Ad limina

Frontiere e contaminazioni transdisciplinari nella storia delle scienze

A cura di Claudia Addabbo, Elena Canadelli, Luigi Ingaliso, Daniele Musumeci, Luca Tonetti, Valentina Vignieri, Marta Vilardo

studi e ricerche / 5

studi e ricerche / 5

Ad limina

Frontiere e contaminazioni transdisciplinari nella storia delle scienze

Atti del Convegno nazionale
della Società Italiana di Storia della Scienza
Catania, 30 maggio-1 giugno 2022

*A cura di Claudia Addabbo, Elena Canadelli,
Luigi Ingaliso, Daniele Musumeci, Luca Tonetti,
Valentina Vignieri, Marta Vilardo*

EDITRICE BIBLIOGRAFICA

Società Italiana di Storia della Scienza

Volume stampato con il contributo dell'Università degli Studi di Catania –
Progetto EUROAD: EUROpa trADita: genealogie, visioni, conflitti e saperi
(Piano di incentivi per la ricerca di Ateneo 2020/2022 – Linea 2).
La pubblicazione in Open Access si deve al contributo della Società Italiana
di Storia della Scienza (SISS).

Immagine di copertina: *An Eruption of Mount Etna at Night* [1787?],
mezzatinta colorata di J.-M. Mixelle da Alessandro d'Anna,
Wellcome Collection, Public Domain Mark.

DOI: 10.53134/9788893575904

EXTENDED BOOK

https://doi.org/10.53134/9788893575904-2023

ISBN: 978-88-9357-601-7

Via Lesmi, 6 - 20123 Milano

Sommario

GLI STUDI SULLE THREEFOLDS NEI MANOSCRITTI DI GINO FANO

*Elena Scalambro**

Abstract

The aim of this paper is to analyze Gino Fano's contributions to the study of threefolds from some unpublished manuscripts held in Turin's Special Mathematical Library. Three main aspects are examined: the evolution of the research path, the placing into the context of the Italian School of algebraic geometry, and the legacy on later studies.

La questione storiografica: Fano e la geometria algebrica

Gino Fano (1871-1952), allievo di Corrado Segre e docente presso l'ateneo torinese dal 1901 al 1938, è stato un pioniere della geometria algebrica e "uno fra i più significativi seguaci della gloriosa Scuola geometrica italiana".[1]

I suoi interessi di ricerca furono molteplici: si dedicò infatti ai fondamenti della geometria, con l'introduzione del celebre esempio di piano proiettivo finito con il minor numero di elementi (oggi noto come piano di Fano); allo studio delle curve e delle superfici algebriche, con particolare attenzione alle superfici di Enriques e di tipo K3 e ai loro automorfismi; ai gruppi continui di trasformazioni in geometria proiettiva e birazionale, a partire dalle ricerche di S. Lie e di F. Klein. Diede anche alcuni contributi significativi nel campo delle varietà algebriche definite da equazioni differenziali lineari e in geometria della retta, estendendo lo studio delle congruenze di rette a quelle di terzo grado. Tuttavia, i contributi più celebri sono quelli relativi allo studio e alla classificazione birazionale delle varietà algebriche tridimensionali (comunemente note come threefolds), ambito cui il nome di Fano è ancora oggi legato. L'importanza delle sue ricerche in questo settore, scaturite dall'analisi della cubica di $\mathbb{P}^5$, era già riconosciuta dai contemporanei di Fano come testimoniano le parole di A. Terracini:

> Era un problema difficile e refrattario [...] dalla cui stessa posizione già si poteva presumere che avrebbe dato luogo, nelle mani dello stesso Fano, a sviluppi atti ad illuminare in qualche modo la natura delle varietà algebriche tridimensionali.[2]

Se, da un lato, le ricerche di Fano si sviluppano intorno a una delle questioni centrali della geometria algebrica in campo internazionale, dall'altro si collocano nel solco della continuità con la tradizione geometrica della Scuola di Segre. Si presentano infatti come la naturale estensione in dimensione superiore dei problemi relativi alla classificazione di curve e superfici

* Università degli Studi di Torino, elena.scalambro@unito.it

[1] Beniamino Segre, *Gino Fano*, "Archimede", 4 (1952), p. 262.
[2] Alessandro Terracini, *Gino Fano*, "Bollettino dell'UMI", 7 (1952), 3, p. 488.

e sono caratterizzate da un approccio prevalentemente proiettivo che "porta i geometri italiani a divinazioni, più che a risultati, notevoli, ma costituisce, in questo campo più ancora che in altri, il vero limite della Scuola".[3]

Nella letteratura relativa alle ricerche di Fano sulle threefolds, emergono due tendenze complementari e talvolta contrapposte. Sul versante storico è ormai consolidato che gli studi di Fano, soprattutto quelli dell'ultimo periodo, si collocano nella fase del declino della Scuola italiana di geometria algebrica, quando i risultati erano intuiti piuttosto che dimostrati. D'altra parte, in ambito matematico, è ampiamente riconosciuta l'originalità delle sue idee geometriche che gli consentono di affrontare questioni complesse, senza avere a disposizione degli strumenti adeguati.[4] La creatività di Fano in campo matematico si rivela così fondamentale, permettendogli di

> affrontare questi problemi praticamente a mani vuote poiché mancavano i fondamenti per le varietà algebriche di dimensione superiore. Lo sviluppo moderno ha mostrato che Fano aveva essenzialmente ragione e, una volta presenti le fondamenta, i suoi metodi erano corretti ed efficaci.[5]

Alcuni manoscritti inediti[6] recentemente identificati all'interno del *Fondo Fano* (d'ora in avanti *FFa*) della Biblioteca Speciale di Matematica dell'Università di Torino (BSMT) conducono a riconsiderare gli studi di Fano sulle threefolds, adottando come lente d'indagine quella di patrimonio, nella sua accezione materiale e immateriale. Un approccio di questo tipo – come cercheremo di illustrare nel presente lavoro – può anche contribuire ad accostare e armonizzare le due istanze emerse in storiografia precedentemente illustrate.

Un lungo percorso di ricerca: gli studi sulle Fano threefolds

Il punto di partenza delle ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali si colloca all'interno della tradizione geometrica italiana. Egli, infatti, prende le mosse dal problema di Lüroth in dimensione superiore con l'obiettivo di estendere i risultati di razionalità e di classificazione ottenuti da G. Castelnuovo e F. Enriques per le superfici qualche anno prima. Mentre la questione ha risposta affermativa nei casi di dimensione uno e due, le ricerche di Fano (1908) ed Enriques (1912) conducono a una prima intuizione del fatto che questo problema ha risposta negativa per varietà di dimensione tre: in particolare, l'intersezione completa di una quadrica e di una cubica dello spazio a cinque dimensioni è unirazionale ma non razionale. Tale risultato verrà provato rigorosamente solo negli anni Settanta da V.A. Iskovskikh e J. Manin (1971), ma fin da subito le sue implicazioni appaiono importanti agli occhi dei geometri italiani. Da questi primi tentativi, emerge inoltre l'impossibilità di fornire un criterio di razionalità per le varietà a tre dimensioni analogo a quello di Castelnuovo per le superfici

---

[3] Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto, *Geometria Algebrica*, in *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, a cura di Simonetta di Sieno, Angelo Guerraggio e Pietro Nastasi, Milano, Marcos y Marcos, 1998, p. 257.

[4] Cfr., *inter alia*, Alberto Collino, Alberto Conte, Alessandro Verra, *On the Life and Scientific Work of Gino Fano*, "La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI", 7 (2014), pp. 99-137.

[5] Jacob Murre, *On the Work of Gino Fano on Three-dimensional Algebraic Varieties*, in *Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano*, a cura di Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto e Edoardo Sernesi, "Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo", 36 (1994), 2, p. 224.

[6] Tali documenti sono digitalizzati all'interno del sito web a cura di Livia Giacardi, al link: https://www.corradosegre.unito.it/fondofano/scritti4.pdf.

(1896), basato sull'annullarsi di alcuni invarianti birazionali come i plurigeneri: lo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli diventa una delle principali vie di ricerca, all'interno della quale Fano si inserisce.
Dopo un primo lavoro[7] del 1904 sull'ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^4$, fin dal 1908 egli si dedica allo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli dichiarando che

> per le varietà algebriche a tre dimensioni l'annullarsi di tutti i generi (analoghi ai precedenti) non è ancora condizione sufficiente perché esse possano rappresentarsi biunivocamente sullo spazio S_3; e scopo di questa breve Nota è appunto di assodare l'esistenza – che si presenta per la prima volta nel caso di varietà a tre dimensioni – di tipi birazionalmente distinti di varietà aventi tutti i generi nulli.[8]

Da questo momento, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali (1904-1950) si dipanano in più direzioni, tra cui spicca l'introduzione delle varietà V oggi note come Fano threefolds, caratterizzate modernamente dalla proprietà di avere il divisore anticanonico $|-K_V|$ ampio.

Per proseguire è necessario introdurre alcuni elementi fondamentali della notazione utilizzata da Fano. Egli individua le famiglie di threefolds M_3^{2p-2}, immerse nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{p+1}$ di grado (o "ordine" nella terminologia di Fano) $2p-2$ e con curve-sezioni di genere p. Tali varietà tridimensionali contengono come sezioni iperpiane delle superfici $F^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$, aventi quindi il medesimo ordine della varietà di partenza e tutti i plurigeneri uguali a uno; dal punto di vista moderno, sono superfici del tipo K3. Dall'intersezione di due generiche sezioni iperpiane, si ottengono delle curve-sezioni canoniche $C_p^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ dello stesso ordine e di genere p.

Queste particolari varietà tridimensionali sono introdotte da Fano in modo sistematico nel 1928, durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna.

Tuttavia, dall'analisi di un primo *corpus* di carte manoscritte (BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, cc. 125-130) è emerso come le ricerche di Fano in questa direzione fossero scaturite qualche anno prima, a partire non dalla costruzione geometrica basata sulle sezioni iperpiane ma dall'idea di procedere in completa analogia con lo studio delle superfici. Le carte prese in esame si sono rivelate le minute di alcune lezioni dedicate alle principali differenze che si incontrano nello studio delle superfici algebriche e in quello delle threefolds che Fano avrebbe voluto tenere durante il ciclo di seminari che era stato invitato a presentare nel semestre invernale del 1923 presso l'University College of Wales di Aberystwyth. Tali argomenti non erano poi stati affrontati per ragioni di tempo. All'interno di questi appunti, in apertura Fano si rifà alle ricerche di F. Severi degli anni 1906-1909 sulle varietà di dimensione superiore, introducendo alcune nozioni fondamentali: genere geometrico e aritmetico (P_g e P_a rispettivamente), irregolarità tridimensionale $q_1 = P_g - P_a$ e irregolarità superficiale q_2, connessione lineare $2q_2 + 1$, somma delle irregolarità $q_1 + q_2$. Qui Fano riprende quasi testualmente alcuni passi di Severi che in quegli anni aveva iniziato ad assumere un ruolo centrale nella matematica italiana. Fa riferimento però anche agli studi di Marino Pannelli, cultore di geometria algebrica e figura di secondo piano, che aveva determinato alcune relazioni tra i caratteri numerici delle

[7] Gino Fano, *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti*, "Annali di Matematica pura ed applicata", 10 (1904), 3, pp. 251-285.
[8] Gino Fano, *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino", 43 (1908), p. 973. Fano denota con S_n lo spazio proiettivo P^n.

threefolds invarianti per trasformazioni birazionali, tra cui Ω_2 (genere aritmetico virtuale della superficie canonica) che torna all'interno del secondo manoscritto analizzato.

Dal titolo *Appunti e vedute concernenti le varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* (BSMT, *FFa, Appunti vari*, cc. 52, 45 e 46), esso contiene gli studi preliminari della comunicazione presentata da Fano a Bologna. Le minute inedite, probabilmente redatte tra la primavera e l'estate del 1928, portano alla luce una prima classificazione delle Fano threefolds basata sul carattere numerico Ω_2. All'interno di questi appunti, Fano affronta la questione partendo dall'esigenza di individuare un carattere aritmetico analogo all'invariante di Castelnuovo-Enriques ω per le superfici, invariante relativo il cui valore massimo per una classe di superfici birazionalmente equivalenti è però un invariante assoluto, cioè il genere lineare virtuale $p^{(1)}$ della curva canonica. Identifica l'analogo di tale carattere con Ω_2, il cui valore assoluto massimo Ω risulta essere un invariante assoluto. Fornisce una prima classificazione di queste threefolds basata su tale invariante che sostanzialmente coincide con quella successivamente esposta a Bologna, con l'unica eccezione del caso $p = 8$.

Nella comunicazione al Congresso, Fano classifica invece tali varietà in base al valore di p, genere geometrico delle curve-sezioni. Tuttavia, nel lavoro pubblicato all'interno degli *Atti* del Congresso,[9] introduce nuovamente Ω_2: a differenza di quanto compare nel manoscritto, afferma che nel caso delle M_3, tale invariante è pari a $-(p+2)$ e coincide con la dimensione dei sistemi di superfici di generi uno contenute nella threefold aumentata di una unità.

Prendendo in considerazione il manoscritto del 1928 e il relativo lavoro a stampa del 1931, la prima classificazione sistematica di Fano delle M_3^{2p-2} può essere sintetizzata come in tabella.[10]

p	$\lvert\Omega_2\rvert$	M_3^{2p-2}	**Descrizione moderna sintetica**
13	15	$V_3^3 \subset \mathbb{P}^4 \Leftrightarrow M_3^{24} \subset \mathbb{P}^{14}$	Threefold cubica $V(3) \subset \mathbb{P}^4$
9	11	$\mathbb{P}^3$ 'doppio' $\Leftrightarrow M_3^{16} \subset \mathbb{P}^{10}$	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 4
8	*	$M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$	$Gr(1,5) \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot H_5 \subset \mathbb{P}^9$
7	9	$M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$	Intersezione di una quadrica generica di $\mathbb{P}^8$ con l'immagine di $P^2 \times P^2$ immerso in $\mathbb{P}^8$ mediante il morfismo di Segre
6	8	$M_3^{10} \subset \mathbb{P}^7$	$Gr(1,4) \cdot V(2) \cdot H_1 \cdot H_2 \subset \mathbb{P}^7$
5	7	$M_3^{8} \subset \mathbb{P}^6$	$V(2,2,2) \subset \mathbb{P}^6$
4	6	$M_3^{6} \subset \mathbb{P}^5$	$V(3,2) \subset \mathbb{P}^5$
3	5	$V_3^4 = M_3^4 \subset \mathbb{P}^4$	Ipersuperficie quartica $V(4) \subset \mathbb{P}^4$
2	4	$\mathbb{P}^3$ 'doppio'	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 6

Sorge quindi un interrogativo riguardo al motivo per cui Fano a Bologna introduca nuovamente l'invariante Ω_2, dopo aver già fornito una classificazione delle Fano threefolds basata sul valore di p. Da una parte, tale invariante gli consente di classificare non solo le $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$, ma anche una seconda categoria di varietà tridimensionali. Si tratta di

[9] Gino Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, Zanichelli, vol. 4, 1931, pp. 115-121.

[10] In tabella si adotta la seguente notazione: * = questa threefold non compare nelle carte manoscritte; $\Leftrightarrow$ = varietà birazionalmente equivalenti; $V(d)\subset P^N$ = ipersuperficie di grado d in P^N; $V(d_1,\dots, d_k)\subset P^N$ = intersezione completa di k ipersuperfici di grado $d_1,\dots, d_k$ in P^N; $Gr(n,k)$ = Grassmanniana dei sottospazi vettoriali (k+1)-dimensionali di uno spazio vettoriale di dimensione (n+1) o, equivalentemente, Grassmanniana di Pk in Pn; Hi = iperpiano.

threefolds singolari, riferibili a varietà tridimensionali M_3^n di ordine n, immerse in $\mathbb{P}^4$ e contenenti una retta di molteplicità $n-2$. D'altra parte, questo modo di procedere mette in luce la volontà dell'autore di conferire lo status di patrimonio a una messe di scoperte e risultati all'interno di un nuovo campo geometrico, in larga parte ancora da esplorare e sviluppare. Questa considerazione è avvalorata dall'introduzione di nuova terminologia matematica da parte di Fano. Come annotato a latere nel manoscritto – probabilmente in un momento successivo rispetto alla prima stesura – Fano definisce "semi-razionali" le varietà del primo tipo. Nel lavoro inviato per la pubblicazione all'interno degli *Atti* del Congresso, si illustra la motivazione di tale scelta: nel caso in cui queste varietà non siano effettivamente razionali, esse si presentano come "come intermedie fra gli enti razionali e quelli aventi almeno uno dei generi e plurigeneri maggiore di zero".[11] Fano chiama invece "pseudo-razionali" le threefolds del secondo tipo, aventi "come analogo, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superfici razionali e le rigate irrazionali".[12]

Se, da un lato, lo scritto pubblicato negli *Atti* del Congresso costituisce l'unico lavoro a stampa in cui Fano segue l'approccio basato sull'invariante Ω_2, dall'altro le carte manoscritte contengono il germe di ulteriori tecniche poi estese e perfezionate nelle pubblicazioni posteriori incentrate sulla successione delle famiglie di Fano threefolds. Fano inizia ad elaborare alcune idee fondamentali che, sviluppate e ampliate nel corso di un'attività di ricerca di oltre quarant'anni, diverranno parte integrante del patrimonio degli studi classici sulle varietà tridimensionali. Per quanto riguarda il problema centrale della razionalità, negli *Appunti e vedute*... così come nella nota apparsa negli *Atti* del Congresso, egli sostiene che "esaminando queste diverse varietà, si ha l'impressione che esse, qualora non siano razionali, tuttavia, al crescere di p, pur con qualche restrizione, vadano gradatamente accostandosi alla razionalità".[13] Nella comunicazione presentata a Bologna Fano aggiunge un ulteriore elemento: tali threefolds godono di una proprietà importante, ossia possono essere proiettate dalle curve di ordine minore in esse contenute (e dunque in particolare – se esiste – da una retta, assunzione successivamente ribattezzata "ipotesi di Fano") in altre varietà dello stesso tipo che corrispondono a valori minori di p ($M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ nello specifico) e che contengono una rigata cubica come immagine della curva centro di proiezione. Inoltre, sottolinea Fano, "dal punto di vista birazionale [...], ciascuna delle varietà enumerate comprende come casi particolari le successive; sicché il crescere di p implica, in massima, una progressiva particolarizzazione della M_3".[14]

A differenza del lavoro a stampa, nelle carte manoscritte del 1928 Fano dichiara esplicitamente il proprio "piano di azione", delineando così una sorta di agenda di lavoro. Scrive infatti che le sue ricerche,

> intese a dimostrare, per quanto possibile, la irrazionalità di alcune fra queste varietà, sono state essenzialmente dirette a studiare:
> a. i sistemi lineari almeno ∞^2 di superficie regolari aventi tutti i generi $= 1$;
> b. l'insieme (gruppo) delle eventuali trasformazioni birazionali;
>
> e a cercare di trovare nei sistemi *a)* e nelle trasformazioni *b)* – naturalmente, a loro volta, legati fra loro – qualche proprietà che sia diversa da quelle dello

[11] Gino Fano, *Sulle varietà algebriche*, cit., p. 121.
[12] *Ivi*, p. 120.
[13] *Ivi*, p. 118.
[14] *Ivi*, p. 119.

spazio S_3, in modo da poterne concludere che si tratta di enti birazionalmente distinti.[15]

Fermo restando che nel nucleo centrale dei lavori su questo tema successivi al 1928 Fano utilizza entrambi i metodi di indagine o una loro combinazione, è però possibile rintracciare due gruppi di pubblicazioni in cui privilegia una delle due vie.

A tal proposito, risultano particolarmente significativi i due scritti del 1930 pubblicati nei *Rendiconti dei Lincei*, dove uno dei due approcci è nettamente prevalente rispetto l'altro. Il primo lavoro[16] consiste in uno studio di geometria della retta volto ad approfondire alcune proprietà di certe rigate che rivestiranno un ruolo particolare nello studio delle Fano threefolds in quanto immagini della retta da cui si effettua la proiezione della varietà. Nella seconda nota lincea[17] Fano si pone l'obiettivo di analizzare la threefold regolare con tutti i plurigeneri nulli M_3^{14}, ottenuta come sezione della Grassmanniana $M_8^{14} \subset \mathbb{P}^{14}$ con $\mathbb{P}^9$ e di "dubbia razionalità", e dimostrare che su di essa le sezioni iperpiane formano una base minima. Per fare ciò, egli ricorre alle trasformazioni birazionali (punto *b)* del manoscritto del 1928), mettendo in luce che M_3^{14} è riferibile birazionalmente ad una cubica di $\mathbb{P}^4$ priva di punto doppio.

L'apparato degli strumenti elaborati da Fano non si limita però allo studio dell'invariante relativo Ω_2, all'analisi dei sistemi lineari di superfici K3 (corrispondente al punto *a)* del manoscritto del 1928) o al confronto tra il gruppo delle trasformazioni birazionali sulle threefolds e quello di $\mathbb{P}^3$ (punto *b)*), con l'obiettivo di mostrare che $Bir(M_3^{2p-2}) \neq Bir(\mathbb{P}^3)$. Bisogna almeno citare lo studio dei sistemi omaloidici di superfici per provare l'irrazionalità della quartica di $\mathbb{P}^4$ e dell'intersezione completa di una quadrica e di una cubica in $\mathbb{P}^5$, e l'analisi delle involuzioni sulle threefolds, ambito in cui le ricerche di Fano si intrecciano con quelle di Enriques e di G. Aprile. Utilizzato per la prima volta per la M_3^6, Fano estende questo metodo a diverse famiglie di threefolds, ottenendo alcuni risultati parziali di razionalità. Infatti, mentre in termini moderni per le superfici le nozioni di razionalità, unirazionalità e connessione razionale coincidono, così non accade per le threefolds. In quest'ottica di idee si collocano la nota lincea[18] del 1932, dedicata all'analisi dei gruppi finiti di trasformazioni birazionali sulle threefolds, e il lavoro[19] del 1936, dove Fano analizza le involuzioni sulle varietà a tre dimensioni ottenute nei casi $p = 5, 6, 7$ con l'obiettivo di trovare tipi di involuzioni differenti da quelle di $\mathbb{P}^3$ e provare così l'irrazionalità.

Negli anni Trenta Fano inizia anche ad estendere il metodo di proiezione di una varietà tridimensionale da una retta, analizzando ciò che si ottiene al variare del centro di proiezione. La proiezione di M_3^{2p-2} da una conica in essa contenuta è una threefold M_3^{2p-8} a curve-sezioni canoniche che contiene una superficie razionale rigata di quarto grado come immagine della conica di partenza. O, ancora, proiettando M_3^{2p-2} dallo spazio tangente in un suo punto generico si ottiene un'altra varietà tridimensionale M_3^{2p-10} a curve-sezioni canoniche, nella quale l'immagine dell'intorno del centro di proiezione è una superficie di Veronese. Fano non estende lo strumento classico della proiezione da una retta solo in questa direzione, attraverso

[15] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 45*r*.

[16] Gino Fano, *Reti di complessi lineari dello spazio* S₅ *aventi una rigata assegnata di rette-centri*, "Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", 11 (1930), 6, pp. 227-232.

[17] Gino Fano, *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, "Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", 11 (1930), 6, pp. 329-335.

[18] Gino Fano, *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli*, "Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", 15 (1932), 6, pp. 3-5.

[19] Gino Fano, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Università di Pavia, 1936, pp. 329-349.

la scelta di un centro di proiezione appropriato. Nella corposa memoria[20] del 1937 introduce il metodo della cosiddetta "doppia proiezione" che permette di riferire birazionalmente ogni Fano threefold ad una varietà 'più semplice' (ma non generale) dello stesso tipo, immersa nello spazio proiettivo di dimensione $p-6$. Infatti, dopo aver proiettato $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ da una sua retta in una $M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ contenente una rigata cubica di $\mathbb{P}^4$, si può proiettare M_3^{2p-6} da tale $\mathbb{P}^4$ in una Fano threefold di ordine ancora inferiore, $M_3^{2p-18} \subset \mathbb{P}^{p-6}$.

Le varietà tridimensionali sono anche oggetto della comunicazione presentata da Fano al primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Firenze nell'aprile del 1937.[21] Nei due lavori a stampa successivi dedicati alle Fano threefolds, apparsi sulle pagine dei *Commentarii Mathematici Helvetici* nel 1942 quando Fano è ormai esule a Losanna a causa dei provvedimenti razziali, torna ad affrontare questo studio secondo le due vie tracciate nel manoscritto del 1928. Nel primo[22] Fano si concentra sullo studio delle trasformazioni birazionali tra le threefolds. Le proprietà geometriche illustrate sono utilizzate per fornire le equazioni esplicite di due particolari proiezioni biunivoche di Fano threefolds su $\mathbb{P}^3$: la V_3^3 proiettata da una retta contenuta in un suo piano e la V_3^4 proiettata da un suo piano. La seconda nota[23] del 1942 è invece dedicata all'analisi dei sistemi delle superfici-sezioni delle varietà tridimensionali. Qui Fano volge nuovamente l'attenzione al problema della razionalità, adottando però una prospettiva diversa: si concentra infatti sullo studio dei casi delle threefolds aventi come superfici-sezioni delle intersezioni complete. Partendo dal presupposto che per $p > 10$ le Fano threefolds sono razionali, con l'unica eccezione del caso dubbio $p = 13$, l'autore mostra che se le M_3 contengono solo superfici intersezioni complete con forme dello spazio proiettivo in cui sono immerse, esse sono razionali anche nei casi $p = 9$ e $p = 10$.

Il lavoro finale sull'irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$, redatto da Fano durante l'esilio a Losanna e pronto fin dal 1942, è presentato da Severi all'Accademia Pontificia nel febbraio 1943, ma uscirà solo nel 1947.[24] I contenuti del lavoro, tuttavia, sono noti a livello nazionale e internazionale. Vi accennano, per esempio B. Segre, J.A. Todd, L. Godeaux e Castelnuovo nelle loro lettere:

> [...] I was told by Fano that this irrationality has been very recently proved by him, on considering the linear system of surfaces of genera 1 lying on V_3^3, but I have not seen the proof. I feel that one should be able to obtain the result also by my methods, but I have not yet had time of thinking seriously about this.[25]

[20] Gino Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, "Memorie della R. Accademia d'Italia", 8 (1937), pp. 23-64.
[21] Gino Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, in *Atti del I Congresso dell'UMI tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 aprile 1937*, Bologna, Zanichelli, 1938, pp. 245-250.
[22] Gino Fano, *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche,* "Commentarii Mathematici Helvetici", 14 (1942), pp. 193-201.
[23] Gino Fano, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche,* "Commentarii Mathematici Helvetici", 14 (1942), pp. 202-211.
[24] Gino Fano, *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche,* "Commentationes Pontificia Academia Scientiarum", 11 (1947), pp. 635-720.
[25] Caltech Archives, *B. Segre Papers*: B. Segre a J.A. Todd, Manchester 8.10.1943.

> Pendant la guerre, j'ai eu quelques relations avec M. Fano, réfugié à Lausanne; il a réussi à démontrer l'irrationalité de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions, mais je ne connais pas encore sa démonstration.[26]

> Il Prof. Fano è stato malato a Boston [...]. La Memoria sulla varietà cubica che deve esser pubblicata dall'Ac. Pontificia non è ancora uscita; avrà visto il breve estratto pubblicato nei Rendiconti dei Lincei. In questi giorni un giovane di qua, molto intelligente, mi ha comunicato una dimostrazione molto semplice e breve della irrazionalità della varietà cubica fondata su considerazioni topologiche. Ma ho bisogno di pensare ancora alla cosa.[27]

Alla pubblicazione del lavoro farà seguito un'entusiasta recensione di Conforto che, pur mettendo in luce l'ipotesi assunta da Fano (restrittiva ma "estremamente plausibile"), insiste sui "numerosissimi particolari dimostrativi", sugli "importanti risultati collaterali" e gli "acuti accorgimenti" che rendono questa memoria "tra le più elaborate e profonde che siano state scritte con i metodi della Scuola italiana di geometria algebrica" (1947, MR0038100). Dopo l'articolo sulla cubica di $\mathbb{P}^4$ Fano non interrompe l'attività di ricerca sulle threefolds tant'è che nel 1949 pubblica una nuova nota[28] in cui compare per la prima volta la M_3^{2p-2} che si ottiene per $p = 12$. L'anno successivo, invitato a tenere una conferenza al Seminario Matematico di Torino in occasione della sua nomina a emerito, Fano traccia un bilancio della sua attività di ricerca sulle varietà tridimensionali, scaturita dalla questione della cubica generale dello spazio a quattro dimensioni che "si è presentata in geometria da forse 60 anni, suscitando viva curiosità".[29]

Gli studi di Fano all'interno del patrimonio geometrico italiano.

L'opera di Fano sulle threefolds si colloca all'interno di un patrimonio culturale, quello della Scuola italiana di geometria algebrica, caratterizzato – dal punto di vista della ricerca – dalla condivisione non soltanto dei problemi e delle tematiche ma anche

- del metodo che, sommariamente, si può descrivere come un approccio prevalentemente sintetico al cui interno un ruolo fondamentale è rivestito dagli strumenti proiettivi e dall'uso dell'analogia;
- del modo di scrivere e presentare i propri risultati, in divenire e come frutto di un "lavoro sperimentale";
- delle fonti dove, accanto ai lavori della tradizione italiana, figurano i contributi tedeschi di fine Ottocento e inizio Novecento.

Per quanto riguarda il primo aspetto, l'approccio proiettivo caratterizza tutti i lavori di Fano sulle varietà tridimensionali. Il taglio prevalentemente didattico adottato nelle minute del 1923 contribuisce a illuminare ulteriormente quel procedere per analogia con lo studio delle superfici nel campo delle varietà tridimensionali. Qui, per esaminare i sistemi di superfici contenuti in una certa threefold, Fano sfrutta le proprietà delle curve canoniche ottenute

---

[26] *Ivi*, L. Godeaux a B. Segre, Liège 13.8.1945.
[27] *Ivi*, G. Castelnuovo a B. Segre, Roma 19.12.1946.
[28] Gino Fano, *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, "Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", 6 (1949), 8, pp. 151-156.
[29] Gino Fano, *Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*, "Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino", 9 (1950), p. 21.

come sezioni di tali superfici che si trasmettono alla varietà in questione. In particolare, focalizza l'attenzione sui sistemi lineari di dimensione due composti da superfici aventi i plurigeneri pari a uno in quanto – come dichiarato nel manoscritto di Aberystwyth – se si considera una superficie variabile all'interno di un tale sistema, l'irregolarità superficiale non dipende dal sistema considerato, costituendo dunque un invariante per l'intera classe di threefolds birazionalmente equivalenti.

Passando al secondo punto, l'agenda di lavoro tracciata da Fano nel manoscritto del 1928 ben esemplifica l'avanzare per tentativi, prove ed errori, provando a seguire diverse strade per conseguire un certo risultato. Bisogna anche tener presente che il contesto in cui Fano presenta per la prima volta alla comunità matematica internazionale le sue ricerche sulle threefolds – il Congresso di Bologna – è caratterizzato da una forte presenza della Scuola italiana di geometria algebrica. Durante la celebre conferenza plenaria di Castelnuovo sulla geometria algebrica in Italia, la portata delle ricerche intraprese da Fano è sottolineata con queste parole:

> Nulla sappiamo in proposito, nemmeno per i più bassi valori del grado, superiori a 2. Anzi, ricerche che il Fano prosegue da vari anni, e di cui vi parlerà in una sua comunicazione, fanno vedere quanto la questione sia complessa. [...] Una classificazione accurata di questi tipi getterebbe molta luce sopra una questione che è necessario risolvere per lo sviluppo futuro della geometria algebrica.[30]

Ricollegandosi al discorso di Castelnuovo, Fano introduce il suo intervento in questi termini:

> La distinzione, che pareva tradizionale, tra scienze di ragionamento e scienze sperimentali è ormai sorpassata. In ogni scienza hanno parte l'esperienza e il ragionamento; la distinzione concerne solo le reciproche proporzioni. In matematica la parte riservata all'esperienza, piccola e limitata alla fase di scoperta, consiste essenzialmente nell'esame accurato di qualche caso particolare. Io mi propongo appunto di esporre qui il risultato di un po' di lavoro sperimentale, e di qualche congettura ulteriore, riguardo a una questione ardua e importante, che da tempo attende invano la soluzione.[31]

I tratti stilistici e metodologici della comunicazione di Bologna sono emblematici dell'inserimento di Fano nell'alveo della Scuola italiana.

Infine, spostando l'attenzione al terzo e ultimo aspetto, l'analisi del *citational network* degli scritti sulle Fano threefolds rivela alcuni dati interessanti. Innanzitutto, la quasi totalità dei lavori citati è costituita da pubblicazioni della tradizione geometrica italiana (88% delle citazioni), per un totale di 22 autori.[32] Al loro interno accanto a quello di Severi (con 33 citazioni) spiccano i nomi di Enriques (30), Segre (18), Castelnuovo (12) e G. Marletta (10). Tra gli stranieri, gli autori tedeschi sono invece i maggiormente rappresentati (Klein, M. Nöther e T. Reye *in primis*).

[30] Guido Castelnuovo, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, Zanichelli, vol. 1, 1929, p. 200.
[31] Gino Fano, *Sulle varietà algebriche...*, cit., p. 115.
[32] Su un totale di 165 citazioni, solo 19 lavori recano la firma di autori stranieri: nove pubblicazioni provengono dalla Germania, sei dal Regno Unito, due dalla Danimarca, una rispettivamente dalla Svizzera e dall'Austria.

L'eredità delle ricerche sulle Fano threefolds: dal passato al presente

Pur presentando alcune lacune e racchiudendo spiegazioni talvolta inadeguate dal punto di vista del rigore, i lavori di Fano sulle M_3^{2p-2} riscuotono un successo immediato, soprattutto in relazione alla questione fondamentale dell'irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$. I suoi contributi al problema dell'assegnazione di condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità delle threefolds sono accolti entusiasticamente tra i membri della Scuola per due ragioni essenziali. Innanzitutto, costituendo il passaggio dallo studio delle superfici a quello delle threefolds, gli studi di Fano si inseriscono a pieno titolo all'interno del programma di ricerca della tradizione italiana. In secondo luogo, essi aprono la strada a nuove vie di indagine geometrica che rappresenterebbero la "prova della vitalità" della Scuola. I geometri italiani, tuttavia, contrariamente a quanto auspicavano, non riusciranno a "mettere la mano sugli istrumenti adatti allo scopo, portando l'ordine e l'armonia anche nel dominio delle varietà a più dimensioni".[33]

Gli studi sulle threefolds intrapresi da Fano hanno dato un importante impulso alle ricerche sviluppatesi in contesti differenti ma in stretto dialogo con la Scuola italiana, anche negli anni del suo declino, quando a livello internazionale si andavano invece affermando correnti e indirizzi di ricerca diversi, nella direzione tracciata dall'algebra moderna e dalla topologia. È questo il caso della Scuola di geometria inglese sulla quale le ricerche dei geometri italiani esercitano una sorta di azione di magistero almeno fino agli anni Trenta. In particolare, gli studi di Fano sono accolti molto positivamente a Cambridge, dove vengono portati avanti dal gruppo di geometri inglesi sorto attorno alla figura di H.F. Baker e consolidatosi durante i *tea party* del sabato pomeriggio da lui organizzati con l'obiettivo di promuovere il dialogo e il confronto sulle principali questioni della geometria. Fano intrattiene scambi regolari con questa comunità matematica come emerge dalla corrispondenza con Baker che, nel dicembre del 1931, gli scrive:

> Dear Sir,
> I was very honoured by, and very grateful to you for, your letter of 2 Dec., telling me that you had written further about my little Note of the Del Pezzo ψ^5. [...] Our students in Cambridge read many of your published papers, and find them very helpful – so that I am particularly grateful to you for writing to me.[34]

Le ricerche classiche di Fano sulle threefolds sono riprese da Leonard Roth e poi pubblicate per la prima volta in forma organica all'interno del suo trattato *Algebraic threefolds. With special regard to problems of rationality* (1955). Di un certo rilievo è il fatto che Roth, dopo esser stato avviato alla ricerca da Baker, abbia trascorso un anno a Roma come vincitore di una borsa Rockefeller (1930-31), instaurando proficue relazioni scientifiche con i matematici italiani: Castelnuovo, Enriques, Severi e T. Levi-Civita. Il geometra inglese, che si dedicherà "per tutta la vita allo studio della geometria algebrica, seguendo i metodi della Scuola italiana",[35] recepisce l'eredità di Fano nel campo degli studi sulle threefolds, la cui profonda conoscenza ben emerge da questo volume. Anche i contatti epistolari tra i due matematici,

[33] Fabio Conforto, *Il contributo italiano al progresso della geometria algebrica negli ultimi cento anni*, in *Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939*, Roma, SIPS, vol. 1, 1939, p. 149.
[34] BSMT, *FFa*: Baker a Fano, Cambridge 14.12.1931.
[35] Beniamino Segre, *Leonard Roth*, "Bulletin of the London Mathematical Society", 8 (1976), p. 194.

proseguiti almeno fino al trasferimento di Fano in Svizzera, portano alla luce un'ampia condivisione in termini sia di temi di ricerca sia di strumenti e metodi adottati. Gli argomenti centrali sono i risultati di razionalità e irrazionalità delle varietà tridimensionali: "sembra strano che la V_3^{12} che contiene soltanto intersezioni complete sia razionale; ma questo studio è pieno di sorprese".[36] Compaiono anche riferimenti puntuali a specifici risultati di Fano sulle threefolds, come quelli che portano Roth ad affermare: "devo dire quanto è soddisfacente sapere che la serie delle V_3^{2p-2} termina per $p = 37$ e che per $p > 10$ esse sono razionali". Per quanto riguarda i metodi, Roth non solo padroneggia gli strumenti introdotti da Fano ma suggerisce anche nuove idee per progredire nella ricerca. Coniuga così i risultati ottenuti dai geometri inglesi con le tecniche classiche della Scuola italiana, come il metodo delle proiezioni successive:

> in una Nota recente – non ancora pubblicata – ho stabilita che una forma quartica di S_4 non può aver più di 45 nodi isolati [...]. Forse si potrebbe usare questo risultato per dimostrare, mediante proiezioni successive, che le V_3^{2p-2} della prima specie non esistono per $p > 23$.[37]

Non bisogna però pensare che si tratti di un'interazione a senso unico, dalla Scuola italiana verso quella inglese. Significativo è il gruppo di cinque scritti che Fano cita all'interno dei suoi lavori sulle threefolds, firmati dagli inglesi P. Du Val, D. Babbage, J. Todd e Roth – tutti studenti di Baker a Cambridge – e pubblicati tra il 1932 e il 1938. Da questi egli trae sia alcuni risultati specifici, come quelli relativi alla quartica di $\mathbb{P}^4$, sia certi procedimenti, come quello adottato da Roth per lo studio della varietà M_3^{14}.

Infine, tracce dell'eredità culturale delle ricerche di Fano sulle threefolds non si riscontrano solo all'interno di tradizioni di ricerca coeve, come quella della Scuola inglese, ma anche in lavori di geometria algebrica decisamente posteriori, pubblicati a partire dagli anni Settanta. Anche in questo caso si assiste ad un'interazione in entrambe le direzioni. Da un lato, infatti, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali hanno fornito ampio materiale alle ricerche recenti in tale ambito, culminate con la classificazione completa delle Fano threefolds di Iskovskikh (1977-79). Dall'altro, la geometria algebrica moderna ha contribuito a spiegare e giustificare rigorosamente molte delle affermazioni contenute negli scritti di Fano, dando solide fondamenta ai metodi utilizzati. In questa direzione un esempio notevole è costituito dal metodo della doppia proiezione. Gli studi recenti hanno innanzitutto permesso di rimuovere l'ipotesi di Fano, dimostrando che ogni varietà di Fano della serie principale di indice 1 e di prima specie contiene una retta. Sotto queste ipotesi è possibile costruire rigorosamente il morfismo birazionale soggiacente al metodo della doppia proiezione di Fano. Sotto un'ipotesi forte (l'esistenza di una retta sulla threefold) e pur senza tutte le cautele necessarie, già nel 1937 Fano aveva individuato questo metodo promettente che risulta legittimato dalla costruzione del morfismo di blow-up. Lo scoppiamento, che in questo caso specifico permette di sostituire un insieme finito di punti di una threefold con altrettanti piani proiettivi, sarà introdotto soltanto qualche decennio più tardi da H. Hopf.

In conclusione, la rilettura dei contributi di Fano sulle threefolds alla luce di alcune fonti archivistiche inedite, all'interno delle quali le due dimensioni (materiale e immateriale) della nozione di patrimonio si intersecano, porta a collocare queste ricerche all'interno di una tradizione geometrica peculiare, costituita non solo da specifiche domande di ricerca e risultati

[36] BSMT, *FFa*: Roth a Fano, Londra 18.2.1937.
[37] *Ibidem*.

matematici, ma da un insieme di tecniche e strumenti elaborati per raggiungerli, da un linguaggio peculiare (anche se, talvolta, di difficile comprensione al di fuori della tradizione italiana), da un approccio basato sullo studio dei casi particolari e dalla successiva generalizzazione. Lo stesso modo di scrivere di Fano è paradigmatico del processo di patrimonializzazione dei saperi matematici, come emerge dal lavoro del 1950, dove non si limita a descrivere i principali contributi della lunga carriera accademica ma dedica particolare attenzione al percorso intrapreso, ripercorrendo le principali tappe della sua attività di ricerca sulle threefolds.

Dalla consapevolezza che le ricerche sulle threefolds sono intrinsecamente legate al patrimonio culturale all'interno del quale sono scaturite, ciò che emerge è una visione più sfumata dell'opera di Fano in questo campo rispetto a quella delineata nella storiografia esistente che aveva enfatizzato da un punto di vista prettamente interno i suoi punti di forza e di debolezza.