SARA BAGOSSI, SILVIA BELTRAMINO, FEDERICA FERRETTI,
CHIARA GIBERTI, EUGENIA TARANTO

VARIA TU CHE COVARIO ANCH'IO

Riflessioni e progettazioni sul ragionamento covariazionale

Prefazione di Ferdinando Arzarello

Sara Bagossi, Silvia Beltramino, Federica Ferretti,
Chiara Giberti, Eugenia Taranto

Varia tu che covario anch'io
Riflessioni e progettazioni sul ragionamento covariazionale

Prefazione di Ferdinando Arzarello

Ledizioni

Via Boselli, 10 - 20141 Milano - Italy
www.ledizioni.it
info@ledizioni.it

VARIA TU CHE COVARIO ANCH'IO

Riflessioni e progettazioni sul ragionamento covariazionale

Prefazione: Ferdinando Arzarello

Autrici: Sara Bagossi, Silvia Beltramino, Federica Ferretti, Chiara Giberti, Eugenia Taranto

Revisione testo: Fabio Brunelli, Silvana Mosca, Luigi Tomasi

ISBN: 9788855268899

Indice

Prefazione 1

Introduzione 3

1. Il ragionamento covariazionale 7

2. Tutta questione di metodologia 17

3. Progettazione per la scuola primaria 26

4. Progettazione per la scuola secondaria di primo grado 37

5. Progettazione per la scuola secondaria di secondo grado 46

6. Conclusione 54

7. Bibliografia 56

Ringraziamenti 61

Prefazione

Il ragionamento covariazionale è alla base di molta matematica e ha improntato tutta la rivoluzione scientifica. Cogliere le relazioni tra grandezze ed esprimerle secondo leggi matematiche ha permesso infatti, da un lato di indagare il linguaggio della natura e di formulare le sue leggi, e dall'altro di sviluppare la matematica in modo da rendere possibile tale formulazione in forma efficiente e produttiva.

La sua comprensione e conoscenza è quindi una meta educativa importante nell'apprendimento matematico e scientifico: contrariamente a quanto pensano alcuni, essa va preparata fin dai primi gradi scolastici proponendo opportuni esempi e situazioni didattiche, che permettano di affinarla via via, conquistandone una crescente consapevolezza con gli allievi e le allieve.

Questo è quanto si afferma perlomeno a livello di ricerca didattica. Ma purtroppo la letteratura in merito è sviluppata nel suo linguaggio specialistico, per giunta è quasi esclusivamente in inglese e quindi può risultare di non facile lettura per il non addetto ai lavori. D'altra parte, tranne qualche rarissima eccezione, il ragionamento covariazionale brilla per la sua assenza in tutti i libri di testo italiani. Mancano quindi esempi facilmente accessibili ai nostri insegnanti, che pure nelle loro classi a volte propongono attività che coinvolgono tali forme di ragionamento ma lo fanno loro malgrado, un po' come il sig. Jourdain de "Il borghese gentiluomo" di Molière, che parlava in prosa senza saperlo.

Il libro si propone di ovviare agli inconvenienti qui accennati. Infatti, è scritto in un linguaggio accessibile e contiene una sequenza di concrete proposte didattiche che mirano a sviluppare negli allievi e nelle allieve il ragionamento covariazionale in forme adeguate dalla scuola primaria alla secondaria di II grado, rendendone espliciti i vari contenuti e passaggi didattici. Parallelamente alle proposte didattiche, entra però anche nelle componenti teoriche principali di tali ragionamenti in forma piana, comprensibile e nello stesso tempo concreta e teoricamente fondata.

La proposta, come spiegato nel volume, è frutto di una collaborazione tra le giovani ricercatrici e insegnanti autrici del libro e docenti italiani dei vari gradi scolastici, che hanno lavorato con loro in un corso di formazione, il cui obiettivo era lo sviluppo e la sperimentazione di attività in classe sulla covariazione a partire da un quadro metodologico operativo.

Il lettore troverà nei diari di bordo riportati il vissuto di queste attività e nelle macroprogettazioni e microprogettazioni la declinazione concreta degli aspetti metodologici della sperimentazione, mentre i commenti a queste rendono espliciti gli aspetti epistemologici e didattici principali della covariazione presenti in esse.

Unitamente alle autrici, mi auguro che lo scambio di conoscenze, idee ed esperienze che questo volume rappresenta e diffonde, possa attivare un processo di miglioramento dell'insegnamento-apprendimento sia della matematica sia di tutte le discipline STEM.

Gennaio, 2023

Ferdinando Arzarello

Introduzione

Perché un corso sulla covariazione?

Il ragionamento covariazionale è importante per una piena comprensione di alcuni concetti fondamentali in matematica e per questo è oggetto di indagine in numerosi studi in didattica della matematica. Nonostante ciò, continua ad essere poco conosciuto e dunque poco presente nelle pratiche didattiche. Questo corso ci è sembrato un'ottima opportunità per diffondere, nel mondo della scuola, le conoscenze che provengono dal mondo della ricerca e per avviare una collaborazione con docenti di diversi gradi scolastici. Solo attraverso un confronto con la realtà scolastica e con quanto emerge dalle pratiche d'aula è possibile far progredire la ricerca, soprattutto in merito ad un argomento come il ragionamento covariazionale di cui nella nostra realtà nazionale si conosce ancora poco. Da qui l'idea del corso *Varia tu che covario anch'io,* un titolo d'effetto che racchiude l'idea alla base del costrutto della covariazione.

Inoltre, un corso di formazione costituisce, per un docente desideroso di formazione continua, una preziosa possibilità per confrontarsi, collaborare, condividere idee, progettare insieme ad altri colleghi e colleghe e quindi di crescere dal punto di vista professionale, indipendentemente dai contenuti affrontati.

A chi era indirizzato il corso?

Il corso era rivolto a docenti del primo e secondo ciclo di istruzione. L'iscrizione è avvenuta tramite un form online compilato da 159 docenti provenienti da tutta Italia. Di questi, 41 hanno poi effettivamente frequentato e concluso il corso. In particolare, 9 docenti della scuola primaria, 6 della scuola secondaria di I grado e 26 della scuola secondaria di II grado. La distribuzione geografica delle scuole in cui i docenti lavorano è mostrata in Figura 1.

Per noi formatori è stata una sfida riuscire ad organizzare un corso che fosse inclusivo per gli insegnanti appartenenti a ordini di scuola diversi e a realtà differenti in tutta Italia. È stata, inoltre, una sfida perché in letteratura si studia il ragionamento covariazionale, coinvolgendo perlopiù studenti e studentesse dalla scuola secondaria di I grado e ordini superiori. Uno dei nostri obiettivi era, invece, quello di provare a proporre alcune attività per stimolare il ragionamento covariazionale sin dalla scuola primaria.

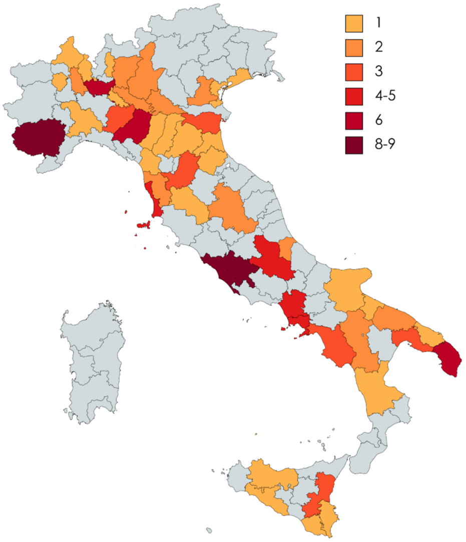


Figura 1. Distribuzione per province dei partecipanti al corso.

Come è stato organizzato il corso?

Il corso di formazione è stato pensato online e gratuito, fornendo così la possibilità di partecipare a tutti i docenti interessanti, abbattendo altresì le barriere geografiche.

In tutto sono stati svolti 7 incontri da due ore ciascuno. Il programma del corso è riportato qui nel dettaglio:

- Lunedì 15 novembre 2021

  Introduzione al costrutto teorico della covariazione
- Lunedì 22 novembre 2021

  La valutazione formativa e la valutazione dell'apprendimento concettuale

  Proposte di attività sulla covariazione, divisi per ordine di scuola
- Lunedì 29 novembre 2021

  Laboratorio di progettazione didattica, divisi per ordine di scuola
- Lunedì 6 dicembre 2021

  Laboratorio di progettazione didattica: restituzione, divisi per ordine di scuola
- Dal 7 dicembre 2021 al 18 gennaio 2022

  Sperimentazione in classe
- Lunedì 24 gennaio 2022

  Restituzione della sperimentazione in classe, divisi per ordine di scuola
- Lunedì 31 gennaio 2022

  Conclusioni e commenti sul corso

- Mercoledì 27 aprile 2022
  Incontro aggiuntivo per concludere la restituzione delle sperimentazioni

Durante gli incontri, dopo le presentazioni di alcuni aspetti teorici e qualche esempio pratico, i corsisti hanno lavorato in piccoli gruppi (tenendo conto dell'ordine di scuola di appartenenza) per progettare e sperimentare un'attività che promuovesse il pensiero covariazionale negli studenti e nelle studentesse.

Il lavoro è stato molto produttivo: a ogni gruppo è stata assegnata una stanza virtuale in cui lavorare e confrontarsi, ma per la macroprogettazione molti si sono incontrati anche al di fuori delle ore previste dal programma.

A nostro avviso, il valore aggiunto di questo corso è la fase di sperimentazione dell'attività progettata. Dei 41 corsisti, in 33 hanno partecipato, in maniera volontaria, alla fase di sperimentazione in classe. Per la rendicontazione della stessa è stato chiesto di compilare un diario di bordo che racchiudesse la progettazione, i principali risultati ottenuti e le riflessioni dei docenti. L'incontro del 27 aprile è stato aggiunto a fine corso per consentire a tutti i docenti sperimentatori di raccontare l'esperienza svolta in classe.

Perché questo volume?

I docenti partecipanti al corso hanno sottolineato più volte la mancanza di materiali in italiano da cui partire per approfondire l'argomento. Questo volume vuole essere un tentativo in tal senso, rivolto in modo particolare ai docenti di classe. Per questo motivo il punto di vista sarà prevalentemente didattico.

Riteniamo che la ricerca in didattica della matematica non possa esistere senza aprire la porta dell'aula delle classi e che, per questo motivo, siano importanti i momenti di convergenza tra ricercatori e docenti, come il corso di cui vi raccontiamo. I momenti di convergenza creano, infatti, un dialogo in entrambe le direzioni. E così come è fondamentale per un ricercatore di didattica della matematica entrare in aula, allo stesso modo la ricerca didattica *deve* entrare nelle nostre scuole: le scoperte didattiche è bene che raggiungano gratuitamente i docenti, in un'ottica di continuo miglioramento professionale.

La struttura del volume prevede una sezione dedicata al ragionamento covariazionale nella sua caratterizzazione teorica e importanza nelle pratiche didattiche, alla quale segue una sezione dedicata alla descrizione degli elementi fondamentali di un laboratorio di matematica e le fasi di una efficace progettazione didattica. Inoltre, sono presenti alcuni esempi concreti di progettazioni didattiche volte a stimolare il ragionamento covariazionale: tali progettazioni sono il risultato del lavoro svolto dai docenti durante il corso e delle loro sperimentazioni in classe. Nello specifico, sono raccolti alcuni spunti per i tre ordini di scuola: primaria, secondaria di I grado e secondaria di II grado. Le conclusioni riportano alcune riflessioni che fanno sintesi di quanto emerso dal corso e dalle esperienze d'aula.

Dal corso nasce un gruppo di ricerca

Dal corso nasce il *MaT&L Research Group*, Mathematics Teaching and Learning Research Group, con sede presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Ferrara. I membri del gruppo di ricerca sono, attualmente, il Prof. Ferdinando Arzarello e le autrici del libro; il gruppo è aperto a ricercatori in didattica della matematica e insegnanti di matematica, italiani e non solo. Tra gli obiettivi di ricerca del gruppo vi sono lo studio del ragionamento covariazionale e la sua promozione nelle attività didattiche.

In un'ottica di massima condivisione, accanto al presente volume gratuito, tutti i materiali del corso sono liberamente reperibili nella sezione Materiali del sito MaT&L Research Group - Varia tu che covario anch'io 2021-2022.

Capitolo 1

Il ragionamento covariazionale

Introduzione al ragionamento covariazionale

L'insegnamento-apprendimento della matematica richiede una comprensione profonda dei concetti fondamentali di tale disciplina. Il *ragionamento covariazionale*, come mostrano studi di ricerca, è fondamentale per l'apprendimento non solo di numerose idee matematiche ma anche di concetti di fisica e, in generale, delle discipline STEM[1].

Procediamo con ordine. Cos'è il ragionamento covariazionale? Forse, il miglior modo per introdurlo è attraverso un esempio e allora vi proponiamo un esercizio ben noto in letteratura, il *problema della bottiglia*, mostrato in Figura 2. Agli studenti e alle studentesse viene assegnata una bottiglia di una certa forma riempita da un flusso d'acqua costante, come se aprissimo un rubinetto, e viene chiesto loro di tracciare il grafico dell'altezza del liquido contenuto nella bottiglia in funzione del volume dello stesso liquido.

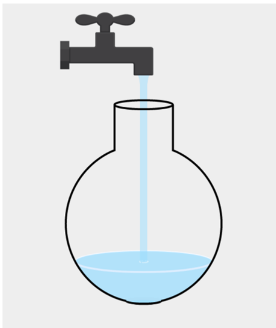


Figura 2. Il problema della bottiglia. Immagine tratta da: Water Line by Desmos.

Riuscire a *visualizzare mentalmente come due grandezze*, quali per esempio altezza e volume del liquido della bottiglia, *varino simultaneamente* significa ragionare covariazionalmente (Saldanha & Thompson, 1998). Allora, la richiesta di disegnare tale grafico diventa, da un lato, un utile contesto per permettere agli studenti e alle studentesse, ma anche agli insegnanti, di esprimere il ragionamento covariazionale; dall'altro lato è un'opportunità, sia da parte di insegnanti sia da parte di ricercatori, di indagare il ragionamento covariazionale stesso.

---

[1] L'acronimo inglese STEM significa Scienze, Tecnologia, Ingegneria e Matematica

Il ragionamento covariazionale è, innanzitutto, fondamentale per la concettualizzazione di situazioni reali, come per esempio quella della bottiglia riempita da un flusso d'acqua costante. L'immagine mentale che un individuo si forma quando riesce a ragionare covariazionalmente viene definita dai ricercatori come un *oggetto moltiplicativo*, ovvero un nuovo oggetto concettuale ottenuto unendo mentalmente gli attributi delle due quantità iniziali e che risulta possedere contemporaneamente sia l'una che l'altra quantità. Tale terminologia è stata introdotta da Saldanha e Thompson (1998) che dichiarano di essersi ispirati alla nozione piagetiana di operatore moltiplicativo (Piaget, 1950). Un esempio di oggetto moltiplicativo è costituito dall'insieme delle coppie ordinate nel piano cartesiano quando sono intese dall'individuo come valori di due quantità che variano simultaneamente.

In un articolo pubblicato nel 2017, i ricercatori Thompson e Carlson hanno elaborato una caratterizzazione del costrutto ragionamento covariazionale costituita da sei livelli che descrivono la capacità di un individuo di ragionare in modo covariazionale. Presentiamo ora brevemente questi livelli[2] sempre facendo riferimento al problema della bottiglia e descrivendo come uno studente potrebbe ragionare per ciascuno di essi:

- al livello L0, *assenza di covariazione*, uno studente non coordinerebbe l'altezza dell'acqua con la quantità di acqua contenuta nella bottiglia;
- al livello di *pre-coordinazione dei valori* (L1), uno studente osserverebbe che quando si aggiunge una certa quantità d'acqua alla bottiglia, l'altezza dell'acqua aumenta;
- al livello di *coordinazione bruta dei valori* (L2), uno studente descriverebbe questa covariazione dicendo che "l'altezza aumenta con l'aumentare del volume";
- uno studente al livello di *coordinamento dei valori* (L3) coordinerebbe i valori dell'altezza dell'acqua nella bottiglia con un determinato incremento della quantità di acqua aggiunta, per esempio un bicchiere d'acqua;
- uno studente al livello di *covariazione continua e a pezzi* (L4) immaginerebbe l'altezza dell'acqua che cambia simultaneamente con la quantità di acqua, ma questi cambiamenti si riferirebbero a degli intervalli di dimensione fissata, con lo studente incapace di percepire le variabili "altezza" e "volume" come passaggio attraverso i valori intermedi dell'intervallo;
- infine, uno studente al livello di *covariazione continua e liscia* (L5) concepirebbe l'altezza e il volume che variano simultaneamente attraverso i vari intervalli in modo fluido e continuo.

Solo ai livelli L4 ed L5 lo studente mostra di possedere una buona padronanza del ragionamento covariazionale. La differenza tra i due livelli consiste nella diversa immagine di cambiamento che vi è sottesa: *a pezzi* o *liscio*. Un'immagine a pezzi di cambiamento consiste nell'immaginare il cambiamento come generato

[2] Adattamento della descrizione dei livelli proposta in Swidan et al. (2022).

da pezzi di uguali dimensioni, mentre un'immagine liscia di cambiamento implica l'immaginare il cambiamento come una progressione continua.

Nota. Un lettore attento e curioso potrebbe domandarsi se esiste una differenza di significato tra i termini *covariazione* e *ragionamento covariazionale*. In letteratura non è proposta una chiara distinzione tra i due. Ci sembra però di poter affermare che, se il termine ragionamento covariazionale si riferisce maggiormente al processo cognitivo, il termine covariazione si presti meglio a descrivere la relazione che esiste tra le grandezze in gioco. In questo volume useremo i due termini tenendo conto di questa sfumatura di significato.

Terminologia. Il termine *covariazione* non è da confondere con il termine *covarianza*. Quest'ultimo infatti è un termine prettamente statistico: è un valore numerico che fornisce una misura di quanto due variabili statistiche varino assieme, ovvero della loro dipendenza (esiste una formula precisa per calcolarla!). Il ragionamento covariazionale invece è un processo cognitivo e non esiste una formula per valutarne lo sviluppo negli studenti e nelle studentesse.

Il ragionamento covariazionale affonda le sue radici nel ragionamento quantitativo (Thompson, 1993). Una quantità è concepita come attributo di un oggetto o fenomeno che è misurabile e il ragionare quantitativamente significa riuscire ad analizzare una situazione in termini di quantità e di relazioni quantitative. Ragionare in termini di quantità non implica necessariamente descrivere la quantità attraverso valori numerici. Infatti, Thompson (1994a) distingue tra operazioni quantitative, ovvero non-numeriche e che avvicinano a una comprensione della situazione attraverso la creazione di relazioni quantitative, e operazioni numeriche, che invece riguardano operazioni aritmetiche di valutazione. La distinzione tra le due tipologie di operazioni è tuttavia molto sottile, soprattutto perché non esiste una notazione convenzionale per le operazioni quantitative che sia indipendente dalle operazioni aritmetiche di valutazione. Proviamo a chiarire meglio tale distinzione facendo riferimento ad alcuni esempi tratti da Thompson (1994a). Consideriamo le quantità "ragazze nella classe 1C" e "ragazzi nella classe 1C" e confrontiamole in modo moltiplicativo: si ottiene la quantità "rapporto tra ragazze e ragazzi". Invece, dividere il valore numerico delle due quantità "ragazze nella classe 1C" (per esempio 18) e "ragazzi nella classe 1C" (per esempio 12) è un'operazione numerica che genera una valutazione numerica della quantità "rapporto tra ragazze e ragazzi nella classe 1C" (nell'esempio 1,5).

Infine, vorremmo sottolineare che quando si ragiona su due quantità che variano simultaneamente, c'è differenza tra ragionare sulla relazione di causa-effetto (la quantità A influenza la quantità B) o ragionare covariazionalmente sulla loro relazione (la quantità A sta cambiando mentre la quantità B sta cambiando). Questo studio dei cambiamenti simultanei, tipico del ragionamento covariazionale, sembra promettente per una comprensione più profonda dei fenomeni reali (Panorkou & Germia, 2021).

Covariazione al primo e al secondo ordine

Nel 2017 è stata condotta una sperimentazione didattica in una classe prima di un liceo scientifico, in provincia di Torino, con la collaborazione dell'insegnante di matematica e fisica Silvia Beltramino e del ricercatore israeliano Dr. Osama Swidan, sotto la supervisione del Prof. Ferdinando Arzarello. Oggetto della sperimentazione era il cosiddetto esperimento di Galileo[3], con l'obiettivo di ricavare e analizzare la legge del moto di una pallina che rotola lungo un piano inclinato,

$$s = k \cdot t^2$$

dove s è lo spazio percorso dalla pallina, t il tempo e k un coefficiente che dipende dall'angolo di inclinazione del piano (alcuni dettagli di questa sperimentazione si possono trovare in Arzarello (2019) e Swidan et al. (2022)). L'attività prevedeva l'utilizzo vari supporti tecnologici, tra cui alcuni file di GeoGebra come quello in Figura 3, a sinistra.

Durante l'analisi dei dati delle discussioni di classe, i ricercatori si sono focalizzati sui ragionamenti covariazionali attivati dagli studenti e dalle studentesse. Lo studente A. ha espresso il suo ragionamento come segue (una spiegazione inaspettata per gli sperimentatori): "Quando l'angolo [di inclinazione del piano] aumenta, il grafico [spazio-tempo] si avvicina all'asse delle y" (Figura 3, a destra).

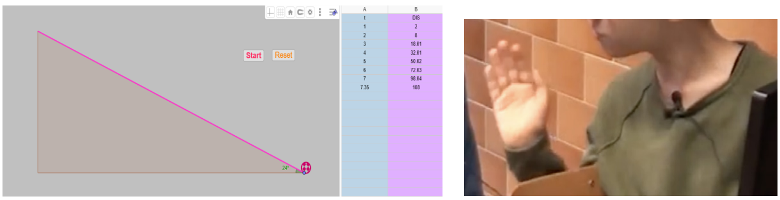


Figura 3. Sulla sinistra, l'interfaccia dell'applet di GeoGebra, creata dal Dr. Swidan, con cui gli studenti e le studentesse hanno lavorato durante la sperimentazione. Sulla destra, una foto di A. mentre espone il suo ragionamento e con la mano simula l'andamento del grafico spazio-tempo.

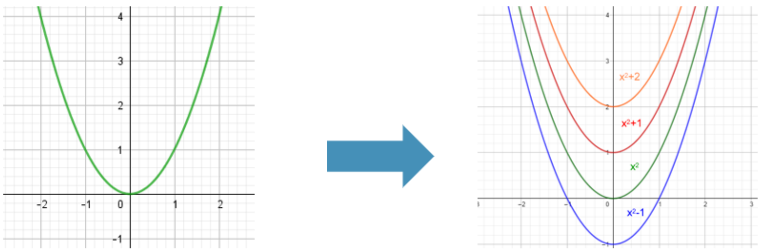
Analizzando il ragionamento di A., i ricercatori si sono posti varie domande: Che tipo di covariazione è questa? Cosa sta covariando? È solo una covariazione tra quantità o qualcosa di diverso?

L'inadeguatezza del quadro teorico di Thompson e Carlson (2017) nel descrivere questa situazione ha portato Arzarello (2019) a introdurre il termine *covariazione al secondo ordine*, per descrivere la capacità di uno studente di leggere tale situazione reale a un doppio livello: a un primo ordine la covariazione spazio-tempo; a un secondo ordine la covariazione di (s, t) e k. Questo costrutto è stato poi

[3] Si tratta dell'esperimento del piano inclinato proposto da Galileo nel 1638.

ulteriormente elaborato da Bagossi (2022) che ha definito la covariazione al secondo ordine come la capacità di visualizzare in che modo una famiglia di funzioni e relativi parametri caratteristici variano simultaneamente.

Concretizziamo questa definizione con un ulteriore esempio: data una famiglia di parabole, ragionare covariazionalmente al secondo ordine significa riuscire a visualizzare, nel senso di *vedere con la mente* e non solo *vedere* grazie al supporto di un software, come ciascuno dei parametri caratteristici di una famiglia di parabole ne influenza il comportamento e quali proprietà determina (Figura 4).



Covariazione al primo ordine

$x \leftrightarrow y$

Covariazione al secondo ordine

$(x, y) \leftrightarrow k$

Figura 4. Esempio di passaggio da una covariazione al primo ordine a una covariazione al secondo ordine in riferimento al passaggio da una funzione quadratica a una famiglia di parabole.

Nota. Se la differenza tra i costrutti di covariazione al primo e secondo ordine è prettamente matematica (differenti oggetti matematici coinvolti), le rispettive forme di ragionamento covariazionali continuano a essere dei processi cognitivi che richiedono di essere studiati come tali.

Terminologia. Il termine covariazione al secondo ordine è in sintonia con una terminologia già presente in letteratura: Bloedy-Vinner (2001) usa infatti il termine *funzioni al secondo ordine* per indicare quelle funzioni che hanno per argomento un parametro e restituiscono una famiglia di funzioni o delle equazioni dipendenti da tale parametro.

L'importanza della covariazione

Il ragionamento covariazionale, sia al primo sia al secondo ordine, risulta fondamentale per una piena comprensione di numerose idee matematiche e fisiche. La ricerca mostra come l'abilità degli studenti e delle studentesse di ragionare covariazionalmente supporti la loro comprensione dei concetti di proporzionalità (Lobato & Siebert, 2002), tasso di variazione e linearità (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014), variabile (Thompson & Carlson, 2017), trigonometria (Thompson et al., 2007), crescita esponenziale (Ellis et al., 2016), funzioni di variabile reale o a più variabili (Thompson, 1994b), attività di modellizzazione matematica (Thompson, 2011), anche nel caso in cui le grandezze in gioco siano legate da una formula (Frank, 2016). Studi ancora più recenti hanno esplorato le potenzialità del ragionamento covariazionale in merito a concetti prettamente scientifici come, per citare alcuni esempi, il momento torcente (Thompson & Saldanha, 2003), la legge di gravità (Panorkou & Germia, 2021) e l'effetto serra (Basu & Panorkou, 2019).

Saper ragionare covariazionalmente è cruciale nelle attività di concettualizzazione e modellazione matematica, perché "le operazioni che compongono il ragionamento covariazionale sono le medesime operazioni che permettono di vedere relazioni invarianti fra quantità in situazioni dinamiche"[4] (Thompson, 2011, p. 46). Ci sono molte ragioni per cui gli studenti e le studentesse si cimentano con attività di concettualizzazione, in matematica così come in tutte le aree STEM. Una delle ragioni è che, spesso, gli studenti e le studentesse sono introdotti al concetto di funzione attraverso una definizione statica, generalizzazione di quella storica di Bourbaki (1939), che definisce la funzione come relazione tra gli elementi di due insiemi; definizione adottata anche oggi nei libri di testo ampiamente utilizzati a scuola. Ecco un esempio emblematico tratto da *Matematica.blu 1* (2016): "Una relazione dall'insieme A all'insieme B è una funzione se a ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B" (p. 237). Questo approccio è estremamente statico e non lascia spazio a un'idea enfatizzante di movimento o dinamicità. Lo stesso vale per le possibili rappresentazioni di relazioni che possono essere conseguentemente applicate al caso specifico delle funzioni. Nel medesimo libro (p. 229), sono riportati quattro diversi tipi di rappresentazione (si veda anche Figura 5):

- *enumerazione*, cioè scrittura dell'insieme di tutte le coppie ordinate degli elementi che sono in relazione, per esempio, R = {(2;1), (4;2), (6;3)};
- *rappresentazione sagittale* o *diagramma a freccia* utilizzando la rappresentazione di un insieme di Eulero-Venn e rendendo visibile la corrispondenza tra gli elementi degli insiemi tramite le frecce;
- *tabelle a doppia entrata* in cui gli elementi del primo insieme sono disposti in verticale, gli elementi del secondo in orizzontale e le coppie in relazione sono contrassegnati da una crocetta. Nel caso specifico delle funzioni, può essere tradotto nella tabella a due colonne usata per rappresentare una funzione per punti;
- il *grafico cartesiano* in cui le coppie in relazione sono rilevate da punti.

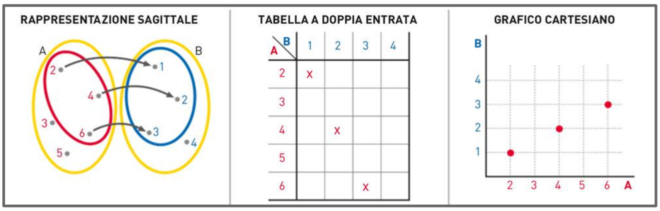


Figura 5. Esempi di rappresentazione di una relazione funzionale proposti nel libro *Matematica.blu 1* (2016, p. 229).

[4] Traduzione in italiano a cura delle autrici.

Come già evidenziato precedentemente, le coppie ordinate sono esempi di oggetti moltiplicativi ma solo quando intesi come valori di due quantità che variano simultaneamente. Questo approccio non è tipicamente adottato nelle pratiche scolastiche, ma più frequentemente ridotto alla corretta rappresentazione di alcuni valori numerici legati da una legge di corrispondenza.

Di conseguenza, questo approccio statico impedisce agli studenti e alle studentesse di cogliere la natura dinamica delle funzioni concettualizzate dalla covariazione, cioè come le variabili indipendenti e dipendenti varino insieme. Gli studi di Carlson (1998) e Carlson e colleghi (2002) evidenziano come la mancanza di un approccio covariazionale possa essere uno dei motivi per cui gli studenti e le studentesse non sono in grado di interpretare situazioni dinamiche e di costruire formule significative adatte a rappresentare una quantità in funzione di un'altra.

La covariazione nella scuola primaria

Gli studi presenti in letteratura sul ragionamento covariazionale hanno spesso per protagonisti studenti e studentesse della scuola secondaria di I grado (Wilkie, 2020), della scuola secondaria di II grado (Thompson & Carlson, 2017), universitari (Carlson et al., 2002) oppure insegnanti in servizio, in pre-servizio o ancora in fase di formazione (Thompson et al., 2017).

Il ragionamento covariazionale può essere impegnativo anche per studenti e studentesse universitari di successo (Stalvey & Vidakovic, 2015). Thompson e colleghi (2017) hanno inoltre dichiarato, secondo la loro esperienza con gli studenti e le studentesse di scuola e dell'università, che è più difficile ragionare covariazionalmente per studenti e studentesse della scuola secondaria di II grado e per universitari di quanto non lo sia per studenti e studentesse della scuola secondaria di I grado (Thompson et al., 2017).

Studi che indagano il ragionamento covariazionale a livello di scuola primaria sono più rari. Richiamiamo un lavoro di Arzarello, pubblicato nel 2017, in cui l'autore mostra come "la covariazione può essere affrontata con un certo successo fin dai primi anni di scuola utilizzando strumenti tecnologici"[5] (Arzarello, 2017, p. 422). L'autore introduce dunque il termine *covariazione instrumentata* per riferirsi all'esplorazione di alcuni problemi matematici o situazioni con l'uso di appropriati artefatti a supporto dell'apprendimento degli aspetti covariazionali. Ancor più recentemente invece, Hegedus e Hotalora (2022) hanno provato ad implementare un'attività in cui degli studenti di una classe quarta di scuola primaria sviluppano un'idea intuitiva di covariazione grazie all'utilizzo di un software interattivo.

Come vedremo meglio nel prossimo paragrafo, "la costruzione e lo sviluppo delle competenze relative al concetto di relazione e l'utilizzo e interpretazione di diverse rappresentazioni devono essere tra gli obiettivi di apprendimento già dalla

[5] Traduzione in italiano a cura delle autrici.

scuola dell'infanzia" (Sabena et al., 2019, p. 187). Un esempio di relazione, o meglio di funzione fondamentale, è quella di proporzionalità diretta. Consideriamo il numero di torte e la quantità di farina richiesta nella loro preparazione. Esprimendo tale relazione in forma tabulare, come mostrato in Tabella 1, è possibile osservare che si può passare da una riga all'altra aggiungendo sempre una stessa quantità, diversa nelle due colonne. È dunque possibile descrivere la covariazione tra le due variabili dicendo che "a incrementi costanti di una variabile corrispondono incrementi costanti (non necessariamente della stessa entità) dell'altra" (Sabena et al., 2019, p. 189). È interessante osservare che la covariazione tra il numero di torte e la quantità di farina in grammi è colta attraverso la covariazione tra gli incrementi dei due valori (ogni volta 1 nella prima colonna e 300 g nella seconda). Si tratta di un fenomeno cognitivo non infrequente: a volte cogliamo meglio le variazioni delle grandezze (e la loro covariazione) che le grandezze stesse (per esempio percepiamo meglio una variazione di temperatura dell'ambiente rispetto alla temperatura stessa).

Numero di torte	**Quantità di farina in grammi**
0	0
1	300
2	600
3	900
4	1200
5	1500

Tabella 1. A incrementi costanti della variabile "numero di torte" (+1) corrispondono incrementi costanti dell'altra variabile "quantità di farina in grammi" (+300).

Già i ricercatori Confrey e Smith (1994) avevano osservato che gli studenti e le studentesse mostrano un approccio covariazionale quando sviluppano una legge di corrispondenza, per esempio guardando verticalmente tra le righe di una tabella e cercando una relazione invariante.

La covariazione nel curriculum di matematica

Nonostante la riconosciuta importanza della covariazione negli studi in didattica della matematica, nelle Indicazioni Ministeriali sono assenti riferimenti espliciti a questa forma di ragionamento, dalla scuola dell'infanzia fino al secondo ciclo di istruzione. Eppure, ciò che emerge da questi documenti ufficiali è proprio un approccio al concetto di funzione intesa come rappresentazione di fenomeni reali e l'importanza delle attività di modellizzazione matematica nelle pratiche didattiche, come esplicitato nelle frasi riportate di seguito.

In modo particolare, per il primo ciclo di istruzione, possiamo leggere:

Indicazioni Nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012):

- In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana (p. 60);
- L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti (p. 60).

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria (MIUR, 2012):

- [L'alunno] Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo (p. 61);
- [L'alunno] Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici) (p. 61).

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di I grado (MIUR, 2012):

- [L'alunno] Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi (p. 63);
- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà. Esprimere la relazione di proporzionalità (p. 65);
- Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$, $y=2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità (p. 65).

Dalle frasi estratte, si può cogliere una forte insistenza sul concetto di modellizzazione matematica intesa come utile per una descrizione scientifica di situazioni reali e il linguaggio matematico diventa uno strumento utile per descrivere relazioni e proprietà.

Per il secondo ciclo di istruzione, troviamo invece le seguenti indicazioni:

Indicazioni Nazionali per Licei - Liceo scientifico (MIUR, 2010a):

- Visione della matematizzazione caratteristica della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci) (p. 337);
- Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni […], anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico (p. 339);
- [Lo studente] sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline (p. 340);
- Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione (p. 340).

Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento. Istituti tecnici (MIUR, 2010b, 2010c):

- Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate. Studiare le funzioni $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$. Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica (MIUR, 2010b, p. 71);
- Costruire modelli matematici per rappresentare fenomeni delle scienze economiche e sociali, anche utilizzando derivate e integrali (MIUR, 2010c, p. 33);

- Costruire modelli, continui e discreti, di crescita lineare, esponenziale o ad andamento periodico a partire dai dati statistici (MIUR, 2010c, p. 33).

Per il secondo ciclo, si può cogliere una concezione della modellistica intesa come "possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci" (MIUR, 2010a, p. 337) e il linguaggio delle funzioni come uno strumento per descrivere la realtà. Il lettore potrà osservare non solo che mancano chiari riferimenti alla covariazione, ma anche che nel sottolineare l'importanza della modellizzazione non viene menzionato alcun tipo di approccio che aiuti a cogliere e rappresentare la dinamicità tipica di numerosi fenomeni reali.

Per concludere, il ragionamento covariazionale non è certo banale, e molti studenti e studentesse hanno difficoltà a raggiungerlo e conservarlo nel tempo (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014; Carlson et al., 2002; Ellis et al., 2016). Gli studi che hanno documentato tali difficoltà suggeriscono che queste dovrebbero essere affrontate sottolineando il ragionamento covariazionale nelle attività di apprendimento degli studenti e delle studentesse, incoraggiando gli insegnanti a considerare maggiormente le esigenze cognitive dei singoli e sollecitare il ragionamento covariazionale. La comprensione di un determinato concetto matematico, in questo caso la covariazione, da parte degli insegnanti è un fattore fondamentale per la comprensione matematica di tale concetto da parte di studenti e studentesse (Thompson, 2013).

Capitolo 2
Tutta questione di metodologia

Premessa metodologica

Intraprendere un percorso didattico diverso dal solito, al quale non si è abituati, richiede di mettersi in discussione come docenti e l'avventurarsi in una nuova sperimentazione didattica richiede certamente entusiasmo e voglia di mettersi in gioco. Tuttavia, è opportuno attrezzarsi con un buon bagaglio di accortezze e attenzioni per far sì che eventuali sfide e/o imprevisti che si potrebbero presentare lungo il percorso non possano incidere negativamente sulla messa in atto delle attività progettate.

Nel seguito, desideriamo condividere le accortezze e le attenzioni su cui abbiamo posto l'accento durante il corso di formazione, prediligendo il laboratorio di matematica come metodologia per la trasposizione didattica della covariazione.

Iniziamo con l'osservare che nel laboratorio di matematica sono previste non solo attività individuali, ma anche lavori in piccoli gruppi. Questa può essere una novità rispetto a pratiche didattiche più tradizionali come la lezione frontale, perché rappresenta una metodologia di lavoro efficace per proporre attività di tipo esplorativo, in modo da favorire il confronto fra pari e incoraggiare gli allievi e le allieve a parlare di matematica. La discussione matematica guidata dall'insegnante diventa, poi, l'occasione per sistematizzare le conoscenze a partire dalle riflessioni elaborate dagli studenti e dalle studentesse: ascoltare e valorizzare le risposte e i contributi provenienti da tutti è la strada giusta per far sentire gli allievi e le allieve protagonisti. È necessario, però, essere pronti come docenti ad accettare delle risposte che sono corrette, ma magari diverse o espresse con termini ancora "ingenui" rispetto a quelle che ci si era immaginati in fase di progettazione. Potrebbe quindi capitare di doversi confrontare con qualcosa che non si era considerato, ma questo può diventare l'occasione per un momento di approfondimento personale, per coinvolgere gli studenti e le studentesse in un'attività di confronto oppure semplicemente per esplorare una strada non ancora percorsa. Infine, a conclusione della sperimentazione è buona prassi riflettere sulla conduzione della stessa e ripensare a quanto è emerso con gli allievi e le allieve, al fine anche di rimodulare il percorso per usi futuri. Per esempio, alcune attività possono richiedere più tempo di quanto previsto o gli studenti e le studentesse si trovano in difficoltà su un determinato aspetto, che quindi richiede un particolare approfondimento. Dunque, potrebbe rivelarsi necessario rivedere tempi e modalità delle varie attività, oppure rimuoverne o aggiungerne delle altre per semplificare o rinforzare un determinato concetto. Pertanto, possiamo affermare che è tutta una questione di metodologia che poggia sul saldo obiettivo di favorire un solido apprendimento e la padronanza progressiva dei concetti matematici in gioco.

Nei prossimi paragrafi entreremo più nel dettaglio di alcuni aspetti salienti di una efficace progettazione provando a condividere le potenzialità di alcuni semplici strumenti didattici.

Il laboratorio di matematica

Nelle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012) si promuove un approccio all'insegnamento-apprendimento della matematica basato sul laboratorio di matematica. Ma cosa si intende per laboratorio di matematica? Sicuramente tutti noi abbiamo svolto attività nel laboratorio di chimica, di fisica o di elettrotecnica, come studenti, studentesse o come insegnanti. Solitamente questi laboratori sono aule strutturate ad hoc all'interno di una scuola per poter effettuare esperimenti, con strumenti e materiali che non si potrebbero utilizzare in una qualsiasi aula. Spesso le attività di laboratorio consistono in esperimenti che vengono svolti a seguito della lezione teorica e che portano gli studenti e le studentesse a osservare nella pratica determinati fenomeni. Quando si parla di laboratorio di matematica si intende una metodologia didattica piuttosto che un luogo strutturato per svolgere specifiche attività. Nelle *Indicazioni Nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione* leggiamo:

> In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. (MIUR, 2012 p. 49)

L'idea di laboratorio di matematica come costrutto teorico è frutto della tradizione culturale italiana e di modelli dell'innovazione in classe come quello di Emma Castelnuovo, tramite metodi costruttivi miranti al coinvolgimento diretto degli allievi e delle allieve nelle esplorazioni (Arzarello et al., 2013). La definizione che viene fornita nei materiali pubblicati nel 2003 dall'Unione Matematica Italiana (UMI) e dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM), a seguito del progetto *Matematica per il cittadino*, è infatti la seguente:

> Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle

> interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. (Anichini et al., 2004, p. 28)

Emerge quindi un'idea di laboratorio di matematica come metodologia basata sul porsi e risolvere problemi significativi volti alla costruzione di nuovi significati matematici e sulla condivisione degli stessi con i compagni. Gli studenti e le studentesse hanno un ruolo centrale e attivo: durante le attività laboratoriali assumono il ruolo dello "scienziato" e del "ricercatore". Gli studenti e le studentesse osservano, sviluppano congetture e argomentazioni, le validano e interagiscono tra loro al fine di costruire nuovi saperi condivisi. L'insegnante svolge il ruolo di guida e di mediatore, promuove il confronto e la sistematizzazione critica di quanto emerge dagli studenti e dalle studentesse, propone i giusti stimoli e orchestra la discussione matematica all'interno della classe (Bartolini Bussi, 1996). Nei vari riferimenti, si evince anche l'importanza dell'utilizzo di materiale concreto; diverse ricerche in didattica della matematica mostrano l'impatto positivo che le attività manipolative possono avere sui processi di apprendimento e insegnamento della matematica (si veda, per esempio, Hall & Nemirovsky, 2012).

Il laboratorio di matematica viene promosso anche nelle più recenti *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari* (MIUR, 2018), in quanto contesto privilegiato per stimolare il confronto e il dialogo tra gli studenti e le studentesse e strumento efficace per far sì che essi diventino cittadini e cittadine consapevoli: "il laboratorio può costituire anche una palestra per imparare a fare scelte consapevoli, a valutarne le conseguenze e quindi ad assumersene la responsabilità, aspetti anche questi centrali per l'educazione a una cittadinanza attiva e responsabile" (MIUR, 2018, p. 12).

Nelle attività laboratoriali ricopre un ruolo cruciale anche l'aspetto emotivo: durante il laboratorio i partecipanti sono fortemente motivati alla "scoperta". Ed è proprio questo approccio alla scoperta che caratterizza le attività anche dal punto di vista dei processi matematici coinvolti. "Si parte dal problema, non dalla soluzione" (Bolondi, 2006, p. 59) e non è possibile "sapere a priori" di che cosa si ha bisogno per giungere alla soluzione (Bolondi, 2006). Non c'è una demarcazione netta tra teoria e pratica: ogni situazione concreta può confluire in una costruzione teorica e l'esperienza e la riflessione sull'esperienza stessa si fondono in un unico processo di pensiero.

Come vedremo in seguito, su questi principi cardine si sono basate le progettazioni del corso di formazione.

Macroprogettazione

Progettare un'attività didattica richiede tempo: si tratta di un delicato processo non solo di raccolta di conoscenze, idee e pratiche didattiche, ma anche di affinamento, in più passi, della progettazione iniziale. La prima fase di questo processo consiste in una progettazione "a maglie larghe" che chiameremo macroprogettazione. Durante questa fase, abbiamo invitato i docenti del corso a lavorare in piccoli gruppi (2 gruppi per il primo ciclo d'istruzione e 7 gruppi per il secondo ciclo). Ciascun gruppo ha avuto a disposizione due ore per scegliere un tema, a partire da alcune proposte fatte dai formatori del corso, e per lavorare a una prima proposta di progettazione che è stata poi condivisa nell'incontro successivo con i formatori e con gli altri corsisti. In fase di macroprogettazione è opportuno che vengano messe a fuoco le informazioni essenziali in merito a:

- *contenuti*: argomenti che verranno toccati nella sperimentazione;
- *obiettivi* previsti a conclusione dell'attività e *conoscenze pregresse* richieste per affrontarla;
- *tempistiche*: numero delle ore che verranno dedicate a ciascuna fase dell'attività;
- *materiali richiesti*: utilizzo di schede di lavoro, materiali strutturati e multimediali e specifici software ad uso didattico (GeoGebra, Desmos, …);
- *modalità di svolgimento*: attività individuali, lavori di gruppo, fasi di rielaborazione personale, discussioni collettive guidate dall'insegnante per favorire il confronto a livello di gruppo classe e promuovere la sistematizzazione delle conoscenze;
- *valutazione sommativa e formativa*: modalità con cui verranno valutate le conoscenze e le competenze degli studenti e delle studentesse, sia durante la sperimentazione che a conclusione dell'attività.

La macroprogettazione è una fase che non richiede di entrare troppo nei dettagli e che si può svolgere per esempio in gruppo, a livello di dipartimento di matematica oppure con alcuni colleghi della medesima disciplina con i quali si riesce a lavorare in sintonia. Questa scelta permette l'attivazione di circuiti di confronto nei quali condividere idee, conoscenze, aggiornamenti, nuovi approcci e prospettive. Durante il corso, i docenti hanno mostrato creatività nella strutturazione delle attività e nella scelta dei materiali didattici. È stato fondamentale anche il feedback da parte dei formatori: i suggerimenti e le osservazioni costruttive sono state uno stimolo prezioso per rivedere la progettazione iniziale.

Microprogettazione

La fase di microprogettazione consente di dettagliare maggiormente la macroprogettazione iniziale tenendo conto nello specifico delle peculiarità della classe nella quale si propone la sperimentazione. A questo punto la progettazione viene definita con tutti i suoi dettagli, adattandola anche agli studenti e alle studentesse con i quali si andrà a lavorare (classe, conoscenze pregresse, presenza di studenti e studentesse con BES, predisposizione delle schede di lavoro per tutte le fasi dell'attività, preparazione di eventuali schede di verifica…). Durante il corso, in questa fase i docenti hanno lavorato individualmente. Tuttavia, non è da escludersi che la microprogettazione si possa condurre anche a livello di gruppo di docenti. In questa fase si rivela utile anche definire un'analisi a priori dell'intera sperimentazione, ovvero annotare su quali contenuti, elementi fondanti dei concetti e simili potrebbero emergere osservazioni, ragionamenti e concettualizzazioni da parte degli studenti e delle studentesse in ciascuna delle fasi della sperimentazione; quali ostacoli potrebbero sorgere ed eventualmente come superarli. Anche in fase di svolgimento dell'attività risulta estremamente utile prendere nota di come si sta evolvendo realmente la sperimentazione. A questo scopo si rivela efficace l'utilizzo di un diario di bordo, uno strumento personale dell'insegnante che consente di registrare gli avvenimenti e soprattutto aiuta a riflettere a posteriori sul lavoro svolto, non solo a conclusione dell'attività ma anche nel caso in cui si desiderasse riproporla in una nuova classe.

Diario di bordo

Il diario di bordo è lo strumento scelto durante il corso di formazione per rendicontare l'esperienza in classe. Lo strumento deve essere maneggevole, agile da scrivere, deve essere compilato puntualmente dal docente allo scopo di mostrare la scansione temporale della sperimentazione didattica, ma soprattutto il processo didattico, l'evolversi del percorso di apprendimento degli studenti e delle studentesse e di insegnamento dei docenti, gli eventuali errori, i momenti di impasse, le sorprese, gli aggiustamenti effettuati o i cambiamenti di rotta…

Oltre alle informazioni sulla classe e la scuola, il diario di bordo:

- fornisce una descrizione del contesto classe;
- esplicita gli obiettivi didattici della sperimentazione;
- fornisce una breve descrizione dell'attività svolta in classe;
- annota eventuali osservazioni relative all'impostazione dell'attività sperimentata, con particolare attenzione agli adattamenti necessari per lo specifico contesto classe;
- elenca i materiali usati nell'attività (come cartelloni, riprese audio e/o video, lavagne multimediali, ...);
- raccoglie i protocolli più rilevanti degli allievi/e;
- commenta il livello di partecipazione e coinvolgimento degli allievi/e;
- indica i momenti di valutazione formativa in itinere e/o al termine;
- annota domande degli allievi/e e gli eventuali imprevisti;
- indica come sono state superate le difficoltà di docenti o allievi/e.

Il diario di bordo diventa uno strumento con una duplice valenza: da una parte agevola il confronto tra docenti esperti (compilare le stesse voci consente di creare uno spazio comune in cui discutere) e dall'altra diviene uno strumento di autoriflessione professionale importante in un'ottica di miglioramento. Nel momento in cui il docente scrive il diario o lo rilegge, diventa simile a un osservatore esterno partecipe dell'attività didattica, in grado di notare anche quegli aspetti che a volte si danno per scontati.

Uno strumento come questo *obbliga* il docente a riflettere sul proprio operato, sulle scelte metodologiche, ma anche a raccontare e tenere memoria degli imprevisti (sia negativi, sia positivi) e di come sono stati affrontati in prima linea. La scrittura a posteriori permette di commentare le scelte effettuate nel corso della lezione, comprese le decisioni assunte sul momento: sono state decisioni adeguate? Quali sono state quelle portatrici di conseguenze negative? C'è stato un errore? Era evitabile?

Infine, compilare il diario *aiuta* il docente a mettere a fuoco quali sono le relazioni con e tra gli studenti e le studentesse. Avere la possibilità (o forse l'obbligo) di riflettere con calma sugli avvenimenti, con la mente fredda e il giusto distacco dalla situazione, permette di sottolineare aspetti positivi e negativi sui quali basare un miglioramento.

Il diario di bordo è uno strumento proposto in diversi corsi di aggiornamento per gli insegnanti, ad esempio nel progetto ministeriale m@t.abel[6] che ha coinvolto insegnanti e ricercatori di tutta Italia. La valenza di questo strumento viene ben evidenziata dalle parole, tratte dal diario di bordo di una docente di matematica di scuola secondaria di II grado:

> Durante il corso mi è stato chiesto se prendessi appunti sulle osservazioni degli allievi e sul loro comportamento durante le varie attività. Affannata a passare di gruppo in gruppo, a risolvere le difficoltà tecniche dell'aula di informatica e le mille piccole questioni di un'ora di lezione pensai: ci manca solo questo!
>
> Poco per volta ho capito che dovevo ritagliarmi questo spazio. Perché? Ascoltare gli studenti, riflettere su quello che dicono, su come agiscono aiuta a capire come ragionano, quali misconcetti si portano dietro, che cosa per noi insegnanti è 'banalmente semplice' e per loro non lo è. Evita agli insegnanti l'autoreferenzialità, e apre scorci davvero insospettabili.[7]

Progettare e attuare un'attività didattica insieme ad altri docenti obbliga al confronto non solo sulle scelte metodologiche, ma anche su quali strumenti utilizzare. La consapevolezza si sviluppa attraverso il dialogo con i propri pari, anche di realtà differenti, e si arricchisce con l'auto riflessione su quanto accaduto durante le lezioni.

Avere maggior consapevolezza del proprio operato permette di gestire la didattica quotidiana con le domande che il docente si pone, nel leggere ed interpretare i gesti degli alunni, ma anche nella scelta degli strumenti utilizzati come mediatori didattici. Ogni strumento, infatti, non è neutro e porta con sé significati più o meno nascosti, spinge verso un determinato linguaggio, propone soluzioni di un certo tipo e contribuisce a veicolare l'apprendimento.

Valutazione formativa

Nel corso degli ultimi decenni, il dibattito nazionale e internazionale in ambito docimologico ha evidenziato il ruolo cruciale della valutazione formativa per

---

[6] http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

[7] D. Merlo, Docente di Matematica e Fisica del Liceo Scientifico "M. Curie" di Pinerolo. Corso di aggiornamento "Il laboratorio con m@t.abel" tenuto a Pinerolo (TO) nell'anno scolastico 2017/2018.

migliorare la qualità dei processi di insegnamento e apprendimento. La necessità di un cambiamento nella concezione e nella pratica della valutazione verso un approccio formativo è legata al cambiamento di paradigma dall'istruzione all'apprendimento come obiettivo strategico per i sistemi educativi (Balzaretti & Vannini, 2018). Superata l'idea di processo di acquisizione di contenuti basato sulla trasmissione da parte dell'insegnante, nel panorama attuale l'apprendimento viene comunemente inteso come un processo in cui gli studenti e le studentesse costruiscono attivamente le proprie conoscenze e competenze (Vannini, 2019). In quest'ottica si è sviluppato il costrutto di *formative assessment* che "corrisponde a un insieme di strategie integrate nel processo d'insegnamento, finalizzate a raccogliere informazioni sull'apprendimento degli studenti e delle studentesse per poter fornire un feedback di miglioramento e apportare aggiustamenti all'intervento didattico (Black & Wiliam, 1998a e 1998b; Bennett, 2011) nella prospettiva dell'individualizzazione e della promozione di equità nei risultati di apprendimento" (Ciani et al., 2021, p. 48).

Terminologia. Nell'ambito italiano, il *formative assessment* è maggiormente conosciuto con il termine *valutazione formativa*, nell'accezione di quel momento valutativo specifico che "analizza e ricostruisce" il processo d'insegnamento-apprendimento regolandolo *in itinere* (Vertecchi, 1976; Vannini, 2019). D'ora in poi utilizzeremo l'accezione italiana del termine.

In letteratura, ci sono diverse definizioni di valutazione formativa; condividiamo di seguito quella definita nel progetto di ricerca europeo *LLP-Comenius FAMT&L – Formative Assessment for Mathematics Teaching and Learning*:

> La valutazione formativa è una valutazione PER l'insegnamento e l'apprendimento.
>
> Essa:
>
> - È parte del processo di insegnamento-apprendimento e si occupa della sua regolazione;
> - Identifica, in modo analitico, i punti di forza e le debolezze di apprendimento degli studenti, al fine di permettere agli insegnanti di riflettere e di poter modificare le proprie pratiche;
> - Permette una forma di feedback formativo per instaurare un dialogo tra insegnante e studente e per la progettazione di interventi educativi mirati al recupero;
> - Promuove e favorisce l'apprendimento di tutti gli studenti attraverso l'insegnamento differenziato che garantisce ad ogni studente ritmi diversi e strategie personalizzate di insegnamento e apprendimento;
> - Coinvolge lo studente nell'analisi dei propri errori/debolezze e della propria capacità di promuovere l'autovalutazione e la valutazione tra pari, e nella partecipazione attiva al processo di insegnamento-apprendimento. (Vannini, 2017)

Il progetto europeo, con focus sulla matematica, ha caratterizzato ulteriormente la valutazione formativa *in matematica* specificando che:

> Essa è destinata a fornire informazioni, feedback e feedforward[8] – dentro e al di fuori della classe – legate allo sviluppo delle competenze matematiche necessarie alla vita di tutti i giorni.
>
> In particolare vengono considerate:
>
> - Le diverse componenti di apprendimento matematico degli studenti (concettuale, procedurale, semiotico, comunicativo, il problem posing e gli aspetti risolutivi, le idee sbagliate, l'organizzazione delle esperienze matematiche …);
> - Le credenze e l'immagine che gli studenti hanno della matematica e/o di specifiche parti di essa;
> - L'interazione e il comportamento tenuto in classe dagli studenti quando sono coinvolti in diverse operazioni matematiche;
> - I prodotti delle scelte dell'insegnante (trasposizione di contenuti matematici, l'interfaccia tra i contenuti e i metodi, …). (Vannini, 2017)

Indipendentemente dalle diverse accezioni, a livello internazionale c'è condivisione sulle strategie caratterizzanti le azioni del docente in un'ottica di valutazione formativa (Assessment Reform Group, 1999; Leahy et al., 2005), quali il "chiarire e condividere gli obiettivi didattici e i criteri di massima padronanza e qualità, proporre attività che elicitino evidenze di acquisizioni, fornire un feedback che indichi le tappe successive per imparare, attivare gli studenti e le studentesse come risorse didattiche per gli altri e come esperti del proprio apprendimento" (Ciani et al., 2021, p. 48).

Già nel 1998, la revisione della letteratura condotta da Black e Wiliam (1998a) ha evidenziato quanto l'effettiva implementazione di strategie di valutazione formativa abbia un impatto statisticamente significativo sugli apprendimenti degli studenti e nelle studentesse nei diversi gradi scolastici e in diverse discipline, anche in matematica.

Come si vedrà nelle progettazioni proposte, le attività di valutazione sono variegate, in alcuni casi anche *nuove*, ideate per valutare un fenomeno "complesso", ossia il ragionamento covariazionale, che se lasciato all'uso di una rubrica valutativa rischia di non essere colto né a livello di significato né a livello di uso nella pratica. Le valutazioni forniscono feedback importanti ai docenti, grazie ai quali è possibile calibrare il prosieguo dell'attività. L'importante è mettersi nella condizione migliore per osservare; citando Gardner "insegnanti e studenti […] non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri «compromessi delle risposte corrette». In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette" (1994, p.

[8] Immaginare degli sviluppi futuri e studiare delle strategie per raggiungere l'obiettivo desiderato.

161). Proprio in quest'ottica l'errore rilevato in fase valutativa diviene un trampolino per il miglioramento.

Ma come si raccolgono le informazioni? Se nella valutazione inseriamo anche il docente, come si può osservare bene quando osservante e osservato coincidono? È possibile attivare un processo di autovalutazione senza correre il rischio di diventare autoreferenziali? Come si gestisce il feedback valutativo nelle azioni dei docenti e degli studenti e delle studentesse? Come e quando ci si accorge della necessità di "ri-calibrare" l'intervento didattico? In parte il diario di bordo riesce a rispondere a queste esigenze. Ma è anche necessario chiedersi quale peso dare agli errori, nostri e degli allievi o allieve. Inoltre, come possiamo verificare quando l'apprendimento è significativo?

Una risposta può essere fornita chiedendo agli alunni e alle alunne di esprimere con il linguaggio naturale, e non solo con la mera applicazione di formule, il concetto matematico in questione. Un'altra risposta può consistere nel chiedere di argomentare e motivare le scelte effettuate per risolvere problemi e porre gli studenti e le studentesse in situazioni problematiche nuove. Vedremo nel seguito alcuni esempi pratici nelle sperimentazioni.

Capitolo 3

Progettazione per la scuola primaria

Introduzione

In questo capitolo illustreremo la progettazione e conseguente sperimentazione condotta da un gruppo di docenti del primo ciclo di istruzione, che hanno scelto di trattare il tema della covariazione avvalendosi della metodologia dello storytelling (Perissinotto, 2020), ossia l'atto del narrare, avvalendosi di storie, reali e/o fantascientifiche, che da qui in avanti chiameremo "narrativi".

Tutte le altre progettazioni sono reperibili sul sito dedicato al gruppo di ricerca[9], nella sezione Materiali.

Gli alunni di scuola primaria hanno spesso difficoltà con i concetti astratti della matematica. L'uso dei narrativi come catalizzatori per l'insegnamento della matematica è un metodo che permette di avvicinare i piccoli a concetti astratti in maniera ludica e versatile. Infatti, i narrativi fanno appello all'immaginazione e alle emozioni degli alunni e contribuiscono a rendere l'apprendimento più significativo. Quando gli allievi e le allieve ascoltano le storie, creano immagini mentali che appartengono a loro, collegando il contenuto a qualcosa di personalmente significativo. Secondo Steiner (1997), i bambini e le bambine sono nell'età dell'immaginazione e per questo motivo l'insegnamento di concetti astratti deve essere trasmesso loro attraverso le immagini.

I narrativi, dunque, hanno l'obiettivo di coinvolgere l'allievo o l'allieva che inizia a entrare nella storia matematica, diventando così un tutt'uno con i protagonisti. In questo modo, il problema matematico proposto diventa un problema *reale* nel senso che la ricerca della soluzione al problema stesso avviene non perché è il docente a chiederlo, ma come diretta conseguenza della storia raccontata. Gerofsky (1996), analizzando il testo di un problema come genere letterario, identifica tre componenti principali: i personaggi e l'ambientazione della storia; le informazioni necessarie per risolvere il problema e la domanda. Inoltre, sottolinea che gli allievi e le allieve cercano di dare un *senso* al compito che viene loro posto: questo *significato* nasce spontaneo se i personaggi agiscono per *motivi* e *intenzioni* a loro comprensibili e se la richiesta è coerente con tali motivi e intenzioni. Nella fase risolutiva dei problemi, un momento essenziale e, allo stesso tempo, critico è quello della rappresentazione (Zan, 2012): infatti da un lato il processo di rappresentazione può essere ostacolato da un contesto eccessivamente sintetico (che

---

9 MaT&L Research Group - Varia tu che covario anch'io 2021-2022

favorisce l'applicazione di scorciatoie cognitive), dall'altro, una storia troppo ricca di dettagli può distrarre gli allievi e le allieve inducendo ad aggiungere informazioni inutili o che, addirittura, possono condurre fuori strada.

Su questa scia, e con l'intento di voler indagare forme di covariazione che poggiano sui narrativi, hanno preso forma le progettazioni condotte per il primo ciclo che intendiamo qui illustrare.

La macroprogettazione ha coinvolto un gruppo misto di docenti della scuola primaria e della scuola secondaria di I grado: Pietro Caprio, Margherita Gastone, Marco Milani e Tiziana Spatola. La sperimentazione descritta nel seguito è stata pensata da Margherita Gastone che ha poi coinvolto i suoi allievi e le sue allieve di una classe prima di scuola primaria. In tale sperimentazione, attraverso un racconto, si chiede agli alunni e alle alunne di ragionare sui percorsi che vengono affrontati con dinamiche diverse da due animali, un coniglio e una tartaruga. Lo scopo è mettere in luce il legame tra la lunghezza del passo degli animali, la strada percorsa e la reciproca distanza.

Un paragrafo a conclusione del capitolo raccoglie alcuni spunti tratti dalla microprogettazione e dal diario di bordo di Tiziana Spatola che ha adattato la storia a studenti e studentesse di una classe prima della scuola secondaria di I grado, a dimostrazione del fatto che la sperimentazione, che a breve descriveremo, si presta ad essere adattata a diversi gradi scolastici.

Macroprogettazione

L'attività è stata progettata da un gruppo di docenti eterogeneo, poiché formato sia da insegnanti di scuola primaria sia di scuola secondaria di I grado. Tali docenti hanno lavorato prendendo spunto da uno dei seminari svolti durante il corso di formazione, in cui si sono introdotti i narrativi come possibili catalizzatori sul tema della covariazione in questi primi gradi scolastici.

Riportiamo di seguito le diverse fasi in cui i docenti hanno pensato di organizzare l'attività in classe, senza entrare nei dettagli delle tempistiche e dei materiali richiesti.

Fase 1: Lettura del problema

In questa fase iniziale il docente propone agli studenti e alle studentesse il problema in forma scritta o orale. Lo scopo è di presentare il problema agli allievi e alle allieve, di far loro familiarizzare con i personaggi presenti nella storia e di sciogliere eventuali dubbi legati alla comprensione del testo.

Fase 2: Rappresentazione grafica del problema

In questa fase i dati del problema vengono rappresentati per essere manipolati. Le rappresentazioni possono essere di vario tipo. Alcune possono essere legate alla narrazione stessa, ricorrendo per esempio alla drammatizzazione della storia (fatta con pupazzi, con cartoncini raffiguranti i personaggi oppure chiedendo agli alunni e alle alunne di impersonare i personaggi); altre possono avere carattere più matematico, per esempio ci si può avvalere di oggetti per mettere a punto una rappresentazione materiale delle quantità in gioco oppure realizzare diagrammi o grafici.

Fase 3: Esplorazione per trovare una soluzione

L'attività entra nel vivo e gli alunni e le alunne sono lasciati liberi di esplorare per cercare di far proprio il problema e abbozzare soluzioni, avanzare ipotesi, proporre interpretazioni, confutare o validare previsioni. In questa fase, è auspicabile che gli alunni e le alunne si avvalgano delle risorse usate nella fase precedente per rappresentare il problema e siano lasciati liberi di sganciarsi da esse se e quando saranno pronti.

Fase 4: Formalizzazione della risposta

In questa ultima fase gli alunni e le alunne condividono il lavoro fatto a gruppi; segue la discussione tra le varie proposte. Il ruolo dell'insegnante è quello di mediatore: raccoglie le proposte emerse facendo attenzione a valorizzare qualche elemento di ciascuna; sottolinea alcune frasi particolarmente significative ai fini della conclusione del lavoro; se necessario, pone domande stimolo o aiuta gli alunni e le alunne ad esprimere la loro proposta con un linguaggio formalizzato. Se gli alunne o le alunne sono in difficoltà, scompone la richiesta proponendo degli step e individua i mediatori che possano essere efficaci (esperienza corporea, immagini, semplificazione del linguaggio utilizzato…).

Microprogettazione

Nel presente paragrafo illustriamo una possibile declinazione della macroprogettazione di gruppo in sperimentazione. Si osservi come la microprogettazione segua le fasi previste dalla macroprogettazione, arricchendole con dettagli puntuali e informazioni sia sulle tempistiche sia sui materiali previsti.

Precisiamo che la descrizione della microprogettazione è intervallata da alcune riflessioni tratte dal diario di bordo dell'insegnante sperimentatrice, al fine di soffermarci e condividere possibili risultati che possono emergere durante la sperimentazione in classe.

Sperimentazione: Pronti, ai posti ... via – LA GARA NEL BOSCO

Come è giusto aspettarsi, l'attività esordisce con un racconto: è questo il narrativo su cui poggerà tutta l'attività. Si tratta di una storia inventata dalla sperimentatrice.

Oggi il coniglio e la tartaruga partecipano a una gara di marcia lungo lo stesso sentiero nel bosco.
Il coniglio e la tartaruga sono amici, ma sanno che faranno la gara ognuno per conto proprio perché hanno modi diversi di camminare: un passo del coniglio è lungo come due passi della tartaruga. Il punto di partenza è la casa del coniglio.
Dopo 6 passi il coniglio trova la grande pietra bianca.
La tartaruga, quando ha fatto 6 passi, trova la casa del suo amico riccio.

Dalla casa del coniglio, è più vicina la grande pietra bianca o la casa del riccio? Perché? Prendete la carta con la pietra bianca e la carta con la casa del riccio e mettete le due carte a posto sul sentiero. Ricordate che un quadretto corrisponde a un passo della tartaruga.

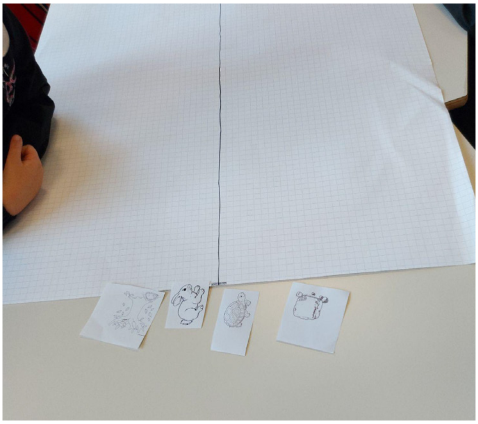


Figura 6. Materiale fornito ad ogni gruppo di lavoro.

- Lezione 1: La storia viene letta dall'insegnante ad alta voce, gli allievi e le allieve lavorano in piccoli gruppi e ogni gruppo ha a disposizione un cartellone quadrettato e quattro carte: i due animali (coniglio e tartaruga), la pietra bianca e la casa del riccio (Figura 6). Ogni gruppo condivide con la classe la propria risposta.
  Per far comprendere meglio la storia, il problema viene drammatizzato e si prova a capire come sono i passi da tartaruga usando le piastrelle come quadretti. [Tempo previsto: 2 ore].

Osservazioni dal diario di bordo. Dal confronto del lavoro dei gruppi sono emerse diverse disposizioni delle carte "pietra bianca" e "casa del riccio" sul cartellone quadrettato: a volte la casa del riccio era prima della pietra, a volte dopo. Un gruppo ha messo la pietra e la casa del riccio nella stessa posizione. Nessun gruppo ha colto l'informazione sul legame di proporzionalità relativo ai passi di coniglio e tartaruga. Chi posiziona correttamente le carte "pietra bianca" e "casa del riccio" motiva in modo errato: "la casa del riccio si trova sotto l'albero e quindi va prima perché appena entri nel bosco trovi gli alberi" e "la pietra va dopo perché il coniglio salta".

- Lezione 2: Affinché gli alunni possano padroneggiare la relazione che lega il passo del coniglio con il passo della tartaruga, si riprende la drammatizzazione della storia iniziata alla fine della lezione precedente; per rendere l'attività più piacevole l'insegnante introduce una maschera da tartaruga da indossare a turno. Gli alunni e le alunne, tre o quattro per volta, provano a fare i passi e, per tentativi ed errori, capiscono come realizzarli. Individuato il tipo di passo, capiscono dove si trova la casa del riccio sul pavimento. Successivamente gli alunni lavorano in piccoli gruppi per indicare la posizione della casa del riccio sul cartellone quadrettato. Segue poi una fase di confronto al termine della quale ogni gruppo incolla l'immagine della casa sul suo cartellone. [Tempo previsto: 2 ore].

- Lezione 3: Anche in questa lezione si utilizza la drammatizzazione, ma stavolta si lavora per scoprire il passo del coniglio. Viene introdotta una seconda maschera da indossare a turno; gli alunni lavorano a tre o quattro alla volta, come nella lezione precedente. L'obiettivo finale è quello espresso nella lezione 2. Dopo aver collocato la pietra bianca sul pavimento, gli alunni lavorano nuovamente in gruppi sui cartelloni, cercano di individuare la posizione della pietra bianca sui quadretti. Segue poi una fase di confronto al termine della quale ogni gruppo incolla l'immagine della pietra sul suo cartellone. Si può osservare che con il passo del coniglio la casa del riccio, che coincideva con i 6 passi da tartaruga, viene "superata". [Tempo previsto: 2 ore]

Osservazioni dal diario di bordo. Durante la drammatizzazione non è stato immediato per i bambini comprendere che il passo del coniglio doveva essere di lunghezza doppia rispetto al passo della tartaruga. Con fatica i bambini sono arrivati a dire che la tartaruga resta indietro perché fa i passi piccoli, invece i passi del coniglio sono più grandi.

- Lezione 4: Questa lezione non era prevista nella microprogettazione originale, ma deriva dalla gestione dell'imprevisto esposto nella precedente osservazione tratta dal diario di bordo. Dal momento che gli alunni e le alunne hanno faticato a comprendere il legame tra la lunghezza del passo di coniglio e la lunghezza del passo di tartaruga, si è pensato di cambiare contesto, offrendo un'esperienza concreta che mettesse in gioco la stessa relazione vigente nella storia.
  Durante la lezione viene preparata la pasta di sale. Usando il cucchiaio come unità di misura, ogni alunno, a turno, è invitato a mettere in una bacinella un cucchiaio di sale e due di farina. Si sottolineano le quantità messe ogni volta (una porzione di sale è 1 cucchiaio e 1 porzione di farina è 2 cucchiai) e si chiede se quel lavoro faccia venire loro in mente qualche altro lavoro già fatto. Colto il rimando alla storia di coniglio e tartaruga, si drammatizzano di nuovo le andature dei due animali. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. Quando chiedo ai bambini che cosa succede alla tartaruga, essi, dopo aver drammatizzato ancora le andature dei due animali, rispondono: "la tartaruga resta indietro perché fa passi piccoli". Quando chiedo di fare il parallelismo con sale e farina, i bambini rispondono: "Il sale resta indietro perché ogni volta metto solo un cucchiaino, invece della farina ne metto due".

I bambini, sulla base delle loro preconoscenze, si sono fissati sul fatto che la tartaruga va lenta e il coniglio salta e questo li ha ostacolati nella comprensione della consegna. Si sono creati una propria rappresentazione della situazione che non corrispondeva a quella data e che non era funzionale alla soluzione della situazione problematica.
È stato un lavoro molto impegnativo per me e per i bambini. Ma ogni problema complesso è una sfida: si tratta da un lato di aiutare a far fronte alla difficoltà scomponendo la consegna in frammenti piccoli quanto basta da essere affrontati; dall'altra si tratta di trovare gli strumenti di mediazione efficaci: piastrelle del pavimento e maschere, quadretto del foglio, linea per rappresentare il sentiero.

Suggerimenti per la valutazione formativa

La valutazione formativa dell'attività finora descritta si potrebbe articolare in diversi momenti, tenendo conto che è richiesta una costante osservazione degli alunni e delle alunne durante il lavoro unitamente a un ascolto attento delle loro affermazioni.
La fase della drammatizzazione è particolarmente significativa perché l'insegnante ha l'occasione di osservare il pensiero degli alunni e delle alunne anche attraverso i gesti che loro stessi compiono rendendo in un certo senso visibili i propri processi di pensiero. Questa fase, che solitamente piace a tutti gli studenti e le studentesse ed è molto efficace per aiutare quelli più fragili, è da realizzare focalizzando, di volta in volta, l'attenzione su un particolare elemento. Nella sperimentazione riportata, la drammatizzazione si è sempre svolta come esperienza corporea di simulazione della tipologia di passo che coniglio e tartaruga utilizzano, al fine di farla esperire in prima persona agli alunni. Tuttavia, le pre-conoscenze degli allievi e delle allieve (il coniglio salta e la tartaruga è un animale notoriamente lento) hanno ostacolato il legame covariazionale che si voleva far cogliere, ossia che il passo del coniglio fosse lungo il doppio di quello della tartaruga. Ecco, dunque, l'utilità di consolidare la scoperta di tale legame proponendo un'altra esperienza corporea, come quella della manipolazione degli ingredienti (sale e farina) per la pasta di sale.
Infine, la documentazione del lavoro sul quaderno si inserisce anch'essa in un'ottica di valutazione formativa, poiché la rappresentazione grafica di quello che è stato compreso aiuta a imprimere le concettualizzazioni che si sono colte fino a quel momento.

Spunti per la scuola secondaria di primo grado

La storia che segue è il narrativo su cui si basa un esempio di microprogettazione per la secondaria di I grado.

Sono ormai passati molti anni dalla loro prima sfida e la tartaruga e la lepre sono cresciute diventando ottime amiche. Decidono di iscriversi ad un trail running a squadre di 50 km. Visto che il percorso di montagna, che non conoscono, può essere pieno di insidie nascoste, decidono di organizzarsi in questo modo. La tartaruga avanzerà sui sentieri percorrendo 1 km

al giorno. La lepre che è più veloce correrà davanti alla tartaruga per osservare il percorso e tenere sotto controllo gli avversari, ma ogni volta che si allontanerà 2 km dalla tartaruga, tornerà da lei per informarla. La lepre si muove a 3 km al giorno se corre nello stesso verso della tartaruga. Quando invece corre nel verso opposto alla tartaruga cammina indietro a 1 km al giorno.
Quanta strada hanno percorso entrambe dopo 3 giorni?
Dopo essersi salutate alla partenza, ogni quanti giorni si incontrano?
Chi delle due amiche ha la fortuna di tagliare il traguardo per prima?
Durante tutto il percorso di gara, quante volte si incontrano in tutto?
Se, contente dell'esperienza, dovessero iscriversi ad una maratona ufficiale di 42 km e 195 m, quante volte si incontrerebbero? Arriverebbero al traguardo assieme?

Attraverso un racconto sufficientemente articolato si chiede di ragionare sui movimenti di due animali: lepre e tartaruga. I due animali collaborano per effettuare una gara a squadre, affrontano lo stesso percorso, ma con due dinamiche diverse che portano la tartaruga a mantenere un passo costante e la lepre a svolgere un percorso a tappe alla fine di ognuna delle quali torna dalla tartaruga per informarla di quello che vedrà[10]. Si presenta il testo del problema (lo si può scrivere alla lavagna, anche se può essere preferibile o mostrarlo tramite LIM oppure consegnarne una fotocopia) e si chiariscono gli eventuali dubbi sul testo stesso. Gli studenti e le studentesse lavorano individualmente. La consegna è quella di scrivere su un foglio il ragionamento e la strategia utilizzata per risolvere il problema, invitando gli studenti e le studentesse a trovare soluzioni originali, senza concentrarsi troppo sul dover rispondere correttamente, ma su come ragionare e perché scegliere quella particolare metodologia di risoluzione. [Tempo previsto: 2 ore].

Osservazioni dal diario di bordo. Gli studenti hanno svolto la consegna generando materiali interessanti. Un buon numero di studenti ha scelto di riprodurre il percorso come una specie di gioco dell'oca (Figura 7) per poi rispondere alle domande guardando i movimenti delle pedine. Altri hanno ragionato per iscritto e hanno raggiunto le soluzioni con un ragionamento puramente intellettivo, oppure tramite la riproduzione delle tappe iniziali del percorso per poi smettere con la rappresentazione grafica dello stesso una volta capita la ridondanza (Figura 8). Uno solo ha usato una modalità simile ad un grafico, sbagliando però l'inserimento dei dati. Ho scelto in classe di far ragionare i ragazzi prima sulla dinamica dei due animali usando delle freccette che ne riproducessero i movimenti per poi costruire il grafico cartesiano ragionando sulle grandezze implicate, le unità di misura da usare per riprodurre i dati, i punti relativi alle coordinate da inserire nel grafico scegliendo di usare lo stesso grafico e riferire ad ogni animale una linea di colore diverso (Figura 9). I ragazzi sono riusciti a riprodurre abbastanza facilmente il grafico corretto, con qualche aiuto da parte mia. Hanno apprezzato la potenza del grafico

[10] Il narrativo si ispira al racconto di D. Buzzati, "I sette messaggeri" (2014).

cartesiano nel riuscire a visualizzare chiaramente i punti di incontro dei due animali e il tipo di moto di ognuno.

Figura 7. Rappresentazione del problema da parte di alcuni studenti e studentesse.

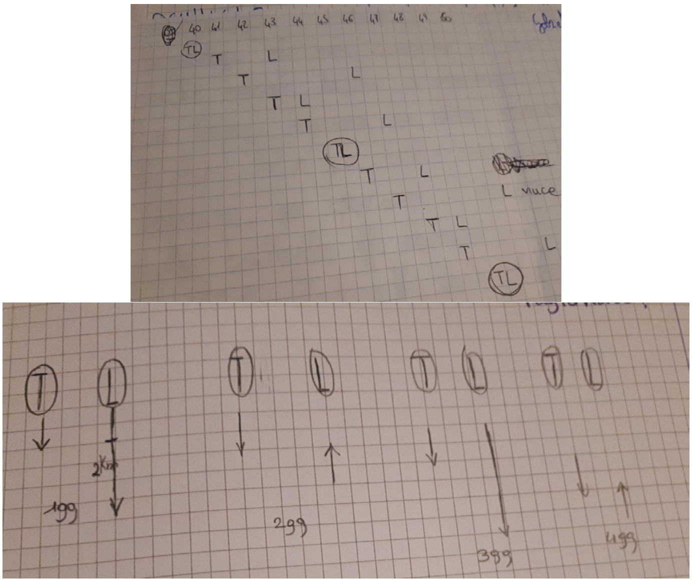


Figura 8. Rappresentazione del problema da parte di alcuni studenti e studentesse.

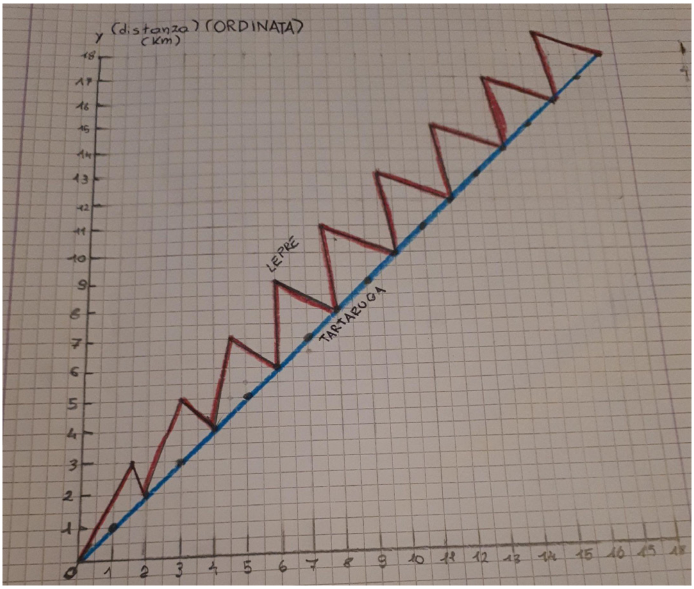


Figura 9. Grafico cartesiano riprodotto in classe con l'insegnante.

Osservazioni dal diario di bordo. I grafici semplici come quello che si costruisce con questa attività sono facilmente comprensibili dagli allievi e quindi bisognerebbe potenziare non solo la lettura e l'interpretazione dei grafici, ma la loro costruzione a partire da situazioni problematiche o esperimenti scientifici semplici.

Uno sguardo covariazionale alle progettazioni

Coinvolgere gli alunni in un'attività matematica partendo da un narrativo ha molteplici vantaggi, nel cui merito non entriamo direttamente. Tra questi, però, per i nostri intenti, vale la pena sottolineare quello di promuovere ragionamenti covariazionali "con leggerezza". L'essere coinvolti nella storia, il drammatizzarla e/o il rappresentarla, fa scaturire in maniera spontanea negli studenti e nelle studentesse la capacità di mettere in relazione due o più quantità: nell'esempio precedente ciascun animale con il proprio passo, i passi degli animali tra loro, gli oggetti che si incontrano lungo il sentiero con il punto di partenza. Quindi, il narrativo veicola in più fasi l'esplicitazione della covariazione in forme orali o grafiche, con livelli di acquisizione che divengono man mano più consapevoli nei piccoli allievi e allieve. Certamente i linguaggi usati dagli studenti e dalle studentesse sono per lo più di tipo informale; sarà poi l'insegnante a guidare e supportare verso linguaggi più formali.

Non sarà sfuggito al lettore il riecheggiare della favola di Esopo "La lepre e la tartaruga". Effettivamente l'idea perseguita dalla sperimentatrice e dal gruppo di macro-progettazione non è quella di mettere in relazione velocità e tempo. È piuttosto quella di puntare sul concetto di distanza, avvalendosi del rafforzativo del narrativo. Questo si evince già nel racconto: "*Il coniglio e la tartaruga […] hanno modi diversi di camminare: un passo del coniglio è lungo come due passi della tartaruga*" e diviene chiaro nella fase di rappresentazione che accompagna la richiesta immediatamente successiva alla lettura, in cui si "vede" la dicotomia passo lungo-passo corto tra coniglio e tartaruga.

La scelta della tartaruga e del contesto di gara ha ingabbiato gli alunni nell'idea di velocità[11]. Infatti, loro stessi dicono "la tartaruga resta indietro perché fa passi piccoli". Anche la sperimentatrice è consapevole di questo, lei stessa lo scrive nel suo diario di bordo.
Osserviamo ancora che la frase detta dagli alunni, poco prima riportata, "passi piccoli" fa riferimento al concetto di misura, mentre "resta indietro" fa riferimento al tempo. L'insegnante vorrebbe che gli alunni facessero riferimento alle distanze, ma la scelta degli animali della storia li induce, involontariamente, a pensare in termini di tempo. La proposta dell'esperienza di manipolazione di oggetti concreti come sale e farina, in cui nuovamente c'è un legame di proporzionalità tra le due quantità in gioco, sicuramente ha aiutato. Infatti, gli alunni sembrano aver percepito l'analogia con la storia degli animali e dicono "il sale resta indietro", come indietro per loro restava la tartaruga. Questa analogia, in qualche modo, li ha aiutati a individuare meglio il legame tra le due quantità in gioco nelle due storie (coniglio–tartaruga da un lato; sale–farina dall'altro).

Se si vuole anche perseguire l'idea stereotipata di veloce-lento, suggeriamo di scegliere gli animali canonici, associati a velocità e lentezza, ossia lepre e tartaruga. Altrimenti, provare a essere più astratti, evitando il contesto degli animali.
I narrativi matematici proposti mettono in luce un problema cognitivo e didattico: occorre, infatti, partire da un'immagine mentale di ciò che significa passo lungo/passo corto ed elaborarla in modo da cogliere la relazione tra le due grandezze coinvolte, al fine di comprendere il senso che la storia assume nelle diverse rappresentazioni e ragionare su queste. Il docente ha il delicato compito di supportare il più possibile la creazione e il mantenimento del legame tra la storia e la

---

[11] La velocità è in effetti una variazione di spazio nel tempo. Più veloce e meno veloce (per velocità costanti come è qui il caso) fanno riferimento a variazioni diverse di spazi nello stesso tempo. Questo è espresso dal passo più lungo e più corto (si sottintende che il tempo per un passo è lo stesso). È come se si avesse una tabella analoga a quella della ricetta (Tabella 1, p. 15), ma a tre colonne: i tempi, i passi della tartaruga, i passi del coniglio. Però la prima colonna è implicita, e il problema chiede di risolvere solo i valori numerici delle altre due colonne. Anche il contesto sale-farina non rende necessaria la prima colonna, quella dei tempi, e questo può avere aiutato gli allievi. Il secondo problema, quello che si ispira al racconto di Buzzati, invece, scandisce in forma molto forte il passare del tempo e quindi rende più esplicite le tre colonne. Anche questo dimostra come un narrativo possa rendere più o meno comprensibile quello che sostanzialmente è lo stesso problema.

rappresentazione attraverso un modello matematico. Solo dopo un lungo processo di interiorizzazione si potranno eventualmente far ragionare gli studenti e le studentesse direttamente sul modello.

Capitolo 4

Progettazione per la scuola secondaria di primo grado

Introduzione

Come evidenziato dalla letteratura nazionale e internazionale in didattica della matematica, le azioni percettivo-motorie svolgono un ruolo rilevante nei processi di apprendimento della matematica a tutte le età (Nemirovsky et al., 2004). In particolare, i gesti durante le attività matematiche possono rivelare aspetti nell'evoluzione della formazione e della costruzione dei concetti, relazioni tra concetti matematici e legami con metafore *embodied* che possono produrre astrazioni matematiche basate su artefatti progettati per favorire lo sviluppo di questi concetti (Swidan et al., 2020).

Diversi studi mostrano come studenti e studentesse di diversi livelli scolastici, si impegnino maggiormente in attività che richiedono l'uso di materiali che devono essere manipolati, esplorati e che portano all'osservazione di movimenti fisici. L'intensità e il coinvolgimento di queste attività in matematica portano allo sviluppo di intuizioni che non sembrano essere presenti quando ci si limita a osservare una visualizzazione su una lavagna, uno schermo o un libro di testo.

Sebbene non ci si debba aspettare che la manipolazione di materiali concreti da parte degli studenti e delle studentesse porti automaticamente all'apprendimento della matematica, la letteratura mostra che attività strutturate che prevedono attività manipolative possono significativamente impattare nei processi di apprendimento della matematica. Come messo in luce da Nemirovsky e colleghi (2004) l'uso concreto di materiali facilita l'inclusione del tatto, della propriocezione (percezione del proprio corpo) e della cinestesia (movimento autonomo del corpo) nell'apprendimento della matematica. È proprio in questa direzione che si sono attuate le progettazioni condotte per la scuola secondaria di I grado, volte ad indagare forme di covariazione durante attività manipolative svolte mediante l'utilizzo di un artefatto appositamente costruito, il *tracciatore*.

La macroprogettazione ha coinvolto un gruppo misto di docenti della scuola primaria e della scuola secondaria di I grado: Alessandra Delù, Lucia Manfredotti e Annalisa Paladino.

La microprogettazione, rivolta a studenti e studentesse di classe prima della scuola secondaria di I grado, è stata pensata dal gruppo di docenti e descritta nei dettagli e nei materiali proposti da Alessandra Delù.

Il tracciatore

Il tracciatore è un artefatto costituito da un pannello di legno su cui sono fissate perpendicolarmente due guide. Come vediamo in Figura 10, le guide sono dotate di pomelli che permettono di far scorrere due barre rigide perpendicolari, la cui intersezione identifica un punto sul pannello. Muovendo appositamente le manopole, è quindi possibile "tracciare" linee o seguire linee già tracciate (rappresentate su un foglio di carta posto nel tracciatore) e di conseguenza il loro punto di intersezione.

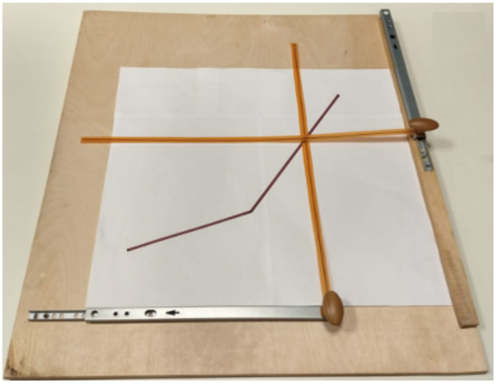


Figura 10. Immagine dello strumento tracciatore costruito artigianalmente.

Come vedremo in seguito, le attività progettate sono volte ad indagare il ragionamento covariazionale e, in particolare, il suo legame con attività manipolative svolte con il tracciatore.

Macroprogettazione

L'attività è stata progettata dal gruppo di docenti sulla base della presentazione fatta dello strumento tracciatore nel corso di formazione. L'attività viene suddivisa in fasi successive: durante la macroprogettazione non sono indicati i tempi delle varie fasi, che sono esplicitate invece nella microprogettazione.

Fase 1: Domande preliminari ed osservazione dello strumento

In questa fase il docente porta uno o più tracciatori in classe e promuove una discussione relativa all'osservazione dello strumento stesso, senza esplicitarne i modi d'uso e le finalità. L'obiettivo di questa prima fase è avvicinare gli studenti e le studentesse allo strumento stesso, permettendo loro di osservarlo nella sua interezza, comprendere quali movimenti siano possibili e ipotizzare quale possa essere la sua funzione.

Fase 2: Esplorazione dello strumento

In questa fase due studenti o studentesse manipolano direttamente il tracciatore, ciascuno muovendo uno dei due pomelli. I due devono coordinarsi in modo da far sì che l'intersezione delle due barre rigide si muova seguendo determinati percorsi disegnati sul foglio.

Si può proporre alla classe di partecipare alla discussione oppure di annotare su un foglio le osservazioni dei due compagni o compagne che agiscono direttamente sul tracciatore. È importante proporre una turnazione dei ruoli in modo che tutti gli studenti e le studentesse siano coinvolti attivamente nell'uso dello strumento.

A questo scopo si possono proporre diverse situazioni da affrontare: a partire da un segmento qualsiasi, si possono proporre altri segmenti con inclinazioni differenti e segmenti paralleli alle guide del tracciatore; successivamente si possono proporre segmenti consecutivi o altre configurazioni più complesse. I segmenti possono essere già tracciati oppure possono essere segmenti "immaginati" dagli studenti e dalle studentesse per congiungere due punti presenti sul foglio oppure come segmenti paralleli/perpendicolari a segmenti tracciati.

La fase termina con una discussione di classe in cui l'insegnante ha il ruolo di mediatore. Questa fase permette di confrontare le diverse osservazioni fatte durante l'uso del tracciatore e giungere a considerazioni condivise dal gruppo classe relativamente al tipo di movimento da effettuare con i due pomelli del tracciatore, per tracciare:

- un segmento qualsiasi (eventualmente anche con riferimento alla pendenza del segmento);
- un segmento parallelo a una delle due guide;
- un segmento immaginario parallelo a un segmento già tracciato;
- un segmento immaginario perpendicolare a un segmento già tracciato.

Questa fase si pone vari obiettivi sia legati a specifici contenuti della geometria sia legati allo sviluppo di competenze trasversali. Infatti, l'attività permette da un lato di consolidare la conoscenza degli enti fondamentali della geometria (il punto, la retta, il segmento, i segmenti consecutivi, la distanza di un punto dalla retta e le reciproche posizioni), di distinguere i concetti fisici di verticale e di perpendicolare che spesso sono alla base di note misconcezioni (Sbaragli, 2010) e infine di localizzare oggetti nel piano, prendendo come riferimento sia se stessi, sia altri compagni e oggetti, e usare correttamente i termini: davanti/dietro, sopra/sotto, a destra/a sinistra. Inoltre, questa prima fase permette di lavorare su competenze trasversali altrettanto importanti quali: sviluppare la sensibilità di lavorare in coppia con un altro compagno e sviluppare l'ascolto (in senso allargato) dell'altro; riflettere sul proprio operato (dal gesto alle parole e viceversa); costruire ragionamenti e argomentare le proprie opinioni in una discussione tra pari; esplorare registri diversi (grafico, narrativo, gestuale, …).

Fase 3: Uso del tracciatore in contesti reali

La terza fase richiede di aver acquisito una buona dimestichezza con l'uso dello strumento e aver effettuato con tutti gli studenti e le studentesse molteplici osservazioni come quelle descritte in precedenza. L'idea è quella di utilizzare il tracciatore in contesti reali quali per esempio i contesti indicati nella microprogettazione che segue, per rispondere a domande concrete che permettano ad esempio di riflettere anche sul concetto di altezza e di pendenza, in contesto puramente geometrico e nella realtà.

Obiettivi di questa fase sono la individuazione di posizioni e spostamenti nel piano, in situazioni concrete, anche mediante reticolati, effettuare spostamenti lungo percorsi assegnati mediante istruzioni orali o scritte e descrivere (verbalmente o per iscritto) i percorsi eseguiti da se stessi e da altri, anche ricorrendo a rappresentazioni grafiche appropriate.

Microprogettazione

Riportiamo di seguito il modo in cui i docenti hanno deciso di declinare le diverse fasi dell'attività in una classe prima di scuola secondaria di I grado.

- Il docente in questa fase iniziale porta il tracciatore in classe e stimola una discussione con gli alunni per sollecitare risposte alle seguenti possibili domande:
  Che cos'è secondo voi questo strumento?
  A cosa serve?
  Quali movimenti potrà fare?
  Come lo possiamo usare all'interno delle nostre attività?
  Quante persone possiamo coinvolgere per usarlo?
  In quali altre discipline è possibile usare questo strumento?
  Quali istruzioni dareste ad un vostro amico per costruire uno strumento simile?

  Gli studenti e le studentesse ipotizzano così le funzioni dello strumento, esplorano i possibili movimenti e definiscono potenzialità e limiti dell'uso del tracciatore. In questa fase, è possibile che gli studenti e le studentesse riconoscano nel tracciatore un "modello" concreto di piano cartesiano, in questo caso spetta al docente porre opportune domande per investigare l'analogia possibile tra il tracciatore e il piano cartesiano e per portare gli studenti e le studentesse a individuare anche i limiti fisici dell'oggetto concreto. [Tempo previsto: 1 ora].
- Il lavoro prevede il coinvolgimento attivo di due studenti o studentesse nell'uso del tracciatore e di altri due che trascrivono le osservazioni di chi agisce. L'attività può essere ripetuta in modo tale da coinvolgere tutti gli studenti e le studentesse nell'osservazione e nella discussione di quanto osservato.

  In una prima fase gli studenti e le studentesse si spostano sul foglio del tracciatore attraverso un sistema di riferimento, ovvero un foglio quadrettato che ripropone il piano cartesiano su cui sono già stati segnati alcuni riferimenti (punti e segmenti) (si veda un esempio alla Figura 11).

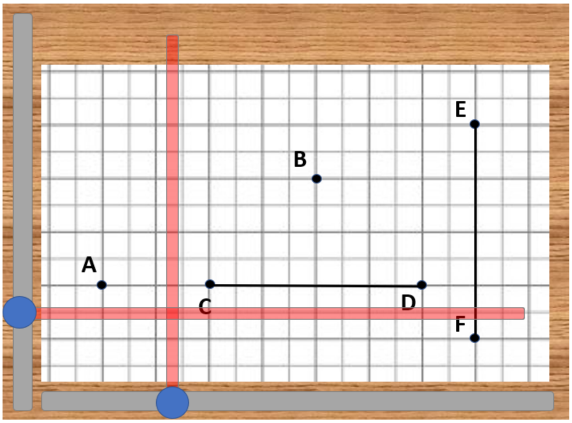


Figura 11. Un foglio quadrettato con alcuni riferimenti (punti e segmenti) viene inserito nel tracciatore.

Su questo foglio gli studenti e le studentesse si muovono attraverso le seguenti tappe guidate:

a. Andate sul punto A
b. Spostatevi dal punto A al punto B
c. Seguite la traccia del segmento disegnato CD (segmento parallelo ad una delle due guide)
d. Seguite la traccia del segmento disegnato EF (segmento parallelo all'altra guida)
e. Dal segmento CD spostatevi sul piano per descrivere un "immaginario" segmento adiacente a CD e poi proseguite per tracciare un "immaginario" segmento consecutivo e perpendicolare a quello precedente
f. Dal segmento EF spostatevi sul piano per descrivere un "immaginario" segmento adiacente a EF e poi proseguite per tracciare un "immaginario" segmento consecutivo e perpendicolare a quello precedente.

A seguito di ogni spostamento gli studenti e le studentesse sono stimolati a narrare prima oralmente e poi per iscritto le proprie osservazioni. Ciascuno di loro ha un compagno che trascrive le considerazioni.

Per facilitare la fase di esplorazione si possono proporre in successione diversi fogli con solo due dei riferimenti indicati sopra in ciascun foglio:

foglio 1: punti A e B

foglio 2: punti C e D e segmento CD

foglio 3: punti E e F e segmento EF

La discussione di classe, mediata dall'insegnante, permette di confrontare le diverse osservazioni fatte durante l'attività con il tracciatore e giungere a considerazioni condivise dal gruppo classe relativamente al tipo di movimento da effettuare con i due pomelli del tracciatore nelle diverse situazioni proposte. [Tempo previsto: 2 ore].

- Il docente inserisce nel tracciatore un foglio A3 che rappresenta un contesto concreto, quale per esempio un elicottero che sta atterrando su un prato[12] (Figura 12).

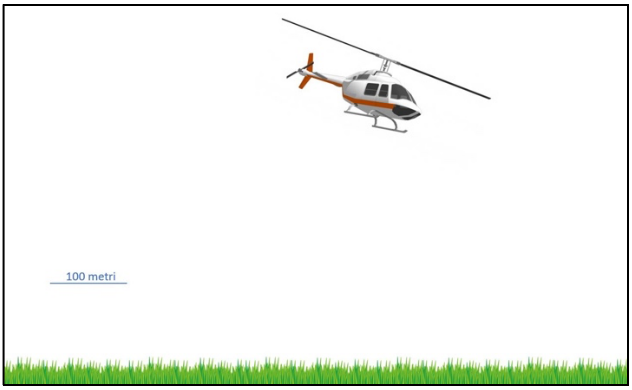


Figura 12. Esempio di rappresentazione di un elicottero che sta atterrando. Immagine tratta da https://www.publicdomainpictures.net/

Agli studenti e alle studentesse viene richiesto dapprima se sia possibile utilizzare il tracciatore per individuare l'altezza a cui si trova il muso (carlinga) dell'elicottero e in caso affermativo, come sia possibile utilizzare il tracciatore per individuare questa altezza. Il docente propone agli studenti e alle studentesse alcune domande stimolo con lo scopo di esplorare la situazione concreta e individuare analogie tra questo compito e il precedente: "Quale spostamento avete fatto? Vi ricorda un movimento già fatto in precedenza?" [Tempo previsto: 2 ore].

- Il docente propone una ulteriore situazione concreta: nel tracciatore inserisce un foglio A3 che rappresenta una mappa con strade, prati e altri elementi[13] (Figura 13).

  La consegna in questo caso potrebbe essere la seguente: "Traccia la distanza della casa dal viale, passando attraverso il prato. Se vi chiedessi di andare dalla casa al viale arrivando nel punto in cui c'è l'albero, cosa cambierebbe?".

  La discussione collettiva dovrebbe portare a un confronto tra le diverse situazioni esplorate attraverso il tracciatore, anche grazie a domande stimolo come: "Cosa è cambiato rispetto alla situazione dell'elicottero?".

[12] La situazione descritta trae ispirazione da una domanda inserita nel libro "Contaci! Volume 1" (Bertinetto et al., 2019).

[13] La situazione trae ispirazione da una domanda inserita nel libro "Contaci! Volume 1" (Bertinetto et al., 2019).

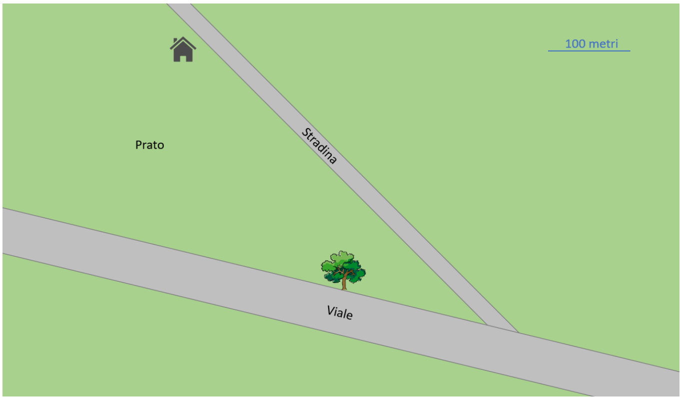


Figura 13. Esempio di rappresentazione di una mappa con strade, prati e altri elementi. Immagine tratta da https://pixabay.com/it/

Dall'analisi dei diversi contesti e dall'uso del tracciatore, il docente porta gli studenti e le studentesse a riflettere sui concetti di perpendicolarità, parallelismo, verticalità, altezza, distanza. [Tempo previsto: 2 ore].

- Infine, seguono alcune proposte per una lezione a conclusione del percorso. Il docente potrebbe proporre un lavoro a gruppi di tre allievi o allieve: due vengono coinvolti nel muovere il tracciatore e un terzo, dotato di una matita tenera e ben appuntita, è invitato a posizionare la matita stessa nel punto di intersezione delle due guide assecondando, con delicatezza, il movimento degli altri due. In questo modo può esserci un riscontro immediato sugli effetti dei movimenti effettuati dalla coppia. In questa fase, in relazione a come gli studenti e le studentesse hanno reagito alle attività precedenti, si potrebbe proporre qualcosa di analogo alle situazioni precedenti oppure si potrebbe avanzare qualche richiesta più impegnativa. Si potrebbe, per esempio, chiedere di provare a disegnare un quadrato, un triangolo rettangolo isoscele o un ottagono regolare?, chiedendo prima di anticipare – a voce – il movimento che si dovrebbe fare sul piano del tracciatore.

  In alternativa, il docente potrebbe proporre agli studenti e alle studentesse di mettersi alla prova nel seguire tracce particolari. Ad esempio, si potrebbe proporre una traccia a forma di scala, oppure delle tracce curve, come per esempio una circonferenza.

  Infine, il docente potrebbe proporre di seguire con il tracciatore rette con diverse pendenze, chiedendo di descrivere a parole come cambia il movimento dei due pomelli a seconda della retta tracciata. Si può arrivare in questo modo a introdurre il concetto di pendenza come rapporto incrementale. [Tempo previsto: 2 ore].

Suggerimenti per la valutazione formativa

Per quanto riguarda la valutazione, è di rilevante interesse riportare quanto le attività progettate siano idonee a promuovere la forma di valutazione *Peer Assessment* definita come "un'azione dei discenti volta a esaminare e specificare il grado, il valore o la qualità di un prodotto o di una performance di altri studenti o studentesse di pari livello, e in seguito apprendere fornendo feedback elaborati e discutendo i giudizi dati con i pari allo scopo di giungere attraverso una negoziazione a un risultato concordato" (Topping, 1998, p. 250). Le attività proposte nelle progettazioni vengono condotte per la maggior parte in piccolo gruppo. Durante una sperimentazione è stato chiesto a due gruppi di valutarsi a vicenda, alternandosi nell'esposizione delle attività svolte nelle varie fasi. A ciascun gruppo è stato successivamente chiesto, all'interno di una discussione collettiva di classe, di esplicitare se i procedimenti risolutivi messi in atto dall'altro gruppo di compagni differissero dai propri e, in caso affermativo, di esplicitare e commentarne le differenze. Gli studenti e le studentesse, in modo reciproco e alternato hanno ricoperto i ruoli sia del "valutato" sia del "valutatore", vivendo e analizzando le situazioni dai due punti di vista. Ed è proprio durante questi processi che si innescano spesso momenti di autovalutazione, anch'essi determinanti in un'ottica di valutazione formativa. In letteratura è largamente messo in luce come il *Peer Assessment* abbia un importante ruolo formativo per quanto riguarda l'ascolto reciproco, la gestione dell'errore e lo sviluppo di varie competenze di tipo metacognitivo (Ferretti et al., 2018).

Uno sguardo covariazionale alle progettazioni

Riportiamo di seguito qualche osservazione raccolta in seguito all'implementazione non strutturata delle attività progettate. Dal punto di vista motivazionale, gli studenti e le studentesse accolgono positivamente attività manipolative con il tracciatore e la motivazione persiste in tutte le fasi. Il lavoro, in coppia e/o piccoli gruppi, promuove il confronto e la condivisione di congetture e argomentazioni. L'utilizzo e la comprensione del funzionamento dell'artefatto di per sé veicolano e promuovono ragionamenti covariazionali: già nelle prime fasi esplorative dello strumento emerge la covariazione. L'uso dell'artefatto ha veicolato in più fasi l'esplicitazione della covariazione del movimento tra le due barre (pomelli) al fine di produrre la giusta intersezione per raggiungere il movimento desiderato. La relazione tra le diverse velocità di movimento delle barre (pomelli) e il legame con i prodotti risultanti esplica il ragionamento covariazionale. Durante le attività, gli studenti e le studentesse usano linguaggi informali e, più raramente, specifici per descrivere il movimento delle barre con i pomelli; il più delle volte si aiutano con i gesti. Nella maggior parte delle discussioni, infatti, gli studenti e le studentesse, mentre discutono su come fare i movimenti giusti, gesticolano; se le parole vengono utilizzate prevalentemente per descrivere i movimenti da fare con le manopole, i gesti indicano le linee e le direzioni da seguire. I gesti si sincronizzano con il discorso che, nel contesto del parlato, esprimono la stessa idea sottostante: la covariazione tra il movimento delle due barre (pomelli) in modo da seguire le linee. Il legame tra attività manipolative, gesti e ragionamento covariazionale è al centro di alcune delle più attuali ricerche in didattica della matematica sul tema; i primi feedback ottenuti dall'implementazione delle attività progettate, anche nel contesto della scuola primaria, sembrano confermare che l'utilizzo di artefatti strutturati promuova l'attivazione di ragionamenti covariazionali anche con studenti e studentesse di questo grado scolastico.

Capitolo 5

Progettazione per la scuola secondaria di secondo grado

Introduzione

Come per gli altri ordini di scuola, abbiamo scelto una sola sperimentazione da raccontare in questo capitolo, a titolo esemplificativo. Tutte le macroprogettazioni delle altre sperimentazioni sono reperibili sul sito dedicato al gruppo di ricerca[14], nella sezione Materiali.

La sperimentazione qui proposta ha come tema la legge del moto di una pallina che scende lungo un piano inclinato, ovvero il famoso esperimento di Galileo da lui descritto nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali" (1638). Lo scopo delle attività proposte è duplice, da una parte quello di comprendere come le grandezze spazio e tempo covariano e quindi ottenere la formula che descrive il moto della pallina $s = k \cdot t^2$, e dall'altra esplorare la relazione tra l'angolo di inclinazione del piano e il grafico spazio-tempo. La sperimentazione è rivolta a studenti e studentesse del biennio e le materie coinvolte sono matematica e fisica.

Alla fase di macroprogettazione tenutasi durante il corso hanno contribuito: Barbara Busnello, Paolo da Pelo e Fiorenza Turiano.

La sperimentazione è stata poi svolta in classe da Paolo da Pelo, Fiorenza Turiano e Marco Villanova.

Macroprogettazione

L'attività viene suddivisa in fasi successive: durante la macroprogettazione non sono indicati i tempi delle varie fasi, esplicitati invece nella microprogettazione.

Fase 1: domande preliminari

Si tratta della fase iniziale, l'introduzione all'intera attività. In questa fase il docente pone agli studenti e alle studentesse alcune domande (in forma scritta o orale) con lo scopo di far emergere le loro idee prima di affrontare l'esperimento, in particolare indagare se conoscono già la relazione spazio-tempo oppure, in alternativa, quali congetture formulerebbero su tale relazione.

---

[14] MaT&L Research Group - Varia tu che covario anch'io 2021-2022

Fase 2: laboratorio

L'attività entra nel vivo proponendo alcuni esperimenti che utilizzano strumenti poveri oppure la rotaia ad aria compressa.

Nel primo caso, per esempio, è possibile far rotolare dentro una canalina di metallo sufficientemente lunga (una canalina per tende) un cilindro di legno e alcune palline di vetro: gli studenti e le studentesse filmano la discesa del cilindro e delle palline nella canalina inclinata.

Nel secondo caso, cioè l'esperimento con la rotaia, si procede prima mantenendo la rotaia orizzontale: in questo caso lo scopo è pervenire a una definizione di moto rettilineo uniforme in cui gli spazi percorsi dal carrellino in tempi uguali, comunque presi, risultano tra di loro uguali, in altri termini il rapporto tra la variazione dello spazio s e la variazione del tempo t è costante, cioè la velocità è costante in quanto funzione di proporzionalità diretta: $s = k \cdot t$. Successivamente la rotaia viene inclinata di un certo angolo: in questo caso lo scopo è pervenire a una definizione di moto rettilineo uniformemente accelerato, in cui:

- dalla posizione di quiete al tempo t_0, si passa a uno spazio s_1 in un tempo t_1. Se l'intervallo di tempo raddoppia allora lo spazio diventa $(1+3)s_1$; se l'intervallo t_1 triplica, lo spazio diventa $(1+3+5)s_1$, etc…;
- il rapporto tra gli spazi è uguale al rapporto tra i quadrati dei tempi;
- analizzando la successione delle differenze finite prime degli spazi, cioè la differenza tra lo spazio s_{n+1} percorso nel tempo t_{n+1} e lo spazio s_n percorso nel tempo t_n si può calcolare la velocità media in ogni intervallo di tempo. Essa è 3 m/s, 5 m/s, 7 m/s…;
- la velocità aumenta in modo regolare;
- le differenze finite seconde[15] degli spazi permettono di osservare che l'accelerazione è costante.[16]

A seconda della strumentazione associata alla rotaia, l'esperimento può essere condotto in una delle due modalità seguenti o in entrambi i modi: a intervalli di tempo costante, oppure a spazi costanti. Durante gli esperimenti i dati vengono riportati in tabelle, se necessario con il supporto del docente.

Fase 3: grafici

In questa fase i dati precedentemente riportati in tabella vengono utilizzati per rappresentarne i grafici spazio-tempo. Si analizzano le differenze finite con la proporzionalità diretta e se ne esaminano le caratteristiche sia dal punto di vista numerico sia dal punto di vista grafico.

---

[15] Per differenze finite seconde degli spazi si intendono le differenze finite prime delle differenze finite prime degli spazi.

[16] Nota per il docente: se si utilizzano i dati raccolti sperimentalmente, questi sono soggetti a errori e le relazioni qui descritte non sempre sono così regolari, diverso è il caso in cui si utilizzano i dati dell'applet appositamente creata.

Fase 4: individuazione della legge quadratica

Si prevede di utilizzare alcuni facilitatori per condurre gli studenti e le studentesse alla legge quadratica, in particolare:

- il video dell'esperimento di Galileo: https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html
- l'esperimento virtuale con applet di GeoGebra (si veda il website dedicato: https://sites.google.com/site/realworldcalculus/activities/galileo-experiemnt);
- il calcolo dei rapporti s/t e s/t^2.

Fase 5: variazione dei parametri

In questa fase si propone di variare alcuni parametri, in particolare l'angolo di inclinazione del piano. L'attività prevede prima di raccogliere le ipotesi dagli studenti e delle studentesse con domande simili a: "Cosa succede se inclino maggiormente il piano? E se lo inclino di 30°?". Le ipotesi saranno poi validate con la fase sperimentale. Lo scopo è verificare la costanza del rapporto s/t^2.

Fase 6: eventuale approfondimento

Si chiede agli studenti e alle studentesse di ipotizzare quale relazione esista tra la costante di proporzionalità e l'angolo di inclinazione. Anche in questo caso le ipotesi di relazione saranno descritte attraverso il linguaggio naturale, il registro grafico (grafico sperimentale) ed eventualmente quello algebrico.

Microprogettazione

In questo paragrafo vi raccontiamo come i docenti hanno declinato la loro macroprogettazione pensando nello specifico agli studenti e alle studentesse della loro classe.

Si osservi come la microprogettazione segua, in sequenza, le fasi previste dalla macroprogettazione.

Prima sperimentazione

- Presentazione del metodo di lavoro e degli strumenti a disposizione in laboratorio di fisica. Agli studenti e alle studentesse si chiede di immaginare cosa succederà al carrellino in moto lungo la rotaia orizzontale e dunque di rispondere ad alcune domande preliminari raccolte in un questionario. [Tempo previsto: 1 ora].
- Moto rettilineo uniforme con la rotaia: raccolta dei dati (tempo e spazio percorso). Per non influenzare in alcun modo le previsioni e le scoperte degli allievi e delle allieve non si esplicita loro il tipo di moto. Dopo aver visto in moto il carrellino, si chiede loro di riflettere sulle congetture avanzate nella fase precedente, allo scopo di confermarle o di metterle in discussione e, in tal caso, di produrne di nuove; al termine dell'esperimento, tutte le ipotesi avanzate vengono confrontate con i dati raccolti

e può essere attivata una discussione orchestrata dall'insegnante [Tempo previsto: 1 ora].

- Produzione del grafico spazio-tempo con i dati sperimentali raccolti. L'obiettivo di questa fase è far scoprire agli studenti e alle studentesse che esiste una relazione lineare tra il tempo trascorso e lo spazio percorso, ipotesi supportata anche dalle esperienze personali (non necessariamente scolastiche) dei singoli. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. In effetti, la classe ha reagito secondo le mie aspettative, ma quale retta costruire? Come fare con i dati sperimentali? Con gli studenti e le studentesse si sceglie l'origine degli assi come il punto che coincide con P_1= (T_1, S_1), cioè l'ascissa dell'origine rappresenta il tempo in cui il cronometro inizia a misurare il passaggio del carrellino davanti al primo sensore S_1, e la sua ordinata rappresenta la posizione di S_1. Si rappresenta poi il punto P_2= (T_2, S_2) e si trova graficamente la retta P_1P_2 che rappresenterà l'andamento teorico del nostro moto. Ovviamente i dati sperimentali non sono perfettamente allineati, sarà quindi possibili confrontare i valori reali con quello dei dati teorici.

- Moto uniformemente accelerato. Prima di sperimentare, si chiede agli studenti e alle studentesse di immaginare cosa accadrà al carrellino una volta inclinata la rotaia di un angolo specifico sollevandone un'estremità. Durante l'esperimento si raccolgono i dati (tempo e spazio percorso) con la rotaia inclinata di due angoli di ampiezza differente. [Tempo previsto: 2 ore].

Osservazioni dal diario di bordo. I dati sperimentali raccolti hanno evidenziato un'anomalia, probabilmente a causa di un malfunzionamento della strumentazione. Per questo motivo ho deciso di sospendere la raccolta dei dati sperimentali, per far lavorare gli studenti e le studentesse con dati "puliti" offerti da simulazioni, come quelli dell'applet GeoGebra[17]. Questa anomalia può diventare occasione di apprendimento se, dopo aver conquistato la legge quadratica, si chiede agli studenti di interpretare questa anomalia, cioè di produrre congetture per trovare la causa dell'anomalia.

- Visione del video[18] dedicato al moto sul piano inclinato, con attenzione alla relazione spazio-tempo che viene enunciata. Per agevolare le riflessioni e i chiarimenti su quanto offerto dal video si pone la domanda: cosa vuol dire che il rapporto tra gli spazi è uguale al rapporto tra i quadrati dei tempi?
  La risposta può essere agevolata con l'utilizzo dell'applet GeoGebra e con alcune domande guida: cosa osservate nella simulazione del moto lungo il piano inclinato se l'angolo è di 24° oppure di 16°? Cosa osservate dalla raccolta tabellare dei dati offerti dal software?

[17] https://sites.google.com/site/realworldcalculus/activities/galileo-experiemnt
[18] https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html

Agli studenti e alle studentesse si chiede di produrre un grafico spazio-tempo per un determinato valore dell'angolo di inclinazione (per esempio 24°), di determinare la costante di proporzionalità del rapporto tra spazio e tempo al quadrato e di congetturare se e come varia lo spazio percorso dalla pallina al variare dell'angolo di inclinazione del piano. [Tempo previsto: 2 ore].

- Discussione di classe su ulteriori chiarimenti sul video e verifica delle congetture avanzate. [Tempo previsto: 1 ora].

Seconda sperimentazione

- Realizzazione dell'esperimento di rotolamento di un oggetto lungo un banco di scuola mantenuto leggermente inclinato. Gli studenti e le studentesse lavoreranno a coppie: si chiede loro di fissare sul banco una striscia di carta quadrettata e di far rotolare vari oggetti lungo il banco registrando la caduta con lo smartphone. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. L'esperimento è stato ripetuto più volte in quanto si voleva fare in modo che l'oggetto rotolasse più vicino possibile e parallelamente alla striscia quadrettata. Inoltre, dopo i primi tentativi, gli allievi e le allieve hanno diminuito l'inclinazione del banco per rallentare la caduta. Questa prova è stata importante per l'analisi successiva.

- Lavoro a casa: con un'applicazione sullo smartphone di video editing gli studenti e le studentesse registrano la posizione degli oggetti ogni 0,5 secondi, compilano una tabella su un foglio di calcolo con la posizione e il tempo e rappresentano i dati in un grafico spazio-tempo. [Tempo previsto: 2 ore].

Osservazioni dal diario di bordo. L'utilizzo del cellulare durante la lezione ha rafforzato molto il ragionamento covariazionale.
Gli studenti e le studentesse si sono resi conto che avanzando con intervalli di tempo uguali nel filmato il corpo (la pallina) percorreva spazi sempre maggiori.

- Discussione in classe. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. In questa seconda fase sono stati esaminati a lezione e commentati da parte degli alunni, i risultati ottenuti. Alcune osservazioni degli studenti hanno spostato il focus della discussione sul comportamento della velocità al variare del tempo. Uno studente ha avanzato l'ipotesi che la velocità fosse direttamente proporzionale al tempo in quanto "all'aumentare del tempo aumentava la velocità". Volutamente non ho commentato l'osservazione, ma alcuni studenti sono intervenuti sottolineando invece le caratteristiche da dimostrare per la diretta proporzionalità. Ho assegnato dunque come compito per la lezione successiva la verifica della diretta proporzionalità fra v e t.

- Discussione in classe sulle relazioni tra tempo trascorso, spazio percorso e inclinazione del piano. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. Viste le congetture sulla proporzionalità diretta tra tempo e velocità e il relativo compito a casa da me assegnato, in questa lezione abbiamo discusso i lavori degli studenti: hanno confermato la relazione di diretta proporzionalità fra v e t, rafforzata da un ottimo coefficiente di correlazione lineare. Per cui facilmente hanno scritto la relazione $v = k \cdot t$. A questo punto ho ritenuto opportuno introdurre l'accelerazione (fornendo anche una sua definizione) e chiedere se l'accelerazione fosse la stessa per tutti i casi visti nell'esperimento; gli studenti hanno immediatamente osservato che fosse maggiore per pendenze maggiori perché "dopo uno stesso tempo raggiungeva una velocità maggiore".

La riflessione si è dunque spostata sulla relazione fra s e t. Ho chiesto loro di calcolare i rapporti fra s e t^2 (era chiaro già dalla seconda lezione per loro che non fosse dipendenza lineare). Dopo aver verificato che fosse costante hanno subito suggerito $s/t^2 = k$, dunque, $s = k \cdot t^2$. Un'ulteriore riflessione si è avviata sull'esperimento di Galileo.

Terza sperimentazione

L'attività, svolta in piccoli gruppi, è stata suddivisa in 4 momenti.

- Lezione dialogata per ricordare con gli studenti e con le studentesse quanto visto nella sperimentazione precedente sul moto rettilineo uniforme. [Tempo previsto: ½ ora].
- Attività in laboratorio: esperimento con il moto rettilineo uniformemente accelerato ottenuto collegando differenti pesi al carrello sulla rotaia ad aria compressa. Agli studenti e alle studentesse si chiede di raccogliere i dati con il supporto del docente. [Tempo previsto: 1 ora e ½].
- Analisi dei dati raccolti tramite foglio di calcolo per valutare la variazione della velocità in funzione del tempo. [Tempo previsto: ½ ora].

Osservazioni dal diario di bordo. L'utilizzo del foglio di calcolo (nello specifico Excel) ha consentito di concentrare l'attenzione sull'analisi dei dati lasciando allo strumento il calcolo delle incertezze e dei vari valori medi. Inoltre, ha semplificato la rappresentazione grafica dei risultati.

- Ricerca della legge oraria (lo spazio in funzione del tempo) del moto rettilineo uniformemente accelerato. Descrizione della legge attraverso il linguaggio naturale, il registro grafico e quello algebrico. [Tempo previsto: 1 ora].

Osservazioni dal diario di bordo. Rispetto alla sperimentazione precedente, relativa al moto rettilineo uniforme, è stato abbastanza semplice per i ragazzi cogliere la covariazione tra la velocità e il tempo, più difficile comprendere il passaggio da questa a quella dello spazio-tempo. Il passaggio al formalismo della legge non è stato completamente compreso.

Suggerimenti per la valutazione formativa

In attività laboratoriali simili a questa la valutazione deve essere principalmente di tipo formativo: lo studente non deve sentirsi giudicato e deve essere libero di poter esprimere idee, pensieri, congetture, domande, dubbi…

Durante le sperimentazioni il docente può osservare il lavoro degli studenti e delle studentesse, il loro impegno e il progresso nel percorso di apprendimento prestando attenzione al loro atteggiamento durante l'attività, alla realizzazione di tabelle e/o grafici per raccogliere e interpretare i dati e eventuali interventi puntuali durante la discussione in classe.

Volendo, al termine dell'attività, è possibile richiedere una produzione scritta. Un esempio di consegna potrebbe essere il seguente:

> Ripensando al lavoro svolto sul piano inclinato, scrivi ai compagni di un'altra classe per raccontare il lavoro stesso e nello specifico la relazione che descrive e spiega matematicamente il moto della pallina lungo il piano inclinato. Lo scritto deve servire, per te e per i compagni che leggono, anche come supporto teorico per lo studio.

Uno sguardo covariazionale alle progettazioni

Dal diario di bordo riportiamo alcuni commenti sulle sperimentazioni, focalizzati in particolare sull'approccio didattico e sui ragionamenti covariazionali emersi.

Osservazioni dal diario di bordo. Sono convinto che l'attività abbia funzionato in pieno nel comprendere le diverse relazioni funzionali fra le variabili interessate, così come il ruolo dei parametri e la loro dipendenza dalle condizioni sperimentali (l'accelerazione). Un piccolo rammarico è stato quello di andare troppo veloci sull'esperimento di Galileo e temo che quest'ultimo non sia stato colto pienamente.

Osservazioni dal diario di bordo. Solitamente introduco il moto dal punto di vista teorico e poi completo con l'attività laboratoriale. Quindi ho indubbiamente innovato rispetto alle pratiche abituali e ritengo che tale modalità sia stata più efficace.

Osservazioni dal diario di bordo. Si sono notate alcune criticità nel ragionamento covariazionale quando gli allievi e le allieve hanno spiegato la differenza negli esperimenti con pendenza diversa del piano: "laddove la pendenza era maggiore l'oggetto scendeva più velocemente".

Osservazioni dal diario di bordo. Alcuni ragionamenti covariazionali:

Giovanna[19]: “La velocità non è costante perché nel grafico spazio-tempo aumenta la pendenza (accompagna la frase con un gesto con il dito a descrivere la parabola)”;

Riccardo: “All’aumentare del tempo, la velocità aumenta”;

Giorgia: “Se dopo un intervallo di tempo il corpo ha percorso un certo spazio, dopo un identico intervallo di tempo successivo ne ha percorso molto di più di prima”.

[19] I nomi utilizzati sono di pura invenzione.

Capitolo 6

Conclusione

Giunti alla conclusione del volume, il lettore avrà notato l'importanza dei processi covariazionali per l'apprendimento in matematica e nelle discipline STEM in generale. Al tempo stesso si sarà reso conto della complessità di tale ragionamento, che non si può sviluppare in un'unica sperimentazione limitata nel tempo, ma richiede attività costanti nel percorso didattico.

Proprio per questo durante il corso è stato esposto come si può introdurre il ragionamento covariazionale già nella scuola primaria e, attraverso esempi pratici, si è proposto un percorso in verticale: tutti i tre ordini di scuola sono stati coinvolti in un'ottica di didattica a spirale, in linea con gli studi di Bruner. Ricordiamo infatti che Bruner (1997) propone i concetti di struttura e di curricolo a spirale:

> L'idea cioè che nell'insegnamento di un argomento si debba partire da una spiegazione 'intuitiva' che sia pienamente alla portata dello studente, per poi risalire con moto circolare a una spiegazione più formale o più strutturata finché, con tutti i passaggi che possono risultare necessari, l'allievo abbia capito l'argomento o la materia in tutto il suo potere generativo. [...] E si può dimostrare facilmente entro certi limiti interessanti che una caratterizzazione cosiddetta 'di livello superiore' di un campo della conoscenza comprende, sostituisce e rende più potente e precisa una caratterizzazione 'di livello inferiore' (p. 133).

Ecco, dunque, che il movimento a spirale permette di comprendere le idee di base connesse alle varie discipline e permette di insegnare qualsiasi problematica a chiunque in ogni età, purché si adegui il materiale da insegnare alla modalità di rappresentazione di chi apprende.

Nel nostro caso, il tema della covariazione è ripreso da punti di vista differenti e lentamente si consolida. Tutte le sperimentazioni partono da contesti reali favorendo la manipolazione di strumenti fino a introdurre gradualmente l'astrazione matematica. Il docente ha il delicato compito di guidare il processo verso l'astrazione supportando inizialmente il legame tra il contesto reale e le rappresentazioni matematiche del fenomeno e chiedendo agli allievi e alle allieve di ragionare direttamente sul modello matematico solo dopo un lungo processo di interiorizzazione.

Il corso di formazione è stata una preziosa possibilità di crescita per tutti gli attori coinvolti. I docenti, attraverso, attraverso la partecipazione attiva al corso di formazione, hanno mantenuto vivo il confronto tra il mondo della ricerca e quello della scuola, contribuendo così alla crescita professionale di tutti: è proprio attraverso questa modalità di scambio di conoscenze, idee ed esperienze che diventa possibile attivare un continuo processo di miglioramento nella didattica della matematica.

Bibliografia

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 167–192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (Eds.) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario)*. Matteoni stampatore.

Arzarello, F. (2017). Analyse des processus d'apprentissage en mathématiques avec des outils sémiotiques: la covariation instrumentée, In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017*, 6–25

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 14. Número 18, 11–29.

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M., & Bazzini, L. (2013). Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni. *La matematica nella società e nella cultura, 6*, 81–95.

Assessment Reform Group (1999). *Assessment for learning: Beyond the black box*. University of Cambridge School of Education.

Bagossi, S. (2022). *Second-order covariation: an analysis of students' reasonings and teacher's interventions when modelling real phenomena*. Tesi di dottorato, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia in convenzione con Università degli Studi di Ferrara e Università degli Studi di Parma.

Balzaretti, N., & Vannini, I. (2018). Promuovere la qualità della didattica universitaria. La Formative Educational Evaluation in uno studio pilota dell'Ateneo bolognese. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies (ECPS Journal)*, 18, 187–213.

Bartolini Bussi, M.G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics,* 31, 11–41. https://doi.org/10.1007/BF00143925

Basu, D., & Panorkou, N. (2019). Integrating covariational reasoning and technology into the teaching and learning of the greenhouse effect. *Journal of Mathematics Education*, *12*(1), 6–23. https://doi.org/10.26711/007577152790035

Bennett, R. E. (2011). Formative assessment: A critical review. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practices*, *18*(1), 5–25. https://doi.org/10.1080/0969594X.2010.513678

Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2016). *Matematica.blu 1*, Seconda edizione, Zanichelli.

Bertinetto, C., Metiäinen, A., Paasonen, J., & Voutilainen, E. (2019). *Contaci! Volume 1*. Zanichelli.

Black, P. J., & Wiliam, D. (1998a). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, *5*(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Black, P. J., & Wiliam, D. (1998b). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappa*, *80*(2), 139–148.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. The notion of parameter. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, 177–189. Kluwer Academic Publishers.

Bolondi, G. (2006). Metodologia e didattica: il laboratorio, *Rassegna, Periodico dell'Istituto pedagogico italiano*, anno XIV, pp. 59–63. Scaricabile da: http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/bolondi.PDF

Bruner, J. (1997). *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola.* Feltrinelli.

Buzzati, D. (2014). *I sette messaggeri.* Edizioni Mondadori.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Vol. Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 3, CBMS issues in mathematics education*. Vol. 7, (pp. 114–162). Mathematical Association of America.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Ciani, A., Pasolini, E., & Vannini, I. (2021). Il formative assessment nelle convinzioni e nelle pratiche degli insegnanti. Analisi secondarie da una indagine sui docenti di scuola media di due regioni italiane. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies (ECPS Journal)*, 24, 45–65.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning mathematics* (pp. 31–60). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_2

Ellis, A. B., Özgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ferretti, F., Michael-Chrysanthou, P., & Vannini, I. (2018). *Formative assessment for mathematics teaching and learning: Teacher professional development research by videoanalysis methodologies*. FrancoAngeli. Scaricabile da: http://library.oapen.org/handle/20.500.12657/25362

Frank, K. M. (2016). Students' conceptualizations and representations of how two quantities change together. In *Proceedings of the 19th meeting of the special interest group for research in undergraduate mathematics education* (pp. 771–779). RUME.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali*. Cierre, Simeoni Arti Grafiche. ISBN 9788895351049.

Gardner, H. (1994). *Educare a comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Feltrinelli.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *16*(2), 36–45. Scaricabile da: http://www.jstor.org/stable/40248203

Hall, R., & Nemirovsky, R. (2012). Introduction to the special issue: Modalities of body engagement in mathematical activity and learning. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2), 207–215. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611447

Hegedus, S. J., & Otálora, Y. (2022). Mathematical strategies and emergence of socially mediated metacognition within a multi-touch Dynamic Geometry Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 1–19. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10170-4

Leahy, S., Lyon, C., Thompson, M., & Wiliam, D. (2005). Classroom assessment: Minute-by-minute and day-by-day. *Educational Leadership*, *63*(3), 18–24.

Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 87–116. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00105-0

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010a). *Indicazioni Nazionali per Licei*. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010b). *Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti tecnici*. http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010c). *Linee guida istituti tecnici, Settore Economico. Secondo biennio e quinto anno*. https://www.gazzettaufficiale.it/do/atto/serie_generale/caricaPdf?cdimg=12A0329000100010110003&dgu=2012-03-30&art.dataPubblicazioneGazzetta=2012-03-30&art.codiceRedazionale=12A03290&art.num=1&art.tiposerie=SG

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione*. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*. Documento a cura del Comitato Scientifico Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/

Nemirovsky, R., Borba, M., Dimattia, C., Arzarello, F., Robutti, O., Schnepp, M., Chazan, D., Rasmussen, C., Olszewski, J., Dost, K., Johnson, J. L., & Scheffer, N. F. (2004). Introduction: PME Special Issue: Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(3), 303–321.

Panorkou, N., & Germia, E. F. (2021). Integrating math and science content through covariational reasoning: the case of gravity. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(4), 318–343. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1814977

Perissinotto, A. (2020). *Raccontare. Strategie e tecniche di storytelling*. Editori Laterza.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique. Tome I: La pensée mathématique*. Presses universitaires de France.

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Mondadori Università.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S. B. & Coulombe, W. N. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education –* North America Vol 1, North Carolina State University, 298–304.

Sbaragli, S. (2010). Qui cade sua… altezza. *La Vita Scolastica. 18*, 25-27.

Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 192–210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.002

Steiner, R. (1997). *The Roots of Education*. Anthroposophic Press.

Swidan, O., Bagossi, S., Beltramino, S., & Arzarello, F. (2022). Adaptive instruction strategies to foster covariational reasoning in a digitally rich environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100961. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100961

Swidan, O., Sabena, C., & Arzarello, F. (2020). Disclosure of mathematical relationships with a digital tool: a three layer-model of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(1), 83–101. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09926-2

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(3), 165–208. https://doi.org/10.1007/BF01273861

Thompson, P. W. (1994a). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181–234). SUNY Press.

Thompson, P. W. (1994b). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Vol. Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 1, issues in mathematics education*. Vol. 4, (pp. 21–44). American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In S. Chamberlin, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for* *collaborative research in mathematics education: Papers from a planning conference for WISDOM^e*. University of Wyoming.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning…. In *Vital directions for mathematics education research* (pp. 57–93). Springer.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, 421–456.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 415–432. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8

Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 95–111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95–114). National Council of Teachers of Mathematics.

Topping, K. J. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research, 68*(3), 249–276.

Vannini, I. (2017). *Definizione di valutazione formativa*. Formative Assessment for Mathematics Teaching and Learning. http://www.famt-l.eu/it/definition-of-formative-assessment/

Vannini, I. (2019). Valutare per apprendere e progettare. In E. Nigris, B. Balconi, & L. Zecca (Eds.), *Dalla progettazione alla valutazione didattica* (pp. 250–276), Pearson.

Vertecchi, B. (1976). *Valutazione formativa*. Loescher.

Wilkie, K. J. (2020). Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 315–336. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09955-6

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35*(2), 107–126.

Ringraziamenti

Siamo giunte al termine dell'avventura nello scrivere il nostro primo volume, nato da un'idea che aleggiava durante il corso ma che non sarebbe stato prodotto senza il sostegno, il supporto, i preziosi suggerimenti nonché le stimolanti idee del professor *Ferdinando Arzarello*. Senza di lui nulla di quello che è stato scritto, pensato e prodotto si sarebbe concretizzato.
A lui, inoltre, riconosciamo il merito di aver dato il via al MaT&L Research Group, mettendo in contatto i docenti universitari, i ricercatori e gli insegnanti che afferiscono al gruppo: grazie per averci incoraggiato in questa iniziativa, per averci accompagnato nella realizzazione del corso collaborando con noi e grazie, sin da ora, per la tua incondizionata disponibilità: sappiamo di poter contare sulla tua guida anche nelle iniziative future. Ultimo, ma non meno importante, grazie per averci trasmesso la tua passione per la didattica della matematica e il coraggio di pensare in grande.

Ringraziamo ancora una volta tutti i *docenti del corso* per aver mantenuto vivo il confronto e lo spirito di ricerca con cui è nata l'iniziativa.

Grazie anche a chi ci ha accompagnato in questo progetto regalandoci parte del proprio tempo. In particolare, grazie a *Giulia Lisarelli*, ricercatrice presso l'Università di Pisa, che è intervenuta durante il corso, e ai revisori di questo volume. Grazie, quindi, all'ispettrice scolastica *Silvana Mosca* e ai professori *Fabio Brunelli* e *Luigi Tomasi*: la loro competenza e i loro suggerimenti sono stati preziosi per la stesura finale di questo volume.