

APPLICAZIONI DELL'ANALISI DI FOURIER 200 anni dopo la “Théorie analitique de la chaleur” di Fourier

Paolo Boggiatto *, Luigi Rodino †

Abstract. *We present a short historical review on the developments of Fourier Analysis, starting from the famous 1822 mémoire of Fourier till the beginning of the new millenium. As an important area of modern research, we then illustrate some elements of Time-Frequency Analysis, a new discipline with significant connections with applications. The exposition is intended for non-specialist readers and is kept at an elementary level. We conclude by pointing out the contributions in this area of the research group from the University and Politecnico of Torino.*

Riassunto. *Viene inizialmente presentata una breve rassegna storica sugli sviluppi dell'Analisi di Fourier, a partire dalla memoria di Fourier del 1822 fino ad arrivare all'inizio di questo secolo. Come argomento significativo delle ricerche attuali, si descrivono quindi gli elementi di base dell'Analisi Tempo-Frequenza, nuova disciplina di rilevanza applicativa. La trattazione, indirizzata ad un pubblico di non-specialisti, ha carattere elementare. Si accenna in conclusione ai risultati sull'argomento ottenuti dai ricercatori dell'Università e del Politecnico di Torino.*

Sono trascorsi due secoli dalla pubblicazione della “Théorie analitique de la chaleur” di Jean-Baptiste-Joseph Fourier. L'edizione del 1822 (vedi il frontespizio in Fig. 1) è la versione definitiva dell'opera principale di Fourier, dove sono presentate in dettaglio le serie di funzioni trigonometriche e viene introdotta la sua celebre trasformazione integrale.

Commenteremo nel seguito le enormi applicazioni delle idee di Fourier nei due secoli trascorsi, e fisseremo quindi l'attenzione su uno degli sviluppi recenti più affascinanti, l'Analisi Tempo-Frequenza, controparte matematica della Teoria dei Segnali.

*. Dipartimento di Matematica, Università di Torino

†. Accademia delle Scienze di Torino

La vita di Fourier (1768-1830) meriterebbe una analisi storica approfondita: partecipante attivo alla rivoluzione francese, due volte a rischio di essere ghigliottinato (una prima volta per essere nemico di Robespierre, una seconda per esserne stato amico!), l'attività politica di Fourier proseguì intensa nel periodo napoleonico.

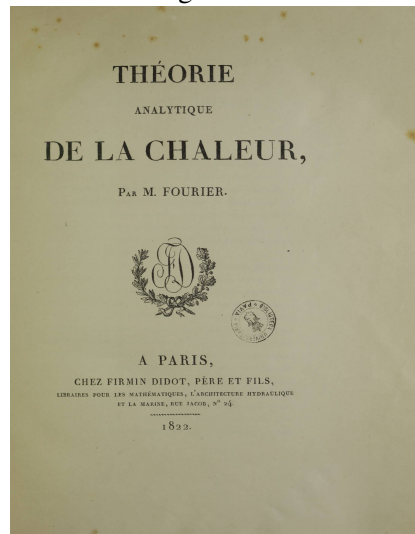
Con il trascorrere degli anni, la Matematica, che era inizialmente per lui un hobby, si direbbe ora, divenne attività dominante, accompagnata dall'impegno accademico. Rimandiamo ai biografi di professione per approfondimenti, e ci indirizziamo ad un aspetto saliente, il suo incontro, e scontro, con Joseph-Louis Lagrange.

Lagrange (1736-1813), torinese di nascita e fondatore dell'Accademia delle Scienze di Torino, nel periodo rivoluzionario e napoleonico era direttore della sezione matematica dell'Académie des Sciences di Parigi, e persona di riferimento per tutti gli scienziati francesi. Viene oggi considerato uno dei fondatori della Matematica Moderna. Certamente Lagrange apprezzava il giovane e brillante Fourier ma operando come referee, per usare ancora un termine inglese, si espresse ripetutamente in termini critici sui suoi lavori. Il confronto delle loro idee va ben al di là dell'occasione personale, e trova comprensione in una diversità di approccio all'Analisi Matematica, in particolare per quanto riguarda lo studio delle Equazioni alle Derivate Parziali. È una diversità di punti di vista che è destinata a protrarsi nella comunità scientifica per 150 anni, trovando composizione solo nella seconda parte del '900.

Per meglio comprendere, giova esaminare brevemente il contenuto della predetta memoria del 1822. L'obiettivo primario di Fourier è l'analisi della diffusione del calore. Ben noto in quegli anni era il modello di D'Alambert, risalente al 1747, per la corda vibrante. Denotato $u(t, x)$ lo spostamento al tempo t rispetto alla posizione di riposo nel punto x della corda vibrante, D'Alambert propone come modello matematico l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Figura 1 –



dove supponiamo qui per semplicità che la velocità di propagazione sia unitaria. La soluzione generale dell'equazione può facilmente scriversi come

$$u(t, x) = F(x - t) + G(x + t)$$

con F e G funzioni generiche, che possono determinarsi in base alle condizioni iniziali al tempo $t = 0$. Ad esempio, prendendo come posizione iniziale la Gaussiana

$$u(0, x) = e^{-x^2}$$

e supponendo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

si ottiene

$$u(t, x) = \frac{1}{2}e^{-(x-t)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x+t)^2}.$$

Ovvero: l'onda si divide in due metà che abbandonano la posizione iniziale, l'una avanzando, l'altra retrocedendo.

Fourier, nella veste di fisico sperimentale, diremmo ora, mostra mediante verifiche pratiche che il modello di D'Alambert non è adeguato alla diffusione del calore. Una sbarra, riscaldata nella sua parte centrale, resta ivi a temperatura più elevata che altrove. Il calore si diffonde nelle parti più lontane della sbarra diminuito, ma questo avviene in maniera istantanea (mentre le onde di D'Alambert si propagano sì, ma con velocità solo finita). Il modello matematico per questo comportamento misterioso è fornito dall'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dove ora $u(t, x)$ è la temperatura nel punto x della sbarra al tempo t (per semplicità consideriamo il caso di una sola dimensione spaziale e supponiamo unitaria la costante di diffusione). Se prendiamo ancora la Gaussiana come dato iniziale, abbiamo questa volta come soluzione

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$

che aderisce invece molto bene ai dati empirici. Fourier perviene all'equazione del calore sia attraverso esperimenti, sia mediante ragionamenti di carattere fisico-matematico. Questa deduzione mirabile del modello, che rappresenta buona parte della sua memoria del 1822, non è contestata da Lagrange, e viene anzi molto apprezzata da tutti i matematici suoi contemporanei come risultato di grandissimo valore. Non ci soffermiamo qui sugli sviluppi

applicativi, che qualificano Fourier come uno degli iniziatori delle discipline Fisico-Matematiche.

I problemi, per così dire, vengono nel campo dell'Analisi Matematica, quando si ricerca la soluzione generale dell'equazione del calore. A dispetto della semplicità dell'espressione, dove compare solo la derivata prima rispetto al tempo, e non la derivata seconda come per la corda vibrante, l'integrale generale, per un generico dato iniziale, è di difficile espressione. Fourier osserva che per tempi t positivi la soluzione è subito trovata se il dato iniziale è un seno, od un coseno, di frequenza fissata qualsiasi. Quindi, grazie alla linearità dell'equazione, basterà scrivere il dato iniziale $f(x) = u(0, x)$ come somma di funzioni trigonometriche, e sommare le relative semplici soluzioni. Ciò porta Fourier a scrivere il dato iniziale, sotto l'ipotesi che abbia periodo T , nella forma di serie (somma infinita) di funzioni

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

La scelta dei coefficienti è forzata. Basta infatti moltiplicare a destra e sinistra per il seno od il coseno di frequenza n ed integrare termine a termine nell'intervallo di periodicità. Il calcolo, già noto nel '700 ed ora nei programmi dei primi corsi universitari di Analisi Matematica, mostra che tutti gli integrali si annullano, tranne quelli relativi alle espressioni quadratiche. Risulta quindi:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \end{aligned}$$

Un secolo più tardi, all'inizio del '900, queste argomentazioni troveranno inquadramento nella teoria generale dei sistemi ortonormali di Hilbert. Il difetto della presentazione di Fourier è che egli non si cura di indagare se la somma della serie così ottenuta rappresenti effettivamente $f(x)$; nella terminologia moderna, egli lascia senza risposta la domanda: la serie converge a $f(x)$ puntualmente / uniformemente / in media quadratica? Lagrange non accetta il metodo di risoluzione di Fourier, in particolare nega validità agli sviluppi in serie mediante funzioni trigonometriche. Va chiarito che somme infinite di funzioni erano già praticate in quel tempo, in particolare nel '700 era stato proposto da

Taylor e Maclaurin lo sviluppo in serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots \quad \text{con} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

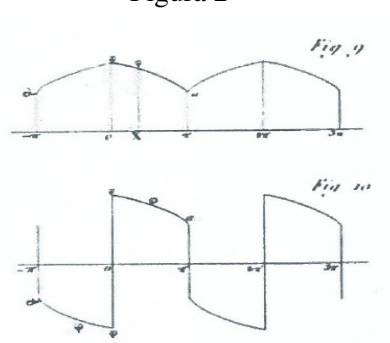
Questa espressione sottintende l'infinita derivabilità della funzione, almeno nell'origine.

Non era allora chiaro il tipo di convergenza di una serie di Taylor, ma era ben salda la convinzione che tutte le funzioni sviluppabili, in qualsiasi maniera, fossero infinitamente regolari. Questi pensieri sono condivisi da Lagrange, che vede quindi con grande sospetto gli sviluppi trigonometrici di funzioni con angolosità o salti, quali considerate da Fourier (vedi Fig.2, tratta dall'ultima pagina della memoria di Fourier). Lo spirito rivoluzionario di Fourier si spinge in realtà ben oltre; egli scrive delle serie trigonometriche i cui coefficienti non tendono a zero

al crescere di n , e sono solo limitati o addirittura crescono infinitamente. Fourier riconosce che la relativa somma non è rappresentata da alcuna funzione, eppure è portato a dare validità applicativa a queste espressioni. Possiamo ora dire che tale somma misteriosa è rappresentata dalla delta di Dirac, o da altre distribuzioni od ultradistribuzioni, come definite correttamente più di un centinaio di anni dopo.

Le perplessità di Lagrange sono quindi ben giustificate; occorre tuttavia attendere qualche decennio per una chiarificazione del suo pensiero sulle funzioni analitiche, cioè rappresentabili mediante serie di Taylor, alle quali va la sua preferenza. Precisamente Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897) dimostrano convergenza puntuale ed uniforme in determinati intervalli dell'asse reale e dischi nel piano complesso. Per quanto riguarda le applicazioni alle equazioni differenziali, il pensiero di Weierstrass viene portato alle estreme conseguenze dalla sua allieva Sofia Kowalevskaya (1850-1891). Ella dimostra che ogni equazione, in cui le derivate rispetto al tempo compaiono all'ordine massimo, ha una ed una sola soluzione nell'ambito delle funzioni analitiche. Ciò corrisponde ad una concezione di determinismo assoluto, che vede il matematico perfettamente in grado di prevedere l'evoluzione nel tempo di ogni fenomeno naturale, ed altresì di ricostruirne il passato. So-

Figura 2 –



fia Kowalevskaya conferma le perplessità di Lagrange sulle argomentazioni di Fourier.

Prima di accennare alla storia della piena riabilitazione di Fourier, conviene ricordare ancora la definizione della trasformazione integrale introdotta nella sua memoria del 1822, altro ingrediente fondamentale di quella che è oggi detta Analisi di Fourier. Primo passo è la formula di Eulero

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

che permette di riscrivere la serie trigonometrica nella nuova forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i}{T} nx} \quad \text{con} \quad c_n = \int_{T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{T} nx} dx.$$

Facendo tendere il periodo T all'infinito, possono risciversi i coefficienti della serie

$$c_n \longrightarrow \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx. \quad (1)$$

Vengono considerate quindi non solo frequenze intere, ma anche frequenze reali arbitrarie. La trasformazione di $f(x)$ così ottenuta fornisce lo strumento fondamentale per le applicazioni alle equazioni a derivate parziali. L'idea semplicissima è che la derivata dell'esponenziale riproduce l'esponenziale stesso, mentre, come evidente dalla formula di Eulero, seno e coseno scambiano il loro ruolo dopo l'operazione di derivazione. Usando tali identità nell'espressione della trasformata, si ottiene che questa muta derivazioni in prodotti algebrici. Per le equazioni di evoluzione conviene applicare la trasformata solo alle variabili spaziali, così come fatto da Fourier per l'equazione del calore, riconducendosi ad una equazione differenziale ordinaria nel tempo. Altrimenti, può applicarsi la trasformata a tutte le variabili, con l'effetto magico di ricondurre l'equazione a derivate parziali ad una equazione algebrica di immediata soluzione. Precisamente per un operatore differenziale P lineare a coefficienti costanti,⁽¹⁾ in dimensione arbitraria e di ordine qualsiasi, l'equazione

$$P(D)u = v; \quad D_{x_j} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

diventa

$$\widehat{P(D)u} = \widehat{v}; \quad P(\omega)\widehat{u}(\omega) = \widehat{v}(\omega); \quad \widehat{u}(\omega) = \frac{\widehat{v}(\omega)}{P(\omega)}; \quad (2)$$

1. Ricordiamo che un operatore differenziale alle derivate parziali lineare a coefficienti costanti ha espressione $P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D_x^\alpha u$ dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ e $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_d}^{\alpha_d}$.

ottenendo mediante antitrasformazione

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \omega x} \frac{\widehat{v}(\omega)}{P(\omega)} d\omega.$$

Il procedimento può applicarsi anche alle equazioni integrali di convoluzione, per cui P non è più un polinomio, bensì una funzione generica. Sembra incredibile ai giorni nostri, ma questo metodo semplicissimo è stato pienamente utilizzato solo nella seconda metà del secolo scorso. La ragione è che si dubitava della correttezza formale dei calcoli, non essendo in particolare assicurata la convergenza dell'integrale che fornisce la soluzione. Problema strettamente connesso era la corretta definizione della derivata di funzioni con angolosità e salti, come compaiono nell'opera di Fourier. Lo studio delle equazioni a derivate parziali era comunque destinato a procedere intenso, motivato da problemi fisici ed ingegneristici. Tuttavia la trattazione veniva relegata ai margini della Matematica Pura, sotto l'etichetta "Metodi Matematici per la Fisica", oppure, nelle opere che volevano essere più rigorose, si preferiva un punto di vista geometrico, configurando la soluzione multidimensionale come superficie. Quanto ai risultati di Sofia Kowalevskaya, il suo teorema restava il invitato di pietra, unico enunciato generale rigoroso, ma di scarsa applicabilità. Jacques Hadamard (1865-1963) osa infine criticare la Kowalevskaya: non basta ottenere esistenza ed unicità della soluzione, ma occorre anche avere stabilità rispetto ai dati iniziali del problema. Pur non abbandonando l'universo delle funzioni analitiche, la critica di Hadamard apre la strada ad una nuova impostazione dello studio delle equazioni a derivate parziali, che raggiunge il suo compimento con Sergei Sobolev (1908-1989), inventore del concetto di derivata debole, e Laurent Schwartz (1915-2002), che introduce la teoria delle distribuzioni. Schwartz inquadra la serie e la trasformata di Fourier nell'ambito delle distribuzioni, che contengono come esempi fondamentali la delta di Dirac e le connesse derivate "impossibili" delle funzioni discontinue. Le formule di Fourier assumono finalmente un significato rigoroso. Si apre a questo punto uno scenario enorme: tutti i risultati precedenti sulle equazioni alle derivate parziali vengono rivisitati ed è sviluppata una teoria generale, che entra a pieno diritto nella Matematica Pura. Vi sono profondi legami con la Geometria, Algebrica e Differenziale, e con problematiche emergenti della Fisica Matematica. Gli studi al riguardo, che dominano tutta la seconda parte del secolo scorso, sono bene rappresentati dall'opera monumentale di Lars Hörmander (1931-2012). Il teorema di Sofia Kowalevskaya per le soluzioni analitiche non è certo dimenticato, ma diventa chiaro che, anche ragionando sulla stessa equazione, e sullo stesso fenomeno fisico, occorre precisare quello che viene detto "ambito funzionale". Volendo dare un esempio, se pure in termini un po' vaghi: nella meccanica dei

fluidi, in condizioni ideali, il movimento del fluido può descriversi inizialmente mediante funzioni analitiche, ma dopo tempi anche brevi possono subentrare turbolenze che richiedono l'uso di derivate deboli ed altri strumenti matematici moderni.

Le applicazioni attuali dell'Analisi di Fourier non si esauriscono certo con le equazioni a derivate parziali. L'idea fondamentale, nelle Scienze Applicate, è quella stessa di Fourier: un fenomeno è compiutamente descritto dai valori con cui le varie frequenze compaiono, nella serie o nella trasformata. Il voler ricostruire i valori puntuali della funzione può essere un'impresa inutile, ed anche fuorviante! Difficile elencare tutte le Scienze per cui l'Analisi di Fourier ha un ruolo importante: Meccanica Quantistica, Astrofisica e moltissime discipline Fisico-Ingegneristiche; Medicina (TAC, elettroencefalogramma, elettrocardiogramma); Geologia, Chimica, La nostra attenzione sarà rivolta nel seguito alla Analisi Tempo-Frequenza, vista come base matematica della Teoria dei Segnali. Si può affermare che vi è qui una novità sostanziale, rispetto alle idee di Fourier: la variabile che viene trasformata è il tempo, e si vogliono localizzare le frequenze ad un certo istante. Il procedimento implica difficoltà tecniche, e porta a profondi problemi matematici.

A conclusione di questa breve rassegna, si osservi che negli ultimi 20 anni l'Analisi di Fourier continua ad essere oggetto di studio, sia dal punto di vista teorico, sia per quanto riguarda le applicazioni. Come per altre discipline, nuove idee pervengono dalle Università degli Stati Uniti, dove spesso Analisi Matematica e Analisi di Fourier vengono ad essere identificate; ricordiamo i risultati di Charles Fefferman, Università di Princeton, e Terence Tao, Università di California, vincitori di medaglie Fields. Sugli aspetti applicativi, si nota in questi ultimi anni un'attività enorme in Cina, India, Iran, Brasile, Nord-Africa. Da qui, e da altre nazioni emergenti, pervengono alle riviste del settore moltissimi contributi di buon livello. In Italia opera da lungo tempo una Scuola molto valida; ricordiamo Fulvio Ricci, consocio dell'Accademia delle Scienze di Torino, attualmente professore emerito alla Normale di Pisa. A Torino, una ventina di studiosi, all'Università ed al Politecnico, lavorano sull'Analisi di Fourier con notevole riscontro internazionale.

Come accennato, ci proponiamo di presentare nella restante parte di questa nota le linee essenziali lungo le quali si è evoluta la modellizzazione matematica dei segnali, in particolare di tipo acustico. L'accento sarà posto su come le idee di base dell'analisi di Fourier si adattino a modellare i fenomeni fisici e l'approccio sarà di tipo qualitativo e concettuale senza entrare in dettagli troppo tecnici. In quest'ottica non presenteremo esempi tratti direttamente da applicazioni ingegneristiche concrete ma piuttosto "toy examples" che meglio si adattano a descrivere gli aspetti essenziali delle problematiche considerate.

Premessa a tutto ciò è il concetto di “segnale” che, da un punto di vista molto generale, può essere definito come l’associazione di un’informazione alle variazioni nel tempo e/o nello spazio di una qualche grandezza fisica. Ci limiteremo qui a considerare segnali acustici che si propagano nell’atmosfera. Per essi la grandezza fisica di riferimento sarà la pressione atmosferica le cui oscillazioni attorno ad un valore sostanzialmente stabile vengono percepite dal nostro apparato uditivo come suoni e rumori. L’oggetto matematico più naturale con cui rappresentare questo fenomeno è quindi una funzione $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ che associa ad ogni istante di tempo t il valore della pressione atmosferica $f(t)$ in un determinato punto fissato dello spazio. Per motivi di convenienza matematica è tuttavia preferibile immaginare i valori della funzione $f(t)$ nell’insieme dei numeri complessi anziché limitarsi ai reali. In questo contesto chiameremo quindi *segnale* una funzione $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{C}$, e useremo in modo sostanzialmente equivalente i termini “funzione” e “segnale”.

Tra i vari parametri che definiscono l’oscillazione la *frequenza* è decisamente quello di maggior interesse dal nostro punto di vista in quanto è ad essa che è essenzialmente legato il contenuto di un segnale. Siamo dunque interessati a determinare un metodo per associare ad un segnale le frequenze in esso contenute.

Con il termine *frequenza* si intende il numero di oscillazioni nell’unità di tempo di una quantità fisica, nel nostro caso la pressione atmosferica $f(t)$. Se ogni oscillazione ha durata $T > 0$, o più precisamente se $T > 0$ è il *periodo* di f , cioè il minimo valore positivo per cui

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

allora la frequenza sarà il reciproco di questo valore, ovvero $1/T$.

Abbiamo dunque un primo metodo per associare una frequenza ad un segnale periodico:

$$\boxed{\text{segnale } f \text{ di periodo } T} \longrightarrow \boxed{\text{frequenza} = 1/T} \quad (3)$$

Questa regola ha il grosso pregio di essere molto elementare e funziona perfettamente bene per segnali costituiti da un’unica *frequenza pura* ovvero rappresentati da una delle funzioni seguenti

$$A \cos(2\pi\omega t + \phi_0), \quad A \sin(2\pi\omega t + \phi_0), \quad Ae^{2\pi i\omega t + i\phi_0} \quad (4)$$

(dove $A > 0, \omega > 0, \phi_0 \in \mathbb{R}$). A queste funzioni, che hanno periodo $T = 1/\omega$, viene associata la frequenza ω e nonostante si tratti ovviamente di astrazioni matematiche esse possono aderire soddisfacentemente a segnali reali su intervalli di tempo limitati in cui effettivamente la “nota” udita sarà ω .

Il metodo tuttavia fallisce non appena si sia in presenza di un segnale appena poco più complicato.

Per illustrare ciò supponiamo che, in opportune unità di misura, una “nota” DO sia rappresentata dalla funzione

$$f_1(t) = \cos(2\pi t),$$

di frequenza $\omega = 1$ (Fig.3(a)). Allora, come ben noto dalla teoria musicale, la funzione

$$f_2(t) = \cos(\pi \frac{5}{2} t) = \cos(2\pi \frac{5}{4} t),$$

di frequenza $\omega = \frac{5}{4}$ (Fig.3(b)), rappresenterà la nota SOL a distanza di un intervallo di quinta rispetto al DO precedente.

Se ora consideriamo il segnale ottenuto dalla sovrapposizione contemporanea delle due note, questo sarà rappresentato dalla funzione somma dei due segnali:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

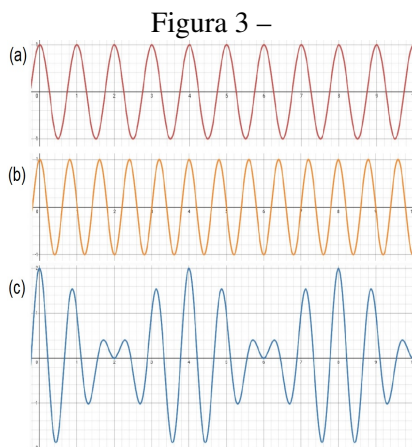
(Fig.3(c)). La funzione $f(t)$ è periodica con periodo $T = m.c.m.(1, \frac{4}{5}) = 4$, ma, udendo il segnale $f(t)$, ciò che il nostro orecchio percepisce non ha nulla a che vedere con la nota di frequenza $\omega = 1/T = 1/4$ che la nostra regola prescriverebbe come frequenza associata al segnale $f(t)$. Infatti, pur sovrapposte, riusciamo ancora a riconoscere le due note distinte DO e SOL... e i musicisti saprebbero riconoscere ben più di due note in contemporanea!

Un esempio ancora più drammatico è il seguente: sia $f_1(t) = \cos(2\pi t)$, come sopra, ed $f_2(t) = \cos(2\pi\sqrt{2}t)$. Allora $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ sono funzioni periodiche di frequenze rispettivamente 1 e $\sqrt{2}$, tuttavia, poichè $m.c.m.(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ non esiste, la funzione somma $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ non sarà neanche periodica e quindi non esiste nessuna frequenza ben definita ad essa associata! (2)

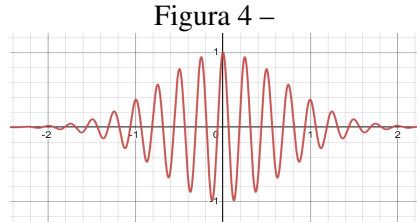
Molto più semplicemente se moltiplichiamo una frequenza pura ad esempio per una funzione gaussiana otterremo un segnale “smorzato” (Fig.4), dato da una funzione del tipo

$$f(t) = A e^{-\lambda^2 t} \cos(2\pi\omega t), \quad A > 0, \lambda > 0. \quad (5)$$

2. Si tratta in effetti del punto di partenza della teoria delle funzioni *quasi-periodiche* sviluppata a partire dagli anni '30 del secolo scorso da notevoli matematici quali Bohr, Besicovitch, Stepanov, Weyl e von Neumann



Essa rappresenta un segnale molto più realistico rispetto agli esempi (4) ed infatti, limitatamente all'intervallo di tempo in cui la gaussiana $e^{-\lambda t^2}$ assume valori sufficientemente grandi da essere fisicamente percepiti, il nostro orecchio "sentirà" la nota ω . Tuttavia anche la funzione $f(t)$ non è periodica e ad essa non può essere associata una frequenza con il metodo precedente.



Tutto ciò mostra che il metodo espresso dalla (3), pur permettendo di focalizzare gli aspetti essenziali del problema e costituendo un primo modello matematico accessibile con semplici conoscenze trigonometriche, risulta troppo semplicistico per poter modellizzare segnali significativi e appare quindi chiara la necessità di ricorrere a modelli più sofisticati che sappiano "imitare" l'apparato uditivo umano in situazioni più reali rispetto a quelle espresse dalle semplici frequenze pure.

Premesso che ogni modello matematico costituisce in ogni caso soltanto un'approssimazione della realtà, possiamo a questo punto, in base al tipo di frequenze del segnale, distinguere tre differenti livelli di modellizzazione matematica, di cui il primo è quello descritto sopra dalla (3). La tabella seguente mostra in corrispondenza ad ognuno di essi lo strumento matematico, via, via più sofisticato, adatto a modellizzarne la situazione fisica:

segnali con un'unica frequenza pura	→	Trigonometria
segnali con più frequenze pure costanti	→	Trasformata di Fourier
segnali con più frequenze variabili	→	Trasformata di Gabor

Analizzeremo nel seguito il secondo e terzo livello iniziando con il considerare in quest'ottica la trasformata (integrale) di Fourier. Non è esagerato affermare che essa costituisce lo strumento matematico per eccellenza dell'Analisi dei Segnali. Introdotta, come si è visto, nell'ambito dello studio della propagazione del calore e delle equazioni alle derivate parziali, essa infatti si rivela magicamente lo strumento ideale per scoprire le frequenze "veramente udibili" in un segnale che, come si è visto, sono solo parzialmente legate alla periodicità del segnale stesso. Per comprendere, sia pure a livello euristico, il motivo di questo successo è forse utile il paragone con i vettori dello spazio \mathbb{R}^3 (o di un qualsiasi spazio vettoriale). Se $\{e_j\}_{j=1,\dots,3}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 ed $u \in \mathbb{R}^3$, allora il prodotto scalare $u \cdot e_j$ indica "quanto della direzione di e_j è contenuta in u ". L'idea alla base dell'interpretazione della trasformata di Fourier come *spettro delle frequenze di un segnale* è del tutto analoga: infatti

l'integrale, (già introdotto in (1))

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \quad (6)$$

è formalmente l'espressione del prodotto scalare nello spazio vettoriale (di Hilbert) $L^2(\mathbb{R})$ tra l'elemento $f(t)$ e l'elemento "frequenza pura" $e^{2\pi i \omega t}$ e indica quindi "quanto della frequenza ω è presente nel segnale $f(t)$ " ...il "piccolo" inconveniente rispetto ai vettori di \mathbb{R}^3 è che $e^{2\pi i \omega t} \notin L^2(\mathbb{R})$! Questo fatto complica notevolmente la costruzione matematica necessaria alla rigorosa interpretazione dell'integrale (6), ma l'idea di base resta valida. Pur sorvolando su questioni di rigore matematico, notiamo tuttavia che in generale $\widehat{f}(\omega)$ assume valori complessi e risulta quindi preferibile al posto di essa considerare invece la mappa a valori reali positivi

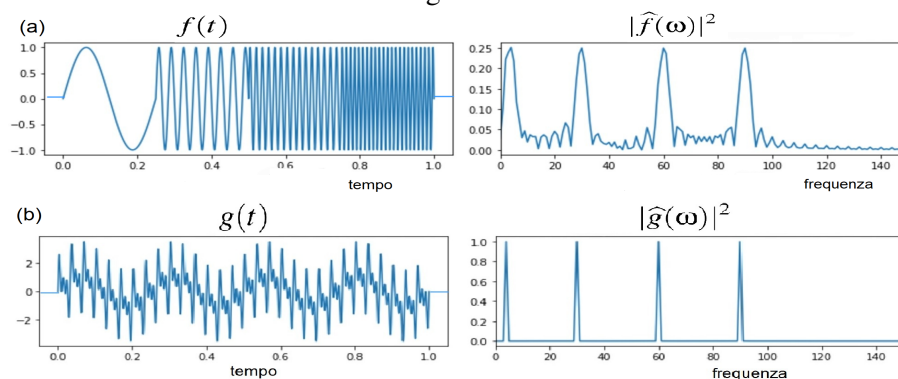
$$\omega \longrightarrow |\widehat{f}(\omega)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \right|^2$$

quale *densità della distribuzione* delle frequenze di $f(t)$ sull'asse $\omega \in \mathbb{R}$ (naturalmente frequenze negative non hanno senso fisico ed in effetti le informazioni per $\omega \leq 0$ sono in un certo senso sovrabbondanti). Inoltre la presenza del modulo "al quadrato" è giustificata dal fatto che in tal modo f ed \widehat{f} hanno stessa norma L^2 ovvero l'energia del segnale non cambia se lo si rappresenta rispetto ai tempi o alle frequenze (Teorema di Plancherel).

L'esempio grafico in Fig.5(a) mostra la straordinaria efficienza di questo metodo su un segnale $f(t)$ contenente quattro distinte frequenze in intervalli di tempo successivi: la sua trasformata di Fourier mostra infatti quattro picchi distinti ognuno in corrispondenza di una delle quattro frequenze.

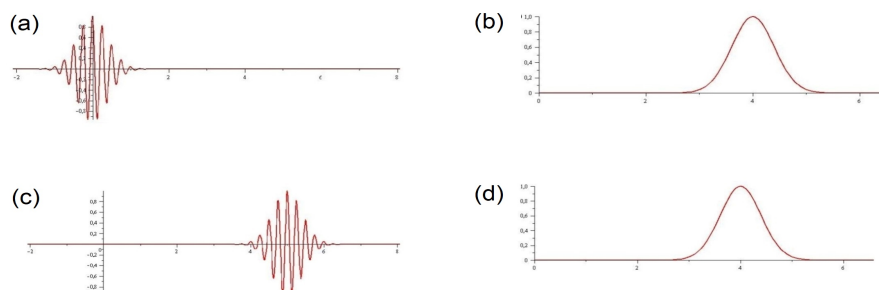
Tuttavia la trasformata di Fourier, quale strumento per lo studio tempo-frequenza dei segnali, presenta un limite intrinseco dovuto alla sua stessa struttura matematica. Per rendersene conto è sufficiente confrontare le trasformate dei segnali $f(t)$ e $g(t)$ in Fig.5 (casi (a) e (b) rispettivamente). Infatti nel segnale $g(t)$, a differenza del segnale $f(t)$, le stesse quattro frequenze sono sovrapposte in uno stesso intervallo di tempo e ciò si riflette unicamente in una certa differenza nella forma del grafico di $|\widehat{g}(\omega)|^2$ che anch'esso presenta quattro picchi in corrispondenza delle stesse frequenze. Ciò mostra chiaramente che la ricostruzione dei tempi in cui le frequenze appaiono nel segnale a partire dal modulo (al quadrato) della sua trasformata può essere problematica. In effetti, come illustrato nel prossimo esempio, tale ricostruzione può essere del tutto impossibile.

Figura 5 –



Consideriamo un qualsiasi segnale, ad esempio il segnale “smorzato” $f(t)$ in Fig.6 (a) e, fissato un parametro $a \in \mathbb{R}$, la sua traslazione $f(t - a)$ (Fig.6 (c)). Allora, come si vede da grafici in Fig.6 (b) e (d), i quadrati dei moduli delle trasformate di Fourier di $f(t)$ e $f(t - a)$ hanno esattamente lo stesso grafico!

Figura 6 –



In modo un po' colorito potremmo dire che l'utilizzazione del solo grafico di $|\hat{f}(\omega)|^2$ nell'analisi di un segnale $f(t)$ è un po' come “ricordare tutte le note di una sinfonia senza sapere in che ordine sono state suonate”...

L'idea di come superare questo problema si può attribuire essenzialmente a Dennis Gabor e risale agli anni '40 del secolo scorso. Nato in una famiglia ebrea ungherese e sfuggito alla Shoah rifugiandosi in Inghilterra, Dennis Gabor (1900 - 1979) è stato un ingegnere e fisico, noto soprattutto per

la sua scoperta dell'olografia che gli valse il premio Nobel per la fisica nel 1971. I suoi contributi alla nascente Analisi Tempo-Frequenza dei segnali sono fondamentali.

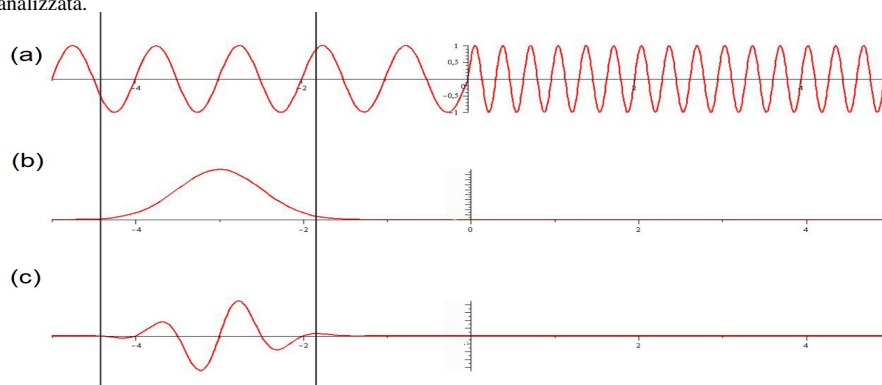
L'osservazione cruciale è che la trasformata di Fourier, prescrivendo un'integrazione da $-\infty$ a $+\infty$ rispetto alla variabile temporale t , comporta un'analisi del segnale estesa a tutto l'asse dei tempi e ciò risulta un'operazione assai lontana dalla realtà del nostro udito con il quale percepiamo solo i suoni nel presente.

Più aderente al meccanismo dell'udito risulterebbe invece “tagliare” il segnale conservandone solo una piccola porzione entro una determinata finestra temporale ed analizzare soltanto questa porzione di segnale applicando ad essa la trasformata di Fourier. Facendo poi “scorrere” lungo l'asse dei tempi questa finestra si otterrebbero informazioni sulle frequenze presenti nel segnale istante per istante simulando il comportamento dell'orecchio umano al trascorrere del tempo.

È proprio questa l'idea alla base del “terzo” livello di modellizzazione matematica di un segnale acustico, ovvero la *trasformata di Gabor* che, per la struttura sopra descritta, prende anche i nomi di *windowed Fourier transform* o *short-time Fourier transform*, ed ha l'espressione

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t \omega} f(t) \overline{g(t-x)} dt. \quad (7)$$

Figura 7 – (a) segnale $f(t)$; (b) funzione *finestra* $g(t-x)$ centrata al tempo x ; (c) segnale *tagliato* $f(t)g(t-x)$. Al variare di x solo la parte di segnale che cade nel supporto essenziale di $g(t-x)$ verrà analizzata.

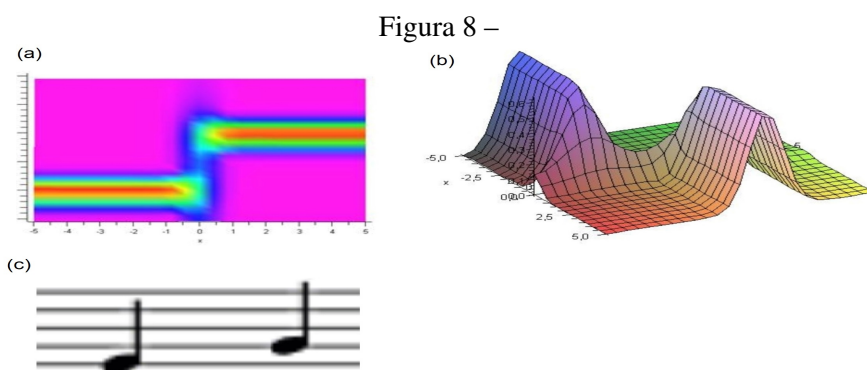


3. L'uso della lettera V per questa trasformata è in onore del matematico francese Jean Ville (1910 - 1989) che contribuì notevolmente allo studio delle potenzialità di questo strumento.

Il “taglio” del segnale $f(t)$ viene effettuato moltiplicandolo per una funzione “finestra” $g(t)$ di supporto sostanzialmente concentrato vicino all’origine, le cui traslazioni $g(t - x)$ permettono di “ritagliare la parte di segnale contenuta nelle vicinanze” di ogni istante $x \in \mathbb{R}$. In Fig.7 è riportato il caso in cui la funzione finestra sia una gaussiana, come originariamente proposto da Gabor. Naturalmente vi sono infinite possibilità di scelta della finestra e ad ognuna di esse corrisponde una determinata trasformata con specifici vantaggi e svantaggi.

Come si vede dalla (7), a differenza della trasformata di Fourier, il “prodotto” di questa operazione è una funzione di due variabili la cui interpretazione fisica è la seguente: il valore $V_g f(x, \omega)$ indica “quanto” della frequenza ω è presente nel segnale f al tempo x .⁽⁴⁾

Dal punto di vista matematico va notato che la finestra g compare nella formula sotto coniugazione complessa: ciò è dovuto a pura convenienza matematica (potendosi così interpretare, come già la trasformata di Fourier, anche la (7) come prodotto scalare in un opportuno spazio L^2) e non altera in alcuno modo l’essenza del discorso. Inoltre, come per la trasformata di Fourier, poichè i valori $V_g f(x, \omega)$ sono in genere numeri complessi, si è soliti nelle applicazioni considerare il grafico della funzione reale positiva $|V_g f(x, \omega)|^2$ che prende il nome di *Spettrogramma* ed ha il significato di densità di energia del segnale f nel piano tempo-frequenza.



La Fig.8 mostra il grafico dello spettrogramma con finestra gaussiana del segnale $f(t)$ della figura 7. Sono chiaramente distinguibili la frequenza più bassa nel primo intervallo di tempo e quella più alta nel secondo viste dall’alto

4. Poichè da un punto di vista prettamente fisico non ha senso una frequenza istantanea, il valore puntuale di $V_g f(x, \omega)$ in un singolo punto (x, ω) a rigore non ha significato fisico e l’affermazione fatta andrebbe quindi più correttamente intesa riferendosi ad intorno di x e di ω .

(a) ed in prospettiva (b). Come si vede dal confronto con Fig.8(c), si tratta dell'esatto corrispondente matematico di una partitura musicale che assegna ad ogni intervallo di tempo determinate frequenze. È infatti proprio la possibilità di discernere "quali frequenze in quali tempi" sono contenute nel segnale che costituisce il nucleo fondante dell'Analisi Tempo-Frequenza, distinguendola dall'Analisi spettrale delle sole frequenze ottenuta tramite la trasformata di Fourier.

La trasformata di Gabor, ed il relativo spettrogramma, non sono la sola possibilità di rappresentazione tempo-frequenza dei segnali, esiste infatti una vasta gamma di rappresentazioni di questo tipo. Citiamo l'altrettanto famosa trasformata di E. Wigner (1932), strettamente legata alla trasformata di Gabor ed introdotta originariamente nell'ambito della meccanica quantistica; su di essa è basata la vasta classe di rappresentazioni tempo-frequenza quadratiche covarianti che prende il nome di classe di Cohen.

Prendendo a modello la trasformata di Gabor, vogliamo illustrare come queste rappresentazioni permettano una modellizzazione matematica dei cosiddetti *filtri non stazionari*, ovvero procedimenti che consentono di filtrare segnali potendo variare nel tempo la loro azione di filtraggio.

Alla base di tali filtri vi è sempre una *formula di inversione*, ovvero una formula che restituisce il segnale originario a partire dalla sua trasformata e che nel caso della trasformata di Gabor assume la seguente espressione

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_g f(x, \omega) e^{2\pi i \omega t} g(t-x) dx d\omega. \quad (8)$$

Questa formula suggerisce la possibilità di modificare il segnale in corrispondenza di determinati intervalli di tempo e determinate frequenze, ossia in una determinata zona del piano tempo-frequenza, inserendo nella (8), prima della ricostruzione, una moltiplicazione di $V_g f(x, \omega)$ per una funzione di "filtraggio" $a(x, \omega)$. I valori di $a(x, \omega)$ saranno nulli, piccoli o grandi a seconda che si voglia eliminare, attenuare o rinforzare la parte di segnale situata nella zona da modificare; dove invece i valori sono uguali ad 1 l'effetto del filtro è nullo ed il segnale non viene modificato. Si ottiene così un procedimento che agisce in tre "passi":

- (1) analisi del segnale ovvero la sua rappresentazione nello spazio tempo-frequenza tramite trasformata di Gabor;
- (2) elaborazione tramite moltiplicazione per la funzione di filtraggio;
- (3) ricostruzione tramite la formula di inversione del segnale elaborato al passo precedente.

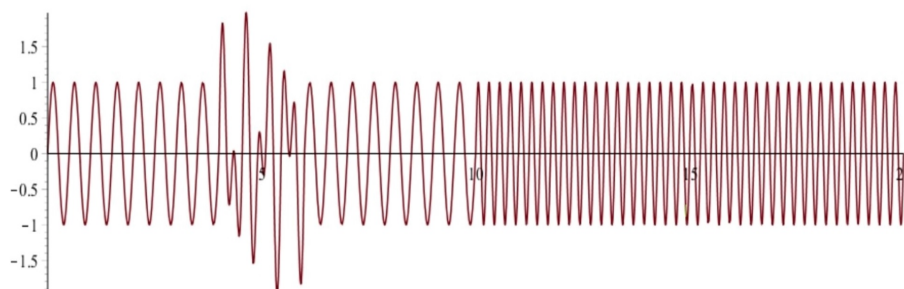
Il risultato di queste operazioni restituisce un segnale *filtrato* espresso dalla formula (9) in cui si sono messi in evidenza i tre passi.

$$\tilde{f}(t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{Vg f(x, \omega)}_{\text{analisi}} a(x, \omega)}_{\text{elaborazione}} e^{2\pi i \omega t} g(t-x) dx d\omega \quad (9)$$

ricostruzione

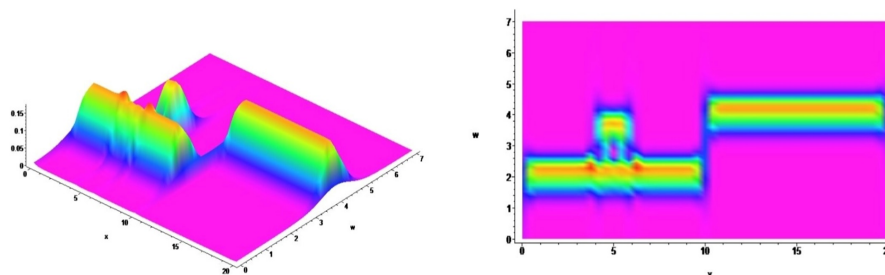
Illustriamo le potenzialità di questo tipo di filtro sul solito segnale con due frequenze che però ora supponiamo sia stato soggetto ad un disturbo durante il primo intervallo di tempo (Fig.9)

Figura 9 –



Passo 1: Mentre il grafico del segnale $f(t)$ permette solo di rilevare che il disturbo ha avuto luogo nell'intervallo temporale $[4, 6]$, l'applicazione della trasformata di Gabor permette di localizzare il disturbo nel rettangolo $R = [4, 6] \times [3, 4]$ nello spazio tempo-frequenza (Fig.10), sarà quindi questa la zona da modificare per "ripulire" il segnale:

Figura 10 –

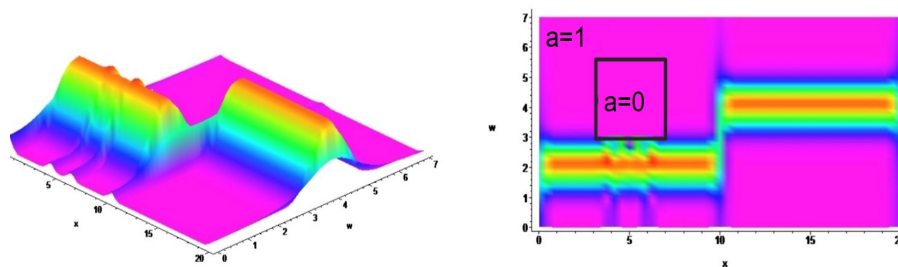


Passo 2: Il segnale viene elaborato tramite la moltiplicazione di $V_g f(x, \omega)$ per una funzione $a(x, \omega)$ nulla nella zona R ed identicamente uguale ad 1 altrove, cioè

$$a(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } (x, \omega) \notin R \\ 0 & \text{per } (x, \omega) \in R \end{cases}$$

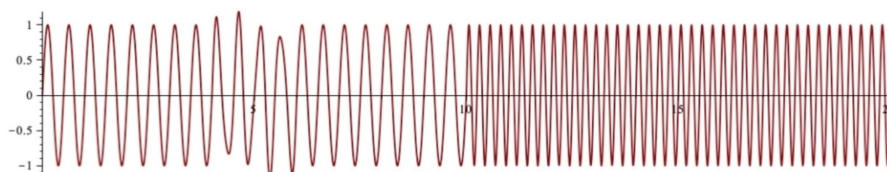
Questa operazione elimina (essenzialmente) il disturbo presente nel rettangolo R , lasciando inalterato il resto del segnale (Fig.11):

Figura 11 –



Passo 3: tramite la formula di inversione otteniamo il segnale filtrato che risulta sostanzialmente “ripulito” dal disturbo (Fig.12):

Figura 12 –



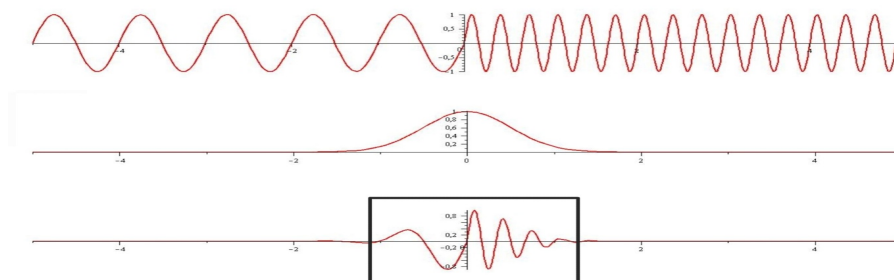
Alcune osservazioni illustrano le problematiche connesse a questo metodo. Innanzitutto notiamo che, poichè il disturbo si sovrapponeva parzialmente alla frequenza che compare nel segnale del primo intervallo di tempo, il taglio ha leggermente danneggiato questa frequenza e di conseguenza il segnale filtrato, pur decisamente migliorato rispetto all’originale, non risulta perfetto.

In secondo luogo osserviamo che la frequenza in cui compare il disturbo coincide sostanzialmente con la frequenza del segnale nel secondo intervallo di tempo. Ciò mette in evidenza un fatto importante che caratterizza questo tipo di filtro: è stato possibile tagliare tale frequenza solo nel determinato intervallo

di tempo in cui era necessario. Un analogo filtro basato invece sulla trasformata di Fourier avrebbe ugualmente permesso di cancellare la frequenza relativa al disturbo ma il taglio sarebbe stato indipendente dal tempo e quindi sarebbe poi stata eliminata anche la seconda frequenza del segnale.

Infine concludiamo questa presentazione con un'osservazione che tocca specificatamente la problematica dell'adesione di un modello matematico alla realtà fisica che si prefigge di rappresentare. Come si vede dal grafico di $|V_g f(x, \omega)|^2$ in Fig.11, le due frequenze appaiono unite da una sorta di “sbavatura” che non corrisponde alla realtà del segnale in quanto esse occupano invece intervalli temporali contigui ma disgiunti. Ciò è effetto del “passaggio” della funzione finestra dal primo al secondo intervallo: inevitabilmente esistono istanti in cui il supporto della finestra include sia parte dell'intervallo della prima frequenza che della seconda (Fig.13).

Figura 13 –



Naturalmente sarebbe possibile moderare questo effetto riducendo il supporto della finestra g , tuttavia così facendo si otterrebbe una rappresentazione più imprecisa nelle frequenze. Vale infatti in teoria dei segnali un principio di indeterminazione del tutto analogo a quello della meccanica quantistica e con identica formulazione matematica, ma con differente interpretazione. Le grandezze duali posizione-momento della meccanica quantistica sono infatti sostituite dalle grandezze tempo-frequenza e per esse non è possibile una determinazione congiunta con precisione arbitraria. Naturalmente quale quantità matematica assumere come misura dell'“imprecisione” è una questione di scelta, e così, mentre la versione classica di Heisenberg è basata sulla varianza, esistono infinite differenti formulazioni del principio di indeterminazione. In un certo senso si potrebbe affermare che ne esista una per ogni definizione di imprecisione e per ogni rappresentazione tempo-frequenza.

Dunque non esiste una rappresentazione tempo-frequenza in senso assoluto “migliore di tutte le altre” e ciò giustifica lo spettacolare sviluppo della ricerca

degli ultimi decenni volta a definire e studiare svariate classi di rappresentazioni ed operatori ad esse legati. L'Analisi Tempo-Frequenza ha così assunto oggi un ruolo di importante area di ricerca spaziando dalle problematiche più applicative ed ingegneristiche fino a toccare gli aspetti più teorici dell'analisi armonica astratta.

Il gruppo di ricerca torinese ha lavorato intensamente su molte di queste tematiche in collaborazione con numerosi studiosi italiani e stranieri. In particolare esso ha ottenuto risultati di vasto riscontro internazionale sulle problematiche seguenti:

- Classe di Cohen, generalizzazioni della trasformata di Wigner e wavelet transform;
- principi di indeterminazione;
- spazi funzionali di segnali: spazi di modulazione, spazi di amalgame;
- rappresentazioni discrete di segnali: basi e teoria dei frames;
- operatori di localizzazione e di Weyl.

Infine vale la pena ricordare che, oltre a settore di interesse in sé, l'Analisi Tempo-Frequenza ha portato allo sviluppo di tecniche rivelatesi utili in altri campi di ricerca, primo fra tutti, nel gruppo di ricerca torinese, l'Analisi Microlocale delle Equazioni alle Derivate Parziali.

Nota Bibliografica La letteratura sull'Analisi di Fourier è vastissima, e ci limitiamo ad elencare qui di seguito alcuni titoli significativi. Per quanto riguarda la parte storica, oltre alla memoria di Fourier [11], indichiamo la sua biografia ad opera di J. Herisel [16]; il lettore troverà qui la trascrizione dei giudizi espressi da Lagrange sull'opera di Fourier. La nostra trattazione storica successiva dovrebbe certo essere ampliata, e meglio giustificata. Diamo indicazione dei contributi di L. Schwartz [20] e Hörmander [17], e rimandiamo ai numerosi siti internet per informazioni sull'opera degli altri grandi matematici elencati nel testo.

Per la parte sull'Analisi Tempo-Frequenza, oltre a citare i precursori D. Gabor [12], E. Wigner [23] e J. Ville [22], indichiamo i testi di L. Cohen [6] e di K.H. Gröchenig [15], che sono riferimenti di base per la teoria moderna. I lavori [1], [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [13], [14], [18], [19], [21] sono rappresentativi dei risultati recenti del gruppo di ricerca di Torino.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. de Avila Silva, M. Cappiello; *Time-periodic Gelfand-Shilov spaces and global hypoellipticity on $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$* . J. of Funct. Analysis, 282 (2022), n.9.

- [2] P. Boggiatto, D. De Donno, A. Oliaro; *Time-frequency representations of Wigner type and pseudo-differential operators*. Transactions of AMS, 632, (2010) 4955 – 4981.
- [3] P. Boggiatto, E. Carypis, A. Oliaro; *Cohen class of time-frequency representations and operators: boundedness and uncertainty principles*. J. of Math. Analysis, 461, (2018), 304 – 318.
- [4] P. Boggiatto, C. Fernández, A. Galbis, A. Oliaro; *Wigner transform and quasicrystals*. J. of Funct. Analysis, 282, (2022), 1 –20.
- [5] T. Bruno, M.G. Cowling, F. Nicola, A. Tabacco; *Estimates for matrix coefficients of representations*. American Journal of Mathematics, 144, (2022) 943 – 965.
- [6] L. Cohen; *Time-Frequency Analysis*. Electrical Engineering Signal Processing, Prentice Hall PTR, (1995), New Jersey.
- [7] E. Cordero, L. Rodino; *Wigner analysis of operators. Part I: Pseudo-differential operators and wave fronts*. Appl. Computational Harmonic Analysis, 58, (2022), 85 – 123.
- [8] E. Cordero, L. Rodino; *Time-Frequency Analysis of Operators*. De Gruyter, (2020), Berlin.
- [9] S. Coriasco; *Solutions of hyperbolic stochastic PDE's on bounded and unbounded domains*. J. of Fourier Analysis and Appl., 27 (2021), n.5.
- [10] R. Denk, D. Ploss, S. Raua, J. Seiler; *Boundary value problems with rough boundary data*. J. of Differential Equations, 366, (2023) 85 – 131.
- [11] J.B.J. Fourier; *Théorie analytique de la chaleur*. Didot Père et Fils, (1822), Paris.
- [12] D. Gabor; *Theory of Communication*. Journal IEE, 93 (III), (1946), 429 – 457, London.
- [13] L. Galleani; *Time-Frequency analysis of the impulse response*. IEEE on Signal Processing, 67 (2019), 1280 – 1295.
- [14] G. Garello, A. Morando; *Pseudodifferential operators with completely periodic symbols*. J. of Pseudo-Diff. Oper. Appl., 14 (44), (2023), n.44.
- [15] K. Gröchenig; *Foundation of Tme-Frequency Analysis*. Birkhäuser, (2001), Boston.
- [16] J. Herivel; *Joseph Fourier: The Man and the Physicist*. Oxford University Press, (1975), Oxford.
- [17] L. Hörmander; *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, II, III, IV*. Springer Verlag, (1990), Berlin.

- [18] F. Nicola, P. Tilli; *The Faber-Krahn inequality for the short-time Fourier transform*. *Inventiones Mathematicae*, 230, (2022), 1 – 30.
- [19] F. Nicola, S. I. Trapasso; *Wave Packet Analysis of Feynman Path Integrals*. *Lecture Notes in Mathematics*, (2022), Berlin.
- [20] L. Schwartz; *Théorie des distributions*. *Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg*, No. IX-X. (1966), Hermann, Paris
- [21] N. Teofanov, J. Toft, P. Wahlberg; *Pseudodifferential operators with isotropic symbols, Wick and anti-Wick operators, and hypoellipticity*. *J. of Math. Pure and Appl.*, (9) 167, (2022), 48 – 100.
- [22] J. Ville; *Théorie et applications de la notion de signal analytique*. *Cables et Transmissions*, 2A (1948), 61 – 74.
- [23] E. Wigner; *On the quantum correction of the thermo-dynamic equilibrium*. *Phys. Rev. Letters*, 40, (1932), 749 – 759.