(3d)\big)^{-n^2(n+1)^2} \ .$$

Il résulte du théorème de Minkowski que si Λ est un sous-réseau de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ de rang m, son covolume est minoré en fonction des m premiers minima successifs de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_K^\star)$ par rapport à la boule unité de $\mathbb{R}^{\sigma_K}$ et plus précisément par la quantité $\mu_K(m)$. Nous rappelons cette minoration que l'on trouve dans [Be], équation (3.4') (en majorant le nombre de places archimédiennes de K par son degré et en minorant $\sqrt{\pi}$ par 1).

Théorème 1.9 ([Be] équation (3.4'))**.** *Soit K un corps de nombres de degré d. Alors :*

$$V(K,m) \geq (d/m)^{m/2}\mu_K(m) \ .$$

On notera que dans [Be], les hauteurs ne sont pas normalisées, d'où le facteur d^m ici.

Nous concluons cette introduction avec quelques autres remarques sur la conjecture 1.3. Soit K un corps de nombres. On s'intéresse donc à minorer :

$$\mathrm{Vol}_{1,K}(E) := \sum_{\substack{J\subset M_{K,\infty}\\ \mathrm{Card}(J)=m}} \left|\det\left(d_v \log|\varepsilon_i|_v\right)_{\substack{v\in J\\ 1\leq i\leq m}}\right| \ .$$

pour un sous-groupe E de $\mathcal{O}_K^*$ de rang m, et où $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ est une base quelconque de E. On remarque facilement que si L est un corps de nombres qui contient K, alors $\mathrm{Vol}_{1,L}(E) = [L:K]^m\mathrm{Vol}_{1,K}(E)$. On peut donc définir une hauteur $\mathcal{H}_m$ sur les sous-groupes E libres de rang m de $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}^*$ par :

$$\mathcal{H}_m(E) = \frac{\mathrm{Vol}_{1,K}(E)}{[K:\mathbb{Q}]^m} \ ,$$

où K est un corps de nombres quelconque tel que $E \subseteq \mathcal{O}_K^*$ (par exemple, $K = \mathbb{Q}(E)$). On remarquera que si l'on remplace les ε_i par des racines l_i-ièmes suffisamment génériques, la quantité $\mathcal{H}_m(E)$ est divisée par $l_1\cdots l_m$ et la quantité $[\mathbb{Q}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m):\mathbb{Q}]$ est multipliée par $l_1\cdots l_m$. Dès qu'on s'intéresse aux minorations de $\mathcal{H}_m$, la conjecture la plus forte que l'on peut donc formuler semble donc être la généralisation suivante de la conjecture de Lehmer :

Conjecture 1.10. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $m \geq 1$ il existe $c(m) > 0$ tel que pour des unités $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ multiplicativement indépendantes :*

$$\mathcal{H}_m(\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m\rangle) \geq \frac{c(m)}{[\mathbb{Q}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m):\mathbb{Q}]} \ .$$

Remarquons que la minoration prévue par la conjecture 1.10 donnerait (dans le language de la conjecture 1.3 et toujours dans le cas des vecteurs purs $\omega \in \wedge^m\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^*)$, $\omega \neq 0$) la minoration $\|\omega\|_1 \geq c(m)[K:\mathbb{Q}]^{m-1}$, bien plus forte, pour m fixé, de ce qui est prévu par la conjecture 1.3.

On remarquera également que l'on dispose de la majoration [3] :

$$\mathcal{H}_m(\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m\rangle) \leq 2^m h(\varepsilon_1)\cdots h(\varepsilon_m) \ . \tag{1.1}$$

3. Voir l'appendice pour une preuve.

La conjecture 1.10 implique donc une conséquence ([Am-Da, Conjecture 1.4]) de la conjecture de Lehmer en dimension supérieure (*confer* par exemple [Am-Da, Conjecture 1.3])), tout au moins si l'on se restreint aux unités algébriques.

On peut faire des considérations analogues pour le volume usuel $\mathrm{Vol}_K(E)$ par rapport à la norme L_2. Dans cette situation, il faut normaliser le volume en divisant par le facteur $[K:\mathbb{Q}]^{m/2}$ (*confer* lemme 4.2). Il en résulte que la hauteur L_2 possède à nouveau un bon comportement dès que l'on remplace les ε_i par des racines l_i-ièmes suffisamment génériques. On peut donc conjecturer que : On peut donc conjecturer que

$$\mathrm{Vol}_K(E) \geq c(m)[K:\mathbb{Q}]^{m/2-1}$$

pour tout sous-groupe E de $\mathcal{O}_K^*$ de rang m ; cet énoncé est cette fois une conséquence directe de la conjecture [Am-Da, Conjecture 1.4]. Cela explique le fait que dans nos résultats nous montrons des inégalités bien plus fortes (pour les petits rangs) que celles prévues par des simples applications de variantes de la conjecture de F. Rodriguez-Villegas.

Remerciements. Nous remercions U. Zannier et D. Roy qui ont attiré notre attention sur l'article [Ch-Fr-Su] de T. Chimburg, E. Friedman et J. Sundstrom complété par l'appendice de F. Rodrigues-Villegas. Cet article a largement inspiré notre rédaction, nous remercions chaleureusement leurs auteurs.

2 Petites valeurs du spectre

Soit K un corps de nombres, et n un entier strictement positif. Enonçons d'abord une minoration pour $V(K,m)$ (apparement faible mais qui nous sera néanmoins utile dans la suite) qui découle de minorations de la hauteur « à la Dobrowolski ». On montrera ensuite un résultat bien plus performant (théorème 1.5) en utilisant le théorème 1.8. Rappelons que $\mu_K(n) = \inf(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_n))$, où l'infimum est pris sur des éléments α_i de K multiplicativement indépendants.

Lemme 2.1. *Soit K un corps de nombres de degré d. Alors, pour $1 \leq m \leq r_K$,*

$$V(K,m) \geq (2d^2)^{-d} \ .$$

Démonstration : soit $\alpha \in \mathcal{O}_K^\star \setminus K_{\mathrm{tors}}^\star$. Alors par [Vo, Corollary 2],

$$h(\alpha) \geq \log 2 \qquad \text{si } d=1 \text{ et}, \quad h(\alpha) \geq 2d^{-1}\log(3d)^{-3} \geq \frac{1}{2d^2} \quad \text{si } d>1. \tag{2.1}$$

Dans les deux cas, $h(\alpha) \geq (2d^2)^{-1}$. Donc $\mu_K(m) \geq (2d^2)^{-m}$. On applique le théorème 1.9 en tenant compte de $m \leq d$ et on en déduit

$$V(K,m) \geq (d/m)^{m/2}\mu_K(m) \geq (2d^2)^{-d} \ .$$

□

Nous nous attachons maintenant à donner des minorations explicites du produit des premiers minimums successifs de $\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^\star)$ (pour des rangs relativement petits par rapport au degré).

Pour simplifier les notations, pour $t > e$ on pose

$$l(t) = \frac{\log(t)}{\log\log(t)} \quad .$$

On remarque que $t \mapsto l(t)$ est croissante et $\leq \log t$ dans l'intervalle $]e^e, +\infty[$.

On utilisera la conséquence suivante du théorème 1.8.

Lemme 2.2. *Soit K un corps de nombres de degré $d \geq 10^{10^5}$ et soit $n \geq 1$ un entier.*

(i) Supposons $3 \leq n \leq 8$. Alors

$$\mu_K(n) \geq (3d)^{-0.35n} \quad .$$

(ii) Supposons $n \leq l(3d)^{1/4} - 1$. Alors

$$\mu_K(n) \geq (3d)^{-4} \quad .$$

Démonstration : par le théorème 1.8

$$\mu_K(n) \geq e^{-U}$$

avec

$$U = \log d + n^2(n+1)^2 \log\left(1050n^5 \log(3d)\right) \quad .$$

Montrons d'abord *(i)*. Par hypothèse $d \geq 10^{10^5}$ et $3 \leq n \leq 8$. Donc, par calcul,

$$U \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{n(n+1)^2 \log\left(1050n^5\right)}{\log(3d)} + \frac{n(n+1)^2}{l(3d)}\right) n \log(3d) \leq 0.35n \log(3d) \quad .$$

Montrons maintenant *(ii)* ; par hypothèse $d \geq 10^{10^5}$ et $n \leq l(3d)^{1/4} - 1$. Donc $n^2(n+1)^2 \leq l(3d)$ et

$$\begin{aligned} \log\left(1050n^5 \log(3d)\right) &\leq \log(1050) + \frac{5}{4} \log l(3d) + \log\log(3d) \\ &\leq \left(\frac{\log(1050)}{\log\log(3 \times 10^{10^5})} + \frac{9}{4}\right) \log\log(3d) < 3 \log\log(3d) \quad . \end{aligned}$$

On obtient :

$$U \leq \log(3d) + l(3d) \times 3 \log\log(3d) = 4 \log(3d) \quad .$$

□

La constante numérique 10^{10^5} qui apparaît dans l'énoncé précédent peut probablement être améliorée, au prix d'une inspection directe des preuves de [Am-Vi].

Preuve du théorème 1.5 : par le théorème 1.9,

$$V(K, m) \geq (d/m)^{m/2} \mu_K(m) \tag{2.2}$$

où l'on a noté comme auparavant $\mu_K(m) = \inf(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_m))$, l'infimum étant pris sur des éléments α_i de K multiplicativement indépendants. On montre la première affirmation du théorème. Supposons donc $d \geq 10^{10^5}$. On sépare deux cas.

Premier cas : $3 \leq m \leq 8$.
Par (4.2) et par le lemme 2.2, *(i)* avec $n = m$,

$$V(K,m) \geq (d/m)^{m/2}(3d)^{-0.35m} = \left(3^{-0.35}m^{-0.46}d^{0.11}\right)^m (d/m)^{m/25} \geq (d/m)^{m/25}$$

(car $3^{-0.35}m^{-0.46}d^{0.11} > 1$ pour $m \leq 8$ et $d \geq 2\cdot 10^5$).

Deuxième cas : $9 \leq m \leq d\exp\left(-35(\log 3d)^{3/4}(\log\log 3d)^{1/4}\right)$.
Notons $n_0 := \left\lfloor l(3d)^{1/4}\right\rfloor - 1$ et écrivons la division euclidienne $m = qn_0 + r$, où $q = \lfloor m/n_0\rfloor$ et $0 \leq r < n_0$. On a trivialement $\mu_K(m) \geq \mu_K(n_0)^q\mu_K(r)$. Par (4.2) et par le lemme 2.2, *(ii)*) (deux fois : avec $n = n_0$, puis avec $n = r$)

$$V(K,m) \geq (d/m)^{m/2}(3d)^{-4(q+1)} = (d/m)^{m/25}e^{mU_{d,q}(m)}$$

où

$$U_{d,q}(m) := \frac{23}{50}\log(d/m) - \frac{4(q+1)}{m}\log(3d) \quad .$$

Nous nous proposons de montrer que $U_{d,q}(m) \geq 0$.

Supposons d'abord $q = 0$, *i. e.* $m < n_0$. La fonction $m \mapsto U_{d,0}(m)$ est alors croissante (car $m \leq n_0 \leq l(3d)^{1/4} \leq \log(3d) \leq \frac{4\cdot 50}{23}\log(3d)$). Donc $U_{d,0}(m) \geq U_d(9) = \frac{23}{50}\log(d/9) - \frac{4}{9}\log(3d) > 0$ (car $d \geq 8\cdot 10^{41}$).

Supposons maintenant $q \geq 1$. On a $l(3d) > 4^4$ (car $d \geq 2\cdot 10^{841}$), d'où $n_0 \geq l(3d)^{1/4} - 2 \geq \frac{1}{2}l(3d)^{1/4}$. Par ailleurs $m < d\exp\left(-35(\log 3d)^{3/4}(\log\log 3d)^{1/4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{4(q+1)}{m}\log(3d) \leq \frac{8\log(3d)}{n_0} &\leq \frac{16\log(3d)}{l(3d)^{1/4}}\\ &= 16(\log 3d)^{3/4}(\log\log 3d)^{1/4} \leq \frac{16}{35}\log(d/m) < \frac{23}{50}\log(d/m)\end{aligned}$$

et à nouveau $U_{d,q}(m) > 0$.

Il ne reste plus qu'à montrer la deuxième affirmation. Soit $c_1 > 1$. Fixons $d_0 \geq 10^{10^5}$ tel que

$$\exp\left(35(\log 3d_0)^{3/4}(\log\log 3d_0)^{1/4}\right) \geq c_1^{25} \quad .$$

Donc $(d/m)^{1/25} \geq c_1$ pour $d \geq d_0$. Posons

$$c_0 := \left(d_0^3 \cdot c_1\right)^{-d_0} \quad .$$

Supposons d'abord $d < d_0$. Alors, en tenant compte du lemme 2.1,

$$V(K,m) \geq (2d_0^2)^{-d_0} \geq d_0^{-3d_0} \geq c_0 \cdot c_1^m \quad .$$

Supposons maintenant $d \geq d_0$. La première partie du théorème 1.5 assure :

$$V(K,m) \geq (d/m)^{m/25} \geq c_1^m \quad .$$

$\square$

A nouveau, la constante numérique 35 qui apparaît dans la preuve précédente peut probablement être améliorée, au prix de calculs plus lourds que nous épargnons au lecteur.

La minoration de $\mu_K(n)$ du théorème 1.8 n'est probablement pas optimale, ni par rapport à sa dépendance dans le degré $d = [K : \mathbb{Q}]$, ni par rapport à la dimension ambiante n. Une meilleure minoration conduirait, *via* le théorème 1.9, à un résultat plus fort dans le direction de la conjecture 1.4. Plus précisément :

Remarque 2.3. *Soit* $\varepsilon : (\mathbb{N}^*)^2 \to]0, 1]$ *une fonction et soit* K *un corps de nombres de degré* d *tel que* $\mu_K(m) \geq \varepsilon(m, d)^m$ *si* $1 \leq m \leq \varepsilon(m, d)^2 d$. *Alors pour tout* $c_1 > 1$ *on a :*

$$V(K, m) \geq c_1^m$$

dès que $1 \leq m \leq \varepsilon(m, d)^2 (d/c_1)^2$.

Nous concluons ce paragraphe avec une remarque à propos du cas $m = 2$ de la conjecture 1.4. Soit α un entier algébrique de degré d qui n'est pas une racine de l'unité. La conjecture de Schinzel-Zassenhaus (*confer* [Sc-Za]) prévoit alors la minoration c/d pour le logarithme de ce qu'on appelé autrefois la *maison* de α (le maximum des valeurs absolues de ses conjugués) et où $c > 0$ est une constante absolue. Il s'agit d'une conséquence de la conjecture de Lehmer. Pour des unités algébriques ε on peut affaiblir la conjecture de Schinzel-Zassenhaus et s'attendre au même type de minoration pour $\|\mathcal{L}_{\mathbb{Q}(\varepsilon)}(\varepsilon)\|_\infty$.

Montrons que le cas $m = 2$ de la conjecture 1.4 implique cette version faible de la conjecture de Schinzel-Zassenhaus. Supposons qu'il existe une suite d'unités non de torsion ε_n de degré d_n telle que $\|\mathcal{L}_{\mathbb{Q}(\varepsilon_n)}(\varepsilon_n)\|_\infty < 1/(nd_n)$ pour tout n. Choisissons une unité non de torsion quelconque, par exemple $\varepsilon = \sqrt{2} + 1$. On vérifie que pour n assez grand ε et ε_n sont multiplicativement indépendants et donc $E_n = \langle \varepsilon, \varepsilon_n \rangle$ est un sous-groupe de rang 2 du groupe des unités de $K_n = \mathbb{Q}(\varepsilon, \varepsilon_n)$ dont on note D_n le degré. Pour toute place archimédienne v et w de K_n, la valeur absolue du déterminant dont les lignes sont $(d_v \log |\varepsilon|_v, d_w \log |\varepsilon|_w)$ et $(d_v \log |\varepsilon_n|_v, d_w \log |\varepsilon_n|_w)$ est $\leq 2d_v d_w \log(\varepsilon)/(nd_n) < 8/(nd_n)$. Il y a au plus $D_n^2/2$ déterminants, où $D_n = [K_n : \mathbb{Q}] \leq 2d_n$. Donc

$$\mathrm{Vol}_K(E_n)^2 < 2d_n^2 \cdot \left(\frac{8}{nd_n}\right)^2 = \frac{128}{n^2} \to 0 \ .$$

3 Résultats sous contraintes arithmétiques, I. Corps ayant la propriété (B)

Pour certains corps de nombres ayant des propriétés arithmétiques spéciales (corps totalement réels, corps de type CM, corps totalement p-adiques pour des petits premiers $p, \ldots$) la conjecture 1.4 forte est satisfaite. Cela découle d'une part du théorème 3.3 ci-dessous qui axiomatise des résultats antérieurs de [Po] et [Co-Fr], et d'autre part de la théorie de ce qu'on appelle depuis Bombieri et Zannier [Bo-Za] « corps ayant la propriété (B) ».

Une sous-extension (potentiellement infinie) $L/\mathbb{Q}$ de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ a la propriété (B) s'il existe $c = c_L > 0$ tel que pour tout $\alpha \in L^\star \backslash L^\star_{\mathrm{tors}}$ on a : $h(\alpha) \geq c$. On connait plusieurs exemples de corps ayant la propriété (B), par exemple le compositum $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$ des extensions totalement réelles (*cf.* [Sc]), l'extension abélienne maximale $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ (*cf.* [Am-Dv]) ou encore, pour p premier, le corps $\mathbb{Q}^{tp}$ des nombres α algébriques totalement p-adiques, *i. e.* tels que p se décompose complètement dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ (*cf.* [Bo-Za]), ou encore le corps engendré par les points de torsion d'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ (*confer* [Ha]). Pour plus d'exemples le lecteur pourra se rapporter à [Am-Da-Za].

Depuis cette définition, et à l'aide du Théorème 1.9 on déduit immédiatement :

Remarque 3.1. *Soit L une extension ayant la propriété (B) (avec constante c_L). Soit $K \subseteq L$ un corps de nombres de degré d. Alors*

$$V(K,m) \geq \left(c_L\sqrt{d/m}\right)^m \quad .$$

En particulier, la version faible de la conjecture 1.4 est vérifiée, dès que l'infimum que définit $V(m)$ est pris sur les sous-corps d'une extension L fixée ayant la propriété (B).

Pour les applications à la conjecture 1.4 nous n'avons pas besoin de minorations pour la hauteur d'un nombre algébrique arbitraire, seules les unités algébriques jouent un rôle. Cette remarque est importante dans la suite pour deux raisons. D'une part, certaines extensions n'ont pas la propriété (B), cependant la hauteur de leurs unités qui ne sont pas de torsion est uniformément minorée par $c > 0$ (c'est le cas par exemple du compositum $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}(i)$ de toute les extensions CM, voir [Am-Da-Za, Theorem 5.3 et Remark 5.2] et [Sc]). D'autre part, les minorations de la hauteur dans d'autres extensions ayant cette fois la propriété (B) peuvent être améliorées dès qu'on se restreint aux unités, et cela a une importance pour tester la validité de la version faible de la conjecture 1.4. C'est le cas par exemple des corps $\mathbb{Q}^{tp}$ (voir [Pot]) des nombres α totalement p-adiques (*i. e.* tels que p se décompose complètement dans $\mathbb{Q}(\alpha)$).

Définition 3.2. *Soit K un corps de nombre. On pose*

$$u_K := \inf\{h(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\star \backslash K^\star_{\mathrm{tors}}\} \quad .$$

Avec cette définition, nous pouvons généraliser [Po, §9, p.364] et [Co-Fr, Theorem 4] :

Proposition 3.3. *Soit K un corps de nombres. Pour $1 \leq m \leq r_K$ on a :*

$$V(K,m) \geq \frac{(\sigma_K/m)^{m/2}(2\sqrt{\pi e}\,\rho_K u_K)^m}{(m+2)\sqrt{m}} \quad .$$

où l'on a noté $\rho_K = \sigma_K/[K:\mathbb{Q}] \in [1,2]$.

Démonstration : on suit la preuve de [Co-Fr, Theorem 4]. Soit E un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^\star$ de rang m. Nous devons montrer :

$$\mathrm{Vol}_K(E) \geq \frac{(\sigma_K/m)^{m/2}(2\sqrt{\pi e}\,\rho_K u_K)^m}{(m+2)\sqrt{m}} \quad . \tag{3.1}$$

Par la géométrie des nombres on trouve une unité $\varepsilon \in E \backslash E_{\mathrm{tors}}$ telle que

$$\|\mathcal{L}_K(\varepsilon)\|_2 \leq \sqrt{\gamma_m}\,\mathrm{Vol}_K(E)^{1/m} \quad ,$$

où γ_m est la constante d'Hermite ([Gr-Le, p. 386]). Par l'inégalité d'Hölder,

$$2[K:\mathbb{Q}]h(\varepsilon) = \|\mathcal{L}_K(\varepsilon)\|_1 \leq \sigma_K^{1/2}\|\mathcal{L}_K(\varepsilon)\|_2$$

Donc, en tenant compte de $[K:\mathbb{Q}] = \rho_K\sigma_K$ et de $h(\varepsilon) \geq u_K$,

$$\mathrm{Vol}_K(E)^{1/m} \geq \frac{2[K:\mathbb{Q}]h(\varepsilon)}{(\sigma_K\gamma_m)^{1/2}} \geq 2(\sigma_K/m)^{1/2}(m/\gamma_m)^{1/2}\rho_K u_K \ .$$

Si $m=1$ on a $\gamma_1 = 1$ et (3.1) suit en tenant compte de $\sqrt{\pi e} < 3$. Supposons donc $m \geq 2$. On utilise alors les inégalités

$$\gamma_m < \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\Gamma(m/2)\right)^{2/m} \qquad \text{([Gr-Le, p. 387]) ;}$$

$$\Gamma(x) \leq (x/e)^x(2\pi/x)^{1/2}e^{1/(12x)} \qquad \text{([Wh-Wa, p. 253])}$$

pour majorer γ_m/m :

$$\frac{\gamma_m}{m} < \frac{1}{m}\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{(m+2)m}{4}\right)^{2/m}\cdot\frac{m}{2e}\left(\frac{4\pi}{m}\right)^{1/m}\exp\left(\frac{1}{6m}\cdot\frac{2}{m}\right) = \frac{(m+2)^{2/m}m^{1/m}}{\pi e}\cdot R^{1/m} \ ,$$

où $R = \frac{\pi\exp(1/(3m))}{4m} < 1$ (car $m \geq 2$). L'inégalité (3.1) suit.

□

Le lemme suivant permet de se débarrasser du dénominateur $(m+2)\sqrt{m}$ dans l'inégalité de cette proposition.

Lemme 3.4. *Soient c, m deux nombres réels avec $c \in]1,2]$ et $m \geq 1$. Alors*

$$\frac{c^m}{(m+2)\sqrt{m}} > \log(c)^{3/2} \ .$$

On laisse la vérification de ce lemme en exercice.

A l'aide d'une minoration de la hauteur due à Schinzel [Sc], on retrouve (sans surprise) le résultat de [Po] et [Co-Fr] : tout corps de nombres totalement réel satisfait (uniformément) la conjecture 1.4. Cela reste valable pour les corps CM, ce qui ne semble pas avoir été remarqué dans ce contexte.

Corollaire 3.5.

(i) Soit K un corps de nombres totalement réel de degré d et soit $m < d$ un entier. Alors,

$$V(K,m) \geq \frac{(d/m)^{m/2}1.406^m}{(m+2)\sqrt{m}} \geq \frac{1.406^m}{(m+2)\sqrt{m}} > 0.0002\cdot 1.4^m \ .$$

(ii) Si K est un corps de nombres CM de degré d et $m < d/2$ est un entier, alors

$$V(K,m) \geq \frac{(d/(2m))^{m/2}2.812^m}{(m+2)\sqrt{m}} \geq \frac{2.812^m}{(m+2)\sqrt{m}} > 0.0002\cdot 2.8^m \ .$$

Démonstration : par le résultat de [Sc] déjà cité, pour tout corps de nombres K totalement réel ou CM on a :

$$u_K \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad .$$

On utilise la proposition 3.3. Si K est totalement réel, alors $\sigma_K = [K:\mathbb{Q}]$ et $\rho_K = 1$. Si K est CM, alors $\sigma_K = [K:\mathbb{Q}]/2$ et $\rho_K = 2$. On calcule : $2\sqrt{\pi e}\, u_K \geq 1.406$ et $4\sqrt{\pi e}\, u_K \geq 2.812$. On utilise ensuite le lemme 3.4 avec $c = 1.406/1.4 = 2.812/2.8$ et on minore $\log(c)^{3/2}$ par 0.0002.

□

Soit p un nombre premier. On pose

$$u_p := \begin{cases} \log(2) & \text{si } p = 2 \ ; \\ 0.294061 & \text{si } p = 3 \ ; \\ \dfrac{\log(p/2)}{p-1} & \text{si } p \geq 5 \ . \end{cases}$$

Pottmeyer ([Pot, Theorem 1.1, Theorem 1.2], voir aussi [Fi] pour des inégalités similaires) a montré que si K est un corps de nombres totalement p-adique, alors $u_K \geq u_p$. En utilisant ce résultat, on obtient :

Corollaire 3.6. *Soit p un nombre premier, K un corps de nombres totalement p-adique et m un entier, $1 \leq m \leq r_K$. Alors*

$$V(K,m) \geq \frac{(\sigma_K/m)^{m/2}(2\sqrt{\pi e}\,\rho_K u_p)^m}{(m+2)\sqrt{m}}$$

où l'on a noté $\rho_K = \sigma_K/[K:\mathbb{Q}] \in [1,2]$.

On vérifie que $2\sqrt{\pi e}\, u_p \geq 1.22$ pour $p \leq 7$ et que $4\sqrt{\pi e}\, u_p \geq 1.067$ pour $p \leq 31$, ce qui montre le théorème 1.6 annoncé dans l'introduction, en tenant compte de l'inégalité $\sigma_K < m$, de l'inégalité du lemme 3.4 et des inégalités numériques : $\log(1.22/1.2)^{3/2} > 0.002$, $\log(1.067/1.06)^{3/2} > 0.0005$.

4 Résultats sous contraintes arithmétiques, II. Groupes contenant des unités relatives

Soit L/K une extension finie de corps de nombres. Notons $d = [K:\mathbb{Q}]$ et $D = [L:\mathbb{Q}]$. On a alors deux notions de covolume, par rapport au plongements logarithmiques $\mathcal{L}_K$ et $\mathcal{L}_L$. En cas d'ambiguïté, les deux notions de covolumes seront notées respectivement $\mathrm{Vol}_K(\cdot)$, $\mathrm{Vol}_L(\cdot)$. On rappelle que $E_{L/K} = \left\{u \in \mathcal{O}_L^\star, N_{L/K}(u) \in K^\star_{\text{tors}}\right\}$ est le sous-groupe des unités relatives. Son rang est $r_L - r_K$.

Soit E un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^\star$. On observe que $\mathcal{L}_K(\mathcal{O}_K^\star)$ s'injecte naturellement dans $\mathcal{L}_L(\mathcal{O}_L^\star)$ via le plongement diagonal de $\iota : \mathbb{R}^{\sigma_K} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\sigma_L}$ ($|\varepsilon|_v = |\varepsilon|_w$ pour $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^*$ et pour toute place v de L divisant une place archimédienne w donnée de K). On notera $\mathrm{Vol}_L(E)$ le covolume de $\iota \circ \mathcal{L}_K(E)$.

On observe que le covolume des unités relatives est relié à celui des unités de chacun des corps : il s'agit d'un argument ancien qui semble remonter au moins à Herbrand (*confer* [He]) et utilisé explicitement dans ce contexte par Costa-Friedman [Co-Fr], lemme 2.1 ; nous en reproduisons une preuve pour la commodité du lecteur :

Lemme 4.1. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathcal{O}_L^\star$ *de rang* m *qui contient* $E_{L/K}$*. On a alors*

$$I_\Gamma \mathrm{Vol}_L(\Gamma) = \mathrm{Vol}_L(E_{L/K}) \cdot \mathrm{Vol}_L(\Gamma \cap \mathcal{O}_K^\star) \ , \tag{4.1}$$

où $I_\Gamma = [\Gamma : E_{L/K} \cdot (\Gamma \cap \mathcal{O}_K^*)]$*. De plus* I_Γ *divise* $I_{\mathcal{O}_L^*}$ *et donc*

$$\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \geq \frac{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_L^\star)\mathrm{Vol}_L(\Gamma \cap \mathcal{O}_K^\star)}{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_K^\star)} \ . \tag{4.2}$$

Démonstration : on remarque tout d'abord que $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(E_{L/K})$ et $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(\mathcal{O}_K^\star)$ sont en somme directe orthogonale. En effet, si $x \in \mathcal{L}_L(E_{L/K})$ et $y \in \mathcal{L}_L(\mathcal{O}_K^\star)$, v est une place archimédienne de K, on a $\sum_{w|v} x_w = 0$ (la norme $N_{L/K}(x)$ est une racine de l'unité) d'une part et $\forall w_1, w_2$ divisant v, $y_{w_1} = y_{w_2}$ d'autre part (on note x_w, y_w la coordonnée d'indice w des vecteurs x, y respectivement). Donc

$$\langle x, y\rangle = \sum_v \sum_{w|v} x_w y_w = \sum_v y_w \sum_{w|v} x_w = 0$$

et l'orthogonalité des sous-espaces $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(E_{L/K})$ et $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(\mathcal{O}_K^\star)$ en découle par linéarité. En particulier, $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(E_{L/K})$ et $\mathbb{R}\mathcal{L}_L(\Gamma \cap \mathcal{O}_K^\star)$ sont en somme directe orthogonale. Par ailleurs, la somme de leur rang est la même que le rang de Γ. Ainsi, $E' := E_{L/K} \cdot (\Gamma \cap \mathcal{O}_K^*)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ, et $\mathrm{Vol}_L(E') = \mathrm{Vol}_L(E_{L/K})\mathrm{Vol}_L(E)$. La formule (4.1) suit car

$$\mathrm{Vol}_L(E') = [\Gamma : E']\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \ .$$

Montrons la deuxième affirmation. On considère le morphisme : $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{O}_L^\star/(\mathcal{O}_K^\star E_{L/K})$ (inclusion composée avec le passage au quotient). Le noyau de cette flèche π est $\Gamma \cap (\mathcal{O}_K^\star E_{L/K}) = E'$ (car $E_{L/K} \subset \Gamma$ par hypothèse[4]). On en déduit que π passe au quotient et induit une flèche injective $\Gamma/E' \longrightarrow \mathcal{O}_L^\star/(\mathcal{O}_K^\star E_{L/K})$, ce qui montre que I_Γ divise $I_{\mathcal{O}_L^*}$.

Enfin, en remplaçant dans (4.1) Γ par $\Gamma = \mathcal{O}_L^*$, on obtient

$$I_{\mathcal{O}_L^*}\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_L^*) = \mathrm{Vol}_L(E_{L/K}) \cdot \mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_K^\star) \ ,$$

et, en divisant (4.1) par cette égalité,

$$\frac{I_\Gamma}{I_{\mathcal{O}_L^*}} \cdot \frac{\mathrm{Vol}_L(\Gamma)}{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_L^*)} = \frac{\mathrm{Vol}_L(\Gamma \cap \mathcal{O}_K^\star)}{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_K^\star)} \ .$$

L'inégalité (4.2) suit en tenant compte de la relation de divisibilité des indices.

□

4. Et en utilisant l'exercice suivant : soit G un groupe commutatif et H_1, H_2, N trois sous-groupes. On suppose $H_1 \subseteq H_2$. Alors $H_2 \cap NH_1 = H_1(H_2 \cap N)$.

On compare enfin Vol_K et Vol_L pour les sous-groupes de $\mathcal{O}_K^\star$: là encore, c'est classique, Costa-Friedman l'ont fait avec une normalisation légèrement différente (chaque place complexe est répétée sur deux lignes, et le degré local est supprimé), du plongement logarithmique du à Bergé–Martinet, *confer* [Be-Ma], cette dernière normalisation (bien meilleure dans ce contexte) conduit à une formule exacte, alors que nous devons nous contenter d'une inégalité (*confer* [Co-Fr], formule (2.5)) ; nous avons toutefois préféré nous en tenir au plongement logarithmique classique pour faciliter la lecture.

Lemme 4.2. *Supposons que E soit un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^\star$ de rang m, alors*

$$[L:K]^{m/2}\mathrm{Vol}_K(E) \leq \mathrm{Vol}_L(E) \leq 2^{m/2}[L:K]^{m/2}\mathrm{Vol}_K(E) \ .$$

Démonstration : par définition, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ est une base quelconque de E

$$\mathrm{Vol}_K(E)^2 = \sum_{\substack{J \subset M_{K,\infty} \\ \mathrm{Card}(J)=m}} \det\left(d_v \log(|\varepsilon_i|_v)\right)^2_{\substack{v\in J \\ 1\leq i\leq m}} \ ,$$

et de même, en notant $\tau \colon M_L \to M_K$ le morphisme de restriction à K,

$$\mathrm{Vol}_L(E)^2 = \sum_{\substack{J' \subset M_{L,\infty} \\ \mathrm{Card}(J')=m}} \det\left(d_w \log(|\varepsilon_i|_{\tau(w)})\right)^2_{\substack{w\in J' \\ 1\leq i\leq m}} \ ,$$

car $\varepsilon_i \in K$. On remarque qu'un déterminant dans le membre de droite de la formule définissant $\mathrm{Vol}_L(E)$ est nul dès lors qu'il existe deux places w divisant une même place v de K (deux lignes identiques à éventuellement un facteur 2 près). On peut donc restreindre la somme aux ensembles $J' \subset M_{L,\infty}$ tels que $\tau(J')$ est un sous-ensemble de cardinal m de $M_{K,\infty}$. Pour un tel J' on a :

$$\det\left(d_w \log(|\varepsilon_i|_{\tau(w)})\right)_{\substack{w\in J' \\ 1\leq i\leq m}} = \left(\prod_{w\in J'} \frac{d_w}{d_{\tau(w)}}\right) \det\left(d_v \log(|\varepsilon_i|_v)\right)_{\substack{v\in\tau(J') \\ 1\leq i\leq m}} \ .$$

En réarrangeant les termes,

$$\mathrm{Vol}_L(E)^2 = \sum_{\substack{J \subset M_{K,\infty} \\ \mathrm{Card}(J)=m}} \det\left(d_v \log(|\varepsilon_i|_v)\right)^2_{\substack{v\in J \\ 1\leq i\leq m}} \sum_{\substack{J' \subset M_{L,\infty} \\ \tau(J')=J}} \prod_{w\in J'} \left(\frac{d_w}{d_{\tau(w)}}\right)^2 \ .$$

Il nous reste à calculer la dernière somme. Fixons $J \subset M_{K,\infty}$. On a

$$\sum_{\substack{J' \subset M_{K,\infty} \\ \tau(J')=J}} \prod_{w\in J'} \left(\frac{d_w}{d_{\tau(w)}}\right)^2 = \prod_{v\in J} \sum_{\substack{w\in M_L \\ w|v}} \left(\frac{d_w}{d_v}\right)^2 \ .$$

Soit $v \in J$. Si v est une place complexe (*i. e.* $d_v = 2$) et $w \mid v$, alors $d_w = 2$ et donc $\sum_{w|v}(d_w/d_v)^2 = [L:K]$. Si v est réel, $d_w = 1$ ou $d_w = 2$, mais $d_v = 1$: dans les deux cas, le quotient $d_w/d_v \geq 1$.

$$\sum_{w|v}(d_w/d_v)^2 = \sum_{\substack{w|v \\ d_w=1}} 1 + \sum_{\substack{w|v \\ d_w=2}} 4 = a(v) + 4b(v) \ ,$$

où l'on a noté $a(v)$, respectivement $b(v)$, le nombre de places réelles de L divisant v, respectivement complexes divisant v. On note maintenant que $a(v)+2b(v)=[L:K]$. Donc, pour tout $v \in J$,

$$[L:K] \leq \sum_{w|v} (d_w/d_v)^2 \leq 2[L:K] \ .$$

Au total,

$$[L:K]^m \mathrm{Vol}_K(E)^2 \leq \mathrm{Vol}_L(E)^2 \leq 2^m [L:K]^m \mathrm{Vol}_K(E)^2 \ ,$$

d'où le lemme, en passant à la racine carrée.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.7, dont on donne une version plus lourde, mais plus précise :

Proposition 4.3. *Soit L un corps de nombres de degré D et soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}_L^\star$ de rang m. On suppose qu'il existe un sous-corps K de L de degré d tel que $E_{L/K} \subset \Gamma$ et $[L:K] \geq 40$. Alors*

$$\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \geq \left(10^{42} d^2\right)^{-d} D^{-d/2} \times 1,15^D \ .$$

Démonstration : on met ensemble les deux lemmes précédents et l'on a, en notant $r = r_K$ et $R = r_L$ et enfin $E = \Gamma \cap \mathcal{O}_K^\star$ et $n = \mathrm{rg}(E)$,

$$\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \geq \frac{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_L^\star)\mathrm{Vol}_L(E)}{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_K^\star)} \geq \frac{\mathrm{Vol}_L(\mathcal{O}_L^\star)[L:K]^{n/2}\mathrm{Vol}_K(E)}{2^{r/2}[L:K]^{r/2}\mathrm{Vol}_K(\mathcal{O}_K^\star)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+R}\cdot \mathrm{reg}(L)[L:K]^{n/2}\mathrm{Vol}_K(E)}{[L:K]^{r/2}\sqrt{r+1}\cdot \mathrm{reg}(K)} \ .$$

On minore le rapport des régulateurs en appliquant le résultat de Friedman-Skoruppa [Fr-Sk, Corollary 3] :

$$\frac{\mathrm{reg}(L)}{\mathrm{reg}(K)} \geq (0,1/1,15)^{39d} 1,15^D \ .$$

Puis, en utilisant les inégalités $r \leq d$, $r \leq R$ et le lemme 2.1 pour minorer $\mathrm{Vol}_K(E)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_L(\Gamma) &\geq \frac{\mathrm{reg}(L)}{\mathrm{reg}(K)} \times [L:K]^{(n-r)/2}\mathrm{Vol}_K(E) \\ &\geq (0,1/1,15)^{39d} 1,15^D \times (D/d)^{(n-d)/2}(2d^2)^{-d} \\ &\geq \left(10^{42}d^2\right)^{-d} D^{-d/2} \times 1,15^D \ .\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 1.7 : on suppose maintenant $d \leq D/(400\log(3D))$; alors $\frac{d}{2}\log(D) \leq \frac{D}{800}$, $2d\log(d) \leq D/200$ et $42\log(10)d \leq \frac{42\log(10)}{400\log(1200)}D \leq 0,0341D$. Au total,

$$\mathrm{Vol}_L(\Gamma) \geq e^{-0,041D} 1,15^D \geq 1,1^D \ .$$

5 Appendice : preuve de l'inégalité (1.1)

La preuve de cette inégalité est une conséquence du lemme élémentaire suivant :

Lemme 5.1. *Soient m, σ deux entiers, avec $1 \leq m \leq \sigma$, et soit $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots,\sigma}}$ une matrice à coefficients complexes. Alors*

$$\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,\sigma\}\\ \mathrm{Card}(J)=m}} |\det (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ j\in J}}| \leq \prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma}|a_{i,j}| \ .$$

Démonstration : en développant les déterminants, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,\sigma\}\\ \mathrm{Card}(J)=m}} |\det (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ j\in J}}| &\leq \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,\sigma\}\\ \mathrm{Card}(J)=m}} \sum_{\substack{\tau:\,\{1,\dots,m\}\to J\\ \tau \text{ bijective}}} \prod_{i=1}^{m}|a_{i,\tau(i)}| \\ &= \sum_{\substack{\tau:\,\{1,\dots,m\}\to\{1,\dots,\sigma\}\\ \tau \text{ injective}}} \prod_{i=1}^{m}|a_{i,\tau(i)}| \\ &\leq \sum_{\tau:\,\{1,\dots,m\}\to\{1,\dots,\sigma\}} \prod_{i=1}^{m}|a_{i,\tau(i)}| = \prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma}|a_{i,j}| \ .\end{aligned}$$

□

Le lemme précédant donne

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m(\langle\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\rangle) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]^m}\sum_{\substack{J\subset M_{K,\infty}\\ \mathrm{Card}(J)=m}} \left|\det (d_v\log|\varepsilon_i|_v)_{\substack{1\leq i\leq m\\ v\in J}}\right| \\ &\leq \prod_{i=1}^{m}\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M_{K,\infty}} d_v\big|\log|\varepsilon_i|_v\big| \\ &= \prod_{i=1}^{m}\big(2h(\varepsilon_i)\big) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité (1.1).

Références

[Am-Da] F. Amoroso and S. David, « Le problème de Lehmer en dimension supérieure », *J. Reine Angew. Math.* **513**, pages 145–179, 1999.

[Am-Da-Za] F. Amoroso, S. David and U. Zannier, « On fields with the property (B) », *Proc. Amer. Math. Soc.*, **142** n^o 6, pages 893–1910, 2014.

[Am-Dv] F. Amoroso and R. Dvornicich, « A Lower Bound for the Height in Abelian Extensions », *J. Number Theory* **80** n^o 2, pages 260–272, 2000.

[Am-Vi] F. Amoroso and E. Viada, « Small points on rational subvarieties of tori », *Comment. Math. Helv.* **87**, pages 355–383, 2012.

[An] Y. André, « On nef and semistable Hermitian lattices, and their behaviour under tensor product », *Tohoku Math. J.* **63** n^o 4, pages 629—649, 2011.

[Be-Ma] A.-M. Bergé et J. Martinet, « Sur les minorations géométriques des régulateurs », *in Séminaire de Théorie des Nombres de Paris,* 1987-1988, Birkhäuser, Boston, 1990.

[Be] D. Bertrand « Duality on tori and multiplicative dependence relations », *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, **62**, pages 198–216, 1997.

[Bo-Za] E. Bombieri and U. Zannier, « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Rend. Mat. Acc. Lincei (9)*, **12**, pages 5–14, 2001.

[Bo] J. B. Bost, « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », *séminaire Bourbaki,* volume **237**, *Astérisque*, pages 115–161, Société Mathématique de France, 1996.

[Bo-Ch] J. B. Bost et H. Chen, « Concerning the semistability of the tensor product in algebraic geometry », *J. Math. Pures Appl.* **99**, n^o. 4, pages 436–488, 2013.

[Ch-Fr-Su] T. Chinburg, E. Friedman, J. Sundstrom « A case of the Rodriguez Villegas conjecture with an appendix by Fernando Rodriguez Villegas », Prebublication ArXiv :1903.01384.

[Co-Fr] A. Costa and E. Friedman, « Ratios of regulators in totally real extensions of number fields », *J. Number Th.* **37**, pages 288–297, 1991.

[Do] E. Dobrowolski, « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial », *Acta Arith.*, **34**, pages 391–401, 1979.

[Fi] P. Fili, « On the heights of totally p-adic numbers », *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **26**, n^o. 1, pages 103–109, 2014.

[Fr-Sk] E. Friedman, N.-P. Skoruppa, « Relative regulators of number fields », *Invent. Math.* **135**, pages 115–144, 1999.

[Ga] E. Gaudron, « Pentes des Fibrés Vectoriels Adéliques sur un Corps Global », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119**, pages 21–95, 2008.

[Ga-Re] E. Gaudron et G. Rémond, « Minima, pentes et algèbre tensorielle », *Israël J. of Math.* **195**, pages 565–591, 2013.

[Gr-Le] P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker, « Geometry of Numbers », North-Holland, Amsterdam, 1987.

[He] J. Herbrand, « Sur les unités d'un corps algébrique», *Comptes rendus de l'académie des sciences*, **192**, pages 24–27, 1931.

[Ha] P. Habegger, « Torsion points on elliptic curves in Weierstrass form ». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **12**, n^o 3, pages 687-–715, 2013.

[Le] D. H. Lehmer, « Factorization of certain cyclotomic functions », *Ann. of Math.*, **34**, pages 461-479, 1933.

[Po] M. Pohst, « Eine Regulatorabschätzung, Abh. », *Math. Sem. Univ. Hamburg* **47**, pages 95–106, 1978.

[Pot] L. Pottmeyer, « Small totally p-adic algebraic numbers », *Int. J. Number Theory* **14**, pages 2687–2697, 2018.

[Sc] A. Schinzel, « On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number. » *Acta Arith.*, **24**, pages 385–399, 1973. Addendum, *ibidem*, **26**, pages 329–361, 1973.

[Sc-Za] A. Schinzel, et H. Zassenhaus, « A refinement of two theorems of Kronecker. » *Michigan Math. Journal*, **12** n^{o}1, pages 81–85, 1965.

[Vo] P. Voutier « An effective lower bound for the height of algebraic numbers », *Acta Arith.* **74**, no. 1, pages 81–95, 1996.

[Wh-Wa] E. T. Whittaker and G. N. Watson, « A Course of Modern Analysis », 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[Zi] R. Zimmert, « Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung », *Invent. Math.* **62**, pages 131–173, 1981.