UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO

SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

Dottorato di Ricerca in Matematica Pura e Applicata

XXXV ciclo

GINO FANO (1871-1952):
PATRIMONIO, RICERCA E INSEGNAMENTO

Elena Scalambro

Tutor: Prof.ssa Erika Luciano
SSD: MAT/04 – Matematiche Complementari
Coordinatore del Dottorato: Prof.ssa Anna Fino

INDICE

Sigle e abbreviazioni

§	paragrafo/i
ACS	Archivio Centrale dello Stato, Roma
AFAS	Association Française pour l'Avancement des Sciences
AMS	American Mathematical Society
ANL	Accademia Nazionale dei Lincei, Roma
Archivio Acc. XL	Archivio dell'Accademia nazionale delle scienze detta dei XL, Roma
ASANL	Archivio Storico dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma
ASI	Actualités Scientifiques et Industrielles
ASUPd	Archivio Storico dell'Università di Padova
ASUPi	Archivio Storico dell'Università di Pisa
ASUT	Archivio Storico dell'Università di Torino
BCMC	Biblioteca "A. Bassi" dell'Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo
BIMF	Biblioteca dell'Istituto Matematico "U. Dini", Università degli Studi di Firenze
BIMR	Biblioteca dell'Istituto Matematico "G. Castelnuovo", Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
BSMFGP	Biblioteca di Scienze Matematiche, Fisiche e Geologiche dell'Università di Perugia
BSMT	Biblioteca Speciale di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino
BSP	Beniamino Segre Papers, Caltech
BUNIL	Bibliothèque de l'Universitè de Lausanne
c.	carta/e
CA	Caltech Archives
ChUP	Chicago University Press
CMFA	Comitato di Matematica, Fisica e Astronomia del CNR
CNR	Comitato Nazionale delle Ricerche
CSSUT	Centro Studi di Storia dell'Università di Torino
CUP	Cambridge University Press
DMV	Deutschen Mathematiker-Vereinigung
DSSP	Deputazione Subalpina di Storia Patria
EMW	Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften
ENS	École Normale Supérieure, Paris
ESM	Encyclopédie des sciences mathématiques
fasc.	fascicolo
FBo	Fondo Enrico Bompiani, Roma
FCo	Fondo Conforto, Il Giardino di Archimede – Firenze
FdR	Fondo Georges de Rham, Losanna
FFa	Fondo Gino Fano, Torino
FLC	Fondo Tullio Levi-Civita, Roma
FMo	Fondo Domenico Montesano, Firenze
FNF	Facoltà Nazionale di Filosofia, Rio de Janeiro
FSe	Fondo Corrado Segre, Torino
FTe	Fondo Alessandro Terracini, Torino
FVo	Fondo Vito Volterra, Roma
Geo. Sup.	Geometria superiore
IAS	Institute for Advanced Study, Princeton
INAC	Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo
INDAM	Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi", Roma
IUP	Indiana University Press
KAW	Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam
lett.	Lettera
LMS	London Mathematical Society
LNM	Lecture Notes in Mathematics
MFN	Matematiche, Fisiche, Naturali
n./nn.	numero/i
OUP	Oxford University Press

p./pp.	pagina/e
PI	Pubblica Istruzione
PUP	Princeton University Press
PUV	Presses universitaires de France
Quad.	Quaderno
RSL	Royal Society of London
[s.d.]	senza data
[s.e.]	senza editore
SIPS	Società Italiana per il Progresso delle Scienze
[s.l.]	senza luogo
SMF	Société Mathématique de France
SNS	Scuola Normale Superiore, Pisa
[s.t.]	senza titolo
UMI	Unione Matematica Italiana
vol./vols.	volume/i

Per le riviste, sono state adottate le seguenti abbreviazioni.

«Abh. Berl. Ak.»	Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin
«Abh. Nat. Ges. Halle»	Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle
«Abh. Prag Math. Ges.»	Abhandlungen der K. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag
«Abh. Säch. Ges. Wiss. Leipzig»	Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig
«Acta Math.»	Acta Mathematica
«Amer. Math. Monthly»	The American Mathematical Monthly
«American Journ.»	American Journal of Mathematics
«Ann. Ac. Sci. Fennica»	Annales Academiae Scientiarum Fennicae
«Ann. ENS Paris»	Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris
«Ann. Mat.»	Annali di Matematica pura ed applicata
«Ann. SNS Pisa»	Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze
«Ann. Soc. Sci. Bruxelles»	Annales de la Société Scientifique de Bruxelles
«Ann. Toulouse»	Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse
«Ann. Univ. Lyon»	Annales de l'Université de Lyon
«Annals of Math.»	Annals of Mathematics
«Annuario UTo»	Annuario della R. Università di Torino
«Arch. Int. Hist. Sci.»	Archives Internationales d'Histoire des Sciences
«Arch. Math. Phys.»	Archiv der Mathematik und Physik
«Arch. néerl. Sci.»	Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles
«Arch. Sci. phys. nat.»	Archives des sciences physiques et naturelles
«Atti Acc. Gioenia»	Atti della Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania
«Atti Acc. Pontificia»	Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei
«Atti Acc. Sci. Napoli»	Atti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli
«Atti e Mem. Acc. Sci. Modena»	Atti e Memorie dell'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Modena
«Atti e Mem. Acc. Sci. Padova»	Atti e Memorie dell'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Padova
«Atti e Mem. Acc. Virgil.»	Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale Virgiliana di Scienze Lettere e Arti
«Atti R. Acc. d'Italia»	Atti della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze MFN
«Atti R. Acc. Peroritana»	Atti della R. Accademia Peloritana
«Atti R. Acc. Sci. Torino»	Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino
«Atti R. Ist. Veneto»	Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti
«Atti Soc. ing. e ind. Torino»	Atti della Società degli ingegneri e degli industriali di Torino
«Atti Soc. Modena»	Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena
«Ber. Säch. Ges. Wiss. Leipzig»	Berichten der Mathematisch-Physischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig

«Bibl. Math.»	Bibliotheca Mathematica
«Boll. Acc. Gioenia»	Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania
«Boll. Mat.»	Bollettino di Matematica (Conti)
«Boll. Mathesis»	Bollettino della Mathesis
«Boll. R. Acc. Peroritana»	Bollettino della R. Accademia Peloritana
«Boll. Soc. Geog. It.»	Bollettino della Società Geografica Italiana
«Boll. UMI»	Bollettino dell’Unione Matematica Italiana
«Boncompagni Bull.»	Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Boncompagni)
«Bull. Ac. Belgique»	Bulletin de la Classe des sciences, Académie royale de Belgique
«Bull. Ac. Danemark»	Bulletin de l'Académie du Danemark
«Bull. Ac. Roumaine»	Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine
«Bull. Ac. Sci. Cracovie»	Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie
«Bull. AMS»	Bulletin of the American Mathematical Society
«Bull. Calcutta Math. Soc.»	Bulletin of the Calcutta Mathematical Society
«Bull. LMS»	Bulletin of the London Mathematical Society
«Bull. NYMS»	Bulletin of the New York Mathematical Society
«Bull. Sciences Math.»	Bulletin des Sciences Mathématiques
«Bull. SMF»	Bulletin de la Société Mathématique de France
«Bull. Soc. Liège»	Bulletin de la Société royale des sciences de Liège
«Bull. Soc. Philomatique»	Bulletin de la Société Philomatique
«C. R. Ac. Sci. Paris»	Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris
«C. R. Ac. Sci. Roumanie»	Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Roumanie
«C. R. SMF»	Compte rendu des séances de la Societé Mathematique de France
«Camb. Dub. Math. Jour.»	Cambridge and Dublin Mathematical Journal
«Comm. Acc. Pontificia»	Commentationes dell’Accademia Pontificia dei nuovi Lincei
«Comm. Math. Helv.»	Commentarii Mathematici Helvetici
«Comm. Phys.-Math. Soc. Sci. Fennica»	Commentationes Physico-Mathematicae, Societas Scientiarum Fennica
«Conf. fis. mat. Torino»	Conferenze di fisica e di matematica. R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino
«Ens. Math.»	L’Enseignement Mathématique
«Esercit. Mat.»	Esercitazioni Matematiche
«Giorn. di Mat.»	Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane (Battaglini)
«Göttingen Abh.»	Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse
«Göttingen Nachr.»	Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
«Hamburg Abh.»	Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität
«Jahr. DMV»	Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
«JFM»	Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
«Jour. AMS»	Journal of the American Mathematical Society
«Jour. Crelle»	Journal für die Reine und Angewandte Mathematik
«Jour. Éc. Polyt.»	Journal de l’École Polytechnique, Paris
«Jour. LMS»	Journal of the London Mathematical Society
«Jour. Math.»	Journal de Mathématiques Pures et Appliquées
«Kansas Bull.»	The Kansas University Science Bulletin
«Loria Boll. Bibl.»	Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche (Loria)
«Math. Ann.»	Mathematische Annalen
«Math. Natur. Ber. Ungarn»	Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn
«Math. URSS Izv.»	Mathematics of the USSR. Izvestiya
«Math. Zeit.»	Mathematische Zeitschrift
«Mathesis, Rec. math.»	Mathesis, Recueil mathématique a l'usage des écoles spéciales et des étabilissements d'instrucition moyenne
«Mém. Ac. Belgique»	Mémoires de la Classe des sciences, Académie royale de Belgique
«Mém. Ac. Danemark»	Mémoires de l'Académie du Danemark

«Mém. Ac. Sci. Paris»	Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de Paris
«Mém. Ac. Sci. St.-Pétersbourg»	Mémoires de l’Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg
«Mem. Acc. Sci. Napoli»	Memorie dell’Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli
«Mem. ANL»	Memorie dell’Accademia Nazionale dei Lincei
«Mem. Cambridge»	Memoirs of the Cambridge Philosophical Society
«Mem. Kyoto»	The Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University
«Mem. R. Ac. Sci. Bologna»	Memorie della R. Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna, Classe di Scienze Fisiche
«Mem. R. Acc. d’Italia»	Memorie della Reale Accademia d’Italia, Classe di Scienze MFN
«Mem. R. Acc. Sci. Torino»	Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino
«Mem. R. Acc. Zelanti»	Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Zelanti di Acireale, Classe di Scienze
«Mem. R. Ist. Lomb.»	Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere
«Mém. Sav. Etr.»	Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers
«Mém. Soc. Bordeaux»	Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux
«Mem. Soc. it.»	Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle Scienze, detta dei XL
«Mém. Soc. Liège»	Mémoires de la Société royale des sciences de Liège
«Mém. Toulouse»	Mémoires de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques
«Mess. of Math.»	Messenger of Mathematics
«Mitt. Math. Ges. Hamburg»	Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg
«Mitt. Math. Ges. Prag»	Mittheilungen der Deutschen Mathematischen Gesellschaft in Prag
«Mitt. Math. Sem. Gießen»	Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Gießen
«Mitt. Natur. Ges. Bern»	Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern
«Monat. Math. Phys.»	Monatshefte für Mathematik und Physik
«Monatsber. Berl. Ak.»	Monatsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
«Nieuw Arch.»	Nieuw Archief Voor Wiskunde
«Note e Mem. di mat.»	Note e Memorie di matematica
«Nouv. Ann.»	Nouvelles Annales de Mathématiques
«Nova Acta»	Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum
«Period. Mat.»	Periodico di Matematiche
«Phil. Mag.»	Philosophical Magazine
«Phil. Trans. RSL»	Philosophical Transactions of the Royal Society of London
«Proc. AAAS»	Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences
«Proc. Cambridge»	Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
«Proc. Edinburgh Math. Soc.»	Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society
«Proc. LMS»	Proceedings of the London Mathematical Society
«Proc. Nat. Acad. USA»	Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America
«Proc. R. Irish Ac.»	Proceedings of the Royal Irish Academy
«Proc. R. Soc. Edinburgh»	Proceedings of the Royal Society of Edinburgh
«Proc. RSL»	Proceedings of the Royal Society of London
«Publ. Univ. Massaryk»	Spisy vydávané Přírodovědeckou fakultou Masarykovy university. Publications de la Faculté des sciences de l’Université Masaryk
«QSUT»	Quaderni di Storia dell’Università di Torino
«Quart. Journ.»	Quarterly Journal of Mathematics
«Rass. Mat. Fis.»	Rassegna di Matematica e Fisica
«RdM»	Rivista di Matematica, Revue de Mathématiques (Peano)
«Rend. Acc. Sci. Napoli»	Rendiconto dell’Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (sezione della società reale di Napoli)
«Rend. ANL»	Rendiconti dell’Accademia Nazionale dei Lincei
«Rend. Circ. Mat. Palermo»	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
«Rend. Mat. e Appl.»	Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni

«Rend. R. Ac. Sci. Bologna»	Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna, Classe di Scienze Fisiche
«Rend. R. Ist. Lomb.»	Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere
«Rend. Sem. Fac. Sci. Cagliari»	Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell’Università di Cagliari
«Rend. Sem. Mat. Fis. Milano»	Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano
«Rend. Sem. Mat. Padova»	Rendiconti del Seminario Matematico dell’Università di Padova
«Rend. Sem. Mat. Roma»	Rendiconti del Seminario Matematico dell’Università di Roma
«Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino»	Rendiconti del Seminario Matematico dell’Università e del Politecnico di Torino
«Revista MFT»	Revista de Matematicas y Fisica Teorica
«RSUT»	Rivista di Storia dell’Università di Torino
«Scientia»	Scientia: rivista internazionale di sintesi scientifica
«Sitz. Berl. Math. Ges.»	Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft
«Sitz. Heidelberg Ak. Wiss.»	Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse
«Sitz. München Bayer. Ak.»	Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse
«Sitz. Phys.-Med. Soc. Erlangen»	Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät zu Erlangen
«Sitz. Prag Math. Ges.»	Sitzungsberichte der K. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag
«Sitz. Wien Ak. Wiss.»	Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematische-naturwissenchaftliche Klasse
«Teixeira Jorn.»	Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronômicas (Teixeira)
«Tôhoku Math. Jour.»	The Tôhoku Mathematical Journal
«Tôhoku Sci. Rep.»	The Science Reports of the Tôhoku Imperial University
«Trans. AMS»	Transactions of the American Mathematical Society
«Trans. Cambridge»	Transactions of the Cambridge Philosophical Society
«Trans. R. Irish Ac.»	Transactions of the Royal Irish Academy
«Trans. R. Soc. Edinburgh»	Transactions of the Royal Society of Edinburgh
«Tübinger Natur. Abh.»	Tübinger Naturwissenschaftliche Abhandlungen
«Verh. KAW Amsterdam»	Verhandelingen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam
«Zeit. Math. Natur. Unterr.»	Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht
«Zeit. Math. Phys.»	Zeitschrift für Mathematik und Physik

Introduzione

Mentre le traiettorie scientifico-professionali dei principali geometri della Scuola italiana di geometria algebrica (L. Cremona, C. Segre, G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi, ...), i loro risultati e la cronologia della Scuola sono ormai consolidati in letteratura[1], minori sono i contributi volti a fornire una visione più precisa e approfondita sugli altri membri e a studiare le fonti materiali dell'impresa scientifica di questo gruppo sociale, di primaria importanza per la storia della matematica in Italia.

Il case-study di Gino Fano (1871-1952), oggetto di questa tesi, rappresenta un contributo in entrambe le direzioni.

Da una parte, infatti, nonostante i principali tratti della biografia di Fano fossero noti, diversi erano gli aspetti della sua attività scientifica, didattica e istituzionale ancora da esplorare. Nell'immaginario collettivo, il suo nome è solitamente associato ai contributi sui fondamenti della geometria iperspaziale a n dimensioni e allo studio delle varietà algebriche tridimensionali, ancora oggi note come "Fano threefolds". Se i primi anni della sua traiettoria (la formazione alla Scuola di Segre, l'avviamento alla ricerca a Göttingen con Felix Klein, l'interesse per i fondamenti della geometria, i primi contributi alla teoria dei gruppi continui di trasformazioni, …) sono stati in buona parte presi in considerazione in letteratura – come si vedrà nel CAPITOLO 1 – la fase della maturità scientifica è spesso liquidata come un periodo di relativa tranquillità, segnato dal connubio tra ricerca e insegnamento universitario a Torino, interrotto soltanto dalle nefaste leggi razziali del 1938 che costringeranno Fano a cercare riparo in Svizzera. Poco noti, in particolare, sono gli ultimi trent'anni di attività – dagli anni Venti agli anni Cinquanta – quando gli interessi di Fano si spostano definitivamente verso lo studio della geometria algebrica in dimensione superiore e delle questioni di geometria birazionale ad essa connesse. Per gettar luce su alcune di queste 'zone d'ombra' è parso necessario indagare e approfondire il posizionamento di Fano a livello di contesto locale (l'ambiente accademico torinese nel periodo 1920-1950) e globale (la Scuola geometrica italiana – che entra in questi anni nella fase di declino – e i suoi rapporti con le nascenti tendenze internazionali).

Dall'altra parte, non era stato analizzato nel dettaglio il corposo fondo archivistico di Fano, custodito presso la Biblioteca Speciale di Matematica dell'Università di Torino.

[1] Sulla Scuola italiana di geometria algebrica cfr., *inter alia*, A. BRIGAGLIA – C. CILIBERTO 1995, *Italian Algebraic Geometry Between the Two World Wars*, Kingston, Queen's University; A. CONTE – L. GIACARDI 2016, *Segre's University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry*, in G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry. Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Basel, Birkhäuser, pp 3-91; E. LUCIANO – C.S. ROERO 2016, *Corrado Segre and his disciples: the construction of an international identity for the Italian School of algebraic geometry*, *ivi*, pp. 93-241. Tra i diversi lavori su Cremona, Segre, Castelnuovo, Enriques e Severi cfr. G. ISRAEL (ed.) 2017-19, *Correspondence of Luigi Cremona (1830-1903)*, 2 vols., Turnhout, Brepolis; L. GIACARDI 2001, *Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica*, «Annali di Storia delle Università italiane», pp. 137-160; A. BRIGAGLIA 2013, *Per una biografia scientifica di Corrado Segre*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 6, pp. 415-474; P. GARIO 2016, *Guido Castelnuovo: l'uomo e lo scienziato*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 147-183; E. ROGORA 2016, *Guido Castelnuovo e la matematica a Roma tra Risorgimento e Belle Époque*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 219-233; C. GENNA 2021, *Federigo Enriques matematico e filosofo*, Milano, Angeli; C. CILIBERTO – E. SALLENT DEL COLOMBO 2018, *Francesco Severi: il suo pensiero matematico e politico prima e dopo la Grande Guerra*, pp. 1-30, https://arxiv.org/abs/1807.05769

In particolare, il *corpus* di carte manoscritte che costituisce gli *Appunti vari* (*Scritti. 4*) restava interamente da esaminare e riordinare in maniera più rigorosa.[2] A un accurato studio di tipo codicologico di questi manoscritti, è seguito un primo riordinamento delle carte che ha portato a un tentativo di datazione attendibile e all'individuazione di tre macro-sezioni: le tracce per le lezioni sulla geometria algebrica in Italia che Fano era stato invitato a tenere ad Aberystwyth nel 1923, caratterizzate da una commistione di termini in italiano e in inglese; le minute di alcune conferenze presentate al *Cercle Mathématique* di Losanna nel biennio 1942-44, in francese; gli appunti relativi all'attività di ricerca e ad altre questioni matematiche di cui Fano si è occupato, buona parte dei quali successivamente confluiti in lavori a stampa. Sono poi state selezionate alcune carte manoscritte particolarmente significative in relazione all'attività di Fano nel trentennio considerato. È stata ricostruita la paginazione originale e sono state messe in relazione con le altre sezioni degli *Scritti* del Fondo, con altri gruppi di carte degli *Appunti vari* e con le pubblicazioni su rivista di Fano. Nello specifico, sono stati studiati nel dettaglio i tre seguenti gruppi che costituiscono uno dei punti di partenza del mio lavoro di tesi:

[1] Gli appunti sulle varietà tridimensionali, articolati in due gruppi di carte risalenti a periodi diversi. Il primo (cc. 125-130) è l'introduzione allo studio delle threefolds che Fano avrebbe voluto illustrare ad Aberystwyth nel 1923; il secondo (nell'ordine, cc. 52, 45, 46) rappresenta invece uno studio preliminare per la prima classificazione delle Fano threefolds che egli presenterà al Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna (1928). La loro edizione critica è fornita all'interno dell'APPENDICE A.

[2] Le minute delle prime tre conferenze tenute a Losanna: *Quelques aperçus sur le développement de la Géométrie algébrique en Italie pendant le dernier siècle* (nell'ordine, cc. 53, 61, 55*r*, 55bis-A, 55bis-B, 56-60, 54, 62); *Géométrie sur les surfaces algébriques* (nell'ordine, 47*r*, 43, 48, 42, 44, 49, 50); *Aperçu général sur les surfaces du 3éme ordre* (cc. 36-41). Unitamente agli *Scritti. 1* e *3* del Fondo, intitolati rispettivamente *Les surfaces du 4ème ordre* e *Transformations de contact birationnelles dans le plan*, essi restituiscono una preziosa testimonianza dell'attività di alta divulgazione di Fano, anche durante gli anni dell'esilio (APPENDICE B).

[3] Le tracce di una conferenza in due parti, tenuta presso la sezione torinese della Mathesis nella primavera del 1926, dedicata a un tema particolare: *Analysis situs e geometria algebrica* (cc. 139-142). L'APPENDICE C è dedicata a queste carte.

Il ruolo dei manoscritti quali testimoni privilegiati della nascita di nuove idee è affermato in storiografia.[3] I documenti al punto [1] sono importanti per analizzare l'attività di ricercatore di Fano, andando a rintracciare le origini e l'evoluzione delle sue pionieristiche ricerche sulle

---

[2] Le 142 carte di dimensione 210×310 mm, unitamente ai 12 foglietti di diversa dimensione che costituiscono gli *Appunti vari*, erano state lasciate nell'ordine in cui avevano raggiunto la BSMT alla morte di Fano. Il fascicolo è composto da appunti autografi non datati, redatti in lingua diversa (italiano, inglese e francese), che risalgono a epoche diverse. Una prima paginazione progressiva delle carte, secondo l'ordine in cui erano state conservate, risale al 2000. Non era poi stato affrontato uno studio interno approfondito del manoscritto. Cfr. L. GIACARDI – L. RINALDELLI 2001, *I fondi Fano e Terracini della Biblioteca Speciale di Matematica "G. Peano" di Torino*, «QSUT» 5.4, pp. 381-413. È questa la numerazione delle carte cui faremo riferimento all'interno di questa tesi. Buona parte degli *Scritti* del Fondo Fano è disponibile in L. GIACARDI (ed.) 2013-23, *Corrado Segre e la Scuola Italiana di Geometria Algebrica*, al link https://www.corradosegre.unito.it/fondo_fano_s.php.

[3] Cfr. P.-M. DE BIASI 2003, *Sciences: des archives à la genèse. Pour une contribution de la génétique des textes à l'histoire des sciences*, «Genesis (Manuscrits-Recherche-Invention)» 20, pp. 19-52.

threefolds. Applicato al lavoro di indagine matematica, l'approccio genetico contribuisce a rendere interpretabili i processi di scoperta, studio e rielaborazione scritta scaturiti dall'esigenza di produrre un discorso matematico coerente. In questa prospettiva è concepito il CAPITOLO 2 di questa tesi, in cui si analizza la genesi e lo sviluppo di un oggetto geometrico specifico – le Fano threefolds – tramite successive correzioni, ripensamenti e riadattamenti. Naturalmente lo studio dei manoscritti non può prescindere dal confronto con le opere a stampa: il matematico che giunge alla pubblicazione non può conservare tutto ciò che ha affrontato durante la fase di esplorazione, ma deve operare un'azione di selezione e semplificazione che lo conduce a esporre i risultati nel modo più diretto e coerente possibile. Anche se la sua argomentazione può ripercorrere, a grandi linee, il percorso di indagine, spesso ne conserva solo i momenti salienti, le fasi costruttive e le soluzioni, tralasciando le difficoltà incontrate, i tentativi non andati a buon fine, i momenti di stallo e i problemi rimasti insoluti. Lo studio delle carte di Fano permette di mettere in luce il processo sottostante alla produzione scientifica, al cui interno linguaggio, metodi e strumenti elaborati rivestono un ruolo determinante. Il CAPITOLO 3 è dedicato a uno degli ultimi temi di ricerca di Fano: le Fano-Enriques threefolds. Oltre a essere strettamente correlato alle indagini sulle varietà tridimensionali, questo campo di indagine di Fano non era ancora stato preso in considerazione in prospettiva storica, pur avendo stimolato alcuni studi all'interno della moderna geometria algebrica.

Le carte [2] contribuiscono a documentare un aspetto notevole dell'attività di Fano nel solco della Scuola italiana di geometria algebrica, fino a questo momento inesplorato: la promozione e la valorizzazione all'estero non solo dei risultati dei geometri italiani, ma anche di un peculiare approccio alla ricerca, come emerge nel CAPITOLO 4. Pur avendo un carattere essenzialmente cumulativo, il sapere matematico si inserisce all'interno di uno scenario in continua evoluzione. Nello specifico, il discorso geometrico della prima metà del Novecento conosce la propria relatività, la dipendenza che lo lega al suo ambiente e al suo linguaggio naturale. Fano è consapevole che la rilevanza di un insieme di tecniche e risultati non si afferma di diritto, ma di fatto: si impone solo sollecitando il riconoscimento e il consenso da parte di una comunità il più ampia possibile. Tramite la divulgazione, Fano rivendica un posto – nella storia e nel panorama di ricerca internazionale – per la geometria algebrica italiana.

Il ritrovamento delle carte [3] ha portato ad approfondire un tratto della biografia di Fano in larga parte sconosciuto: il suo impegno nel contesto dell'educazione matematica, su cui è incentrato il CAPITOLO 5. Il tema dell'intervento di Fano alla Mathesis, congiuntamente al confronto con alcune parti del suo corso di Geometria Superiore dell'a.a. 1924-25, conduce anche a riflettere sulla considerazione della topologia da parte dei geometri italiani. Significativo in quest'ottica è il paragone con Achille Bassi, assistente di Fano a Torino dal 1933 al 1937 e figura del tutto inesplorata, cui è dedicato il CAPITOLO 6.

Per uno studio storico completo e coerente, bisogna tener presente la fase che precede e che è al contempo complementare alla stesura di un lavoro scientifico, sia esso in uno stadio preliminare (ad esempio, nella veste di appunti manoscritti) o nella sua versione editoriale. Questa, infatti, pur rappresentando il momento essenziale nella formulazione dei risultati, scaturisce, almeno in parte, dallo studio delle fonti, dalla lettura e dalla rielaborazione personale dei testi matematici coevi e passati, dal posizionamento rispetto allo stato della ricerca in un certo momento, dal contesto in cui si fa ricerca. Appare quindi necessario investigare più a fondo la genesi stessa dell'attività di ricerca, anche a partire dall'analisi dei lavori che il ricercatore ha a disposizione nel momento in cui intraprende un certo filone di indagine.

Nel caso di Fano, lo studio delle sue collezioni personali di libri e opuscoli, affrontato nel CAPITOLO 7, si è rivelato essenziale. L'analisi della sua miscellanea, anch'essa conservata all'interno del Fondo Fano, e la ricostruzione della sua biblioteca privata, i cui volumi sono confluiti all'interno della BSMT, hanno fornito alcuni elementi interessanti sui suoi interessi, sulle sue letture e sulla sua rete di contatti. Fano aveva inoltre a disposizione i testi e le collezioni di riviste posseduti dalla Biblioteca, da lui diretta per quasi quindici anni (1924-38), il cui patrimonio librario è analizzato nel CAPITOLO 10 e completamente schedato nell'APPENDICE M.

Uno studio accurato della composizione della Biblioteca del 'polo torinese' non può prescindere dal confronto con quella dell'altro grande centro della Scuola italiana: nel CAPITOLO 9 è stata quindi analizzata la Biblioteca dell'Istituto Matematico di Roma, negli anni Venti la "Princeton italiana" per la geometria algebrica (APPENDICE L). Qui si intrecciano le attività scientifiche e istituzionali di geometri di spicco (Cremona, la triade Castelnuovo-Enriques-Severi, ma anche G. Scorza, E. Bompiani, …) che attirano diversi studiosi stranieri a perfezionarsi nella capitale, aprendo interessanti scenari di circolazione del sapere geometrico.

Per determinare con maggior precisione il collocamento di Fano all'interno del contesto storico-sociale, la sua raccolta libraria è stata posta in dialogo e in paragone con il patrimonio virtuale di C. Segre, cristallizzato all'interno del suo *Schedario* (CAPITOLO 8), e con le collezioni personali di A. Terracini (CAPITOLO 11). Al di là dell'interesse intrinseco dello studio di tre patrimoni finora inesplorati – il cui regesto completo è disponibile nelle APPENDICI G, H, I, N, O – il raffronto tra le letture di tre geometri della Scuola italiana, allievi l'uno dell'altro a Torino, ha permesso sia di delineare una cultura comune, trasmessa da una generazione all'altra, sia di identificare alcuni sostanziali cambiamenti all'interno della tradizione geometrica italiana, sul lungo periodo.

Oltre ai documenti inediti custoditi nelle due Biblioteche già citate – BSMT (*Fondi Fano, Segre e Terracini*) e BIMR (*Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*) – sono state consultate, studiate e analizzate fonti d'archivio custodite in numerosi centri archivistici italiani ed esteri: Archivio Centrale dello Stato (*Fondo CNR*), Archivio dell'Accademia Nazionale delle Scienze (*Fondo Bompiani*), Archivio Storico dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Archivi Storici delle Università di Padova, Pisa e Torino, Archivio dell'Unione Femminile Nazionale, Archivio del "Giardino di Archimede", Biblioteca "A. Bassi" dell'Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação dell'Universidade de São Paulo, Biblioteca del Dipartimento di Matematica "T. Levi-Civita" di Padova, Biblioteca dell'Istituto Matematico "U. Dini" di Firenze (*Fondo Montesano*), Biblioteca di Scienze Matematiche, Fisiche e Geologiche dell'Università di Perugia, Bibliothèque de l'Universitè de Lausanne (*Fondo De Rham*), SC&A dell'Università di Liverpool (*Fondo Chisholm-Young*), Caltech Archives (*B. Segre Papers*). Una selezione di lettere su diversi temi custodite in alcuni degli archivi citati è disponibile all'interno delle APPENDICI D, E e F.

A latere di un attento esame dei materiali archivistici, è emersa la necessità di individuare un'adeguata categoria interpretativa per fornire una visione organica e unitaria della seconda fase di attività di Fano, tenendo conto del suo posizionamento all'interno della Scuola italiana di geometria algebrica. È stata dunque adottata una lente di indagine patrimoniale, nella sua duplice accezione materiale e immateriale, opportunamente adattata al contesto matematico. Accogliendo l'istanza di inserire la pratica matematica all'interno di una prospettiva di storia culturale, essa si è rivelata efficace per giungere a una sintesi coerente della pluralità di elementi considerati.

Premessa metodologica

Per conferire la necessaria chiarezza ai contenuti di questa tesi, appare doveroso soffermarsi su alcune nozioni e concetti fondamentali che compaiono in tutta la trattazione. Andando anche a delimitare i confini di questa ricerca, desideriamo qui definire in maniera più precisa alcuni termini che saranno utilizzati nel testo e illustrare l'impiego di strumenti che si sono rivelati particolarmente utili per tale indagine storiografica.

Sul concetto di patrimonio matematico

Occorre innanzitutto precisare cosa intendiamo con i termini "patrimonio" e "patrimonializzazione" in questo contesto.

Infatti, mentre il loro ruolo nel campo delle scienze umane e sociali è ormai affermato[1], solo in anni recenti questi concetti hanno attirato l'attenzione della storia della scienza e, in particolare, della storia della matematica, come emerge dal progetto di ricerca internazionale *PatriMaths* (https://patrimaths.hypotheses.org/a-propos). Il convergere dell'interesse storico è andato di pari passo con la transizione da un'idea puramente materiale dei patrimoni (il patrimonio come "museo della memoria") a una concezione più ampia, che fa di essi uno strumento di ricostruzione culturale e intellettuale.

Il proliferare della letteratura su questo tema non facilita l'individuazione di una definizione univoca del concetto di patrimonio ma, mettendone in luce molteplici accezioni e interpretazioni, fa emergere la sua versatilità.[2] Si registra però un sostanziale consenso sul fatto che il patrimonio non esista intrinsecamente, ma scaturisca dalla volontà di preservare e custodire qualcosa – concreto o astratto – ai fini di una sua trasmissione, atto che implica l'attribuzione di un particolare valore all'oggetto in questione. In questa accezione attiva e pragmatica del termine patrimonio, ciò che affiora è la sua intima natura di costrutto sociale. Partendo dal presupposto che l'attività matematica è da sempre fortemente situata nel tempo, nello spazio geografico e all'interno del contesto sociale,[3] il concetto di patrimonio può costituire un'efficace categoria interpretativa per lo storico della matematica.

Bisogna tener presente che questa nozione racchiude in sé, congiuntamente, i due aspetti di patrimonio materiale e immateriale, per chiarire i quali è conveniente ricorrere a due definizioni distinte, specifiche per l'ambito matematico.

Con patrimonio materiale intendiamo le fonti dell'attività matematica: gli archivi, i patrimoni librari (privati e istituzionali), le collezioni di strumenti (come quelle dei modelli geometrici), i luoghi della ricerca matematica. In estrema sintesi, tutto ciò che rientra all'interno

---

[1] Cfr., *inter alia*, M. RAUTENBERG 2003, *Comment s'inventent de nouveaux patrimoines: usages sociaux, pratiques institutionnelles et politiques publiques en Savoie*, «Culture & Musées» 1, pp. 19-40; S. BOUDIA – A. RASMUSSEN – S. SOUBIRAN 2009, *Patrimoine et communautés savantes*, Rennes, Presses universitaires de Rennes.

[2] Sul problema di tale definizione, cfr. C. BORTOLOTTO (ed.) 2011, *Le Patrimoine culturel immatériel. Enjeux d'une nouvelle catégorie*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme; J. DESCHEPPER 2021, *Notion en débat. Le patrimoine*: http://geoconfluences.ens-lyon.fr/informations-scientifiques/a-laune/notion-a-la-une/patrimoine

[3] Su questo ultimo aspetto, cfr. C. EHRHARDT 2010, *Histoire sociale des mathématiques*, «Revue de synthèse» 131.4, pp. 489-493 e E. LUCIANO 2022c, *Turin, 1916, G. Fubini: une expérience de patrimonialisation en théorie des nombres*, Cahier thématique de «Philosophia Scientiæ» 26.2, pp. 123-144.

delle condizioni materiali che hanno permesso alle diverse teorie matematiche di emergere e interagire tra loro. Questa definizione è strettamente collegata alla concezione di "storia materiale della scienza" – introdotta da M. Beretta nel 2002 e utilizzata in diversi settori di indagine storica[4] – intesa come un invito a esplorare le fonti materiali dell'attività scientifica, che supera la loro concezione come esclusivi "luoghi" o "vettori" della memoria. Naturalmente, questo non significa ridurre l'intera storia della matematica alle sue fonti materiali, ma essere consapevoli che la loro considerazione può contribuire a fornire una visione più completa della sua portata e delle sue caratteristiche.[5] All'interno dei patrimoni materiali, un ruolo privilegiato spetta alle biblioteche, istituzionali e private. Queste ultime sono concepite come "spazio fisico e insieme concettuale […], scacchiera materiale che si fa proiezione di un'immagine interiore di biblioteca".[6] I lavori sulle biblioteche di G. Peano, C. Segre e Severi e sulle miscellanee di E. Artom e F.G. Tricomi, hanno provato l'efficacia e la potenza euristica di questo approccio anche nel campo della storia della matematica, in termini di *mathematical heritage & legacy*.[7]

Più complessa appare la formulazione di una definizione di patrimonio immateriale matematico. Il concetto di patrimonio immateriale permea sempre più la nostra società, promosso anche dall'individuazione della categoria da parte dell'Unesco nel 2003, ma racchiude una molteplicità di significati.[8]

È tuttavia possibile identificare alcuni elementi fondamentali che possono indirizzarci verso una definizione di questo concetto in ambito matematico. Innanzitutto, i legami imprescindibili tra patrimonio, comunità e costruzione della conoscenza. Il riconoscimento da parte di una collettività è un secondo aspetto essenziale del patrimonio immateriale – in un certo senso "invisibile" – ancor più che per quello materiale: oltre a promuovere il senso di identità, è questo elemento che favorisce la trasmissione[9] di qualcosa "che non si vede" da una generazione all'altra. In terzo luogo, è necessario tener presente l'interazione con l'ambiente: il patrimonio immateriale scaturisce anche come risposta al contesto storico, politico e sociale. Bisogna infine considerare il carattere cumulativo della conoscenza matematica. Questo aspetto, peculiare

---

[4] M. BERETTA 2002, *Storia materiale della scienza*. *Dal libro ai laboratori*, Milano, Mondadori. Per un esempio recente nell'ambito della storia della biologia, cfr. E. CANADELLI 2020, *Documentare e celebrare: Pier Andrea Saccardo e l'Iconoteca dei botanici di Padova tra Otto e Novecento*, «Physis» 55, pp. 71-86. Cfr. anche F. SOULU– M. SCHIAVON 2022, *Tracer le parcours d'un objet scientifique avec les procès-verbaux et les bases instruments du Bureau des longitudes*, «Artefact» 17, pp. 177-216.

[5] Cfr. M. BERETTA 2011, *Editorial*, «Nuncius» 26, p. 5.

[6] L. DI NICOLA 2013, *I libri "di" Italo Calvino*, «Bollettino di italianistica» 1, p. 275.

[7] Cfr. E. LUCIANO 2019, *La miscellanea Artom*, «RSUT» 8.2, pp. 293-326; E. LUCIANO 2021, *On Francesco G. Tricomi's heritage: archive and miscellany*, «Historia Mathematica» 55, pp. 73-84; C. FONTANARI – S. GATTEI 2023, *Francesco Severi's Mathematical Library*, INDAM series (in corso di stampa); E. LUCIANO 2023a, *Storie di mondi di carta: la Biblioteca di G. Peano*, in P.-E. BOUR – M. REBUSCHI – L. ROLLET (eds.), *Sciences, Circulations, Révolutions*, Nancy (in corso di stampa)

[8] Cfr. la Convenzione sulla Promozione e Protezione del Patrimonio Immateriale siglata il 17 ottobre del 2003, disponibile al link https://www.mite.gov.it/pagina/definizione-di-patrimonio-culturale-immateriale. Sulla questione della definizione, cfr. M. JADÉ 2004, *Le patrimoine immatériel. Nouveaux paradigmes, nouveaux enjeux*, «La Lettre de l'OCIM» 93, pp. 27-37.

[9] Sugli aspetti di trasmissione, diffusione e circolazione dei saperi matematici cfr. H. GISPERT – P. NABONNAND – J. PEIFFER (eds.) 2015, *Circulation et échanges mathématiques. Études de cas*, n° spécial de «Philosophia Scientiæ» 19.2; F. JOVANOVIC– V. REBOLLEDO-DHUIN – N. VERDIER (eds.) 2018, *Science(s) et édition(s), des années 1780 à l'entre-deux-guerres*, n° spécial de «Philosophia Scientiæ» 22.1.

della matematica, è legato a quello che C. Ehrhardt, O. Bruneau e R. d'Enfert identificano come un "punto cieco" nella storia della matematica, ossia la considerazione che i matematici hanno circa la convivenza, all'interno della loro "cassetta degli attrezzi matematici", di oggetti, che appartengono per alcuni al loro passato, per altri al presente.[10] Quando si parla di patrimonio matematico immateriale occorre dunque interrogarsi sulle modalità con cui le comunità di ricerca matematica identificano le risorse del passato e del presente da valorizzare, conservare e trasmettere, in relazione alla loro consapevolezza di mantenere vive alcune conoscenze del passato e al contempo di promuovere e tramandare i più recenti risultati e scoperte.

Alla luce di queste considerazioni, in questa tesi la nozione di patrimonio matematico immateriale sarà utilizzata per parlare di:

- conoscenze (oggetti, definizioni, …) e risultati matematici (teoremi, proprietà, …);
- prassi, *know-how*, metodi e strumenti di indagine, tecniche dimostrative sviluppate per conseguire i risultati;
- terminologia e linguaggio introdotto o coniato appositamente per esporli;
- modo di scrivere, pubblicare e presentare i risultati dell'attività di ricerca;
- riferimenti culturali e conoscenze precedentemente acquisite – in un passato più o meno recente – consapevolmente utilizzate e mobilitate.

Il concetto di patrimonio matematico immateriale, dunque, non è limitato all'oggetto in sé ma è legato al modo in cui i protagonisti guardano all'oggetto e al discorso matematico che producono su di esso. Fondamentale è quindi il processo di patrimonializzazione, ossia il processo sociale mediante cui i soggetti, attraverso le loro azioni reciproche, vanno a conferire a un oggetto un insieme di proprietà o valori prima riconosciuti e condivisi dai soggetti coinvolti e poi trasmessi a più individui, tramite meccanismi di istituzionalizzazione necessari alla loro legittimazione durevole nel tempo.[11] Bisogna però tener presente che questo processo di trasformazione degli oggetti in oggetti del patrimonio procede infatti dal presente al passato, rappresentando un'operazione culturale che J. Davallon chiama "filiazione inversa". Per dirla con il sociologo francese, il concetto stesso di patrimonio è "reconstruction d'un lien avec un monde disparu, depuis le présent, à partir d'un objet «trouvé»".[12] Nella prospettiva patrimoniale occorre quindi tener presente che il legame con il passato è costruito a posteriori, a partire dal presente.

Geometria algebrica e dintorni

La nascita della Scuola italiana di geometria algebrica si fa solitamente risalire al 1860, quando Cremona diventa titolare della cattedra di Geometria superiore[13] presso l'Università di Bologna, per lui appositamente istituita. Accanto a Cremona, l'altro esponente della prima generazione della scuola è Giuseppe Battaglini. Tra i principali geometri della seconda generazione vi sono Ettore Caporali, Pasquale Del Pezzo, Enrico D'Ovidio, Giuseppe Jung,

[10] C. EHRHARDT – O. BRUNEAU – R. D'ENFERT (eds.) 2022, *Patrimonialisation en mathématiques (XVIII^e–XX^e siècles)*, Cahier thématique de «Philosophia Scientiæ» 26.2, p. 8.

[11] Cfr. E. AMOUGOU 2004, *La Question patrimoniale. De la « patrimonialisation» à l'examen des situations concrètes*, Paris, L'Harmattan, pp. 25-26.

[12] J. DAVALLON 2000, *Le patrimoine: "une filiation inversée"*, «Espaces Temps» 74-75, p. 6.

[13] La geometria superiore è, per Cremona, essenzialmente la geometria algebrica trattata con i metodi della geometria proiettiva.

Luigi Berzolari, Giovan Battista Guccia, Giuseppe Veronese, Eugenio Bertini e Corrado Segre. Quest'ultimo è spesso considerato il vero "fondatore" della Scuola, in quanto capace di indirizzare proficuamente le ricerche dei suoi allievi, guidandoli nell'affrontare diverse tematiche che diverranno centrali nell'evoluzione della disciplina. La terza generazione è composta dai geometri che portano la Scuola italiana a raggiungere il massimo prestigio a livello internazionale. Basti pensare alla triade Castelnuovo-Enriques-Severi, cui si affiancano altre figure significative: Fano, Michele De Franchis, Giuseppe Bagnera, Gaetano Scorza, Carlo Rosati, Beppo Levi, Luigi Brusotti e Giovanni Giambelli. Infine, tra gli esponenti della quarta generazione della Scuola rientrano Annibale Comessatti, Oscar Chisini, Fabio Conforto, Ugo Morin, Beniamino Segre, Ruggiero Torelli, Luigi Campedelli, Giacomo Albanese, Giuseppe Gherardelli, Giuseppe Pompilj, Aldo Franchetta e Alessandro Terracini.[14]

Occorre però fare una precisazione riguardo a quest'ultimo: la prima parte della sua produzione scientifica si colloca pienamente nell'alveo della geometria algebrica ma in un secondo momento, così come era accaduto per C. Segre, i suoi interessi di ricerca si spostano verso la geometria proiettivo-differenziale. Naturalmente, all'interno della produzione scientifica di una buona parte degli autori qui elencati compaiono anche lavori in settori differenti dalla geometria algebrica (geometria proiettivo-differenziale, teoria dei gruppi, …), ma il numero e l'importanza di essi rende significativo il loro apporto alla disciplina nel periodo in esame.

È necessario precisare cosa si intende con geometria algebrica. Oggi con questo termine si intende lo studio delle cosiddette varietà algebriche, ossia dei sottoinsiemi dello spazio a un numero qualunque di dimensioni definiti da equazioni polinomiali. Per i geometri italiani di fine Ottocento e inizio Novecento essa scaturisce

> Fondendo nel modo più abile la intuizione geometrica con alcuni risultati fondamentali tolti all'algebra, [… con] tale sagacia da permettere alla nuova algebra geometrica di scoprire, spesso senza sforzo, proprietà riposte che l'algebra classica, appesantita dal bagaglio delle formule, solo con fatica riuscì a trovare.[15]

Ancora, secondo Enriques, si tratta della "dottrina qualitativa delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra".[16]

I temi di cui si occupa la geometria algebrica nella prima metà del Novecento afferiscono essenzialmente a quattro ambiti: lo studio delle trasformazioni birazionali (o cremoniane); la teoria delle curve; la teoria delle superfici algebriche; le varietà di dimensione maggiore a due.[17]

---

[14] La nostra suddivisione in generazioni si basa su quella di A. BRIGAGLIA 2001, *The creation and persistence of national schools: the case of Italian algebraic geometry*, in U. BOTTAZZINI, A. DAHAN-DALMÉDICO (eds.), *Changing Images of Mathematics*, London, Routledge, pp. 203-204, cui sono state apportate alcune modifiche.

[15] G. CASTELNUOVO 1930, *Luigi Cremona nel centenario della nascita*, «Rend. ANL» (6) 12, pp. 614.

[16] F. ENRIQUES – O. CHISINI 1915, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 1, Bologna, Zanichelli, *Prefazione*.

[17] Per una panoramica dettagliata dei temi di ricerca della geometria algebrica italiana cfr., *inter alia*, A. BRIGAGLIA – C. CILIBERTO 1998, *Geometria Algebrica*, in S. DI SIENO, A. GUERRAGGIO, P. NASTASI (eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, pp. 185-260, 265-286; A. CONTE – C. CILIBERTO 2004, *La scuola di geometria algebrica italiana*, in *Storia della Scienza. La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica*, Roma, Treccani.

Introdotte da Cremona nel 1863, le trasformazioni birazionali[18] generalizzano il concetto di trasformazione lineare e permettono di interpretare birazionalmente le operazioni proiettive elementari di proiezione e sezione. In questo ambito rientrano gli studi sulle involuzioni del piano proiettivo e sul legame tra il concetto di immersione in uno spazio proiettivo e la nozione di serie lineare.

I principali oggetti di indagine della teoria delle curve sono le serie lineari su una curva algebrica.[19] Strettamente collegate allo studio delle curve algebriche sono la teoria dei moduli sulle curve, le corrispondenze singolari, la varietà di Severi $V(n,\delta)$, varietà di tutte le curve di grado n con δ nodi, e la varietà M_p, varietà dei moduli delle curve di genere p che parametrizza le classi di equivalenza birazionale delle curve di genere p.

Tra le maggiori questioni della teoria delle superfici – il cui studio consiste in quello delle famiglie di curve giacenti sulla superficie – rientrano le superfici razionali e i criteri di razionalità; i concetti di genere geometrico, aritmetico e irregolarità; i sistemi lineari di curve su una superficie (tra cui la serie caratteristica del sistema); le curve virtuali (combinazioni lineari formali a coefficienti interi di un numero di curve effettive sulla superficie); le superfici rigate negli iperspazi; lo scioglimento delle singolarità; l'invariante di Zeuthen-Segre; i plurigeneri; la riduzione della classificazione birazionale ai modelli minimali; i problemi di degenerazione di curve su una superficie; il teorema di regolarità dell'aggiunto.[20]

Passando alle più note classi di varietà algebriche ricordiamo la varietà di Segre; le varietà tridimensionali (comprese le Fano threefolds e le Fano-Enriques threefolds); le varietà abeliane (tra cui la varietà di Albanese) e quasi-abeliane. Numerose e diversificate sono le vie di indagine che si collocano in questo ambito: lo studio del gruppo di Picard di una varietà; l'analisi dei sistemi di equivalenza e dei cicli di intersezione; le implicazioni del problema di Lüroth sulla classificazione birazionale delle varietà; i criteri di unirazionalità per i fibrati in coniche; i problemi di realtà.

Sotto la voce "ricerche in geometria algebrica" rientrano dunque questi quattro indirizzi principali e alcuni filoni di indagine particolarmente significativi: la geometria della retta, volta

[18] Si tratta di trasformazioni esprimibili in termini di coordinate cartesiane mediante funzioni razionali e che sono generalmente invertibili con trasformazioni dello stesso tipo. Esse rappresentano un elemento cardine della geometria algebrica, tant'è che da questo momento le varietà algebriche saranno classificate a meno di trasformazioni birazionali e non più a meno di proiettività.

[19] Si tratta delle serie di gruppi di punti – i moderni divisori – tagliati sulla curva immersa in uno spazio proiettivo dalle ipersuperfici di un sistema lineare, fuori da eventuali punti base sulla curva. Tra queste, riveste un ruolo fondamentale la serie canonica, serie dei divisori dove si annullano i differenziali olomorfi sulla curva.

[20] Per maggiore chiarezza, diamo qui la definizione moderna dei principali caratteri numerici presi in considerazione dai geometri algebrici classici. Sia X una varietà complessa, compatta e connessa, di dimensione n. Denotiamo con Ω_X^1 il fibrato cotangente a X e con $K_X = \det \Omega_X^1$ il fascio canonico. Il genere geometrico è $p_g(X) = \dim H^0(K_X)$, dimensione dello spazio vettoriale delle n −forme olomorfe definite su X. I plurigeneri P_r, definiti per $r \geq 1$, coincidono con la dimensione dello spazio vettoriale degli r −tensori di n −forme olomorfe definiti su X, ossia $P_r(X) = \dim H^0\left(K_X^{\otimes r}\right)$. Infine, l'irregolarità è $q(X) = \dim H^0(\Omega_X^1)$, dimensione dello spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe definite su X.

allo studio della Grassmanniana di uno spazio proiettivo,[21] la geometria combinatoria, la geometria algebrica reale e quella numerativa.[22]

Al di là delle tematiche affrontate, vi sono alcuni tratti peculiari che caratterizzano la geometria algebrica della Scuola italiana. In primo luogo, l'adozione di un metodo euristico, inteso come "attitudine sperimentale, la quale permette i controlli e le induzioni, che costituiscono la vera forza per esplorare e costruire"[23] e che si concretizza nell'"esporre accanto alle verità le vie – spesso diverse – che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti".[24] I geometri italiani privilegiano l'utilizzo degli strumenti proiettivi per la scoperta di nuove proprietà intrinseche delle varietà algebriche e sono fautori della superiorità dell'intuizione come via per la scoperta matematica rispetto alla dimostrazione logico-deduttiva che serve invece a sancire quanto conquistato dall'intuizione. Ciò implica un certo esclusivismo nel metodo di scoperta, caratterizzato dall'intuizione geometrica e dall'uso dell'analogia come strumento di indagine. Così come la geometria elementare è concepita come fisica dell'estensione, quella algebrica è intesa come una disciplina qualitativa volta a cogliere relazioni tra oggetti e metodi diversi. Bisogna infine specificare che quando i geometri italiani fanno riferimento alla geometria astratta essi non intendono la geometria degli spazi astratti né si appellano ad un approccio strutturale alla disciplina, ma attribuiscono al termine "astratta" il senso di "generale", riferendosi – in sostanza – alla possibilità di applicare questa geometria a una molteplicità di situazioni.

In breve, il geometra algebrico italiano della prima metà del Novecento è colui che non solo si inserisce nelle vie di indagine tracciate dai predecessori ma abbraccia questa serie di principi metodologici, stilistici ed espositivi che contraddistinguono sia l'approccio alla ricerca sia la produzione scientifica.

In questo periodo, accanto al fiorire della geometria algebrica, in Italia si assiste anche alla nascita della geometria proiettivo-differenziale che, agli albori, presenta vari punti di contatto con la geometria algebrica.[25] È C. Segre che apre la strada a un nuovo campo di indagine: introduce infatti alcune tecniche miste, volte a dedurre le proprietà globali delle varietà a partire da proprietà differenziali di natura locale. La geometria proiettivo-differenziale scaturisce dall'analisi geometrica delle equazioni differenziali alla G. Darboux.[26]

---

[21] Nello specifico, con l'espressione "geometria della retta" si intende lo studio di $Gr(1, \mathbb{P}^n)$, la Grassmanniana delle rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$. Una congruenza di rette è una superficie in $Gr(1, \mathbb{P}^3)$.

[22] Quest'ultima fa da *trait-d'union* con l'*analysis situs*, andando a esplorare le relazioni tra i metodi geometrici e quelli algebrico-topologici.

[23] F. SEVERI 1933, *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*, «Mem. R. Acc. d'Italia» 4, p. 71.

[24] ENRIQUES – CHISINI 1915, *cit.*, *Prefazione*.

[25] Sull'indirizzo proiettivo-differenziale cfr. A. BRIGAGLIA – C. CILIBERTO 1998, *cit.*, pp. 260-265; L. PIZZOCCHERO 1998, *Geometria differenziale*, in S. DI SIENO, A. GUERRAGGIO, P. NASTASI (eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, pp. 321-379; C. CILIBERTO 2022, *Uno sguardo alla geometria proiettivo-differenziale*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 7, pp. 97-119.

[26] Gli anni 1880-1914 rappresentano il periodo classico della geometria differenziale in Italia, segnato dalle figure di L. Bianchi e G. Ricci-Curbastro. Le principali tematiche affrontate sono i rapporti tra la teoria delle superfici e le equazioni alle derivate parziali; i problemi di applicabilità e di deformazione per le superfici; la teoria delle trasformazioni tra superfici; le congruenze di rette e di sfere; lo studio delle deformazioni infinitesimali; la teoria generale degli spazi riemanniani; il calcolo differenziale assoluto. A partire dal 1915, i metodi infinitesimali propri

Due sono i filoni principali di indagine cui faremo riferimento con il termine “geometria proiettivo-differenziale”. Il primo – rappresentato in Italia da Luigi Bianchi e Guido Fubini e all’estero da A. Cayley, H. Poincaré, E. Picard, E. Study, E. Čech – è volto alla costruzione e allo studio delle strutture metriche sopra gli spazi proiettivi e comprende la caratterizzazione tramite forme differenziali delle superfici di uno spazio proiettivo e l’interpretazione geometrica di tali forme. Il secondo indirizzo, caratterizzato da una maggiore contiguità culturale con la geometria algebrica, è quello della geometria differenziale delle curve, delle superfici e delle sottovarietà immerse in uno spazio proiettivo privo di struttura metrica.[27] Oltre a C. Segre e Terracini, i principali esponenti nel versante italiano sono Enrico Bompiani, Ettore Bortolotti, Pietro Buzano, Eugenio Togliatti e Beniamino Segre. Nei temi da loro affrontati rientrano la teoria delle calotte; le congruenze rettilinee del tipo W legate alle deformazioni infinitesimali di oggetti geometrici; l’invariante di Mehmke-Segre; le proprietà delle superfici che soddisfano una o più equazioni di Laplace indipendenti; la quintupla delle tangenti principali alla superficie; lo studio delle congruenze di piani in relazione a loro proprietà focali e quello degli elementi differenziali curvilinei; la classificazione di alcune varietà notevoli in base alle dimensioni delle relative varietà delle secanti, degli spazi tangenti, delle corde o della varietà duale.

Delineate le principali differenze tra geometria algebrica e proiettivo-differenziale, occorre ancora stabilire la posizione della prima rispetto all’algebra e alla topologia, due branche della matematica che nel periodo in esame sono andate incontro, all’estero, a un impetuoso sviluppo.

Con rare eccezioni, rappresentate negli anni Venti e Trenta del Novecento da Scorza, Giovanni Ricci, Guido Zappa, Lucio Lombardo-Radice, Giovanni Dantoni, l’algebra in Italia si riduce allo studio delle equazioni algebriche, dei gruppi (e, in particolare, dei gruppi di sostituzioni), delle matrici e dei determinanti, delle forme e dei loro invarianti. Nel campo della teoria algebrica dei numeri l’interesse converge sullo studio delle forme quadratiche e dei numeri $p-$adici, sui problemi di divisibilità negli anelli di numeri algebrici e sulla teoria dei resti quadratici. Con la sola eccezione di Scorza, il concetto di struttura non riveste un ruolo centrale per i matematici italiani. L’algebra sembra quindi occupare una posizione ancillare in Italia, andando talvolta a costituire uno strumento nelle mani della geometria algebrica, tant’è che bisognerà attendere il 1960 per la prima cattedra universitaria di questa disciplina. Bisogna inoltre tener conto che i geometri italiani assumono una posizione diffidente nei confronti dell’algebra moderna e dei nuovi linguaggi algebrici che scaturiscono dalla progressiva fusione delle scuole tedesca e americana. In estrema sintesi, “l’Algebra che si sviluppa a Göttingen e dintorni, semplicemente, non esiste nel bagaglio del matematico ipotizzato da Severi”.[28]

Parzialmente differente è il discorso per la topologia, disciplina che si occupa dello studio delle proprietà geometriche che non dipendono dalla nozione di misura ma sono legate a problemi di deformazione. Agli albori della Scuola italiana, ma anche per i geometri delle

della geometria differenziale sono trasportati nell’ambito della geometria proiettiva tradizionale della quale sono assorbiti il linguaggio e le nozioni fondamentali (coordinate omogenee, trasformazioni proiettive, …).

[27] Oggetto di queste ricerche è studio delle relazioni tra superfici immerse in uno spazio proiettivo e le equazioni lineari alle derivate parziali, degli elementi differenziali caratterizzanti gli intorni infinitesimali di ordine superiore al primo delle curve e delle superfici, delle connessioni proiettive di H. Weyl e É. Cartan.

[28] A. Brigaglia – A. Scimone 1998, *Algebra e Teoria dei numeri*, in S. di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi (eds.), *La matematica italiana dopo l’unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, p. 549.

generazioni successive, la topologia coincide con l'*analysis situs*, limitandosi allo studio degli aspetti qualitativi, ossia delle proprietà geometriche che non dipendono da forma e dimensioni, come la connessione.[29] Le principali questioni che rientrano in questa categoria riguardano la topologia combinatoria; l'equivalenza topologica di due varietà; i complessi (compresi i loro cicli e i loro ranghi di connessione); le congruenze e le omologie; lo studio delle matrici di orientamento e delle varietà orientabili. Per molti degli esponenti della Scuola italiana, le ricerche in ambito topologico sono essenzialmente finalizzate a perfezionare risultati o teorie della geometria algebrica.

Occorre però distinguere tra topologia in senso classico e topologia algebrica, quest'ultima affermatasi come disciplina autonoma a partire dagli anni Trenta grazie all'opera fondazionale di O. Veblen, S. Lefschetz, J.W. Alexander, P.S. Aleksandrov e H. Hopf. Essa scaturisce dall'applicazione degli strumenti dell'algebra astratta allo studio gli spazi topologici: si approfondiscono i complessi e le loro proprietà da un punto di vista più generale, ricorrendo a concetti nuovi e di più ampio respiro come quelli di gruppi di omotopia, omologia e coomologia.[30] Sono, questi, aspetti che – al momento – sembrano del tutto trascurati all'epoca in Italia, probabilmente anche causa di una certa diffidenza nei confronti dell'algebra astratta.

Alcuni strumenti

Un'ultima considerazione riguarda le tecniche e gli strumenti di indagine utilizzati durante la stesura di questo lavoro di tesi. Accanto a un'approfondita analisi delle fonti primarie (a stampa e archivistiche) e secondarie, sono state adottate due ulteriori tecniche di ricerca storica, con l'obiettivo di fornire una visione il più completa possibile del fenomeno storico considerato.

La prima consiste nell'esame dei fondi librari a partire dalla costruzione di regesti digitali, organizzato e messo a disposizione della comunità scientifica,[31] tramite l'impiego di software per l'analisi dei dati (quali Excel) e per la visualizzazione di reti di dati complessi (come quelli delle *digital humanities*).[32] Con questo obiettivo è stato utilizzato Palladio (https://hdlab.stanford.edu/palladio/) implementato dall'Università di Stanford. Questo software è risultato uno strumento utile ed efficace per indagare le relazioni tra i protagonisti, in un'epoca in cui la matematica è segnata dall'internazionalismo scientifico.

[29] La topologia in senso classico, detta anche geometria di posizione o geometria del continuo, studia le proprietà di uno spazio che rimangono inalterate tramite una qualunque trasformazione biunivoca e bicontinua.

[30] Cfr. J. McCleary 2004, *La topologia algebrica all'inizio del XX secolo*, in *Storia della Scienza. La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica*, Roma, Treccani, https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-la-topologia-algebrica-all-inizio-del-xx-secolo_%28Storia-della-Scienza%29/

[31] Per questo motivo, i regesti completi dei patrimoni librari analizzati sono stati pubblicati in forma completa e liberamente accessibile in Giacardi (ed.) 2013-23, *cit.*

[32] Sull'uso degli strumenti delle *digital humanities* in ambito scientifico cfr. L. Guillope 2006, *Patrimoine scientifique: droits d'auteur et du lecteur*, in *La propriété intellectuelle en question(s), regards croisés européens*, Paris, Litec, pp. 65-71; A. Gefen 2015, *Les enjeux épistémologiques des humanités numériques*, «Socio: La nouvelle revue des sciences sociales» 4, pp.61-74; O. Bruneau – N. Lasolle – J. Lieber – E. Nauer – S. Pavlova – L. Rollet 2021, *Applying and Developing Semantic Web Technologies for Exploiting a Corpus in History of Science: the Case Study of the Henri Poincaré Correspondence*, «Semantic Web: Interoperability, Usability, Applicability» 12.2, pp. 359-378.

Un secondo metodo rivelatosi prezioso per l'esame delle interdipendenze storiche è lo studio dei citational network.[33] Partendo dal presupposto che il ruolo dello storico – compreso quello dello storico della matematica – non consiste soltanto nel descrivere degli eventi ma nel fornire una prospettiva sulle relazioni tra eventi che possono apparire isolati o non correlati agli occhi dell'osservatore, l'analisi della rete delle citazioni può rappresentare un valido aiuto per raggiungere diversi obiettivi come: individuare opere oggi poco note ma che dovrebbero invece essere considerate e analizzate in virtù del ruolo da esse rivestito all'epoca; ricavare informazioni a partire dalla considerazione delle implicazioni storiche tra i nodi della rete; rivelare interdipendenze, interrelazioni e la relativa importanza delle opere citate. I primi studi sull'analisi delle citazioni – la maggior parte dei quali relativi a settori diversi rispetto alla storia della matematica, con rare eccezioni,[34] hanno messo in mostra le potenzialità di questo approccio. Naturalmente, è necessario adottare alcune cautele. Innanzitutto, un numero elevato di citazioni riflette l'impatto di una certa opera ma può rifletterne o meno il valore intrinseco. In secondo luogo, i dati ottenuti da un'analisi di questo tipo sono sempre relativi piuttosto che assoluti. Infine, bisogna considerare il fatto che alcuni autori ignorano o trascurano – consapevolmente o inconsapevolmente – un lavoro precedente, almeno all'interno dei loro riferimenti bibliografici. Tuttavia, oltre a sostituire all'uso puramente metaforico del termine "rete" una rappresentazione concreta e visibile dei rapporti tra matematici in un certo contesto o periodo storico, questa prospettiva può contribuire a riabilitare figure che sono state, almeno per un certo lasso di tempo, localmente centrali o, comunque, significative. È questo il caso di Marino Pannelli, ampiamente citato nei lavori di Fano sulle threefolds e poi rapidamente 'dimenticato' negli anni successivi.

In sintesi, questo approccio – fungendo come integrazione alla consueta microanalisi del contenuto dei singoli lavori – contribuisce a descrivere e comprendere meglio i processi e i cambiamenti globali anche in ambito matematico.

[33] La letteratura sui citational network è molto vasta. Ci limitiamo a citare E. GARFIELD 1979, *Is citation analysis a legitimate evaluation tool?*, «Scientometrics» 1, pp. 359-375 e M. GMÜR 2003, *Co-citation analysis and the search for invisible colleges: A methodological evaluation*, «Scientometrics» 57, pp. 27-57.

[34] Sull'analisi del citational network nella corrispondenza tra M. Mersenne e H. Oldenburg, cfr. Y. GINGRAS 2010, *Mapping the structure of the intellectual field using citation and co-citation analysis of correspondences*, «History of European Ideas» 36(3), pp. 330-339. Cfr. anche L. ROLLET 2017, *La correspondance de jeunesse d'Henri Poincaré: les années de formation, de l'École polytechnique à l'École des mines (1873-1878)*, Basel, Birkhäuser. Per un'applicazione al campo biologico, cfr. H.G. SMALL 1977, *Co-citation model of a scientific speciality. Longitudinal study of collagen research*, «Social Studies of Science» 7.2, pp. 139-166.

1. *Gino Fano (1871-1952): profilo biografico*

"Tra i più gloriosi seguaci della Scuola geometrica italiana", Gino Fano[1] nasce a Mantova il 5 gennaio 1871, in una facoltosa famiglia ebraica dove era viva la tradizione patriottica e che gli aveva instillato "alti sentimenti di italianità".[2] Il padre, Ugo Prospero Fano (1839-1927), era stato un volontario garibaldino e aveva preso parte alla campagna del Trentino del 1866. La madre, Angelica (1851-1923), è una donna acculturata, come testimoniato dal suo ruolo di consigliere del Comitato di Mantova della "Società 'Dante Alighieri' per la diffusione della lingua e della coltura italiana fuori del Regno", incarico che manterrà fino al 1901.

Fano frequenta le prime tre classi del Liceo-ginnasio "Virgilio" di Mantova, ottenendo brillanti risultati. Assecondando i desideri del padre, entra poi al Collegio Militare di Milano, dove rimane quattro anni. Nel 1888 ottiene la licenza all'Istituto tecnico di Mantova. Dopo aver frequentato per un brevissimo periodo l'Accademia Militare di Torino, si iscrive all'Università come allievo ingegnere. Tuttavia, già all'inizio dell'a.a. 1888-89, abbandona gli studi di ingegneria per dedicarsi alla matematica. Qui impressiona fin da subito il giovane Guido Castelnuovo che in questo periodo ricopre il ruolo di assistente di D'Ovidio e che, svolgendone le esercitazioni, spesso lo invita a risolvere esercizi e a ripetere alcune parti delle lezioni. In questo periodo Fano intreccia anche proficui rapporti con C. Segre, diventando il primo della sua importante schiera di allievi. Segre e Castelnuovo si rendono ben presto conto delle doti matematiche di Fano e prendono a cuore la sua formazione, influenzandone notevolmente la maturazione scientifica.

A Torino Fano ha anche la fortuna di seguire, nel 1890-91, il celebre corso di Geometria superiore di Segre dedicato alla geometria degli enti algebrici semplicemente infiniti.[3] Dall'invito a individuare un sistema di postulati per la geometria proiettiva iperspaziale rivolto da Segre durante queste lezioni scaturisce la prima memoria di Fano che avrà una notevole influenza sull'evoluzione della geometria algebrica italiana.[4] L'aspetto più pregevole della memoria risiede non tanto nel suo scopo iniziale – poiché nello stesso periodo anche altri studiosi, come F. Amodeo, pubblicano su questo argomento[5] – ma piuttosto nella parte dedicata

---

[1] Sulla biografia di Fano, cfr. D.J. STRUIK 1971, *Fano Gino*, DSB, vol. 4, pp. 522-523; L. GIACARDI 1987, *Gino Fano*, in L. GIACARDI – C.S. ROERO (ed.) *Bibliotheca Mathematica*, Allemandi, Torino, pp. 173-176; F. LERDA 1994, *Fano Gino*, DBI, vol. 44, https://www.treccani.it/enciclopedia/gino-fano_%28Dizionario-Biografico%29/; A. CONTE – L. GIACARDI 1999, *Gino Fano*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 2, Torino, DSSP, pp. 548-554; W. MANTOVANI 2005, *Gino Fano (1871-1952). Un mantovano fra i più illustri matematici del suo tempo*, «Atti e Mem. Acc. Virgil.» 73, pp. 195-206; A. JANOVITZ – F. MERCANTI 2008, *Gino Fano*, in *Sull'apporto evolutivo dei matematici ebrei mantovani nella nascente nazione italiana*, Monografie di EIRIS, Milano, EIRIS, pp. 43-61; E. LUCIANO – C.S. ROERO 2010, *La Scuola di Giuseppe Peano*, Torino, DSSP, pp. 77-92; L. GIACARDI – E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2023, *Gino Fano (1871-1952). The scientific trajectory of an Italian geometer between internationalism and persecution*, INDAM series (in corso di stampa).

[2] B. SEGRE 1952, *Gino Fano. Necrologio*, «Archimede» 4, p. 262.

[3] Cfr. BSMT, *FSe*, Quad. 3, disponibile al link https://www.corradosegre.unito.it/int3.php.

[4] G. FANO 1892, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, «Giorn. di Mat.» 30, pp. 106-132.

[5] F. AMODEO 1890-91, *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno S_r*, «Atti R. Acc. Sci. Torino» 26, pp. 741-770.

alle geometrie finite, riprese successivamente anche da Veblen e dallo stesso Fano. Compare qui il celebre esempio del piano proiettivo composto da sette punti e sette rette, successivamente noto come "piano di Fano".[6]

Ancora studente, sotto lo stimolo di Segre, nel 1890 Fano traduce in italiano il *Programma di Erlangen* di Felix Klein. La versione italiana, apparsa con il titolo di *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*,[7] precede le traduzioni in francese, in inglese e in polacco, e contribuisce a diffondere la visione di Klein su scala internazionale. Questa traduzione segna, per Fano, un primo avvicinamento alla matematica avanzata e, soprattutto, all'approccio sintetico alla Klein, che sarà determinante in vari suoi lavori successivi.

Nel 1892 Fano conclude gli studi universitari con una dissertazione di laurea sulla geometria iperspaziale, redatta sotto la guida di Segre.[8] Rimasto a Torino nell'a.a. 1892-93 come assistente di D'Ovidio, nell'ottobre del 1893 Fano si sposta a Göttingen per trascorrere due semestri di perfezionamento alla Scuola di Klein. Questo periodo si rivelerà molto fecondo per la sua formazione, non solo per quanto riguarda i campi di ricerca

> ma soprattutto per l'acquisizione e il rafforzamento di determinate idee, quali l'importanza delle concezioni gruppali e […] l'importanza dell'intuizione nei progressi della matematica e segnatamente della geometria.[9]

Oltre a far tesoro del magistero di Klein in ambito didattico e scientifico, durante il periodo tedesco Fano presenta due seminari all'interno del corso di Klein dedicato alle funzioni sferiche e alle loro applicazioni alla fisica matematica e tiene anche alcune conferenze sulla geometria algebrica italiana presso la *Mathematische Gesellshaft*.[10] Fra gli studenti che seguono i seminari ci sono Emanuel Beke, Wilhelm Lorey e Grace Chisholm.[11]

Rientrato in Italia, nell'a.a. 1895-96 Fano si sposta all'Università di Roma per ricoprire il ruolo di assistente di Castelnuovo. Nel 1899 Klein gli offre la cattedra di geometria di Göttingen, precedentemente occupata da A.M. Schönflies, in quanto desidera che il nuovo

---

[6] Nello specifico, si tratta del piano proiettivo sul campo finito composto da due elementi; contiene 7 punti, ciascuno dei quali contenuto in 3 rette, e 7 rette, ognuna delle quali contiene 3 punti.

[7] F. KLEIN / G. FANO (trad.) 1890, *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*, «Ann. Mat.» 17, pp. 307-343.

[8] Cfr. il certificato di laurea custodito in ASUT XD 193, 36. Fano si laurea con lode il 22.6.1892. Dalla sua tesi scaturisce il lavoro G. FANO 1893, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» 44, pp. 335-382.

[9] A. TERRACINI 1952, *Gino Fano*, «Boll. UMI» (3) 7, p. 486.

[10] Si tratta di un nuovo elemento della biografia di Fano, emerso durante la collaborazione con la prof.ssa Giacardi. Fano presenta due seminari, uno sulle serie di Fourier (*Allgemeine Bemerkungen über Fourier'sche Reihen*, 13.6.1894), l'altro sulle funzioni sferiche (*Kugelfunktionen*, 20.6.1894). Tutte le presentazioni tenute dal 1872 al 1913, quando Klein si ritira, sono annotate con cura all'interno del *Protocollbuch*, solitamente dall'oratore. I seminari di Fano sono accessibili al link: https://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V12-1894-1896/V12-1894-1896.html. Alla *Mathematische Gesellshaft*, Fano tiene una conferenza sulla geometria algebrica italiana (*Über die neuesten Untersuchungen der italienischen Geometer*) e un intervento dedicato alla geometria della retta (*Über eigene Untersuchungen im Gebiete der Liniengeometrie*).

[11] G. Chisholm si recherà a Torino con il marito William Young nel 1898-99 per seguire i corsi di C. Segre e rimarrà in contatto con Fano. Cfr. F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 19.4.1898, edita in U. BOTTAZZINI – A. CONTE – P. GARIO (eds.) 1996, *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino, Bollati Boringhieri, p. 166.

titolare valorizzi l'intuizione geometrica e sviluppi gli studi geometrici in tutte le direzioni.[12] Fano declina molto diplomaticamente l'invito, affermando di essere onorato da una tale offerta ma di preferire una cattedra in un'università italiana[13]; inoltre, come ricorda il figlio Ugo, non vuole "essere germanizzato".[14] In quello stesso anno, vincitore di concorso, Fano ottiene la cattedra di Algebra e geometria analitica all'Università di Messina, ma la sua aspirazione è quella di tornare a Torino.[15] In seguito a un nuovo concorso, nell'autunno del 1901 è chiamato come professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno nel capoluogo piemontese[16], dove comincia i corsi con rinnovato entusiasmo:

> Per conto mio, ho tutta la fiducia di poter andare avanti bene, malgrado il lavoro più che discreto. In 1° anno i presenti sono un po' più di 100, in 2° anno un po' meno. Vado molto adagio […]. Quello che posso dire di Torino è che, dopo 5 anni di Roma e 2 anni di Messina, per il mangiare, dovunque vada, mi sembra di essere rinato.[17]

Promosso a ordinario con decreto del 24 novembre 1905, tre anni più tardi Fano assume anche l'incarico di Geometria descrittiva con applicazioni presso la Scuola di Ingegneria. Nel 1911 si sposa con Rosa Cassin (1880-1956), da cui avrà due figli: Ugo (1912-2001) e Roberto (1917-2016). La stagione torinese rappresenta l'apice della carriera accademica di Fano e il periodo più fecondo della sua attività scientifica, segnato dalla pubblicazione di oltre ottanta lavori, tra cui i primi studi sulle varietà tridimensionali che rappresenteranno il *leitmotiv* delle sue ricerche in geometria algebrica.[18]

Sono questi gli anni del definitivo inserimento di Fano nell'ambiente scientifico internazionale. Ciò è favorito sia dalla partecipazione ai Congressi Internazionali dei

---

[12] BSMT, *FFa*, lett. 9: F. Klein a G. Fano, Göttingen 5.2.1899: *Ich fasse die Professur wesentlich als eine geometrische Professur, d. h. ich wünsche, dass der Neuzuberufende die geometrische Anschauung hervorkehrt und nach allen Richtungen die geometrischen Studien belebt. Nun kennen Sie aber den Niedergang der Geometrie in der jüngeren deutschen Generation. Ich bin also auf den Gedanken gekommen, ob nicht Sie der geeignete Mann für uns wären*!. La lettera è edita in E. LUCIANO – C.S. ROERO 2012, *From Turin to Göttingen: dialogues and correspondence (1879-1923)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 32, pp. 195-196 ed è disponibile in formato digitale al link https://www.corradosegre.unito.it/fondofano/lettera9.pdf. Cfr. F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 2.3.1899, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 401.

[13] G. Fano a F. Klein, Torino 10.2.1899, edita in LUCIANO – ROERO 2012, *cit*., pp. 197-198.

[14] U. FANO 2000, *The memories of an Atomic Physicist for my Children and Grandchildren*, «Physics Essays» (2) 13, p. 178: "be Germanized".

[15] Essendo arrivato secondo al concorso per ordinario di algebra e geometria analitica a Pavia, Fano è nominato straordinario a Messina a partire dal 1.12.1899. Sul desiderio di tornare a Torino, cfr. le lettere inedite disponibili in P. GARIO (ed.) 2010, *Lettere e Quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo: corrispondenza con Gino Fano*: G. Fano a G. Castelnuovo, Pavia 26.10.1899; Messina 3.12.1899; 29.12.1899; 17.1.1900; 30.1.1900; 7.2.1900; Cairo 14.2.1900; Messina 21.3.1900; 13.5.1900; 7.3.1901; 24.4.1901; 26.4.1901. Nel maggio del 1900 Fano è supplente sulla cattedra di Geodesia a Messina, assumendo congiuntamente la direzione del relativo Gabinetto.

[16] *Ivi*, G. Fano a G. Castelnuovo, Messina 5.5.1901: "Alla *Gazzetta di Messina* è arrivata l'altra sera un telegramma colla notizia della mia nomina a Torino, come già portata dal *Bollettino*!". La commissione del concorso per la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva a Torino è composta da Castelnuovo, Del Re, Montesano, Segre e Veronese. Oltre a Fano (1° posto), al concorso partecipano Amodeo, Pannelli, Ciani (2° posto), De Franchis e Beppo Levi (3° posto *ex aequo*).

[17] *Ivi*, G. Fano a G. Castelnuovo, Torino 10.11.1901.

[18] Questo aspetto è approfondito nei capitoli 1 e 2 di questa tesi. Cfr. J. MURRE 1994, *On the work of Gino Fano on three-dimensional algebraic varieties*, in A. BRIGAGLIA, C. CILIBERTO, E. SERNESI (eds.), *Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Supplemento «Rend. Circ. Mat. Palermo» (2) 36, pp. 219-229.

Matematici di Roma (1908), Cambridge (1912), Bologna (1928) e Zurigo (1932)[19] sia dalla collaborazione al progetto dell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*.[20] Su invito di Klein, Fano scrive due saggi per la EMW, contenenti preziose note storiche: il primo dedicato alla dialettica tra geometria sintetica e analitica nel corso del loro sviluppo nell'Ottocento, il secondo sui gruppi continui.[21] Quest'ultimo avrà un'influenza significativa su Élie Cartan che ne curerà la versione rivista e ampliata in francese.[22] Nell'estate del 1904, inoltre, Fano è invitato speciale, insieme a H. Poincaré, all'undicesima riunione estiva dell'American Mathematical Society, tenuta a St. Louis.

La fama acquisita e i contatti con i coniugi Young valgono a Fano l'invito a tenere un ciclo di lezioni sulle ricerche geometriche italiane presso l'University College of Wales di Aberystwyth nel semestre invernale del 1923. Le lezioni tenute in questo contesto sono articolate in otto temi che partono dai contributi di Cremona e dei suoi successori per arrivare alle più recenti ricerche della Scuola italiana di geometria algebrica, evidenziando le connessioni con la ricerca internazionale.[23] Ancora, nel 1925 Fano è invitato, insieme a Guido Fubini, a rappresentare l'Ateneo torinese in occasione delle celebrazioni ufficiali per il bicentenario della fondazione dell'Accademia delle Scienze dell'Unione Sovietica.

Alla morte di Segre, Fano gli succede alla direzione della Biblioteca Speciale di Matematica, incarico che terrà dal 1924 al 1938.

---

[19] Fano è vicesegretario dell'ICM di Roma e presidente della sezione di geometria all'ICM di Bologna. Prima dell'arrivo a Torino, aveva partecipato ai Congressi di Zurigo (1897) e Parigi (1900).

[20] Sulla partecipazione di Fano a questo progetto editoriale, cfr. GARIO (ed.) 2010, *cit*.: G. Fano a G. Castelnuovo, Colognola ai Colli 17.9.1895 e 19.9.1895; G. Fano a F. Klein, Mantova 30.12.1895, edita in LUCIANO – ROERO 2012, *cit*., pp. 184-185. Cfr. poi ASUT, *Fasc. personale di G. Fano*: G. Fano a A. Pochettino, Torino 23.5.1923; A. Pochettino al Questore, Torino 23.5.1928; S. Pivano al Questore, Torino 21.5.1930. Cfr. infine BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 6.10.1951: "Per la storia, nel 1895 o 96, quando è sorta la prima idea dell'Enciclopedia ancora molto indeterminata, Fr. Meyer aveva scritto a me per la geometria, proponendomi di redigere un contributo relativo alla (sostanzialmente) geometria algebrica (nome che forse allora non esisteva ancora) 'inclusive mehrdimensional Räume'. Io per il momento devo aver nicchiato, finché il piano si è meglio concretato, e ne è venuta la suddivisione".

[21] G. FANO 1907a, *Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX Jahrhundert*, in EMW 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 221-228; G. FANO 1907b, *Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip*, in EMW 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 289-388.

[22] É. CARTAN 1915, *La théorie des groupes continus et la géométrie (exposé d'après l'article allemand de G. Fano)*, in ESM 3.1, Paris, Gauthier-Villars, pp. 1-135.

[23] Cfr. la sezione *Notizie* del «Period. Mat.» 1923, (4) 3, p. 147: "Il prof. Gino Fano dell'Università di Torino, che alla vasta cultura e all'alta scienza matematica unisce il felice possesso della lingua inglese, è stato invitato dall'Università del Galles a tenervi un corso di conferenze sulla Scuola geometrica italiana che, per lo studio delle equazioni e delle funzioni algebriche, riprendendo in nuova forma la tradizione dei grandi algebristi italiani del Rinascimento, ha conseguito – nel mondo matematico – un indiscusso primato"; G. FANO 1923a, *A preface to a series of special lectures on 'Italian Geometry'*, Shrewsbury, Walker. Fano è aiutato nella traduzione in inglese delle lezioni dalla sorella Maria Ettlinger, da Grace Chisholm e George A. Schott, quest'ultimo docente di matematica applicata ad Aberystwyth.

Con i provvedimenti razziali dell'autunno del 1938, crollano i "tre pilastri della sua vita: la famiglia, la patria e la professione".[24] Fano – tipico ebreo italiano, perfettamente integrato e assimilato – è rimosso da tutti i suoi incarichi. Dietro le reiterate insistenze dei familiari, si risolve a emigrare a Losanna: è, questa, una decisione ponderata, motivata dalla posizione neutrale della Svizzera nel conflitto mondiale. Risiede qui dal gennaio del 1939 al maggio del 1945, alloggiando dapprima in una modesta pensione, l'*Hotel des éstrangers*, insieme ad altri rifugiati per motivi razziali e politici, e successivamente all'*Hotel Élite*. In Svizzera Fano si dedica a molteplici attività: oltre a proseguire l'attività di ricerca, dal 1944 tiene i corsi di Geometria analitica, descrittiva e proiettiva nel *Camp Universitaire Italien* di Losanna, è docente e presidente delle commissioni d'esame di matematica dello Studio universitario di Huttwil e insegna geometria descrittiva all'*Ecole d'Ingénieurs* nella primavera del 1945, come supplente di J. Marchand.[25] Tra il maggio del 1942 e il febbraio del 1944, tiene cinque conferenze sulla geometria algebrica italiana presso il locale *Cercle Mathématique,* su invito di Georges De Rham.[26]

Al suo rientro in Italia, dopo la fine della guerra, Fano riprende solo nominalmente l'attività accademica, riducendo notevolmente la sua partecipazione alla vita universitaria e limitandosi a partecipare a qualche seduta di facoltà. Nel 1946 è collocato a riposo per sopraggiunti limiti di età. Nominato professore emerito nel luglio del 1948,[27] trascorre gli ultimi anni della sua vita tra Italia e Stati Uniti, dove risiedono i figli.

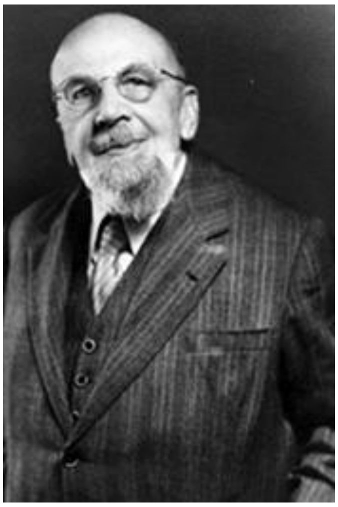


Fig. 1.1. Gino Fano.

[24] R. FANO 2004, *In Loving Memory of my Father Gino Fano*, in A. COLLINO, A. CONTE, M. MARCHISIO (eds.), *The Fano Conference. Torino 29 September-5 October 2002*, Torino, Dip. di Matematica, p. 3: "three pillars of his life: his family, his Country and his profession".

[25] Sull'emigrazione di Fano in Svizzera, cfr. E. LUCIANO 2017, *Scienza in esilio. Gustavo Colonnetti e i campi universitari in Svizzera (1943-1945),* «Pristem Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura» 41-42, Milano, Egea, pp. 87-99, 105-107; ID. 2022a, *Looking for a Space of Intellectual Survival. The Jewish Mathematical Emigration from Fascist Italy,* Series Science Networks. Historical Studies, Basel, Springer, pp. 235-251; ID. 2022b, *Gino Fano in Svizzera (1939-1945),* «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 31, pp. 1-30.

[26] Le ultime quattro conferenze sono analizzate nel CAPITOLO 4 di questa tesi.

[27] ASUT, *Fasc. personale di G. Fano*: M. Allara a G. Gonella, Torino 18.6.1948; G. Gonella a M. Allara, Roma 19.7.1948; M. Allara a G. Fano, Torino 24.7.1948; G. Fano a M. Allara, Mantova 1.8.1948.

Fano si spegne a Verona l'8 ottobre 1952, lasciando incompiuto il suo ultimo scritto: la commemorazione di Castelnuovo che sarà letta il 13 dicembre 1952 – due mesi dopo la sua morte – da Ugo Amaldi all'Accademia dei Lincei.

Per gli alti meriti scientifici, durante la sua lunga carriera, Fano è nominato socio di numerose accademie e istituzioni scientifiche (R. Accademia delle Scienze di Torino, R. Accademia dei Lincei, R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, R. Accademia Peloritana, R. Accademia Virgiliana di Mantova, Circolo Matematico di Palermo, UMI, SIPS). Riceve inoltre due importanti riconoscimenti per il suo impegno istituzionale: l'onorificenza di Ufficiale nell'Ordine della Corona d'Italia (1923) per il contributo alle attività del Comitato Regionale di Mobilitazione Industriale per il Piemonte[28] durante il primo conflitto mondiale e la Medaglia d'oro dei benemeriti della Pubblica Istruzione (1928) per la sua azione in favore della Scuola Operaia Serale Femminile di Torino.[29]

Pur essendo prevalentemente indirizzata verso la geometria algebrica classica, l'attività di ricerca di Fano si dipana in diversi campi della geometria.[30] La fase di formazione è segnata dall'influenza dei suoi tre grandi maestri – Segre, Castelnuovo e Klein – che lo orientano secondo tre indirizzi principali: quello proiettivo iperspaziale, quello birazionale e quello differenziale-gruppale. Di conseguenza, i primi studi di Fano sono dedicati ai fondamenti della geometria proiettiva iperspaziale e ai gruppi continui nella geometria proiettiva e birazionale.[31] In questo secondo ambito si colloca il lavoro sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nello spazio scritto 'a quattro' mani con Enriques.[32] A proposito di tale collaborazione, quest'ultimo scrive a Castelnuovo in questi termini:

> Col Fano ci siamo accordati per un lavoro in comune dove esporremo il risultato generale […] lui poi darà successivamente l'analisi minuta dei singoli tipi. La differenza fra i nostri metodi non era essenziale, soltanto egli faceva una discussione caso per caso dove invece io mi occupavo di stabilire il teorema generale con metodo più comprensivo. Tuttavia in alcuni punti le considerazioni del Fano avranno la preferenza perché più semplici. Debbo anzi dirti che in questa

---

[28] Cfr. ASUT, *Corrispondenza BSMT*: M. Caputo a A. Terracini, Torino 22.4.1953; A. Terracini a M. Caputo, Torino 23.4.1953; A. Terracini a A. Provenzali, Torino 23.4.1953.

[29] Cfr. la lettera di G. Fano al Presidente della R. Acc. Virgiliana, Torino 24.11.1935, edita in JANOVITZ – MERCANTI 2008, *cit.*, p. 150.

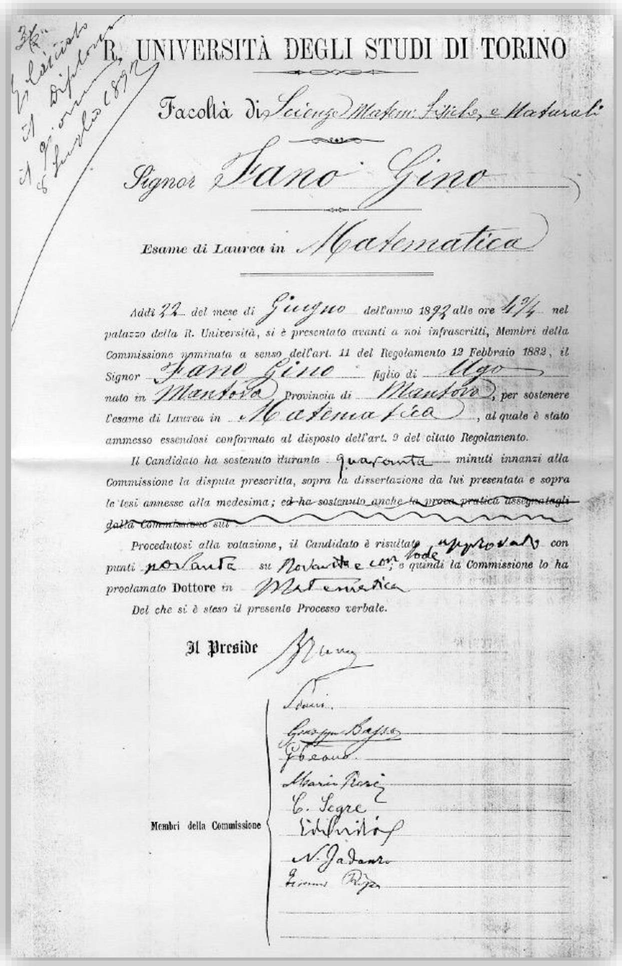
[30] Per una panoramica sui contributi di Fano cfr. A. COLLINO – A. CONTE – A. VERRA 2014, *On the life and scientific work of Gino Fano*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 7, pp. 104-111.

[31] Sui contributi di Fano a questi settori, cfr. L. BOI 1990, *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry 1880-1890: n-dimensional geometry in the works of D'Ovidio, Veronese, Segre e Fano*, «Arch. Int. Hist. Sci.» 40, pp. 67-71; T. HAWKINS 2000, *Emergence of the Theory of Lie Groups*, New York, Springer, pp. 251-260, 291-297, 306-308; M. AVELLONE – A. BRIGAGLIA – C. ZAPPULLA 2002, *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, «Archive for History of Exact Sciences» 56.5, pp. 385-391.

[32] F. ENRIQUES – G. FANO 1897, *Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane dello spazio*, «Ann. Mat.» (2) 26, pp. 59-98. A tal proposito, cfr. G. Fano a F. Klein, Roma 9.4.1897, edita in LUCIANO – ROERO 2012, *cit.*, pp. 193-195: "Von hier aus bin ich auch, zusammen mit Herrn Enriques, auf die Bestimmung sämmtlicher contin. Gruppen Cremona'scher Transf. des Raumes geführt worden; darüber denken wir eine Abhandlung in unseren "Annali" zu veröffentlichen, und darauf werden vielleicht zwei weitere Arbeiten von mir folgen, wo die wichtigsten Fälle besonders untersucht werden".

occasione mi sembra che il Fano abbia dimostrato nei suoi ragionamenti più originalità del solito.[33]

Fano dà anche alcuni contributi significativi nel campo delle varietà algebriche definite da equazioni differenziali lineari[34] e in geometria della retta, estendendo lo studio delle congruenze di rette a quelle di terzo grado. Senza abbandonare del tutto queste tematiche, la maturità scientifica di Fano è segnata dallo studio della geometria birazionale in dimensione tre e dei relativi problemi di razionalità – cui si aggiungono i contributi su superfici K3, superfici di Enriques e i loro automorfismi e sulle trasformazioni birazionali di contatto del piano – che "hanno portato più innanzi i confini del nostro mondo geometrico".[35]


R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Facoltà di Scienze Matem. Fisiche, e Naturali

Signor Fano Gino

Esame di Laurea in Matematica

Addì 22 del mese di Giugno dell'anno 1892 alle ore 4¾ nel palazzo della R. Università, si è presentato avanti a noi infrascritti, Membri della Commissione nominata a senso dell'art. 11 del Regolamento 12 Febbraio 1882, il Signor Fano Gino figlio di Ugo nato in Mantova Provincia di Mantova, per sostenere l'esame di Laurea in Matematica, al quale è stato ammesso essendosi conformato al disposto dell'art. 9 del citato Regolamento.

Il Candidato ha sostenuto durante quaranta minuti innanzi alla Commissione la disputa prescritta, sopra la dissertazione da lui presentata e sopra le tesi annesse alla medesima; ~~ed ha sostenuto anche la prova pratica assegnatagli dalla Commissione sul~~

Proceduti alla votazione, il Candidato è risultato approvato con punti novanta su novanta e con lode; e quindi la Commissione lo ha proclamato Dottore in Matematica.

Del che si è steso il presente Processo verbale.

Il Preside

Membri della Commissione

C. Segre

Fig. 1.2. Certificato di laurea di Fano [ASUT, XD 193, 36].

[33] F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 26.2.1897, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, pp. 323-324.

[34] A tal proposito, cfr. F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 24.6.1894, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 115: "Ho ricevuto una risposta dal Fano da Göttingen: lo scopo delle sue ricerche è quello di applicare quelle cose geometriche alla teoria delle equazioni differenziali lineari". Cfr. inoltre G. Fano a F. Klein, Roma 3.2.1895 e 20.4.1895, edite in LUCIANO – ROERO 2012, *cit.*, pp. 170-180; Fano a F. Klein, Mantova 30.12.1895, *ivi*, pp. 184-187.

[35] A. TERRACINI 1953, *Commemorazione del Socio Gino Fano*, «Rend. ANL» (8) 14, p. 710.

2. *Le ricerche sulle Fano threefolds: dalle carte manoscritte all'irrazionalità della cubica di* $\mathbb{P}^4$

Nonostante la vastità degli interessi di ricerca di Fano, i suoi contributi più celebri sono quelli relativi allo studio e alla classificazione birazionale delle varietà algebriche tridimensionali (comunemente note come threefolds), ambito cui il nome di Fano è ancora oggi legato. L'importanza delle sue ricerche in questo settore, scaturite dall'analisi della cubica di $\mathbb{P}^4$, era già riconosciuta dai contemporanei di Fano come testimoniano le parole di Terracini:

> [Queste ricerche] costituiscono in qualche modo il primo suo approccio verso il problema dell'irrazionalità di quella varietà, problema il quale, evolvendosi successivamente nell'inquadramento di problemi più generali, doveva ritenere l'attenzione di Fano – a notevoli intervalli di tempo – fino agli ultimi suoi lavori, coi quali egli poté giungere ad enunciare una risposta (sia pure non senza riserve) conclusiva per quel primitivo problema. Era un problema difficile e refrattario, che fin dai primi studi di geometria algebrica sulle varietà ha dovuto imporsi all'attenzione dei geometri «suscitando» come dice lo stesso Fano «viva curiosità», dopo i classici risultati concernenti le cubiche piane e le superficie cubiche generali. I termini impiegati da Fano mi pare implichino una certa modestia: era un problema dalla cui stessa posizione già si poteva presumere che avrebbe dato luogo, nelle mani dello stesso Fano, a sviluppi atti ad illuminare in qualche modo la natura delle varietà algebriche tridimensionali, tanto più riposta nei confronti di quella delle curve e delle superfici.[1]

Se, da un lato, le ricerche di Fano si sviluppano intorno a una delle questioni centrali della geometria algebrica in campo internazionale, dall'altro si collocano nel solco della continuità con la tradizione geometrica della Scuola di Segre. Si presentano infatti come la naturale estensione in dimensione superiore dei problemi relativi alla classificazione di curve e superfici e sono caratterizzate da un approccio prevalentemente proiettivo che "porta i geometri italiani a divinazioni, più che a risultati, notevoli, ma costituisce, in questo campo più ancora che in altri, il vero limite della Scuola".[2]

Nella letteratura relativa alle ricerche di Fano sulle threefolds, emergono due tendenze complementari e talvolta contrapposte. Sul versante storico è ormai consolidato che gli studi di Fano, soprattutto quelli dell'ultimo periodo, si collocano nella fase del declino della Scuola italiana di geometria algebrica, quando i risultati erano intuiti piuttosto che dimostrati. D'altra parte, in ambito matematico, è ampiamente riconosciuta l'originalità delle sue idee geometriche che gli consentono di affrontare questioni complesse, senza avere a disposizione degli strumenti adeguati. La creatività di Fano in campo matematico si rivela così fondamentale, permettendogli di

> affrontare questi problemi praticamente a mani vuote poiché mancavano i fondamenti per le varietà algebriche di dimensione superiore. Lo sviluppo moderno ha mostrato che Fano aveva

---

[1] TERRACINI 1952, *cit.*, p. 488.

[2] BRIGAGLIA – CILIBERTO 1998, *cit.*, p. 257.

essenzialmente ragione e, una volta presenti le fondamenta, i suoi metodi erano corretti ed efficaci.[3]

L'esigenza di accostare e armonizzare queste due istanze emerse in storiografia e il ritrovamento di alcuni manoscritti inediti risalenti ai primordi degli studi sulle threefolds, ci conducono a riconsiderare questa messe di lavori e risultati di Fano, adottando una lente di indagine patrimoniale.

2.1. Dagli albori delle ricerche sulle threefolds alle carte manoscritte

Il punto di partenza delle ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali si colloca all'interno della tradizione geometrica italiana. Egli, infatti, prende le mosse dal problema di Lüroth in dimensione superiore – che consiste nel determinare se le varietà unirazionali siano anche necessariamente razionali – con l'obiettivo di estendere i risultati di razionalità e di classificazione ottenuti da Castelnuovo e Enriques per le superfici qualche anno prima.[4]

Solitamente l'esordio delle ricerche di Fano in questo settore è collocato nel 1904, quando pubblica un primo lavoro sulla varietà cubica generale di $\mathbb{P}^4$ priva di punti doppi.[5] Al suo interno, con un approccio prettamente proiettivo, sono determinati gli spazi tangenti alla threefold in 2, 3 o 4 punti distinti. In realtà, l'interesse di Fano per le varietà tridimensionali, almeno in relazione al loro gruppo delle trasformazioni proiettive, risale a una decina di anni prima. Nel 1895, confrontandosi con Castelnuovo che – non a caso – in contemporanea si sta occupando delle questioni di razionalità delle superfici, Fano afferma:

> Ho continuato a occuparmi un po' delle M_3 di S_4 con un gruppo transitivo di trasformazioni projettive in sé, cercando soprattutto di determinare quelle con un gruppo (almeno) ∞^4 di trasformazioni senza ricorrere a quelle con un gruppo ∞^3 (soltanto). Sono ricorso alla configurazione delle linee formate dalle direzioni delle tangenti quadripunte; le analoghe delle asintotiche, e mi pare sussista il teorema che i loro S_3 osculatori sono sempre tangenti alla M_3 nel punto di osculazione. Queste linee formano uno o più sistemi ∞^2; sicché nel caso di 1 gruppo almeno ∞^4 ciascuna di esse ammette almeno ∞^2 trasformazioni proiettive in sé; è dunque una C^n razionale normale avendo n uno dei valori $4, 3, 2, 1$, a meno che per qualche operazione non siano uniti tutti i punti della curva, il che però non può accadere se la curva appartiene a S_4, e nemmeno se appartiene a S_3 e la varietà non è un cono. Io non ho ancora scritto niente, ma ho abbozzati, in mente, vari casi; si trova, in non so quanti modi, la M_3^3 luogo delle rette che si appoggiano a due coniche con 1 punto comune, e poi delle varietà, che forse si ridurranno a un caso solo, costituite da ∞^1 coni di S_3 coi vertici su di una retta, e gli S_3 formanti un fascio attorno

[3] MURRE 1994, *cit.*, p. 224: "tackle these problems almost empty-handed because there was no foundation for higher dimensional algebraic varieties. The modern development has shown that Fano was essentially right and, once the foundations were available, his methods were correct and effective".

[4] Cfr. G. CASTELNUOVO – F. ENRIQUES 1897, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, «Math. Ann.» 48, pp. 241-316.

[5] G. FANO 1904, *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti*, «Ann. Mat.» (3) 10, pp. 251-285.

a un piano per questa retta. Non so cosa ne caverò ancora in queste vacanze: difficoltà gravi forse non ce ne saranno, ma sono questioni estremamente lunghe.[6]

Fano si dedica allo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli a partire dalla nota presentata all'Accademia delle Scienze di Torino nel 1908, dichiarando che

> Invece per le varietà algebriche a tre dimensioni l'annullarsi di tutti i generi (analoghi ai precedenti) non è ancora condizione sufficiente perché esse possano rappresentarsi biunivocamente sullo spazio S_3; e scopo di questa breve Nota è appunto di assodare l'esistenza – che si presenta per la prima volta nel caso di varietà a tre dimensioni – di tipi birazionalmente distinti di varietà aventi tutti i generi nulli.[7]

Mentre il problema di Lüroth ha risposta affermativa nei casi di dimensione uno e due, il lavoro di Fano del 1908 e le successive ricerche di Enriques[8] conducono a una prima intuizione del fatto che la questione ha risposta negativa per varietà di dimensione tre: in particolare, l'intersezione completa di una quadrica e di una cubica dello spazio a cinque dimensioni – la $M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$ per Fano – è unirazionale ma non razionale. Tale risultato verrà provato rigorosamente solo negli anni Settanta da V.A. Iskovskikh e Y.I. Manin (1971),[9] ma fin da subito le sue implicazioni appaiono importanti agli occhi dei geometri italiani. Da questi primi tentativi, emerge inoltre l'impossibilità di fornire un criterio di razionalità per le varietà a tre dimensioni analogo a quello di Castelnuovo per le superfici (1896), basato sull'annullarsi di alcuni invarianti birazionali come i plurigeneri:[10] lo studio delle threefolds aventi tutti i plurigeneri nulli diventa una delle principali vie di ricerca, all'interno della quale Fano si inserisce.

Da questo momento, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali si dipanano in più direzioni, tra cui spicca l'introduzione delle varietà V oggi note come Fano threefolds, caratterizzate modernamente dalla proprietà di avere il divisore anticanonico $|-K_V|$ ampio.[11]

Per proseguire è necessario introdurre alcuni elementi fondamentali della notazione adottata da Fano. Egli considera le famiglie di threefolds M_3^{2p-2} immerse nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{p+1}$ di grado (o "ordine" nella terminologia di Fano) $2p-2$ e con curve-sezioni di genere p.[12] Tali

---

[6] GARIO (ed.) 2010, *cit.*: G. Fano a G. Castelnuovo, Colognola ai Colli 17.9.1895. Bisogna tener presente che Fano indica con S_n lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ e con M_3 le varietà algebriche tridimensionali.

[7] G. FANO 1908b, *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, «Atti R. Acc. Sci. Torino» 43, p. 973.

[8] F. ENRIQUES 1912, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, «Rend. ANL» (5) 21, pp. 81-83.

[9] Cfr. V.A. ISKOVSKIKH – Y.I. MANIN 1971, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lueroth problem*, «Sbornik: Mathematics» 86.128, pp. 140-166.

[10] Per un interessante survey sulle questioni di razionalità e unirazionalità dalla geometria algebrica classica a quella moderna, cfr. A. VERRA 2005, *Problemi di razionalità ed unirazionalità in geometria algebrica*, «Boll. UMI» (8) 8-B, n. 1, pp. 77-102.

[11] Modernamente, una varietà proiettiva V è detta varietà di Fano se $-K_V$ è ampio. L'indice di V è il massimo intero r tale che $-K_V = -rL$ per un fibrato lineare L. Se $Pic(V) = \mathbb{Z}$, allora V si chiama varietà di Fano della prima specie.

[12] Cfr. G. FANO 1931b, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 116-117: "Le due varietà ora considerate appartengono alla categoria delle varietà M_3^{2p-2} dello spazio S_{p+1}, aventi superficie-sezioni regolari coi generi tutti $= 1$, e come curve-sezioni curve canoniche di genere p". In altri termini, Fano considera

varietà tridimensionali contengono come sezioni iperpiane delle superfici $F^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$, aventi quindi il medesimo ordine della varietà di partenza e tutti i plurigeneri uguali a 1; dal punto di vista moderno, sono superfici del tipo K3. Dall'intersezione di due generiche sezioni iperpiane, si ottengono delle curve-sezioni canoniche $C_p^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ dello stesso ordine e di genere p.

Queste particolari varietà di dimensione tre sono introdotte da Fano in modo sistematico nel 1928, durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna.[13] Vi sono quindi vent'anni "di silenzio" che separano l'ultimo lavoro a stampa sulle Fano threefolds e la comunicazione presentata a Bologna. La ragione di una tale distanza temporale non risiede però in una perdita di interesse da parte di Fano per questo tema, quanto piuttosto nella necessità di trovare ed elaborare nuovi metodi e strumenti per affrontare la questione, anche procedendo per tentativi e esplorando strade differenti, come emerge da alcuni suoi appunti sulle varietà tridimensionali, articolati in due parti distinte.[14]

Il primo *corpus* di carte (cc. 125-130) è costituito dalle minute di alcune lezioni dedicate alle principali differenze che si incontrano nello studio delle superfici algebriche e in quello delle threefolds che Fano avrebbe voluto tenere durante il ciclo di seminari che era stato invitato a presentare ad Aberystwyth nel semestre invernale del 1923. Come dichiarato da lui stesso, questi argomenti non erano poi stati affrontati per ragioni di tempo.[15]

In apertura, Fano si rifà alle ricerche di Severi degli anni 1906-1909 sulle varietà di dimensione superiore, da cui riprende alcune nozioni fondamentali come quelle di genere geometrico e aritmetico, connessione lineare, irregolarità superficiale e tridimensionale.[16]

La posizione iniziale assunta da Fano per affrontare il problema delle varietà tridimensionali consiste nel procedere per analogia con le superfici ma, come mette in luce, emergono subito alcune differenze importanti.

La prima di esse riguarda alcuni caratteri del sistema canonico, che Fano introduce nei termini seguenti:

> Sulle superficie, il sistema canonico, supposto esistente, è il sistema $|C' - C|$, liberato dalle eventuali sue componenti eccezionali. E anche se esso non esiste, si possono calcolare i caratteri, genere ω_1 e grado ω_2, del sistema virtuale $|C' - C|$, che sono invarianti relativi. E tali caratteri sono indipendenti dal genere, in particolare dal genere aritmetico della superficie. Similmente, sopra una V_3, il sistema $|F' - F|$ è indipendente da F, e, a meno di superficie eccezionali (trasformabili in punti o linee semplici) coincide col sistema canonico, supposto esistente. Indicando con $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ i caratteri virtuali = grado, genere curvilineo, genere aritmetico = di una

una threefold immersa in modo tale che la sua curva-sezione sia canonica. Allora tale curva deve essere di genere p e immersa in $\mathbb{P}^{p-1}$; di conseguenza la threefold in questione deve essere immersa in $\mathbb{P}^{p+1}$. Questa proprietà è espressa in termini moderni nella prop. 1.1 di pag. 2 dell'articolo M. ANDREATTA – R. PIGNATELLI 2023, *Fano's Last Fano*, «Atti ANL» (9) (in corso di stampa).

[13] FANO 1931b, *cit.*, pp. 115-121.

[14] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, cc. 45-46, 52, 125-130.

[15] FANO 1923a, *cit.*, p. 3: "8. A short account of the new essential differences we meet with in the theory of algebraic M_3's. […] The nature of the audience obliged me to stop much longer than I thought at No. 1 and 4 […] therefore No. 5 and 8 were completely given up".

[16] Nella premessa, prima di passare alle definizioni, Fano riprende quasi testualmente alcuni passi di Severi che in quegli anni aveva iniziato ad assumere un ruolo centrale nella matematica italiana. A tal proposito, si confronti BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 125*r* con F. SEVERI 1907, *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, «Rend. ANL» (5) 16, p. 337.

> superficie $|F' - F|$ si possono questi valutare virtualmente, anche nell'ipotesi che non esista effettivamente una superficie $F' - F$, e quindi nemmeno il sistema canonico. Essi sono invarianti relativi […].[17]

Tuttavia, a differenza di quanto accade nel caso delle superfici, i caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ appena introdotti non sono indipendenti dal genere aritmetico della threefold P_a, bensì risultano ad esso legati dalla relazione[18]

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Come sottolineato da Fano, i caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ delle varietà tridimensionali erano stati oggetto di studio anche da parte di Marino Pannelli, cultore di geometria algebrica e figura di secondo piano, considerato da Severi – come riporta Tricomi – "uno dei migliori fra gli studiosi italiani di quella disciplina non pervenuti ad una cattedra universitaria".[19] In particolare, Pannelli aveva determinato alcune relazioni tra i caratteri numerici delle threefolds invarianti per trasformazioni birazionali tra cui Ω_2, invariante relativo che tornerà all'interno del secondo gruppo di carte manoscritte di Fano.[20]

Ciò che per Fano costituisce la seconda "differenza notevole" tra le superfici algebriche e le threefolds riguarda le conseguenze dell'annullarsi dei plurigeneri: infatti

> mentre le prime se hanno tutti i generi nulli (genere e plurigeneri) sono razionali, e basta anzi siano nulli $p_a = P_2 = 0$, esistono V_3 a generi tutti nulli eppure non razionali.[21]

Proseguendo il parallelo con la teoria delle superfici, Fano osserva che le superfici razionali, le involuzioni sulle superfici razionali e le superfici contenenti un fascio razionale di curve razionali sostanzialmente coincidono, ossia costituiscono classi birazionalmente equivalenti di enti algebrici. Invece, passando alle threefolds,

> si hanno 3 diversi tipi di enti, in generale non riducibili l'uno all'altro:
> 1) V_3 razionali = cioè rappresentabili su S_3.
> 2) Involuzioni sulle V_3 razionali o in S_3 = trasformate (semplicemente) razionali di S_3.
> 3) V_3 contenenti una congruenza del 1° ordine di curve C razionali.[22]

Fano rivela così qual era stata l'idea che lo aveva guidato nella stesura del suo lavoro del 1908. Qui era giunto all'irrazionalità delle due threefolds $M_3^4 \subset \mathbb{P}^4$ e $M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$ prendendo in esame i sistemi lineari di superfici regolari di generi uno in esse contenuti e il gruppo delle trasformazioni birazionali di tali threefolds, con l'obiettivo di individuare qualche proprietà

[17] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 126*v*.

[18] La medesima formula compare in SEVERI 1907, *cit.*, p. 340 e in ROTH 1955, *cit.*, p. 92.

[19] F. TRICOMI 1962, *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (4) 1, p. 83

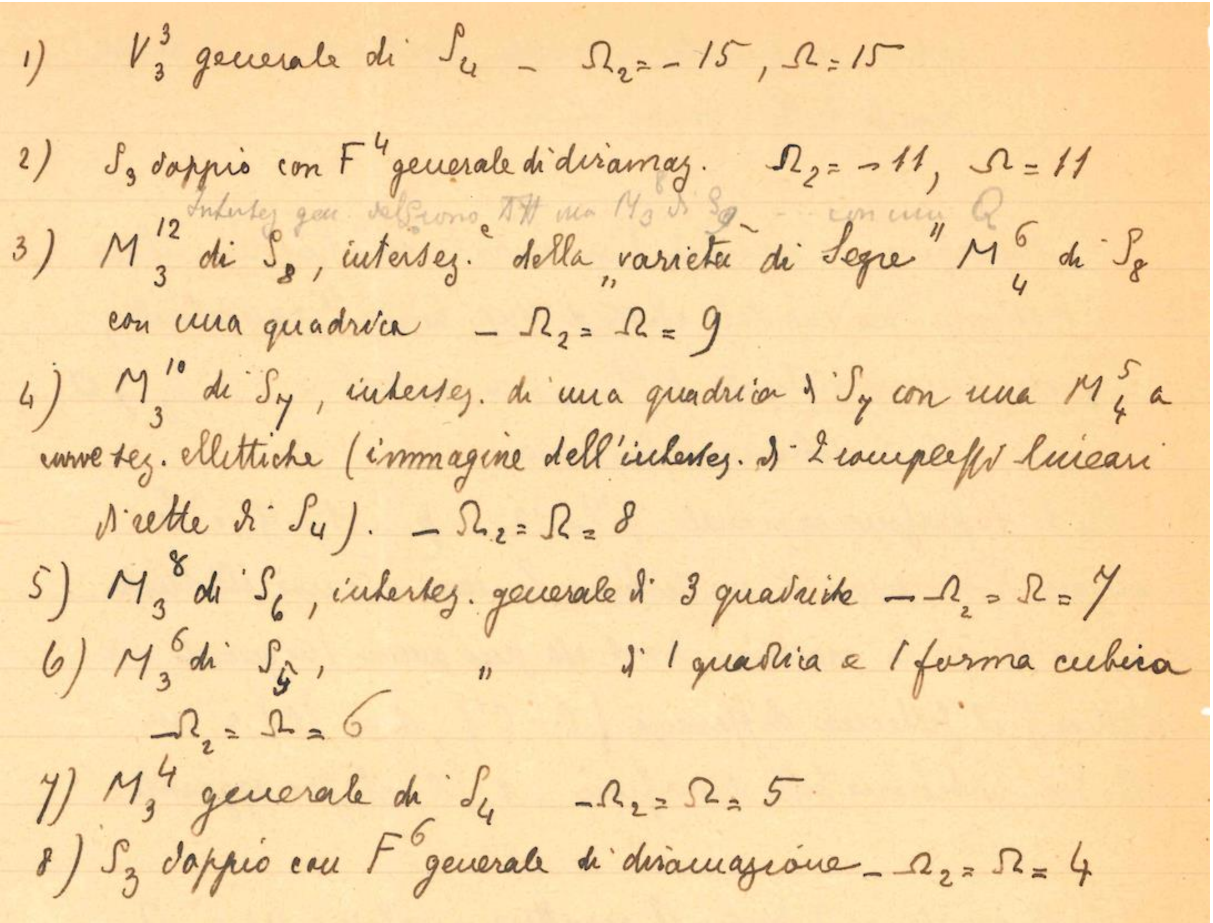
[20] Cfr. M. PANNELLI 1906a, *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni*, «Rend. ANL» (5) 15, pp. 483-489; M. PANNELLI 1906b, *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, «Rend. ANL» (5) 15, pp. 619-629.

[21] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 128*r*.

[22] *Ivi*, c. 130*r*.

differente da quelle dei medesimi enti di $\mathbb{P}^3$. In questo modo, aveva potuto dedurre l'impossibilità di rappresentare le threefolds considerate su $\mathbb{P}^3$, ovvero la loro irrazionalità.[23]

Ad Aberystwyth Fano illustra infine il caso particolare delle threefolds a superfici-sezioni razionali – ossia "contenenti un sistema lineare semplice di superficie razionali"[24] – per le quali ha già ottenuto la razionalità, con l'unica eccezione della cubica di $\mathbb{P}^4$. Come esplicitato negli *Appunti vari*, per ottenere questo risultato Fano ricorre a un numero finito di aggiunzioni di rango uno che trasformano il sistema $|F|$ di superfici razionali contenute nella threefold in un sistema lineare di superficie razionali a curve intersezioni iperellittiche o in uno equivalente a un sistema di coni con lo stesso vertice.[25]


1) V_3^3 generale di S_4 – $\Omega_2 = -15$, $\Omega = 15$

2) S_3 doppio con F^4 generale di diramaz. $\Omega_2 = -11$, $\Omega = 11$

3) M_3^{12} di S_8, intersez.e della "varietà di Segre" M_4^6 di S_8 con una quadrica – $\Omega_2 = \Omega = 9$

4) M_3^{10} di S_7, intersez. di una quadrica di S_7 con una M_4^5 a curve sez. ellittiche (immagine dell'intersez. di 2 complessi lineari di rette di S_4). – $\Omega_2 = \Omega = 8$

5) M_3^8 di S_6, intersez. generale di 3 quadriche – $\Omega_2 = \Omega = 7$

6) M_3^6 di S_5, " di 1 quadrica e 1 forma cubica – $\Omega_2 = \Omega = 6$

7) M_3^4 generale di S_4 – $\Omega_2 = \Omega = 5$

8) S_3 doppio con F^6 generale di diramazione – $\Omega_2 = \Omega = 4$

Fig. 2.1. Prima classificazione delle threefolds nelle minute di Fano.

Dal titolo *Appunti e vedute concernenti le varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* (cc. 52, 45, 46), il secondo gruppo di carte manoscritte contiene gli studi preliminari della comunicazione presentata da Fano a Bologna. Le minute, probabilmente redatte tra la primavera e l'estate del 1928, portano alla luce una prima classificazione delle Fano threefolds M_3 basata sul carattere numerico Ω_2. All'interno di questi appunti, Fano affronta la questione

[23] *Ivi*, c. 128*r*. Cfr. FANO 1908b, *cit*., pp. 973-974.

[24] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 130*v*.

[25] Trattasi di un sistema lineare appartenente a una congruenza del prim'ordine di curve razionali con superfici unisecanti.

partendo dall'esigenza di individuare un carattere aritmetico analogo all'invariante di Castelnuovo-Enriques ω per le superfici, invariante relativo il cui valore massimo per una classe di superfici birazionalmente equivalenti è però un invariante assoluto, cioè il genere lineare virtuale $p^{(1)}$ della curva canonica. Ancora una volta, come nelle carte di Aberystwyth, dalle parole di Fano emerge il tentativo di procedere in analogia con lo studio delle superficie algebriche:

> Per le varietà a 3 dimensioni, il carattere analogo a ω è Ω_2, genere aritmetico virtuale della superficie canonica. Anch'esso è un invariante relativo; ma un suo valore estremo, per una data classe di enti birazionalmente identici, costituirà del pari, per la classe, un invariante assoluto. Come tale, conviene prendere il valore assoluto massimo di Ω_2, per enti della classe; lo indico con Ω.[26]

Fano, quindi, considera il massimo del valore assoluto degli Ω_2 calcolati come generi aritmetici virtuali delle superfici canoniche per una certa famiglia di threefolds birazionalmente equivalenti. In tal senso, Ω risulta un invariante assoluto della classe di birazionalità.

È poi fornita la prima classificazione delle Fano threefolds basata su questo invariante che sostanzialmente coincide con quella successivamente esposta a Bologna, con l'unica eccezione del caso $p = 8$ (Fig. 2.1). La differenza primaria con la comunicazione presentata al Congresso risiede nel fatto che a Bologna Fano classifica invece tali varietà in base al valore di p, genere geometrico delle curve-sezioni. Prendendo in considerazione il manoscritto del 1928 e il relativo lavoro a stampa del 1931, la prima classificazione sistematica di Fano delle M_3^{2p-2} può essere sintetizzata come in tabella.[27]

$\boldsymbol{p}$	$\lvert\boldsymbol{\Omega_2}\rvert$	$\boldsymbol{M_3^{2p-2}}$	**Descrizione moderna sintetica**
13	15	$V_3^3 \subset \mathbb{P}^4 \Leftrightarrow M_3^{24} \subset \mathbb{P}^{14}$	Threefold cubica $V(3) \subset \mathbb{P}^4$
9	11	$\mathbb{P}^3$ 'doppio' $\Leftrightarrow M_3^{16} \subset \mathbb{P}^{10}$	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 4
8	*	$M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$	$Gr(1,5) \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot H_5 \subset \mathbb{P}^9$
7	9	$M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$	Intersezione di una quadrica generica di $\mathbb{P}^8$ con l'immagine di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ immerso in $\mathbb{P}^8$ mediante il morfismo di Segre
6	8	$M_3^{10} \subset \mathbb{P}^7$	$Gr(1,4) \cdot V(2) \cdot H_1 \cdot H_2 \subset \mathbb{P}^7$
5	7	$M_3^8 \subset \mathbb{P}^6$	$V(2,2,2) \subset \mathbb{P}^6$
4	6	$M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$	$V(3,2) \subset \mathbb{P}^5$
3	5	$V_3^4 = M_3^4 \subset \mathbb{P}^4$	Ipersuperficie quartica $V(4) \subset \mathbb{P}^4$
2	4	$\mathbb{P}^3$ 'doppio'	Ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione di grado 6

[26] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 52*r*.

[27] In tabella si adotta la seguente notazione: * = questa threefold non compare nelle carte manoscritte; $\Leftrightarrow$ = varietà birazionalmente equivalenti; $V(d) \subset \mathbb{P}^N$ = ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^N$; $V(d_1, \dots, d_k) \subset \mathbb{P}^N$ = intersezione completa di k ipersuperfici di grado $d_1, \dots, d_k$ in $\mathbb{P}^N$; $Gr(n, k)$ = Grassmanniana dei sottospazi vettoriali $(k+1)$-dimensionali di uno spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$ o, equivalentemente, Grassmanniana di $\mathbb{P}^k$ in $\mathbb{P}^n$; H_i = iperpiano.

Nel manoscritto del 1928 la classificazione è seguita da alcune osservazioni. In primo luogo, Fano nota qui per la prima volta che le threefolds $M_3^{12}, M_3^{10}, M_3^8, M_3^6, M_3^4$ sono immerse in $\mathbb{P}^{p+1}$ e hanno grado $2p-2$ e curva-sezione canonica (ovvero – nel linguaggio di Fano – sono del tipo $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$), osservazione che a Bologna estenderà alle $M_3^{14}, M_3^{16}, M_3^{24}$. La seconda considerazione fatta da Fano è che le quattro varietà tridimensionali $M_3^{12}, M_3^{10}, M_3^8, M_3^6$ si possono ottenere come intersezioni di quadriche con varietà a quattro dimensioni $M_4^{p-1} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ a curve-sezioni ellittiche e, fatto ancor più notevole, esse corrispondono "ai soli 4 tipi di M_4^{p-1} $(p = 4, 5, 6, 7)$ che non sono coni".[28] Nel caso in cui M_4^{p-1} sia un $\mathbb{P}^0$-cono, si ricade nei due casi di ricoprimenti doppi di $\mathbb{P}^3$. È, questa, una considerazione che non sarà riproposta da Fano a Bologna né nei lavori a stampa successivi. Terzo e ultimo rilievo, invece ampiamente ripreso, modificato e ampliato nelle pubblicazioni posteriori al 1928, è la possibilità di "particolarizzare" – riprendendo il termine utilizzato da Fano – una threefold M_3^{2p-2}, riconducendola a una Fano threefold avente un valore maggiore di Ω. Questo significa che – tramite un'apposita mappa razionale sulla quale Fano, tuttavia, non fornisce alcuna informazione – una particolare M_3^{2p-2} può essere ridotta ad una Fano threefold con Ω più alto, che è quindi immersa in uno spazio proiettivo di dimensione maggiore.
Nello specifico, all'interno delle carte Fano illustra i seguenti cinque casi particolari:

1. Il ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione F^4 di quarto grado $(\Omega = 11)$ è riferibile a una $V_3^3 \subset \mathbb{P}^4$ $(\Omega = 15)$ se F^4 possiede un piano tangente lungo una conica.
2. La threefold M_3^6 $(\Omega = 6)$, se contiene due piani con un solo punto in comune, è riferibile a M_3^{12} $(\Omega = 12)$.
3. Se invece contiene tre piani, M_3^6 $(\Omega = 6)$ è riferibile alla varietà V_3^3 $(\Omega = 15)$.
4. M_3^4 $(\Omega = 5)$, se contiene rigata cubica razionale normale, è riferibile alla threefold M_3^8 generale $(\Omega = 8)$.
5. Il ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^3$ con superficie di diramazione F^6 di sesto grado $(\Omega = 4)$ è riferibile a una threefold M_3^4 $(\Omega = 5)$ con un punto doppio, se F^6 ammette una quadrica tangente lungo una curva C^6.

Per Fano, quindi, "particolarizzare" una M_3^{2p-2} significa richiedere che essa contenga un certo ente algebrico (un piano tangente lungo una conica di F^4 nel caso 1; due piani aventi un unico punto in comune nel caso 2; tre piani nel caso 3; una superficie rigata cubica razionale e normale nel caso 4; una quadrica tangente alla superficie F^6 lungo una curva di genere 6 nel caso 5). Il fatto che la Fano threefold contenga questi particolari oggetti permette a Fano di costruire – in un modo a noi oscuro, che gli appunti manoscritti non disvelano – una corrispondenza tra la varietà tridimensionale considerata e un'altra Fano threefold che la precede nella classificazione riportata in tabella (e che, quindi, corrisponde a valori maggiori di Ω e p).

A differenza del lavoro pubblicato negli *Atti* dell'ICM di Bologna, nelle carte manoscritte Fano dichiara esplicitamente il proprio 'piano di azione', delineando così una sorta di agenda di lavoro. Afferma infatti che le sue ricerche,

> intese a dimostrare, per quanto possibile, la irrazionalità di alcune fra queste varietà, sono state essenzialmente dirette a studiare:

[28] *Ivi*, c. 52*v*.

a. i sistemi lineari almeno ∞^2 di superficie regolari aventi tutti i generi $= 1$;
b. l'insieme (gruppo) delle eventuali trasformazioni birazionali;

e a cercare di trovare nei sistemi ***a.*** e nelle trasformazioni ***b.*** – naturalmente, a loro volta, legati fra loro – qualche proprietà che sia diversa da quelle dello spazio S_3, in modo da poterne concludere che si tratta di enti birazionalmente distinti.[29]

Nell'ultima parte degli appunti del 1928, Fano prende in considerazione una seconda famiglia di varietà tridimensionali V_3 aventi tutti i plurigeneri nulli: si tratta di threefolds singolari che – secondo Fano – sono "riferibili a M_3^n di S_4 con retta $(n-2)^{pla}$ – e quindi ∞^2 coniche, nei piani per questa retta".[30] Ciò significa che la threefold M_3^n di grado n considerata da Fano contiene una retta di molteplicità $n-2$ e ogni piano passante per tale retta interseca la threefold in un'ulteriore conica. Dopo aver rapidamente passato in rassegna quanto accade per $3 \leq n \leq 6$, l'autore si sofferma sul "carattere nuovo" che si presenta se $n > 6$. Proseguendo il parallelismo con la teoria delle superfici, scrive che a tali varietà

> corrisponderebbe, per così dire, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali. Per le rigate irrazionali, vien meno la relazione fra il carattere $p^{(1)}$ e la dimensione dei sistemi lineari di curve di genere uno [...]; e anzi, sulle rigate di genere $p > 0$, non esistono, all'infuori delle generatrici, curve di genere $< p$. Così qui, fuori delle superficie appartenenti alla congruenza di coniche, che sono razionali o riferibili a rigate, presumo vi sia un genere minimo delle superficie contenute nella varietà; genere minimo che potrebbe essere quello $\left(= \frac{(n-3)(n-4)}{2}\right)$ della retta $(n-2)^{pla}$, pensata come superficie (piano doppio) bisecante le coniche.[31]

Le minute del 1928 si chiudono con l'idea che sta alla base della classificazione delle varietà tridimensionali di Fano. Quelle del primo gruppo – ossia le Fano threefolds $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ – possono essere classificate in base al valore di Ω; le V_3 birazionalmente equivalenti a $M_3^n \subset \mathbb{P}^4$ si classificano invece a seconda della superficie di genere minimo in esse contenuta che biseca la congruenza di coniche appena introdotta. Il primo punto di questo programma sarà ampiamente sviluppato da Fano nel corso delle ricerche successive; il secondo sarà invece limitato alla comunicazione di Bologna.

2.2. "Esporre il risultato di un po' di lavoro sperimentale": la comunicazione di Bologna

Come anticipato, Fano presenta la prima classificazione sistematica delle Fano threefolds durante il Congresso Internazionale dei Matematici del 1928. Quello bolognese è un contesto caratterizzato da una forte presenza della Scuola italiana di geometria algebrica. A tal proposito, basti ricordare che i presidenti della sezione di geometria algebrica sono Fano stesso; Castelnuovo, che aveva assunto il ruolo di capo-scuola dopo la morte di Segre; Lucien Godeaux, perfezionatosi in tale disciplina proprio a Bologna con Enriques;[32] e Virgil Snyder,

---

[29] *Ivi*, c. 45*r*.

[30] *Ivi*, c. 46*r*.

[31] *Ivi*, cc. 46*r*-46*v*.

[32] Su Godeaux cfr. il CAPITOLO 3 di questa tesi.

addottoratosi nel dicembre del 1894 a Göttingen con Klein e in contatto con diversi geometri italiani, quali Fano e Domenico Montesano.[33] Qui, durante la celebre conferenza plenaria sulla geometria algebrica in Italia nella quale Castelnuovo espone il metodo di lavoro della Scuola, la portata delle ricerche intraprese da Fano è sottolineata con queste parole:

> Come decidere se una equazione assegnata a quattro incognite rappresenti una varietà razionale o semirazionale? Nulla sappiamo in proposito, nemmeno per i più bassi valori del grado, superiori a 2. Anzi, ricerche che il Fano prosegue da vari anni, e di cui vi parlerà in una sua comunicazione, fanno vedere quanto la questione sia complessa. Egli prende in esame le varietà che hanno nulli tutti i generi e i plurigeneri e le distribuisce in un numero finito di famiglie, di cui la prima si compone di varietà razionali, la seconda di varietà semirazionali e le altre di varietà che si staccano sempre più dalla razionalità. Una classificazione accurata di questi tipi getterebbe molta luce sopra una questione che è necessario risolvere per lo sviluppo futuro della geometria algebrica.[34]

Lo stesso Castelnuovo, a fine Ottocento, si era imbattuto nello studio delle varietà tridimensionali senza poi pubblicare nulla sull'argomento, probabilmente per i crescenti ostacoli che si incontrano in dimensione superiore.[35] All'inizio del 1896 a Castelnuovo sembra di aver individuato una dimostrazione della razionalità dell'ipersuperficie cubica non singolare[36] di $\mathbb{P}^4$, speranza che però svanisce nel giro di pochi mesi a causa di quelle "difficoltà che sorgono nella questione della varietà cubica; difficoltà che a dir vero non sembrano lievi".[37]

Emblematica del posizionamento delle ricerche di Fano nell'alveo della Scuola è l'apertura della sua comunicazione sulle threefolds. Ricollegandosi al discorso e ai contributi matematici di Castelnuovo, Fano introduce l'intervento in questi termini:

> La distinzione, che pareva tradizionale, tra scienze di ragionamento e scienze sperimentali è ormai sorpassata. In ogni scienza hanno parte l'esperienza e il ragionamento; la distinzione concerne solo le reciproche proporzioni. In matematica la parte riservata all'esperienza, piccola e limitata alla fase di scoperta, consiste essenzialmente nell'esame accurato di qualche caso particolare. Io mi propongo appunto di esporre qui il risultato di un po' di lavoro sperimentale, e di qualche

---

[33] Fano aveva conosciuto Snyder durante il soggiorno a Göttingen. Sul rapporto con Montesano, cfr. BIMF, *FMo*: V. Snyder a D. Montesano, Ithaca (NY) 27.1.1923; 4.4.1923; 1.6.1923; 7.11.1923; Padova 26.10.1928; 6.11.1928; Roma 26.2.1929; Ithaca (NY) 22.3.1930; 16.5.1930; V. Snyder a F. Severi, Ithaca (NY) 27.1.1923.

[34] G. CASTELNUOVO 1929, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 1, Bologna, Zanichelli, p. 200.

[35] La corrispondenza con Enriques testimonia il graduale abbandono di Castelnuovo delle ricerche in questo ambito, iniziate attorno al 1894. Cfr. F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 22.2.1894, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 77: "Ho […] cominciato a occuparmi delle V_3^n a sezioni ellittiche. […] Per le V^n a più di 3 dimensioni e sezioni ellittiche la questione non dovrebbe esser difficile a trattarsi."

[36] Cfr. F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 2.2.1896, edita *ivi*, p. 245: "Carissimo Castelnuovo, bravo! Quantunque io non possa seguire nei suoi dettagli il tuo ragionamento […] capisco che quel ragionamento deve condurre allo scopo: d'altronde è facile appurare la cosa. Dunque la V^3 è razionale! Ecco una nuova questione che ha resistito fin qui a tutti i tentativi e che tu riesci a superare felicemente!".

[37] F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 12.4.1896, edita *ivi*, p. 254. Nel prosieguo della lettera, Enriques dà il seguente suggerimento all'amico: "[…] la possibilità della trasformazione di essa deve dipendere dalle sue singolarità. Tuttavia speriamo ancora. E quando avrai un po' di tempo prova a costruire il sistema rappresentativo della V^3: mi pare il modo più sicuro. Se esso rappresenta la V^3 generale lo si deve riconoscere dal numero degli invarianti. Potrebbe anzi darsi che il tuo metodo pur essendo passibile di obiezione ti conducesse al sistema rappresentativo della V^3 generale".

congettura ulteriore, riguardo a una questione ardua e importante, che da tempo attende invano la soluzione. Chi, anche per poco, si è occupato di geometria algebrica a più dimensioni ha incontrato già sui primordi la questione della razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio a 4 dimensioni (V_3^3 di S_4) […]. Tale questione, posta già da oltre 40 anni, non è ancora risoluta. In questo frattempo si è, tra l'altro, brillantemente sviluppata la teoria generale delle superficie algebriche […] e sono state da Castelnuovo determinate le condizioni di razionalità di una superficie.[38]

Frutto di questo approccio euristico alla disciplina è inscrivere il problema della razionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$ all'interno della questione generale della razionalità delle varietà tridimensionali M_3 aventi tutti i plurigeneri uguali a zero, primo passo compiuto da Fano durante le sue indagini. Il passaggio successivo è rappresentato dallo studio dettagliato di due casi particolari, le threefolds V_3^4 e M_3^6, e dal confronto con quanto accade per la cubica di $\mathbb{P}^4$. Da quest'ultimo Fano matura la convinzione che

qualora le varietà in parola a generi nulli siano effettivamente non razionali, la M_3^6 di S_5, e così anche la V_3^4 di S_4, debbano essere notevolmente più lontane dalla razionalità che non la V_3^3 di S_4; e perciò per esse debba riuscire più facile l'assodarlo.[39]

Per questo motivo, nel periodo 1908-1915 Fano si era concentrato sulla dimostrazione dell'irrazionalità delle threefolds V_3^4 e M_3^6, come mette in luce a Bologna, a partire dallo studio delle trasformazioni birazionali su di esse.[40] A questo punto, riconosciuta l'appartenenza di queste threefolds particolari alla successione generale delle $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$, delinea la loro classificazione in base al genere p delle curve-sezioni canoniche. Individua quindi tutte le Fano threefolds che si ottengono per $p = 2, \dots, 9$ e $p = 13$, osservando tuttavia che

Esistono varietà M_3^{2p-2} del tipo in parola anche per valori più elevati di p; però, in quanto non siano coni o almeno luoghi di una ∞^2 di rette, forse soltanto per un numero finito di altri valori di p.[41]

Per quanto riguarda il problema centrale della razionalità, coerentemente con quanto annotato all'interno degli appunti del 1928 per Ω, Fano sostiene che "esaminando queste diverse varietà, si ha l'impressione che esse, qualora non siano razionali, tuttavia, al crescere di p, pur con qualche restrizione, vadano gradatamente accostandosi alla razionalità".[42] Inoltre, tali threefolds godono di una proprietà importante: possono essere proiettate dalle curve di ordine minore in esse contenute (e dunque in particolare, se esiste, da una retta – assunzione successivamente ribattezzata "ipotesi di Fano") in altre varietà dello stesso tipo che

---

[38] FANO 1931b, *cit.*, p. 115.

[39] FANO 1931b, *cit.*, p. 116. Cfr. con BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 45*r*: "Naturalmente, conveniva attaccare dapprima le varietà ultime dell'elenco precedente, che presumevo più lontane dalla razionalità, e per le quali era perciò da ritenersi più facile il conseguire un risultato positivo".

[40] Cfr. FANO 1908b, *cit.*, e G. FANO 1915a, *Osservazioni su alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, «Atti. R. Acc. Sci. Torino» 50, pp. 1067-1072.

[41] FANO 1931b, *cit.*, p. 117.

[42] *Ivi*, p. 118. Cfr. con BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 52*v*: "Si direbbe che il diminuire di Ω, cioè l'ordine progressivo di cui sopra, corrisponde a un progressivo allontanamento dalla razionalità".

corrispondono a valori minori di p ($M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ nello specifico) e che contengono una rigata cubica come immagine della curva centro di proiezione. Questa affermazione rappresenta un miglioramento significativo dell'affermazione contenuta nel manoscritto del 1928 circa la possibilità di ricondurre ogni Fano threefold a una varietà dello stesso tipo, caratterizzata però da un valore maggiore di Ω. Infatti, mentre negli appunti preparatorii si fa soltanto riferimento a delle "opportune particolarizzazioni", Fano qui individua uno strumento preciso: la proiezione della varietà tridimensionale da una curva in essa contenuta. Conclude infine:

> dal punto di vista birazionale […], ciascuna delle varietà enumerate comprende come casi particolari le successive (corrispondenti a valori più elevati di p); sicché il crescere di p implica, in massima, una progressiva particolarizzazione della M_3.[43]

Occorre tener presente che, fino a questo punto della comunicazione, Fano non ha introdotto gli invarianti Ω e Ω_2. Quest'ultimo compare solo nella seconda metà dell'esposizione, nuovamente introdotto per analogia con l'invariante di Castelnuovo-Enriques per le superfici. Tuttavia, a differenza di quanto compare nel manoscritto del 1928, a Bologna Fano afferma che nel caso delle M_3 tale invariante è pari a $-(p+2)$ e coincide con la dimensione dei sistemi di superfici di generi uno contenute nella threefold aumentata di una unità.

Sorge quindi un interrogativo riguardo al motivo che spinge Fano a introdurre nuovamente Ω_2, dopo aver già fornito una classificazione delle Fano threefolds basata sul valore di p. Da una parte, tale invariante gli consente di classificare non solo le $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$, ma anche le varietà tridimensionali riferibili a una $M_3^n \subset \mathbb{P}^4$ contenenti una retta $(n-2)^{pla}$, già prese in considerazione negli appunti del 1928, cui Fano dedica l'ultima sezione dello scritto dato alle stampe nel 1931. D'altra parte, questo modo di procedere mette in luce la volontà dell'autore di conferire lo *status* di patrimonio a una messe di scoperte e risultati all'interno di un nuovo campo geometrico, in larga parte ancora da esplorare e sviluppare. Questa considerazione è avvalorata dall'introduzione di nuova terminologia matematica da parte di Fano.

Come annotato a latere nel manoscritto del 1928 – probabilmente in un momento successivo rispetto alla prima stesura – egli definisce "semi-razionali" le varietà del primo tipo. Nel lavoro inviato per la pubblicazione all'interno degli *Atti* del Congresso, si illustra la motivazione di tale scelta: nel caso in cui queste varietà non siano effettivamente razionali, esse si presentano "come intermedie fra gli enti razionali e quelli aventi almeno uno dei generi e plurigeneri maggiore di zero".[44] Fano chiama invece "pseudo-razionali" le threefolds del secondo tipo, aventi "come analogo, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali".[45]

Pur non dichiarandolo esplicitamente, per esporre il frutto del suo "lavoro sperimentale" Fano ricorre a entrambe le vie di indagine da lui individuate nelle carte del 1928. Fa infatti riferimento sia all'esame dei sistemi lineari di superfici regolari, con i generi pari a uno, contenuti nella varietà (corrispondente al punto *a.* del manoscritto del 1928) sia allo studio delle trasformazioni birazionali (punto *b.*), il cui gruppo "cresce e si complica rapidamente al crescere

[43] FANO 1931b, *cit.*, p. 119.

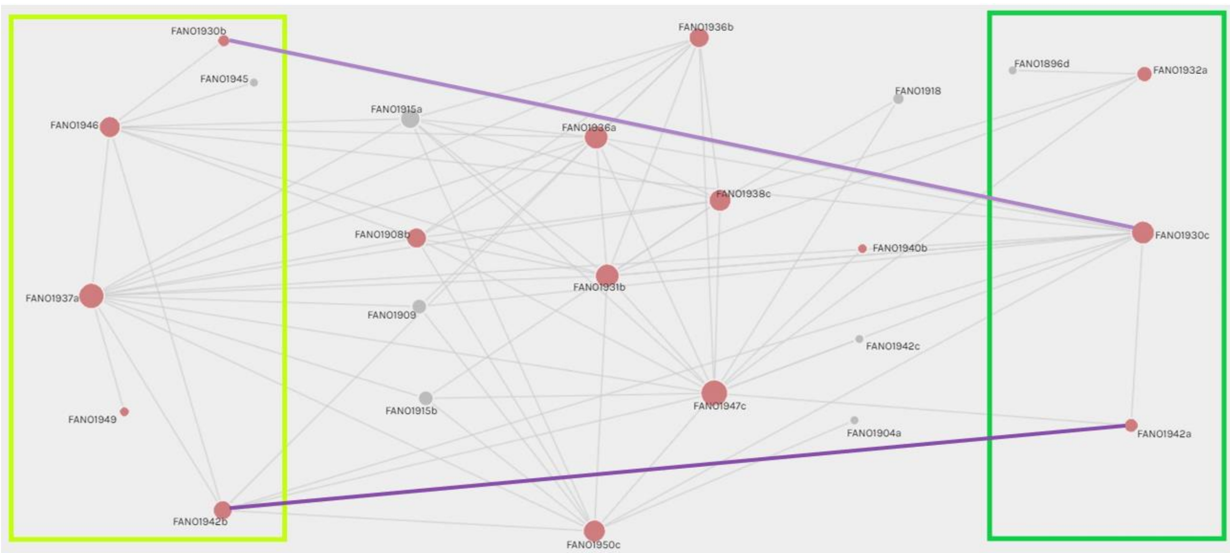
[44] *Ivi*, p. 121.

[45] *Ivi*, p. 120. Cfr. con BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 46*v*.

di p".[46] Quest'ultimo è strettamente legato all'analisi delle involuzioni sulle threefolds, ambito in cui le ricerche di Fano si intrecciano con quelle di Enriques e di Giorgio Aprile.[47] Lo studio di queste involuzioni, già introdotte nelle minute di Aberystwyth del 1923, è ripreso nel manoscritto del 1928 in relazione alla threefold M_3^6: Fano ricorda che Enriques aveva dimostrato che essa è riferibile a un'involuzione di $\mathbb{P}^3$ di ordine 216 – denotata con I_{216} – e che Aprile aveva messo poi in luce la possibilità di rappresentarla sopra una I_{36}. Nella comunicazione di Bologna è Fano a estendere l'analisi delle involuzioni ad altre threefolds, ottenendo che la varietà tridimensionale M_3^8 è rappresentabile sopra un'involuzione I_4 di $\mathbb{P}^3$; M_3^{10} su una I_6; V_3^3 su una I_2.

2.3. L'ultimo ventennio di ricerca sulle Fano threefolds: metodi e risultati

Fermo restando che nel nucleo centrale dei lavori sulle Fano threefolds successivi al 1928 sono utilizzati entrambi i metodi di indagine *a.* e *b.* dell'agenda di lavoro di Fano – o, sovente, una loro combinazione – è però possibile identificare due gruppi di pubblicazioni in cui è privilegiata una delle due strade (Fig. 2.2).[48]



a) Analisi delle superfici-sezioni aventi tutti i generi = 1

b) Studio delle trasformazioni birazionali

Fig. 2.2. Citational network dei lavori di Fano sulle threefolds.

---

[46] *Ivi*, p. 117.

[47] Cfr. F. ENRIQUES 1912, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, «Rend. ANL» (5) 21, pp. 81-83; G. APRILE 1921, *Sopra la involuzione non razionale di Enriques*, «Rass. Mat. Fis.» 1, pp. 133-136.

[48] In figura si illustrano i collegamenti – determinati dalle citazioni – tra i lavori di Fano sulle varietà tridimensionali. Da un lato (riquadro giallo) sono posizionati gli articoli in cui l'autore studia le threefolds a partire dall'analisi delle superfici K3, loro sezioni iperpiane; dall'altro (riquadro verde) i lavori in cui la questione delle varietà tridimensionali è affrontata dal punto di vista delle trasformazioni birazionali. Si evidenziano (tramite collegamento in viola) le coppie di scritti pubblicati nello stesso anno di cui si discute nei paragrafi successivi.

In quest'ottica, appaiono particolarmente significative le due note lincee del 1930,[49] dove uno dei due approcci è nettamente prevalente rispetto l'altro. Il primo lavoro, intitolato *Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri*, consiste in uno studio di geometria della retta volto ad approfondire alcune proprietà di particolari rigate che avranno un certo ruolo nello studio delle Fano threefolds in quanto immagini della retta da cui si effettua la proiezione della varietà. In particolare, Fano dimostra che ogni rigata ellittica R^6 con ∞^1 cubiche direttrici è il luogo delle rette-centri di tre diverse reti di complessi lineari. Nel secondo scritto, l'obiettivo è quello di analizzare la threefold regolare con tutti i plurigeneri nulli M_3^{14}, ottenuta come sezione della Grassmanniana $M_8^{14} \subset \mathbb{P}^{14}$ con $\mathbb{P}^9$ e di "dubbia razionalità",[50] e dimostrare che su di essa le sezioni iperpiane formano una base minima. Per fare ciò, Fano ricorre alle trasformazioni birazionali (punto *b.*), mettendo in luce che M_3^{14} è riferibile birazionalmente ad una cubica di $\mathbb{P}^4$ priva di punto doppio. Inoltre, M_3^{14} si può rappresentare birazionalmente sulla $V_3^3 \subset \mathbb{P}^4$ in modo tale che ciascuna threefold abbia un'unica linea fondamentale (una quintica ellittica normale). Fano conclude osservando che la threefold in questione può anche essere proiettata da una retta di una sua rigata in una $M_3^{10} \subset \mathbb{P}^7$ contenente una rigata cubica e affermando, pur senza fornire i dettagli dimostrativi, che si può generalizzare questo risultato alle sezioni della Grassmanniana presa in esame con gli spazi $\mathbb{P}^8$ e $\mathbb{P}^{10}$. In conclusione, l'intersezione della Grassmanniana $M_8^{14} \subset \mathbb{P}^{14}$ delle rette di $\mathbb{P}^5$ con qualsiasi spazio proiettivo generico $\mathbb{P}^{14-i}$, con $i \leq 6$, è una varietà M_{8-i}^{14} sulla quale le sezioni iperpiane costituiscono una base minima. A partire dallo studio delle trasformazioni birazionali tra threefolds, Fano estende quindi ai casi $i = 4, 5, 6$ il risultato ottenuto da Severi per $i = 1, 2, 3$.

L'apparato degli strumenti elaborati da Fano non si limita però allo studio dell'invariante relativo Ω_2, all'analisi dei sistemi lineari di superfici K3 (punto *a.*) o al confronto tra il gruppo delle trasformazioni birazionali sulle threefolds e quello di $\mathbb{P}^3$ (punto *b.*), con l'obiettivo di mostrare che $Bir\left(M_3^{2p-2}\right) \neq Bir(\mathbb{P}^3)$. Fano estende anche l'analisi delle involuzioni a diverse famiglie di threefolds ottenendo alcuni risultati parziali di razionalità. Infatti, mentre in termini moderni per le superfici le nozioni di razionalità, unirazionalità e connessione razionale coincidono, così non accade per le threefolds. In quest'ottica di idee si colloca la nota lincea del 1932,[51] dedicata all'analisi dei gruppi di trasformazioni birazionali sulle threefolds, in cui Fano perviene al seguente risultato: un'involuzione di $\mathbb{P}^3$ è razionale o irrazionale a seconda che, interpretata come varietà tridimensionale, ammetta o meno gruppi continui finiti di trasformazioni birazionali. Analogo discorso vale per il lavoro del 1936 pubblicato all'interno degli *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*,[52] dove Fano analizza nel dettaglio le involuzioni sulle threefolds ottenute nei casi $p = 5, 6, 7$ con l'obiettivo di trovare tipi di

---

[49] G. FANO 1930b, *Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri*, «Rend. ANL» (6) 11, pp. 227-232; ID 1930c, *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, «Rend. ANL» (6) 11, pp. 329-335.

[50] FANO 1930c, *cit.*, p. 330.

[51] G. FANO 1932, *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 3-5.

[52] G. FANO 1936a, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Istituto Matematico della R. Università, pp. 329-349.

involuzioni differenti da quelle di $\mathbb{P}^3$ e provarne così l'irrazionalità. Qui è anche introdotto uno strumento ausiliario: lo studio dei sistemi omaloidici di superfici.[53]

A riprova della poliedricità di Fano nell'affrontare la questione delle varietà tridimensionali, in un altro scritto del 1936 egli si allontana dall'approccio gruppale a favore di un'impostazione più sintetico-proiettiva, tornando a focalizzarsi sulla successione delle $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$.[54] Tre sono i principali risultati di questo lavoro:

1) le threefolds M_3^{2p-2} sono razionali per $p > 10$, con l'unico caso dubbio di $p = 13$;
2) per il genere p delle curve-sezioni sussiste la limitazione $p \leq 37$;
3) si possono ripartire le superfici-sezioni irriducibili F^{2p-2} delle Fano threefolds in tre classi (dette rispettivamente di 1ª, 2ª e 3ª specie).

In questo periodo, Fano inizia anche ad estendere il metodo di proiezione di una varietà tridimensionale da una retta, analizzando ciò che si ottiene al variare del centro di proiezione. La proiezione di M_3^{2p-2} da una conica in essa contenuta è una threefold M_3^{2p-8} a curve-sezioni canoniche che contiene una superficie razionale rigata di quarto grado come immagine della conica di partenza. O, ancora, proiettando M_3^{2p-2} dallo spazio tangente in un suo punto generico si ottiene un'altra varietà tridimensionale M_3^{2p-10} a curve-sezioni canoniche, sulla quale l'immagine dell'intorno del centro di proiezione è una superficie di Veronese. Ma Fano non estende soltanto lo strumento classico della proiezione da una retta in questa direzione, attraverso la scelta di un centro di proiezione appropriato. Nella corposa memoria[55] del 1937, presentata per la pubblicazione da Severi all'Accademia d'Italia, Fano introduce il metodo della cosiddetta "doppia proiezione" che permette di riferire birazionalmente ogni Fano threefold ad una varietà più semplice (ma non generale) dello stesso tipo, immersa nello spazio proiettivo di dimensione $p - 6$. Infatti, dopo aver proiettato $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p+1}$ da una sua retta in una $M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ contenente una rigata cubica di $\mathbb{P}^4$, si può proiettare M_3^{2p-6} da tale $\mathbb{P}^4$ in una Fano threefold di ordine ancora inferiore, $M_3^{2p-18} \subset \mathbb{P}^{p-6}$, che è stata già classificata. All'interno di questo lavoro, inoltre, sono analizzati per la prima volta alcuni casi speciali di Fano threefolds che corrispondono a valori di p differenti rispetto a quelli finora presi in considerazione da Fano. Nello specifico, introduce particolari M_3^{2p-2} contenenti un piano ($p = 32$), esclusivamente una retta doppia ($p = 37, 29$), una retta doppia e alcuni piani isolati ($p = 34, 31, 29$), nessuna retta ($p = 37, 33, 28$).

Le varietà tridimensionali sono anche oggetto della comunicazione presentata da Fano al primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Firenze nell'aprile del 1937. In quest'occasione, pur senza apportare aggiunte essenziali agli studi precedentemente pubblicati, Fano fa nuovamente appello a quel "metodo sperimentale" citato a Bologna,

---

[53] Si tratta di un'estensione alle superfici del concetto di rete omaloidica di curve. Con questo termine si intende quindi un sistema di infinite superfici razionali nello spazio ordinario aventi punti base e superfici base tali che tre superfici generiche del sistema si intersecano, fuori dei detti elementi base, soltanto in un altro punto, variabile.

[54] Cfr. G. FANO 1936b, *Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, «Rend. ANL» (6) 23, pp. 813-818.

[55] G. FANO 1937, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Mem. R. Acc. d'Italia» 8, pp. 23-64.

per quel tanto che si può parlare di metodo sperimentale in matematica: esame accurato dei casi singoli, e successiva ricerca intesa a comprendere i risultati singoli in enunciati generali, e stabilire questi per via deduttiva.[56]

Ribadisce inoltre che la massima dimensione di un sistema lineare di superfici regolari di generi uno contenuto in una threefold costituisce un invariante assoluto, specificando che esso è sempre $\geq p+1$.

Nei due lavori a stampa successivi dedicati alle Fano threefolds, apparsi sulle pagine dei *Commentarii Mathematici Helvetici* nel 1942 quando Fano è ormai esule a Losanna, torna ad affrontare questo studio secondo le due vie corrispondenti ai punti *a.* e *b.* del manoscritto del 1928. Nel primo, intitolato *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche*, Fano si concentra sullo studio delle trasformazioni birazionali tra le threefolds.[57] Qui, a partire dal caso della $M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$, Fano considera due threefolds M e μ in corrispondenza birazionale tra loro, completamente regolari e prive di punti multipli, che soddisfano le seguenti condizioni:

i. ciascuna contiene solo superfici intersezioni complete con forme, cioè i sistemi lineari completi di superfici sono tutti multipli del sistema minimo;
ii. il sistema lineare di superfici che corrisponde al sistema completo ha esclusivamente punti base e linee base isolate.

Naturalmente due spazi proiettivi $\mathbb{P}^3$ soddisfano *i.*[58] Le corrispondenze birazionali tra $\mathbb{P}^3$ che soddisfano *ii.* sono dette "regolari", adottando la terminologia di Montesano. Basandosi su alcuni ragionamenti sui sistemi di superfici in corrispondenza contenuti all'interno delle due threefolds M e μ, Fano trae le seguenti conclusioni.

- In ogni corrispondenza birazionale regolare il numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali è lo stesso per M e μ.
- In ogni corrispondenza birazionale regolare la differenza fra la somma dei generi delle curve fondamentali di prima specie di M e μ è uguale alla semidifferenza degli invarianti di Zeuthen-Segre della seconda e prima varietà.
- Il determinante dei coefficienti dei secondi membri delle equazioni che esprimono la corrispondenza tra i piani di M e quelli di μ e la corrispondenza inversa è pari a 1 in valore assoluto.
- I due determinanti hanno lo stesso valore (cioè ± 1).
- Se nella matrice relativa a uno dei due determinanti è nullo un elemento, sarà pari a zero anche il complemento algebrico.

Tali proprietà sono poi utilizzate per dare le equazioni esplicite che rappresentano due proiezioni biunivoche di Fano threefolds particolari su $\mathbb{P}^3$: la V_3^3 proiettata da una retta contenuta in un suo piano e la V_3^4, con un'unica quadrica direttrice, da un suo piano.

Dal titolo *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche*, la seconda nota del 1942 è dedicata all'analisi dei sistemi delle superfici-sezioni

[56] G. FANO 1938a, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, in *Atti del I Congresso dell'UMI tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 aprile 1937*, Bologna, Zanichelli, p. 246.

[57] G. FANO 1942a, *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche*, «Comm. Math. Helv.» 14, pp. 193-201.

[58] FANO 1942a, *cit.*, p. 194.

delle varietà tridimensionali.[59] Qui Fano volge nuovamente l'attenzione al problema della razionalità, adottando però una prospettiva diversa: si concentra infatti sullo studio dei casi delle threefolds aventi come superfici-sezioni delle intersezioni complete. Partendo dal presupposto che, da quanto emerso nei lavori del 1936-37, per $p > 10$ le Fano threefolds sono razionali, con l'unica eccezione del caso dubbio $p = 13$, l'autore vuole mostrare che se le M_3 contengono solo superfici intersezioni complete con forme dello spazio proiettivo in cui sono immerse, esse sono razionali anche nei casi $p = 9$ e $p = 10$.[60] Dopo aver ripercorso quanto fatto per $p = 7$ nelle pubblicazioni degli anni 1936-37, Fano osserva che la $M_3^{16} \subset \mathbb{P}^{10}$ con sole superfici intersezioni complete, e perciò contenente un'infinità di rette, si proietta da una di queste rette r in una $M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$avente una rigata cubica R^3 come immagine di r. Gli iperpiani passanti per R^3 individuano su M_3^{12} una superficie a curve-sezioni di genere tre che intersecano R^3 in curve di ordine cinque, aventi come mutue intersezioni quartiche razionali che formano un sistema omaloidico. Da ciò segue la razionalità di M_3^{16} e la sua rappresentazione su $\mathbb{P}^3$: alle sezioni iperpiane di M_3^{16} corrisponderanno superfici di ordine sette. Analogamente, per $p = 10$ la $M_3^{18} \subset \mathbb{P}^{11}$ contenente solo superfici-intersezioni complete si proietta da una sua retta in una $M_3^{14} \subset \mathbb{P}^9$ sulla quale gli iperpiani passanti per la rigata cubica immagine della retta centro di proiezione tagliano un sistema lineare di superfici F^{11} a sezioni di genere quattro. Tale sistema di superfici, avendo curve caratteristiche razionali e di ordine sei ed essendo di grado due, consente di rappresentare M_3^{18} su una quadrica di $\mathbb{P}^4$. La conclusione segue dalla razionalità di tutte le quadriche lisce. Ciò permette a Fano di stabilire che per le threefolds a curve-sezioni canoniche contenenti solo superfici intersezioni complete la razionalità si presenta per valori minori di p rispetto alle Fano threefolds generiche.

Il lavoro finale sull'irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$, redatto da Fano durante l'esilio a Losanna e pronto fin dal 1942, è presentato da Severi all'Accademia Pontificia nel febbraio 1943, ma uscirà solo nel 1947.[61] I contenuti del lavoro, tuttavia, sono noti a livello nazionale e internazionale. Vi accennano, per esempio B. Segre, J.A. Todd, Godeaux e Castelnuovo nelle loro lettere:

> […] I have already obtained several additional results on cubic surfaces. One of them, by means of which theorem VIII of note I follows at once from theorem VII of the same note, is that "a non-singular cubic surface contains no homaloid linear system of complete intersections". An extension of this result to the non-regular V_3^3 in [4], would obviously prove its irrationality. I was told by Fano that this irrationality has been very recently proved by him, on considering the linear system of surfaces of genera 1 lying on V_3^3, but I have not seen the proof. I feel that one should be able to obtain the result also by my methods, but I have not yet had time of thinking seriously about this.[62]

---

[59] G. FANO 1942b, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche*, «Comm. Math. Helv.» 14, pp. 202-211.

[60] FANO 1942b, *cit.*, p. 202.

[61] G. FANO 1947c, *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Comm. Acc. Pontificia» 11, pp. 635-720.

[62] CA, *BSP*: B. Segre a J.A. Todd, Manchester 8.10.1943.

Pendant la guerre, j'ai eu quelques relations avec M. Fano, réfugié à Lausanne; il a réussi à démontrer l'irrationalité de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions, mais je ne connais pas encore sa démonstration.[63]

Il Prof. Fano è stato malato a Boston […]. La Memoria sulla varietà cubica che deve esser pubblicata dall'Ac. Pontificia non è ancora uscita; avrà visto il breve estratto pubblicato nei Rendiconti dei Lincei. In questi giorni un giovane di qua, molto intelligente, mi ha comunicato una dimostrazione molto semplice e breve della irrazionalità della varietà cubica fondata su considerazioni topologiche. Ma ho bisogno di pensare ancora alla cosa.[64]

La memoria del 1947 è anticipata da una breve nota lincea (1946) in cui Fano illustra le principali tappe del suo percorso di ricerca, sottolineando lo studio dei sistemi di superfici K3 per determinare l'irrazionalità delle threefolds che si ottengono per $p = 3, 4, 5, 6, 8, 13$.[65] Alla pubblicazione del lavoro farà seguito un'entusiasta recensione di Conforto[66] che, pur mettendo in luce l'ipotesi assunta da Fano (restrittiva ma "estremamente plausibile"), insiste sui "numerosissimi particolari dimostrativi", sugli "importanti risultati collaterali" e gli "acuti accorgimenti" che rendono questa memoria "tra le più elaborate e profonde che siano state scritte con i metodi della Scuola italiana di geometria algebrica". Quello sulla cubica dello spazio a quattro dimensioni non sarà tuttavia l'ultimo articolo originale di Fano. Pur non sentendosi più efficiente, visto che "sempre più spesso doveva leggere due volte un lavoro"[67] per afferrarne i contenuti, Fano non interrompe l'attività di ricerca sulle threefolds tant'è che nel 1949 viene pubblicata la nota *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche* in cui compare per la prima volta una Fano threefold che si ottiene per $p = 12$.[68] Questo lavoro, dato alle stampe quando Fano aveva superato i settant'anni, non è stato quasi mai citato dopo la sua pubblicazione ed è stato a lungo ignorato dalla maggior parte dei matematici moderni. L'unica eccezione è rappresentata da Roth che però sembra non rendersi conto che Fano qui costruisce non soltanto una varietà quadridimensionale, ma anche la threefold $M_3^{22} \subset \mathbb{P}^{13}$.[69] Qui, inoltre, Fano individua un particolare sistema lineare di superfici che rappresenta una threefold M_3^{32} priva di rette, corrispondente al valore $p = 17$ della successione delle M_3^{2p-2}.[70]

L'anno successivo, in occasione del simposio organizzato a Torino per la sua nomina a professore emerito, Fano traccia un bilancio della sua attività di ricerca sulle varietà tridimensionali, scaturita dalla questione della cubica generale dello spazio a quattro dimensioni

[63] CA, *BSP*: L. Godeaux a B. Segre, Liège 13.8.1945.

[64] CA, *BSP*: G. Castelnuovo a B. Segre, Roma 19.12.1946.

[65] G. FANO 1946, *Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni*, «Rend. ANL» 8 (1), pp. 463-466.

[66] F. CONFORTO 1947, MR0038100.

[67] FANO 2004, *cit.*, p. 3.

[68] G. FANO 1949, *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Rend. ANL» 8 (6), pp. 151-156. L'autore esordisce in questi termini: "Ho incontrato recentemente una varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, che naturalmente appartiene alla serie delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} (qui $p = 12$), oggetto di mie ricerche in quest'ultimo periodo, ma non ha finora richiamata particolare attenzione. Ne darò qui un breve cenno". Tale Fano threefold è studiata dal punto di vista moderno in ANDREATTA – PIGNATELLI 2023, *cit.*

[69] Cfr. L. ROTH 1955, *Algebraic threefolds. With special regard to problems of rationality*, Berlin, Springer, p. 93.

[70] FANO 1949, *cit.*, p. 154.

che “si è presentata in geometria da forse 60 anni, suscitando viva curiosità”.[71] Questo ultimo contributo è paradigmatico della progressiva patrimonializzazione delle nuove conquiste nel campo della geometria algebrica: l’autore infatti non si limita a descrivere i principali contributi della lunga carriera accademica ma dedica particolare attenzione al percorso intrapreso, ripercorrendo le principali tappe della sua attività di ricerca sulle threefolds.

2.4. Verso un dialogo tra la Scuola italiana e la Scuola inglese

Pur presentando alcune lacune e racchiudendo spiegazioni talvolta inadeguate dal punto di vista del rigore, i lavori di Fano sulle M_3^{2p-2} riscuotono un successo immediato, soprattutto in relazione alla questione fondamentali dell’irrazionalità della cubica di $\mathbb{P}^4$. I suoi contributi al problema dell’assegnazione di condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità delle threefolds sono accolti entusiasticamente tra i membri della Scuola[72] per due ragioni essenziali.

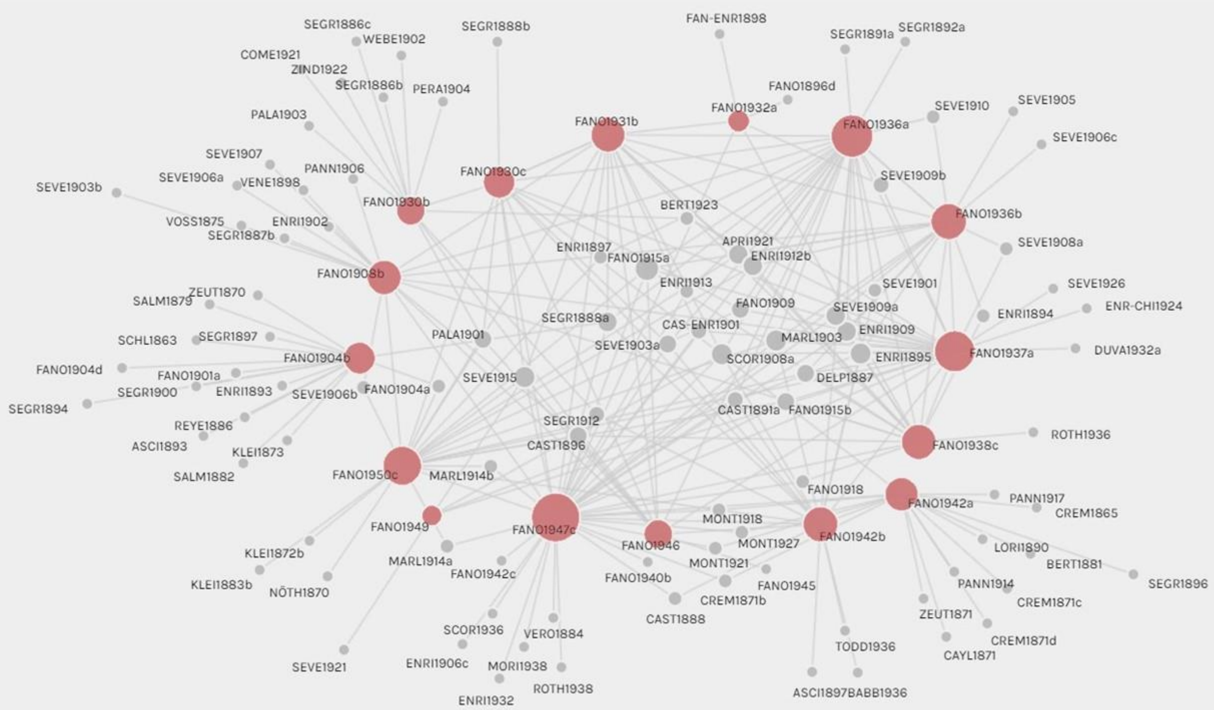


Fig. 2.3. Citational network complessivo dei lavori di Fano sulle threefolds.

Innanzitutto, costituendo il passaggio dallo studio delle superfici a quello delle threefolds, gli studi di Fano si inseriscono a pieno titolo all’interno del programma di ricerca dei geometri italiani. In secondo luogo, essi aprono la strada a nuove vie di indagine geometrica che

---

[71] G. FANO 1950, *Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 9, p. 21.

[72] Cfr. F. CONFORTO 1939, *Il contributo italiano al progresso della geometria algebrica negli ultimi cento anni*, in *Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939*, vol. 1, Roma, SIPS, pp. 148-149; F. CONFORTO – G. ZAPPA 1946, *La geometria algebrica in Italia (dal 1939 a tutto il 1945)*, in *Relationes de auctis scientiis tempore belli. A. 1939-45*, Città del Vaticano, Pontificia Academia Scientiarum, pp. 15-16; B. SEGRE 1963, *The rise of algebra and the creation of algebraic geometry*, «Cahier d’histoire mondiale» 7, pp. 403-404.

rappresenterebbero la “prova della vitalità” della Scuola.[73] I geometri italiani, contrariamente a quanto auspicavano, non riusciranno tuttavia a “mettere la mano sugli istrumenti adatti allo scopo, portando l’ordine e l’armonia anche nel dominio delle varietà a più dimensioni”.[74]

Fano colloca esplicitamente – e in più occasioni – le proprie ricerche sulle varietà tridimensionali nel solco della tradizione geometrica italiana. Questo dato è corroborato dall’analisi del citational network degli scritti sulle Fano threefolds (Fig. 2.3): la quasi totalità dei lavori citati è infatti costituita da pubblicazioni dei geometri italiani (88% delle citazioni), per un totale di 22 autori.[75] Al loro interno, con almeno 10 riferimenti, accanto a quello di Severi (con 33 citazioni) spiccano i nomi di Enriques (30), C. Segre (18), Castelnuovo (12) e Giuseppe Marletta (10).

Gli studi sulle threefolds, intrapresi con spirito pionieristico da Fano, hanno anche dato un importante impulso alle ricerche sviluppatesi in contesti differenti ma in stretto dialogo con la Scuola italiana, anche negli anni del suo declino, quando a livello internazionale si andavano invece affermando correnti e indirizzi di ricerca diversi, nella direzione delle vie tracciate dall’algebra moderna e dalla topologia. È questo il caso della Scuola di geometria inglese[76] sulla quale le ricerche dei geometri italiani esercitano una sorta di azione di magistero almeno fino agli anni Trenta. In particolare, gli studi di Fano sono accolti molto positivamente a Cambridge, dove vengono portati avanti in più direzioni dal gruppo di geometri (Todd, P. Du Val, H.S.M. Coxeter, W.H. Edge, L. Roth, …) sorto attorno alla figura di H.F. Baker e consolidatosi durante i *tea parties* del sabato pomeriggio da lui organizzati con l’obiettivo di promuovere il dialogo e il confronto sulle principali questioni della geometria.[77] Fano intrattiene scambi regolari con questa comunità matematica come emerge dalla corrispondenza con Baker che, nel dicembre 1931, gli scrive:

> Dear Sir,
> I was very honoured by, and very grateful to you for, your letter of 2 Dec., telling me that you had written further about my little Note of the Del Pezzo ψ^5. I shall look forward to the privilege of an offprint, when the paper is published. And, as soon as possible, I shall study your letter in detail, which I have not been able to do as yet.

[73] Questo aspetto di prosperità della Scuola è sottolineato anche all’interno della recensione di Conforto: “La memoria apre altresì la via, come l’autore stesso afferma, ad ulteriori e più approfondite ricerche. Specialmente importanti appaiono quelle ricerche future, che tenderanno a valutare esattamente la portata della anzidetta ipotesi di regolarità e di qualche altra ipotesi di generalità, che l’autore è costretto talvolta a fare in conseguenza della difficoltà dell’argomento”.

[74] CONFORTO 1939, *cit.*, p. 149.

[75] Per condurre tale analisi, sono state considerate le citazioni contenute nei 16 lavori a stampa di Fano dedicati a queste varietà pubblicati tra il 1904 e il 1950. Su un totale di 165 citazioni, solo 19 lavori recano la firma di autori stranieri: 9 pubblicazioni sono firmate da matematici tedeschi (F. Klein, M. Nöther, T. Reye, G. Salmon, A. Voss, E. Weber), 6 da inglesi (D.W. Babbage, A. Cayley, P. Du Val, L. Roth, J.A. Todd), 2 dallo svizzero L. Schläfli, 2 dal danese H.G. Zeuthen e una dall’austriaco K. Zindler.

[76] Per un approfondimento sullo sviluppo della geometria algebrica a Cambridge in questo periodo, cfr. J. BARROW-GREEN – J. GRAY 2006, *Geometry at Cambridge*, «Historia Mathematica» 33, pp. 340-349.

[77] Cfr. D. MONK 1998, *Obituary: Professor W.L. Edge: 1904–1997*, «Proc. Edinburgh Math. Soc.» (2) 41.3, p. 631: [Baker’s] “seminars on geometry, held at 4.15 pm on Saturdays, were known informally as the Baker tea-parties”.

> Our students in Cambridge read many of your published papers, and find them very helpful – so that I am particularly grateful to you for writing to me.[78]

Le ricerche classiche di Fano sulle threefolds sono riprese da Leonard Roth e poi pubblicate per la prima volta in forma organica all'interno del suo trattato *Algebraic threefolds. With special regard to problems of rationality* (1955). Di un certo rilievo è il fatto che Roth, dopo esser stato avviato alla ricerca proprio da Baker, abbia trascorso un anno a Roma come vincitore di una borsa Rockefeller nel 1930-31, instaurando proficue relazioni scientifiche con i matematici italiani: Castelnuovo, Enriques, Severi e T. Levi-Civita.[79] Il geometra inglese, che si dedicherà "per tutta la vita allo studio della geometria algebrica, seguendo i metodi della Scuola italiana",[80] recepisce l'eredità di Fano nel campo degli studi sulle threefolds, la cui profonda conoscenza ben emerge da questo volume. Anche i contatti epistolari tra i due matematici, proseguiti almeno fino al trasferimento di Fano in Svizzera, portano alla luce un'ampia condivisione in termini sia di temi di ricerca sia di strumenti e metodi adottati. Gli argomenti centrali sono i risultati di razionalità e irrazionalità delle varietà tridimensionali:

> Per quanto riguarda l'unirazionalità della V_3^8 generale, ho adoperato il metodo da Lei esposto nella prima Nota del '07, cioè ragionando per assurdo ho dimostrato che la V_3^8 non contiene un sistema omaloidico di superficie. Ella si ricorderà che una parte della dimostrazione consiste nel provare che l'intersezione della V_3^8 con una forma di ordine n non può avere un punto multiplo di ordine $> 2n$. Ebbene questo fatto non sussiste più per la V_3^{10} e così c'è pure speranza di stabilire l'unirazionalità di quest'ultima, e tanto meno quella della V_3^{12} di Segre, la quale contiene superficie che non sono intersezioni complete. In proposito, sembra strano che la V_3^{12} che contiene soltanto intersezioni complete sia razionale; ma questo studio è pieno di sorprese.[81]

È Fano, tra l'altro, ad annunciare ai geometri italiani durante il primo Congresso dell'UMI la dimostrazione di Roth dell'irrazionalità di M_3^8, sottolineando la portata di un tale risultato. Da questo, infatti, discende l'esistenza di un'involuzione irrazionale del quarto ordine in $\mathbb{P}^3$. Illustrando il caso $p = 5$, Fano afferma:

> un geometra inglese della scuola di Baker, il Sig. L. Roth, ha annunciato recentemente di aver dimostrato che la M_3^8 di S_6 in parole è irrazionale: risultato importante in quanto implicherebbe l'esistenza in S_3 di una involuzione irrazionale I_4. La dimostrazione non fu ancora pubblicata; da notizie avute per lettera risulta che l'A., riprendendo una vecchia mia direttiva, sia riuscito a dimostrare che tale M_3^8 non può contenere un sistema ∞^3 omaloidico di superficie.[82]

All'interno della lettera citata compaiono anche riferimenti puntuali a specifici risultati di Fano sulle threefolds, come quelli che portano Roth ad affermare: "devo dire quanto è soddisfacente sapere che la serie delle V_3^{2p-2} termina per $p = 37$ e che per $p > 10$ esse sono razionali". Per quanto riguarda i metodi, Roth non solo padroneggia gli strumenti introdotti da

---

[78] BSMT, *FFa*, lett. 22: H.F. Baker a G. Fano, Cambridge 14.12.1931.

[79] Cfr. E. TOGLIATTI 1970, *Leonard Roth*, «Boll. UMI» (3) 4, pp. 326-332; B. SEGRE 1976, *Leonard Roth*, «Bull. LMS» 8, pp. 194-202.

[80] SEGRE 1976, *cit.*, p. 194.

[81] BSMT, *FFa*, lett. 23, c. 1: L. Roth a G. Fano, Londra 18.2.1937.

[82] FANO 1938a, *cit.*, pp. 246-247.

Fano, come lo studio dei sistemi omaloidici di superfici – "vecchia direttiva" di Fano – e l'analisi delle superfici-sezioni complete della threefold, ma suggerisce anche nuove idee per progredire nella ricerca. Coniuga così i risultati ottenuti dai geometri inglesi con le tecniche classiche della Scuola italiana, come il metodo delle proiezioni successive:

> in una Nota recente – non ancora pubblicata – ho stabilita che una forma quartica di S_4 // non può aver più di 45 nodi isolati, e del resto si sa che tale limite è raggiunto, perché esiste una V_3^4 razionale di questa natura (ved. Todd, Quarterly Journal, Oxford 1936). Forse si potrebbe usare questo risultato per dimostrare, mediante proiezioni successive, che le V_3^{2p-2} della prima specie non esistono per $p > 23$.[83]

Un'estensione del metodo delle proiezioni successive è utilizzata da Roth per affrontare il problema dell'unirazionalità di alcune threefolds. In particolare, egli sfrutta il fatto che se $7 < p < 12$ si può proiettare la M_3^{2p-2} da uno spazio tangente in un suo punto generico, ottenendo un'altra threefold $M_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-3}$ a curve-sezioni canoniche di genere $p-4$, contenente una superficie di Veronese F^4. Nel caso in cui $p \geq 12$ è necessario effettuare una seconda proiezione da una conica di F^4: si arriva così a una $M_3^{2p-16} \subset \mathbb{P}^{p-6}$ a curve-sezioni canoniche di genere $p-7$, contenente un piano come immagine di F^4.

Non bisogna pensare che si tratti di un'interazione a senso unico, dalla Scuola italiana verso quella inglese: sono anche i geometri italiani – Fano *in primis* per quanto riguarda gli studi sulle threefolds – a guardare alla produzione geometrica degli inglesi. Significativo in tal senso è il gruppo di cinque scritti che Fano cita all'interno dei suoi lavori sulle threefolds, firmati dagli inglesi, D. Babbage, Du Val, Todd e Roth, pubblicati tra il 1932 e il 1938. Da questi Fano trae sia alcuni risultati specifici, come quelli relativi alla quartica di $\mathbb{P}^4$, sia certi procedimenti, come quello adottato da Roth per lo studio della varietà M_3^{14}. Non è un caso che tutti i geometri inglesi citati da Fano siano studenti di Baker a Cambridge. Oltre a Roth, anche Du Val trascorre un periodo di perfezionamento a Roma (1930-32), grazie a una borsa di studio del Trinity College, lavorando a stretto contatto con Enriques e specializzandosi nella teoria delle superfici algebriche secondo l'indirizzo italiano. Il frutto di questo periodo di studio all'estero sono i due scritti citati da Fano dedicati alla classificazione delle superfici, che rappresentano i primi due lavori di Du Val in italiano (Fig. 2.4).[84]

Il dialogo tra le due Scuole – quella italiana e quella di Cambridge – prosegue anche dopo il secondo conflitto mondiale e Fano è ancora tra i protagonisti di questo scambio. Lo testimonia la sua recensione ai contributi di Edge del periodo 1937-40, dedicati alla determinazione "per via geometrica" di particolari luoghi legati a una rete di quadriche in $\mathbb{P}^3$.[85] Questo argomento rientra in quelle "notevoli specializzazioni di situazioni generali" che "da sempre hanno affascinato Edge"[86] così come i geometri italiani. Numerosi sono i punti di contatto anche a livello di approccio alla disciplina: le lezioni di Edge erano

---

[83] BSMT, *FFa*, lett. 23, c. 2: L. Roth a G. Fano, Londra 18.2.1937.

[84] P. DU VAL 1932a, *Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 276-279; ID. 1932b, *Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 345-347.

[85] G. FANO 1947b, *Su alcuni lavori di W.L. Edge*, «Rend. ANL» 8 (3), p. 179.

[86] MONK 1998, *cit.*, pp. 633-634.

ricche di spunti, ma mantenevano gli standard tradizionali di abilità manipolativa e di intuizione geometrica; di conseguenza erano spesso ritenute impegnative. La routine di “definizione, teorema, dimostrazione” non faceva per lui, né nell’insegnamento né nella ricerca.[87]

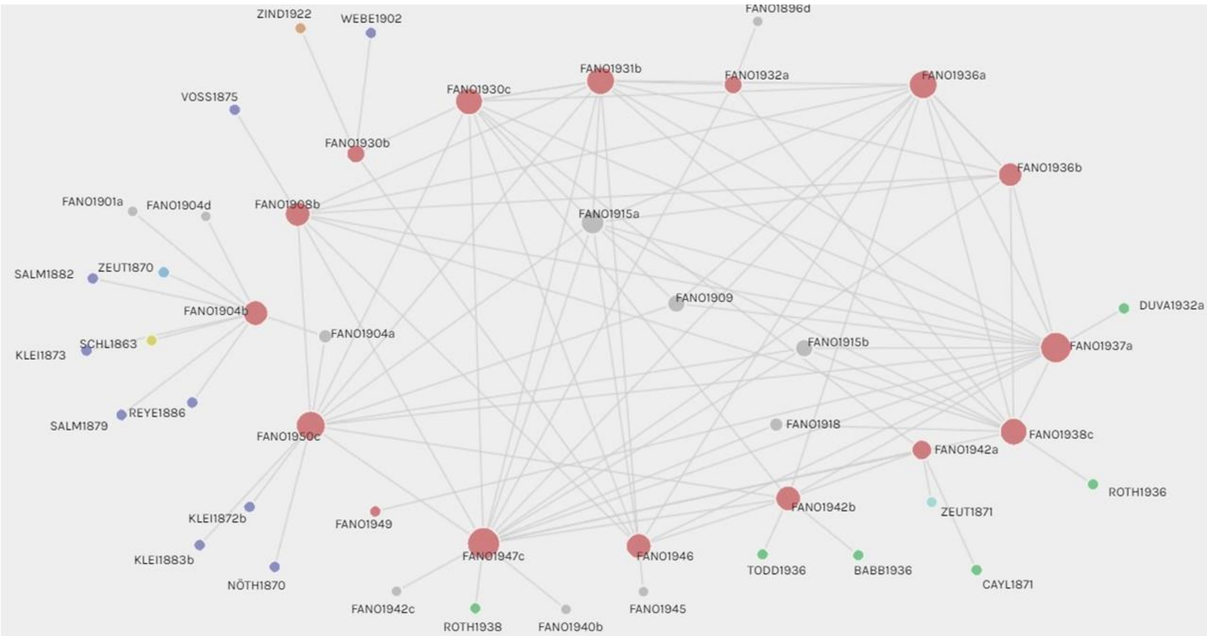


Fig. 2.4. Citational network degli autori stranieri nei lavori di Fano sulle threefolds.

Lo scambio tra i geometri italiani e i geometri inglesi, ben rappresentato dalla figura di Fano, è favorito dalla condivisione non solo di argomenti di ricerca (come le threefolds) ma anche di una visione metodologica comune, caratterizzata dallo studio di casi particolari e da un costante appello all’intuizione geometrica. È probabilmente la mancanza di questo punto di vista comune che invece disincentiva il dialogo con altre tradizioni di ricerca, come quella americana.[88] Anche i geometri statunitensi più vicini all’indirizzo italiano, come Snyder, manifestano un certo disagio nei confronti degli strumenti puramente sintetici e intuitivi che, a partire dagli anni Quaranta, si trasformerà in una sorta di incomunicabilità. Lo stesso Snyder, inviando una sua nota sull’involuzione di ordine due di $\mathbb{P}^3$ appartenente alla varietà cubica di $\mathbb{P}^4$, nel 1923 scriveva a Severi in questi termini:

> Se l’occasione si presenta, vuole, La prego, mostrarla ai signori Enriques e Castelnuovo? Non che essa abbia gran valore, ma mi ricordo del loro interesse e consiglio, che non voglio dimenticare. Il Sig. Enriques mi ha sempre consigliato di far uso dei metodi sintetici, ma non lo posso [fare]… sono restato sempre troppo stupito.[89]

---

[87] *Ivi*, p. 632: “The lectures were full of insight but maintained traditional standards of manipulative skill and geometric intuition; consequently they were often found demanding. The routine of ‘definition, theorem, proof’ was not for him, either in teaching or research”.

[88] Sui rapporti con i geometri statunitensi, cfr. A. BRIGAGLIA – C. CILIBERTO 2004, *Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20th century*, «Historia Mathematica» 31, pp. 310-319.

[89] BIMF, *FMo*: V. Snyder a F. Severi, Ithaca (NY) 27.1.1923.

È, questa, una caratteristica che permea i contributi di Snyder in geometria algebrica: pur utilizzando in prima battuta i metodi sintetici, non reputa il lavoro completo finché non raggiunge una formulazione analitica da porre alla base del trattamento dei singoli casi.[90]

2.5. L'eredità moderna delle ricerche sulle Fano threefolds

Tracce importanti dell'eredità culturale delle ricerche di Fano sulle threefolds non si riscontrano solo all'interno di tradizioni di ricerca coeve, come quella della Scuola inglese, ma anche in lavori di geometria algebrica decisamente posteriori, pubblicati a partire dagli anni Settanta. Anche in questo caso si assiste ad un'interazione in entrambe le direzioni.

Da un lato, infatti, le ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali hanno fornito ampio materiale alle ricerche recenti in tale ambito, culminate con la classificazione completa delle varietà di Fano di prima specie ad opera di Iskovskikh (1977-78).[91] Utilizzando il metodo della doppia proiezione da una retta, egli dimostra in maniera rigorosa quanto 'intuito' da Fano – ovvero che, per tali varietà, $3 \leq p \leq 12$ e $p \neq 11$ – e fornisce una descrizione accurata delle Fano threefolds che si ottengono per i possibili valori di p. Iskovskikh non dimostra l'esistenza di una retta su una Fano threefold né la liscezza dell'elemento generale del suo sistema anticanonico, ma – come aveva fatto Fano – assume come ipotesi che la varietà soddisfi queste due condizioni. Entrambe le proprietà saranno dimostrate due anni più tardi da V.V. Shokurov (1980). In un primo lavoro, egli mostra che l'elemento generale del sistema anticanonico di ogni varietà di Fano tridimensionale è liscio.[92] In un secondo articolo, fornisce una dimostrazione completa del fatto che se X è una Fano threefold allora X contiene una retta r $(-K_X \cdot r = 1)$ oppure $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ o X è una varietà di Fano tridimensionale di indice ≥ 2.[93] Shokurov ha dunque il merito di mostrare che le Fano threefolds classificate da Iskovskikh soddisfano automaticamente queste due condizioni, per cui i risultati ottenuti sono sempre validi, senza il bisogno di assumere tali ipotesi. Nel 1981 S. Mori e S. Mukai elaborano la classificazione delle Fano threefolds con numero di Picard maggiore o uguale a 2, a partire dalla classificazione Iskovskikh e utilizzando la teoria di Mori dei raggi estremali.[94] In meno di un ventennio (1973-90) sono anche classificate le varietà di Fano X di dimensione n qualsiasi e di indice $i_X \geq n-2$ grazie a S. Kobayashi e T. Ochiai (che affrontano il caso $i_X = n$), T. Fujita ($i_X = n-1$) e Mukai ($i_X = n-2$).[95]

[90] Cfr. A.B. COBLE 1950, *Virgil Snyder, 1869–1950*, «Bull. AMS» 56.5, p. 469.

[91] Cfr. V.A. ISKOVSKIKH 1977, *Fano 3-folds. I*, «Math. URSS Izv.» 11, pp. 485-527; ID. 1978, *Fano 3-folds. II*, «Math. URSS Izv.» 12, pp. 469-506.

[92] Cfr. V.V. SHOKUROV 1980a, *Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold*, «Math. URSS Izv.» 14, pp. 395-405.

[93] Cfr. V.V. SHOKUROV 1980b, *The existence of a straight line on Fano 3-folds*, «Math. URSS Izv.» 15, pp. 173-209.

[94] Cfr. S. MORI – S. MUKAI 1981, *Classication of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$*, «Manuscripta Mathematica» 36.2, pp. 147-162. Erratum 2003, *ibid.* 110.3, p. 407.

[95] Cfr. S. KOBAYASHI – T. OCHIAI 1973, *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, «Journal of Mathematics of Kyoto University» 13, pp. 31-47; T. FUJITA 1990, *Classification theories of polarized varieties*, LMS *Lecture Note Series* 155, Cambridge, CUP; S. MUKAI 1989, *Biregular classication of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, «Proc. Nat. Acad. USA» 86, pp. 3000-3002.

L'eredità delle ricerche di Fano sulle varietà tridimensionali investe non solo la questione della classificazione ma anche i problemi di razionalità in dimensione tre. In questo ambito, al già citato controesempio alla congettura di Lüroth rappresentato dalla quartica di $\mathbb{P}^4$ studiata da Manin e Iskovskikh, segue la dimostrazione dell'irrazionalità dell'ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^4$ da parte di H.C. Clemens e P.A. Griffiths.[96] Per giungere a tale risultato, pur partendo dallo studio della varietà delle rette di M_3^4 già intrapreso da Fano, questi ultimi utilizzano in modo essenziale i metodi della teoria di Hodge al cui interno si colloca lo strumento-chiave della Jacobiana intermedia. Nel lavoro di classificazione birazionale delle varietà algebriche, a partire dalla dimensione tre le nozioni di razionalità e unirazionalità non hanno più un «buon comportamento». Esse sono state superate dalla nozione di varietà razionalmente connessa, che rappresenta il punto di passaggio dalla trattazione classica a quella moderna.[97] I problemi di unirazionalità e razionalità, tuttavia, non stati abbandonati ma hanno tratto impulso e vantaggio da questi più recenti sviluppi della teoria di classificazione. Nel caso delle varietà di Fano, nel 1992 è stato dimostrato che esse sono sempre razionalmente connesse.[98]

L'apice moderno dell'eredità di Fano è probabilmente rappresentato dai contributi di Mori e C. Birkar, entrambi vincitori della Medaglia Fields con motivazioni che richiamano esplicitamente il nome di Fano. Il primo, infatti, è stato insignito del prestigioso premio nel 1990 per aver risolto la congettura di Hartshorne (per la quale se la curvatura di una varietà algebrica è sempre positiva, allora tale varietà costituisce uno spazio proiettivo) e per gli importanti risultati relativi alla classificazione delle varietà tridimensionali che ha ottenuto lavorando su tale congettura. Birkar è stato invece premiato nel 2018 per la dimostrazione della limitatezza delle varietà di Fano e per i suoi contributi al Minimal Model Program.[99]

Dall'altro lato, la geometria algebrica moderna ha contribuito a spiegare e giustificare rigorosamente alcune delle affermazioni contenute negli scritti di Fano, dando solide fondamenta a molti dei metodi utilizzati. In questa direzione un esempio notevole è costituito dal metodo della doppia proiezione, introdotto da Fano ma descritto e dimostrato da Iskovskikh.[100] Dopo le sue brillanti ricerche, si sono susseguiti diversi lavori – come quelli citati nel paragrafo precedente – che hanno approfondito la tecnica di Iskovskikh. Gli studi recenti hanno permesso di rimuovere l'ipotesi di Fano, mostrando che ogni varietà di Fano della serie principale di indice 1 e di prima specie contiene una retta. Sotto queste ipotesi è possibile costruire rigorosamente il morfismo birazionale soggiacente al metodo della doppia proiezione

---

[96] Cfr. H.C. CLEMENS – P.A. GRIFFITHS 1972, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, «Annals of Math.» (2) 95, pp. 281-356.

[97] Cfr. VERRA 2005, *cit.*, pp. 91-94. Sia X una varietà algebrica definita su un campo k. X è razionalmente connessa su k se per una coppia generica di suoi punti passa una curva razionale definita su k. Come sottolineato dall'autore, si tratta di una nozione più debole nella forma, ma più forte nella sostanza perché compatibile con le prospettive e le tecniche della moderna teoria di classificazione delle varietà algebriche.

[98] *Ivi*, p. 95, teorema 5.4. Cfr. F. CAMPANA 1992, *Connexité rationelle des varietés de Fano*, «Ann. ENS Paris» (4) 25.5, pp. 539-545; J. KOLLÁR – Y. MIYAOKA – S. MORI 1992, *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, «Journal of Differential Geometry» 36, pp. 765-769.

[99] Cfr., *inter alia*, C. BIRKAR – P. CASCINI– C.D. HACON – J. MCKERNAN 2010, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, «Jour. AMS» 23.2, pp. 405-468.

[100] Cfr. ISKOVSKIKH 1977 e 1978, *cit.*

di Fano.[101] Denotando con π_1 la proiezione della threefold M_3^{2p-2} da una retta r molto generale,[102] con $\widetilde{M}$ il blow-up di M_3^{2p-2} lungo r, con σ_r il relativo morfismo di blow-up e con $E = \sigma_r^{-1}(r)$ il divisore eccezionale, si ottiene un primo diagramma commutativo dove $\varphi_1 = \pi_1 \circ \sigma_r$ è il morfismo che risolve i punti di indeterminazione di π_1. Inoltre, $R^3 = \varphi_1(E)$ è una superficie rigata contenuta in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^4$ e, se $p \geq 5$, φ_1 è una mappa birazionale.[103] Infine, $M_3^{2p-6} = \pi_1\left(M_3^{2p-2}\right)$ risulta essere nuovamente una Fano threefold della serie principale di indice 1 e di prima specie che può però avere punti doppi isolati ordinari, corrispondenti alle rette di M_3^{2p-2} incidenti a r. Si nota che già questa prima proiezione abbassa il genere p della curva-sezione canonica. Se $p \geq 7$, effettuando una seconda proiezione – questa volta dal $\mathbb{P}^4$ che contiene R^3 – e denotando con π_2 la mappa corrispondente, con $M_3^{2p-18} = \pi_2\left(M_3^{2p-6}\right)$ l'immagine di M_3^{2p-6} e con $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi_1$ la mappa razionale ottenuta per composizione, si ricava un secondo diagramma commutativo, dove M_3^{2p-6} – se non è singolare – risulta essere una varietà di Fano di indice ≥ 2.[104] A sua volta, la M_3^{2p-18} ottenuta tramite questa seconda proiezione ha p ancora più piccolo ed è immersa in uno spazio proiettivo di dimensione minore.

$$
\begin{tikzcd}
r \arrow[d, dashed] & \subset M_3^{2p-2} \arrow[d, dashed, "\pi_1"] \subset \mathbb{P}^{p+1} & \widetilde{M} \supset E \arrow[l, "\sigma_r"'] \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[ddl, dashed, "\varphi_2"] \\
R^3 & \subset M_3^{2p-6} \arrow[d, dashed, "\pi_2"] \subset \mathbb{P}^{p-1} & \\
& M_3^{2p-18} \subset \mathbb{P}^{p-6} &
\end{tikzcd}
$$

La geniale intuizione di Fano sottostante al metodo della doppia proiezione consiste nel proiettare una Fano threefold da una retta in essa contenuta in un'altra varietà dello stesso tipo con p minore che, a sua volta, può essere proiettata in un'altra Fano threefold corrispondente a un valore di p ancora più basso, riconducendosi quindi a un caso precedente. Così facendo – tramite una sorta di procedimento iterativo – Fano e Iskovskikh si riducono a una threefold che,

[101] Per una trattazione didattica e sistematica della costruzione di Iskovskikh, corredata da buona parte delle dimostrazioni, cfr. J. MURRE 1982, *Classification of Fano threefolds according to Fano and Iskovskikh*, in A. CONTE (ed.), *Algebraic threefolds: proceedings of the 2nd 1981 session of the Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.), held at Varenna, Italy, June 15-23, 1981*, Berlin, Springer, LNM 947, pp. 35-92; A. CONTE 1982, *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni*, Quaderni dell'UMI, n. 22, Bologna, Pitagora Editrice, pp. 56-92.

[102] Per dettagli su tale retta, cfr. MURRE 1982, *cit.*, p. 80.

[103] Per una dimostrazione, cfr. *ivi*, pp. 81-82, Lemma. 2 e 3.

[104] Cfr. *ivi*, pp. 83-87.

avendo genere della curva-sezione minore rispetto alla varietà di partenza, è già stata classificata.[105]

La geometria algebrica posteriore ha così fornito solide basi allo strumento della doppia proiezione ideato da Fano: sotto un'ipotesi forte (l'esistenza di una retta sulla threefold) e pur senza tutte le cautele necessarie, già nel 1937 egli aveva individuato questo metodo promettente che risulta legittimato dalla costruzione del morfismo di blow-up. Lo scoppiamento, che in questo caso specifico permette di sostituire un insieme finito di punti di una threefold con altrettanti piani proiettivi, sarà introdotto solo negli anni Cinquanta da Hopf.

In un continuo dialogo tra passato e presente, i contributi di Fano allo studio delle varietà tridimensionali forniscono ancora oggi spunti interessanti, come testimoniato dal recentissimo lavoro di M. Andreatta e R. Pignatelli (2023). È qui interpretato in chiave moderna l'articolo di Fano del 1949 – fino a questo momento 'dimenticato'[106] – in cui compare per la prima volta una threefold $M_3^{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ a curve-sezioni canoniche, cui gli autori hanno attribuito il nome di *Fano Last Fano*. Fornendo diverse dimostrazioni delle affermazioni di Fano – corrette, ma quasi sempre non dimostrate – Andreatta e Pignatelli portano alla luce "la bellezza così come l'eleganza e la semplicità dell'esempio di Fano".[107] Evidenziano poi che la M_3^{22} considerata nello scritto del 1949 ha rango di Picard 2, motivo per cui non è isomorfa alla Fano threefold avente $p = 12$ nella classificazione di Iskovskikh. La *Fano Last Fano* individuata è infine costruita con gli strumenti moderni come lo schema di Hilbert dei punti su una superficie. Mediante tale costruzione, gli autori individuano la corrispondente varietà di Fano all'interno della classificazione di Mori-Mukai. Attualmente un gruppo di studiosi coordinati da I. Cheltsov si sta occupando dello studio dell'esistenza di metriche di Kähler Einstein su questa *Fano Last Fano*, a conferma del fatto che l'eredità delle ricerche di Fano non è tutt'oggi esaurita.[108]

In conclusione, ciò che emerge è una visione più sfumata dell'opera di Fano sulle varietà tridimensionali che ancora oggi portano il suo nome rispetto a quella delineata nella storiografia esistente, che aveva enfatizzato da un punto di vista prettamente interno i suoi punti di forza e di debolezza.

---

[105] Cfr. *ivi*, p. 83, Remark. È Murre a mettere in evidenza questo aspetto: "Now the idea of Fano become clear: by projecting from a line on V we get another Fano V^* with lower g [i.e. p nella nostra notazione] (but with double points)".

[106] L'autrice di questa tesi ha portato all'attenzione di Andreatta e Pignatelli questo scritto di Fano durante il workshop INDAM *Algebraic Geometry Between Tradition and Future – An Italian Perspective* tenutosi a Roma nel dicembre 2021.

[107] Cfr. ANDREATTA – PIGNATELLI 2023, *cit.*, p. 5: "the beauty as well as the elegance and simplicity of Fano's example".

[108] Si ringrazia Andreatta per questa preziosa informazione.

3. *Un tema di ricerca del 'tardo' Fano: le Fano-Enriques threefolds*

Se, come illustrato nel CAPITOLO 2, l'attività scientifica di Gino Fano sembra culminare con l'introduzione, lo studio e la prima classificazione delle Fano threefolds, si deve rilevare come queste non siano le uniche né le ultime varietà algebriche tridimensionali da lui individuate – o 'scoperte' – per la prima volta. Decisamente meno noto, ma altrettanto originale e innovativo, è il contributo di Fano alla classificazione delle cosiddette Fano-Enriques threefolds:[1] si tratta di varietà tridimensionali W le cui sezioni iperpiane sono superfici di Enriques[2], cioè delle superfici algebriche S di irregolarità $q = 0$, tali che $K_S \neq 0$ e $2K_S = 0$ in $Pic(S)$, dove K_S è il divisore canonico associato a S e $Pic(S)$ è il relativo gruppo di Picard, e tali che W non è un cono su S.[3]

Queste due classi di varietà tridimensionali introdotte da Fano sono però tra loro legate: il punto di partenza per la costruzione delle Fano-Enriques threefolds è infatti una varietà di Fano tridimensionale V che ammette un'involuzione con 8 punti fissi. Quozientando la varietà su tale involuzione, si ottiene un'altra threefold V', singolare e di tipo speciale: il suo modello proiettivo birazionale W risulta infatti avere come sezioni iperpiane delle superficie di Enriques. A loro volta, le superficie di Enriques si possono ottenere come quozienti di una superficie K3 su un gruppo di ordine due privo di punti fissi.

Fano affronta per la prima volta lo studio delle Fano-Enriques threefolds nel 1938, nel lavoro *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno*, pubblicato nelle «Memorie della Società dei XL».[4] Qui Fano mostra che la generica V' è birazionale a una Fano threefold e fornisce una classificazione geometrica di queste varietà, che si basa però sull'ipotesi restrittiva dell'esistenza di 8 punti singolari su W.

Pur senza raggiungere risultati definitivi e senza fornire una classificazione completa, questo lavoro eserciterà una notevole influenza sulle ricerche posteriori in geometria algebrica e merita di essere esaminato per due ragioni fondamentali. In primo luogo, lo studio della memoria *Sulle varietà algebriche…* apre una nuova prospettiva sull'ultimo periodo della vita di Fano (dal 1939 al 1950), una fase finora poco studiata. Questo contributo, inviato per la stampa nel gennaio del 1937 e pubblicato nell'anno dei *Provvedimenti per la difesa della razza*, si colloca infatti in uno snodo del tutto particolare della sua traiettoria personale e professionale: Fano è ormai un docente e ricercatore affermato, stabile a Torino da quasi quarant'anni. Di origine ebraica, a distanza di pochi mesi dalla pubblicazione del lavoro sulle Fano-Enriques threefolds sarà costretto a riparare a Losanna dove proseguirà – almeno in parte – l'attività di ricerca in questo ambito. Oltre a essere l'ultima pubblicazione di Fano prima del suo trasferimento in Svizzera e

[1] Una versione sensibilmente ridotta, in lingua inglese, di questo capitolo è stata pubblicata in E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2022b, *Gino Fano's late investigations on Fano-Enriques threefolds*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 80.2, pp. 23-48.

[2] All'epoca semplicemente indicate come 'superfici di genere zero e bigenere uno', come espresso nel titolo della Memoria di Fano.

[3] Questa definizione può essere così parafrasata in termini più moderni: una threefold W è una Fano-Enriques threefold di genere $-\frac{1}{2}K_W^3 + 1$ e grado $-K_W^3$ se ha singolarità canoniche, $-K_W$ non è un divisore di Cartier e $-K_W \sim_{\mathbb{Q}} H$ per un certo divisore di Cartier H ampio di W.

[4] G. FANO 1938b, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno*, «Mem. Soc. it.» (3) 24, pp. 41-66.

a rappresentare il primo contributo in questa direzione, questo lavoro appare rilevante all'interno dello sviluppo della Scuola italiana di geometria algebrica poiché, da un lato, è una buona sintesi della cultura e del patrimonio immateriale di questa tradizione di ricerca mentre, dall'altro, rappresenta un 'barometro' della sua fase di declino degli anni Trenta.

3.1. Introduzione allo studio delle Fano-Enriques threefolds: dal teorema di Godeaux alla costruzione della corrispondenza birazionale fondamentale

Seguendo la notazione utilizzata da Fano – tranne per gli spazi proiettivi che saranno indicati con la convenzione usuale $\mathbb{P}^N$ anziché che con S_N – d'ora in avanti p sarà il genere delle curve-sezioni della Fano-Enriques threefold di volta in volta considerata. È inoltre necessario tener presente che, nel linguaggio di Fano, il numero che compare a pedice della varietà indica la sua dimensione mentre, nel caso di una curva, denota il genere. L'apice invece rappresenta l'ordine, ossia il numero di intersezioni con un qualsiasi piano dello spazio ambiente che non appartiene alla varietà in questione.[5]

Punto di partenza della memoria di Fano è un teorema di Godeaux, apparso nel «Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique» nel 1933, in base al quale:

> Ogni varietà algebrica normale a tre dimensioni, non cono,[6] le cui sezioni iperpiane sono superficie regolari di genere zero e bigenere uno con curva bicanonica di ordine zero ($p_a = p_g = 0, P_6 = 1$) contiene un sistema lineare di superficie di generi uno ($p_a = p_g = P_2 = 1$) la cui dimensione aumentata di un'unità eguaglia quella dello spazio ambiente.[7]

Nell'ipotesi che il sistema lineare di queste curve sia completo rispetto al genere sulle superficie sezioni della varietà tridimensionale considerata, questa sarà una Fano-Enriques threefold $W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$ di ordine $2p-2$ avente come curve-sezioni delle curve normali non speciali $C_p^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-1}$. In virtù del risultato di Godeaux, la varietà W_3^{2p-2} contiene anche un sistema lineare di dimensione $p-1$ composto da superfici ϕ di generi uno, di grado $2p-6$, avente curve-intersezioni di genere $p-2$. Fano ripercorre poi il ragionamento del matematico belga, basato sul fatto notevole che le superficie sezioni-iperpiane di W_3^{2p-2}, che denota con F^{2p-2}, oltre al sistema lineare $|C_p^{2p-2}|$ delle loro sezioni iperpiane contengono un sistema lineare $|\gamma_p^{2p-2}|$ aggiunto al primo e avente gli stessi caratteri, da cui segue che $|2C| = |2\gamma|$. Ma, afferma Fano,

---

[5] Nel caso di un'ipersuperficie l'ordine coincide con il grado.

[6] Modernamente, si può vedere che se una Fano-Enriques threefold ammette singolarità non canoniche questa sarà un cono su un suo divisore di Cartier ampio: tale osservazione giustifica il fatto che Fano – e Godeaux prima di lui – escludono la possibilità che la threefold considerata sia un cono.

[7] L. GODEAUX 1933, *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 19, p. 134; FANO 1938b, *cit.*, p. 41.

questo risultato può essere meglio precisato […], nonché ulteriormente sviluppato, determinando i diversi casi delle varietà in parola, cioè i valori singoli di p (pochissimi) per cui tali varietà W_3^{2p-2} effettivamente esistono.[8]

L'obiettivo della memoria diventa così quello di trovare

le rappresentazioni di queste varietà […] sullo spazio S_3, e quindi tutti i tipi birazionalmente distinti, finora non noti, di sistemi lineari semplici di superficie di genere zero e bigenere uno, a curva bicanonica di ordine zero.[9]

Sotto le ipotesi della proposizione di Godeaux, dovrà essere $p \geq 4$: infatti, se fosse $p = 3$, la varietà W_3^{2p-2} sarebbe costituita da un rivestimento quadruplo di $\mathbb{P}^3$. Fano distingue poi il caso $p = 4$, che in termini moderni corrisponde ad una Enriques threefold, dai casi $p \geq 5$ per l'analisi dei quali costruisce una particolare corrispondenza tra le threefolds $W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$ e $M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$. Le varietà M_3^{2p-6} risultano essere delle Fano threefolds, ampiamente studiate dallo stesso Fano nei lavori precedenti. A partire dalle proprietà di queste ultime si potranno dedurre le caratteristiche delle prime, andando così a delineare la loro classificazione. L'esistenza di una mappa birazionale tra queste due varietà costituisce la chiave dell'intero studio di Fano, che però non presenta una sua costruzione esplicita né giustifica nel dettaglio la sua esistenza. Per $p > 5$ questa proprietà è stata dimostrata rigorosamente negli anni Ottanta da A. Conte e J. Murre – a partire dall'attenta rilettura del lavoro di Fano – sotto opportune ipotesi,[10] alcune delle quali mancanti o presenti solo implicitamente nella memoria del 1938. L'applicazione birazionale individuata da Fano è quella che rende commutativo il seguente diagramma, dove $\widetilde{W}$ è il blow-up di W_3^{2p-2} nei suoi 8 punti singolari che risultano essere punti quadrupli.

[8] FANO 1938b, *cit.*, p. 42.

[9] *Ibidem*.

[10] Per i dettagli dimostrativi cfr. A. CONTE – J. MURRE 1985, *Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, «Ann. SNS Pisa»12, pp. 43-80. Si riportano qui solo le ipotesi essenziali e gli elementi necessari per comprendere la notazione utilizzata nel diagramma. Si consideri una varietà algebrica tridimensionale $W_3^{2p-2} = W \subset \mathbb{P}^p$ tale che W sia proiettivamente normale e non sia un cono; p sia il genere della generica curva-sezione, cioè $g(W \cdot H \cdot H') = p$ dove con il simbolo $\cdot$ si denota l'intersezione di varietà nello spazio proiettivo; se H è un iperpiano sufficientemente generale, $W \cdot H = F$ è una superficie di Enriques liscia. Sotto queste ipotesi risulta che W non è liscia, ma ha singolarità isolate (Lemma 3.2). Nello specifico si tratta di 8 punti quadrupli $P_1, \dots, P_8$. Per ogni $i = 1, \dots, 8$ siano $\widetilde{W}$ il blow-up di W nei punti singolari P_i, $\sigma: \widetilde{W} \longrightarrow W$ il morfismo corrispondente e $E_i = \sigma^{-1}(P_i)$ i divisori eccezionali. Se $Y \subset W$ è una sottovarietà di W, si denota con $\tilde{Y}$ la sua trasformata propria su $\widetilde{W}$. Siano inoltre $|F|$ il sistema lineare delle sezioni iperpiane di W; $|F_i|$ il sottospazio lineare formato dalle sezioni iperpiane di W passanti per i punti singolari P_i; $|D|$ e $|\widetilde{D}|$ i sistemi lineari dei divisori su W e $\widetilde{W}$ rispettivamente; $\lambda = \lambda_{|D|}$ e $\tilde{\lambda} = \lambda_{|\widetilde{D}|}$ le mappe razionali ad essi associate. Segue che $\dim|D| = \dim|\widetilde{D}| = p - 1$ (Lemma 3.7). Per dimostrare il risultato finale sono necessarie le seguenti ulteriori ipotesi: $\widetilde{W}$ liscia; E_i lisci; punti singolari P_i "simili", ossia si comportino allo stesso modo; il sistema $|\widetilde{D}|$ non ha punti base; per un generico divisore D la curva $\widetilde{D} \cdot E_i = C_i$ è irriducibile. In tal modo, la threefold $M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}$, "riferibile a W_3^{2p-2}" nel linguaggio di Fano, è l'immagine del blow-up $\widetilde{W}$ mediante la mappa razionale $\tilde{\lambda}$. Poiché $\tilde{\lambda}$ è un morfismo birazionale (Teorema 5.1), anche λ è birazionale. Segue l'esistenza del diagramma commutativo illustrato in figura dove per D generico $\widetilde{D}$ è una superficie K3; $\tilde{\lambda}(E_i)$ sono piani; i coni tangenti alla varietà W nei punti P_i sono coni sulla superficie di Veronese.

$$
\begin{tikzcd}
 & \widetilde{W} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\lambda} = \lambda_{|\tilde{D}|}"] & \\
W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p \arrow[rr, dashed, "\lambda = \lambda_{|D|}"'] & & M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}
\end{tikzcd}
$$

Per fornire maggiori dettagli su questa corrispondenza birazionale, Fano porta avanti un ragionamento puramente sintetico, nella piena adesione ai canoni della Scuola italiana. In quest'ottica, Fano suppone che il sistema lineare $|\phi|$ delle superfici di genere uno sia 'semplice', cioè assume che il passaggio di una superficie ϕ per un punto generico della varietà W_3^{2p-2} non comporti il passaggio della superficie anche per altri punti variabili con il primo. In tal caso,

> il sistema $|\phi|$ rappresenterà allora nel consueto senso una varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1}, riferibile a W_3^{2p-2}, con superficie sezioni di generi uno, immagini delle ϕ, e curve sezioni canoniche di genere $p-2$ (in spazi S_{p-3}).[11]

Come già osservato, su ogni sezione iperpiana F^{2p-2} di W_3^{2p-2} vale che $|2C| = |2\gamma|$: quindi i sistemi lineari $|2F|$ e $|2\phi|$ tagliano sulle sezioni iperpiane delle curve equivalenti. Ma, in base a un risultato di Severi del 1906, anche questi ultimi due sistemi dovranno essere equivalenti sulla varietà W_3^{2p-2}, a meno di superficie fondamentali del sistema $|F|$ che a loro volta dovranno essere punti multipli. Per ottenere qualche informazione ulteriore su questi punti, Fano osserva che la somma delle loro molteplicità sarà pari a 32, in quanto è data dalla differenza tra i gradi dei sistemi doppi $|2F|$, di grado $8(2p-2)$, e $|2\phi|$, di grado $8(2p-6)$. Indicando con $2f$ e 2φ rispettivamente le immagini di $2F$ e 2ϕ in M_3^{2p-6}, la differenza tra i loro ordini sarà l'ordine complessivo delle superfici di M_3^{2p-6} che si ottengono come immagini dei punti multipli di W_3^{2p-2} precedentemente considerati. Poiché $2f$ e 2φ hanno rispettivamente grado pari a $4p-4=2(2p-2)$ e $2(2p-6)$, l'ordine complessivo cercato è 8. Inoltre, per l'invarianza birazionale del genere, le superfici fondamentali di $|f|$ contenute in M_3^{2p-6} devono intersecarsi con 2φ secondo curve di genere zero; affinché questo accada, le superfici in questione dovranno necessariamente essere 8 piani. Quindi, conclude Fano,

> Sopra M_3^{2p-6} la differenza $2f-2\varphi$ è costituita da 8 piani, fondamentali per $|2f|$; sopra W_3^{2p-2} la differenza corrispondente $2F-2\phi$ è costituita da 8 punti quadrupli (di multiplicità $\frac{32}{8}=4$), immagini di quei piani. La varietà W_3^{2p-2} a superficie sezioni di genere zero e bigenere uno ha dunque 8 punti quadrupli; e questo fatto di una W_3 vincolata soltanto ad avere superficie sezioni di un tipo determinato, e che ha di conseguenza certi punti multipli isolati, è senza dubbio particolarmente notevole.[12]

Ciascuno degli 8 piani di M_3^{2p-6} può essere messo in corrispondenza con l'intorno del relativo punto quadruplo di W_3^{2p-2}: così facendo, le coniche individuate sul piano dalle

---

[11] FANO 1938b, *cit.*, p. 42.

[12] *Ivi*, p. 44.

superfici 2φ, che sono delle quadriche, corrispondono nell'intorno in questione a sezioni con superfici 2ϕ, cioè con quadriche passanti semplicemente per il punto dato. In particolare, i coni tangenti a W_3^{2p-2} negli 8 punti quadrupli sono coni di $\mathbb{P}^6$ proiettanti delle superfici di Veronese. Fano osserva poi che non può accadere che due degli 8 piani di M_3^{2p-6} abbiano una retta in comune; possono invece avere un punto in comune. Se ciò avviene, il punto in questione sarà un punto doppio di M_3^{2p-6} e la retta passante per i due punti quadrupli di W_3^{2p-2} corrispondenti starà su W_3^{2p-2}. Anche in questo caso, l'innesto di nuovi concetti è accompagnato dalla necessità di nuova terminologia matematica, da integrare all'interno del patrimonio lessicale della tradizione italiana: Fano introduce il nome di 'punti congiunti' per denotare i due punti singolari appartenenti alla medesima retta su W_3^{2p-2}. In caso contrario, i due punti saranno semplicemente detti 'non congiunti'. Questo contributo lessicale di Fano non è però giunto fino ai nostri giorni: nella terminologia della geometria algebrica moderna si fa invece riferimento ai 'punti associati'. Si può anche vedere che se due di questi punti singolari P_i e P_j (con $i, j = 1, \dots, 8$ e $i \neq j$) sono associati, i piani corrispondenti π_i e π_j di M_3^{2p-6} hanno un punto in comune che, in termini moderni, è dato dalla contrazione della retta P_iP_j. Inoltre ogni P_i è associato ad uno stesso numero di altri punti singolari.

Fano osserva che se si effettua la proiezione di W_3^{2p-2} da un suo punto quadruplo le proiezioni degli altri punti quadrupli saranno punti quadrupli o tripli per la varietà proiezione, a seconda che i punti di partenza siano associati o meno al primo. Ripetendo questa operazione, la molteplicità dei punti inizialmente quadrupli e congiunti a k fra i centri di proiezione diventa pari a $4 - k$.

Il grande merito di Fano consiste quindi nell'aver individuato – per la prima volta – la corrispondenza birazionale, per $p \geq 5$, tra la generica Fano-Enriques threefold W_3^{2p-2} e una varietà di Fano tridimensionale M_3^{2p-6}, al cui interno l'immagine degli 8 punti singolari P_i di W_3^{2p-2} è data da 8 piani su M_3^{2p-6}. In altri termini, questo significa che il complementare della varietà W_3^{2p-2} meno gli otto punti singolari è isomorfo ad un aperto di M_3^{2p-6}, il cui complementare è dato esattamente dagli otto piani, "immagini" dei P_i nel linguaggio di Fano. Egli si limita tuttavia allo studio del caso "generale" in cui le eventuali coppie di piani incidenti si intersecano in punti distinti.

3.2. La classificazione delle Fano-Enriques threefold per $6 \leq p \leq 13$

Il primo caso analizzato nel dettaglio da Fano è $p = 6$: la varietà $M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$, corrispondente alla Fano-Enriques threefold $W_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$, ha curve-sezioni canoniche di genere 4 cosicché, dalla classificazione delle Fano threefold, risulta essere l'intersezione di una quadrica non singolare Q con un'ipersuperficie cubica C di $\mathbb{P}^5$ contenente 8 piani a due a due incidenti. Grazie ad alcuni risultati precedenti, Fano mostra che Q non è singolare (e, in particolare, non è un cono). Per quanto riguarda la razionalità[13] di M_3^6, da cui discende la razionalità di W_3^{10} in virtù della

[13] In ottica moderna, si può dimostrare che M_3^6 è razionale in virtù del criterio di razionalità di Enriques. A. CONTE 1983, *Two examples of algebraic threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, in C. CILIBERTO, F. GHIONE, F. ORECCHIA (eds.), *Algebraic geometry - Open problems*, Berlin-New York, Springer, p. 126, prop. 2.

mappa birazionale precedentemente costruita, Fano studia alcune particolari congruenze di rette del terz'ordine, rifacendosi al suo lavoro del 1901 sull'argomento. In particolare, analizza congruenze[14] $(7,3)$ la cui immagine su M_3^6 è un sistema lineare $|f^{10}|$ di superfici di genere zero e bigenere uno che rappresenta una threefold $W_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$ con 8 punti quadrupli, immagini dei piani contenuti in M_3^6 Le sezioni di W_3^{10} sono superficie di Enriques di un tipo particolare: le cosiddette "congruenze di Reye". Oltre trent'anni prima Fano stesso, basandosi sulla rappresentazione delle congruenze di rette mediante superficie di $\mathbb{P}^5$, aveva notato che le congruenze di Reye sono delle superficie di Enriques.[15]

Se si identifica – in termini moderni – la quadrica Q con la Grassmanniana $Gr(1,3)$, la varietà M_3^6 risulta essere un complesso cubico di rette. Nello specifico, questo è costituito dalle rette generatrici di una rete di quadriche R in $\mathbb{P}^3$: gli 8 piani corrispondono alle rette passanti per gli 8 punti base della rete.[16] Sempre in prospettiva moderna, la Fano-Enriques threefold W_3^{10} corrispondente si ottiene dalla parametrizzazione delle coniche duali di $\mathbb{P}^3$ che degenerano in una coppia di punti.[17]

La Fano-Enriques threefold W_3^{10} era già stata parzialmente studiata da Fano in un lavoro apparso nei «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» nel 1910,[18] mentre Godeaux aveva analizzato un suo caso particolare[19] nel 1930, assumendo che le quadriche di R avessero il medesimo tetraedro autopolare. In tal caso, le quadriche della rete possono essere rappresentate con equazioni del tipo $\sum_i^4 a_i x_i^2 = 0$ con $\sum a_i = 0$.

Passando al grado immediatamente superiore ($p = 7$), Fano osserva che la varietà di Fano $M_3^8 \subset \mathbb{P}^6$, a curve sezioni canoniche di genere 5, è l'intersezione completa di tre quadriche

[14] Con la notazione (m, n) Fano indica una congruenza algebrica di rette di ordine m e di classe n. L'ordine è dato dal numero delle rette della congruenza che passano per un generico punto dello spazio, mentre la classe è il numero di rette della congruenza che stanno in un generico piano. Per ulteriori dettagli cfr. G. FANO 1901, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 51, p. 3.

[15] Cfr. FANO 1901, *cit.*, pp. 74-78. In particolare, qui afferma che "la congruenza (7,3) è quella delle 'rette principali' ('Hauptstrahlen') di un sistema lineare ∞^3 di quadriche, già stata considerata dal sig. Reye" e conclude: "La congruenza [duale] (3,7) di genere sezionale 6 non è razionale, ma è invece un ente algebrico ∞^2 regolare di genere zero e bigenere uno". I contributi di Fano allo studio delle congruenze del terz'ordine sono citati anche in F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 5.5.1896, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 262; F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 1.4.1901, *ivi*, p. 475: "Ho ricevuto la memoria di Fano che sembra un bel lavoro. Ho notato che la congruenza di genere 0 e bigenere 1 è una superficie nuova; almeno sembra irriducibile alla mia F_6"; F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 18.2.1905, *ivi*, p. 611.

[16] Negli anni Ottanta è stato dimostrato rigorosamente che per ogni varietà $M = M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$, contenente 8 piani nella configurazione considerata, esiste una rete di quadriche R di $\mathbb{P}^3$ tale che $M = V_0(R)$, dove $V_0(R)$ è il complesso cubico così definito $V_0(R) = \{x \in Gr(1,3) | l_x$ giace su una quadrica Q di $R\}$. Cfr. CONTE 1983, *cit.*, p. 126, prop. 1.

[17] Si può anche vedere che W_3^{10} è costituita dall'intersezione tra la varietà V_6^{10}, formata dalle coppie di punti di $\mathbb{P}^3$, e il sistema lineare di dimensione 6 delle quadriche duali che sono apolari rispetto a tutte le quadriche della rete R. Cfr. CONTE 1983, *cit.*, p. 128, prop. 4.

[18] G. FANO 1910a, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 29, pp. 98-118.

[19] Cfr. L. GODEAUX 1930, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 16, pp. 920-922. Godeaux conclude così il suo lavoro: "On voit […] que le sections hyperplanes de W_3^{10} sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un. […] La variété V_3^{10} est un cas particulier de W_3^{10}, car V_3^{10} s'obtient en rapportant projectivement aux hyperplans de S_6 les surfaces F passant par les arêtes du tétraèdre de reference".

aventi 8 piani in comune. In base a quanto analizzato nei due lavori del 1936 sulle Fano threefolds, bisogna escludere la possibilità che gli 8 piani di M_3^8 siano tutti incidenti a due a due. Di conseguenza, sulla Fano-Enriques threefold corrispondente $W_3^{12} \subset \mathbb{P}^7$ ciascuno degli 8 punti quadrupli sarà non congiunto ad almeno uno dei rimanenti. Da una coppia di punti di questo tipo, W_3^{12} si proietta in una threefold di $\mathbb{P}^5$ con 6 punti doppi. Quindi ciascuno degli 8 piani di M_3^8 ne interseca esattamente altri 6: ciò significa gli 8 piani possono essere suddivisi in 4 coppie

$$\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta',$$

in modo che due di essi si intersechino o meno a seconda che appartengano oppure no a due coppie diverse. Attraverso un ragionamento puramente geometrico, Fano osserva che esistono altri 8 piani che formano una configurazione identica a quella degli 8 piani di M_3^8 di partenza. In particolare, ogni piano di una delle due configurazioni interseca in rette 4 piani dell'altra e in punti 6 piani della propria, mentre non interseca i 5 piani rimanenti. Le rette e i punti così individuati sono i lati e i vertici di un quadrilatero completo e l'insieme dei 16 piani è l'intersezione completa di M_3^8 con una quadrica di $\mathbb{P}^6$. Per giungere alle proprietà della Fano-Enriques threefold W_3^{12}, Fano passa da una terza varietà tridimensionale che corrisponde, in un certo senso, alla $\widetilde{W}$ della costruzione di Conte e Murre. Per fare ciò, sfrutta un risultato sulle Fano threefolds del suo contributo degli *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*: se una varietà del tipo M_3^8 contiene un piano, essa può essere proiettata da questo piano su $\mathbb{P}^3$ in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano superficie del 4° ordine passanti per una curva di ordine 9. La curva è a sua volta contenuta in una superficie cubica che è immagine del piano asse di proiezione. Applicando questa proprietà alla M_3^8 in questione, si ottiene che la curva si spezza in una cubica e nei 6 spigoli di un tetraedro, i cui vertici sono le proiezioni di 4 piani non incidenti (ad esempio, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) di M_3^8. Tornando quindi alla Fano-Enriques threefold W_3^{12}, questa può essere vista come l'immagine dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ attraverso il sistema lineare delle superficie sestiche di genere zero e bigenere uno che contengono una cubica piana fissa e che passano con molteplicità 2 per gli spigoli di un tetraedro.

Per esaminare poi il caso $p = 9$, Fano osserva innanzitutto che la varietà $M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$ è l'intersezione di una quadrica "colla V_4^6 «di C. Segre», rappresentante le coppie non ordinate dei punti di due piani", e contenente "due sistemi di piani, generabili proiettivamente, tali che due di questi sono incidenti o no secondo che appartengono a sistemi opposti oppure allo stesso sistema", ossia – in termini moderni – tale Fano threefold è l'intersezione dell'immersione di Segre di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ con una quadrica contenente 4 piani. Come gli 8 piani di M_3^{12} possono essere ripartiti in due sistemi distinti in base alle relazioni di incidenza, allo stesso modo i punti quadrupli della Fano-Enriques threefold corrispondente $W_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$ si suddividono in due quaterne in modo tale che due punti di una stessa quaterna siano sempre non congiunti mentre due punti appartenenti a quaterne diverse siano associati. Di conseguenza, considerando 3 punti di ciascuna quaterna, è possibile proiettare univocamente la Fano-Enriques threefold su $\mathbb{P}^3$: l'immagine dei sei centri di proiezione sarà costituita da 6 piani, ripartiti in due triedri, mentre le immagini dei due ulteriori punti quadrupli di W_3^{16} saranno i vertici dei due triedri.

Modernamente, le superfici sezioni-iperpiane della W_3^{16} possono essere ottenute come quozienti modulo un'opportuna involuzione dall'intersezione di tre quadriche di $\mathbb{P}^5$.[20] È infatti possibile costruire due quadriche di $\mathbb{P}^5_{(y_0,\dots,y_5)}$ con equazioni del tipo

$$Q_1: A_1(y_0, y_1, y_2) + B_1(y_3, y_4, y_5) = 0$$
$$Q_2: A_2(y_0, y_1, y_2) + B_2(y_3, y_4, y_5) = 0$$

in modo tale che, se $Y = Q_1 \cdot Q_2$ e $X = Y/i$, dove i è l'involuzione definita da

$$i[(y_0, \dots, y_5)] = (-y_0, -y_1, -y_2, -y_3, -y_4, -y_5),$$

esistono due immersioni

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{W} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W_3^{16} \subset \mathbb{P}^9 \arrow[rr, dashed] & & M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8 \end{tikzcd}$$

In tal modo, le sezioni iperpiane di W_3^{16} sono delle superficie di Enriques ottenute modulo i dall'intersezione $Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$, dove Q_3 è una terza quadrica di $\mathbb{P}^5$ di equazione

$$A_3(y_0, y_1, y_2) + B_3(y_3, y_4, y_5) = 0.$$

Fano conclude l'analisi del caso $p = 9$ riconoscendo che già nel 1930 Godeaux aveva studiato una $V_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$ che si ottiene come immagine della varietà tridimensionale delle coppie dell'involuzione di $\mathbb{P}^3$ definita da $x_i' = \frac{1}{x_i}$. Rivendica però la maggior generalità del suo studio, osservando che la threefold V_3^{16} di Godeaux è un caso particolare della varietà W_3^{16} da lui considerata, avente 3 punti doppi e una sezione iperpiana data da 4 superficie di Veronese.[21]

L'ultima Fano-Enriques threefold considerata è quella che si ottiene per $p = 13$. Tale $W_3^{24} \subset \mathbb{P}^{13}$ è rappresentata in $\mathbb{P}^3$ dal sistema lineare di dimensione 13 delle superficie di 6° ordine passanti con molteplicità due per gli spigoli di un tetraedro e si proietta dai suoi 8 punti quadrupli in una threefold $W_3^4 \subset \mathbb{P}^5$ contenente 8 piani, immagini degli 8 punti quadrupli. Facendo riferimento alla geometria della retta di $\mathbb{P}^3$, ambito di ricerca cui Fano si è ampiamente dedicato, sottolinea come tale W_3^4 sia, a sua volta, l'immagine di un complesso tetraedrale. Ciascun piano in essa contenuto interseca esattamente 3 degli altri in rette, "immagini con esso di coppie di punti congiunti".[22] La threefold W_3^4 risulta anche rappresentabile in $\mathbb{P}^3$ attraverso il sistema lineare di dimensione 5 delle quadriche circoscritte a un tetraedro, le cui facce e vertici sono immagini degli 8 piani di W_3^4. La corrispondente Fano threefold $M_3^{20} \subset \mathbb{P}^{12}$ può invece essere rappresentata dal sistema di dimensione 12 delle superficie di 4° ordine passanti con molteplicità 1 per gli spigoli del tetraedro, i cui vertici saranno punti doppi. In particolare,

---

[20] Cfr. CONTE 1983, *cit.*, p. 129.

[21] Cfr. GODEAUX 1930, *cit.*, p. 917. Qui fornisce la seguente descrizione di tale Fano-Enriques threefold: "variété V_3^{16} d'ordre seize, de S_9 […] possède trois points doubles coniques et une section hyperplane formée de quatre surfaces de Veronese. Les huit points de diramation sont quadruples pour la variété. Le cône tangent en un de ces points est un cone projectant une surface de Veronese. La variété contient seize droites passant chacune par deux points de diramation et douze coniques passant chacune par deux points de diramation et par un des trois points doubles. […] Le sections hyperplanes de V_3^{16} sont en general des surfaces de genres zero et de bigenere un".

[22] FANO 1938b, *cit.*, p. 59.

gli spigoli del tetraedro si possono vedere come le immagini di 6 quadriche di M_3^{20}, mentre la superficie F^4 composta dalle 4 facce del tetraedro è l'immagine della sezione iperpiana di M_3^{20} composta dagli 8 piani e dalle 6 quadriche.

3.3. Esclusione dei casi $p = 5, 8, 10, 11, 12$

Per delineare una classificazione completa delle Fano-Enriques threefolds Fano ha bisogno di escludere quei valori di p per i quali non esiste la varietà in questione.

Il caso $p = 5$ è eliminato immediatamente, all'inizio della memoria, con un'argomentazione però poco rigorosa. Fano infatti evidenzia soltanto che per $p = 5$ si avrebbe una varietà $W_3^8 \subset \mathbb{P}^5$ che da due dei suoi punti quadrupli, anche se congiunti, si proietta in uno spazio $\mathbb{P}^3$ semplice con almeno 6 punti doppi, il che non è possibile. Nel caso in cui le sezioni iperpiane siano non singolari, ciò può essere giustificato in termini moderni: sotto le ipotesi esplicitate da Conte e Murre, si ha che per una superficie di Enriques liscia di grado d in $\mathbb{P}^4$, d deve soddisfare l'equazione $d^2 - 10d + 12 = 0$;[23] poiché quest'ultima non è risolubile in interi, sarà $p > 5$.

Per proseguire con lo studio dei casi $p > 7$, Fano analizza cosa succede agli 8 piani di M_3^{2p-6} al crescere del genere delle curve-sezioni. Ricordando l'ipotesi iniziale per cui eventuali coppie di piani incidenti si intersecano in punti distinti, conclude che nei casi rimanenti ciascun piano può intersecare al più altri quattro degli otto piani di partenza. Da questo segue che gli 8 piani si possono suddividere in due quaterne, tali che due piani di una stessa quaterna non siano incidenti, mentre due piani di quaterne diverse si intersechino necessariamente. Ma, afferma Fano:

> Gli 8 piani stanno […] tutti in uno spazio Σ di dimensione ≤ 8, determinato da 3 fra essi di una stessa quaderna (poiché tale spazio contiene evidentemente tutti i piani dell'altra quaderna, e per conseguenza anche il piano ulteriore della prima quaderna). Dico anzi che questo sistema di 8 piani e la stessa varietà M_3^{2p-6} in parola devono appartenere allo spazio S_8, sicché sarà $p - 1 = 8, p = 9$.[24]

Fano non giustifica questa affermazione nei dettagli, ma cerca di mostrare che valgono contemporaneamente le disuguaglianze $p \geq 9$ e $p \leq 9$, attraverso ragionamenti di natura proiettiva. Per ottenere $p \geq 9$, osserva che la varietà $W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$, immagine di M_3^{2p-6}, deve avere due quaterne di punti quadrupli, tali che due punti di una stessa quaterna sono a due a due non congiunti. Facendo quindi la proiezione da tre punti di questa quaterna, la W_3^{2p-2} è mandata in una $W_3^{2p-14} \subset \mathbb{P}^{p-3}$ avente ancora un punto quadruplo. Per questo motivo, deve essere $2p - 14 \geq 4$ da cui $p \geq 9$. Per provare la disuguaglianza opposta, Fano cerca di mostrare che lo spazio Σ non può essere un iperpiano di $\mathbb{P}^{p-1}$ né vi può essere contenuto. Per assurdo, se ciò accadesse vi sarebbero due possibilità. Nel primo caso, lo spazio $\mathbb{P}^5$ generato da due piani α, β di una stessa quaterna potrebbe incontrare la varietà M_3^{2p-6} in una superficie residua che dovrebbe intersecare sia α sia β almeno in una conica. Quindi l'intersezione residua di M_3^{2p-6} con l'iperpiano in questione sarebbe costituita da almeno tre coniche, sia in α sia in β, che non

[23] R. HARTSHORNE 1977, *Algebraic geometry*, New York, Springer, p. 434.

[24] FANO 1938b, *cit.*, p. 54.

è possibile. La seconda possibilità è che la superficie intersezione residua di M_3^{2p-6} con un generico iperpiano passante per i piani sghembi α, β abbia genere aritmetico -1, in quanto dovrebbe formare una superficie di genere 1 con α, β da essa intersecati in cubiche ellittiche. Se consideriamo un ulteriore piano di M_3^{2p-6} che non intersechi α, β, la superficie residua di questi tre piani avrebbe genere < -1 essendo quindi riferibile a una rigata di genere > 1. Ma ciò è incompatibile con il contenere curve ellittiche; dunque $p \leq 9$.

Questa parte della memoria, dedicata ad escludere i casi $p = 8, 10$, è tuttavia condizionata da due problemi: il primo è l'ipotesi iniziale di Fano sugli otto piani che risulta eccessivamente restrittiva. Il secondo può probabilmente essere definito come un'eccessiva fiducia nei confronti dei metodi proiettivi classici tipici Scuola italiana. Le affermazioni di Fano in questi due casi sono infatti state smentite a partire dagli anni Ottanta, quando sono state riprese queste indagini con metodi moderni. L. Bayle (1994) ha trovato una Fano-Enriques threefold per $p = 8$, le cui superfici-sezioni iperpiane sono delle sestiche di $\mathbb{P}^3$ che passano con molteplicità due per gli spigoli di un tetraedro e che contengono una conica fissata. In particolare, tali superfici sono le immagini di superfici di Enriques lisce, non minimali e di grado 10 in $\mathbb{P}^4$. Dieci anni prima, invece, A. Beauville aveva individuato una varietà $W_3^{18} \subset \mathbb{P}^{10}$ avente come sezioni iperpiane delle congruenze di Reye generalizzate di grado 18 in $\mathbb{P}^9$.

Dopo aver studiato nel dettaglio la threefold $W_3^{24} \subset \mathbb{P}^{13}$, Fano deve escludere la possibilità dei casi $p = 11, 12$. Per fare ciò, procede in due passaggi. Innanzitutto analizza il caso in cui gli 8 piani di M_3^{2p-6} sono nella configurazione particolare delle due quaterne distinte. Sotto questa ipotesi la W_3^{2p-2} dovrebbe proiettarsi da 4 dei suoi punti quadrupli a due a due non congiunti in

- una $W_3^4 \subset \mathbb{P}^7$ $(p = 11)$, che non esiste;
- una $W_3^6 \subset \mathbb{P}^8$ $(p = 12)$, ∞^1 razionale normale di piani, sulla quale i centri di proiezione dovrebbero avere come immagini delle superfici di Veronese, che nuovamente non esistono.

Dopodiché Fano prende le distanze dalla configurazione particolare e vuole dimostrare che, in generale, "all'infuori dei casi già considerati, non esistono altre M_3^{2p-6} di S_{p-1} contenenti 8 piani, o rispettivamente W_3^{2p-2} di S_p con 8 punti quadrupli, come richiesto".[25] Per far questo, considera il sistema di cubiche che rappresenta la superficie immagine di uno dei piani, ad esempio α, della Fano threefold M_3^{2p-6} e analizza le rette passanti per i punti base del sistema, concludendo che ciascun punto base deve appartenere ad almeno due rette delle 5 di partenza corrispondenti ai 5 piani di M_3^{2p-6} sghembi rispetto ad α. Ciò equivale ad affermare che tali rette sono i lati di un n-agono semplice con $n \geq 5$ o di due n-agoni, ciascuno con $n \geq 4$. Ma "è manifestatamente impossibile che 3 qualunque fra esse contengano tutti i vertici"[26] e questo basta, secondo Fano, a concludere la dimostrazione. Varietà di questo tipo non rientrano nella classificazione moderna delle Fano-Enriques threefolds elaborata in modo indipendente da T. Sano (1995) e Bayle (1994) e la questione della loro esistenza è ancora oggi aperta.[27]

---

[25] FANO 1938b, *cit.*, p. 60.

[26] *Ivi*, p. 62.

[27] Cfr. L. BAYLE 1994, *Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d'Enriques*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik» 449, pp. 9-

3.4. Un caso particolare: la Fano-Enriques threefold $W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$

Alla fine della memoria, Fano prende in considerazione il caso particolare $p = 4$ in cui si ha una Enriques threefold classica. Questa sarà una varietà $W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$ con superfici-sezioni $F^6 \subset \mathbb{P}^3$ di genere zero e bigenere uno che passano con molteplicità due per gli spigoli di un tetraedro. La Fano threefold $M_3^2 \subset \mathbb{P}^3$ corrispondente altro non è che un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^3$.

W_3^6, inoltre, ha 6 piani doppi che si ottengono dalle intersezioni a due a due di 4 spazi $\mathbb{P}^3$ e che passano tutti per uno stesso punto. Fano sceglie quest'ultimo come punto fondamentale [0] del sistema di coordinate e suppone che i 4 spazi $\mathbb{P}^3$ siano definiti dalle equazioni $x_i = 0$ $(i = 1, \dots, 4)$. Così facendo, in virtù di quanto illustrato da Godeaux nel lavoro del 1933, da cui Fano trae anche la notazione utilizzata,[28] W_3^6 è definita da un'equazione del tipo:

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4\{x_0^2 + 2x_0f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) + f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)\} \\ + \varphi_2(x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_2x_3) = 0 \end{aligned}$$

dove f_1 è un polinomio lineare omogeneo nelle x_i, f_2 è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle x_i e φ_2 è una forma quadratica contenente termini con solo quadrati delle espressioni $x_2x_3x_4, \dots, x_1x_2x_3$. [0] è un punto quadruplo di W_3^6 tale che le rette uscenti da esso segano sulla varietà le coppie di una involuzione $\boldsymbol{I}_2$. Inoltre W_3^6 si proietta da questo punto in un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^3$, che si può supporre di equazione $x_0 = 0$, avente superficie di diramazione

$$x_1x_2x_3x_4\{x_1x_2x_3x_4(f_1^2 - f_2) - \varphi_2\} = 0$$

di ordine 10, formata dai 4 piani tracce degli spazi $x_i = 0$ $(i = 1, \dots, 4)$ e proiezioni dell'intorno di [0] su W_3^6, e da una superficie F^6 proiezione dell'intersezione tra W_3^6 e lo spazio $x_0 + f_1 = 0$. Fano giunge così ad un'accurata descrizione geometrica della Enriques threefold in questione: gli spazi $\mathbb{P}^3$ passanti per [0] intersecano la varietà W_3^6 in superficie F^6 di genere zero e bigenere uno, aventi [0] come punto quadruplo e 6 rette doppie passanti per tale punto. Queste particolari F^6 si proiettano da [0] in piani doppi aventi una curva di diramazione formata da 4 rette, lati di un quadrilatero, e da una sestica che passa con molteplicità due per i 6 vertici di tale quadrilatero.

Il caso $p = 4$ – l'ultimo affrontato nella memoria del 1938 – appare particolarmente significativo sotto due aspetti: il legame con le ricerche di Godeaux, su cui si tornerà nel seguito, e il fatto che sia l'unico passaggio del lavoro in cui compaiono le equazioni esplicite degli enti algebrici su cui Fano sta lavorando. In chiusura, egli osserva che la varietà W_3^6 non è razionale e nemmeno unirazionale.[29] Tuttavia, negli anni Cinquanta, Roth ha dimostrato che la generica

---

63; T. SANO 1995, *On classification of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Fano index 1*, «Journal of the Mathematical Society of Japan» 47, pp. 369-380.

[28] Cfr., ad esempio, GODEAUX 1933, *cit.*, p. 137: "Si le centre de projection est le point $O_0 = (1,0,0,0,0)$, la variété V_3^6 a pour équation

$$\varphi_2(x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4[x_0^2 + 2x_0f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) + f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)] = 0$$

où φ_2, f_1, f_2 désignent des polynômes à quatre variables homogènes dont le degré est indiqué par l'indice".

[29] In particolare, Fano afferma che la non razionalità discende dal fatto che W_3^6 ha come caso, quando nella sua equazione mancano i termini in x_0, il cono che proietta una superficie $F^6 \subset \mathbb{P}^3$ di genere zero e bigenere uno. Questo cono, pur avendo tutti i generi nulli, non è razionale poiché la congruenza di 1° ordine delle sue generatrici

Enriques threefold W_3^6 è unirazionale.[30] È invece corretto quanto sostenuto da Fano a proposito dell'irrazionalità di W_3^6; il percorso per giungere a questo risultato secondo gli standard di rigore moderni è stato però più travagliato. Roth stesso, dopo aver dimostrato l'unirazionalità, si occupa dell'irrazionalità di W_3^6 servendosi della torsione di Severi: in particolare, afferma che tale varietà non è razionale poiché il gruppo fondamentale della sua desingolarizzazione contiene $\mathbb{Z}_2$. Qualche anno dopo, J.P. Serre (1959) prova però che una varietà unirazionale non singolare non può avere torsione ed è semplicemente connessa, invalidando di fatto la dimostrazione di Roth.[31] Quest'ultima è poi anche criticata da J.A. Tyrrell che ne evidenzia l'illegittimità alla luce dell'esistenza di alcuni punti singolari non ordinari.[32] In termini moderni, questi punti sono le immagini degli 8 punti singolari non-Gorenstein della normalizzazione della Enriques threefold.[33] Solo negli anni Ottanta L. Picco Botta e A. Verra hanno ottenuto la dimostrazione definitiva dell'irrazionalità della generica varietà tridimensionale di Enriques W_3^6 sfruttando il gruppo di Chow e le proprietà delle varietà di Prym.[34] A partire dall'individuazione di un modello non singolare $\widetilde{V}'$ di W_3^6 contenente un fibrato in coniche su una certa superficie al cui interno la curva Δ formata dai punti le cui fibre sono coniche degeneri risulta essere completa, non singolare e di genere 5, è stato messo in luce l'isomorfismo tra il gruppo di Chow $A^2\left(\widetilde{V'}\right)$ del modello e la varietà di Prym $Prym(\tilde{\Delta}/\Delta)$. Poiché quest'ultima non è la Jacobiana di una curva, si può concludere che la generica Enriques threefold non è razionale.

Nell'ultima sezione della memoria, Fano sintetizza i tre punti fondamentali: esiste una mappa birazionale tra le varietà W_3^{2p-2} and M_3^{2p-6}; le Fano-Enriques threefold sono sempre razionali per $p \geq 6$; la classificazione fornita è completa. Purtroppo, le dimostrazioni di tutte queste affermazioni sono parziali, e l'ultima è errata. I risultati di Fano sulla razionalità/non razionalità saranno dimostrati rigorosamente più di cinquant'anni dopo, l'esistenza di ulteriori Fano-Enriques threefolds rispetto a quelle elencati nel 1938 sarà messa in luce dagli anni Ottanta in avanti, mentre la questione di fornire una classificazione finale nel caso generale è

non è razionale. Se W_3^6 fosse unirazionale, ossia "riferibile" a un'involuzione di $\mathbb{P}^3$, alle sue generatrici dovrebbe corrispondere una congruenza di 1° ordine in $\mathbb{P}^3$, il che non avviene.

[30] ROTH 1955, *cit*., p. 97.

[31] J.-P. SERRE 1959, *On the Fundamental Group of a Unirational Variety*, «Jour. LMS» (1) 34, pp. 481-484.

[32] Cfr. J.A. TYRRELL 1961, *The Enriques threefold*, «Mathematical Proc. Cambridge» 57, pp. 897-898: "the critical example has been the Enriques threefold E, asserted by Roth to be unirational but not rational. […] E is certainly unirational and its non-singular model E' has been thought to possess Severi torsion (thus apparently establishing the non-rationality of E). […] A consequent re-examination of E has revealed the existence of eight hitherto unnoticed quadruple points, two on each triple line, which are not ordinary singularities. […] Owing the presence of these non-ordinary singularities, the arguments for the existence of torsion on E' – and hence also the arguments for the non-rationality of E – are invalidate.". E conclude: "there seems no further reason to suppose that E' is a counter-example to Serre's theorem. It still remains, of course, to decide whether the threefold is rational or not".

[33] Come evidenziato in I. CHELTSOV 2004, *Rationality of an Enriques–Fano threefold of genus five*, «Izvestiya: Mathematics» 68, p. 611, la normalizzazione della generica varietà di Enriques tridimensionale è una Enriques-Fano threefold di genere 4 e grado 6 avente 8 punti singolari del tipo $\frac{1}{2}(1,1,1)$. Il suo ricoprimento canonico è un ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ che ramifica in un divisore di grado (2,2,2).

[34] Cfr. L. PICCO BOTTA – A. VERRA 1983, *The non rationality of the generic Enriques' threefold*, «Compositio Mathematica» 48, p. 184, prop. 7.

ancora aperta e si tratta di un problema di difficile risoluzione come hanno rilevato vari matematici che si sono occupati della questione anche in tempi recenti.[35]

3.5. Le ricerche posteriori di Fano legate alle Fano-Enriques threefolds

Fano non tornerà più sul problema della classificazione di queste varietà. Lo scritto del 1944 pubblicato sulla «Revista de Matemática y física teórica» di Tucumán, diretta dall'amico ed ex-collega Terracini, rappresenta l'unico altro lavoro di Fano in cui compare esplicitamente una varietà Fano-Enriques, ma la questione è affrontata da una prospettiva completamente diversa.[36] Fano esamina la threefold V_3^{10}, un caso particolare della Fano-Enriques threefold di $\mathbb{P}^6$ le cui sezioni iperpiane sono composte da quattro piani e tre quadriche. Il suo studio parte però dall'analisi della generica superficie di Enriques F^6 di ordine 6 che ha gli spigoli di un tetraedro come rette doppie. Osserva che la sua equazione può essere scritta come

$$x_1x_2x_3x_4f(x) + x_2^2x_3^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 = 0$$

dove $f(x)$ è una forma quadratica nelle x_i $(i = 1, \dots ,4)$, i cui 10 coefficienti possono essere considerati come dei parametri (i cosiddetti 'moduli'). Inoltre F^6 è rappresentabile su una superficie di ordine 10 $F^{10} \subset \mathbb{P}^5$, in modo che le sei rette doppie di F^6 corrispondano a sei cubiche piane su F^{10}. Fano passa poi ad analizzare alcuni casi particolari di F^6 che dipendono da meno di 10 moduli. Per fare ciò, introduce il sistema lineare Σ di dimensione 3 composto da superfici quadriche. Le rette che appartengono a un intero fascio di quadriche di Σ formano una congruenza di Reye che rappresenta una superficie F^6 dipendente da 9 moduli. Se Σ ammette un fascio di coni con lo stesso vertice, le rette per questo punto e contenute nell'unico piano tangente e passanti per tale punto formano invece una F^6 con 8 moduli. Σ, tuttavia, può contenere più di un fascio di coni, fino a un massimo di 10. In tal caso, la superficie di Enriques F^6 dipende da 4 moduli e la corrispondente F^{10} contiene 10 rette che si intersecano a due a due. Nella seconda parte del lavoro, Fano introduce il sistema lineare di dimensione 3 delle superfici cubiche $|F^3|$ aggiunte, passanti semplicemente per gli spigoli del tetraedro fondamentale e aventi i vertici come punti doppi, che gli permetterà di arrivare alla Fano-Enriques threefold $V_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$. Tra gli elementi del sistema $|F^3|$ esiste una trasformazione involutoria birazionale data da $u_i' = \frac{1}{u_i}$ e, più nello specifico, due F^3 omologhe formano insieme una superficie di Enriques speciale che avrà le stesse rette doppie della F^6 di partenza. Al tempo stesso, $|F^3|$

[35] Cfr., *inter alia*, SANO 1995, *cit.*, p. 369: "In general case, this problem seems very hard to solve because their singularities may not be $\mathbb{Q}$-Gorenstein, that is, $-m$ *i*s not Cartier for any positive integer m."; L. GIRALDO – A.F. LOPEZ – R. MUÑOZ 2004, *On the existence of Enriques-Fano threefolds of index greater than one*, «Journal of algebraic geometry» (1) 13, p. 143: "[…] when the surface section is an Enriques surface a complete classification has not been archive yet."; CHELTSOV 2004, *cit.*, p. 608: "[…] the classification of Enriques-Fano threefolds with arbitrary canonical singularities is far from being complete."; Y. PROKHOROV 2007, *On Fano-Enriques threefolds*, «Sbornik: Mathematics» 198, p. 560: "Cheltsov […] proved that any Fano-Enriques threefold (U, A) has only ($\mathbb{Q}$-Gorenstein) canonical singularities. Thus to complete the classification one has to consider the case of non-terminal canonical singularities."; A.L. KNUTSEN – A.F. LOPEZ – R. MUÑOZ 2011, *On the Extendability of Projective Surfaces and a Genus Bound for Enriques-Fano Threefolds*, «Journal of Differential Geometry» 88, p. 483: "[…] smooth Fano threefolds have been classified, while, in the singular case, a classification, or at least a search for the numerical invariants, is still underway".

[36] G. FANO 1944, *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno*, «Revista MFT» 4, pp. 69-79.

interseca la superficie F^6 in curve sghembe di ordine 4. Fano denota con Λ il sistema delle quadriche congiungenti le coppie di curve omologhe sotto l'involuzione precedentemente introdotta, che è strettamente correlato alla Fano-Enriques threefold in questione. Si concentra poi sulle F^3 riducibili: queste superfici 'si spezzano' in una faccia del tetraedro fondamentale e un cono quadrico uscente dal vertice opposto o, in alternativa, in due facce di tale tetraedro e in un piano passante per lo spigolo opposto all'intersezione degli altri due. Indicando con $|L|$ il sistema lineare di tutte le quadriche circoscritte al tetraedro fondamentale, Fano osserva che le quadriche di Λ contenute in $|L|$ appartengono, a loro volta, a F^3 riducibili. Ma questo significa che Λ, visto come sistema di dimensione 3 di quadriche, è una varietà tridimensionale di ordine 10, cioè una $V_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$. Questa costruzione, del tutto differente rispetto alla memoria del 1938, permette a Fano di concludere che la generica sezione iperpiana della Fano-Enriques threefold considerata, formata da quattro piani e tre quadriche, è l'immagine del sistema bidimensionale di superfici in comune a Λ e $|L|$. Questo risultato rappresenta l'elemento di novità più significativo del lavoro del 1944 che si conclude con due risultati riguardanti le superfici di Enriques di ordine 6: esistono 56 piani che intersecano F^6 in coppie di cubiche e la generica superficie F^6 contiene 20 cubiche piane a due a due aggiunte. Oltre a riscuotere, sorprendentemente per certi versi, un maggior successo rispetto alla memoria del 1938 (come testimoniato dalla sua presenza all'interno delle collezioni personali di opuscoli anche di matematici estranei all'ambiente torinese, come Severi e Conforto), lo scritto *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno* attesta come Fano non interrompa la sua attività di ricerca dopo il ricollocamento in Svizzera.

Accanto a questa pubblicazione, la conferenza *Les transformations de contact birationelles dans le plan*, tenuta da Fano al *Cercle Mathématique* di Losanna il 10 febbraio 1942, appare rilevante in relazione ai suoi ultimi interessi di ricerca sulle varietà tridimensionali.[37] Le minute manoscritte di questa comunicazione testimoniano il permanere di un interesse per il concetto chiave di applicazione birazionale di cui Fano ha fatto ampiamente uso nella memoria del 1938. L'elemento più significativo però consiste nel fatto che le trasformazioni birazionali di contatto del piano hanno uno stretto legame con le threefolds: modernamente, chiamando $\mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ il proiettivizzato del fibrato cotangente di $\mathbb{P}^2$, una tale trasformazione è un automorfismo birazionale a di $\mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ tale che $p \cdot a = b \cdot p$, dove $p: \mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ è la proiezione naturale e $b \in Bir(\mathbb{P}^2)$. $\mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ risulta essere una varietà tridimensionale in quanto è la proiettivizzazione di un fibrato vettoriale di rango due su $\mathbb{P}^2$. p è quindi una mappa tra una threefold e $\mathbb{P}^2$. Di conseguenza, una trasformazione di contatto birazionale del piano è un particolare automorfismo di tale threefold.

3.6. La memoria del 1938 all'interno del patrimonio della Scuola italiana

Il lavoro *Sulle varietà algebriche…*, che si colloca nella fase della maturità scientifica di Fano, è emblematico di come la produzione matematica sia estremamente situata, non solo a livello temporale e geografico ma anche in termini di contesto sociale e patrimonio culturale. Fano è pienamente consapevole di appartenere, e lo dichiara orgogliosamente in più occasioni, alla Scuola italiana di geometria algebrica. Dagli anni Trenta ha ormai fatto propri i tratti

[37] BSMT, *FFa, Scritti. 3,* cc. 1-6. Per un approfondimento su tale conferenza, cfr. il CAPITOLO 4.

metodologici ed estetici tipici della tradizione italiana, rielaborandoli anche in maniera – almeno in parte – originale: Fano perviene così ad una precisa posizione epistemologica e metodologica, al cui interno gli aspetti che ritiene più caratteristici della geometria algebrica italiana sono estremizzati. La memoria del 1938, racchiudendo un insieme davvero notevole di elementi tipici dell'approccio della Scuola alla ricerca, si presenta come l'apoteosi di quello "stile geometrico italiano" cui i membri di questa comunità fanno spesso riferimento.

In primo luogo, Fano tenta di estendere alle varietà di dimensione superiore i metodi classici, che si erano dimostrati efficaci per curve e superfici. Un approccio, questo, che affonda le radici in quel procedere per analogia tipico della Scuola e che Fano, nel tentativo di illustrarlo agli studenti di Aberystwyth, descrive in questi termini:

> Potrei dire che, nello studio della geometria su una varietà algebrica, il concetto fondamentale di quello che possiamo chiamare il metodo geometrico italiano consiste nello studio un (semplice) sistema lineare di M_{k-1} su M_k riducendolo alle sezioni iperpiane di una nuova M_k. Si tratta necessariamente di un metodo n-dimensionale. In particolare: per le serie lineari di gruppi di punti su una curva, una nuova curva sulla quale i gruppi sono determinati da iperpiani, ecc.[38]

Tale metodo si basa sulla corrispondenza tra i sistemi di curve e le sezioni iperpiane di una certa superficie: attraverso il sistema di curve piane di genere p è infatti possibile studiare in modo adeguato le superfici aventi sezioni iperpiane del medesimo genere. Come emerge dalla memoria del 1938, Fano cerca di applicare questo tipo di ragionamento anche alle varietà tridimensionali: analizza le superfici $F_2^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ ottenute come sezioni iperpiane delle threefolds di partenza $W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p$ per ricavare alcune proprietà di queste varietà tridimensionali. Per studiare, a loro volta, tali superfici Fano volge l'attenzione verso i sistemi di curve $C_p^{2p-2} \subset \mathbb{P}^{p-2}$ su di esse, sezioni iperpiane delle superfici di Enriques F_2^{2p-2}. Questo continuo passaggio tra threefolds, superfici e curve non si rivela però così efficace: senza le dovute cautele, c'è il rischio concreto di 'perdere' alcune informazioni rilevanti sulle varietà considerate, e Fano incorre in questo inconveniente in alcune parti del lavoro del 1938, ad esempio quando analizza le due possibilità per le superfici-sezioni di una Fano-Enriques threefold che passano per le coppie di punti di un'involuzione di ordine 2. Qui Fano arriva ad escludere entrambi i casi analizzando il sistema delle superfici-sezioni iperpiane di W_3^{2p-2} e i sistemi di curve su di esse.[39]

Fano spesso si avvale di quell'insieme di capacità e attitudini cui i geometri italiani si riferivano con l'appellativo di 'intuizione geometrica' che riveste un ruolo chiave in due fasi dell'attività matematica: quella iniziale, di scoperta, e quella finale, di sintesi:

---

[38] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 63*r*: "I may say that, in studying geometry on an algebraic manifold, it is the fundamental concept of what we may call the Italian geometrical method, to study a (simple) linear system of M_{k-1} on M_k by reducing it to the hyperplanar sections of a new M_k. It involves necessarily more-dimensional method. Particularly: for linear series of groups of points on a curve, a new curve, on which the groups are determined by hyperplanes, etc.".

[39] FANO 1938b, *cit.*, pp. 60-62. Emblematico in quest'ottica è il ragionamento condotto per escludere la prima possibilità: "Si consideri […] sopra una F generica una delle ∞^1 coppie di I_2, e una generica δ fra le sezioni iperpiane della stessa F passanti per tale coppia. Sopra tale F le superficie Φ, appartenenti alla I_2, segnano il sistema totale delle curve aggiunte alle sezioni iperpiane, e pertanto quella coppia imporrebbe a un gruppo canonico della curva δ un'unica condizione, il che non è possibile".

> Coll'intuizione si scopre; colla logica si decompone il nuovo trovato nei singoli elementi, anelli di una catena per ripassarli al lume della critica; coll'intuizione di nuovo si sintetizza: appunto come l'organismo vivente è la sintesi delle sue cellule e quello e queste sono ricchi di interesse; ma la conoscenza anche minuta delle cellule non basta a far conoscere l'individuo.[40]

Il ricorso all'intuizione permette a Fano di dare fondamento ad alcune affermazioni che non giustifica ulteriormente, accompagnandole da espressioni linguistiche tipiche della prosa della Scuola come "manifestatamente", "evidentemente".[41] È quello che accade quando analizza la proiezione della Fano-Enriques threefold di partenza dai suoi punti singolari per escludere i casi $p = 11, 12$. In più parti della Memoria, Fano adotta procedimenti da lui stesso considerati 'empirici' o sperimentali, basati sullo studio dettagliato di casi particolari e sulla successiva generalizzazione. All'interno di quello che Fano stesso definisce un "laboratorio intellettuale", il matematico può condurre alcuni esperimenti mentali che lo guidano nella costruzione di nuova conoscenza matematica.[42] Un esempio di ciò è costituito dal tentativo di mostrare che valgono contemporaneamente le disuguaglianze $p \geq 9$ e $p \leq 9$ per giungere allo studio della Fano-Enriques threefold che si ottiene per $p = 9$. Questo tentativo è infatti portato avanti attraverso ragionamenti di natura proiettiva basati esclusivamente sullo studio di configurazioni particolari. Come parecchi altri lavori a stampa di Fano, quello del 1938 è caratterizzato da un approccio prevalentemente sintetico, basato su strumenti proiettivi iper-classici: ad esempio, per giungere allo studio della Fano-Enriques threefold relativa a $p = 13$, considera l'ordine della varietà ottenuta come proiezione di W_3^{2p-2} da quattro punti quadrupli non congiunti a due a due, concludendo che deve necessariamente essere $p \geq 11$.[43] La predilezione per gli strumenti sintetici è testimoniata sia dalla quasi totale mancanza di equazioni e conti espliciti sia dalla particolare concezione degli enti geometrici introdotti. Fano infatti conferisce a punti, rette e piani di uno spazio n −dimensionale lo status di vere entità geometriche e non quello di meri attributi di entità analitiche, come ben emerge dalla suddivisione degli otto piani di M_3^{2p-6} in due quaterne legate da particolari condizioni geometriche 'concrete' con l'obiettivo di escludere i casi $p = 8, 10$.

3.7. Tratti collettivi *vs* tratti individuali

La memoria *Sulle varietà algebriche...* è anche emblematica di un tipo di prosa molto particolare. I geometri italiani si consideravano 'esploratori di un nuovo territorio', una 'foresta

---

[40] G. FANO 1924d, *Intenti, carattere, valore formativo della matematica. Conferenza tenuta alla scuola di guerra il 15 marzo 1924*, «Alere Flammam» 2, p. 27.

[41] Cfr. FANO 1938b, *cit.*, p. 54: "tale spazio contiene evidentemente tutti i piani dell'altra quaderna, e per conseguenza anche il piano ulteriore della prima quaderna"; o ancora *ivi*, p. 62: "ed è allora manifestatamente impossibile che 3 qualunque fra esse contengano tutti i vertici".

[42] Cfr. FANO 1923a, *cit.*, p. 16: "But even in mathematics there is what we may call an experimental part, and it generally consists in the attentive examination, in the detailed analysis, of some special examples. A new theory cannot be started unless some particular case has been profoundly and accurately investigated previously. This is mathematician's «experiment», and it frequently yields the clue to the new theory. […] In our mind itself, in our «intellectual laboratory» experiments may be carried out".

[43] Il ragionamento qui portato avanti da Fano non è del tutto preciso: afferma infatti che dai 4 punti singolari da lui considerati in precedenza la W_3^{2p-2} si proietta in una varietà di $\mathbb{P}^{p-4}$ di ordine $\leq 2p - 2 - 15 = 2p - 17$, per cui deve essere $p - 4 \leq (2p - 17) + 3 - 1$ cioè $p \geq 11$.

oscura' in cui erano in grado di orientarsi solo grazie alla flebile 'fiammella' dell'intuizione.[44] Di conseguenza, erano soliti presentare i loro risultati in una prosa tipica del loro 'essere in divenire'.

Oltre a costituire uno *specimen* del modo di fare geometria e di presentare i risultati da parte dei geometri italiani, questo lavoro consente di mettere in luce anche alcuni tratti peculiari dell'approccio personale di Fano alla ricerca avanzata. Bisogna tener conto che Fano è – da sempre – il più 'geometrico' degli allievi di Segre, al punto che già nel 1893 il maestro gli aveva suggerito di trascorrere un periodo di studio a Gottinga, nella speranza che alla Scuola di Klein questa sua inclinazione sarebbe stata, se non corretta, almeno attenuata:

> [Fano] è dotato di molta memoria ed ha un ingegno vivace. Ma le sue tendenze sono essenzialmente geometriche, per la pura geometria. E quantunque io l'abbia eccitato ripetutamente a coltivare anche l'analisi, e nei miei corsi gli abbia fatto vedere non solo i metodi sintetici ma anche quelli analitici, egli finora è rimasto troppo esclusivamente geometra. Io l'ho incoraggiato molto a recarsi a Gottinga, alla Sua scuola, perché spero che Ella riesca ad allargare molto la cerchia delle sue idee e dei suoi studi. Forse, date le attitudini spiccatissime che egli ha per la geometria, non sarà il caso di farlo passare alla pura analisi, a quell'analisi che si fa uno scrupolo di evitare sussidi geometrici; ma invece credo che si possa rinforzarlo di molto come geometra se si riesce a fargli acquistare pienamente gli strumenti analitici, e che anche nell'analisi gli si possan far produrre cose utili basate sulle sue cognizioni e tendenze geometriche. Insomma io affido a Lei il mio discepolo con la speranza che sotto un tale Maestro egli si spinga molto più in là di quel che non abbia ancor fatto sotto di me.[45]

La prosa di Fano era sempre stata nebulosa (venendo talvolta criticata dai suoi stessi colleghi!), come testimoniato dalle parole che Enriques rivolge a Castelnuovo nel 1897 quando quest'ultimo suggerisce a Fano di apportare alcune modifiche al lavoro sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane che i due stanno redigendo:

> Mi spiace che tu abbia trovata non chiara la redazione del lavoro […], ma per dir la verità avrei preferito che tu non spingessi il Fano a introdurre egli stesso delle modificazioni. Non hai idea cosa mi ha fatto impazzare colla sua sofisticheria per questioni di parole, colla sua smania di imbrogliare tutto con gli incisi, periodi uno dentro l'altro, ecc.[46]

Nei lavori classici sulle varietà tridimensionali questo tratto caratteristico della scrittura di Fano raggiunge probabilmente il culmine. Ma è doveroso osservare che Fano non è l'unico geometra italiano che negli anni Trenta 'ragiona e scrive' in questo modo: basti pensare a gran parte della produzione contemporanea di Severi e dei suoi allievi.[47] Se, da un lato, si potrebbe far riferimento ad una sorta di autoreferenzialità che interessa la Scuola italiana di geometria algebrica in questo periodo, dall'altro è doveroso sottolineare l'esistenza di una sorta di gergo, un 'lessico familiare' costruito e condiviso dai membri della Scuola. Già nel 1896 il giovane Fano, allora venticinquenne, si confidava a Castelnuovo in questi termini:

---

[44] CASTELNUOVO 1929, *cit*., p. 201: "Ma rinunziare all'intuizione geometrica, la sola che abbia permesso sinora di orientarsi in questo territorio intricato, vorrebbe dire spegnere la tenue fiammella che può guidarci nell'oscura foresta".

[45] C. Segre a F. Klein, Torino 4.10.1893, in LUCIANO – ROERO 2012, *cit*., pp. 164-165.

[46] F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 20.5.1897, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit*., p. 335.

[47] CILIBERTO – DEL SALLENT 2018, *cit*., pp. 15-16.

> Non mi fa meraviglia che abbiano notata qualche lacuna nelle dimostrazioni; ma spero che avranno avuto abbastanza spirito per capire che molte volte a metter tutto si sarebbe sicuri di non esser letti affatto; e che ciò tanto più è ammissibile in una serie di lavori consecutivi, ciascuno dei quali non può avere di per sé forma definitiva.[48]

Tracce della condivisione, all'interno della Scuola, di questo 'stile' espositivo sono presenti fin da fine Ottocento. Basti pensare che Enriques, dopo aver ricevuto l'ultima versione del lavoro in comune con Fano, scrive:

> […] per la parte che ho letto sono assai contento. Egli ha introdotto qualche schiarimento: pochi a dir vero, ma io non so come si possa rendere più chiara la redazione nelle sue linee fondamentali, e la trovo a dir vero assai lucida per quanto lo consente l'argomento un po' intricato.[49]

All'interno di questo linguaggio comune, molti contenuti erano ridotti all'osso o lasciati sottointesi, a causa dell'ampio patrimonio di cultura geometrica trasmesso oralmente dai maestri agli allievi e condiviso tra i membri.

3.8. Le radici degli studi sulle Fano-Enriques threefolds

Fano è stato il primo ad affrontare uno studio sistematico delle Fano-Enriques threefolds. Il suo contributo, tuttavia, va collocato in un contesto preciso, quello della tradizione geometrica italiana. Al di là dei rilievi inerenti allo stile, questa tesi è corroborata da altre due considerazioni: la prima relativa alle radici culturali e alle fonti di Fano, cioè la letteratura utilizzata per costruire la memoria del 1938; la seconda riguarda invece la sua collocazione all'interno del programma di ricerca complessivo della Scuola italiana e le ragioni che lo spinsero a intraprendere tale studio in questo particolare snodo storico.

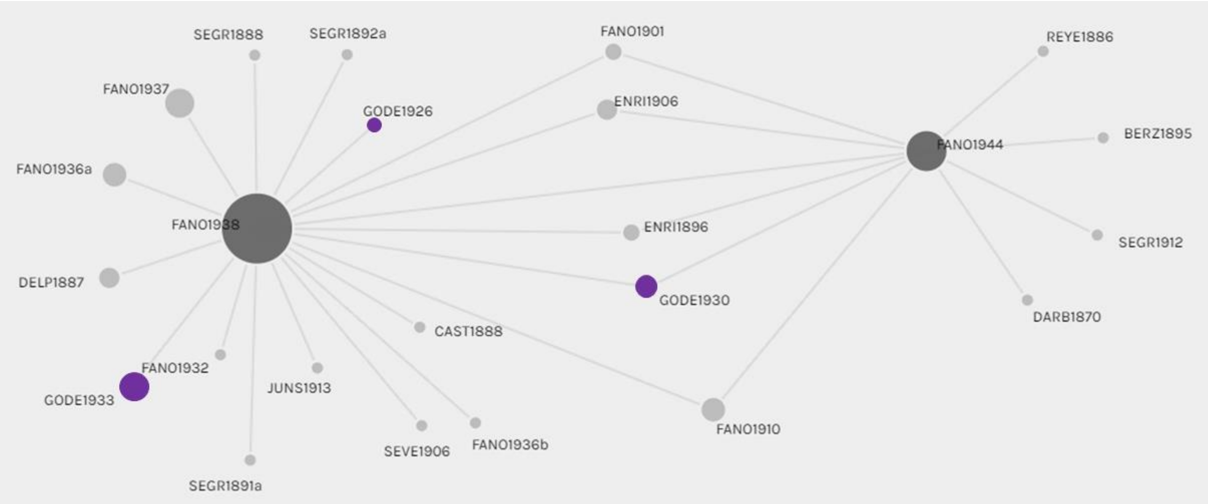


Fig. 3.1. Citational network dei lavori di Fano sulle Fano-Enriques threefolds.

Dal punto di vista della selezione della letteratura, in tutta la memoria *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni...* le citazioni esplicite, sia nelle note a piè di pagina che nel testo,

[48] G. Fano a G. Castelnuovo, Colognola ai Colli 22.10.1896, in GARIO (ed.) 2010, *cit*.

[49] F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 24.5.1897, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 336.

sono pochissime e l'analisi del citational network restituisce chiaramente un fenomeno di 'endogamia culturale' (Fig. 3.1). Questo significa che, nella maggior parte dei casi, compaiono riferimenti a pubblicazioni dei geometri italiani. Innanzitutto, vi sono i due lavori di Enriques: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (1896) e *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (1906).[50] Nel primo, Enriques aveva fornito il primo esempio di superficie algebrica non razionale a generi nulli: si tratta della normalizzazione di una superficie non-normale di $\mathbb{P}^3$ del sesto ordine che passa con molteplicità due per gli spigoli di un tetraedro e che, in questo caso, risulta liscia. Nel secondo, aveva caratterizzato tale superficie attraverso gli invarianti numerici $p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$ e dimostrato che ogni superficie di Enriques è birazionalmente isomorfa al ricoprimento doppio di $\mathbb{P}^2$ con curva di diramazione di grado otto. Accanto a questi testi, Fano fece riferimento ai lavori dei suoi 'amati maestri' Segre e Castelnuovo su alcuni invarianti numerici,[51] e sulle congruenze del terz'ordine.[52] Al terzo posto, i capolavori della Scuola italiana di geometria, che l'avevano portata ad una *Fuhrende Stellung* a livello internazionale: ancora Enriques e Castelnuovo sulla teoria delle superfici, gli scritti di Fano sulle congruenze di rette, quelli di Severi sulle varietà algebriche (1906), e persino una vecchia pubblicazione di Pasquale Del Pezzo (1884-87) sulle superfici di ordine n.[53] A livello internazionale, invece, Fano cita solo due nomi: S. Juński per un articolo sui complessi cubici Γ (1913) e Godeaux per tre suoi lavori giovanili (1926, 1930, 1933).[54] Chiaramente, la selezione della letteratura fatta da Fano – che era un matematico decisamente colto – è piuttosto insolita: quasi interamente italiana e composta da tutti lavori pubblicati tra la fine del XIX e il primo decennio del XX secolo, con l'unica eccezione di quelli di Godeaux che da soli rappresentano il 25% delle citazioni di Fano. Ma anche dietro a questa eccezione c'è una ragione ben precisa: Godeaux, infatti, si può considerare a tutti gli effetti un membro della Scuola italiana. Dopo essersi laureato in Matematica all'Università di Liège (1911), trascorre il biennio 1912-1914 a Bologna, perfezionandosi in geometria algebrica sotto la guida di Enriques.[55] A partire da

---

[50] F. ENRIQUES 1896, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, «Mem. Soc. it.» (3) 10, pp. 1-81; ID. 1906, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, «Mem. Soc. it.» (3) 14, pp. 327-352.

[51] In particolare, quando Fano si approccia alla questione, era già noto che per la generica superficie di Enriques priva di curve eccezionali l'invariante di Castelnuovo-Enriques ω è uguale a 1, l'invariante di Zeuthen-Segre I è pari a 8 e il numero base di Severi ρ vale 10.

[52] C. SEGRE 1888, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 38, pp. 1-48; ID. 1891, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 5, pp. 192-204; ID. 1892, *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve*, «Bibl. Math.» 6, pp. 33-47; G. CASTELNUOVO 1888, *Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio ordinario e sulle sue projezioni nello spazio ordinario*, «Atti R. Ist. Veneto» (6) 5, pp. 1249-1281.

[53] P. DEL PEZZO 1887, *Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 1, pp. 241-271; F. SEVERI 1906, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, «Atti R. Ist. Veneto» 65, pp. 625-643.

[54] S. JUŃSKI 1913, *Ein Beitrag zur Theorie des F^2-Büschels und F^2-Bündels mit gemeinsamem Polartetraeder*, «Sitz. Wien Ak. Wiss.» 122, pp. 1659-1681; L. GODEAUX 1926b, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. II*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 12, pp. 892-904; ID. 1930, *cit.*; ID. 1933, *cit.*

[55] J. GODEAUX 1975, *Lucien Godeaux*, «Gazette des Mathématiciens» 4, pp. 102-103; B. SEGRE 1975, *Lucien Godeaux*, «Boll. UMI» (4) 11, pp. 639-644; J. GODEAUX – P. GODEAUX 1995, *Lucien Godeaux (1887-1975). Sa vie–Son ouvre*, «Bull. Soc. Liège» 64, p. 7; F. BUEKENHOUT 2016, *Godeaux de Liège. Mathématicien de génie*, Bruxelles, Académie Royale de Belgique, pp. 13-15.

questo periodo, si concentra su uno dei temi cari a Enriques – lo studio delle superfici di tipo generale, in base alle proprietà dei rispettivi modelli canonici o pluricanonici – e nel 1926 dedica all'argomento una consistente serie di tre lavori (*Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*).[56] A partire dagli anni Trenta, Godeaux si avvicina allo studio delle Fano-Enriques threefolds, prima studiando un caso particolare della $W_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$, che si ottiene dalla relazione proiettiva tra gli iperpiani di $\mathbb{P}^6$ e le superfici F passanti per gli spigoli del tetraedro di riferimento,[57] poi giungendo al teorema che costituisce il punto di partenza della memoria di Fano del 1938.

Per quanto riguarda l'influenza delle ricerche di Godeaux, l'analisi del patrimonio librario di Fano si è rivelata particolarmente utile. Grazie allo studio di tale collezione, possiamo definire esattamente quali fonti Fano aveva a disposizione nel 1938, e quali erano le sue letture prima di lasciare l'Italia, quando fu costretto a separarsi dalla sua biblioteca e dalla sua miscellanea. La copia del lavoro del 1926, ampiamente annotata da Fano, mostra la stretta connessione tra i contributi di Godeaux sulle superfici di Enriques e le ricerche di Fano sulle Fano-Enriques threefolds. Altamente significativo è il fatto che nelle note scritte *a latere* da Fano compaiono anche dei riferimenti a varietà tridimensionali, nonostante il lavoro di Godeaux sia incentrato esclusivamente sulle superfici e non contenga alcun riferimento a varietà di dimensione superiore.[58]

La scelta dell'argomento della memoria di Fano 1938 è altrettanto indicativa del posizionamento del suo autore all'interno di un gruppo di lavoro, una Scuola matematica, che condivide un programma di ricerca ben definito, accanto ad uno stile peculiare di indagine geometrica. L'agenda di ricerca, definita da Cremona attorno al 1860, poi estesa da Segre, Castelnuovo, Enriques e Severi tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, risulta caratterizzata da alcuni tratti distintivi che possono essere sintetizzati nei seguenti termini: approccio trasformazionale, segnato da un ampio uso delle cosiddette trasformazioni cremoniane (mappe birazionali); conoscenza approfondita della geometria proiettiva, con l'obiettivo di sfruttare le sue proprietà per far luce sulle proprietà birazionali delle varietà algebriche; geometrizzazione del linguaggio algebrico; interpretazione degli elementi di uno spazio lineare n-dimensionale come enti geometrici.[59] All'interno di questo quadro epistemologico, partendo dalla sistematizzazione della geometria su curva algebrica da parte di Segre intorno al 1890, Castelnuovo, Enriques, Severi, Levi, Bagnera e De Franchis estendono il campo alle superfici, giungendo alla loro completa classificazione mediante alcuni invarianti proiettivi nel 1914 e gettando così le basi per gli ulteriori sviluppi di B. Segre, Comessatti e Conforto. In una seconda fase, con Severi, Fano, Morin e Albanese e l'attenzione si sposta verso le varietà di dimensione

---

[56] L. GODEAUX 1926a, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. I*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 12, pp. 726-741; ID. 1926b, *cit.*; ID. 1927, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. III*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 13, pp. 114-133.

[57] GODEAUX 1930, *cit.*, p. 922.

[58] Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, Miscellanea, estratto n. 286 I, p. 3, dove Fano scrive, accanto all'equazione della superficie "anallagmantique" F del sest'ordine: "sistema ∞^6 rappresentazione di V_3^{10}?". Cfr. anche 286 I, 13: "onde (7,3) particolare"; e estratto n. 286 III, p. 16: "le rette congiungenti le ∞^2 coppie di punti coniugati formano una congruenza contenuta in un complesso lineare: certo le $(3{,}3)$ riferibili a F^6 di S_4 di genere 1".

[59] Cfr. BRIGAGLIA – CILIBERTO 1998, *cit.*, pp. 186-187 e 199; CONTE – GIACARDI 2016, *cit.*, pp. 5-7.

superiore, cercando di generalizzare metodi e risultati precedenti, ma trascurando l'esigenza di fornire basi più solide alla geometria algebrica.

Alla luce di questo programma di ricerca collettivo e in accordo con alcune considerazioni di carattere matematico,[60] è possibile identificare almeno due ragioni che conducono Fano ad occuparsi delle Fano-Enriques threefolds. In primo luogo, da alcuni decenni, era presente un certo interesse da parte dei geometri italiani per le superfici K3,[61] interesse anche legato all'analisi dei sistemi lineari di queste superfici sulle Fano threefolds. L'esame di queste ultime occupa Fano per oltre quarant'anni:[62] rilevante è il fatto che egli pervenga a una limitazione sul loro grado soltanto un anno prima della stampa della memoria *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni*…[63]

In secondo luogo, questo tipo di indagine è strettamente correlato all'attenzione dei geometri italiani per i gruppi di automorfismi in geometria algebrica.[64] In particolare, i gruppi di automorfismi delle superficie K3 e delle superficie di Enriques sono discreti e triviali per la generica K3. Sin dal 1906 Enriques aveva dimostrato che ogni superficie avente un gruppo di automorfismi non finito e discreto è una superficie ellittica (di cui le superfici di Enriques costituiscono un caso particolare) o di tipo K3.[65] Nello stesso anno, Fano aveva costruito il primo esempio di superficie K3 non ellittica di questo tipo. Ma il risultato più sorprendente, strettamente correlato alle Fano-Enriques threefolds, riguarda i gruppi di automorfismi delle superficie di Enriques. Mentre quello della generica superficie di questo tipo non è finito, nel 1910 Fano prova che tale gruppo diventa finito per alcuni elementi speciali della famiglia delle superfici di Enriques.[66] L'esempio qui fornito da Fano è un caso particolare di congruenza di Reye. Tenendo presente che quest'ultima è una particolare superficie di Enriques[67] immersa in

---

[60] Cfr. COLLINO – CONTE – VERRA 2014, *cit.*, p. 121.

[61] Cfr., *inter alia*, F. ENRIQUES 1893, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 44, pp. 171-232; G. CASTELNUOVO 1895, *Sulle superficie di genere zero*, «Mem. Soc. it.» (3) 10, pp. 103-123; F. ENRIQUES 1909, *Le superficie di genere uno*, «Rend. R. Ac. Sci. Bologna» 13, pp. 25-28; F. SEVERI 1909, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, «Atti R. Ist. Veneto» 68, pp. 249-260.

[62] Per dettagli relativi ai contributi sulle Fano threefolds cfr. il CAPITOLO 2 di questa tesi.

[63] FANO 1937, *cit.*

[64] Cfr., *inter alia*, G. FANO 1897a, *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sé*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 11, pp. 241-246; F. ENRIQUES 1906, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, «Mem. Soc. it.» (3) 14, pp. 327-352; G. FANO 1906, *Sopra alcune superficie del IV ordine rappresentabili sul piano doppio*, «Rend. R. Ist. Lomb.» (2) 39, pp. 1071-1086; F. SEVERI 1910, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 30, pp. 265-288; G. FANO 1920b, *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali*, «Rend. ANL» (5) 29, pp. 408-415, 485-491, 113-118, 175-182, 231-236. A proposito delle ricerche di Fano in questo settore, cfr. la lettera di F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 20.1.1895, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 166.

[65] ENRIQUES 1906, *cit.*

[66] FANO 1910a, *cit.*

[67] Tale superficie S possiede un fascio ellittico invariante sotto l'azione di $Aut\, S$ e contiene una speciale configurazione F di curve razionali, che è a sua volta invariante per automorfismi di S. L'esistenza di tale F implica la finitezza del gruppo $Aut\, S$.

$Gr(1{,}3)$, la sua immersione di Plücker costituisce un esempio del modello di Fano di una superficie di Enriques.[68]

3.9. L'eredità delle ricerche sulle Fano-Enriques threefolds: dalla ricezione immediata alla riscoperta

Analizzando l'influenza di questa linea di ricerca di Fano, quello che emerge è un contrasto, almeno apparente, tra la sua riscoperta e rilettura a partire dagli anni Ottanta nel contesto della geometria algebrica moderna, e la sua limitatissima ricezione e diffusione all'epoca con le uniche eccezioni di Godeaux, naturalmente, e della Scuola di geometria inglese di Cambridge consolidatasi, almeno inizialmente, nel culto della tradizione italiana.

Curioso è il fatto che Godeaux, che negli anni Trenta lavora sulle Fano-Enriques threefold con gli stessi metodi e lo stesso linguaggio di Fano, torna poi su queste tematiche di ricerca anche nell'ultima parte della sua carriera – a dieci anni di distanza dalla morte di Fano – riprendendo lo studio di queste varietà alla luce delle loro trasformazioni involutorie. Con l'obiettivo di estendere un risultato di Enriques[69] alle varietà algebriche tridimensionali, Godeaux dimostra che una threefold, che non sia un cono, le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno è l'immagine di una involuzione del secondo ordine avente otto punti uniti e appartenente a una varietà tridimensionale le cui sezioni iperpiane sono superficie di generi uno ($p_a = P_4 = 1$).[70] Nello stesso anno, trova un esempio di varietà W_3^{16} le cui equazioni sono particolarmente semplici, mostrando inoltre che i punti multipli di tale threefold sono birazionalmente equivalenti a delle superficie razionali ed essa stessa risulta essere razionale,[71] come già affermato Fano nel 1938. Ancora, proseguendo nel solco degli studi di Fano cui si rifà apertamente in vari passaggi,[72] in uno dei suoi ultimi lavori Godeaux arriva a costruire un nuovo esempio di Fano-Enriques threefold per $p = 9$ che si può ottenere come sezione di una varietà a 5 dimensioni di ordine 16 dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^9$ o,

[68] Cfr. I. DOGLACHEV 2016, *A brief introduction of Enriques surfaces*, in F. OSAMU, K. SHIGEYUKI, M. ATSUSHI, S. MASA-HIKO, Y. KŌTA (eds.), *Development of Moduli Theory - Kyoto 2013*, Tokyo, Mathematical Society of Japan, p. 28. Doglachev analizza questo esempio in ottica moderna, non nascondendo le difficoltà incontrate nella lettura degli scritti di Fano su questo tema: "When the root invariant of an Enriques surface becomes large, the automorphism group may become a finite group. The first example of an Enriques surface with a finite automorphism group isomorphic to S_4 [cioè il gruppo delle permutazioni di ordine 4!] belongs to G. Fano. However, I failed to understand Fano's proof".

[69] Nel 1908 Enriques aveva dimostrato che una superficie di genere zero e bigenere uno è l'immagine di una involuzione del secondo ordine, priva di punti uniti, appartenente a una superficie di genere uno

[70] Cfr. L. GODEAUX 1962b, *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» 48, p. 1252.

[71] Cfr. L. GODEAUX 1962a, *Une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un*, «Bull. Soc. Liège» 31, pp. 755-756.

[72] Cfr., ad esempio, GODEAUX 1962a, *cit.*, p. 751: "G. Fano a repris plus tard la même question et après avoir confirmé nos résultats, a déterminé toutes les variétés possédant la propriété indiquée."; o anche GODEAUX 1962b, *cit.*, p. 1253: "Fano a démontré que la variété V n'existe que pour $\pi = 4, 6, 7, 9, 13$ [leggasi p al posto di π] et que pour $\pi \geq 6$, la variété possède huit points quadruples coniques isolés, le cône tangent en un point étant la projection de ce point d'une surface de Veronese.".

equivalentemente, come immagine di una involuzione del secondo ordine generata da un'omografia armonica biassiale sull'intersezione di due iperquadriche di $\mathbb{P}^5$.[73]

Passando alla Scuola inglese, non è un caso che Roth colga l'eredità degli studi di Fano anche per quanto riguarda le Fano-Enriques threefolds. L'influenza della sua esperienza di formazione in Italia è tutt'altro che marginale: dagli anni Trenta in poi, gli scritti di Roth contengono un ampio insieme di costruzioni geometriche 'concrete' delle varietà algebriche e sono strettamente legati ai problemi di unirazionalità e birazionalità delle threefolds, oggetto anche di una conferenza da lui tenuta a Torino nel 1950. A distanza di cinque anni sarà dato alle stampe il primo trattato organico sulle varietà algebriche tridimensionali al cui interno un capitolo è dedicato all'esposizione sistematica dei risultati di Fano sulle Fano-Enriques threefolds. Qui appare anche la dimostrazione dell'unirazionalità di W_3^6 citata in precedenza: Roth, pur adottando un approccio prettamente sintetico, la linea con gli standard italiani, riesce a correggere alcune delle affermazioni di Fano sfruttando alcuni strumenti algebrici come, ad esempio, la nozione di divisore.

In realtà, questa 'fedeltà' di Godeaux e, seppur in minor misura, di Roth alla via classica di ricerca italiana appare alquanto singolare dato che un approccio differente si era progressivamente affermato a partire dagli anni Trenta, il cui ambizioso programma può essere sintetizzato nel motto: "To plant the harpoon of topology in the whale body of algebraic geometry".[74]

Per assistere a una riscoperta delle ricerche sulle Fano-Enriques threefolds bisognerà aspettare gli anni Ottanta e, con una singolare coincidenza, tale rilettura critica avverrà ancora nel contesto torinese. Infatti, oltre a colmare le lacune delle dimostrazioni e alcune affermazioni errate[75] di Fano, Conte e Murre hanno sottolineato per la prima volta che le Fano-Enriques threefold sono varietà non lisce, con singolarità isolate, aspetto che non sembra aver 'intimorito' Fano e Godeaux.[76] Successivamente è emerso che tali varietà sono singolari e non-Gorenstein per definizione.[77]

Negli anni Novanta, Sano e Bayle hanno fornito quello che fino ad una decina di anni fa era ritenuto un elenco completo delle Fano-Enriques threefolds. Senza entrare nei dettagli del lavoro di Bayle, è sufficiente sottolineare che il punto di partenza è dato dall'esistenza di un ricoprimento étale doppio per ogni Fano-Enriques threefold W_3^{2p-2}

[73] Cfr. L. GODEAUX 1970, *Une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un*, «Bull. Soc. Liège» 39, p. 439.

[74] S. LEFSCHETZ 1968, *A page of mathematical autobiography*, «Bull. AMS» 74, p. 854.

[75] Uno dei difetti della memoria del 1938, corretto da Conte e Murre, consiste nell'affermare che una superficie proiettiva S la cui generica sezione iperpiana è una curva immersa canonicamente è necessariamente di tipo K3, il che è falso se S è singolare.

[76] CONTE – MURRE 1985, *cit.*, p. 44: "a fact which does not seem to have bothered Godeaux and Fano".

Per la dimostrazione di questo risultato cfr. anche Conte 1996, p. 159: poiché le generiche sezioni iperpiane F di una Fano-Enriques threefold W sono lisce, W ha al più singolarità isolate. Per assurdo, se W fosse liscia, per la formula di aggiunzione si avrebbe $(K_W + F) \cdot F \sim K_F$. Posto $T = K_W + F$, da $2K_F \sim 0$ segue che $2T \cdot F \sim 0$. Quindi, per il criterio di equivalenza di Weil, si ha $2T \sim 0$ e $T \equiv 0$ (equivalenza numerica) da cui $-K_W \equiv F$. Di conseguenza, $-K_W$ è ampio per il criterio di Nakai. Ma allora W è una Fano threefold, per cui $Pic(W)$ non ha torsione: dunque $T \sim 0$ e $K_F \sim 0$, contraddizione.

[77] CHELTSOV 2004, *cit.*, p. 609.

$$\pi: X \longrightarrow W_3^{2p-2}$$

definito da un divisore di Weil T in modo tale che X sia una varietà di Fano. Quando X è liscia, W_3^{2p-2} è isomorfa al quoziente X/σ, dove σ è l'involuzione ottenuta dallo scambio degli elementi di una fibra di π. Il problema della classificazione delle W_3^{2p-2} è così ridotto a quello della classificazione delle varietà di Fano X che ammettono un'involuzione σ con otto punti fissi. In virtù della classificazione delle Fano threefolds con $B_2 \geq 2$ di Mori e Mukai, si può concludere che esiste una Fano-Enriques threefold $W_3^{2p-2} \simeq X/\sigma$, con X liscia, se e solo se X è una varietà di Fano di dimensione tre di uno dei seguenti tipi:

1) l'intersezione completa di tre divisori di bigrado $(1,1)$ in $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ (caso $p = 6$);
2) un divisore liscio su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ di quadrigrado $(1,1,1,1)$ (caso $p = 7$);
3) il blow-up del cono su una quadrica $Q \subset \mathbb{P}^3$ avente come centro l'unione disgiunta del vertice del cono e di una curva ellittica di Q (caso $p = 8$);
4) l'intersezione di due quadriche di $\mathbb{P}^5$ (caso $p = 9$);
5) $\mathbb{P}^1 \times S_6$, dove S_6 è una superficie di Del Pezzo di grado 6 in $\mathbb{P}^6$ (caso $p = 10$);
6) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (caso $p = 13$).

Tale classificazione, oltre a includere le Fano-Enriques threefolds che si ottengono per $p = 8, 10$, recupera tutti gli esempi di queste varietà noti fino a quel momento: di conseguenza, è stato congetturato che tale lista fosse completa.

Qualche tempo dopo, I. Cheltsov ha dimostrato che le Fano-Enriques threefolds sono razionali (1997) e che ogni varietà di questo tipo è la retrazione di un cono o ha singolarità canoniche (1996).[78] In questo ultimo caso, analogamente a quanto accade per le Fano threefolds, il genere delle curve sezioni è al massimo 47.[79] Nei primi anni del XXI secolo è stato dimostrato che non esistono Fano-Enriques threefold di indice maggiore di uno, attraverso l'utilizzo di nuovi strumenti come le mappe gaussiane, l'indice di Clifford e il teorema di Zak.[80] Inoltre, partendo dall'osservazione che il genere g di una Fano-Enriques threefold avente al più singolarità terminali è $2 \leq g \leq 10$ o $g = 13$, è stato messo in luce che il genere g di una generica varietà tridimensionale Fano-Enriques è sempre ≤ 17 e il suo grado è al più 32.[81] Nel 2011 A.L. Knutsen, A.F. Lopez e R. Muñoz hanno ottenuto in modo indipendente da Prokhorov[82] la medesima limitazione su g, introducendo una nuova tecnica basata sulle mappe gaussiane per analizzare se una superficie può appartenere ad una threefold come divisore molto ampio con un dato fibrato normale. Applicando questo metodo alle superfici di Enriques, hanno

[78] I. CHELTSOV 1996, *Three-dimensional algebraic varieties that have a divisor with a numerically trivial canonical class*, «Russian Mathematical Surveys» 51, pp. 140-141; ID 1997, *On the rationality of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds with an integer Fano index,* in Y. KAWAMATA, V.V. SHOKUROV (eds.), *Birational algebraic geometry*, Providence, AMS, pp. 43-50.

[79] I. CHELTSOV 1999, *Boundedness of Fano 3-folds of integer index*, «Mathematical Notes» 66, pp. 360-365.

[80] GIRALDO – LOPEZ– MUÑOZ 2004, *cit.*, Thm. 1.2 e Remark 3.13.

[81] PROKHOROV 2007, *cit.*, p. 559.

[82] Cfr. KNUTSEN – LOPEZ– MUÑOZ 2011, *cit.*, p. 486: "We remark that simultaneously and independently, Prokhorov proved the same genus bound at the same time constructing an example of a genus 17 Enriques-Fano threefold, thus showing that the bound $g \leq 17$ is optimal. His methods, relying on the MMP [Minimal Model Program], are completely different from ours.".

trovato una nuova Fano-Enriques threefold di genere 9 la cui normalizzazione ha singolarità canoniche ma non terminali e che non ammette $\mathbb{Q}$-smoothings. Questa varietà non rientra in quelle elencate da Bayle e Sano: la loro classificazione non è dunque completa.[83]. Parallelamente, si è ottenuta una descrizione naturale di alcune famiglie di Fano-Enriques threefolds a partire dalla classificazione delle varietà di Fano tridimensionali V con singolarità canoniche di Gorenstein tali che la generica V abbia un'involuzione regolare che agisce liberamente su una superficie liscia in $|-K_V|$ e il sistema lineare $|-K_V|$ porti un morfismo che non è un'immersione.[84]

3.10. Una cartina tornasole dell'isolamento della Scuola italiana

Mentre la cronologia della Scuola italiana di geometria algebrica è ormai consolidata, la ricostruzione dei fattori di declino, sia interni sia esterni, di questa comunità appare più controversa e frammentaria.[85] La memoria di Fano del 1938 e la questione della sua mancata ricezione forniscono informazioni interessanti su quest'ultimo aspetto.

Sicuramente l'età avanzata di Fano e il difficile periodo storico, segnato dal secondo conflitto mondiale, possono aver rivestito un ruolo, ma non bastano a giustificare la così scarsa fortuna di questo lavoro.

Da un lato, invocare la politica dell'autarchia culturale promossa dal regime fascista, che ha impedito ai matematici italiani di stare al passo con la produzione inglese e americana, sembra inappropriato perché fino al 1936 non esistevano restrizioni all'importazione di libri e periodici dall'estero o alla circolazione degli individui. Fano si era recato nel Regno Unito nel 1923 e negli Stati Uniti nel 1934, ma perde progressivamente i contatti con i loro gruppi emergenti di geometria algebrica. Questo è evidente nel caso inglese. Fano mantiene contatti regolari solo con i coniugi Young e con il gruppo di Cambridge (Baker, Roth, Todd, W.D. Hodge) che non a caso fino al 1939 promuove un tipo di indagine geometrica in cui "quasi tutto era argomentato a parole, il che era davvero una negazione della matematica".[86] Dall'altro lato, non si può prescindere dal clima di endogamia culturale cui erano sottoposti i matematici italiani (in generale) e i geometri algebrici (in particolare), questi ultimi sotto la spinta di Severi che, fin dal 1933, si esprimeva in questi termini:

> L'Italia occupa oggi nel mondo uno dei primissimi posti, se non il primo in fatto di matematica. Questo è dovunque riconosciuto dai matematici stranieri e come italiani e come fascisti dobbiamo

[83] *Ivi*, p. 485: "[…] we will show that the list of known Enriques-Fano threefolds is not complete (not even after specialization), by finding a new Enriques-Fano threefold enjoying several peculiar properties.". Cfr. anche prop. 1.4, p. 486 – "There exists an Enriques-Fano threefold $X \subset \mathbb{P}^9$ of genus 9 such that neither X or its normalization belong to the list of Fano-Conte-Murre-Bayle-Sano […]." – e prop. 13.1, p. 514.

[84] I. KARZHEMANOV 2011, *On some Fano-Enriques threefolds*, «Advances in Geometry» (1) 11, pp. 117-129, Thm. 1.2.

[85] Cfr. BRIGAGLIA – CILIBERTO 1998, *cit*., pp. 186-188 e 200-201; BRIGAGLIA 2001, *cit*., pp. 203-204; GIACARDI 2001, *cit*., pp. 144-146.

[86] J. HOYLE 1997, *Home is where the wind blows*, Oxford, OUP, p. 89: "almost everything was argued in words, which was really a negation of mathematics".

esserne legittimamente orgogliosi. La bilancia commerciale segna qui un fortissimo attivo: esportiamo molte, ma molte più idee di quante non ne importiamo.[87]

Né si può ridurre la questione ad una mera mancanza di un'adeguata conoscenza linguistica o matematica, come testimoniano i vari opuscoli firmati, ad esempio, da Lefschetz custoditi all'interno della collezione personale di Fano. Ma sicuramente, adottando nuovamente una lente di storia materiale, l'analisi del patrimonio di Fano rivela una certa mancanza dell'esigenza di tenersi aggiornato sulla nuova letteratura internazionale in geometria algebrica. La presenza di scritti di Lefschetz, De Rham, Cartan e molti altri, talvolta annotati, non basta a fugare la sensazione di trovarsi di fronte ad una biblioteca antiquata, fortemente polarizzata verso il passato e priva di quei testi[88] che nel 1938 erano letture di riferimento per qualsiasi geometra algebrico attivo.

Molto probabilmente l'esiguo successo del lavoro *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni…* è da ascriversi ad una combinazione di elementi, cui fa però da denominatore comune il fatto che l'attività matematica è legata a filo doppio al contesto, intendendo con questo termine non soltanto l'orizzonte temporale o geografico, ma anche il suo posizionamento all'interno dello spazio sociale. Per i geometri italiani, anche a distanza di quarant'anni dal celebre discorso programmatico di Castelnuovo, continua ad essere del tutto naturale volgere l'attenzione verso la costruzione di 'nuovo' sapere matematico, introducendo altri oggetti geometrici – come le Fano-Enriques threefolds – e dando all'interno delle loro pubblicazioni una prospettiva 'in corso d'opera'. Al di fuori della tradizione italiana, si assiste invece ad un cambio di rotta, nella direzione di una rifondazione della geometria algebrica sulle più solide basi dell'algebra astratta e della topologia, un terreno ben lontano da quello classico del patrimonio geometrico italiano. Occorre dunque guardare più da vicino al tessuto culturale in cui si sviluppano le ricerche di Fano sulle Fano-Enriques threefolds, dal 1933 (anno della pubblicazione del teorema di Godeaux) al biennio 1937-1938. In questi anni, a livello locale, il contesto torinese è attraversato da due tendenze: uno spostamento di interesse verso l'indirizzo proiettivo-differenziale inaugurato da Fubini e una certa fatica a prendere le distanze dall'opera del caposcuola, C. Segre, venuto a mancare nel 1924. I corsi di geometria superiore, con l'unica eccezione di quello dell'a.a. 1935-36, riflettono queste due tendenze. Al ciclo di lezioni del 1934-35 dall'emblematico titolo *L'opera geometrica di Corrado Segre e alcuni suoi ulteriori sviluppi*, si affiancano i corsi tenuti da Terracini dedicati alla geometria delle trasformazioni birazionali delle curve e superficie algebriche (1933-34), alla geometria differenziale con particolare riguardo all'indirizzo proiettivo (1936-37) e alla geometria della retta (1937-38).[89]

A livello italiano, la situazione non appare così diversa: i corsi di geometria superiore, destinati anche all'avviamento alla ricerca dei giovani, ricoprono temi iper-classici della Scuola italiana quali la geometria proiettiva degli iperspazi, la teoria delle corrispondenze algebriche, la geometria delle curve e delle superfici, le serie e i sistemi di equivalenza sulle varietà. Le

---

[87] SEVERI 1933 citato in LUCIANO 2022a, *cit.*, p. 18.

[88] Cfr., ad esempio, S. LEFSCHETZ 1924, *L'Analysis situs et la Geométrie Algébrique*, Paris, Gauthier-Villars; A. WEIL 1935, *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques*, ASI 206, pp. 1-16; O. ZARISKI 1935, *Algebraic surfaces*, Berlin, Springer: W.-L. CHOW– B.L. VAN DER WAERDEN 1937, *Zur algebraische Geometrie. IX*, «Math. Ann.» 113, pp. 629-704.

[89] Le scansioni dei relativi quaderni di Terracini (nn. 12-16) sono disponibili in GIACARDI (ed.) 2013-23, *cit.*, al link https://www.corradosegre.unito.it/fondo_terracini_q.php.

poche eccezioni sono rappresentate dai corsi sporadici sulle basi di topologia di M. Piazzolla-Beloch a Ferrara (1930-31 e 1934-35) e De Franchis a Palermo (1931-32 e 1934-35) e dalle lezioni tenute da B. Segre a Bologna su analysis situs, topologia combinatoria, corrispondenze tra varietà e loro applicazioni alla geometria algebrica (1935-36).[90]

La situazione italiana appare in netta contrapposizione con quanto accade contemporaneamente negli Stati Uniti, come riportato da Achille Bassi che proprio nel 1937-38 trascorre due semestri di perfezionamento all'*Institute for Advanced Studied* di Princeton, polo universitario che "può aspirare a sostituire l'antica Gottinga come importantissimo centro matematico dei due continenti".[91] Qui il corpo docente vanta la presenza di Lefschetz e L.P. Eisenhart ed ampio spazio è destinato alla topologia. Questa, introdotta fin dal primo biennio[92], riveste un ruolo fondamentale all'interno della formazione dei futuri ricercatori che, dopo aver conseguito una prima laurea, frequentano il *Graduate College*:

> È interessante osservare che dei 25 corsi di perfezionamento […] 5 [riguardano] degli argomenti diversi di geometria differenziale e la teoria dei gruppi continui, e 5 degli argomenti di geometria sintetica; di questi ultimi, 3 riguardano la topologia[93]. Una tale suddivisione mostra […] un'aperta propensione ad insegnare ciò in cui più viva è la ricerca scientifica, ed una chiara comprensione dei bisogni e del divenire della matematica moderna.[94]

Impressionato dallo "spirito di grande eclettismo cui gli insegnamenti sono informati, e la prontezza nel portare a contatto dello studente le ultime teorie scientifiche e lo spirito stesso della ricerca",[95] al rientro Bassi si fa promotore del modello americano, senza però riuscire a rinnovare gli studi geometrici in Italia. La profonda diversità tra l'indirizzo americano e quello italiano emerge in modo ancor più evidente da due congressi che, per una curiosa coincidenza, si svolgono a distanza di pochi giorni nella primavera del 1937. Il primo, *The New York Conference on algebraic geometry* (26-27 marzo 1937), ha come obiettivo dichiarato la promozione delle applicazioni dei metodi dell'algebra moderna alla geometria algebrica. Tra i principali interventi, volti a "riunire algebristi e geometri in una discussione informale":[96] Lefschetz sulle serie di potenze formali in geometria algebrica; O.F.G. Schilling su una generalizzazione del teorema di Lüroth alla luce della teoria di Galois; A. Weil sull'aritmetica delle varietà algebriche; O. Zariski sulle connessioni tra la teoria delle singolarità e quella degli

---

[90] Cfr. la sezione *Notizie* in «Boll. UMI» 1930, (1) 9.4, pp. 247-249; 1931, (1) 10.4, pp. 247-249; 1934, (1) 13.4, pp. 256-257; 1935, (1) 14.5, pp. 316-317. Non esiste, purtroppo, un'analoga descrizione dei corsi superiori offerti negli atenei italiani per gli a.a. 1936-37 e 1937-38.

[91] A. BASSI 1939, *L'Università e la Scuola di Matematica di Princeton*, «Period. Mat.» (4) 19, p. 68.

[92] *Ivi*, pp. 71-73. Durante il secondo anno del primo biennio, all'interno del corso Concetti geometrici moderni (prof. Tucker), è introdotta la topologia. Un ulteriore corso (Dr. Steenrood) interamente dedicato a questa disciplina, che "tratta le proprietà geometriche qualitative che non dipendono dall'estensione o dalla forma", compare tra quelli del secondo biennio.

[93] *Ivi*, pp. 74-76. I corsi di geometria sintetica cui Bassi fa qui riferimento sono così intitolati: Topologia applicata (Tucker), Topologia (Tucker), Geometria algebrica (Lefschetz) Argomenti scelti di topologia (Lefschetz) e Geometria proiettiva complementare (Tucker) che comprende lo studio degli aspetti topologici di varietà di configurazioni proiettive e di trasformazioni.

[94] *Ivi*, p. 77.

[95] *Ivi*, p. 69.

[96] Cfr. «Bull. AMS» 1937, 43, p. 315.

ideali. Il secondo evento è invece il primo congresso nazionale dell'Unione Matematica Italiana che si tiene a Firenze dal 1° al 3 aprile. All'interno della sezione di geometria, ampio spazio è dedicato alle comunicazioni nel pieno indirizzo 'classico' di Fano (ancora sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche), Severi, Conforto, Brusotti, Togliatti, N. Spampinato, B. Segre, M. Villa, T. Turri, incentrate su temi tipici della Scuola quali le forme cubiche di $\mathbb{P}^5$, le rigate razionali, le proiezioni multiple, la geometria dell'S_r, i sistemi di equivalenza e la teoria delle corrispondenze sulle varietà.[97]

Spostando l'attenzione sulla più vicina Germania, si assiste ad un netto cambiamento rispetto all'epoca di Klein. Emblematica in tal senso è la "settimana algebro-geometrica" organizzata a Göttingen nel gennaio del 1937 con il preciso intento di "dare un riassunto dei problemi, metodi e risultati centrali ottenuti recentemente in questo campo, e di confrontare le diverse vie algebrica, aritmetica, trascendente e geometrica ricollegandole in una veduta sintetica".[98] Al suo interno, il trentacinquenne Van der Waerden dedica quattro lezioni a ridefinire, in modo 'rigoroso', i concetti fondamentali della geometria algebrica. A queste si affiancano le conferenze di H. Jung sul metodo aritmetico dei divisori nella geometria sulle superfici algebriche; H. Geppert sugli invarianti delle superfici e M. Deuring sulla teoria aritmetica delle corrispondenze.[99]

Anche l'ambiente intellettuale svizzero, che accoglie Fano esule dall'Italia fascista, è ormai orientato verso nuovi orizzonti matematici: in quegli anni De Rham ha già gettato le basi della coomologia e C. Ehresmann inizia a interessarsi di topologia differenziale. Alle conferenze classiche di Fano al *Cercle* si affiancano così, in modo del tutto particolare, gli interventi di topologia combinatoria tenuti da B. Eckmann, o quelli di Hopf sulla teoria dei gruppi discontinui.

3.11. Una sintesi del 'meglio' e del 'peggio' della tradizione geometrica italiana

La memoria di Fano del 1938 risulta dunque indissolubilmente legata non soltanto al suo tempo, ma anche (e soprattutto) al tessuto culturale all'interno del quale è scaturita, un contesto sociale ben delineato che permette di 'dipanare' i suoi aspetti contrastanti.

Se da una parte, rappresentando il primo lavoro interamente dedicato alle Fano-Enriques threefolds, lo scritto *Sulle varietà algebriche…* racchiude importanti elementi di innovazione, dall'altra si inserisce pienamente nel solco della tradizione geometrica italiana. In quest'ottica, la rilettura storico-critica di questo contributo restituisce lo 'stato dell'arte' delle ricerche italiane secondo l'indirizzo sintetico, collocandolo all'interno di un patrimonio matematico ben definito e consolidato nel corso degli anni, ma anche irrigidito al punto di non riuscire più a dialogare con i nuovi indirizzi di ricerca, perdendo probabilmente un'occasione per trovare un terreno in comune, soprattutto a livello di metodi e di linguaggio.

La rivalutazione storica della memoria del 1938, unita alla ricostruzione delle fonti materiali (articoli, volumi, lettere, ecc.) che Fano ha mobilitato nella stesura del suo ultimo scritto prima dell'esilio in Svizzera, porta dunque a riconsiderare il patrimonio di cultura geometrica, in

[97] Cfr. il *Programma definitivo* in «Boll. UMI» 1937, (1) 16.1, pp. 4 e 13-15.

[98] «Boll. UMI» 1937, (1) 16.2, p. 119.

[99] Cfr. la sezione *Notizie* in «Boll. UMI» 1936, (1) 15.5, p. 238; «Boll. UMI» 1937, (1) 16.2, pp. 119-120.

particolare nel campo della geometria proiettiva degli iperspazi, che i maestri della Scuola italiana condividevano con la prima generazione dei loro allievi e che si manifestava attraverso uno stile di ricerca e di esposizione indubbiamente peculiare, sufficientemente chiaro per i membri della Scuola ma piuttosto oscuro al di fuori. D'altro canto, questo contributo di Fano rispecchia il ritardo accumulato negli anni Trenta dai geometri italiani rispetto ai colleghi stranieri nel campo della topologia e dell'algebra astratta, un ritardo che non può essere semplicemente attribuito a cause esterne (mancanza di competenze linguistiche, modello politico-ideologico, autarchia, ecc.)[100] e che appare ancora più bizzarro alla luce del fatto che per molti anni Fano aveva intrattenuto rapporti scientifici con Coolidge, Baker, Hodge, Snyder, e molti altri, senza menzionare tedeschi. Come pensava A. Andreotti, successore di Fano sulla cattedra di geometria a Torino nel 1950:

> Tutti i matematici italiani erano un po' ignoranti, ma soprattutto i cultori di geometria algebrica; il vecchio e venerato maestro Severi era spesso di ostacolo all'aggiornamento perché non incoraggiava abbastanza i giovani a confrontarsi con altre scuole giudicate concorrenziali a quella italiana da difendersi ad ogni costo.[101]

Oltre a costituire l'ultimo contributo del tutto originale di Fano, questa Memoria mostra il suo profondo fiuto nell'aprire nuove vie di ricerca geometrica. Nonostante alcune conclusioni affrettate e dimostrazioni incomplete, i contributi di Fano sulle Fano-Enriques threefolds hanno un carattere pionieristico, tanto da legittimamente affermare:

> Le precisazioni venute in seguito (spesso a distanza di tempo) hanno quasi sempre dimostrato che i grandi si muovevano – istintivamente direi – entro i limiti che la loro intuizione e la loro esperienza dettava, anche se tali limiti non venivano sempre esplicitamente enunciati […]. Controversie e critiche hanno ogni volta provocato feconde sistematizzazioni e precisazioni, le quali hanno confermato quasi sempre la validità delle intuizioni dei grandi cultori.[102]

Un ultimo elemento di contrasto del lavoro *Sulle varietà algebriche…* è costituito dalla sua ricezione: ebbe infatti una diffusione estremamente limitata, nonostante fosse incentrato su un oggetto matematico che avrebbe poi incontrato una sorprendente vitalità e nonostante i suoi contenuti sarebbero successivamente stati fonte di ispirazione per ulteriori ricerche fino ad anni recenti. All'epoca però, fuori dall'Italia, questo contributo poteva ragionevolmente apparire come un lavoro di nicchia su un argomento marginale, poco interessante in un contesto di ricerca internazionale che 'guardava altrove'. In tal senso, la memoria del 1938 rappresenta allo stesso tempo il 'meglio' e il 'peggio' che un geometra algebrico italiano potesse scrivere in quel periodo.

---

[100] Su questo aspetto, cfr. R. SIEGMUND-SCHULTZE 2001, *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, Series Science Networks. Historical Studies, Basel, Springer, pp. 106-119; LUCIANO 2022a, *cit.*, pp. 100-103.

[101] P. SALMON 1996, *Un sodalizio torinese degli anni '50*, in E. GALLO, L. GIACARDI, C.S. ROERO (eds.), *Conferenze e Seminari 1994-1995*, Torino, Ass. Subalpina Mathesis e Seminario St. Mat. «Tullio Viola», p. 232. Su questo aspetto, cfr. anche A. GUERRAGGIO – P. NASTASI 2005, *Italian Mathematics Between the Two World Wars*, Basel, Birkhäuser, p. 281.

[102] C.F. MANARA 1957, *Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica*, «Period. Mat.» (5) 35, p. 5.

4. *Fano e l'alta divulgazione: le conferenze al* **Cercle Mathématique** *di Losanna*

Di origini ebraiche per parte di padre e di madre, Fano è rimosso dall'insegnamento presso l'ateneo torinese nell'autunno del 1938. Dietro le reiterate insistenze dei famigliari, alle soglie dei settant'anni lascia Torino con la moglie alla volta della Svizzera nel dicembre del 1938, stabilendosi a Losanna. Una scelta, questa, dettata dal patriottismo di Fano – desideroso di spostarsi in una nazione che non sarebbe mai entrata in guerra contro l'Italia[1] – ma anche agevolata dal possesso di un ingente patrimonio, trasferito in Svizzera dal figlio Robert con una rischiosa operazione di contrabbando. Pur essendo il più anziano dei matematici esuli dall'Italia fascista, Fano mostra una grande operosità.[2] Quattro sono gli ambiti in cui profonde il suo impegno durante la 'stagione elvetica': l'alta divulgazione; l'insegnamento geometrico; la solidarietà, aiutando molte famiglie ad avere notizie di parenti lontani o dispersi;[3] e la ricerca, con dodici pubblicazioni nel periodo 1939-1945 apparse nei «Commentarii Mathematici Helvetici», nella «Revista de la Universidad Nacional de Tucumán» e negli «Atti della Pontificia Academia Scientiarum».

Sul versante della divulgazione, Fano ha un'ampia esperienza come promotore della cultura geometrica italiana, iniziata alla *Mathematische Gesellshaft* di Göttingen nel 1893, proseguita ad Aberystwyth 1923, a Kazan nel 1929 e destinata a concludersi a Losanna. Qui, nell'arco di due anni, dal maggio 1942 al febbraio 1944, Fano tiene al prestigioso *Cercle Mathématique*[4] cinque conferenze dedicate alla geometria algebrica italiana, in una prospettiva storica e 'di scuola', che riscuotono successo e danno luogo a vivaci discussioni con i nuovi amici e colleghi svizzeri: De Rham, Gustave Dumas, Charles Le Blanc, Pierre G. Javet.[5]

Nella prima conversazione, *Quelques aperçus sur le développement de la géométrie algébrique en Italie pendant le dernier siècle* (serata del 4 maggio 1942), Fano traccia la storia recente e contemporanea della geometria algebrica da L. Cremona, che getta i presupposti per la nascita della Scuola italiana, fino all'arrivo dei grandi Maestri: G. Veronese, C. Segre, E. Bertini. Fin da questa prima conferenza è manifesto il desiderio di Fano di promuovere di fronte ai colleghi stranieri i risultati della propria tradizione di ricerca geometrica.[6] Non bisogna pensare che si tratti dell'*amarcord* di un vecchio geometra al termine della carriera, ma al contrario di una volontà che permea tutte le sue esperienze di divulgazione.

---

[1] FANO 2004, *cit.*, p. 3: Fano "would never go to a country likely to be at war with Italy".

[2] Sull'emigrazione di Fano in Svizzera, cfr. LUCIANO 2017, *cit.*, pp. 87-107; LUCIANO 2022a, *cit.*, pp. 235-251; LUCIANO 2022b, *cit.*, pp. 1-9.

[3] TERRACINI 1952, *cit.*, p. 487.

4 Il *Cercle Mathématique* era stato fondato nel 1932 da De Rham (1903-1990), Marchand (1888-1953) e Gustave Juvet (1896-1936), tutti e tre docenti all' Università di Losanna. Aveva raccolto l'eredità del *Colloque mathématique dei Universités romandes*, organizzato da Dumas a partire dal 1923. Famoso in tutto il mondo e attivo fino al 1980, questo circolo matematico era finanziato dai soci e dalle Università elvetiche e beneficiò della collaborazione di alcuni dei più illustri matematici del tempo mondo, oltre a dar vita a proficue collaborazioni con la *Société Mathématique Suisse*, di cui De Rham fu presidente nel biennio 1944-45.

[5] Cfr. BUNIL, *FdR*, Proces verbaux du Cercle Mathématique. I verbali delle sedute del *Cercle* documentano la presenza di non meno di una ventina di uditori, fra membri del *Cercle* e invitati esterni, a ciascuna conversazione.

[6] Questa prima conferenza è analizzata in LUCIANO 2022b, *cit.*, pp. 10-27.

Le quattro conversazioni successive, caratterizzate da una maggiore 'densità' di concetti matematici, non sono state finora studiate. Esse costituiscono tuttavia una preziosa testimonianza dell'approccio di Fano all'alta divulgazione, segnato dalla presenza di interessanti *excursus* storici e dall'intento di 'accompagnare' l'uditore attraverso il ricco patrimonio culturale della Scuola italiana, guidandolo all'interno di quella messe di idee, risultati e strumenti matematici che avevano portato l'Italia a raggiungere una *Führende Stellung* a livello internazionale. Nella presentazione degli argomenti, da quelli più elementari ai più recenti risultati di ricerca avanzata, Fano fa costante riferimento a quella "continuità del pensiero geometrico italiano"[7] in cui egli aveva saputo ben inserirsi.

4.1. La geometria sulle superfici algebriche: un traguardo della Scuola italiana

La conversazione intitolata *Géométrie sur les surfaces algébriques* (11 maggio 1942), tenuta ad una settimana di distanza dalla prima, si presenta come il naturale prosieguo della precedente: è infatti dedicata allo sviluppo della geometria delle superfici algebriche, una tappa fondamentale nell'evoluzione della disciplina in cui la Scuola italiana ha rivestito un ruolo di primo piano. Fano imposta l'esposizione in tre parti: un'introduzione storica; una rassegna delle questioni che si possono studiare in modo analogo a quanto accade per le curve; un'analisi di alcuni problemi più complessi, all'interno della teoria delle superfici, ai quali i geometri italiani hanno apportato i contributi maggiori.

In apertura Fano sottolinea che, storicamente, lo studio delle superfici algebriche è stato intrapreso per quanto possibile in analogia con quello delle curve. Questo approccio ha però presentato, per alcuni aspetti, difficoltà notevoli che sarebbero state superate soltanto dopo molti anni di lavoro. Gli albori della teoria risalgono al 1868, con il tentativo di estendere la nozione di genere di una curva alle superfici. Questo è portato a compimento, in due modi differenti, grazie agli studi di Cayley, A. Clebsch, M. Nöther e H.G. Zeuthen del ventennio 1870-1890. Le prime ricerche sulle superfici, sviluppatesi in contesto tedesco, sono incentrate su loro casi particolari (superfici razionali rappresentabili su un piano, superfici rigate irrazionali, superfici iperellittiche, piani doppi, …) e sulla determinazione di quelle superfici che hanno come sezioni iperpiane delle curve di tipo particolare. Ben presto però, a questo indirizzo si affianca quello francese inaugurato da É. Picard nel 1884 con le prime ricerche sugli integrali associati alle superfici e proseguito con i lavori di G. Humbert, P. Painlevé e J. Liouville. In particolare, considerata una superficie di equazione $F(x, y, z) = 0$, sono presi in esame gli integrali del tipo $\int(Pdx + Qdy)$ dove P, Q sono funzioni razionali nelle variabili x, y, z che soddisfano la condizione $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Le questioni che scaturiscono dallo studio di questi oggetti matematici, che assumeranno il nome di "integrali di Picard", si intrecciano con problemi di natura topologica legati alla connessione lineare delle superfici, di cui Poincaré sarà pioniere.

I geometri italiani riescono a inserirsi in entrambe le vie di indagine, portandole a compimento ed elaborando una visione unitaria. Fano lo aveva sostenuto in altre occasioni. Quasi vent'anni prima, ad Aberystwyth aveva affermato: "È pure opera principalmente italiana

[7] TERRACINI 1953, *cit*., pp. 702-703.

il legame tra i due indirizzi”.[8] Da un lato, infatti, Cremona, Castelnuovo, Enriques e Del Pezzo avevano dato importanti contributi allo studio di famiglie particolari di superfici; dall’altro, all’interno del lavoro *Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques* (1897), Castelnuovo ed Enriques avevano recepito le ricerche dell’indirizzo trascendente e messo in luce i profondi legami tra la teoria degli integrali di Picard e lo studio delle superfici algebriche. Alle ricerche sulle superfici i due geometri italiani si erano dedicati proficuamente dal 1892, anno dell’arrivo di Enriques a Roma. Durante le “interminabili passeggiate” per le vie della capitale, avevano elaborato un nuovo approccio alla geometria sopra una superficie algebrica. Come scrive Castelnuovo ricordando l’amico, “non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l’indirizzo italiano”.[9] Le idee di Clebsch e Nöther erano state così inglobate all’interno di un quadro globale, caratterizzato dall’idea che lo studio di una superficie algebrica coincidesse essenzialmente con quello delle famiglie di curve che appartengono alla superficie. Fano ben illustra questo percorso nella parte successiva della conferenza.

Passando ai problemi relativi alle superfici che si possono affrontare “senza difficoltà, in quanto sono abbastanza analoghi alle questioni sulle curve”,[10] per prima cosa Fano introduce il concetto fondamentale di sistema lineare di curve su una superficie,[11] corrispondente in un certo senso a quello di serie lineare di gruppi di punti su una curva. Tale sistema è costituito dalle curve che si ottengono dall’intersezione della superficie considerata con altre dello stesso grado. Sotto l’ipotesi – che Fano suppone sempre verificata – che ogni curva sia individuata dall’intersezione della superficie di partenza con una sola delle altre, vale una proprietà fondamentale: per r punti della superficie in posizione generale passa un’unica curva del sistema. In questo modo, r rappresenta la dimensione del sistema lineare di curve considerato. A questo si affiancano altri caratteri fondamentali del sistema: il genere, ossia il genere della curva generale del sistema; il grado n, dato dal numero dei punti di intersezione variabile tra due curve del sistema; la serie caratteristica g_n^{r-1}, composta dai punti individuati dalle curve del sistema sulla curva generale. È poi messo in luce un aspetto fondamentale dei sistemi lineari di curve, rappresentabili come

$$\lambda_0\varphi_0(x,y,z) + \cdots + \lambda_r\varphi_r(x,y,z) = 0,$$

su una superficie di equazione $f(x,y,z) = 0$. L’immagine proiettiva di un sistema lineare è una superficie $F \subset \mathbb{P}^r$, chiamata da Fano “superficie proiettivizzata”. Un esempio significativo che Fano propone al pubblico di Losanna è costituito dal sistema lineare composto dalle coniche piane, di equazione

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 xy + \lambda_4 xz + \lambda_5 yz = 0.$$

[8] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 103*r*.

[9] G. CASTELNUOVO 1947, *Commemorazione di Federigo Enriques*, «Period. Mat.» (4) 25, p. 82.

[10] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 48*r*: “sans difficultés, comme elles sont tout-à-fait analogues à des questions sur les courbes”.

[11] Questo concetto equivale, modernamente, a quello di divisori effettivi su una superficie.

La sua immagine proiettiva è una superficie del quarto grado $F \subset \mathbb{P}^5$, la cosiddetta superficie di Veronese, che gode di proprietà interessanti: contiene solo curve di ordine pari e la sua proiezione più generale su $\mathbb{P}^3$ è data dalla superficie di Steiner.[12]

Terminato questo esempio, Fano torna alle questioni di carattere generale. Nella conversazione porta avanti l'analogia con la teoria delle curve che gli permette di introdurre il concetto di curve equivalenti di un sistema lineare privo di punti base e le operazioni tra esse. In particolare, è possibile sommare sistemi composti da curve di genere e grado differenti che si intersecano in i punti, ottenendo un nuovo sistema lineare avente genere e grado dati da una formula generale.[13] A partire dal concetto di serie canonica per le curve, Fano illustra e definisce per le superfici la nozione di sistema aggiunto

$$|C'| = |C_j - 2C|,$$

dove $|C_j|$ è il sistema lineare composto dalle curve jacobiane. Il passaggio da $|C|$ a $|C'|$ è noto come aggiunzione. Tale operazione, a seconda della superficie di partenza, può essere ripetuta più volte e, in certi casi, proseguire indefinitamente. Il sistema $|C_j - 3C| = |C' - C|$, a meno di eventuali componenti fisse, rappresenta un invariante per la superficie, il cosiddetto sistema canonico. Tuttavia, a differenza di quanto accade per le curve, tale sistema non esiste sempre: il piano e le superfici razionali sono infatti privi di sistema canonico. In questa parte dell'esposizione Fano affianca sempre alla costruzione generale un esempio particolare, con l'obiettivo di risultare più comprensibile di fronte ad un uditorio che non era del tutto familiare con queste tecniche.[14] In questo frangente, ad esempio, sottolinea che nel caso delle superfici del quart'ordine il sistema canonico è quello nullo (in quanto $|C'| = |C|$), così come è nulla la serie canonica delle curve piane di terzo grado.

Ampio spazio è dedicato, nell'ultima parte della conferenza, a quelle questioni della teoria delle superfici "che hanno presentato maggiori difficoltà per ottenere un risultato completo e soddisfacente".[15] In quest'ottica, Fano pone l'accento su tre aspetti fondamentali: l'estensione della nozione di genere, cui aveva già accennato in apertura del discorso; la necessità di individuare un criterio di razionalità per le superfici; la questione delle curve eccezionali e il suo legame con la classificazione birazionale delle superfici.

Riguardo al primo punto, Nöther aveva suggerito di considerare come genere di una superficie di grado n in $\mathbb{P}^3$ il numero di superfici aggiunte di ordine $n-4$, osservando che tale numero coincide con quello degli integrali doppi di prima specie sulla superficie. L'idea del matematico tedesco scaturiva dal tentativo di procedere in parallelo con la teoria delle curve.

[12] A proposito della superficie di Steiner, in questa occasione Fano ricorda soltanto che si tratta di una superficie del quarto ordine che possiede un punto triplo per cui passano tre rette doppie, annotando *a latere* in italiano che essa rappresenta la superficie duale di quella del terz'ordine con quattro punti doppi. La superficie di Steiner sarà poi ripresa e analizzata più approfonditamente nella quarta conferenza.

[13] Nello specifico, considerando due sistemi lineari di gradi n_1, n_2 e di generi π_1, π_2 le cui curve si intersecano in i punti, il sistema lineare ottenuto dalla loro somma avrà grado $n_1 + n_2 + 2i$ e genere $\pi_1 + \pi_2 + i - 1$.

[14] A Losanna, infatti, in quegli anni la geometria algebrica iniziava a essere studiata dal punto di vista topologico, utilizzando la nozione di omologia introdotta da De Rham. Al riguardo, cfr. S. CHATTERJI – M. OJANGUREN 2013, *A Glimpse of the de Rham Era*, «Notices of the International Congress of Chinese Mathematicians» 1, pp. 120-122.

[15] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 44*r*: "qui ont présenté le plus de difficultés pour aboutir à un résultat complet et tout-à-fait satisfaisant".

Tuttavia, mentre per una curva piana di grado n con d punti doppi, imporre il passaggio per tali punti a una curva aggiunta di ordine $n-3$ implica esattamente d condizioni algebriche linearmente indipendenti, ciò non avviene per le superfici aggiunte di ordine $n-4$. Questa considerazione porta a introdurre le due differenti nozioni di genere geometrico, p_g, e aritmetico, p_a , di una superficie.[16] Si tratta di due invarianti birazionali tali che $p_a \leq p_g$. La differenza tra i due generi è detta irregolarità e comunemente denotata con q: essa permette di suddividere le superfici in due grandi classi: le superfici regolari (per cui $p_a = p_g$) e quelle irregolari (per cui $p_a < p_g$, come accade per le rigate irrazionali). Resta però da analizzare la relazione tra la teoria delle superfici e quella degli integrali di Picard su di esse, problema emerso già nel 1885 all'interno delle ricerche di Picard e Poincaré e portato a completa risoluzione solo vent'anni più tardi grazie a Castelnuovo, Enriques e Severi, in quello che Fano definisce "uno dei momenti più epici nello sviluppo di questa teoria".[17] Come illustrato nel dettaglio al *Cercle* di Losanna, si tratta di risolvere una duplice questione. Da una parte vi è l'aspetto 'qualitativo' legato allo stabilire se le superfici regolari e irregolari costituiscano effettivamente due classi di superfici birazionalmente distinte. Dall'altra, si ha il problema 'quantitativo' di individuare le relazioni numeriche tra l'irregolarità, il numero di integrali di Picard di prima e seconda specie, e il primo numero di Betti R_1. Ma, sottolinea Fano, per ottenere tali relazioni, apparentemente semplici e da lui illustrate "in poche parole",[18] sono stati necessari molti anni di lavoro. Con l'introduzione del concetto di irregolarità viene a mancare la simmetria con la teoria delle curve: infatti l'analogo delle curve di genere p è rappresentato in certi casi dalle superfici regolari, in altri da quelle con irregolarità $q = p$.

Il secondo aspetto su cui si sofferma Fano è la ricerca di una condizione necessaria e sufficiente per la razionalità di una superficie, che si possa esprimere mediante opportune relazioni tra gli invarianti numerici. Mentre per le curve essa è rappresentata dall'annullarsi del genere, per le superfici l'annullarsi di entrambi i generi costituisce soltanto una condizione necessaria. All'interno della fitta corrispondenza con Castelnuovo, nel 1894 Enriques aveva individuato un primo esempio di superficie irrazionale per cui $p_a = p_g = 0$, invalidando così la congettura di Nöther.[19] Si tratta di una superficie di sesto grado di $\mathbb{P}^3$ avente i punti doppi lungo gli spigoli di un tetraedro, successivamente nota come superficie di Enriques. A partire dallo studio di questa, sono introdotti nuovi invarianti numerici. Poiché la superficie di Enriques ha genere geometrico nullo, su di essa non esiste un sistema canonico; tuttavia, si ha il sistema doppio del sistema canonico, da Enriques definito "bicanonico", che coincide in questo caso con il sistema nullo. Ciò permette di introdurre la nozione di bigenere P_2, dato dal numero di curve bicanoniche indipendenti del sistema, che si generalizza in quella di plurigenere. Il bigenere costituisce l'invariante assoluto alla base del criterio di razionalità delle superfici

---

[16] In particolare, denotando con p il genere della curva ottenuta come sezione iperpiana della superficie, si ha che $p_g = \frac{p(p-1)}{2}, p_a = \frac{p(p-3)}{2}$.

[17] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 44*r*: "Ce fut un des moments les plus épiques du développe de cette théorie".

[18] Cfr. *ivi*, c. 44*v*: "Mais ce que je vous oui dit en quelques mots, il a fallu bien des années pour y parvenir et le démontrés." In particolare, su una superficie d'irregolarità q si avranno q integrali linearmente indipendenti di prima specie, $2q$ integrali linearmente indipendenti di seconda specie e tale valore coincide con il primo numero di Betti della superficie.

[19] Cfr. ASANL, *Fondo Castelnuovo*, lett. di F. Enriques a G. Castelnuovo, [s.l.] 22.7.1894.

dimostrato da Castelnuovo (1892): una superficie algebrica è razionale se e solo se $P_2 = q = 0$. Questo teorema rappresenta uno dei massimi risultati raggiunti dalla Scuola di geometria e ha portato "l'Italia a un primato che tutti le riconoscono".[20] È quindi naturale che Fano, durante la sua esposizione di fronte ai colleghi svizzeri, dedichi ampio spazio a questo traguardo così come alle ricerche successive di Enriques ad esso correlate. Quest'ultimo, infatti, proseguendo nello studio delle superfici di Enriques, le caratterizza mediante le relazioni numeriche $P_3 = 0, P_2 = p_a = 0$, $P_4 = P_6 = 0$ e individua nella relazione $P_r = 0$ la condizione per trasformare birazionalmente una superficie in una rigata. Dopo aver celebrato i risultati ottenuti dai geometri italiani in questo ambito, Fano conclude questa parte dell'esposizione sottolineando come le condizioni di razionalità per le varietà algebriche tridimensionali – su cui egli ha lavorato per tutta la vita – siano invece ancora sconosciute.

L'ultimo aspetto di rottura con la teoria delle curve, "che ha dato luogo a qualche complicazione per le superfici" [21] è costituito dal fatto che una corrispondenza birazionale tra due superfici non è sempre "biunivoca senza eccezioni",[22] come accade invece per le curve: un esempio è dato dalla proiezione stereografica di una qualsiasi superficie da uno dei suoi punti. Fano si limita a considerare il caso in cui, all'interno di una trasformazione cremoniana tra due superfici, vi sia una corrispondenza birazionale tra un punto e una curva. Riprendendo l'espressione *ausgezeichnete Kurven* di Nöther, le curve di questo tipo sono dette "eccezionali" e si suddividono in due categorie. Le curve eccezionali di prima specie sono quelle curve irriducibili che vengono contratte ad un punto semplice tramite una trasformazione birazionale o, modernamente, quelle che hanno autointersezione pari a -1; quelle di seconda specie, invece, non possono essere eliminate, avendo autointersezione almeno 0. Le superfici che contengono curve eccezionali di seconda specie sono birazionalmente equivalenti alle rigate; le altre contengono al più un numero finito di curve eccezionali di prima specie e sono birazionalmente equivalenti a superfici prive di curve eccezionali. Questa considerazione, fatta da Castelnuovo ed Enriques a inizio Novecento, sta alla base della loro classificazione birazionale delle superfici. Come illustrato da Fano nell'ultima parte della sua esposizione, l'idea fondamentale e innovativa elaborata dai geometri italiani consiste nel ripartire le superfici in classi di equivalenza birazionale a seconda dei valori degli invarianti birazionali. Le superfici sono così classificate in base al comportamento dei rispettivi modelli canonici o pluricanonici.[23] Ma – osserva Fano – ogni classe di superfici birazionalmente equivalenti può essere ripartita in sottoclassi, formate da superfici che possono essere trasformate l'una nell'altra senza che vari il numero di curve eccezionali. A differenza delle curve, le superfici algebriche presentano degli invarianti relativi oltre a quelli assoluti: tra questi, Fano cita il secondo numero di Betti R_2 e l'invariante I di Zeuthen-Segre. La conferenza al *Cercle* si conclude allora focalizzando l'attenzione su un mancato parallelismo con la teoria delle curve: si tratta della ricerca del carattere delle superfici più vicino al genere p di una curva algebrica. Fano osserva che, mentre l'invariante assoluto R_1 è 'geometricamente' più simile a p rispetto a R_2, quest'ultimo si

[20] BSMT, *FFa*, Quad. Geom. Sup. 1, p. 9.

[21] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c: 50*r*: "qui a donné lieu, pour les surfaces, à quelques complications".

[22] *Ibidem*: "biunivoque sans exceptions". In termini moderni, questo equivale ad affermare che in una corrispondenza birazionale tra due superfici può accadere che una curva irriducibile sia contratta ad un punto semplice.

[23] Per approfondire questo aspetto, cfr. BRIGAGLIA – CILIBERTO 1998, *cit.*, pp. 239-243.

comporta ‘numericamente’ come p: così come la presenza di punti doppi di una curva fa diminuire p, allo stesso modo punti e rette multipli su una superficie di ordine n comportano una diminuzione di R_2, causando invece talvolta un aumento del valore di R_1.

4.2. Un “exposé plein de vie”: la teoria delle superfici da Aberystwyth a Losanna

Pur presentando un maggior numero di contenuti prettamente matematici rispetto alla prima conferenza, anche la seconda esposizione di Fano al *Cercle* costituisce un bell’intreccio di prospettiva storica e ‘di Scuola’. La presenza di cenni storici o di un vero e proprio approccio storico, che segna tutta l’azione del Fano trattatista e che, sulla scorta del magistero Segre, caratterizza anche l’apertura del suo corso di Geometria superiore a Torino (a.a. 1924-25), raggiunge forse qui la sua acme. A Losanna, privo della ricca collezione di opuscoli e volumi e dotato esclusivamente della sua “proverbiale memoria”,[24] Fano inserisce un gran numero di riferimenti, sia storici sia matematici, puntuali ed estremamente precisi, frutto di ripensamenti, aggiunte e correzioni.[25] Il pubblico è così accompagnato in una sorta di viaggio dalle origini della teoria delle superfici al suo compimento e perfezionamento ad opera della Scuola italiana. Oltre a mettere in luce, mediante un approccio di tipo genetico, la nascita e l’evoluzione dei concetti matematici, Fano pone l’accento su due elementi peculiari del patrimonio culturale dei geometri italiani: il ruolo fondamentale dell’analogia, e del metodo sperimentale che ha permesso alla Scuola di geometria algebrica di progredire nelle sue indagini:

> Molto utile, al contrario, per la teoria generale è stato lo studio approfondito di molti casi particolari. Questo è quello che si può chiamare il metodo sperimentale della matematica: non per la dimostrazione, ma per la scoperta delle verità, che di solito precede la loro dimostrazione, credo che sia molto suggestivo.[26]

Sempre in quest’ottica, Fano sottolinea a più riprese il fatto che sono i geometri italiani a giungere alla risoluzione di quelle questioni della teoria delle superfici più difficili da dipanare. I loro contributi rappresentano così quasi il 60% dei lavori citati da Fano.[27] Il tema stesso della conferenza è uno dei più cari alla tradizione italiana: Fano lo propone in più occasioni, dal ciclo di lezioni ad Aberystwyth al corso di Geometria superiore tenuto a Torino l’anno successivo alla morte di C. Segre, e a Losanna. I punti di contatto tra le bozze dei discorsi presentati in questi tre diversi contesti sono molteplici, con alcuni rimandi quasi testuali. Accanto all’*excursus* storico introduttivo, spiccano i tre aspetti di difficoltà nell’estensione della teoria delle curve a quella delle superfici algebriche, presentati da Fano in maniera del tutto analoga e nello stesso ordine. I lavori citati sono pressoché gli stessi, con rare eccezioni rappresentate

[24] FANO 2000, *cit.*, p. 3.

[25] In sole sette carte, Fano inserisce quasi 25 riferimenti puntuali a pubblicazioni, la gran parte delle quali è accompagnata dalla collocazione editoriale e dall’anno di pubblicazione. L’unica imprecisione è costituita dalla datazione della lettera sulle superficie Enriques.

[26] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 47*r*: “Bien utile, au contraire, pour la théorie générale a été l’étude approfondie de nombreux cas particulières. C’est cela que l’on peut appeler la méthode expérimentale des mathématiques : non pas pour la démonstration, mais pour la découverte des vérités, qui ordinairement précède leurs démonstrations, je la crois très suggestive”.

[27] Dei 13 lavori dei geometri italiani citati da Fano, 4 sono di Castelnuovo, 4 di Enriques, 3 recano la firma di entrambi, 2 infine i riferimenti a Severi.

da una pubblicazione posteriore rispetto alle lezioni inglesi (l'*Analysis situs* di Lefschetz del 1924) o riferimenti alle ricerche dei matematici del luogo, come nel caso dello scritto di Baker intitolato *On some recent advances in the theory of algebraic surfaces* citato solo ad Aberystwyth.[28]

Ulteriori elementi di sovrapposizione emergono dal confronto tra le due esperienze di divulgazione della teoria delle superfici, all'University College of Wales e al *Cercle* di Losanna, in cui Fano desidera, in primo luogo, trasmettere al pubblico l'approccio e la mentalità che hanno guidato i geometri italiani in questi studi. Anche ad Aberystwyth egli esordisce sottolineando che "la 'geometria sopra una superficie algebrica' o 'ente algebrico ∞^2' si è sviluppata in seguito a quella sulla 'curva algebrica' o 'ente algebrico ∞^1', ma anche fornendo alla prima nuove idee"; tuttavia, "l'estensione dalle curve alle superficie ha presentato fino da principio delle complicazioni".[29] Anche l'introduzione storica è molto simile ma, a differenza di Losanna, qui Fano specifica che l'indirizzo francese inaugurato da Picard è detto "trascendente" e accenna anche a quello "aritmetico" sviluppatosi a inizio Novecento con K. Hensel, G. Landsberg e H. Jung. Per illustrare ai matematici stranieri in cosa consiste lo studio delle superfici algebriche per i geometri italiani, Fano afferma che il principale "oggetto di studio della geometria su una superficie algebrica" è costituito dai sistemi lineari di curve con le rispettive serie caratteristiche; tuttavia, in Galles fa anche riferimento allo studio delle relative involuzioni, non accennato invece a Losanna.[30] In entrambi i contesti, introduce alcuni elementi per favorire una migliore comprensione da parte del pubblico: l'adozione dell'ipotesi più semplice per definire un sistema lineare di curve su una superficie; la scansione in tre parti degli aspetti nuovi della teoria delle superfici; l'analogia tra curve razionali e superfici regolari per le quali $p_g = p_a = p$; l'esempio della medesima rigata ellittica per illustrare il caso di superfici con $p_a = -1$ e $p_g < 0$.[31] Ancora, ad Aberystwyth come a Losanna, il problema della ricerca di un criterio di razionalità per le superfici è espresso in questi termini:

> Mentre le curve di genere zero sono razionali, cioè rappresentabili birazionalmente sulla retta, e viceversa, per le superficie l'avere entrambi i generi nulli $p_a = p_g = 0$ non basta ancora per concludere la razionalità = rappresentabilità birazionale sul piano – occorre una condizione ulteriore.[32]

Analoga è anche la presentazione della caratterizzazione $p_a = P_2 = 0$ per le superfici razionali, anche se in Galles Fano aggiunge che "la razionalità delle involuzioni piane è stata dimostrata da Castelnuovo".[33] Un ultimo elemento di forte analogia è la conclusione della parte dedicata ai criteri di razionalità per le superfici, con un riferimento a quanto accade per le varietà

---

[28] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 103*r*. Si tratta di H.F. BAKER 1913, *On some recent advances in the theory of algebraic surfaces*, «Proc. LMS» (2) 12, pp. 1-40.

[29] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 103*r*.

[30] *Ivi*, c. 104*v*.

[31] *Ivi*, cc. 103*r*-104*v*.

[32] *Ivi*, c. 103*v*.

[33] *Ivi*, c. 112*v*.

di dimensione tre: “per le M_3 le cose si complicano ulteriormente; le condizioni di rappresentabilità su S_3, in forma invariantiva, non sono ancora note”.[34]

Naturalmente vi sono anche alcune differenze tra le conferenze di Losanna e Aberystwyth, in gran parte riconducibili alla maggiore ampiezza della trattazione del 1923. In Galles, infatti, Fano dedica più di un intervento alla teoria delle superfici, potendo così introdurre tutti gli elementi necessari che compaiono nella formula del genere aritmetico

$$p_a = \binom{n-1}{3} - (n-4)d + 2t + \pi - 1,$$

che a Losanna non introduce invece per esteso, e arrivando a occuparsi della generalizzazione degli integrali abeliani in modo più approfondito.[35] Ancora, le operazioni tra sistemi lineari di curve su una superficie e la nozione di curva virtuale sono introdotte solo al termine della trattazione, accanto al concetto di *Restsatz*, non richiamato invece a Losanna.[36] Infine, ad Aberystwyth Fano illustra i propri contributi allo studio della superficie di Enriques,[37] introduce $p^{(1)}$ all’interno della lista degli “invarianti secondo Enriques”[38] e fornisce una trattazione più esaustiva degli invarianti relativi delle superfici, non illustrando qui il legame con la teoria degli integrali di Picard ma approfondendo le corrispondenze algebriche non birazionali tra superfici.[39]

L’approccio adottato da Fano, pur presentando alcuni aspetti di originalità come l’enfasi sui tre punti particolarmente ‘delicati’ della costruzione della teoria delle superfici algebriche, deriva da quello di C. Segre. La medesima impostazione nell’introdurre i concetti di sistema lineare, sistema canonico, aggiunzione e plurigeneri trova naturale collocazione in una prospettiva di trasmissione e condivisione di un patrimonio matematico proprio della Scuola italiana.

La chiarezza espositiva costituisce infine un tratto caratteristico del Fano oratore: da questa conferenza emerge il suo desiderio di rendere il proprio discorso accessibile al pubblico di Losanna, anche nelle parti più tecniche dell’esposizione. Alle costruzioni più generali e ai passaggi più critici, Fano affianca sempre un esempio concreto o l’illustrazione di un caso particolare. L’esempio del piano e del sistema lineare delle coniche su di esso è così giustapposto all’introduzione dei sistemi lineari di curve su una qualsiasi superficie, pensate proiettivamente come le famiglie di curve tagliate sulla superficie da sistemi lineari di ipersuperfici dello spazio proiettivo ambiente, fuori di eventuali curve fisse. Il calcolo dei numeri di Betti è dato nel caso di una varietà particolare e ben nota: la V_4^6 di Segre. L’attenzione e la sensibilità verso l’uditore, sviluppata e maturata da Fano in quasi cinquant’anni di divulgazione e insegnamento, sta alla base della struttura che egli adotta per l’esposizione a Losanna. Pur riprendendo i contenuti fondamentali della trattazione delle superfici già toccati ad Aberystwyth e a Torino, Fano sceglie infatti di cambiare l’ordine di presentazione degli argomenti. Per risultare più chiaro di fronte al pubblico del *Cercle*, decide di suddividere in due

---

[34] Cfr. *ivi*, c. 103*v* con c. 49*v*: “Pour les V_3, les conditions de rationalité ne sont encore connues”.

[35] *Ivi*, c. 103*v*.

[36] *Ivi*, c. 107*v*.

[37] *Ivi*, c. 101*v*.

[38] *Ivi*, c. 111*r*.

[39] *Ivi*, c. 113*r*.

grandi categorie i principali aspetti della teoria delle superfici algebriche. Nella prima parte, affronta quelli più 'semplici', introducendo i sistemi lineari e le operazioni su di essi in completa analogia con quanto accade per le serie di punti su una curva. Successivamente, si dedica agli aspetti più 'complessi' della teoria, introducendo quindi i due diversi tipi di genere e il criterio di razionalità di Castelnuovo. Il pubblico del *Cercle* è così guidato all'interno di un percorso differente rispetto a quello proposto ad Aberystwyth e a Torino. Pur senza scendere in ugual grado di dettaglio rispetto a Aberystwyth e a Torino, Fano riesce comunque a restituire una visione unitaria e efficace dello sviluppo di questa teoria.

I verbali delle sedute del *Cercle* forniscono un riscontro significativo dell'efficacia espositiva di Fano. "Questa esposizione, così vivace, fu ascoltata con grande attenzione":[40] così Le Blanc, segretario del *Cercle*, chiude il verbale della seduta in cui è stata pronunciata la conferenza di Fano sulla geometria delle superfici algebriche.

4.3. Le superfici cubiche: un tema "abbastanza elementare" ma interessante

Nella serata del 2 febbraio 1943, Fano presenta al *Cercle* un terzo intervento, intitolato *Aperçu général sur les surfaces du trosième ordre*,[41] e "cattura l'attenzione del pubblico dando una visione d'insieme della teoria di queste superfici dalle notevoli proprietà".[42] Si ricollega così al tema della conferenza precedente, andando però a prendere in considerazione una classe particolare di superfici, oggi comunemente note come cubiche.

L'intervento si apre con la definizione di superfici del terz'ordine data nel linguaggio dei geometri italiani, ossia superfici rappresentate da un'equazione di terzo grado del tipo $f(x, y, z) = 0$ nelle coordinate cartesiane x, y, z, o, equivalentemente, da un'equazione omogenea del medesimo grado del tipo $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, in coordinate omogenee. Le proprietà generali di cui godono le superfici algebriche di ordine n qualunque valgono naturalmente anche per quelle del terz'ordine, ma l'obiettivo di Fano è l'analisi di alcune proprietà particolari che interessano soltanto questo tipo di superfici. Questo argomento ben si presta a una conferenza di alta divulgazione: è infatti un tema "abbastanza elementare, ma non del tutto, e allo stesso tempo [...] interessante" dal punto di vista geometrico.[43]

Dopo questa breve premessa, Fano inquadra storicamente le ricerche sulle cubiche e relative proprietà. In primo luogo, cita gli inglesi Cayley, Salmon e J.J. Sylvester che già nel XIX secolo erano pervenuti a stabilire molte delle loro proprietà, sia individualmente sia in collaborazione. Ricorda poi l'opera di Cremona e i suoi importanti contributi sulle rigate del terz'ordine. Con quell'orgoglio nazionale suo tipico, Fano pone l'accento sull'assegnazione del Premio Steiner a Cremona nel 1866 per un lavoro contenente una teoria sistematica di queste superfici.

[40] BUNIL, *FdR*, Proces verbaux du Cercle Mathématique, c. 85: "Cet exposé, plein de vie, fut écouté avec une grande attention".

[41] Il testo integrale di questa conferenza non è stato ritrovato; una bozza del discorso di Fano, in alcuni punti frammentaria a causa delle condizioni di conservazione delle carte manoscritte, è stata individuata all'interno di BSMT, *FFa, Appunti vari*, cc. 36-41.

[42] BUNIL, *FdR,* Proces verbaux du Cercle Mathématique, c. 89: "capturé son auditoire en traçant un tableau d'ensemble de la théorie de ces surfaces aux propriétés remarquables".

[43] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 36*r*: "C'est un sujet assez élémentaire, mais pas tout-à-fait élémentaires et au même temps, je crois, intéressant".

Cremona aveva ottenuto tale riconoscimento a parimerito con R. Sturm. I due lavori premiati, poi pubblicati nel 1867 e nel 1868, avevano portato congiuntamente all'elaborazione di una teoria generale delle superfici di ordine tre.

Prima di entrare nel vivo della trattazione, Fano osserva che, in geometria algebrica, bisogna considerare anche gli elementi immaginari. Per questo motivo occorre distinguere due classi di proprietà algebriche. La prima è costituita dalle cosiddette "proprietà generali", ovvero quelle che si riferiscono a punti, rette, figure, coordinate o sistemi di coordinate che possono essere sia reali sia immaginari. Per esempio, se si suppone che una superficie di ordine n sia intersecata da una retta in n punti, non è necessario limitarsi a considerare soltanto i coefficienti reali. La seconda categoria di proprietà corrisponde all'espressione tedesca *Realitäts fragen*, ossia le "questioni di realtà". In questo ambito si adotta un sistema di coordinate reali, considerando di conseguenza soltanto le equazioni a coefficienti reali. Si avrà quindi una distinzione tra elementi reali e immaginari. Tornando all'esempio precedente, in generale una superficie di ordine n sarà intersecata da una retta in n punti che potranno essere reali o immaginari. Nel secondo caso, questi saranno a due a due coniugati.

Fano prosegue mettendo in luce una differenza sostanziale tra le superfici del second'ordine e quelle del terzo. Mentre una superficie del second'ordine, anche se è rappresentata da un'equazione in coordinate reali a coefficienti reali, può non avere alcun punto reale di intersezione con una retta, come accade per $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, una superficie del terz'ordine sarà sempre intersecata da una retta reale in un certo numero di punti, almeno uno dei quali è necessariamente reale.

Prima di introdurre le due questioni fondamentali della teoria delle superfici cubiche, Fano specifica che nel suo intervento parlerà indistintamente di curve reali o immaginarie, esplicitando quando si riferirà al solo caso reale. I due problemi particolari che appaiono per la prima volta nel caso delle superfici del terz'ordine riguardano il numero di rette contenute in una superficie di questo tipo e una particolare configurazione, detta pentaedro di Sylvester. Quest'ultimo è costituito dall'unione di cinque piani $L_i = 0$ per $i = 1, \dots, 5$ che soddisfano una proprietà particolare. Per ogni cubica generale esiste infatti un'unica quintupla di piani tale che la sua equazione possa esprimersi come

$$\sum_{i=1}^{5} L_i^3 = 0.$$

Fano non affronta però questo aspetto nella conferenza, scegliendo di concentrarsi sul primo problema. Considera quindi una retta generica individuata dalle equazioni $x = mz + p$ e $y = nz + q$; essa è contenuta nella superficie considerata, di equazione $f(x, y, z) = 0$, se sostituendo ad x e y le espressioni precedentemente indicate la relazione

$$A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0$$

è identicamente soddisfatta, ovvero valgono le uguaglianze $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Queste si traducono in un sistema di 16 equazioni nelle 4 incognite m, n, p, q. Esso avrà sempre delle soluzioni e, nel caso generale, esse saranno in numero finito. Per completare il ragionamento andrebbero ancora considerati i punti all'infinito su cui Fano, come dichiarato, non si sofferma, per concludere asserendo che ogni superficie del terzo ordine contiene delle rette e, in generale, esse sono in numero finito. Nel caso in cui tali rette siano infinite, si hanno delle superfici rigate del terz'ordine. Nel prosieguo della conferenza, Fano avanza alcune considerazioni riguardo alle rigate e successivamente si concentra sulla costruzione delle 27 rette della cubica generale.

Per analizzare il primo aspetto, Fano introduce una corrispondenza proiettiva omogenea tra una conica γ e una retta r non contenuta nel piano della conica, con la proprietà di preservare il rapporto anarmonico tra quattro punti. Con l'unica eccezione del cono, il luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti della retta e della conica è una superficie rigata del terz'ordine e, viceversa, ogni rigata del terz'ordine può essere ottenuta tramite questa costruzione. Aiutandosi con alcune illustrazioni, Fano osserva che un generico piano passante per una generatrice della cubica la taglierà in una conica, per cui γ è solo una delle infinite coniche che si possono considerare. Attraverso ulteriori ragionamenti di natura proiettiva, egli mette in luce che tale superficie possiede un'infinità di punti doppi, il cui luogo è una retta doppia. Finora Fano ha "tacitamente supposto"[44] che γ e r non abbiano punti in comune. In caso contrario, si hanno due possibilità. Se il punto in comune è doppio, la superficie così generata è un iperboloide e, dunque, una superficie del second'ordine. Se invece non esistono punti doppi, r è una retta doppia. In questo secondo caso si ha una superficie particolare (detta di Cayley), studiata anche da Lie dal punto di vista delle trasformazioni omografiche. La cubica di Cayley, che ha quattro punti doppi conici, fa da *trait-d'union* tra il caso in cui γ e r si intersecano e quello contrario. Essa infatti rappresenta, nelle parole di Fano, un "caso intermedio"[45] tra le due restanti possibilità: r incidente al piano che contiene γ all'interno o all'esterno della conica stessa. Per studiare questi due casi, occorre far riferimento alle questioni di realtà. Quando il punto di intersezione è interno a γ, ogni piano reale passante per r interseca la conica in due punti distinti ed entrambi reali. Se invece il punto di intersezione è esterno alla conica, allora si presentano tre possibilità: i piani reali passanti per r possono intersecare la conica in due punti reali, in uno solo o in due punti immaginari. Dopo aver illustrato approfonditamente questi ultimi casi, fornendo anche alcune equazioni esplicite degli oggetti geometrici coinvolti, Fano conclude osservando che ogni superficie cubica rigata di Cayley può sempre essere rappresentata come $x_1x_2x_3 + x_1^2x_3 + x_2^3 = 0$, la cui retta doppia è $x_1 = x_2 = 0$.

Nella parte centrale della conferenza, egli si dedica ad una questione fondamentale della teoria delle superfici del terz'ordine, andando ad analizzare una superficie cubica non rigata, con l'obiettivo di determinare il numero finito di rette che giacciono su di essa. Come già anticipato da Fano, una superficie di questo tipo contiene necessariamente almeno una retta. È questo, in realtà, il punto più complesso della dimostrazione, sul quale però Fano non si sofferma. Assumendo che questa sia data da $x_3 = x_4 = 0$, ossia coincida con uno spigolo del tetraedro delle coordinate, l'equazione della superficie dovrà essere della forma $x_3U + x_4V = 0$, dove U e V sono polinomi omogenei di secondo grado. Inoltre, un qualsiasi piano passante per questa retta può essere rappresentato come $x_4 = \lambda x_3$ e intersecherà la superficie in una sezione conica. Il passo successivo consiste nel vedere quante di queste coniche così individuate degenerano in due rette. Per fare ciò, bisogna considerare il determinante della conica, i cui elementi contengono il parametro λ, e individuarne il grado rispetto a λ che risulta essere pari a 5. Questo significa che all'interno del fascio $x_3 = \lambda x_4$ vi

[44] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 37*v*: "tacitement supposé".

[45] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 37*v*: "la surface de Cayley est un cas, pour ainsi dire intermédiaire: c.à.d. le point où r rencontre le plan de γ peut-être à l'intérieur ou bien à l'extérieur de γ".

saranno cinque piani che intersecano la superficie in un complesso di rette. Fano considera allora le tre rette a, b, c contenute in uno di questi piani e osserva che ciascuna di esse interseca altre otto rette distinte della superficie cubica; in totale vi sono quindi $3 + 8 \cdot 3 = 27$ rette. Senza addentrarsi nella dimostrazione, Fano enuncia le prime due proprietà peculiari della cubica irriducibile generale: essa non ha punti doppi; le 27 rette su di essa sono tutte distinte e sono date dalla sua intersezione completa con una superficie di grado 9. Proseguendo a illustrare le caratteristiche delle superfici del terz'ordine, Fano mostra poi che tra le 27 rette trovate si possono individuare dei gruppi formati da sei rette, all'interno dei quali almeno due rette non giacciono su uno stesso piano. Denotando le rette del primo di questi gruppi con $a_i, i = 1, \dots, 6$, esistono altre sei rette, ognuna della quali incontra cinque rette del primo gruppo, ma non la sesta: queste rette sono indicate con $b_i, i = 1, \dots, 6$, con la convenzione che la retta b_i non interseca la retta a_i. L'insieme di queste 12 rette costituisce ciò che i geometri tedeschi chiamano *Doppelsechs* ("bisestuple") e si può vedere che esistono in tutto 36 bisestuple. Ogni piano $a_i b_k$ $(i \neq k)$ contiene inoltre una terza retta delle 27 di partenza, indicata con c_{ik}. Ciascuna delle rette di questo tipo, 15 in tutto, appartiene anche al piano $a_k b_i$ e ne interseca 10 delle rimanenti. In questi passaggi, Fano introduce la notazione di Schläfli a_i, b_k, c_{ik} per le 27 rette della cubica, pur senza citare esplicitamente il contributo del matematico tedesco.[46]

Passa poi a ragionare sui piani passanti per una di queste 27 rette: ciascuno di essi interseca la superficie cubica in una conica ed è quindi un piano bitangente alla superficie.[47] Dopo aver introdotto la definizione, non del tutto accurata, di piano tritangente, Fano individua il numero esatto di tali piani: questo sarà dato dal prodotto 5×27 – siccome per ciascuna delle 27 rette ne passano altre 5 – diviso per tre, in quanto ciascun piano è contato tre volte. In totale vi saranno quindi 45 piani tritangenti. Dalla considerazione di due piani tritangenti non aventi nessuna delle 27 rette in comune, si perviene ai cosiddetti "triedri coniugati". Steiner (1856) aveva infatti introdotto il concetto di *Triederpaar*, non citato da Fano a Losanna, ossia uno dei 120 insiemi di 9 rette della cubica che formano due coppie di terne di piani tritangenti.[48] Ciascuna terna costituisce un triedro (*Trieder*) composto da piani tritangenti che si intersecano lungo una retta non appartenente alla cubica. Due triedri sono coniugati se si intersecano lungo le 9 rette in questione. Essi sono particolarmente rilevanti all'interno della teoria delle superfici cubiche perché individuano un fascio di superfici del terzo ordine contenente le 9 rette. A partire da tale fascio si può giungere, attraverso alcuni passaggi ben sintetizzati da Fano a Losanna, alla generazione di H.G. Grassmann (1855) delle superfici cubiche: si prova infatti che tre fasci collineari di piani generano una superficie cubica.[49] Come osservato da Fano, si tratta di una generalizzazione della generazione di una conica a partire da due fasci proiettivi di rette. Tuttavia, non tutte le superfici del terz'ordine ammettono una generazione di questo tipo: ad esempio C. Segre nel 1903 aveva individuato un controesempio, costituito dalla superficie di

[46] Cfr. L. SCHLÄFLI 1858, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface*, «Quart. Journ.» 2, p. 115.

[47] I due punti di tangenza sono infatti quelli in cui la retta di partenza interseca la conica.

[48] Modernamente, ciò equivale ad avere essenzialmente 120 rappresentazioni diverse per rappresentare la generica superficie cubica nella forma $L_1 L_2 L_3 + L_4 L_5 L_6 = 0$, dove ogni L_i è una forma lineare.

[49] In termini moderni, denotando con $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ tre sistemi lineari bidimensionali generali di piani in $\mathbb{P}^3$, si può scegliere un isomorfismo $\psi_i: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathcal{R}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e prendere in considerazione la mappa razionale $\Psi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ definita da $\Psi(x) = \psi_1(x) \cap \psi_2(x) \cap \psi_3(x)$. La sua immagine è una superficie cubica in $\mathbb{P}^3$.

equazione $x^2 + y^3 + x\varphi_2(x, y, z) = 0$, avente l'origine come punto doppio uniplanare e l'asse z come unica retta.[50] Inoltre, aggiunge Fano, esistono delle superfici reali che ammettono una generazione di Grassmann, ma non una generazione reale. Le superfici cubiche generabili con tale metodo godono però di una proprietà importante: sono infatti razionali in quanto possono essere messe in corrispondenza birazionale con $\mathbb{P}^2$ mediante le equazioni che compaiono nella costruzione di Grassmann.[51] Tale mappa birazionale consente di rappresentare la superficie cubica sul piano proiettivo: il pregio fondamentale di tale rappresentazione consiste nel poter ricondurre la ricerca delle curve sulla superficie a quella delle corrispondenti curve piane. Come illustrato a Losanna, tale mappa non è definita in sei punti della superficie cubica, da Fano denotati con $A_i, i = 1, \ldots 6$, e chiamati nel seguito della conferenza "punti fondamentali". Prima di avviarsi alle conclusioni, Fano studia una questione di realtà. Riprendendo l'ultima parte della memoria di Cremona, analizza il legame tra le 27 rette della superficie cubica e i punti fondamentali, individuando le seguenti possibilità:

- Le 27 rette di una superficie reale del terz'ordine sono tutte reali; in tal caso, anche i 6 punti fondamentali A_i saranno reali.
- Nel caso in cui i punti A_i non siano tutti reali, si avranno 1, 2 o 3 coppie di punti coniugati immaginari. Si presentano quindi tre sotto-casi.
    - Se c'è una sola coppia di punti immaginari, allora tra le 27 rette ve ne saranno 15 reali e 12 immaginarie, a 2 a 2 coniugate.
    - Nel caso in cui le coppie di punti coniugati siano 2, si trovano 7 rette reali e 10 coppie di rette immaginarie coniugate.
    - Infine, se i punti sono tutti immaginari a due a due coniugati, ci saranno solo 3 rette reali c_{12}, c_{34}, c_{56} e le rimanenti saranno immaginarie, coniugate a due a due.

L'ultima questione affrontata da Fano consiste nella prova che una superficie reale del terz'ordine non ammette sempre una generazione reale, ossia è rappresentabile mediante funzioni reali definite sul piano reale, e questo è legato alla nozione topologica di connessione della superficie. "In tutti i casi" – conclude però Fano – "su una superficie reale del terz'ordine priva di punti doppi, almeno tre delle 27 rette sono reali".[52] Rimane da considerare il caso di una superficie del terz'ordine con un punto doppio – che Fano identifica con l'origine delle coordinate O – la cui equazione sarà del tipo $f_2 + f_3 = 0$, dove f_2 e f_3 sono polinomi omogenei di secondo e terzo grado in x, y, z. Fano osserva che l'equazione $f_2 = 0$ rappresenta un cono di secondo grado avente O come vertice, che risulterà essere il cono tangente alla superficie nel punto doppio O. Inoltre, le rette $f_2 = f_3 = 0$ appartengono in generale alla superficie. Il punto O è chiamato punto conico nel caso in cui tale cono non sia degenere; in caso contrario si parla

---

[50] Cfr. C. SEGRE 1903, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie*, «Atti. R. Acc. Sci. Torino» 38, pp. 764-766

[51] Nella generazione considerata in BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 39*v*, i parametri λ, μ, ν corrispondono ai gruppi di tre piani omologhi dei tre fasci, ovvero ai punti di intersezione di questi piani, che possono anche essere interpretati come coordinate proiettive in un piano. Questo è quindi in corrispondenza birazionale con la superficie del terz'ordine iniziale, che risulta razionale.

[52] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 41*r*: "en tout cas, sur une surface réelle du 3ème ordre sans points doubles, trois au moins des 27 droites sont réelles".

di punto biplanare (quando il cono degenera in due piani distinti) o uniplanare.[53] Nel caso di una retta doppia d di una superficie rigata, tutti i suoi punti sono biplanari o uniplanari. A loro volta, questi possono essere di tipo diverso. Una superficie cubica non rigata può avere 2, 3 o 4 punti doppi.

Dopo aver accennato ad alcune possibilità che si presentano per le superfici cubiche, Fano termina la conferenza rimandando alla classificazione completa di Schläfli (1863) delle superficie del terz'ordine: in base ai diversi casi di punti doppi, Schläfli aveva individuato 23 superfici distinte, comprese due rigate, alcune delle quali danno luogo a diversi sotto-casi dal punto di vista delle questioni di realtà.

4.4. Le fonti sulle superfici del terz'ordine, tra Italia e Germania

La scelta del tema della terza conferenza al *Cercle*, oltre a rappresentare un collegamento con la precedente, dedicata alle superfici algebriche in generale, riflette l'intenzione di Fano di dar lustro a due vie d'indagine geometrica per lui fondamentali: quella tedesca di fine Ottocento, di matrice sintetica, e quella della Scuola italiana. La teoria delle superfici cubiche, dopo la sua nascita in Inghilterra ad opera di Cayley, Salmon e Sylvester, aveva raggiunto il suo culmine in Germania, con i contributi di Clebsch, Schläfli e Sturm, ed era stata perfezionata da due Maestri italiani: Cremona, vincitore del Premio Steiner nel 1866, e C. Segre.

Innanzitutto, Fano mostra una certa attenzione verso il pubblico, affermando che le superfici del terz'ordine costituiscono un argomento sì semplice, ma non banale e, soprattutto di un certo interesse. Per lui, in altri termini, sono ancora attuali le parole di A. Henderson che nel 1911 all'interno di un trattato sulle 27 rette della cubica generale, aveva affermato:

> Mentre è indubbio che la classificazione delle superfici cubiche sia completa, il numero di lavori su queste superfici […] fornisce un'abbondante dimostrazione del fatto che esse esercitano ancora parecchio del fascino che avevano all'epoca della scoperta delle ventisette rette sulla superficie cubica.[54]

Per motivare ulteriormente la scelta del tema della conversazione, Fano rimanda all'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, il celebre progetto editoriale cui egli stesso aveva partecipato attivamente, investendo notevoli energie. Quando, nel 1895, F. Meyer aveva assunto l'incarico di redigere il capitolo sulle superfici del terz'ordine, il saggio che inizialmente doveva occupare una ventina di pagine, era finito per occuparne 90! A Losanna, Fano non adduce ulteriori ragioni per giustificare l'interesse intrinseco della teoria delle cubiche ma, con ogni probabilità, egli condivideva il pensiero di C. Segre al riguardo:

> Le F_3 hanno avuto una notevole influenza sullo sviluppo della moderna Geometria algebrica. Si prestano molto bene ad illustrare i metodi di questa, in vari indirizzi: configurazioni, singolarità,

[53] Fano osserva anche che siccome una retta passante per O interseca la superficie in un solo punto diverso da O, allora la superficie è in corrispondenza biunivoca con il fascio di queste rette e con un piano qualunque non passante per O che può essere considerato sezione di tale fascio. Inoltre, le rette $f_2 = f_3 = 0$ appartengono in generale alla superficie cubica considerata.

[54] Cfr. A. HENDERSON 1911, *The twenty-seven lines upon the cubic surface*, Cambridge, CUP, p. 1: "While it is doubteless true that the classification of cubic surfaces is complete, the number of papers dealing with these surfaces which continue to appear from year to year furnish abundant proof of the fact that they still possess much the same fascination as they did in the days of their discovery of the twenty-seven lines upon the cubic surface".

quistioni di realtà e forma, generazioni geometriche, rappresentazioni sul piano, problemi geometrici vari.[55]

Non a caso, le questioni toccate da Fano nel corso della conferenza vanno a ricoprire tutti questi indirizzi. La superficie di Cayley, il pentaedro di Sylvester, la superficie diagonale di Clebsch, il *Doppelsechs* di Schläfli, i triedri coniugati rientrano nella categoria delle "configurazioni". Il problema delle singolarità torna a più riprese, con particolare attenzione alla questione della presenza di particolari punti doppi sulla cubica, quelli del tipo E_6 nella terminologia moderna. Alle "quistioni di realtà" è dedicata la parte della conferenza che segue la generazione di Grassmann della superficie cubica ("generazioni geometriche") e la sua rappresentabilità su $\mathbb{P}^2$ ("rappresentazioni sul piano"). Al di là dei contenuti, l'influenza esercitata da C. Segre è notevole anche per quanto riguarda la notazione adottata da Fano. I punti di contatto tra la conferenza di Losanna e la parte del corso di Geometria superiore del 1909-1910 di Segre dedicata alle superfici del terz'ordine sono molteplici. La costruzione delle 27 rette sulla cubica liscia irriducibile ripercorre una delle tre proposte da Segre agli studenti dell'ateneo torinese,[56] quella di stampo più geometrico. La notazione a_i, b_k, c_{ik} per le 27 rette è introdotta in modo del tutto analogo a quanto fatto da Segre.[57] Anche per quanto riguarda il metodo di Grassmann per generare le superfici del terz'ordine e la trattazione della classificazione di tali superfici, molti sono i punti in comune con le lezioni di Segre. A differenza di Fano, quest'ultimo si addentra però maggiormente nei dettagli, come è naturale in un corso di matematiche superiori: ad esempio, pone l'accento sul concetto di polo e polare[58] prima di affrontare il contributo di Grassmann e, nel delineare la classificazione, inserisce alcune considerazioni sui piani tritangenti.[59] Pur trattandosi di un argomento classico della geometria algebrica, è quantomeno singolare che Fano – a distanza di oltre trent'anni dal corso di Segre – affronti l'argomento in modo del tutto analogo a quello del Maestro.

Vi sono però altri due lavori che costituiscono uno sfondo ineludibile per la sua conferenza sulle superfici cubiche: il capitolo dell'EMW, citato in apertura, e la memoria di Cremona del 1868, contenente la prima sistematizzazione organica di questa teoria.[60] Da tale lavoro Fano non trae soltanto numerosi metodi e risultati ma anche la concatenazione e l'ordine degli argomenti, con rare eccezioni: una di esse è rappresentata dall'introduzione del concetto di triedri coniugati che Fano inserisce subito dopo l'analisi dei 45 piani tritangenti, mentre Cremona vi giunge solo verso la fine trattazione, all'inizio del decimo capitolo. Passando al retaggio dell'*Enzyklopädie*, peculiare è il fatto che Fano annoveri tra le questioni più interessanti relative alle superfici cubiche le due cui Meyer dedica i primi due punti della sua trattazione, attribuendo così all'esistenza delle 27 rette e al pentaedro di Sylvester un ruolo di particolare rilievo all'interno della costruzione della teoria. L'influenza dell'EWM su Fano emerge in più aspetti: da alcune scelte nella notazione, tra cui spicca quella utilizzata per il

[55] BSMT, *FSe*, Quad. 23, p. 3.

[56] *Ivi*, p. 31.

[57] *Ivi*, pp. 37-38.

[58] *Ivi*, pp. 42-44.

[59] *Ivi*, pp. 157-159.

[60] F. MEYER 1928, *Flächen dritter Ordnung*, in EMW 3-2-2a, Leipzig, Teubner, pp. 1437-1531; L. CREMONA 1868, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, «Jour. Crelle» 68, pp. 1-133.

fascio di rette passanti per una retta della cubica $x_4 = \lambda x_3$, ai diversi riferimenti a termini tedeschi (*Realitäts fragen*, *Doppelsechs*, …). La scelta di affrontare la questione delle 27 rette mette in luce anche una certa sensibilità di Fano verso le questioni cruciali all'interno dello sviluppo di una teoria. La scoperta delle 27 rette sulla superficie cubica generale può infatti essere considerata il primo risultato non banale sulle superfici algebriche di ordine superiore a due, al punto da segnare l'inizio della moderna geometria algebrica.[61]

Bisogna infine tener presente che Fano, durante la lunga attività di docenza a Torino, aveva già elaborato alcune riflessioni di carattere didattico sulle superfici del terz'ordine. Queste venivano infatti da lui solitamente introdotte all'interno di un corso speciale di Complementi di geometria proiettiva, destinato agli studenti di Matematica e Fisica del secondo anno, con l'obiettivo di

> dare ai giovani alcune nozioni che, pur uscendo in parte dal campo della geometria proiettiva tradizionale del 1° biennio universitario, devono tuttavia considerarsi comprese nell'ambito di quella coltura generale geometrica, che viene comunemente presupposta in corsi monografici di geometria superiore.[62]

Per Fano è quindi naturale, davanti al pubblico di Losanna, presentare le principali questioni che si incontrano nella teoria delle superfici di grado tre – per la quale "si hanno tutt'ora poche esposizioni di carattere didattico"[63] – con lo stesso taglio che aveva dato alle sue lezioni, riproponendo diversi cenni storici e osservazioni metodologiche che per anni aveva illustrato agli studenti torinesi. A Losanna Fano non ha vincoli dovuti alla "limitata preparazione dell'uditorio in campo algebrico", ma si trova di fronte a un pubblico variegato; l'intento è prettamente divulgativo, piuttosto che didattico, ma l'approccio espositivo è del tutto analogo. "Data la ristrettezza di tempo", Fano cerca di "dare e chiarire idee generali, anziché insistere su dettagli di dimostrazioni". C'è però un fattore che fa da denominatore comune a divulgazione e didattica, di cui Fano è ben consapevole: "interessare un certo numero di giovani, rispondendo così a uno dei principali intenti"[64] dell'insegnamento ma – potremmo aggiungere – anche della divulgazione.

4.5. La quarta conferenza: *Les surfaces du 4ème ordre, en particulier surfaces de Kummer et de Steiner*

A distanza di circa tre mesi dalla conferenza sulle superfici cubiche, il 13 maggio 1943 Fano passa ad analizzare le superfici del quarto ordine.[65] Tuttavia, come sottolinea anch'egli in apertura,

---

[61] Cfr. I. DOGLACHEV 2004, *Luigi Cremona and cubic surfaces*, arXiv:math/0408283, p. 1: "The discovery of 27 lines on a general cubic surface can be considered as the first non-trivial result on algebraic surfaces of order higher than 2. In fact, it can be considered as the beginning of modern algebraic geometry".

[62] G. FANO 1935c, *Complementi di geometria*, Torino, Gili, p. IX.

[63] *Ivi*, p. X.

[64] *Ibidem*.

[65] In questa sezione e nella successiva, saranno utilizzati i riferimenti alle carte manoscritte di Fano (BSMT, *FFa*, *Scritti. 1*) di cui si fornisce l'edizione critica completa nell'Appendice B.3, e non alla pubblicazione postuma curata da Andreotti.

> alla ricca collezione di ricerche e di proposizioni concernenti la teoria generale delle superficie cubiche fa tristo riscontro la totale assenza di nozioni intorno alle superficie generali di quarto ordine […]. Per converso molte notevoli classi di superficie di quarto ordine vennero studiate a fondo.[66]

Secondo Fano, emblematico in tal senso è il fatto che il 90% del saggio dell'EMW relativo sia dedicato all'analisi di superfici particolari. Prima di addentrarsi nella descrizione di queste ultime, Fano ricorda la definizione di classe di una superficie di ordine n. Questa rappresenta il numero di piani tangenti alla superficie passanti per una sua retta data ed è pari a $n(n-1)^2$. Ciò implica che una superficie generale del quarto ordine è di classe 36 ma, come sottolineato prontamente da Fano, la presenza di singolarità comporta una diminuzione della sua classe: in particolare, la presenza di un punto doppio isolato implica una diminuzione di due unità. Le superfici di grado quattro possono avere al più 16 punti doppi: in tal caso esse sono di classe 4 e appartengono alla famiglia delle superfici di Kummer, su cui Fano tornerà più avanti nell'esposizione.

Prima di dedicarsi all'analisi di alcune superfici particolari del quart'ordine, egli affronta una questione centrale all'interno dello studio di qualsiasi ente della geometria algebrica: la razionalità. A differenza di quanto accade per le superfici di grado due e tre, in generale le superfici del quart'ordine non sono razionali, come rilevato già da Nöther nel 1888. Tuttavia, il matematico tedesco aveva messo in luce l'esistenza di alcune condizioni che implicano la razionalità. Nello specifico, per essere razionale una superficie di grado quattro deve contenere una retta doppia, o un punto triplo, o alcuni punti doppi particolari che non possono però essere complanari. Queste tre possibilità vanno a costituire i tre nuclei principali attorno cui Fano organizza la propria esposizione.

Partendo dagli eventuali punti doppi isolati, Fano osserva che si può imporre a una superficie di grado quattro di passare per al più 7 punti arbitrari di questo tipo; se ve ne sono di più, essi assumono necessariamente una configurazione particolare. È questo il caso del simmetroide di Cayley, superficie del quart'ordine ottenuta come luogo degli zeri di un determinante di una matrice simmetrica 4×4 di forme lineari. La superficie generale di questo tipo ha 10 punti doppi isolati, determinati dall'annullarsi dei minori del terz'ordine della matrice di partenza. Il cono tangente alla superficie passante per uno di essi, si decompone in due coni di grado tre, passanti entrambi per 9 rette che congiungono tale punto agli altri punti doppi. Dopo aver descritto nel dettaglio tale configurazione, Fano introduce un caso particolare di simmetroide: si tratta della superficie hessiana di una superficie cubica $f(x) = 0$ priva di punti doppi, definita dall'equazione $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = 0$.

Tralasciando le altre superficie di ordine quattro aventi fino a 15 punti doppi, Fano torna alla superficie di Kummer osservando che su di essa "tutte le proprietà, tutte le caratteristiche si corrispondono per dualità".[67] Questo significa che, poiché vi sono 16 punti doppi, per dualità si hanno anche 16 piani doppi, ognuno dei quali contiene 6 punti doppi. Viceversa, ciascun punto doppio appartiene a 6 piani. Fano si addentra poi nei dettagli di tale struttura: il cono tangente alla superficie passante per uno dei punti doppi è composto da 6 piani doppi e contiene

[66] G. LORIA 1931, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia*, Padova, Cedam, 4 ed., p. 92.

[67] BSMT, *FFa*, *Scritti. 1*, c. 2*v*: "toutes les propriétés, tous les caractères se correspondent par dualité".

15 rette, date dall'intersezione dei 6 piani a due a due. Si ottiene così una configurazione molto particolare, composta da 16 punti e 16 piani (ciascuno dei quali appartenente a 6 elementi dell'altro tipo) e 120 rette (ciascuna passante per 2 dei 16 punti e intersezione di 2 dei 16 piani). Al di là dell'aspetto prettamente geometrico, la superficie di Kummer gode di tre proprietà importanti: è una superficie iperellittica; contiene solo curve di ordine pari; il rapporto anarmonico dei quattro punti di intersezione di questa superficie con una qualsiasi retta è uguale al rapporto anarmonico dei quattro piani tangenti della superficie passanti per la medesima retta.

Dopo aver illustrato tali proprietà, Fano introduce altre due superfici del quart'ordine strettamente legate a quella di Kummer. La prima è la superficie di Weddle, luogo dei vertici dei coni del second'ordine passanti per 6 punti generici dati e trasformazione birazionale della superficie di Kummer a meno di una trasformazione cremoniana dello spazio. La seconda rappresenta invece un caso particolare della superficie di Kummer: si tratta della superficie d'onda dei cristalli biassiali (o superficie di Fresnel), di cui Fano fornisce anche l'equazione esplicita, correlata al fenomeno fisico della rifrazione conica. Dal punto di vista geometrico, tale superficie può essere ottenuta a partire da un ellissoide tagliandolo con un piano passante per il centro e riportando sui due diametri perpendicolari al piano le lunghezze pari ai semidiametri della relativa sezione.

Passando alle superfici del quart'ordine contenenti una curva di punti doppi, Fano esclude la possibilità che essa sia di grado tre: in tal caso, la superficie corrispondente sarebbe una rigata. Rimangono quindi il caso di una superficie di grado quattro contenente una retta doppia, in generale di classe 20, ma che può arrivare ad essere di classe 4 se contiene 8 punti doppi isolati, e quello in cui la superficie contiene una conica doppia, in generale di classe 12, ma che può essere anch'essa di classe 4 nel caso in cui possegga 4 punti doppi isolati. All'interno di questa seconda categoria rientrano le ciclidi: si tratta di superfici caratterizzate dalla proprietà di avere come conica doppia il cerchio assoluto, già studiate da Darboux e T. Moutard.[68] Come evidenziato da Fano, all'interno della famiglia delle ciclidi rientra la cosiddetta "ciclide di Dupin" che gode della proprietà di avere dei cerchi come linee di curvatura. A sua volta, il toro è un caso particolare di ciclide di Dupin, le cui linee di curvatura sono i meridiani e i paralleli.

Le superfici quartiche aventi un punto triplo O costituiscono il terzo e ultimo aspetto toccato da Fano. La razionalità di tali superfici discende direttamente dall'esistenza di un punto siffatto: infatti, essa può essere rapportata biunivocamente al fascio di rette passanti per O e, di conseguenza, è in corrispondenza birazionale con un qualsiasi piano sezione del fascio che non contiene O. Per tale punto possono passare anche una, due o tre rette doppie. In quest'ultimo caso si ottiene una superficie particolare, per cui Fano nutre un certo interesse: la superficie di Steiner, che gode di alcune proprietà notevoli. È infatti caratterizzata dal fatto di essere intersecata da tutti i suoi piani tangenti secondo curve di ordine quattro, composte da due coniche. In particolare, è l'unica superficie del quart'ordine a contenere ∞^2 coniche e, come dimostrato da Picard, ad avere sezioni unicursali senza essere una rigata. Fano osserva ancora che esiste una rappresentazione analitica piuttosto semplice per la superficie di Steiner: mediante le equazioni parametriche $x_i = t_i^2, i = 1, \dots 4,$ la sua equazione cartesiana può essere scritta come

[68] Cfr. T. MOUTARD 1864, *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre*, «Nouv. Ann.» (2) 3, pp. 536-539. È qui approfondito lo studio delle ciclidi "anallagmatiche", ossia le superfici trasformate in se stesse da trasformazioni per raggi reciproci.

$$\sum_{i=1}^{4} \sqrt{x_i} = 0.$$

È inoltre di classe 3 e, come sinteticamente dimostrato nella chiusa della conferenza, può essere ottenuta come proiezione della superficie di Veronese di $\mathbb{P}^5$.

Fano termina quindi la conferenza soffermandosi sulla superficie di Steiner, da lui già analizzata nel dettaglio negli anni precedenti, molto probabilmente quando era ancora in Italia. Tra i suoi appunti, infatti, compare una carta manoscritta in italiano[69] contenente uno studio sistematico dei punti cuspidali di tale superficie, con i conti svolti esplicitamente.

4.6. Tra tradizione e innovazione: da Fano ad Andreotti

Come nel caso delle superfici cubiche, nel corso di tutta la trattazione Fano rimanda a una letteratura ampia, anche se ormai classica. Per quanto riguarda i lavori stranieri, sono citati quelli di Nöther relativi allo studio generale delle superfici del quart'ordine e della loro razionalità; Kummer, Klein e J. Plücker sulla superficie di Kummer; Picard e Humbert sulle superfici iperellittiche; A.J. Fresnel, W.R. Hamilton, S. Lloyd sulla superfice d'onda dei cristalli biassiali; C. Dupin, Darboux e Moutard sulle ciclidi; H. Schröter, Steiner, Weierstrass, Kronecker, Clebsch, Cayley e ancora Kummer a proposito della superficie di Steiner. Particolare rilievo è naturalmente dato ai contributi apportati dai geometri italiani, quali Cremona, Segre, Castelnuovo, Enriques, Severi, Bagnera e De Franchis. Le ricerche sulla teoria delle superfici iperellittiche ad opera degli ultimi due erano valse loro l'assegnazione del prestigioso Premio Bordin (1909), contribuendo così a rafforzare il primato della Scuola italiana di geometria a inizio Novecento. Un primato, questo, che i geometri italiani avevano sottratto ai colleghi tedeschi a partire dalla fine dell'Ottocento, come sottolinea Fano a Losanna, facendo riferimento al teorema di Kronecker-Castelnuovo per il quale una superficie di $\mathbb{P}^3$ contenente ∞^2 sezioni piane riducibili è una rigata o è una superficie di Steiner. Enunciato dal matematico tedesco a Roma nel 1886, questo risultato era stato dimostrato rigorosamente solo sei anni più tardi da Castelnuovo, con i metodi tipici della tradizione italiana.

Oltre ad introdurre diversi esempi concreti, durante l'esposizione Fano presta molta attenzione ad alcuni elementi che si collocano a pieno titolo all'interno del patrimonio della Scuola. Innanzitutto, si ritrova l'esigenza di estendere le definizioni dal campo delle curve a quello delle superfici. È quanto accade per la definizione di "tacnodo": dopo averla introdotta nel caso delle curve, come limite di due punti doppi infinitamente vicini – illustrandola anche con efficaci disegni esplicativi[70] – Fano allarga il concetto alle superfici. In secondo luogo, ricollegandosi ad alcune ricerche di C. Segre del 1883, mette in luce le potenzialità dell'approccio iperspaziale che permette di 'trasportare' le proprietà degli enti geometrici

---

[69] Cfr. BSMT, *FFa*, *Scritti. 2*. Cfr. anche BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Andreotti a A. Terracini, S. Pellegrino al Cassero (PT) 17.9.1953. "Un'ultima pagina del manoscritto contiene solo dei calcoli di Fano sopra la superficie di Steiner che non credo abbiano molto a che fare colla conferenza medesima; probabilmente si tratta di alcuni calcoli preparatori per studiare in dettaglio sull'equazione le proprietà della superficie, non penso si debba pubblicarla".

[70] Cfr. BSMT, *FFa, Scritti. 1*, c. 2*r*. Attraverso due disegni distinti Fano fornisce una visione dinamica del concetto di tacnodo.

immersi in uno spazio di dimensione superiore alle varietà ottenute dalla loro proiezione. Questo metodo si rivela efficace anche nel caso delle ciclidi, superfici di quarto grado contenenti una conica doppia:

> Queste superfici possono anche essere ottenute molto semplicemente come proiezioni di superfici del quart'ordine, di uno spazio a 4 dimensioni. Come accade sempre, le proprietà di queste ultime superfici sono più facili da stabilire rispetto a quelle delle loro proiezioni. L'intersezione di 2 quadriche di spazio quadridimensionale è precisamente una superficie del quart'ordine. Prendiamo come centro della proiezione un punto P appartenente a una delle due quadriche e non all'altra. Lo spazio tridimensionale tangente in P alla prima quadrica incontrerà questa in un cono del second'ordine, di cui P è il vertice. La seconda quadrica incontrerà il cono in una curva la cui proiezione sarà una doppia conica. Le F^4 aventi una conica doppia si possono ottenere tutte in questo modo.[71]

Anche durante la quarta conferenza di Losanna Fano non rinuncia a inserire qualche *excursus* storico, come quello relativo alla superficie romana di Steiner. Quest'ultimo, infatti, non aveva pubblicato nulla sull'argomento e, qualche mese dopo la sua morte, tale superficie era stata posta al centro di alcune comunicazioni tenute da Kummer, Weierstrass e Schröter all'Accademia di Berlino. Weierstrass aveva attribuito questa scoperta a Steiner, presentando una ricostruzione dei ragionamenti sintetici di quest'ultimo, sui quali avevano conversato in passato. Tale ricostruzione sarebbe poi stata avvalorata da alcuni appunti manoscritti, ritrovati dallo stesso Weierstrass all'atto di curare la pubblicazione delle *Gesammelte Werke* di Steiner.

Interessante è il fatto che, a differenza delle altre conferenze di Losanna, Fano inserisce in questo caso qualche collegamento con la fisica e con il mondo reale. La superficie di Fresnel costituisce un ottimo esempio di come enti astratti della geometria algebrica quali le superfici del quart'ordine abbiano in realtà una controparte in natura, permettendo così a Fano di sottolineare l'unitarietà della scienza di fronte al pubblico del *Cercle*. Un ulteriore elemento di originalità è costituito dalla struttura che Fano adotta per la propria esposizione: la trattazione delle superfici di quarto grado è infatti divisa in tre macro-casi, a seconda che esse posseggano particolari punti doppi, una curva doppia o un punto triplo. Pur essendo innovativo nella concatenazione e nell'ordine degli argomenti, dal punto di vista dei contenuti Fano si muove ancora una volta nel solco della tradizione. Lo testimoniano i numerosi echi alla voce dell'enciclopedia tedesca sulle superfici del quart'ordine, da un lato, e ai capitoli dedicati all'argomento all'interno dell'ultima edizione dell'opera di G. Loria *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (1931), dall'altro.[72]

---

[71] BSMT, *FFa*, *Scritti. 1*, cc. 4*r*-4*v*: "Ces surfaces peuvent aussi s'obtenir très simplement comme des projections de surfaces du 4ème ordre, de l'espace à 4 dimensions. Comme il arrive toujours, les propriétés de ces dernières surfaces sont plus simples à établir que celles de leurs projections. L'intersection de 2 quadriques de l'espace à 4 dimensions est justement une surface du 4ème ordre. Prenons comme centre de la projection un point P appartenant à l'une des deux quadriques et non à l'autre. L'espace à 3 dimensions tangent en P à la première quadrique rencontrera celle-ci en un cône du 2nd ordre, dont P est le sommet. La deuxième quadrique rencontrera le cône en une courbe dont la projection sera une conique double. Les F^4 ayant une conique double peuvent s'obtenir toutes par cette voie".

[72] Cfr. F. MEYER 1930, *Flächen vierter und höherer Ordnung*, in EMW 3-2-2a, Leipzig, Teubner, pp. 1572-1574, 1647-1662, 1680-1683, 1685-1741; LORIA 1931, *cit.*, pp. 89, 92, 96-99, 102-104.

Un ultimo aspetto del tutto peculiare di questa conferenza è che essa è l'unica ad essere stata pubblicata,[73] postuma, "come omaggio alla memoria del Prof. Gino Fano" da parte della "redazione dei Rendiconti del Seminario dell'Università e del Politecnico di Torino". Come specificato nell'introduzione,

> È da tener presente che il testo […] non era redatto per la stampa. Comunque esso viene riprodotto salvo varianti inessenziali. Le parti in parentesi quadra costituiscono integrazioni di punti non sviluppati nel manoscritto, e sono dovute al Prof. Aldo Andreotti. Ci è parsa non inutile la pubblicazione della conferenza, che sia pure in breve, dà con molta eleganza un'idea assai completa e panoramica degli argomenti trattati.[74]

A Torino la pubblicazione di questa conferenza fu affidata ad Andreotti (1924-1980),[75] successore di Fano sulla cattedra di Geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno.

A partire dall'ottobre del 1942, Andreotti si era formato presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, dove aveva seguito i corsi di L. Tonelli. Dopo l'occupazione nazista del 1943, era stato costretto a fuggire in Svizzera per evitare la deportazione nei campi di lavoro in Germania. Si era trasferito così a Losanna dove aveva frequentato i corsi all'Università, diventando allievo di Eckmann e De Rham. Anche se i verbali delle sedute del *Cercle Mathématique* non forniscono indicazioni sul pubblico che assistette alle conferenze di Fano, è altamente plausibile che Andreotti fosse tra gli uditori. Rientrato in Italia solo dopo la fine della guerra, Andreotti aveva completato il dottorato a Pisa nel 1947 con una tesi sulle rappresentazioni conformi. Dopo il conseguimento del titolo, si era trasferito a Roma dove aveva collaborato per tre anni con Severi, prima come ricercatore presso l'INDAM e poi come suo assistente. È in questo periodo che aveva sviluppato un forte interesse per le tematiche di ricerca tipiche della Scuola geometrica italiana. Nel 1950 aveva trascorso alcuni mesi di perfezionamento a Princeton,[76] entrando in contatto con i maggiori matematici dell'epoca come Lefschetz, Weil, Zariski, K.

[73] Il testo a stampa restituisce fedelmente i contenuti della conferenza di Fano, con poche integrazioni apportate da Andreotti e segnalate tra parentesi quadre. Non restituisce però la natura del manoscritto, con le numerose aggiunte, modifiche e ripensamenti di Fano e mancano i riferimenti puntuali e dettagliati delle opere citate da Fano, motivo per cui è parso necessario fornire un'edizione critica moderna condotta secondo i correnti criteri filologici in appendice a questa tesi.

[74] G. FANO / A. ANDREOTTI (ed.) 1953, *Les surfaces du quatriéme ordre*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 12, p. 301. Questa premessa viene inserita di comune accordo da Andreotti e Terracini. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini 1953, lett. 147: A. Andreotti a A. Terracini, S. Pellegrino al Cassero 17.9.1953. "Per la conferenza di Fano ho cercato di conservare il testo pressoché intatto. Vi dovremo aggiungere alcune note bibliografiche ed una nota spiegativa all'inizio che faccia presente come la conferenza, essendo indirizzata ad un pubblico molto vario, non poteva entrare in eccessivi dettagli; d'altra parte, l'eleganza e la rapidità della esposizione la renderanno probabilmente utile a chi voglia avere idee indicative e generali sul soggetto. Mi riferisco in particolare ai nostri studenti."

[75] Per approfondire la biografia scientifica di Andreotti cfr. F. GHERARDELLI 1981, *Aldo Andreotti*, «Boll. UMI» (5) 18, pp. 337-345; P. SALMON 1990, *Le origini dell'algebra commutativa in Italia*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 48, pp. 433-436; A. COLLINO 1999, *Aldo Andreotti*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 2, I docenti, Torino, DSSP, pp. 660-662. Si illustrano in questo paragrafo gli aspetti essenziali del rapporto tra Fano e Andreotti e gli elementi innovativi apportati da quest'ultimo durante gli anni dell'attività di docenza a Torino.

[76] In questo periodo incontra anche Fano che si trovava negli USA ospite dei figli. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Fano a A. Terracini, Washington 20.12.1950.

Kodaira, C.L. Siegel e D. Spencer. Qui aveva avuto modo di allargare i propri orizzonti metodologici, venendo a conoscenza dei più recenti sviluppi nei campi dell'algebra e della topologia algebrica. Rientrato in Italia, Andreotti aveva partecipato al concorso a cattedra di geometria presso l'Università di Torino, risultando vincitore. Nelle ultime settimane del 1951 si era spostato in questa città,[77] dove la sua traiettoria personale si intreccia ancora una volta con quella di Fano, scomparso poco meno di un anno dopo il suo trasferimento. Alla luce di questi elementi, è in un certo senso naturale che ad Andreotti sia stato affidato il compito di curare la pubblicazione della conferenza di Fano.[78] Nel settembre del 1953, mandando una prima bozza del testo a Terracini, Andreotti dichiara:

> Una parte sopra la superficie di Fresnel non sono stato capace di decifrarla; forse di ritorno a Torino potrò confrontare una citazione del testo nella speranza di ricostruire le osservazioni di Fano. Spero di poter fare il mio meglio per rendere il mio modesto omaggio all'illustre maestro cui sono legato da vincoli particolari di riconoscenza.[79]

Nonostante la profonda ammirazione per l'opera di Fano, Andreotti è ben consapevole dei limiti della geometria algebrica classica e dell'assoluta necessità di un rinnovamento. Così, appena ventisettenne, dà il via ad una "piccola rivoluzione nell'insegnamento" nel capoluogo piemontese, presentando agli studenti i nuovi argomenti dell'algebra moderna con "una maturità assolutamente sbalorditiva, derivante in buona parte da lunghi mesi trascorsi negli Stati Uniti".[80] Tra il 1951 e il 1956, anno del suo trasferimento a Pisa,[81] egli dà al corso di Geometria descrittiva destinato agli studenti del secondo anno l'assetto di un moderno corso di geometria algebrica, introducendo in apertura la teoria degli ideali e le principali nozioni di algebra commutativa.[82] Accanto a questo, Andreotti tiene per incarico dei corsi monografici di

[77] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Andreotti*: Ministero della PI a M. Allara, Roma 5.1.1952; M. Allara R. Deaglio e A. Andreotti, 11.1.1952; R. Deaglio a M. Allara, 20.1.1952; M. Allara al direttore dell'Ufficio provinciale del Tesoro, Torino 17.4.1952; M. Allara al Rettore dell'Università di Notre Dame (IN), Torino 2.12.1953; M. Allara all'Ufficio anagrafe del comune di Torino, Torino 6.6.1953. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Andreotti a A. Terracini, Roma 18.12.1951. Andreotti prende servizio come professore straordinario presso l'ateneo torinese il 15 dicembre 1951.

[78] La stima tra Fano e Andreotti è reciproca. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Fano a A. Terracini, Washington 28.4.1952. "Ti ringrazio pure delle varie notizie italiane che mi dai; e ho molto piacere abbiate potuto acquistare costì con Andreotti un ottimo elemento, che sarà in sostanza il mio successore."

[79] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Andreotti a A. Terracini, S. Pellegrino al Cassero (PT) 17.9.1953.

[80] SALMON 1996, *cit.*, p. 232.

[81] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Andreotti*: Ministero della PI a M. Allara, Roma 9.3.1956. Andreotti è trasferito sulla medesima cattedra presso la facoltà di Scienze MFN dell'Università di Pisa dal 1.11.1956.

[82] Cfr. ASUT, Registri delle lezioni di Geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno di A. Andreotti, a.a. 1951-52, 1952-53, 1953-54, 1954-55, 1955-56. In particolare, durante il suo ultimo anno di docenza a Torino, Andreotti dedica le prime 16 lezioni del corso ad un'accurata introduzione delle nozioni di gruppo, corpo, anello e ideale, del teorema della base e della teoria della divisibilità per polinomi di una variabile, concludendo con il teorema dell'unicità della scomposizione di tali polinomi in fattori irriducibili. Una parte del programma reca il titolo provocatorio "La geometria descrittiva non è geometria". Su questo aspetto cfr. SALMON 1996, *cit.*, p. 232: "Era inoltre assurdo continuare ad insegnare nel primo biennio di matematica la geometria descrittiva che veniva da lui sostituita con vari argomenti di algebra: ideali, polinomi, risultante (il suggeritore implicito della sostituzione, secondo la presentazione del corso fatta da Andreotti il primo giorno di lezione, era Klein: la geometria descrittiva non presentava proprietà invarianti rispetto a nessun gruppo di trasformazioni, dunque non era una geometria ed andava pertanto bandita dall'insegnamento!)".

Matematiche superiori, durante i quali spazia tra temi di grande modernità, "visti con consapevole preveggenza come strumenti fondamentali dei progressi futuri della geometria algebrica".[83] Vincitore del premio annuale dell'Académie Royale de Belgique nel 1952, durante il triennio in cui è professore straordinario a Torino tiene 23 lezioni sulla teoria di Galois (a.a. 1951-52), un corso sugli integrali abeliani e le superfici di Riemann (a.a. 1952-53) e uno sulla geometria sopra una curva algebrica (a.a. 1953-54)[84] da un punto di vista moderno e ormai lontano da quello di Fano, del quale ha da poco ultimato l'edizione della conferenza di Losanna. L'"elevata capacità didattica" di Andreotti che si concretizza in un insegnamento "fecondo di nuovi indirizzi" e i suoi meriti scientifici gli valgono la nomina ad ordinario nel dicembre del 1954.[85] In quello stesso anno, dedica il corso di Matematiche superiori ad argomenti scelti di geometria differenziale, volgendo poi l'attenzione ai fondamenti della topologia algebrica nel 1955-56, ultimo anno di permanenza a Torino.[86] Vivo è il suo desiderio di far penetrare all'interno dell'ambiente universitario torinese le nuove tendenze di ricerca internazionali, come emerge da un'esplicita richiesta a Terracini: "Non sarà possibile sentire nel prossimo inverno qualche conferenza a Torino di Hodge, Eckmann o De Rham? Ma forse sono un mistico, perché costa troppo".[87]

La figura di Andreotti segna così il passaggio all'interno dell'ateneo torinese dalla geometria algebrica classica, ben rappresentata dall'attività di C. Segre prima e di Fano poi, alla geometria algebrica moderna.

4.7. Tra ricerca e divulgazione: le trasformazioni di contatto birazionali nel piano

La quinta ed ultima conferenza tenuta da Fano al *Cercle* il 10 febbraio 1944 è dedicata alle trasformazioni di contatto birazionali nel piano.[88] La scelta del tema è particolarmente significativa sotto un duplice punto di vista: da un lato, è la prima volta che Fano presenta in questa sede alcuni suoi contributi personali; dall'altro, testimonia che egli a Losanna non interrompe del tutto l'attività di ricerca.

Dopo aver citato i lavori di Lie che hanno aperto la via agli studi sulle trasformazioni di contatto birazionali nel piano, Fano definisce il concetto di "figura fondamentale" nel piano come l'insieme di un punto e di una retta passante per quel punto. Se si considera la retta limitatamente all'intorno del punto, tale figura è detta "elemento lineare" (o, semplicemente, "elemento"). Analizzando questo concetto dal punto di vista analitico, si possono introdurre tre

---

[83] COLLINO 1999, *cit.*, p. 662.

[84] Cfr. ASUT, Registri delle lezioni di Matematiche superiori di A. Andreotti, a.a. 1951-52, 1952-53, 1953-54.

[85] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Andreotti*, estratto del Consiglio di Facoltà del 17.12.1954.

[86] Cfr. ASUT, Registri delle lezioni di Matematiche superiori di A. Andreotti, a.a. 1954-55, 1955-56. Il corso di geometria differenziale consta di 52 lezioni. Quello successivo è composto da 26 lezioni sugli spazi topologici, con particolare attenzione ai concetti di omotopia, omologia e partizione dell'unità, e si chiude con lemmi di De Rham e di Lebesgue.

[87] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Andreotti a A. Terracini, S. Pellegrino al Cassero (PT) 17.9.1953.

[88] Ricordiamo che, in termini moderni, denotando con $\mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ il proiettivizzato del fibrato cotangente di $\mathbb{P}^2$, una trasformazione birazionale di contatto del piano è un automorfismo birazionale a tale che $p \cdot a = b \cdot p$, dove $p\colon \mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ è la proiezione naturale e $b \in Bir(\mathbb{P}^2)$.

coordinate: le coordinate cartesiane del punto (x, y) e il coefficiente angolare $p = \frac{dy}{dx}$ della retta considerata.

Fano osserva poi che un sistema ∞^1 di elementi può dar luogo, in generale, sia a una curva – definita come il luogo dei punti di coordinate (x, y) di tali elementi lineari – sia a un inviluppo di rette e, solitamente, si tratta di luoghi distinti. Questo sistema di elementi è detto "unione" (dal tedesco *Verein*) quando la curva e l'inviluppo delle rette coincidono, ovvero si tratta di un sistema ∞^1 di elementi di una curva, ciascuno dei quali è costituito da un punto della curva e dalla retta in esso tangente. Questa definizione include il caso degli elementi di una retta, come esempio di elementi lineari a punto variabile e retta fissa. Come sottolinea Fano, il concetto di unione è particolarmente importante in quanto accorpa le due nozioni, solitamente separate, di punto e retta. Dal punto di vista analitico, $dy - pdx = 0$ rappresenta la condizione che devono soddisfare gli elementi di un'unione. Ma cosa accade dal punto di vista geometrico? Fano osserva che due elementi infinitamente vicini di un'unione sono tali che il punto dell'uno appartiene alla retta dell'altro, a meno di un infinitesimo di ordine superiore. In tal caso, si dice che i due elementi sono "in posizione unita". Questa osservazione gli consente di fornire una seconda definizione di unione, di taglio più geometrico, come "il sistema ∞^1 di elementi in cui ciascuno è in posizione unita con i suoi infiniti punti".[89]

A questo stadio, Fano ha tutti gli elementi necessari per introdurre la definizione di trasformazione di contatto nel piano: si tratta di una trasformazione dei tre elementi x, y, p tale che a unioni corrispondano ancora unioni o, equivalentemente, elementi in posizione unita siano mandati in elementi ancora in posizione unita. Dopo aver esplicitato cosa accade dal punto di vista analitico, Fano introduce i concetti di trasformazione puntuale nel piano e di trasformazione puntuale estesa che afferma essere due casi particolari delle trasformazioni di contatto. Definisce poi una trasformazione birazionale di contatto come una trasformazione del tipo succitato, algebrica e biunivoca, a meno di eventuali elementi eccezionali sui quali la corrispondenza è indeterminata. Tali trasformazioni si possono estendere a tutto il piano. Anche in questo caso, Fano non rinuncia a fornire alcuni esempi come le trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato, e i loro prodotti. Un caso particolare di questi prodotti è costituito dalle "trasformazioni per polari reciproche" (o reciprocità piane) che mandano gli elementi punto-retta in elementi retta-punto.

Prima di proseguire, Fano fornisce ancora alcune coordinate temporali: ricorda che le trasformazioni di contatto birazionali erano state considerate da L. Autonne in due memorie del 1887-88, prima che egli stesso le prendesse in esame a partire dal 1925. Dopo aver citato i propri lavori, Fano afferma di aver ripreso recentemente a fare ricerca su questo tema[90] e illustra al pubblico del *Cercle* le due questioni che, secondo lui, meritano di essere considerate più attentamente. La prima consiste nel caratterizzare i sistemi ∞^2 di curve che corrispondono, sotto una trasformazione di contatto birazionale, ai punti del piano o alle rette. La seconda questione, più difficile da dirimere, è legata alla necessità di determinare le operazioni più semplici attraverso le quali è possibile ottenere, come prodotti, la totalità delle trasformazioni birazionali di contatto del piano. Riguardo a questo ultimo punto, Fano svela agli uditori quale

[89] BSMT, *FFa*, *Scritti. 3*, c. 1*r*: "une union est aussi un système ∞^1 d'éléments donc chacun est en position unie avec son infini points".

[90] Cfr. BSMT, *FFa*, *Scritti. 3*, c. 2*r*: "dans ces derniers mois j'ai repris mes recherches sur ce sujet".

era stata la sua idea di partenza: avrebbe voluto mostrare che ogni trasformazione di questo tipo si può ottenere mediante il prodotto alternato di una trasformazione cremoniana del piano rigato e di una del piano punteggiato, ma si era presto accorto che ciò non era possibile.

Il prosieguo della conferenza è articolato attorno al primo di questi due problemi fondamentali, riguardo al quale Fano ripropone alcune parti delle sue ricerche precedenti ma fornisce anche nuovi spunti di indagine. Dal punto di vista metodologico, Fano sottolinea che durante i suoi studi ha cercato di mantenere il più possibile l'analogia con le trasformazioni cremoniane, seguendo la via tracciata da Cremona per la determinazione delle reti di curve corrispondenti alle rette del piano mediante una trasformazione birazionale. Illustra quindi il concetto di rete omaoloidica[91] di curve, sottolineando che come due rette del piano si intersecano in un unico punto lo stesso dovrebbe accadere per le curve loro immagini ottenute mediante la trasformazione. Se tali curve hanno grado $n \geq 2$, questo non accade: si hanno infatti dei punti multipli, possibilità che Fano illustra nel dettaglio nel caso delle trasformazioni quadratiche.[92] Tuttavia, afferma Fano, è possibile trascurare i punti eccezionali, ovvero i punti in comune alle curve della rete, in cui la corrispondenza è indeterminata.[93]

Per muoversi all'interno di un quadro di analogia, è necessario introdurre per le trasformazioni di contatto birazionali un concetto analogo a quello di rete omaloidica. Per fare ciò, Fano osserva che le curve (o unioni) corrispondenti ai punti saranno anch'esse razionali, siccome dovranno corrispondere agli ∞^2 elementi di uno stesso punto, e il sistema ∞^2 stesso di queste curve è razionale. I sistemi di questo tipo sono chiamati da Fano sistemi omaloidici e sono caratterizzati da due proprietà fondamentali.

a) Ogni curva del sistema deve essere completamente determinata da un elemento, ossia da un punto e dalla tangente in quel punto.[94]
b) Ogni curva del sistema deve avere un solo elemento variabile in posizione unita con ciascuno degli ∞^2 elementi infinitamente vicini.[95]

Fano considera dunque le curve piane razionali di ordine n e di classe v, che dipendono da $n + v + 1$ parametri, e osserva che per ottenere un sistema ∞^2 bisogna dare ancora $n + v - 1$ condizioni. Per un sistema omaloidico, esse derivano dal fatto che le curve del sistema devono

[91] Cfr. *ivi*, c. 2*v*. A partire da una trasformazione rappresentata in coordinate omogenee dalle equazioni $y_1 = Y_1(x_1, x_2, x_3), y_2 = Y_2(x_1, x_2, x_3), y_3 = Y_3(x_1, x_2, x_3)$, dove le Y_1, Y_2, Y_3 sono delle funzioni razionali, si possono dedurre le espressioni di x_1, x_2, x_3 come funzioni razionali delle y_1, y_2, y_3. Una rete di curve del tipo $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = 0$, con λ_i coefficienti arbitrari, è detta rete omaloidica.

[92] Cfr. *ibidem*. Fano analizza dettagliatamente del caso $n = 2$. Passando a considerare le curve di grado $n > 2$, egli afferma che anch'esse avranno dei punti fissi (necessariamente punti doppi o con molteplicità maggiore), senza però mostrarlo esplicitamente. Alle rette dovranno corrispondere curve razionali.

[93] Cfr. *ibidem*: "mais on fait abstraction des points communs à toutes les courbes (1) qui sont des points exceptionnels, dont la correspondance est indéterminée".

[94] Bisogna tener presente la differenza tra reti omaloidiche (o cremoniane) e sistemi omaloidici: in una rete omaloidica, ciascuna curva è determinata da due suoi punti e quindi, in particolare, anche da un punto e dalla tangente in questo punto. Nei sistemi omaloidici per due punti dati passano diverse curve; tuttavia, per due punti infinitamente vicini ne passa una sola.

[95] Ciò significa che si ha una sola intersezione variabile e quindi, per dualità, un'unica tangente comune variabile, mentre tutte le altre sono fisse.

risultare tangenti a unioni date, in $n + v - 1$ elementi variabili.[96] Le unioni fisse, alle quali le curve di un sistema omaloidico devono essere tangenti, non possono essere date arbitrariamente. Ma – afferma Fano – non è facile individuare ed esplicitare in generale tali condizioni. Per questo motivo, durante la conferenza egli sceglie di presentare un esempio particolare: la corrispondenza tramite una trasformazione birazionale di contatto del piano tra il sistema omaloidico dei punti del piano (per cui $v = 1, n = 0$) e quello delle rette ($n = 1$, $v = 0$). Naturalmente, una trasformazione di questo tipo deve mandare sistemi omaloidici in sistemi omaloidici. Tale trasformazione può essere individuata considerando nei due piani in corrispondenza due sistemi omaloidici arbitrari (uno dei quali può sempre supporsi essere il sistema dei punti o delle rette) e dando una trasformazione birazionale arbitraria tra i due sistemi, 'visti' come enti razionali di dimensione due.[97] Pur senza giustificarla, Fano inserisce un'osservazione interessante: i due piani posti in corrispondenza tramite una trasformazione di questo tipo possono anche essere 'visti' come sistemi ∞^3 di elementi del piano. Tali sistemi di dimensione tre possono essere a loro volta rappresentati birazionalmente dai punti dello spazio a tre dimensioni, oppure da un'altra varietà razionale tridimensionale. Così facendo, alle unioni del piano corrisponderanno curve nello spazio, ai sistemi omaloidici delle congruenze di curve del primo ordine e alle unioni di contatto dei sistemi omaloidici, le direttrici delle congruenze. Come sottolinea Fano, "tali rappresentazioni possono essere utili nelle ricerche sui sistemi omaloidici del piano".[98]

Una rappresentazione birazionale degli elementi lineari del piano sui punti dello spazio a tre dimensioni era già stata fornita da Lie, senza però comprenderne realmente l'importanza, a detta di Fano. Denotando con x, y, z le coordinate cartesiane nello spazio e con ξ, η, ρ le coordinate di un elemento del piano, si può ottenere tale rappresentazione ponendo:

$$x = \xi \qquad y = \frac{1}{2}\rho \qquad z = \eta - \frac{1}{2}\rho\xi.$$

Sostituendo nell'equazione caratterizzante la posizione unica $d\eta - \rho d\xi = 0$ le relazioni appena introdotte, si ottiene l'equazione di Pfaff $dz + xdy - ydx = 0$. Le trasformazioni di contatto birazionali del piano hanno come immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio che lasciano invariata questa equazione pfaffiana. Alle curve integrali di tale equazione, corrispondono nello spazio tridimensionale le unioni nel piano; in particolare, si tratta di curve le cui tangenti a uno stesso punto si trovano nel medesimo piano. Tra queste, vi sono ∞^3 rette che formano un complesso lineare; le curve le cui rette tangenti appartengono a tale complesso sono dette "curve del complesso" e godono di proprietà "ben conosciute, semplici e allo stesso

---

[96] Fano specifica che le curve di tale sistema possono anche essere tangenti a una stessa curva in più punti e, nel caso in cui ci siano k contatti, il punto in questione risulta essere un punto fisso di molteplicità k.

[97] Fano considera quindi due curve φ e φ' corrispondenti: per ogni elemento di φ avremo una sola curva φ_0 del sistema infinitamente vicina a φ, quindi ci sarà un elemento, e, in posizione unita con un altro. Di conseguenza, sarà univocamente determinata la curva corrispondente φ_0': questa avrà un solo elemento in posizione unita con un elemento della curva φ' che chiameremo e'. Fano può allora concludere che la corrispondenza tra questi due piani, 'visti' come sistemi ∞^3 di elementi, risulta determinata.

[98] BSMT, *FFa*, *Scritti. 3*, c. 4*r*: " Ces représentations peuvent être utiles dans les recherches sur les systèmes homaloïdes du plan".

tempo interessanti”,[99] già prese in considerazione da Picard.[100] Mediante tale corrispondenza, ai sistemi omaloidici del piano formati da curve di ordine n e classe ν corrispondono delle congruenze del prim'ordine di curve sghembe di ordine $n+\nu$ appartenenti a uno stesso complesso lineare; alle unioni tangenti alle curve del sistema omaloidico, le curve direttrici della congruenza. Tale corrispondenza birazionale tra il sistema degli elementi del piano e i punti dello spazio tridimensionale presenta però ancora degli elementi eccezionali, nei quali la corrispondenza è indeterminata. Questo significa che i due sistemi ∞^3 considerati sono differenti dal punto di vista topologico e, sottolinea Fano, ciò può complicare la ricerca delle congruenze di curve nel complesso.

“Ma esiste anche una varietà a tre dimensioni, abbastanza semplice, che può essere messa in corrispondenza con il sistema degli elementi del piano proiettivo, birazionalmente e senza eccezioni”.[101] Si tratta di un elemento innovativo, fino a questo momento non utilizzato per lo studio delle trasformazioni birazionali di contatto del piano. Per introdurlo di fronte ai matematici di Losanna, i primi con i quali condivide questa nuova idea, Fano considera due piani, aventi come coordinate proiettive omogenee, x_1, x_2, x_3 e u_1, u_2, u_3 rispettivamente. I loro nove prodotti $X_{ik} = x_i u_k$, dipendenti da quattro parametri, possono essere interpretati come coordinate omogenee di $\mathbb{P}^8$. Al variare dei parametri si ottiene una varietà algebrica particolare di dimensione quattro: la varietà di Segre M_4^6. Su di essa esistono due sistemi ∞^2 di piani, tali che due piani appartenenti allo stesso sistema non si intersecano, mentre due piani appartenenti a due sistemi diversi hanno sempre un punto in comune.[102] Se però si considerano le x_i e le u_k non come coordinate dei punti di due piani diversi, bensì come coordinate di un punto e di una retta dello stesso piano, allora M_4^6 rappresenta l'insieme degli elementi lineari (ovvero punto e rette dello stesso piano). Nel caso delle trasformazioni di contatto del piano, tali elementi sono costituiti da un punto e da una retta passante per esso, per cui dovranno soddisfare l'equazione:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

o, equivalentemente,

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0.$$

Gli elementi punto-retta cercati saranno pertanto rappresentati senza eccezioni dai punti della varietà $M_3^6 \subset \mathbb{P}^7$, sezione iperpiana della varietà di Segre M_4^6. Fano mette poi in relazione le due rappresentazioni degli elementi lineari del piano illustrate, quella di Lie su $\mathbb{P}^3$ e quella da lui ‘scoperta’ sulla threefold M_3^6: proiettando in modo opportuno la M_3^6 su $\mathbb{P}^3$ si ottiene la rappresentazione di Lie. Fano dedica la chiusura della conferenza ad approfondire alcuni aspetti della sua costruzione, probabilmente quelli cui si è dedicato durante gli ultimi mesi in relazione alle trasformazioni birazionali di contatto nel piano. In particolare, osserva che tramite tale

[99] *Ibidem*: “des propriétés bien connues, simples, et aux mêmes temps intéressants”.

[100] Fano osserva poi che non solo le rette tangenti a tali curve appartengono al complesso, ma anche il piano osculatore in tutti i punti a una di queste curve, ovvero il piano delle ∞^2 rette del complesso che passano per questo punto. Siccome piano e punto si corrispondono nello spazio mediante una polarità, la polarità nulla mette in relazione le curve auto-reciproche, per le quali ogni singolarità è auto-reciproca.

[101] *Ibidem*: “Mais il existe aussi une V à 3 dimensions, assez simple, peuvent être rapportée au système des éléments d'un plan projectif, birationnellement sans exceptions”.

[102] Infatti alle coppie formate da un punto fisso di uno dei due piani e da un punto variabile dell'altro corrispondono su M_4^6 i punti di un piano.

costruzione alle unioni del piano corrispondono su M_3^6 delle curve tangenti in uno stesso punto e complanari (dette "curve principali"); a un sistema omaloidico di curve di ordine n e classe ν, una congruenza del prim'ordine – da Fano denotata con Ω – di curve razionali di ordine $n+\nu$ avente delle diretrici che si intersecano in $n+\nu-1$ punti in tutto; ai punti e alle rette del piano, due congruenze di rette, sezioni iperpiane della varietà di Segre.

L'ultima definizione introdotta durante la conferenza è quella di congruenze coniugate: si tratta di due congruenze tali che esiste un'unica curva di ciascuna di esse che intersechi due curve date dell'altra. Fano mostra l'importanza di tale nozione in relazione alle direttrici delle congruenze. Due congruenze coniugate Ω, Ω' non composte da rette hanno sempre un certo numero di direttrici in comune e possono presentarsi due sotto-casi: o la congruenza Ω non ha alcuna direttrice e Ω' ha come direttrici un certo numero di curve della prima, oppure Ω e Ω' sono dello stesso ordine $n+\nu$ e hanno un fascio ∞^1 di curve in comune. In tal caso, ciascuna di esse ha una sola direttrice in più rispetto alle direttrici in comune che interseca le curve della congruenza in un solo punto. Fano aggiunge poi che alle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e rigato corrispondono su M_3^6 delle trasformazioni principali, che trasformano in se stessa una delle due congruenze di rette. Conclude infine affermando che nel primo sotto-caso considerato le congruenze sono in corrispondenza birazionale con i punti del piano, mentre nel secondo ai punti di un cono del second'ordine.

4.8. Dal 1928 al 1947: evoluzione di un percorso di ricerca

Le minute della conferenza di Losanna sulle trasformazioni birazionali di contatto del piano forniscono una collocazione temporale ben precisa (il 1925) all'interesse di Fano per questo tema. I frutti degli studi in questa direzione sono esposti pubblicamente da Fano per la prima volta durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna, nella sessione pomeridiana del 5 settembre 1928, presieduta da Godeaux. Qui ampio spazio è dedicato alle trasformazioni di Cremona, con le comunicazioni di Fubini, Snyder, A. Emch e B. Bydžovský accanto a quella di Fano che cattura specialmente l'interesse di Severi.[103] La sessione vede una collaborazione tra i geometri differenziali e quelli algebrici, e la comunicazione di Fano ben racchiude questo spirito. Il punto di partenza è infatti costituito da "una creazione geniale di S. Lie" che ha studiato le trasformazioni di contatto birazionali del piano

> esclusivamente, o quasi, dal punto di vista differenziale, cioè nell'ipotesi che le funzioni che vi compaiono siano funzioni qualsiasi, soggette soltanto ad avere comportamento regolare nell'intorno di un punto generico della regione considerata.[104]

L'idea di Fano, che caratterizzerà tutta la sua produzione in questo ambito, è quella di affrontare questo tipo di studio dal punto di vista della geometria algebrica di indirizzo

---

[103] Cfr. la relazione di Godeaux della sezione II-A in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 1, Bologna, Zanichelli, p. 102: "A propos de la communication de M. Fano, M. Severi a indiqué la liaison entre quelques-uns des points rencontrés par l'auteur et des recherches inédites qu'il a faites antérieurement".

[104] G. FANO 1931a, Trasformazioni di contatto birazionali del piano, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, p. 35.

italiano.[105] A Bologna Fano presenta così i principali aspetti delle trasformazioni di contatto del piano, a partire dalle definizioni di elemento lineare, unione, trasformazione di contatto, rete e sistema omaloidico. Numerosi sono i punti di contatto tra la comunicazione tenuta a Bologna e la prima parte della conferenza di Losanna: oltre alle definizioni, Fano riprende la concatenazione degli argomenti, introducendo la rappresentazione degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato, la questione di ottenere le trasformazioni cremoniane dello spazio relative a un dato complesso lineare come prodotto di alcune trasformazioni particolari tra esse (problema equivalente al secondo punto della conferenza di Losanna), e le congruenze coniugate. L'ultimo aspetto affrontato al Congresso Internazionale dei Matematici riguarda una trasformazione birazionale non proiettiva particolarmente semplice di un dato complesso lineare, ma si tratta di un esempio che Fano non riproporrà più in futuro. È, questa, una particolare trasformazione cubica

> involutoria in cui si corrispondono in doppio modo le coppie di punti «coniugati» rispetto a una cubica sghemba γ^3, ossia appartenenti a una stessa corda di questa curva e coniugati armonici rispetto ai 2 punti comuni alla cubica e a questa corda.[106]

Fano mostra che il sistema degli elementi punto-piano del complesso lineare definito dalla cubica γ^3 è mandato in se stesso tramite tale trasformazione. Il testo della comunicazione di Bologna sarà dato alle stampe solo nel 1931, ma a distanza di nemmeno due mesi dalla conclusione del Congresso Fano sottopone tre note sull'argomento ai «Rendiconti» lincei.[107] Da una parte, esse riprendono e sviluppano i punti principali toccati durante la conferenza di Bologna; dall'altra, costituiranno il punto di partenza per gli studi successivi sulle trasformazioni birazionali di contatto nel piano esposti a Losanna. A differenza di quanto illustrato a Bologna, nella prima nota lincea Fano dichiara esplicitamente il proprio obiettivo di ricerca in questi termini:

> mi propongo di porre su base geometrica il problema delle trasformazioni birazionali di contatto del piano, e di mostrare come questo problema, per mezzo di una notevole rappresentazione dovuta pure a S. Lie, si muti in un problema interessante di trasformazioni cremoniane dello spazio a tre dimensioni.[108]

Sottolinea quindi il desiderio, ribadito poi a Losanna, di indagare questi oggetti dal punto di vista geometrico tipico della Scuola italiana. Questo primo lavoro, che si conclude con la necessità di imporre $n + \nu - 1$ condizioni alle curve di un sistema omaloidico, è sovrapponibile quasi integralmente alla prima parte della conferenza di Losanna. Il primo elemento di differenza è rappresentato dal fatto che Fano non utilizza il termine "sistema omaloidico", assegnando a tale concetto il nome di "sistema Ω". Il secondo è dato dall'introduzione della

[105] Cfr. *ibidem*: "Esse possono anche studiarsi nel campo algebrico e nel campo birazionale, nel quale non sono state però finora molto approfondite".

[106] *Ivi*, p. 42.

[107] G. FANO 1928a, *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 445-451; ID. 1928b, *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 529-534; ID. 1928c, *Congruenze Ω_0 di curve razionali e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 623-627.

[108] FANO 1928a, *cit.*, pp. 445-446.

definizione di gruppo caratteristico principale di una curva del sistema Ω, ossia l'insieme dei punti comuni a questa curva e a tutte quelle ad essa infinitamente vicine, che Fano dà nella prima nota lincea e che si perderà invece nei lavori successivi. La successiva nota, del 1928, è interamente dedicata alla rappresentazione di Lie degli elementi lineari del piano sullo spazio punteggiato, a partire dalla relazione tra le coordinate (ξ, η, ρ) di un elemento lineare nel piano e quelle cartesiane (x, y, z) di $\mathbb{P}^3$. Pur presentando naturalmente i risultati in minor dettaglio, a Losanna Fano non apporta modifiche essenziali alla trattazione, né dal punto di vista della notazione né da quello dei contenuti. Nel terzo e ultimo scritto apparso sui «Rendiconti» Fano si dedica alla seconda questione 'importante', poi introdotta anche a Losanna, ossia quella di determinare se le trasformazioni birazionali del piano si possano tutte ottenere come prodotti di trasformazioni elementari già note. Per inquadrare il problema, Fano introduce le congruenze Ω_0 di curve razionali appartenenti al complesso lineare apparso nella nota precedente. Tuttavia, ciò non basta per risolvere la questione. Infatti

> Combinando tra loro trasformazioni di contatto birazionali del piano dei tipi elementari indicati, nascono solamente curve fondamentali razionali. Affinché pertanto la questione posta potesse ricevere risposta affermativa, sarebbe necessario che ogni trasformazione cremoniana di S_3 inerente a un complesso lineare avesse soltanto curve fondamentali razionali. Questo non avviene per le trasformazioni cremoniane qualsiasi di S_3; e non si vede *a priori* una ragione di diversa conclusione per le trasformazioni del piano inerenti a un dato complesso lineare.[109]

Nell'ultima sezione della nota, Fano introduce le due ulteriori nozioni di congruenze coniugate e di trasformazioni elementari, che non saranno comunque sufficienti a risolvere il problema, e su cui egli torna a più riprese negli anni Trenta, senza però pubblicare nulla in proposito. Pur non presentando una dimostrazione, al *Cercle* di Losanna Fano affermerà di essere arrivato a un risultato negativo: non è possibile ottenere la totalità delle trasformazioni di contatto del piano come prodotto alternato di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato.[110]

Nel periodo tra il 1928 e il 1943 e soprattutto in quegli "ultimi mesi" trascorsi a Losanna, Fano non si dedica soltanto a questo problema. Il risultato principale che ottiene in questo periodo, e che espone per la prima volta al *Cercle*, è la rappresentazione degli elementi lineari del piano sulla threefold $M_3^6 \subset \mathbb{P}^7$. Alla rappresentazione di tali oggetti su $\mathbb{P}^3$ di carattere differenziale, data da Lie, Fano affianca una costruzione di tipo geometrico-sintetico, nel solco dell'indirizzo italiano. Mostra così che la varietà degli elementi lineari del piano è birazionalmente equivalente a una threefold di $\mathbb{P}^7$ che può essere ottenuta come sezione iperpiana di un'altra varietà: la $M_4^6 \subset \mathbb{P}^8$. Fano non può esimersi dal fare riferimento agli studi della Scuola italiana in cui affondano le radici di queste ricerche: la varietà M_3^6, già individuata da Enriques oltre 50 anni prima, era stata analizzata in tutti i dettagli da Gaetano Scorza nel 1908, mentre più recentemente Severi ne aveva fornito il modello minino normale (1940).

La memoria conclusiva dedicata alle trasformazioni di contatto birazionali del piano, presentata per la pubblicazione ai «Commentarii Mathematici Helvetici» durante gli ultimi mesi di permanenza in Svizzera di Fano, è pubblicata nel 1947.[111] In oltre trenta pagine, Fano

[109] FANO 1928c, *cit.*, p. 626.

[110] Cfr. BSMT, *FFa, Scritti. 3*, c. 2*r*.

[111] G. FANO 1947a, *Le trasformazioni di contatto birazionali del piano*, «Comm. Math. Helv.» 20, pp. 181-215.

ripercorre i temi affrontati durante la conferenza di Losanna, espandendo diversi punti. Il discorso presentato al *Cercle* costituisce il punto di partenza per questa pubblicazione, come si evince dai diversi rimaneggiamenti subiti dal manoscritto e da alcune annotazioni a margine che, per assumere significato, devono essere considerate proprio alla luce del lavoro a stampa. In quest'ottica due note posteriori sono particolarmente rilevanti. La prima riguarda le condizioni $a)$ e $b)$ che devono soddisfare due sistemi omaloidici in corrispondenza mediante una trasformazione di contatto birazionale del piano. Quando Fano considera le curve razionali C^n cui sono imposti $n + \nu - 1$ contatti con unioni algebriche qualsiasi, appunta *a latere* "*b)* sì, *a)* no", senza ulteriori spiegazioni.[112] In realtà, questa annotazione significa che, così facendo, si ottiene un sistema ∞^2 che soddisfa la condizione *b)* ma in generale non la *a)*, come illustrato in [FANO 1947a, p. 188]. Una seconda aggiunta al manoscritto che acquista significato esclusivamente sulla base della pubblicazione dei «Commentarii» è inserita tra parentesi nel secondo punto dell'elenco fornito in chiusura della conferenza, relativo alle proprietà delle congruenze coniugate: "(transformations dans A et B alternées)".[113] Al *Cercle*, infatti, Fano non introduce A e B, per cui è altamente probabile che si tratti di un'aggiunta posteriore. Da [FANO 1947a, p. 209] si evince che A e B sono due sistemi di rette contenuti nella threefold M_3^6, introdotti per analizzare la questione delle trasformazioni elementari e dei loro prodotti. Il lavoro del 1947 rappresenta quindi una versione per 'il grande pubblico' della conferenza al *Cercle* del febbraio 1944: lo scopo dell'esposizione, così come la struttura e l'ordine degli argomenti, sono i medesimi.[114] Anche a livello di contenuti, il lavoro a stampa non contiene risultati sostanzialmente diversi da quelli presentati a Losanna, anche se alcuni aspetti sono più approfonditi. Tra questi, la questione dei punti singolari delle curve C^n che compongono i sistemi omaloidici di cui sono analizzati tre sotto-casi: quello della generica curva razionale con una o più cuspidi e i due casi della C^n con un punto di molteplicità k fisso o variabile. E ancora, sono forniti ulteriori dettagli sulla rappresentazione degli elementi lineari del piano sulla threefold M_3^6, introducendo anche le sue rigate cubiche $R^3 \subset \mathbb{P}^4$ ottenute dalle rette di un sistema di congruenze del prim'ordine "appoggiate a una stessa retta dell'altro" sistema.[115] L'aspetto più espanso è sicuramente quello delle congruenze Ω in relazione alla questione della rappresentabilità delle trasformazioni birazionali di contatto del piano come prodotti di trasformazioni elementari. Solo accennato al *Cercle*, in apertura e nelle conclusioni della conferenza, esso occuperà oltre la metà delle pagine del lavoro del 1947. Qui sono affrontati in dettaglio i tre punti accennati alla fine della conferenza del 1944: l'intero §10 è dedicato alle direttrici delle congruenze coniugate, il paragrafo successivo alle trasformazioni elementari e ai loro prodotti, i §14 e §15 alla proprietà 3) dell'elenco presentato al *Cercle*, per studiare la quale Fano introduce al §13 la nozione di congruenze coniugate minime.[116] Tuttavia, i risultati

---

[112] Cfr. BSMT, *FFa, Scritti. 3,* c. 3*v*.

[113] *Ivi*, c. 6*r*.

[114] Sul primo aspetto, cfr. FANO 1947a, *cit*., pp. 181-182: "Per il piano, questo studio è stato avviato da me in forma geometrica in alcune note del 1928. Avendo ora ripresa tale ricerca, sono pervenuto ad altri risultati, l'esposizione dei quali è oggetto della presente Memoria".

[115] Cfr. *ivi*, p. 191.

[116] Cfr. *ivi*, pp. 211-212: "Una congruenza Ω ha infinite coniugate, che possono comporsi di curve di ordine comunque elevato. Fra queste ve n'è però una, eventualmente anche più d'una, di curve di uno stesso ordine

cui si perviene sono del tutto analoghi a quelli esposti a Losanna: i criteri per le trasformazioni birazionali di contatto del piano, che Fano auspicava fossero sì "chiariti in seguito", non sono "ancora precisati in ogni caso".[117]

Oltre a costituire gli ultimi contributi originali di Fano, contributi che fra l'altro si intrecciano con gli studi sulle threefolds,[118] le ricerche sulle trasformazioni di contatto birazionali del piano rappresentano un'operazione culturale significativa. In esse Fano vuole utilizzare i metodi e gli strumenti di indagine tipici della Scuola italiana per dare una nuova veste a un oggetto matematico sorto all'interno di un retroterra culturale differente, quello della geometria differenziale di Lie, ed analizzato fino a quel momento solo da Autonne, dal punto di vista analitico. Per far ciò, Fano attinge a piene mani dal patrimonio geometrico italiano, facendo ricorso a concetti classici come quelli di trasformazioni cremoniane e quadratiche e procedendo, ancora una volta, per analogia. Va anche a dare una nuova interpretazione agli oggetti geometrici in questione: in particolare, riesce a 'vedere' gli elementi lineari di un piano come i punti di una threefold, mettendo in corrispondenza tali coppie punto-retta con i punti dell'intersezione tra la varietà di Segre M_4^6 e l'iperpiano di equazione $X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0$.

Tale obiettivo, già individuato nel 1928, diventa sempre più preponderante con il passare degli anni, raggiungendo il suo apice nella conferenza di di Losanna e nella pubblicazione ad essa correlata. Emblematico a tal proposito è come variano le opere citate da Fano: mentre tra i lavori italiani cui fa riferimento nel 1928 vi sono soltanto due scritti di G. Gherardelli sulle curve sghembe dotate di rami autoduali e una nota lincea di B. Segre sui complessi lineari, nel 1947 appaiono ben 13 citazioni di pubblicazioni della Scuola italiana. Tra queste, spiccano i lavori di C. Segre, Enriques, Scorza e Severi citati a Losanna, cui si vanno ad affiancare alcuni scritti di Cremona e Del Pezzo, due note di Rosati (1902) e E. Veneroni (1905), un lavoro sull'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane di B. Segre e Severi (1930) e le famose *Conferenze di geometria algebrica* (1927) di quest'ultimo, pubblicate da B. Segre. I riferimenti ai geometri italiani passano così da rappresentare il 17,6% delle citazioni totali del 1928 al 38,5% dei lavori citati da Fano a Losanna, per arrivare al 50% nella memoria del 1947.[119]

4.9. Le conferenze di Fano tra patrimonio materiale e immateriale

I riferimenti ai lavori che compaiono nelle carte manoscritte vanno interpretati alla luce delle condizioni materiali in cui Fano si trova a preparare le conferenze per il *Cercle*. A Losanna Fano ha accesso alla Biblioteca dell'*Ecole d'ingénieurs* (BUNIL), ma si è dovuto separare dai suoi volumi, opuscoli e riviste, rimasti a Torino.

minimo, e che chiameremo congruenze coniugate minime di Ω. Una congruenza di rette è evidentemente coniugata minima di tutte le sue coniugate".

[117] Cfr. *ivi*, p. 188.

[118] In particolare, $\mathbb{P}\Omega^1_{\mathbb{P}^2}$ risulta essere una varietà tridimensionale. Il legame tra queste trasformazioni e lo studio delle threefolds è analizzato nel CAPITOLO 3 di questa tesi.

[119] Escludendo i riferimenti di Fano ai propri lavori, dall'analisi del citational network emerge che complessivamente nei quattro lavori del periodo 1928-31 compaiono solo 3 citazioni a lavori italiani di geometria algebrica su un totale di 17 riferimenti. Nella conferenza di Losanna diventano 5 su 13 e nella memoria del 1947 raggiungono quota 13 su 26.

Durante le cinque comunicazioni, Fano cita in tutto 15 volumi, pubblicati tra il 1837 – anno di pubblicazione dell'*Aperçu historique* di M. Chasles – e il 1926. Di questi, solo cinque facevano parte della sua biblioteca personale. Ben 12, però, erano a disposizione di Fano in BSMT prima della sua partenza da Torino e 11 figuravano all'interno della raccolta di Losanna. I quattro libri 'mancanti' – le *Lezioni di geometria proiettiva* di Enriques (1898), la traduzione in tedesco dell'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* di Cremona (1895) e i due volumi di Clebsch del 1866 e del 1878 – sono citati soltanto nella prima conversazione e in relazione al loro ruolo storico, piuttosto che ai loro contenuti. La composizione materiale della Biblioteca di Losanna motiva anche i rimandi puntuali di Fano alle traduzioni in tedesco o in francese delle opere dei geometri italiani – come le *Vorlesungen über algebraische Geometrie* di Severi (1921) e il trattato *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* di Enriques e Chisini (1926) – e non ai lavori originali, di cui l'*Ecole d'ingénieurs* è priva.

Considerazioni differenti valgono per la trentina di articoli su rivista citati da Fano nelle quattro conferenze qui analizzate. Oltre i due terzi di questi lavori recano la firma dei geometri della Scuola italiana; quattro sono pubblicazioni di Fano stesso e altrettante – due note di Castelnuovo degli anni 1894-96 e due scritti in collaborazione con Enriques (1897 e 1900) – compaiono nella sua miscellanea. Si tratta per la maggior parte di articoli apparsi su riviste italiane, che Fano consultava abitualmente a Torino, ma di cui è invece sguarnita la BUNIL. La Biblioteca elvetica, invece, possiede un buon numero di riviste tedesche e francesi, tra cui il «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées» dove Autonne aveva pubblicato le sue ricerche sulle trasformazioni di contatto del biennio 1887-88. I lavori pubblicati nei «Mathematische Annalen» rappresentano inoltre la metà degli articoli stranieri citati da Fano. A Losanna egli ha quindi a disposizione quei lavori di Lie e di Autonne che avevano stimolato il suo interesse per trasformazioni birazionali di contatto del piano: questa è forse una delle ragioni per cui riprende a fare ricerca su questo argomento. Per sviluppare altri temi tipici della sua produzione e maggiormente nel solco della tradizione della Scuola, Fano avrebbe avuto bisogno di numerose pubblicazioni apparse sui periodici italiani di cui la BUNIL era priva.

I saggi dell'EMW, posseduta da Fano all'interno della propria biblioteca personale e presente sia a Torino sia a Losanna, costituiscono infine un punto di riferimento fondamentale in tutte le conferenze.

Se le fonti materiali a disposizione di Fano hanno sicuramente rivestito un certo ruolo nell'architettura delle conferenze, occorre tener presente la tradizione culturale della Scuola italiana e il racconto che essa era solita fare di sé, delle proprie radici e del proprio sviluppo. La rilettura in chiave storica dell'evoluzione della Scuola è un aspetto che Fano conosce bene, avendolo utilizzato in molteplici occasioni, e che fa parte della tradizione orale dei geometri italiani. Le prime due conferenze presentate al *Cercle* ben si inseriscono all'interno di questa narrativa, presentando alcuni tratti peculiari del patrimonio immateriale della Scuola e che si rintracciano in altre conferenze di questo tipo tenute tra gli anni Venti e Trenta. Oltre alla già citata plenaria di Castelnuovo a Bologna, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, è questo il caso della comunicazione di Severi al Congresso Internazionale dei Matematici di Zurigo del 1932 e della prolusione al corso di Geometria superiore di B. Segre a Bologna, dal titolo *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri*.[120] Quest'ultimo è il testo con cui le

[120] Cfr. CASTELNUOVO 1929, *cit*.; F. SEVERI 1932, *Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques*, in *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932*, vol. 1, Zürich, Füssli, pp. 209-220 ;

conferenze di Fano presentano maggiori affinità, ma vi sono tre aspetti ricorrenti in tutti e quattro i discorsi, pur con declinazioni talvolta differenti.

In primo luogo, l'azione dei maestri: Cremona e, soprattutto, Corrado Segre. Severi ricorda quest'ultimo come "rimpianto e eminente maestro" in relazione alla varietà di Segre, mentre non cita Cremona.[121] Negli interventi di Castelnuovo, Fano e B. Segre, è invece sottolineato il suo fondamentale contributo alla geometria iperspaziale. Castelnuovo è il primo a ricordare che

> specialmente il Segre, spirito eclettico, maestro insuperabile, rapito precocemente dal nostro affetto e dalla nostra ammirazione, vide le applicazioni che della geometria iperspaziale potevano farsi alla teoria delle curve algebriche.[122]

Ancora, B. Segre attribuisce all'"opera multiforme di Corrado Segre" l'"assestamento definitivo della geometria proiettiva iperspaziale". Egli, infatti,

> da un lato – seguendo le orme del Cremona – seppe opportunamente sfruttare le nozioni ed i risultati [del]l'algebra […], innestandoli nella trattazione geometrica; e dall'altro – mettendo sistematicamente alla prova la concezione astratta della geometria – riuscì a cogliere larga messe di risultati ed a fare dello spazio ad n dimensioni l'ambiente naturale in cui si dovevano considerare i fatti geometrici.[123]

Fano, infine, ricordando Segre come "uno dei grandi maestri italiani" che era solito "mettere in guardia gli allievi dalle produzioni inutili, che portano a una degenerazione dello sviluppo scientifico", gli attribuisce il merito di aver "proiettivizzato" la geometria n-dimensionale, dandole "nuovo impulso, nuovi metodi per svilupparla e arrivare a nuovi risultati" permettendole di "passare poi (1895-1910), con il massimo successo, alle questioni sulle superfici algebriche, e poi ad altre che oggi non sono ancora esaurite".[124] Sul fronte estero, è invece unanimemente riconosciuta l'influenza di Max Nöther – da Fano citato in tutte le prime quattro conferenze al *Cercle* – che Severi ricorda come un "grande studioso tedesco, la cui opera è stata talvolta trascurata e che i geometri italiani considerano uno dei loro maestri".[125] La "grande opera" di Nöther è annoverata da B. Segre in relazione ai fondamenti della teoria invariantiva delle superfici algebriche e da Fano per quanto riguarda l'utilizzo di un metodo

---

B. SEGRE 1932, *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri. Prolusione al Corso di Geometria Superiore, tenuta in Bologna il 13 gennaio 1932*, «Ann. Mat.» (4) 11, pp. 1-16.

[121] SEVERI 1932, *cit.*, p. 216: "regretté et eminent maître".

[122] CASTELNUOVO 1929, *cit.*, p. 192.

[123] SEGRE 1932, *cit.*, p. 7.

[124] BSMT, *FFa, Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 23: "C. Segre (1863-1924), un des grands maîtres Italiens, a toujours mis en garde ses élèves contre ces productions futiles, conduisant à une dégénération du développement scientifique"; e p. 24: "Ce n'était pas une question tout-à-fait nouvelle, comme je vais dire; mais la géométrie à n dimensions l'a pour ainsi dire 'projectivisée'; lui a donné un nouvel élan, a donné de nouvelles méthodes pour la développer et parvenir à des nouveaux résultats; a permi de passer ensuite (1895-1910), avec le plus grand succès, aux questions sur les surfaces algébriques, et ensuite à d'autres qui aujourd'hui ne sont pas encore épuisées".

[125] SEVERI 1932, *cit.*, p. 215: "grand savant allemand, dont les travaux ont été quelquefois méconnus et que les géomètres italiens considèrent comme un des leurs maîtres.". Cfr. con CASTELNIUOVO 1929, *cit.*, p. 192: "influenza di Max Nöther che, come poi dirò, ebbe tanto peso nello sviluppo della nostra scuola".

puramente algebrico per lo studio delle serie lineari su una curva,[126] ma è solo Castelnuovo a mettere in luce che, in Italia,

> la scuola era in quel momento dominata dalla corrente proiettiva così fortemente da non sentire tutta l'importanza dei problemi che il geometra tedesco aveva posto e in parte risolto. Era necessario che quei problemi li ritrovassimo noi stesso sotto una forma più adatta alla nostra mentalità. A ciò pervenimmo seguendo una via che parve agli altri e sembra oggi anche a noi indiretta, ma che per noi rappresentava in quel momento la via del minimo sforzo.[127]

A questa "via" individuata dai geometri italiani si collega il secondo elemento ricorrente nelle conferenze della tradizione italiana: la concezione della geometria algebrica come connubio tra algebra e geometria da cui discende il metodo di indagine della Scuola. Esso, infatti, scaturisce dalla felice combinazione tra la generalità dell'algebra e la creatività dell'intuizione geometrica. Inoltre, aggiunge Severi, la geometria algebrica è "l'espressione sintetica delle relazioni formali e funzionali dell'algebra".[128]

Fano a Losanna, come aveva fatto dieci anni prima B. Segre a Bologna, attribuisce l'introduzione di questo "nuovo spirito" o "forma caratteristica" a Cremona, vero "padre" della geometria italiana moderna", nella cui opera "possono riconoscersi il rigore e la generalità dell'algebra fusi coi preziosi suggerimenti porti dall'intuizione geometrica".[129] È, questo, un punto condiviso anche da Castelnuovo che già nel 1928 affermava:

> [Cremona] ha portato alla perfezione lo strumento di indagine [… de] l'algebra classica, ma così felicemente guidata dall'intuizione geometrica da sembrar quasi trasfigurata, l'algebra di cui non apparisce lo sviluppo logaritmico, bensì il contenuto qualitativo, o numerativo, che interpretato abilmente conduce in modo semplice e sorprendente a risultati fondamentali e riposti.[130]

A Losanna Fano sottolinea inoltre il perfezionamento dei metodi sintetici di J.V. Poncelet, Steiner, Chasles e K. von Staudt da parte della Scuola italiana, che ha conferito loro "un'impronta di semplicità, di lucidità e di perfezione artistica".[131]

Il primato a livello internazionale raggiunto dai geometri italiani rappresenta il terzo e ultimo aspetto che compare nelle conferenze della Scuola prese in esame, pur con accenti diversi. Castelnuovo, più cauto, fa soltanto riferimento a una "acuta analisi" che ha portato Enriques a un "contributo essenziale"[132] alla teoria delle superfici e colloca il proprio criterio di razionalità sulla scia dei contributi di B. Riemann e Clebsch per le curve, affermando:

---

[126] Cfr. SEGRE 1932, *cit.*, p. 8; BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 26: "on fait par des méthodes purement algébriques une étude approfondie des séries linéaires sur une courbe".

[127] CASTELNIUOVO 1929, *cit.*, p. 192.

[128] SEVERI 1932, *cit.*, p. 209: "l'expression synthétique des relations formelles et fonctionnelles de l'algèbre".

[129] SEGRE 1932, *cit.*, p. 4. Cfr. con BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, in LUCIANO 2022, *cit.*, p. 17: "La géométrie commence en Italie par Luigi Cremona (1830-1903). C'est à lui que l'on doit d'avoir introduit une nouvelle vie, un nouvel esprit dans la géométrie; […] On le considère vraiment comme le "père" de la géométrie italienne moderne"; e p. 19: "la généralité de l'Analyse y est associée aux suggestions de l'intuition géométrique".

[130] CASTELNUOVO 1929, *cit.*, p. 192.

[131] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 17: "aux méthodes synthétiques de Poncelet, Steiner, v. Staudt, Chasles il a donné une empreinte de simplicité, de lucidité, de perfection artistique".

[132] CASTELNUOVO 1929, *cit.*, p. 198.

Nel caso $n = 3$, corrispondente alle superficie, ho potuto dare una risposta analoga, sebbene meno semplice; occorre e basta che certi due caratteri invarianti della superficie siano nulli.[133]

Fano e B. Segre, invece, dichiarano esplicitamente che le ricerche di Castelnuovo ed Enriques sulle superfici algebriche "rappresentano per così dire i momenti eroici della mirabile e grandiosa costruzione".[134] A Fano che chiosa:

tra questi diversi metodi prevalgono l'uso delle trasformazioni birazionali, che conferiscono alla teoria un carattere più dinamico, e l'utilizzo delle curve iperspaziali, che offrono un'immagine proiettiva delle serie lineari; e da quel momento in poi mi sembra di poter dire che è la Scuola italiana ad essere in vantaggio,[135]

B. Segre aggiunge:

L'edificio grandioso – onore e vanto della scuola geometrica italiana – non può venir delineato in pochi tratti; mi limiterò dunque a dire che in esso si fondono armonicamente teorie elevatissime e disparate, con uno stile caratteristico, di classica bellezza.[136]

Ancor più forti sono i toni di Severi che – con l'obiettivo di rivendicare il ruolo della Scuola e, soprattutto, il valore dei suoi contributi personali – fa riferimento alla "gloriosa tradizione" italiana, al cui interno sono già presenti diversi risultati "in tutto il rigore e la precisione", e apre la sua comunicazione a Zurigo con un *j'accuse*:

Ritengo opportuno soffermarmi un istante sulla questione. La maggior parte dei matematici che non conoscono a fondo la geometria algebrica italiana, e quelli che si sono occupati dei suoi risultati per l'interesse di alcune questioni collaterali, a volte considerano i nostri metodi come qualcosa di misterioso che non può essere maneggiato con sicurezza al di fuori di un piccolo numero di iniziati; e preferiscono per questo motivo creare o perfezionare altri metodi; a volte credono addirittura di dover sviluppare risultati che noi conosciamo da tempo con precisione.[137]

L'intento di Severi è però sostanzialmente differente da quello di Fano a Losanna. Pur facendo riferimento alle diverse branche della geometria come ai "campi sperimentali più utili e importanti delle matematiche" e sottolineando il ruolo fondamentale dell'"intuizione algebrica",[138] Severi vuole mostrare l'importanza della geometria algebrica italiana e, più nello

[133] *Ivi*, p. 199.

[134] SEGRE 1932, *cit.*, p. 8. Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 44*r*: "Ce fut un des moments les plus épiques du développe de cette théorie".

[135] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 27: "À partir d'environ 1890, parmi ces différentes méthodes, l'usage des transformations birationnelles qui donnent à la théorie un caractère plus dynamique, l'emploi des courbes hyperspatiales qui offrent une image projective des série linéaires, l'emportent; et dès lors je crois pouvoir dire que c'est l'Ecole Italienne qui marche en tête".

[136] SEGRE 1932, *cit.*, p. 9.

[137] SEVERI 1932, *cit.*, p. 212: "Je crois bien de m'arrêter un instant sur la question. La plupart des mathématiciens qui ne connaissent pas à la fond la géométrie algébrique italienne et de ceux qui sont arrivés à s'occuper de ses résultats par l'intérêt de certaines questions collatérales, considèrent quelquefois nos méthodes comme quelque chose de mystérieux qui ne peut pas être manié sans danger en dehors d'un petit nombre d'initiés; et ils préfèrent pour cela créer ou perfectionner d'autres méthodes; ils croient même quelquefois devoir mettre au point des résultats que nous connaissons depuis longtemps avec précision."

[138] *Ivi.*, p. 209: "Beaucoup des conceptions originaires des branches aujourd'hui les plus éloignées de l'algèbre, ont pris naissance de cette science, et l'imagination algébrique joue toujours un rôle fondamental dans le

specifico, dei suoi contributi individuali in diverse aree della matematica. Per questo motivo, dopo aver delineato una sorta di "albero genealogico" delle teorie matematiche che affondano le loro radici nell'algebra e che, afferma, costituiscono il 90% della matematica, va a mettere in luce i legami tra geometria algebrica e due teorie contemporanee in cui essa esplica la sua "funzione creatrice": la topologia e l'analisi complessa.[139] Difendendosi dalle accuse di Lefschetz e Van der Waerden di aver dato una definizione poco rigorosa della molteplicità d'intersezione, Severi afferma:

> Credo di aver già dimostrato che la topologia e i suoi profeti sono molto apprezzati; ma a volte si può trovare salute anche al di fuori della topologia. La nostra geometria possiede da tempo i mezzi per valutare in modo rigoroso la molteplicità di intersezione di due varietà algebriche o dei cicli algebrici su una varietà algebrica; e il metodo che è stato seguito nella topologia è solo il trasporto – cosciente nella prima fase e forse inconsapevole nella seconda – di questi mezzi.[140]

Tra i settori correlati alla geometria algebrica, cita poi l'esame delle proprietà aritmetiche delle curve e delle varietà algebriche che si ricollegano a problemi classici della teoria di numeri; la teoria delle funzioni analitiche a più variabili, ambito in cui rientra il metodo geometrico elaborato da lui e B. Segre per lo studio delle funzioni di due variabili; i legami con i problemi di integrazione delle equazioni differenziali nel dominio analitico, esplorati dal "suo allievo Tricomi come applicazione della geometria su una superficie algebrica".[141] Quella di Severi è, in sintesi, una rilettura di alcuni contributi – perlopiù suoi e di alcuni membri della Scuola a lui legati – per affermare il ruolo della geometria algebrica italiana all'interno dello sviluppo generale delle matematiche e, soprattutto, la sua vitalità e il suo inserimento anche all'interno di correnti recenti.

Gli interventi di Fano a Losanna, invece, sono forse meno ambiziosi, ma sicuramente più oggettivi. Egli si limita a illustrare la nascita della Scuola italiana e a descrivere i maggiori risultati da essa conseguiti, dando particolare rilievo all'aspetto storico. Mentre la conferenza di Severi a Zurigo si situa nel presente e Castelnuovo a Bologna si limita a risalire all'epoca di Cremona, quelle di Fano e B. Segre sono segnate da una forte attenzione per lo sviluppo storico. Entrambi risalgono alle origini della geometria algebrica, prendendo in esame lo sviluppo della geometria analitica e proiettiva a partire dal XVIII secolo in Francia e in Germania. Ancora, sia Fano sia B. Segre attribuiscono la difficoltà dell'Italia a partecipare a questo "movimento di rinnovamento scientifico" alle sue condizioni politiche (suddivisione in piccoli stati e mancanza di un adeguato sistema d'istruzione *in primis*).[142] Entrambi poi riconoscono a Cremona due

---

développement d'un très grand nombre de théories de l'analyse et de la géométrie, quoique ce rôle soit fréquemment méconnu en étant désormais dans la sous-conscience de tout mathématicien."

[139] *Ivi.*, p. 211: "Mais dans la position et l'orientation des problèmes la géométrie algébrique continue et continuera sa fonction créatrice".

[140] *Ivi.*, p. 213: "Je crois avoir déjà démontré estimer beaucoup la topologie et ses prophètes; mais on peut quelquefois trouver la santé même en dehors de la topologie. Notre géométrie possède, depuis longtemps, les moyens d'évaluer rigoureusement la multiplicité d'intersections de deux variétés ou cycles algébriques quelconques sur une variété algébrique; et la méthode qu'on a suivie en topologie n'est que le transport – conscient dans la première phase et peut-être inconscient dans la seconde – de ces moyens là."

[141] *Ivi.*, p. 219: "démontré, il y a quelques années, par mon élève M. Tricomi, comme apphcation de la géométrie sur une surface algébrique."

[142] Cfr. SEGRE 1932, *cit.*, p. 2: "Le ragioni del nostro assenteismo da questo fervore di ricerche e di studi, son da imputarsi alle disgraziate condizioni politiche di quel periodo della nostra storia, per cui le varie regioni d'Italia

importanti conquiste: la formulazione della teoria generale delle curve e delle superfici algebriche e la fondamentale scoperta delle trasformazioni birazionali. Su questo secondo aspetto, concordano sul merito di Cremona nell'aver compreso pienamente l'importanza della questione e di averla impostata in tutta la sua generalità.[143] Proseguendo poi nell'*excursus* storico, identificano nella geometria degli iperspazi di Segre e Veronese il definitivo passaggio ad una concezione puramente birazionale delle questioni geometriche.[144] Dalle conferenze di Fano e B. Segre emerge infine una cronologia della Scuola condivisa. A Losanna, il primo identifica tre fasi dello sviluppo della geometria algebrica italiana (1880-92: geometria delle curve algebriche, con Veronese, Segre e Castelnuovo; 1893-1905: teoria delle superfici di Enriques e Castelnuovo; dopo il 1905: approfondimenti su curve e superfici e teoria delle varietà algebriche, con Severi). A Bologna, il secondo individua due periodi distinti, "il primo dei quali va dal 1893 al 1900 ed è precipuamente dominato dalle idee del Castelnuovo e dell'Enriques; il secondo comincia col 1904 ed è nettamente dominato dalle idee del Severi". È, questa, una scansione temporale condivisa anche da Castelnuovo che, nel 1928, fa risalire al 1890 il compimento della teoria delle curve e al 1904-05 la fase conclusiva dell'elaborazione della geometria sulle superfici.[145]

Nonostante i notevoli punti di contatto tra la prima metà della conferenza di Fano *Quelques aperçus sur le développement de la géométrie algébrique en Italie pendant le dernier siècle* e la prima parte della prolusione di B. Segre, vi sono tre differenze sostanziali. Per quanto riguarda i contatti tra l'Italia e il resto d'Europa, mentre Fano – sulla scorta di V. Volterra – fa riferimento al viaggio in Europa di Betti, F. Brioschi e F. Casorati (1858), B. Segre cita il viaggio in Italia di Steiner, C. Jacobi, P.G. Dirichlet e C. Borchardt (1843-44). In secondo luogo, Segre sottolinea il ruolo di Battaglini – neppure citato da Fano a Losanna – in relazione allo studio geometrico degli invarianti e dei covarianti delle forme algebriche. Infine, nella seconda parte dell'intervento Segre illustra altre vie d'indagine in cui, secondo lui, "gli Italiani si sono pure brillantemente affermati"[146] (geometria differenziale e proiettivo-differenziale; fondamenti della geometria; analysis situs e geometria ipercomplessa), per concludere – con un'eco dei cardini della retorica nazionalista – che quella che "più profondamente porta

erano fra loro divise e rette da governi – in maggior parte stranieri o mancipi dello straniero – che, nell'elevazione scientifica e culturale dei singoli e delle masse, vedevano soltanto un pericolo alla loro stabilità"; BSMT, *FFa, Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 16: "L'Italie n'avait encore pris part à ce mouvement scientifique. Les conditions politiques, sa division en plusieurs États, n'y étaient pas favorables. Quelques gouvernements ne s'occupaient pas beaucoup de l'instruction et de l'enseignement universitaire".

[143] Cfr. SEGRE 1932, *cit.*, pp. 3-5: "è infatti col Cremona che la geometria proiettiva raggiunge le mete più eccelse, pervenendo alla teoria generale delle curve e delle superficie algebriche; e, d'altro canto, la scoperta fondamentale delle trasformazioni cremoniane […] ma spetta al Cremona di aver impostata la questione in tutta la sua generalità, risolvendola brillantemente."; BSMT, *FFa, Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, pp. 18-20: "Ses oeuvres les plus importants sont notamment 2 groupes de mémoires: 1. La théorie géométrique des courbes planes et des surfaces algébriques […]; 2. La théorie des transformations birationnelles du plan et de l'espace (1862-64, 1870), que tout le monde s'accorda à appeler 'crémoniennes'. […] Mais ce fut Cremona qui comprit l'importance et la généralité de la question".

[144] Cfr. SEGRE 1932, *cit.*, p. 6; BSMT, *FFa, Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 24.

[145] Cfr. SEGRE 1932, *cit.*, p. 8; BSMT, *FFa, Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, pp. 24-25; CASTELNUOVO 1929, *cit.*, pp. 193 e 195.

[146] SEGRE 1932, *cit.*, p. 9.

impressa l'orma del genio italico" è la geometria algebrica.[147] È, quest'ultimo, un aspetto rimarcato anche da Guido Zappa, vent'anni più tardi (1952). Tracciando la storia della geometria negli ultimi due secoli, illustra gli studi sulle superfici in questi termini:

> Ma la gloria della costruzione di questa teoria è massimamente dovuta all'analista francese Picard […] e agli italiani Castelnuovo ed Enriques, cui si aggiunse in seguito il più giovane Severi, i quali costruirono una teoria delle superficie basata prevalentemente sui metodi sintetici della tradizione nostra […]. Sono questi i tre grandi maestri italiani di geometria algebrica […]; ad essi si deve massimamente se la geometria algebrica è una gloria prevalentemente italiana. Tutta la teoria porta i chiari segni del genio italiano, attratto più da visioni intuitive e da spirito costruttivo che da esigenze più spiccatamente dimostrative e logiche.[148]

Fano, invece, nella seconda parte della prima conferenza al *Cercle* si addentra nei dettagli matematici della teoria delle serie lineari e delle trasformazioni birazionali tra due spazi; nella seconda approfondisce diversi aspetti della teoria delle superfici. Maggiori sono qui i punti di contatto con la conferenza plenaria di Castelnuovo. Oltre a riprendere la distinzione tra la corrente proiettiva (Cremona) e quella della geometria iperspaziale (Segre e Veronese), nel presentare al pubblico di Losanna la teoria delle superfici Fano abbraccia pienamente il ruolo dell'analogia con le curve dell'impostazione di Castelnuovo:

> I concetti di funzioni razionali dell'ente, di operazioni razionali su di esse, di funzioni covarianti od invarianti potevano, sia pure con qualche cautela, trasportarsi dalle curve alle superficie, conducendo allo studio dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie. Ma appena si voleva approfondire la ricerca, quell'analogia, che nei primi passi ci aveva servito di guida, veniva meno e rischiava di condurci ad affermazioni erronee.[149]

Altri aspetti condivisi nella trattazione di Fano e Castelnuovo sono il superamento della distinzione tra indirizzo algebrico-geometrico e trascendente grazie all'opera della Scuola italiana, la difficoltà nell'estensione della nozione di genere, il legame tra le superfici algebriche e gli integrali di Picard. Tuttavia, mentre Fano sceglie di dare maggior rilievo agli aspetti geometrici della teoria, Castelnuovo ne illustra più dettagliatamente i collegamenti con i contributi di analysis situs di Poincaré e Lefschetz. Anche lo scopo è differente: a Bologna Castelnuovo guarda al "cammino percorso nell'ultimo cinquantennio, non per una sterile contemplazione, ma per prendere norma e lena in vista di indagini future",[150] suggerendo anche nuove possibili vie di ricerca. Davanti ai colleghi stranieri del *Cercle Mathématique*, Fano si fa invece promotore di quella corrente di indagine cui si è dedicato per tutta la vita, "grazie alla quale l'Italia occupa anche nella scienza uno dei primissimi posti".[151]

La promozione e la valorizzazione della tradizione geometrica italiana fa da *trait-d'union* tra tutte le esperienze di divulgazione di Fano e motiva, in buona parte, la sua scelta degli argomenti. L'evoluzione della Scuola, da Cremona allo sviluppo della teoria delle superfici, e il metodo di indagine dei geometri italiani caratterizzano gli interventi tenuti da Fano – in un

---

147 *Ivi*, p. 14.

148 G. ZAPPA 1952, *La matematica, oggi*, Roma, Studium, p. 131.

149 CASTELNUOVO 1929, *cit.*, p. 193.

150 *Ivi*, p. 191.

151 G. FANO 1895a, *Uno sguardo alla storia della matematica*, «Atti e Mem. Acc. Virgil.», p. 28.

arco temporale di cinquant'anni – a Göttingen, Aberystwyth e Losanna. L'altro criterio che guida Fano nella scelta del tema da presentare è, naturalmente, l'attinenza con le ricerche di cui si sta occupando in contemporanea: è per questo che nel 1894 aveva tenuto una conferenza sulla geometria della retta (*Über eigene Untersuchungen im Gebiete der Liniengeometrie*), nel 1923 avrebbe voluto dare qualche cenno sullo studio delle varietà tridimensionali e nel 1944 dedica l'ultima conversazione al *Cercle* alle trasformazioni birazionali di contatto del piano. Quest'ultimo è un argomento che Fano aveva pianificato di affrontare all'interno della quinta sezione del suo ciclo di lezioni di Aberystwyth, dedicata ai gruppi continui di trasformazioni birazionali nel piano e nello spazio. Tuttavia, questo argomento, come lo studio delle threefolds, non era poi stato affrontato per ragioni di tempo.

La scelta delle superfici del terzo e quarto ordine come temi della terza e della quarta conferenza al *Cercle* è, a prima vista, singolare. Sono infatti argomenti che non erano stati proposti da Fano in altri contesti di divulgazione, cui aveva riservato spazio soltanto durante i corsi presso l'ateneo torinese. Da un lato, Fano conosce bene la teoria delle superfici di grado 3 e 4: per presentarla si basa in buona parte sui relativi saggi dell'EMW, senza quindi necessitare di lavori a stampa che non erano a sua disposizione nella Biblioteca di Losanna. Inoltre, Fano stesso si era occupato di alcune superfici del quart'ordine legate alla superficie di Kummer nel lavoro del 1906 pubblicato nei «Rendiconti del R. Istituto Lombardo» e aveva poi approfondito lo studio della superficie di Steiner.[152]

Dall'altro lato, il taglio adottato per introdurre queste due classi di superfici rivela, ancora una volta, l'obiettivo di dar lustro alle ricerche dei geometri italiani, come emerge dall'ampio spazio dedicato alla trattazione di Cremona delle cubiche. L'intero ciclo di conferenze si configura come una rilettura storico-matematica di quella "evoluzione completamente italiana"[153] della geometria algebrica, alla luce di quasi cinquant'anni di attività di Fano in quel settore.

[152] Cfr. FANO 1906, *cit.*, e BSMT, *FFa*, *Scritti. 2*.

[153] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, in LUCIANO 2022b, *cit.*, p. 27: "Évolution complément Italienne analogue à celle de la géométrie projective da Poncelet à v. Staudt."

5. *L'impegno per "educare a saper adoperare nella vita tutte le qualità dell'ingegno"*

Accanto a una prolifica attività di ricerca, Fano si dedica all'insegnamento per tutta la vita, partecipando anche ai numerosi dibattiti metodologici che scandiscono quegli anni.[1] La sua attività di docenza, iniziata in qualità di assistente già nell'a.a. 1892-93, non si interrompe del resto neanche in seguito alle persecuzioni razziali. Fano, che "sentiva in modo profondo il dovere, che nel suo caso si fondeva con il piacere"[2], dell'insegnamento, impartisce le sue lezioni di geometria per oltre cinquant'anni, in contesti diversi: da Torino a Roma e a Messina, da Aberystwyth a Losanna. Come scrive nel 1920 sulle pagine del «Bollettino della Mathesis», per lui "l'insegnamento deve acuire, deve educare a saper adoperare nella vita tutte le qualità dell'ingegno".[3]

"Espositore lucido ed elegante, dotato di rara comunicativa e di acuto spirito sintetico, capace di trasfondere nell'uditorio il Suo amore per la Scuola e per gli studi geometrici",[4] Fano accosta all'attività didattica una sensibilità, un interesse speciale per quella che potremmo chiamare, con abuso di linguaggio, la filosofia dell'educazione, a tutti i gradi e livelli scolari.

Pur episodica e frammentaria, la sua produzione in questo ambito presenta alcuni tratti di originalità, accanto alla condivisione di numerosi assunti della Scuola italiana di geometria algebrica.[5] I suoi contributi, anche se limitati rispetto a quelli di altri grandi matematici a lui contemporanei, meritano dunque di essere analizzati in più direzioni, oltre alle due finora esplorate in letteratura. Di queste, la prima riguarda la trasposizione in Italia del modello Göttingen tipico della Scuola di Klein e, in particolare, di alcune sue caratteristiche: la formazione iniziale e in itinere dei docenti attraverso i corsi di Matematiche elementari da un punto di vista superiore e mediante le riunioni estive; l'importanza di valorizzare i legami fra gli insegnamenti e gli insegnanti di scienze pure e applicate, sia di scuola secondaria che universitari, durante riunioni periodiche e seminari.[6] La seconda componente nota dell'impegno di Fano in campo didattico, peraltro connessa alla precedente, tocca più specificamente il nodo

---

[1] Una versione ridotta dei paragrafi 1, 2, 3 e 6 di questo capitolo della tesi è pubblicata in E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2022a, *Il dovere e il piacere di insegnare: l'impegno di Gino Fano nell'educazione matematica*, «Studi Piemontesi» 51.1, pp. 93-105.

[2] A. TERRACINI 1953, *Commemorazione del Socio Gino Fano*, «Rend. ANL» (8) 14, pp. 709-710.

[3] G. FANO 1920a, *A proposito di un articolo del giornale "La Sera"*, «Boll. Mathesis» 12, p. 130.

[4] SEGRE 1952, *cit.*, p. 263. A inizio carriera, però, Fano non era stato particolarmente amato dagli studenti, che lo accusavano di un'esagerata pedanteria e di un'immotivata severità agli esami. Il giornale satirico *La Campana degli studenti* aveva pubblicato un intervento dal titolo emblematico: *La questione Fano*, Torino, 27 novembre 1902. La vicenda era poi rientrata grazie all'intervento pacificatore di C. Segre. Cfr. in proposito le lettere di Fano a Castelnuovo del 11.11.1902, 29.11.1902, 14.12.1902 in GARIO (ed) 2010, *cit*.

[5] Sui contributi della Scuola geometrica italiana all'insegnamento della matematica cfr., *inter alia*, L. GIACARDI 2010, *The Italian School of Algebraic Geometry and Mathematics Teaching in Secondary Schools. Methodological Approaches, Institutional and Publishing Initiatives*, «International Journal for the History of Mathematics Education» (5) 1, pp. 1-19; L. GIACARDI 2013, *The Italian School of Algebraic Geometry and the Teaching of Mathematics in secondary schools: motivations, assumptions and strategies*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 71, pp. 421-461.

[6] G. FANO 1894, *Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga*, «RdM» 4, pp. 170-188.

della formazione docenti. Conscio che "a nulla vale saper di più di ciò che si insegna, se questo di più non fa conoscer meglio le cose da insegnare",[7] Fano scende in campo, nel 1921, contro la soppressione delle Scuole di Magistero attuata dal ministro B. Croce l'anno prima e, in una bella conferenza pronunciata a Napoli al congresso dell'Associazione Mathesis sostiene con forza la necessità di istituire corsi di Vedute superiori sulle matematiche elementari nel secondo biennio di tutte le Università con l'obiettivo di promuovere il confronto e l'analisi dei principali libri di testo italiani e stranieri; suggerisce di accogliere come tesi di laurea in Matematica le dissertazioni di storia e metodologia matematica; e sottolinea l'esigenza di attivare tirocini nelle scuole secondarie, eventualmente solo su classi pilota per aggirare i cronici ritardi della Minerva.

Questi due interventi sul versante dell'istruzione, lungi dall'essere episodi isolati di interesse per la scuola da parte di Fano, risultano tasselli di un suo impegno intellettuale e sociale più ampio e, considerati unitamente ad altri suoi lavori e ruoli rimasti finora inesplorati, restituiscono un'immagine più sfumata e per certi versi inedita del Fano docente, cittadino e uomo.

5.1. La visione metodologica, fra tradizione e nuove suggestioni

La produzione didattica ed epistemologica di Fano, così come quella scientifica, rivela l'impronta dei suoi tre Maestri: Segre, Castelnuovo e Klein, sua guida durante il perfezionamento a Göttingen e con il quale si manterrà in contatto epistolare negli anni successivi.

Il perno attorno cui ruota la sua visione filosofica dell'educazione matematica è costituito dal concetto di intuizione (*Anschauung*). Intesa, alla Klein, come 'modo di vedere' le strutture e relazioni matematiche e come autentico 'strumento di lavoro', l'intuizione riveste un ruolo assolutamente centrale nel sistema epistemologico di tutti i geometri italiani. Segre e Veronese, Castelnuovo ed Enriques, Levi e Severi, seppure a diverso titolo, pongono tutti l'accento sul valore dell'intuizione non solo nelle scienze sperimentali ma anche nel campo del pensiero matematico astratto, e sul suo primato rispetto al rigore logico-deduttivo. Fano è però il primo, forse l'unico, che cerchi di 'definire' questa nozione, con il duplice intento di fondare (epistemologicamente parlando) lo stile e il metodo della Scuola geometrica italiana e di scongiurare il rischio – invero assai frequente – di ridurre l'intuizione alla visualizzazione o all'empiria *naif*. In quest'ottica, l'intuizione gli appare come

> un complesso di attitudini e capacità della nostra mente, che possono essere di varia natura, e, pur in individui eminenti, diversamente sviluppate, e tutte utili: la visione colla mente, come si dilettavano a praticarla già gli antichi geometri greci; l'intuizione come forma di memoria, sviluppatasi p. es. in seguito al passato lavoro; l'intuizione come un senso vago e indefinito, di cui non si saprebbe dare ragione chiara e precisa, come quella di un ingegnere che, abbozzando un progetto di costruzione, sente, prima di farne il calcolo, la distribuzione delle pressioni; o anche

[7] G. FANO 1922, *Le Scuole di Magistero. Relazione al Congresso della Società Italiana Mathesis*, «Period. Mat.» (4) 2, p. 102.

l'intuizione dei calcolatori, come l'aveva in grado eminente Francesco Brioschi, il cui spirito […] vedeva attraverso una foresta di calcoli.[8]

Ora, poiché l'insegnamento "deve educare non soltanto il raziocinio, ma anche la facoltà di osservare, di percepire fatti direttamente, senza ragionamento",[9] l'intuizione riveste un ruolo fondamentale all'interno del processo di insegnamento e apprendimento della matematica, e in particolare della geometria.[10] Quattro solo le sue funzioni essenziali: l'intuizione sostiene nella scelta dei postulati; guida alla comprensione profonda dell'architettura teorica; ha funzione di previsione e di controllo dei risultati oltre che di 'contravveleno' alla logica, della quale – pure – è l'indispensabile contraltare. La tesi è illustrata da Fano, come suo solito, con un'efficace metafora:

> Come l'organismo vivente è la sintesi delle sue cellule, e quello e queste sono entrambi ricchi di interesse, ma la conoscenza anche minuta delle cellule non basta a far conoscere l'individuo, la Matematica è anch'essa un organismo vivente, di cui si potrebbe dire che le connessioni logiche costituiscono lo scheletro; ma l'organismo non è solo lo scheletro. […] Domandare se, per la costruzione della matematica complessiva e del suo rigoglioso sviluppo, sia più importante la logica o l'intuizione, sarebbe come domandare se per l'individuo sono più essenziali lo scheletro, oppure gli altri organi […]. La questione è posta male, poiché la vita dell'individuo riposa sull'azione mutua, concomitante, concorde di tutti i suoi organi![11]

Oltre che sull'intuizione, gli interventi di Fano di contenuto metodologico vertono sulla matematica approssimata (*Approximationsmathematik*), ovvero la 'matematica esatta delle relazioni approssimate', cui dedica un lavoro nel 1911 in occasione della riforma dei programmi di Matematica,[12] ad opera di Castelnuovo, e dell'introduzione di una nuova tipologia di scuola secondaria: il Liceo moderno.[13]

Il tema è ancora una volta di chiaro sapore kleiniano. Nell'*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (un volume che Fano aveva studiato a fondo, come si desume dalle numerose annotazioni e sottolineature apposte sulla sua copia personale),[14] Klein aveva infatti illustrato la sua visione dei rapporti fra matematica pura e applicata, osservando come esistesse una differenza profonda fra le due. La matematica applicata, importante strumento di progresso scientifico, consente di modellizzare vaste classi di fenomeni naturali ma qualsiasi osservazione ha un margine di imprecisione, qualsiasi

---

[8] FANO 1924d, *cit.*, pp. 26-27.

[9] G. FANO 1915b, *Sui fondamenti della geometria*, «Rivista di Filosofia» 7, p. 392.

[10] Anche É. Borel era dello stesso avviso in É. BOREL 1907, *La logique et l'intuition en mathématiques*, «Revue de Métaphysique et de Morale» 15, p. 283: "on tombera sans doute d'accord pour choisir la géométrie comme sujet d'enseignement intuitif".

[11] FANO 1924d, *cit.*, p. 27.

[12] G. FANO 1911, *Matematica esatta e matematica approssimata*, «Boll. Mathesis» 3, pp. 106-126.

[13] Su Castelnuovo e l'insegnamento della matematica cfr. *inter alia,* GARIO 2016, *cit.*; e M. MENGHINI 2016, *Guido Castelnuovo e l'insegnamento della matematica*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 185-197.

[14] Cfr. F. KLEIN 1902, *Anwendung der differential und integralrechnung auf geometrie, eine revisionder prinzipien: vorlesung gehalten wahrend des sommersemesters 1901*, Leipzig, Teubner, 1902, lezioni ripubblicate nel 1928, con il titolo *Präzisions-und Approximationsmathematik*, come III volume della collana *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus*. Si tratta del volume n. 108 della biblioteca Fano, attualmente conservato in BSMT.

misurazione ha un grado di approssimazione (*Schwellenwert der Genauigkeit*) che non può essere ulteriormente migliorato. Conseguentemente, i risultati delle osservazioni possono essere solo approssimati (non rappresentati) mediante funzioni, e le figure geometriche non sono altro che "immagini semplificate e approssimate". Fano riprende largamente il discorso di Klein e lo porta avanti: è proprio dalla divergenza tra matematica e realtà che sono sorti problemi nuovi rispetto a quelli tradizionalmente affrontanti; così si è entrati nel dominio della matematica approssimata, che si occupa di studiare relazioni rigorosamente stabilite da un punto di vista matematico fra enti conoscibili solo con un certo grado di approssimazione. Fondamentale diventa, a questo stadio, tracciare i confini e le sfere di competenza dei due rami: qualsiasi funzione – argomenta Fano – appartiene ad esempio al dominio della matematica di precisione, ma non di quella approssimata, la quale opera soltanto sulle cosiddette funzioni 'ragionevoli'.[15] In altri termini, le curve ideali, del tipo $y = f(x)$, appartengono al dominio della matematica esatta e possono mancare di alcune proprietà intuitivamente evidenti, come l'esistenza della retta tangente in ogni punto. Quelle empiriche, ossia le strisce del tipo $y = f(x) \pm \varepsilon$, le uniche oggetto di studio da parte delle scienze di osservazione, pur essendo limiti di curve ideali, sono oggetti sostanzialmente diversi: nel processo di idealizzazione, molte proprietà possono infatti andare perdute.

Convinto che sia essenziale educare alla percezione dei rapporti fra matematica e realtà, "eliminando una divergenza e colmando una lacuna che sono tra i difetti più fatali a ogni ordine di scuole"[16] Fano concede ampio spazio, nelle adunanze della sezione torinese della Mathesis, alle proposte circa l'insegnamento della matematica nei Licei moderni (proposte delle quali aveva avuto "notizie per via privata" da Castelnuovo stesso prima ancora della pubblicazione)[17] e condivide con i colleghi alcune strategie didattiche concrete, per esempio proporre agli alunni l'interpretazione dei diagrammi orari dei treni, delle curve della temperatura corporea, dei grafici, dei rivelatori della distanza, in una parola a quella che oggi va sotto il nome di 'matematica del cittadino'.

Un terzo elemento chiave della visione metodologica di Fano concerne la classificazione dei saperi e la posizione della matematica nel 'grande albero della conoscenza'. Sostenitore del carattere unitario della scienza, Fano si scaglia contro la tendenza verso l'eccessiva specializzazione, facilitata anche dagli ordinamenti universitari, che promuovono un 'particolarismo invadente'. Per lui non esiste soluzione di continuità fra scienze pure e applicate e la matematica stessa è scienza logica e sperimentale ad un tempo, in quanto non può prescindere dall'esperienza, senza la quale non sussisterebbe né il numero né la forma.[18] Molti capitoli di matematica teorica, fra cui la fotogrammetria o l'elasticità – chiosa Fano – sono del resto scaturiti dalle applicazioni e hanno contribuito a metter in luce l'utilità pratica della matematica, "utilità a cui pochi credono, e che molti negano decisamente".[19] Naturalmente ciò non significa vincolare la ricerca a considerazioni utilitarie, poiché la storia insegna che varie

---

[15] Fano riprende questa terminologia da Klein e Jacobi (*vernünftige funktionen*).

[16] FANO 1911, *cit.*, p. 126.

[17] Cfr. *Verbali delle adunanze delle Sezioni. Sezione Piemontese. Seduta del 23.01.1913*, «Boll. Mathesis» 5, 1913, p. 46.

[18] Ne discende che la geometria, per esempio, non è che una fisica matematica dell'estensione. Fano non è certo il solo a pensarla così, anzi tale concezione si ritrova identica in M. Pieri e in A. Padoa, solo per citare due nomi.

[19] FANO 1895a, *cit.*, p. 5.

conquiste del pensiero astratto solo a distanza di tempo si sono rivelate utili ed efficaci in campi inattesi. Così, ad esempio, i numeri immaginari hanno permesso di risolvere importanti questioni di elettrotecnica e di approfondire lo studio dei fenomeni vibratori. Allo stesso modo, la relatività non sarebbe esistita senza gli spazi a più dimensioni, le geometrie non euclidee e il calcolo tensoriale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita.[20] Ancora, le cosiddette ‘funzioni patologiche’ sono in realtà strettamente correlate al fenomeno fisico dei moti browniani delle particelle.

A livello di prassi didattica, conseguentemente, occorre cogliere tutte le occasioni possibili, per guidare gli allievi alla visione unitaria della scienza. La “teoria matematica dei fatti collettivi” può essere un esempio eccellente di nuova suggestione, poiché essa trova riscontro nella fisica delle particelle, in chimica e in demografia. Il calcolo delle probabilità, analogamente, permette di dare spiegazioni più soddisfacenti di vari fenomeni fisico-chimici e facilita il passaggio dal concetto di omogeneità statistica a quello di irreversibilità. Le leggi statistiche possono essere sfruttate per sostituire – agli occhi degli allievi – il determinismo assoluto delle leggi naturali con un determinismo statistico, che afferma soltanto l’elevatissima probabilità di un certo andamento del fenomeno.[21]

Fano, infine, oltre ad annoverare generalità, semplicità ed economia di pensiero tra i caratteri fondanti della matematica, ne mette in luce un’insita bellezza:

> colle armonie dei numeri e delle forme geometriche, colla semplicità ed eleganza dei ragionamenti, la matematica assurge anche ad opera d’arte. Il matematico non è completo […], se non sente la bellezza del vero. Ed è ancora un sentimento artistico quello che, nella complessità e nell’apparente disordine delle cose, sa cogliere le armonie, e fissarle in formole semplici”.[22]

È anche per questa ragione che Fano cerca di contrastare la visione comune, secondo la quale

> La matematica, per chi non ne ha fatto uno studio speciale, ha qualche cosa di misterioso, che viene guardato più con diffidenza che con curiosità. Si crede che lo studio di essa presenti alla maggior parte delle persone difficoltà straordinarie; che le questioni che vi si trattano trascendano la capacità mentale di chi non ha una speciale disposizione a comprenderle; e che tali questioni potranno essere mirabili (agli occhi di chi le capisce) per perfezione logica, ma non hanno […] e non potranno forse mai avere nessuna applicazione pratica, e perciò anche, a giudizio dei più, nessuna importanza. Si direbbe che un fosso profondo separi i matematici dalle altre persone colte, le quali, di solito, poco o punto s’interessano di ciò che ai loro occhi si riassume in sole formole e cifre.[23]

---

[20] Il concetto stesso di relatività affonda le sue radici nella teoria dei gruppi di trasformazioni, come Fano mette in luce nella sua conferenza generale ad Aberystwyth (1923) dal titolo *All geometry is theory of relativity*, pubblicata in FANO 1923a, *cit.*

[21] Le idee di Fano sono successivamente riprese e ampliate in G. CASTELNUOVO, 1933, *Determinismo e probabilità*, «Scientia» 53, pp. 8-12.

[22] FANO 1924d, *cit.*, p. 11.

[23] G. FANO 1905, *Un po’ di matematica per i non matematici*, «Rivista d’Italia» 2.9, p. 366.

5.2. La Scuola operaia serale femminile come forma di impegno sociale

L'elemento più originale dell'azione di Fano nell'ambito dell'istruzione è senza dubbio costituito dal suo impegno nella Scuola operaia serale femminile di Torino, aperta dalla sezione torinese dell'Unione femminile nazionale per preparare le lavoratrici a sostenere gli esami di licenza elementare.[24] Creata nel 1905, dopo quelle di Milano (1899), Roma (1903) e Firenze (1904), quella torinese è una delle sezioni più attive a livello italiano: oltre alla Scuola operaia comprende un ufficio indicazioni e assistenza, un ufficio di collocamento per domestiche, un consultorio privato per lattanti, l'Associazione insegnanti e impiegate civili e di commercio e l'Associazione studentesse universitarie.[25]

Sin dall'anno della fondazione, la sorella di Fano, Luisa Sacerdote, la moglie Rosa Cassin e la consuocera Adele Rabbeno Errera, sono coinvolte insieme ad altre signore e signorine della Torino ebraica (le figlie di C. Lombroso, le mogli di C. Segre e di A. Loria, la madre di A. e B. Terracini e molte altre ancora) nelle attività di questa sezione. Gli uomini non sono da meno e, oltre alle cospicue donazioni, non disdegnano di dare un aiuto concreto, tenendo lezioni e conferenze. Fano è fra coloro che si spendono maggiormente in questo contesto, tanto da esser nominato direttore della Scuola operaia serale femminile nel 1909. Sarà riconfermato nell'incarico per venticinque anni di seguito, fino al 1937 almeno (e forse fino all'esilio in Svizzera nell'inverno del 1938)[26] diventando "popolare tra le operaie" e amato per le lezioni che "con fare bonario e paterno, impartiva loro la domenica mattina".[27] Per questa sua azione a favore dell'istruzione pubblica popolare, sarà insignito della medaglia di Benemerito della Pubblica Istruzione nel 1928.[28]

Durante questo lungo periodo, Fano si occupa direttamente e nel modo più attivo dell'organizzazione e delle ispezioni nelle numerose sezioni collocate nei più popolosi quartieri suburbani della Torino dell'epoca (Barriera di Nizza, Barriera di Milano, Barriera di Lanzo, Madonna di Campagna, Borgata San Paolo , ecc.[29]) e coinvolge nell'insegnamento sue *ex*

---

[24] Le scuole operaie rispondono alle esigenze scaturite dalle disposizioni legislative contenute nel Testo Unico del 10.11.1907. Questo, infatti, prescrive che i minorenni, per essere ammessi al lavoro, debbano aver frequentato almeno il corso elementare inferiore e superato il relativo esame finale. Ciò avrebbe privato del proprio impiego un numero considerevole di persone, motivo per il quale il Governo concede una proroga temporale di due anni per consentire a lavoratori e industriali di mettersi in regola.

[25] Cfr. il documento dattiloscritto firmato da Ester Penati nel 1917, digitalizzato al link http://www.14-18.it/documento-manoscritto/168_85_01.

[26] La documentazione custodita all'interno del Fondo Unione femminile nazionale (Sezioni in altre città, sez. di Torino, b. 13, fasc. 81) si arresta purtroppo al 1936. Un attestato di frequenza (Gemma Barbero, 30.4.1937) conferma la presidenza di Fano almeno fino al 1937. Le leggi razziali del 1938 hanno poi interrotto ogni attività della Scuola.

[27] TERRACINI 1953, *cit.*, p. 710.

[28] Cfr. la lettera di Fano al presidente della R. Accademia Virgiliana del 24.11.1935 in JANOVITZ –MERCANTI, *cit.*, p. 150: "dal 1909 tengo, a Torino, la Presidenza di una Scuola serale femminile, intesa a completare l'istruzione elementare e post-elementare (avviamento al lavoro) di giovani operaie, attualmente con oltre 200 alunne. Per questo mi fu conferita nel 1928 la medaglia d'oro dei benemeriti della Pubblica Istruzione, per notevoli elargizioni e non comuni gratuite prestazioni a favore dell'istruzione popolare".

[29] Nell'a.s. 1909-10 la sezione di Barriera di Nizza aveva sede nella scuola elementare "G.E. Pestalozzi" di Via Monti 11 ed era suddivisa in tre classi con docenti Ginevra Conti, Teresa Robino ed Eugenia Guglielminetti. La seconda sezione era situata in via Leinì 20, presso un locale della Società Operaia di M.S. "Barriera di Milano"; era stata istituita per sostituire la sede di Borgo Aurora e, a causa della mancanza di locali, era composta da una sola classe, affidata ad Amalia Branca. Per la sezione Barriera di Lanzo le lezioni si svolgevano nelle aule

studentesse e assistenti come Teresa Moglia e Pia Locchi (assistente di Fano dal 1919 al 1924). Le lezioni hanno luogo tre sere a settimana e, naturalmente, si limitano ai rudimenti; per la matematica, ad esempio, le operazioni fondamentali e il sistema metrico decimale nelle classi inferiori, l'aritmetica applicata ai problemi della vita quotidiana e all'economia domestica in quelle superiori.[30] Convinto che "per alunne fra i 15 e i 20 anni, e non poche anche sopra i 20, l'insegnamento delle classi elementari, base imprescindibile di ogni altro, dovesse tuttavia esser integrato",[31] Fano istituisce visite a musei e impianti produttivi della città[32] e conferenze settimanali su argomenti di cultura generale, aperte anche ai familiari delle allieve, che occupano una quarta sera accanto alle tre dedicate alle lezioni. Si tratta inoltre di

> una specie di compromesso fra chi […] vagheggiava un'Istituzione a base di sole conferenze, e chi invece era di avviso che la coltura, in quei limiti qualsiansi che ad ogni singola persona convengono, non può esser acquistata da altri, ma deve essere conquistata con lavoro, con sforzi individuali.[33]

Conscio del fatto che "anche per le classi operaie l'istruzione deve tendere non soltanto a far acquistare determinate cognizioni, ma ad abituare ad una pur modesta disciplina intellettuale", Fano sottolinea l'importanza del dialogo e delle discussioni che nascevano da queste conferenze, che spesso assumevano il 'carattere di conversazioni' durante le quali le alunne potevano porre domande e chiedere spiegazioni "prendendo così in certo modo parte attiva allo svolgimento del tema".[34] Gli argomenti centrali di queste conferenze erano l'igiene personale e domestica, le malattie e il primo soccorso, la legislazione sociale con particolare riguardo agli infortuni sul lavoro e alle leggi relative all'impiego di donne e fanciulli.[35] Fano stesso ne tiene

---

dell'Asilo Infantile ed erano impartite da Giuseppina Scala. Infine, la sezione Madonna di Campagna aveva sede presso la Società Operaia di M.S. ed era gestita da Anna Da Frè-Vergetti A queste si aggiungono, nel corso del tempo, Valdocco, Campidoglio, Barriera di Lanzo nel 1915 e Vanchiglia nel 1921. Per ulteriori dettagli, cfr. E. MILETTO – M. NOVARINO 2011, *«… Senza distinzione politica e religiosa». Repertorio bibliografico e archivistico sull'associazionismo laico a Torino e provincia 1848-1925*, Torino, Centro Studi Piero Calamandrei, pp. 237-240.

[30] Accanto all'aritmetica, sono impartite le basi di italiano, storia, geografia e 'nozioni varie'. All'interno di quest'ultima disciplina è riservata grande attenzione all'economia domestica che include nozioni di pulizia e ordine della casa, cucina e alimentazione, lavaggio e smacchiamento della biancheria. Per quanto riguarda la lingua italiana, sono proposti esercizi di dettato, composizione, lettura e conversazione orale, "procurando in questi ultimi di addestrare le alunne a esprimersi con chiarezza e a periodi compiuti". Sono inoltre introdotti gli eventi più importanti della storia d'Italia dal 1815 al 1870 e le nozioni basilari di topografia (città e province), geografia dell'Italia e cosmografia.

[31] G. FANO 1910b, *Scuola Operaia Serale Femminile. Relazione 1909-1910. Unione Femminile Nazionale. Sezione di Torino*, Torino, Derossi, p. 12.

[32] Durante il solo a.s. 1909-10 le allieve visitano il Museo Civico, la R. Pinacoteca, il Museo di Antichità, il Museo Zoologico, l'Armeria Reale, il Museo Alpino e l'Officina della Società Consumatori Gas-Luce.

[33] *Ibidem*.

[34] *Ibidem*. Fano aggiunge: "Sotto questa forma l'istruzione è indubbiamente utilissima; ma dovrà essere in avvenire resa più organica, e meglio coordinata colla parte più propriamente scolastica".

[35] Le conferenze dell'a.s. 1909-10 risultano così suddivise. Sezione I: Letteratura popolare (B. Treves), Nozioni elementari di anatomia e fisiologia umana, con particolare riguardo all'igiene (O. Caporali), Dimostrazioni sperimentali e spiegazioni relative ad alcuni fenomeni astronomici: movimenti della terra, fasi lunari, eclissi, (G. Fano), Cause di degenerazione (I. Faggiani), Previdenza e in particolare Cassa Nazionale per l'invalidità e vecchiaia degli operai (E. Penati), Disposizioni legislative sul lavoro delle donne e dei fanciulli (F. Dalmazzo). Sezione II: Nozioni elementari di anatomia e fisiologia umana (L. Cantalamessa), Leggi sugli infortuni del lavoro e apparecchi di protezione (M. Carrara), Malattie infettive e soccorsi d'urgenza (A. Borrino). Sezione III: Rapporti

varie: una sulle *Dimostrazioni sperimentali e spiegazioni relative ad alcuni fenomeni astronomici: movimenti della terra, fasi lunari, eclissi* nell'anno scolastico 1909-10 e due sulle *Origini della guerra attuale* nel 1914.[36]

L'impegno che Fano, un austero geometra algebrico, assorto dalla ricerca e dall'alto insegnamento, profonde nella Scuola operaia serale femminile di Torino appare singolare, ad un primo sguardo. L'istruzione femminile, tanto più quella per le donne lavoratrici, non è infatti un aspetto preso in considerazione da nessuno degli altri grandi matematici che si occupano di didattica, neppure da quelli più impegnati nel sociale. Ad una lettura più attenta, invece, esso si inquadra perfettamente nella traiettoria biografica di Fano, e contribuisce a delineare un ritratto più definito della sua vita privata.

A giocare, in primo luogo, è una convinzione ideale, e cioè la rivendicazione del diritto universale all'istruzione e della parità di diritti in campo educativo:

> a qualunque età si ha bisogno di accrescere e rimodernare il patrimonio delle proprie cognizioni; e la donna non può nemmeno in questo essere inferiore all'uomo poiché, per esserne veramente la compagna, ha il dovere e il diritto di raggiungere la sua stessa elevazione intellettuale e morale.[37]

Ad essa si sposa poi una constatazione di carattere pratico: l'istruzione femminile ha importanti ricadute sulla società moderna, prima fra tutte nell'educazione dei figli, poiché "una donna che ha il sentimento dell'utilità dell'istruzione è una futura madre già acquisita alla causa della Scuola, è un elemento di civiltà e di progresso, che è interesse sociale che non vada perduto".[38]

Sono queste due istanze che portano Fano – ebreo ma del tutto estraneo alla vita comunitaria – ad avvicinarsi a un'enclave della Torino ebraica molto particolare: quella dall'associazionismo filantropico femminile, e in particolare della Pia Società Israelitica femminile – dalla quale la Scuola operaia serale femminile era patrocinata – che dal 1830 aveva sostenuto le bambine e le giovani con borse di studio e premi affinché completassero almeno l'intero ciclo della scuola primaria.[39]

---

tra casa e scuola (Z. Treves), Soccorsi d'urgenza (J. Del Bondio), Nozioni elementari di anatomia e fisiologia umana (L. Cantalamessa), Disposizioni legislative sul lavoro delle donne e dei fanciulli (F. Dalmazzo). Sezione IV: Nozioni varie di igiene personale e domestica (A. Borrino), Malattie del lavoro e malattie infettive (O. Caporali). In quest'ultima sezione in alcune sere le conferenze furono sostituite da lezioni di lavori femminili.

[36] Cfr. *Relazione 1914. Unione Femminile Nazionale. Sezione di Torino*, Torino, Anfossi, 1915, p. 6.

[37] FANO 1910b, *cit.*, p. 6. Alle parole di Fano fanno eco quelle dell'ispettrice scolastica della città di Torino, Giulia Alessandrini Mariani, *ivi*, p. 18: "tra le molteplici disarmonie sociali odierne, una è assai appariscente e funesta al conseguimento della nostra prosperità nazionale: quella dell'ignoranza della donna".

[38] *Ivi*, pp. 6-7. Questo tema è ripreso anche da Alessandrini Mariani, *ivi*, p. 18: "Una donna che avrà saputo valutare positivamente i vanteggi della coltura non permetterà mai che i suoi figli rimangano privi di tale beneficio; mentre una donna ignorante avrà per essi più a cuore un lavoro scarsamente remunerativo, per nulla curando le provvidenziali risorse offerte dalla scuola. E per la dimostrazione di questa tesi parla eloquentemente la statistica: mentre in Piemonte si ha il 5 per cento di spose analfabete, si ha una iscrizione alla scuola di circa 237 allievi su 1000 abitanti, e in Calabria l'8 per cento di spose analfabete si riflette sul numero degli iscritti alla scuola che è appena di 86 su 1000 abitanti".

[39] Cfr. B. TERRACINI 1932, *Il centenario della Pia Società israelitica di Torino: 1832-1932*, «La rassegna mensile di Israel» (2) 6.3, p. 106.

Ad aver inciso sulla sensibilità per l'istruzione popolare femminile, potrebbe esser stata anche l'esperienza personale di Fano. Tutte le donne della sua famiglia sono colte: la sorella, Maria Fano in Ettlinger, è un'acclamata traduttrice di romanzi dall'inglese, la moglie Rosa è pittrice. Alla nascita dei figli, come molte famiglie dell'agiata borghesia, si assume però una *nanny* e quella che si trasferisce in casa Fano è una donna "extremely intelligent but unschooled", che impara a leggere insieme al piccolo Ugo, quando all'età tre anni questi riceve in dono il libro dell'ABC.[40] L'aver sperimentato in prima persona l'assoluta inadeguatezza dell'istruzione femminile delle classi popolari – si tenga presente che le *nannies* non erano persone di servizio, ma membri della famiglia, poiché vivevano per molti anni nelle case dei bimbi affidati alle loro cure, vedendoli diventare grandi – potrebbe avere inciso sulla sensibilità di Fano verso questo aspetto e sul suo impegno in questo ambito.

Bisogna infine tener presente che anche il patriottismo di Fano potrebbe aver giocato un ruolo. La sua azione all'interno della Scuola operaia serale femminile, "istituzione che ha finalità eminentemente pratiche e positive",[41] è guidata dall'idea che l'istruzione pubblica debba "assicurare ad ognuno il più ampio sviluppo della sua personalità, e dargli in pari tempo il sentimento intenso del valore sociale e patriottico".[42] Oltre a contribuire al miglioramento della società, l'istruzione popolare aiuta a promuovere quel sentimento di unità nazionale che, a cinquant'anni dall'unificazione, faticava ancora ad affermarsi. L'elemento chiave di una nazione moderna è costituito, secondo Fano, dall'istruzione pubblica il cui prestigio "ha tanto bisogno di essere tenuto alto, sempre e ovunque!".[43]

5.3. Il ruolo di Fano all'interno della Mathesis

Ad eccezione di quelli connessi all'istruzione popolare femminile, gli interventi di Fano sulle questioni didattiche sono tutti strettamente collegati al contesto dell'Associazione fra gli Insegnanti di Matematica Mathesis, fondata a Torino nel 1895 da R. Bettazzi, A. Lugli e F. Giudice con l'obiettivo di realizzare "il miglioramento della scuola e il perfezionamento degl'insegnanti, sotto il punto di vista scientifico e didattico".[44] A partire dal 1908, Fano partecipa attivamente e ai congressi nazionali della società (Firenze, 1908; Padova, 1909; Genova, 1912; Trieste, 1919; Napoli, 1921; Milano, 1925)[45] e alle iniziative locali della sezione torinese, presso la quale tiene numerose conferenze: una sui fondamenti della geometria nel 1910,[46] una sull'intuizione alla luce del volume di P. Boutroux, *L'idéal scientifique des*

[40] FANO 2000, *cit.*, pp. 179-180.

[41] FANO 1910b, *cit.*, p. 18.

[42] FANO 1924d, *cit.*, p. 28.

[43] FANO 1922, *cit.*, p. 4.

[44] Sulla storia della Mathesis cfr. P. NASTASI 2002, *La Mathesis e il problema della formazione degli insegnanti*, in G. BOLONDI (ed.) *La Mathesis. La prima metà del Novecento nella Società italiana di Scienze matematiche e fisiche*, Pristem/Storia Note di Matematica, Storia, Cultura, vol. 5, Milano, Eleusi, pp. 59-119.

[45] Fano custodisce all'interno della sua biblioteca personale gli atti dei primi tre congressi della Mathesis (vols.

[46] G. FANO 1910c, *Sui fondamenti della geometria*, «Boll. Mathesis» 2, pp. 119-127. La conferenza di Fano sui fondamenti della geometria si va ad affiancare a quelle di Peano e di Amodeo sui principii dell'analisi e dell'aritmetica. Evidentemente quell'anno si era scelto un tema unitario per le conferenze di sezione.

mathématiciens (Paris, Alcan, 1920) nel 1922,[47] e due conferenze-lezioni sull'*Analysis situs* e la geometria algebrica nel 1926.[48]

Durante il lungo arco della sua presidenza della sezione di Torino (dal 1913) Fano fa da *trait-d'union* tra la Mathesis nazionale e il mondo della scuola piemontese, intervenendo, oltre che sul tema delle Scuole di Magistero (1921), in due dibattiti: quello sull'organizzazione dell'insegnamento nelle province redente e quello sulla Riforma Gentile.[49]

Sul primo aspetto, l'opinione di Fano è naturale. L'insegnamento nelle scuole redente, veri "focolari d'italianità",[50] è caratterizzato da un maggior numero di ore dedicate alla matematica, è privo di quelle artificiose considerazioni iper-critiche sui fondamenti che Fano detesta ed è generalmente impostato per problemi. Ispirati all'approccio di Klein,[51] i programmi di matematica svolti nei territori di Trento e Trieste gli appaiono migliori di quelli italiani per il "largo uso, in geometria, dell'intuizione" e per l'ampio spazio lasciato al concetto di funzione e rappresentazione grafica, precocemente introdotti insieme alla geometria analitica. Contrario a uniformarli con quelli del resto d'Italia, durante il Congresso della Mathesis che si svolge a Trieste (17-19 ottobre 1919), Fano suggerisce quindi di sfrondarli solo di quei contenuti che non sono necessari per affrontare i corsi universitari italiani, e propone il seguente ordine del giorno:

> Che il Ministero non abbia a provvedere all'unificazione dei programmi di matematica delle Scuole medie delle province redente prima d'aver udito il parere d'una rappresentanza degli insegnanti delle nuove province; che voglia intanto controllare a mezzo di ispezioni, i vantaggi dei programmi attualmente in vigore nelle scuole delle nuove province; e, tenendo conto di quanto in tali programmi apparisca meritevole di essere conservato, provveda eventualmente all'unificazione di cui sopra, in occasione di una prossima revisione generale dei programmi delle scuole medie del Regno.[52]

Rientrato a Torino, relaziona sulla questione delle scuole nelle terre redente durante la riunione del 20 novembre 1919 delle *Conferenze matematiche torinesi*. In quest'occasione, pur

[47] *Atti della Società Italiana Mathesis. Sezione Piemontese*, «Period. Mat.» (4) 2, 1922, pp. 405-410.

[48] *Atti della Società Italiana Mathesis. Sezione di Torino*, «Period. Mat.» (4) 6, 1926, pp. 303-304. Una traccia di queste comunicazioni si trova in BSMT, *FFa, Appunti vari*, cc. 139-142 ed è analizzata nel paragrafo successivo.

[49] Sul primo dibattito cfr. L. ZUCCHERI – V. ZUDINI 2007a, *Animi divisi. Vicende dell'insegnamento della matematica nella Venezia Giulia dal 1918 al 1923*, Trieste, EUT; ID. 2007b, *Identity and culture in didactic choices made by mathematics teachers of the Trieste Section of 'Mathesis' from 1918 to 1923*, «The International Journal for the History of Mathematics Education» 2.2, pp. 39-65. Sulle reazioni alla Riforma Gentile cfr. G. ISRAEL 1998, *Vito Volterra e la riforma scolastica Gentile*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (8) 1-A, pp. 269-287; L. GIACARDI 2006, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*, in *Da Casati a Gentile*, in L. GIACARDI (ed.), *Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Lumières Internationales, pp. 1-63; O. POMPEO FARACOVI 2006, *Enriques, Gentile e la matematica*, in L. GIACARDI (ed.), *Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Lumières Internationales, pp. 305-321.

[50] *Conferenze matematiche torinesi*, «Boll. Mathesis» 12, 1920, pp. 114-115.

[51] Cfr. L. ZUCCHERI – V. ZUDINI 2012, *Didattica della matematica nell'Impero asburgico e nel Regno d'Italia all'inizio del XX secolo:un confronto*, «QuaderniCIRD» 4, p. 10. In Austria si tiene subito conto delle nuove idee affermatesi nel contesto internazionale e delle indicazioni della *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*, presieduta da Klein. Queste sono recepite nella Riforma del ministro G. Marchet, in vigore dall'a.s. 1909-10, con provvedimenti che interessano il Ginnasio, il Ginnasio Reale e la Scuola Reale.

[52] *Conferenze matematiche torinesi*, «Boll. Mathesis» 12, 1920, p. 62.

rilevando lo “svolgimento meno sistematico” dei programmi, Fano sottolinea l’importanza di escludere dall’insegnamento tutto ciò che richiede “particolari artifizi”.[53] Ciò che più lo entusiasma – e su cui informa i colleghi torinesi – è il ruolo rivestito dalla nozione di funzione all’interno della formazione dei giovani delle province redente: questa compariva a partire già dalla seconda classe, tramite esempi aritmetici e geometrici.[54] Il concetto di dipendenza funzionale era infatti introdotto considerando sia la proporzionalità diretta e inversa sia il cambiamento delle aree e dei volumi delle figure al variare delle dimensioni dei loro elementi. Le equazioni di primo e secondo grado, introdotte dalla quarta classe, erano discusse a partire da problemi, puntando sulla rappresentazione grafica su carta millimetrata. Anche le funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche, studiate al sesto anno, erano affrontate con metodi grafici. Soltanto durante la settima e ultima classe si passava al calcolo differenziale e integrale, dando ampio spazio alle applicazioni alla fisica. Pur senza citarlo, Fano apprezza il “metodo Jacob” per l’insegnamento del calcolo infinitesimale utilizzato in Austria e, di conseguenza, nei territori di Trento e Trieste.[55] Si tratta di un metodo ‘pratico’ che parte da alcuni aspetti della teoria della conoscenza di E. Mach – della quale si trova un’eco in vari scritti di Fano[56] – e li applica all’insegnamento della matematica. Obiettivo primario è lo sviluppo contemporaneo e armonico delle facoltà intuitiva, deduttiva e creativa dello studente che è posto al centro del processo di insegnamento-apprendimento: ciò che conta è l’effettiva comprensione e interiorizzazione dell’argomento, piuttosto che il rigore matematico. È, questo, un punto che Fano non può che condividere. Il metodo Jacob, inoltre, raccomanda di lavorare il più a lungo possibile sui concetti matematici, introducendo solo in un secondo momento i teoremi. Ad esempio, si suggerisce di avvicinare gli studenti al concetto di derivata osservando la crescita (o la decrescita) di una funzione. Richiamando poi alla mente dell’allievo l’esperienza corporea di una salita (o discesa) lungo una strada, si può introdurre il concetto di pendenza di una retta per poi generalizzarlo al caso di una curva. Al di là delle differenze a livello di contenuti tra i programmi del Regno d’Italia e quelli delle terre redente, Fano sembra ammirare la diversa impostazione didattica, di tipo pratico e ‘laboratoriale’, caratterizzata da metodologie educative più aderenti alle idee kleiniane di cui egli – fin dalla gioventù – è propugnatore in Italia. Apprezza, infine, l’attenzione ai legami interdisciplinari della matematica con materie affini (geografia, fisica, …) che si traduce – a livello pratico – nello stretto collegamento nell’insegnamento di matematica e fisica proposto nelle nuove province. Lo stretto rapporto tra le due discipline, infatti, da un lato contribuisce a far comprendere l’importanza della matematica; dall’altro, la trattazione matematica della fisica permette di rendere più chiaro e rigoroso l’insegnamento di quest’ultima.

Si tratta di un aspetto che Fano probabilmente recepisce da Klein e dalle nuove correnti affermatesi in contesto internazionale e che segnerà anche tutti i suoi interventi nell’ambito della Riforma Gentile del 1923, in merito alla quale le sue posizioni sono invece più sfumate. Fin da subito, Fano non assume infatti un atteggiamento del tutto oppositivo. Pur comprendendo

---

[53] *Ivi*, p. 114.

[54] Per ulteriori dettagli sui programmi di matematica nelle province redente, cfr. ZUCCHERI – ZUDINI 2012, *cit.*, p. 11.

[55] Sul metodo Jacob, cfr. *ivi*, pp. 12-13.

[56] Tra i principi della teoria di Mach abbracciati da Fano vi è il ruolo della scienza come economia di pensiero. Cfr., *inter alia*, G. FANO 1908a, *La geometria non euclidea*, «Scientia» 26, p. 277; FANO 1924d, *cit.*, p. 19:

i docenti che lamentano l'inadeguatezza degli orari e il sovraccarico di lavoro[57], pur deprecando l'assenza degli insegnamenti scientifici nel liceo femminile,[58] Fano condivide ad esempio con Gentile ed Enriques la convinzione della centralità dell'asse ginnasio-liceo classico nel sistema d'istruzione italiano. A differenza di un Castelnuovo o di un Volterra, egli è inoltre favorevole all'abbinamento matematica-fisica e all'istituzione delle lauree miste in Matematica e Fisica (R.D. del 19.2.1922), destinate a supplire alla mancanza di insegnanti adeguatamente preparati a insegnare le due discipline attraverso l'istituzione di corsi di esercitazioni didattiche di fisica e di matematiche complementari. Il suo giudizio di questo tipo di corsi di laurea – in qualche modo forse 'condizionato' dai rapporti di amicizia con E. Fermi, E. Segré e E. Persico, e dall'esperienza del nipote Giulio Racah, fisico teorico a Firenze – è talmente positivo che Fano suggerirà al figlio Ugo di conseguire proprio la laurea mista in Matematica e Fisica, con una tesi diretta da Persico, chiamato a Torino nel 1930.

Le opinioni di Fano sul nuovo assetto gentiliano non restano confinate alle riunioni della Mathesis, ma diventano oggetto di un Pro-Memoria, scritto su invito di Lorey e pubblicato nelle «Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften» nell'aprile del 1925. La richiesta di Lorey (con cui Fano aveva seguito i corsi di Klein a Göttingen nel 1893-94) è precisa: esprimere un giudizio di merito sulla Riforma Gentile, anche alla luce della conoscenza che Fano ha della realtà scolastica tedesca. La riposta, pur estremamente sintetica, è ben articolata e completa. Fano individua due punti ai quali sono state mosse le maggiori obiezioni: l'eccessivo carico didattico degli insegnanti (portato a 24 ore settimanali per ragioni economiche) che, sommandosi alla preparazione delle lezioni, alla correzione dei compiti e alla gestione del gabinetto di fisica, li priva della possibilità di investire tempo e risorse nella propria formazione, e la questione degli abbinamenti. Pensati con l'obiettivo di diminuire il numero di docenti per classe rendendo "più armoniosa l'educazione intellettuale dei giovani", gli abbinamenti sono stati introdotti precipitosamente, secondo Fano, "anche se non c'erano ancora insegnanti ben preparati; pensando, e forse non a torto, che se non fosse accaduto subito, sarebbe potuto non accadere mai".[59] Le lauree miste porranno rimedio a questo stato di cose, ma "è ancora troppo presto per vedere il risultato". Nel frattempo, a causa dell'impostazione così diversa dei due corsi di studi universitari in Italia (un'impostazione logico-deduttiva per la matematica, empirico-sperimentale per la fisica), gli insegnanti non possono far altro che supplire alle proprie lacune mediante lo studio individuale. Peraltro – e Fano ha ragione a sottolinearlo – è assai difficile acquisire quella 'doppia mentalità' necessaria ad insegnare ugualmente bene due materie, senza privilegiarne una rispetto all'altra anche se coloro, come lui stesso, che credono nell'unità della scienza "riconoscono i punti di contatto e la necessità di una buona integrazione degli insegnamenti" di matematica e fisica, e anche di fisica e chimica, in un momento storico in cui la chimica tende ad essere assorbita in larga misura nella fisica atomica. Le tesi del Pro-Memoria sono ribadite da Fano di fronte al pubblico del congresso

---

[57] E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2020a, *Insegnare la geologia con l'alpinismo e l'idrodinamica con il canottaggio. Gli insegnanti di matematica torinesi di fronte agli abbinamenti gentiliani*, in R. BONINO, D. MAROCCHI, M. RINAUDO, M. SERIO (eds.), *Atti del IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica Di.Fi.Ma. 2019*, Torino, Università degli Studi, 2020, pp. 269-274.

[58] *Atti della Società Italiana Mathesis. Sezione Piemontese*, «Period. Mat.» (4) 3, 1923, pp. 357-360.

[59] W. LOREY 1926, *Zur Schulreform*, «Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften: Organ des Bereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts» 32.1, p. 24.

Mathesis di Milano (1925), strizzando l'occhio ai colleghi tridentini che, come lui, sono fra i meno critici agli abbinamenti:

> forse perché le scuole dell'Italia redenta si trovavano già inquadrate dall'Austria, come tutto, in un ordinamento statale e non nazionale, sì che, come si abbinavano i popoli nelle diverse parti dell'impero, ben si poteva spingere l'abbinamento nelle scuole assai più arditamente di quanto non abbia fatto la nostra Riforma.[60]

Oltre che fra i matematici, il confronto sulla Riforma Gentile si consuma anche nel mondo della fisica italiana. La Società Italiana di Fisica, presieduta da Q. Majorana, vi si schiera apertamente contro e la rivista organo della società, il «Nuovo Cimento», per una decina di anni ospita vari interventi critici sugli abbinamenti e una rubrica con suggerimenti e indicazioni per i docenti.[61] Fra le voci del dibattito sul «Nuovo Cimento» vi è anche quella di Fano. Questa, in sintesi, la vicenda. Nel 1934 Majorana pubblica l'ennesimo articolo volto a rimarcare l'insufficiente preparazione dei professori nel campo della fisica sperimentale e i disastrosi effetti del 'decadimento' dell'insegnamento secondario sul mondo della ricerca e, di conseguenza, sul progresso della nazione. Così, pur riconoscendo i passi in avanti fatti sul fronte dei programmi e delle dotazioni sperimentali delle scuole, Majorana conclude che sia tra i fisici che tra i matematici "i più obbiettivi (e sono la maggioranza) vorrebbero augurarsi un ritorno all'antico".[62] Fano replica a stretto giro di posta: la separazione degli insegnamenti di matematica e fisica, determinata dalla vieta opposizione tra scienze esatte e sperimentali, non è più attuale, anzi dal primo Novecento il compito del buon insegnante di scuola secondaria è sempre più diventato quello di mostrare che "la matematica è fisica nella realtà" e la fisica "dice di che cosa si parla nella matematica e fa sentire ciò che è vero".[63] Il problema della mancanza di insegnanti adeguatamente preparati, poi, è stato risolto attraverso l'istituzione delle lauree miste e altri margini di miglioramento potranno darsi: ad esempio, per Fano, più che agire sul monte ore settimanali occorrerebbe farlo sulla loro suddivisione fra molte classi, addirittura otto e con undici programmi diversi nel ginnasio-liceo. Fano conclude comunque asserendo che

> più assai di ogni dettaglio importerà sempre […] lo spirito a cui sapremo tutti informare il nostro insegnamento, la chiarezza dei concetti fondamentali che riusciremo a imprimere ai nostri allievi, l'inquadramento che, in qualsiasi ordine di scuole, sapremo dare alle loro menti.[64]

---

[60] *Atti del Congresso della Società Italiana Mathesis*, «Period. Mat.», (4) 6, 1926, p. 50.

[61] L'astrofisico Alessandro Amerio sostiene ad esempio che i laureati in matematica non sono né potranno mai diventare buoni docenti di fisica, mentre può accadere il contrario, poiché la preparazione matematica dei fisici, seppur meno profonda di quella dei matematici puri, è sufficiente per l'insegnamento. Fra gli interventi a favore vi è invece quello di Bompiani, favorevole all'abbinamento matematica-fisica per "l'identità del processo mentale" delle due discipline e nel nome dell'unitarietà dello spirito scientifico. Cfr. *Notiziario. La preparazione fisica dei candidati ai concorsi*, «Nuovo Cimento» 6, 1929, pp. CXXVII-CXXVIII e *Notiziario. Per l'insegnamento della matematica e della fisica*, «Nuovo Cimento» 7, 1929, pp. LXII-LXIII.

[62] Q. MAJORANA 1934, *Sull'insegnamento della fisica in Italia*, «Nuovo Cimento» 11.6, p. 410.

[63] Entrambe le frasi sono di Luigi Puccianti. Sono tratte, rispettivamente, da L. PUCCIANTI 1926, *Considerazioni didattiche comunicate al congresso di Roma–Dicembre 1925*, «Nuovo Cimento» 3, p. XLIV; ID. 1934, *Per l'insegnamento elementare della fisica*, «Nuovo Cimento» 11.4, pp. 257-258.

[64] G. FANO 1935a, *A proposito della nota del prof. Majorana: Sull'insegnamento della fisica in Italia*, «Nuovo Cimento» 12, pp. 50-51.

Immediata la contro-replica di Majorana: “troppo vasto è il campo della fisica e della matematica per potere ammettere come sufficiente la cosiddetta laurea mista per la formazione dei docenti di fisica”.[65] Soltanto nel 1940, peraltro denunciando ancora una volta il regresso dell’ordinamento scolastico italiano, Majorana riconoscerà i progressi compiuti nell’ambito delle lauree miste, proponendo di potenziarne ulteriormente l’offerta formativa con l’introduzione di quattro annualità di fisica (meccanica, ottica, termologia, elettrologia).[66]

5.4. Analysis situs e geometria algebrica

Nel maggio del 1926, a distanza di tre mesi dalla sua riconferma a presidente della sezione torinese della Mathesis, Fano tiene una conferenza in due parti intitolata *Analysis situs e geometria algebrica*. Il testo integrale della conferenza non è stato pubblicato; tuttavia, a partire da alcune minute presenti all’interno degli *Appunti vari*, è possibile ricostruire i contenuti e la struttura dei due interventi di Fano alla Mathesis.

Per introdurre il tema, Fano fa riferimento a G.W. Leibniz cui attribuisce il merito di aver coniato il termine di analysis situs. Richiama poi l’aspetto qualitativo di questa branca della geometria, sottolineato anche da Enriques e Poincaré. Se da un lato, citando Enriques, Fano attribuisce all’analysis situs il ruolo di “sostrato puramente qualitativo, comune alla geometria proiettiva e alla geometria metrica”, dall’altro aggiunge che si tratta della parte “più primitiva, più primordiale” della geometria. Tuttavia, secondo Fano, per arrivare a una definizione efficace dell’analysis situs è necessario guardare al Programma di Erlangen. Infatti:

> Meglio di tutto l’Analysis Situs si lascia caratterizzare dal punto di vista sviluppato, per le varie geometrie, da Klein nel suo “Programma” di Erlangen, come lo studio di quelle proprietà delle figure che hanno carattere invariante rispetto a “deformazioni arbitrarie” di queste, purché fatte con continuità; o, da un punto di vista un po’ più generale e astratto, rispetto a corrispondenze biunivoche senza eccezione, e continue – varietà omomorfe o omeomorfe – rappresentate perciò analiticamente da funzioni o sistemi di funzioni continue, univoche e univocamente invertibili, senza eccezioni – per le quali non sarebbe nemmeno ipotesi necessaria la analiticità, nemmeno la derivabilità.[67]

Una volta definita l’analysis situs (o topologia) come la branca della geometria che studia le proprietà invarianti per trasformazioni continue, Fano presenta un interessante excursus storico sulla disciplina. Già nel Settecento, infatti, erano emerse alcune questioni isolate ad essa collegate come la formula di Euler per i poliedri e il problema dei sette ponti di Königsberg. La topologia diventa disciplina autonoma solo a metà Ottocento, con l’opera di J.B. Listing.[68] Tuttavia, secondo Fano, “il passo più importante” è compiuto da Riemann e da A.F. Möbius. Il primo, infatti, sfruttò alcune considerazioni sulla connessione delle superfici per studiare le funzioni algebriche e i loro integrali; il secondo introdusse il concetto di superficie unilatera. Fano mette poi in luce la “tendenza allo spezzamento dell’Analysis Situs in due grandi

[65] *Ivi*, p. 51.

[66] Q. MAJORANA 1940, *L’insegnamento della Fisica*, «Nuovo Cimento» 17, p. 27.

[67] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*r*.

[68] Cfr. J.B. LISTING 1848, *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.

branche”[69] che si registra alla fine del XIX secolo: la prima, seguendo le impronte di Riemann, è l’analysis situs delle varietà continue; la seconda è rappresentata dalla topologia combinatoria. Fano specifica che durante la conferenza si occuperà solo della prima, in quanto “è quella più interessante per la geometria algebrica”.[70] Tuttavia, non si può

> tacere che la II è andata acquistando importanza scientifica rapidamente crescente: è essa che […] tende a assorbire la I. Il difetto che alla I poteva rimproverarsi era di fondarsi in buona parte su nozioni intuitive, di non avere basi logiche, postulati non ben definiti. A questo difetto, rimanendo nel campo sintetico, si può rimediare prendendo le mosse dalla II […].[71]

Fano inserisce dunque un’osservazione di carattere metodologico-fondazionale: la topologia combinatoria può, almeno in parte, colmare le lacune fondazionali dell’analysis situs del continuo, dando basi più solide all’idea intuitiva di superficie. Tuttavia, citando il lavoro di H. Tietze del 1908,[72] Fano precisa che alcune restrizioni sono ancora necessarie; quindi “forse, anche per questa via, dal punto di vista del fondamento logico, l’ultima parola non è detta ancora”.[73] Ma ciò che interessa a Fano sono le applicazioni della topologia alla geometria algebrica. Per affrontare questo tema, egli ha bisogno di introdurre tre caratteri fondamentali per le superfici, che costituiscono degli invarianti nel campo dell’analysis situs. Il primo è il numero r dei contorni; in particolare, se $r = 0$ si ha una superficie chiusa ed è questo il caso cui Fano è maggiormente interessato. Il secondo carattere fondamentale è dato dal numero massimo di retrosezioni non intersecantisi a due a due che possono essere tracciate sulla superficie senza spezzarla, ossia quelle curve tali che tra due punti della superficie esista ancora un cammino continuo che non interseca nessuna di esse. Il concetto di retrosezione qui introdotto da Fano è un antesignano dell’attuale nozione topologica di retrazione.[74] La distinzione tra superfici bilatere e unilatere rappresenta il terzo e ultimo invariante fondamentale. Per illustrare questi tre concetti, Fano propone alcuni esempi significativi. Per quanto riguarda le retrosezioni, egli richiama la differenza tra il piano di Argand-Gauss, topologicamente equivalente alla sfera, e il piano proiettivo. Come esempio di superficie unilatera, è esaminato il nastro di Möbius di larghezza infinita. Ciò dà modo a Fano di approfondire alcuni aspetti notevoli delle superfici unilatere – come il fatto che “non ha senso parlare di volume”[75] – per arrivare a introdurre il concetto di equivalenza topologica:

> Per l’equivalenza di 2 superfici dal punto di vista dell’Analysis Situs è necessario e sufficiente che abbiano lo stesso numero di contorni; stesso numero di retrosezioni, …; entrambe bilatere, oppure unilatere.[76]

---

[69] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 139*v*.

[70] *Ibidem*.

[71] *Ibidem*.

[72] H. TIETZE 1908, *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, «Monat. Math. Phys.» 19, pp. 1-118.

[73] Ibidem.

[74] Dato uno spazio topologico X, $Y \subseteq X$ è detto retratto di X se esiste una mappa $r: X \longrightarrow Y$, detta retrazione, tale che $r(y) = y, \forall y \in Y$.

[75] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 140*r*.

[76] BSMT, *FFa, Appunti vari*, c. 140*v*.

Infine, Fano introduce un collegamento tra geometria algebrica e topologia: osserva infatti che per le superfici bilatere chiuse, caso di maggiore interesse per la geometria algebrica, il numero massimo di retrosezioni coincide con il genere p. Il valore $2p$ è detto connessione o indice di connessione della superficie. Fano conclude questa prima parte della conferenza affermando che due superfici bilatere chiuse sono topologicamente equivalenti se hanno lo stesso ordine di connessione.

Obiettivo del secondo intervento, tenuto da Fano il 29 maggio 1926, è estendere quanto presentato per le superfici al caso n-dimensionale, prendendo in esame i continui a più dimensioni. In apertura del discorso, è nuovamente presente un cenno storico: i primi passi in questa direzione sono stati compiuti da Riemann e da Betti negli anni Settanta dell'Ottocento e, sottolinea Fano, si tratta di "manifestazioni forse non del tutto indipendenti fra loro, dati i lunghi soggiorni di Riemann a Pisa, e i rapporti personali con Betti".[77] Mentre le nozioni di bordo e di varietà unilatera/bilatera sono facilmente estendibili a varietà a n dimensioni, più complessa è la questione della connessione. Per ogni intero $k < n$ si avrà un indice di connessione a k dimensioni: tali indici, rimarca Fano, sono comunemente noti come "numeri di Betti, benché quella definizione dei valori che si sono rivelati più opportuni di essere assunti come tali indici non siano esattamente quelli considerati da Betti".[78]

Prima di passare al caso n-dimensionale, Fano si sofferma su alcuni esempi di continui tridimensionali che gli consentono di mettere in luce l'indipendenza tra connessione lineare e connessione superficiale. Il primo esempio è quello della zona compresa tra due sfere concentriche: in questo caso è possibile ridurre per continuità ogni linea chiusa a un punto, mentre ogni superficie non può essere ridotta a un punto o a una linea. Se si considera invece la regione interna a un toro, si può ridurre ogni superficie a un punto o a una linea ma non ogni linea a un punto. La regione compresa tra due tori aventi lo stesso cerchio-asse rappresenta il terzo e ultimo esempio fornito da Fano: qui vi sono linee chiuse non riducibili a punti e neanche riducibili l'una all'altra.

Dopo aver messo in guardia il pubblico sul fatto che "i concetti fondamentali hanno già subito trasformazioni, modificazioni, adattamenti", Fano passa a considerare varietà a n dimensioni V_n concentrandosi su quelle bilatere chiuse in quanto è questo "il caso interessante per la geometria algebrica".[79]

Innanzitutto, è generalizzato il concetto di ciclo lineare su una superficie, ossia qualsiasi cammino chiuso su di essa. Fano introduce così i k-cicli, con $1 \leq k \leq n-1$, che denota con Γ_k. In particolare, per $k = 1$ si ritrovano i cicli lineari mentre se $k = 2$ si parla di cicli superficiali. Come i cicli lineari orientati determinano il contorno di una superficie bilatera, allo stesso modo più k-cicli orientati $\Gamma_k', \Gamma_k'', \dots, \Gamma_k^{(i)}$ possono formare all'interno della varietà V_n una sottovarietà M_{k+1} orientabile. In tal caso, formalmente si scrive che

$$\Gamma_k' + \Gamma_k'' + \cdots + \Gamma_k^{(i)} \sim 0.$$

Come sottolineato da Fano, questa relazione rappresenta un'omologia, concetto fondamentale di tutta la topologia. In termini moderni, questo significa che se V_n è una varietà

[77] *Ibidem*.

[78] *Ibidem.*

[79] BSMT, *FFa, Appunti vari,* c. 141*r*.

di dimensione n e M_{k+1} una sua sottovarietà di dimensione $k+1<n$ allora il bordo di M_{k+1}, se non è vuoto, è composto da i sottovarietà di dimensione k.

Fano osserva poi, senza dimostrarlo, che le omologie possono essere sommate, moltiplicate per un intero e sottratte, dove l'operazione di sottrazione equivale alla somma con l'orientamento opposto: "ha quindi senso" – afferma Fano – "una qualsiasi relazione $\sum_p \lambda_p \Gamma_k^{(p)} \sim 0$, colle λ intere, positive o negative, non tutte nulle".[80]

A questo punto, è introdotta una serie di definizioni, a partire da quella di k-cicli indipendenti (o distinti): si tratta di più cicli che non soddisfano un'omologia, ossia nessuna loro combinazione lineare costituisce la frontiera completa di una sottovarietà M_{k+1}. Il numero massimo di cicli indipendenti è denotato con R_k e costituisce un invariante topologico fondamentale: l'indice di connessione a k dimensioni. Gli R_k sono invarianti rispetto a tutte le trasformazioni continue e biunivoche senza eccezioni. Per i k-cicli, inoltre, da $\lambda\Gamma_k \sim 0$ non segue $\Gamma_k \sim 0$: in tal caso Γ_k è detto divisore dello zero o divisore a k dimensioni. Se $\lambda > 1$ è il minimo intero per cui $\lambda\Gamma_k \sim 0$, $\Gamma_k, 2\Gamma_k, \dots, (\lambda-1)\Gamma_k$ sono tutti divisori distinti. Per ogni valore di k, il numero complessivo finito $\sigma_k \geq 1$ di tali divisori rappresenta un altro carattere invariante di V_n, il cosiddetto indice di torsione a k dimensioni, individuato da Poincaré. Fano introduce poi il gruppo di torsione a k dimensioni che opera sui k-cicli, in cui l'identità è data dall'operazione che manda ogni ciclo in un ciclo ad esso omologo. Al gruppo di torsione sono legati altri invarianti topologici, i coefficienti di torsione, il cui prodotto è pari a σ_k. Tuttavia, osserva Fano,

> La coincidenza di tutti questi invarianti non è condizione sufficiente per l'omeomorfismo. Sulle "condizioni necessarie e sufficienti" forse non è detta l'ultima parola [...]. Le questioni di Analysis Situs si complicano notevolmente al crescere del numero di dimensioni.[81]

Dopo aver illustrato la relazione di equivalenza tra due cicli lineari uscenti da uno stesso punto, Fano introduce il gruppo fondamentale di Poincaré concludendo che un'ulteriore condizione necessaria affinché due varietà siano omeomorfe è che abbiano gruppi fondamentali isomorfi.

L'ultima parte della conferenza è dedicata a tre proprietà fondamentali soddisfatte dai caratteri invarianti di una varietà bilatera chiusa V_n. La prima proprietà è espressa dalla relazione $R_k = R_{n-k}$, ossia: gli indici di connessione equidistanti dagli estremi sono uguali. Conseguenza di cio è la terza proprietà illustrata da Fano: i gruppi di torsione G_k e G_{n-k-1} sono isomorfi e, in particolare, G_{n-1} si riduce all'identità. Vale inoltre una generalizzazione della formula di Euler per i poliedri. Denotando con α_0 il numero dei vertici, α_1 quello degli spigoli e α_2 quello delle facce, Fano osserva che la formula $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ per i poliedri la cui superficie è isomorfa a una sfera diventa $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$ se la superficie è di genere p e le facce uniconnesse. Poiché in tal caso vi è un solo indice di connessione $R_1 = 2p$, assumendo per convenzione $1 = R_0 = R_n (= R_2$, in questo caso) vale la relazione

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - R_1 + 1 = R_0 - R_1 + R_2.$$

[80] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 141*v*.

[81] BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 142*r*.

Tale formula si generalizza al caso n dimensionale. Infatti, denotando con α_i il numero delle celle a i dimensioni del poliedro ($i \leq n$), si ha

$$\sum_0^n (-1)^i \alpha_i = \sum_0^n (-1)^i R_i.$$

Fano termina con un'osservazione: se n è dispari, poiché per la prima proprietà $R_k = R_{n-k}$, il secondo termine dell'uguaglianza è uguale a zero. Di conseguenza, il primo membro è indipendente dai numeri di Betti.

5.5. Uno sguardo alla costruzione della conferenza alla Mathesis

La produzione scientifica di Fano non annovera contributi di analysis situs. Tuttavia, non è la prima volta che egli opta per questo tema davanti a un pubblico misto come quello della sezione torinese della Mathesis: già nel 1923, ad Aberystwyth, durante la seconda conferenza generale – *All geometry is theory of relativity* – Fano aveva dedicato ampio spazio alla topologia. La motivazione di tale scelta, in Galles come alla Mathesis, è quella messa in luce nel primo lavoro pubblicato da Fano su «Scientia» nel 1924: l'"Analysis Situs, o teoria del continuo e della connessione, [è la] branca che si presta più facilmente di altre a essere illustrata anche a un pubblico non specialista".[82]

Bisogna anche tener presente che, all'interno dello stesso numero di «Scientia», Fano aveva firmato due contributi di carattere divulgativo dedicati proprio alla topologia.[83] Aveva inoltre inserito una sezione dedicata all'analysis situs anche all'interno del suo corso di Geometria superiore del 1924-25. Questo insieme di diversi interventi che si collocano nel triennio precedente al 1926 ha sicuramente giocato un ruolo nella scelta del tema da presentare agli insegnanti delle scuole secondarie e ai colleghi della Mathesis il sabato mattina. Fano, infatti, ha maturato una serie di riflessioni di carattere sia metodologico sia matematico che ben si collocano nello spirito delle conferenze della Mathesis. Avendo presentato l'argomento di fronte a pubblici diversi (dai lettori di «Scientia» agli studenti di Torino e Aberystwyth), ha sviluppato una certa sensibilità che lo guida nella scelta delle parti più adatte da presentare alla Mathesis. Infine, ha già effettuato una selezione della letteratura che lo porta a inserire diversi riferimenti puntuali all'interno delle minute manoscritte.

Pur non comparendo tra gli estratti della miscellanea di Fano, gli articoli citati (in particolare, quelli di Riemann, Tietze, Picard e Jordan) sono presenti all'interno delle collezioni di riviste tedesche e francesi della Biblioteca Speciale di Matematica di Torino: «Journal für die Reine und Angewandte Mathematik», «Monatshefte für Mathematik und Physik», «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées». Analogamente, le opere complete di Poincaré e di Betti sono a disposizione di Fano sugli scaffali della BSMT. Tra gli opuscoli personali, egli conserva l'articolo di Picard del 1892 relativo ai legami tra gli integrali e la teoria delle superfici algebriche, ricerche per le quali il matematico francese è citato da Fano durante la conferenza

[82] G. FANO 1924a, *I gruppi di trasformazioni nella geometria*, «Scientia» 36, p. 150.

[83] G. FANO 1924b, *L'analysis situs I*, «Scientia» 36, pp. 217-230; ID. 1924c, *L'analysis situs II*, «Scientia» 36, pp. 289-300.

del 1926.[84] Tuttavia, il vero *point de repère* di Fano per la topologia è il saggio dell'EMW sull'analysis situs di Max Dehn e Paul Heegaard[85] che, tra l'altro, precede il suo contributo sulla dialettica tra geometria sintetica e analitica nel XIX secolo all'interno del terzo tomo dell'enciclopedia tedesca. Fano, oltre a possedere l'*Encyklopädie* nella sua biblioteca personale, ne conosce bene i contenuti ed è quindi in un certo senso naturale che, pur selezionando un piccolo numero di argomenti da affrontare e riducendo notevolmente il grado di dettaglio, si affidi alla trattazione dei geometri tedeschi, condividendone diversi aspetti: il taglio storico e le osservazioni sul metodo *in primis*.

L'*excursus* storico con cui Fano apre la prima parte del suo intervento alla Mathesis non compare né su «Scientia» né all'interno della conferenza di Aberystwyth o del corso di Geometria superiore del 1924-25; presenta invece notevoli punti in comune con il saggio dell'EMW, con alcuni rimandi quasi testuali.[86] I riferimenti ai lavori di Leibniz, Descartes, Euler, Poincaré, Riemann, Betti e Listing sono i medesimi, così come l'accento sul ruolo del Programma di Erlangen di Klein. Quest'ultimo è un aspetto cruciale, sottolineato da Fano in tutte le occasioni in cui affronta questo tema, da Aberystwyth a Torino.[87] Gli unici autori citati nell'EMW, ma non da Fano, sono Kronecker e P.G. Tait. Viceversa, già in apertura Fano pone l'accento sull'opera di Möbius, a differenza di quanto fatto da Dehn e Heegaard. Accanto allo sviluppo storico dell'analysis situs, Fano condivide con i geometri tedeschi la visione del metodo della topologia. Pur non proponendo alla Mathesis la parte di topologia combinatoria che copre le prime sette sezioni del saggio dell'EMW e che – come sottolineato durante la conferenza – permette di fornire più solide fondamenta all'intera teoria, Fano sottolinea il ruolo dell'intuizione geometrica nel campo dell'analysis situs. Riprende così l'impostazione di metodo che Dehn e Heegaard, nella decima sezione del saggio, esprimevano in questi termini:

> Attraverso gli sviluppi dei primi sette numeri di questa sezione, l'analysis situs è presentata come la parte del calcolo combinatorio che si distingue per il suo significato descrittivo. Ciò è già di grande importanza per la coerenza degli assiomi enunciati al n. 8. Nella presentazione che segue di ciò che è stato finora realizzato in analysis situs, non sempre si aderisce rigorosamente a questo punto di vista; al contrario, spesso si traggono conclusioni importanti con l'aiuto dell'intuizione: l'intuizione non è solo la misura del significato dei singoli risultati, ma è anche la migliore guida per scoprire nuovi teoremi e le loro dimostrazioni. Ma in ciascuno di questi casi si può vedere senza difficoltà che le conclusioni in questione possono essere raggiunte anche solo con l'aiuto dei precedenti sviluppi astratti, così come in generale tutte le considerazioni speciali che sono state fatte in qualche momento nel nostro campo hanno come fondamento naturale le nostre

[84] Trattasi dell'opuscolo n. 3203 della miscellanea Fano. É. PICARD 1894, *Sur la théorie des surfaces algébriques*, «Jour. Math.» (4) 5, pp. 135-319

[85] M. DEHN – P. HEEGAARD 1907, *Analysis situs*, in EMW, Bd. 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 153-220.

[86] Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*r* con DEHN – HEEGAARD 1907, *cit.*, p. 171: "Die Analysis situs ist eben der primitiviste Abschnitt der Geometrie".

[87] Cfr. FANO 1923a, *cit.*, p. 18: "the importance of which for the systemisation of all geometry was brought out 50 years ago, with genial intuition, by F. Klein"; BSMT, *FFa*, Quad. Geo. Sup. 1, p. 86bis: "Quindi, nel senso del Programma di Klein, si ha una corrispondente geometria, delle proprietà invariantive per tali trasformazioni = Topologia, Analysis situs"; DEHN – HEEGAARD 1907, *cit.*, p. 155: "Indem Klein die Idee der Gruppe und die Auffassung des Raumes als Zahlenmannigfaltigkeit zu Grunde legt, gelangt er zu einer prägnanten Zusammenfassung der Listingschen Definitionen, die man etwa so formulieren kann: die Aufgabe der Analysis situs besteht in der Aufstellung aller derjenigen Eigenschaften räumlicher Gebilde, die sich invariant verhalten gegenüber der Gruppe aller stetigen Transformationen des Raumes.".

definizioni di cui sopra, mentre la teoria delle deformazioni spaziali continue, che è spesso posta in cima alla lista, non si basa sulle definizioni di cui sopra.[88]

Oltre alle forti affinità culturali tra la conferenza di Fano del 1926 e il saggio dell'EMW, vi sono altri due punti di contatto. Il primo è l'introduzione dei coefficienti di torsione per caratterizzare le varietà. Il secondo è rappresentato dalla scelta della notazione per la formula di Eulero generalizzata: a differenza di quanto presentato agli studenti del corso di Geometria superiore del 1924-25, alla Mathesis, seguendo Dehn e Heegaard, Fano denota con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ rispettivamente il numero di vertici, spigoli e facce del poliedro. Tale scelta di notazione si ritrova anche all'interno del ciclo di conferenze di topologia tenuto da Severi al Seminario Matematico di Buenos Aires nel 1930.[89] Vi è, tuttavia, una netta differenza tra l'apertura delle conferenze di topologia di Severi in Brasile – una cui copia a stampa è conservata da Fano nella sua collezione personale – e quella di Fano alla Mathesis: mentre l'evoluzione storica della topologia occupa una parte importante della trattazione di Fano, in Severi riveste un ruolo del tutto marginale ed è liquidata in poche righe.[90]

Per la stesura del testo della conferenza alla Mathesis, oltre a guardare al saggio dell'EMW, Fano sfrutta diversi aspetti da lui affrontati e proposti in tre ambiti diversi: Aberystwyth, il corso di Geometria superiore del 1924-25 e la prima parte dello scritto *Analysis situs* pubblicato su «Scientia». Da ciascuno di questi contesti egli trae alcuni elementi specifici che gli consentono di arrivare a una sintesi efficace e, soprattutto, adatta al pubblico delle conferenze della Mathesis. Innanzitutto, il celebre esempio dei sette ponti di Königsberg, la cui illustrazione nelle carte manoscritte è analoga a quella di «Scientia».[91]

Ancora, il teorema di Euler per i poliedri è citato da Fano ad Aberystwyth, in «Scientia», durante le sue lezioni del 1924-25 e alla Mathesis.[92] In questa sede, però, Fano esplicita per la prima volta la distinzione della topologia in due branche: l'analysis situs delle varietà continue e la topologia combinatoria.

---

[88] DEHN – HEEGAARD 1907, *cit.*, pp. 170-171: "Durch die Entwicklungen der ersten sieben Nummern dieses Abschnittes ist die Analysis situs dargestellt als ein durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneter Teil der Kombinatorik. Das ist schon für die Widerspruchslosigkeit der in Nr. 8 aufgestellten Axiome von großer Bedeutung. In der nun folgenden Darstellung des bisher in der Analysis situs Erreichten wird dieser Standpunkt nicht immer streng eingehalten; es werden vielmehr häufig mit Hilfe der Anschauung wichtige Schlüsse gezogen: Die Anschauung ist nicht nur der Maß- stab für die Bedeutung der einzelnen Resultate, sondern sie ist auch der beste Führer in der Entdeckung neuer Sätze und ihrer Beweise. Aber in jedem einzelnen dieser Fälle kann man ohne Schwierigkeit sehen, daß die in Betracht kommenden Schlüsse auch allein mit Hilfe der vorangehenden abstrakten Entwicklungen gemacht werden können, wie denn überhaupt alle speziellen Überlegungen, die zu irgend einer Zeit auf unserem Gebiet angestellt worden sind, als natürliches Fundament unsere obigen Definitionen haben, während die oft an die Spitze gestellte Theorie der stetigen Raumdeformationen".

[89] Cfr. BSMT, *FFa*, Quad. Geo. Sup. 1, p. 91; DEHN – HEEGAARD 1907, *cit.*, p. 181; SEVERI 1931, *Topologia*, Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, p. 94.

[90] Cfr. SEVERI 1931, *cit.*, p. 5: "La topología o analysis situs o también análisis del continuo, representa la realidad de aquella aspiración que tiene sus orígenes en una carta de Leibniz a quien se debe el nombre de analysis situs. El de topología es debido a Listing. Pero la creación en un cuerpo de doctrina científica y sistemática comienza recién en el siglo XIX".

[91] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*r*; FANO 1923a, *cit.*, p. 23: "A similar problem, well known in the days of Euler, was that of the 'seven bridges of Königsberg'. You were required to walk across the seven bridges, over as many arms of the river Pregel, following one closed path, and never passing over any bridge more than once"; FANO 1924b, *cit.*, p. 219.

[92] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*r*; FANO 1923a, *cit.*, p. 22; FANO 1924b, *cit.*, p. 219.

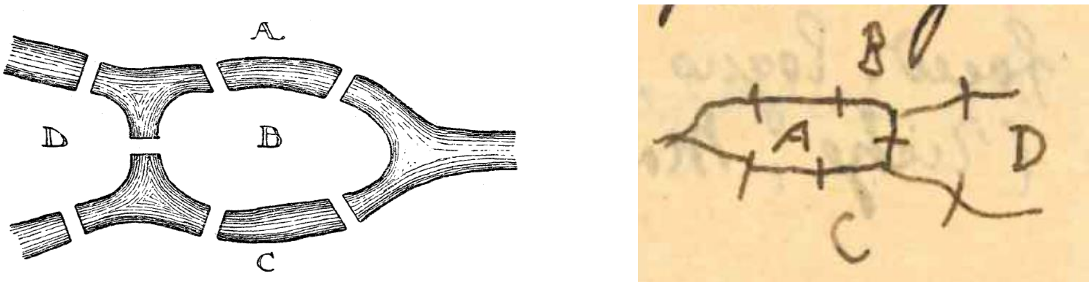


Fig. 5.1. Illustrazione del problema dei ponti di Königsberg in «Scientia» (a sx.) e nelle minute della conferenza alla Mathesis (a dx.).

Tale distinzione rispecchia, per così dire, la suddivisione del suo contributo apparso su «Scientia» in due parti, intitolate rispettivamente *Lo studio intuitivo del continuo* e *L'indirizzo combinatorio*. Per quanto riguarda quest'ultimo aspetto, alla Mathesis Fano cita soltanto alcuni problemi: oltre a quello di Königsberg (che ad Aberystwyth aveva legato al gioco del labirinto), quello del domino e quello dei quattro colori, senza scendere nei dettagli. In questa sede, Fano sceglie di concentrarsi sul primo aspetto in quanto il suo obiettivo è differente da quello di Aberystwyth e dei due scritti di «Scientia»: vuole infatti mettere in luce le applicazioni dell'analysis situs alla geometria algebrica. Per raggiungere questo obiettivo, parte dalla topologia delle superfici, introducendo i tre caratteri invarianti che aveva illustrato nella prima parte del contributo su «Scientia».[93] Passa quindi al nastro di Möbius per illustrare la differenza tra superfici bilatere e unilatere. Si tratta di un esempio classico, già citato sia nella conferenza generale di Aberystwyth sia sulle pagine di «Scientia», che però Fano introduce qui seguendo l'approccio utilizzato durante il corso di Geometria superiore.[94] Al posto di far riferimento a un nastro concreto come ad Aberystwyth o a una striscia di carta come in «Scientia», alla Mathesis Fano considera direttamente una zona di piano di larghezza infinita con l'opportuna identificazione di punti. Anche l'illustrazione presente nelle carte manoscritte, del tutto differente da quella che compare sulle pagine di «Scientia», è analoga a quella del quaderno di Geometria superiore.

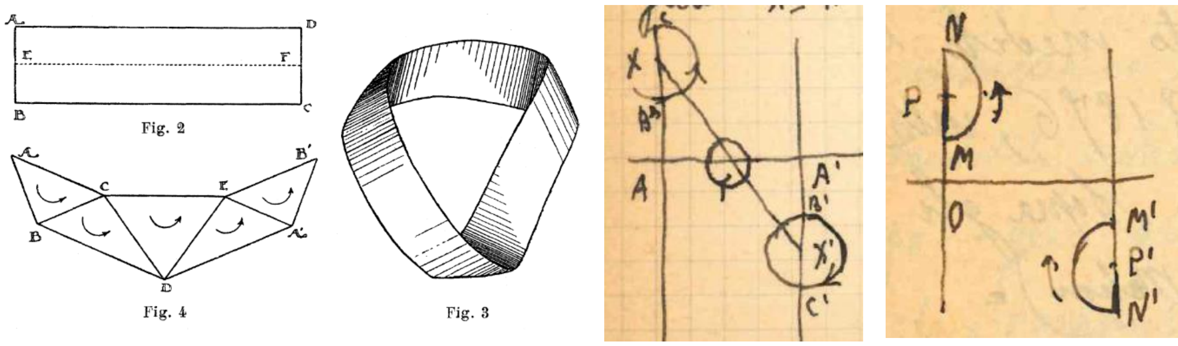


Fig. 5.2. Illustrazione del nastro di Möbius in «Scientia» (a sx.), nel Quaderno di Geometria superiore del 1924-25 (in centro) e nelle minute della conferenza alla Mathesis (a dx.).

[93] Cfr. FANO 1924b, *cit.*, pp. 222-224: si tratta delle medesime tre considerazioni sugli invarianti topologici.

[94] Cfr. BSMT, *FFa*, Quad. Geo. Sup. 2, p. 50.

Al suo interno, si trova anche l'esempio del piano proiettivo e della stella di rette riproposto da Fano alla Mathesis. Per illustrare la "legge degli spigoli" in questa sede, Fano richiama invece quanto pubblicato su «Scientia». Si può anzi affermare che i diversi puntini di sospensione inseriti nelle minute della conferenza sono da colmare alla luce di quanto Fano aveva scritto nel 1924:

> E questo geometra [Möbius] vi è giunto in una ricerca intesa ad estendere il concetto di «volume» di un poliedro, dai casi elementari, a poliedri comunque intrecciati; e a mostrare che esistono poliedri pei quali assolutamente non ha senso parlare di volume: quelli appunto la cui superficie è unilatera. Per un poliedro elementare, il volume, nel senso ordinario, eguaglia la somma, che è costante, dei volumi delle piramidi che hanno per basi le singole facce del poliedro, e il vertice in un punto interno arbitrario. Questa proprietà continua a sussistere anche se il vertice comune delle piramidi si suppone esterno al poliedro, purché al volume di ogni singola piramide si attribuisca un segno conveniente, riducendosi così a una «somma algebrica», ossia alla differenza fra la somma dei volumi positivi e quella dei volumi negativi. E la determinazione di quel segno, per ciascuna piramide, implica che si fissi, sulla faccia del poliedro che ne è base, un certo senso di percorrenza del relativo perimetro. Nei casi elementari, questi sensi di percorrenza sulle diverse facce si possono, e si devono stabilire in modo tale che ciascuno spigolo, nei perimetri delle 2 facce cui appartiene, venga sempre percorso rispettivamente nei 2 sensi opposti (in tutti i casi elementari, è facile convincersi che questo è possibile): è ciò che Möbius chiama la «legge degli spigoli». Ora, per tutti i poliedri, anche comunque intrecciati, che soddisfano alla «legge degli spigoli», sempre quella somma algebrica di volumi di piramidi è costante, al variare comunque del vertice; e si può allora definire questa somma come volume del poliedro. Ma vi sono poliedri le cui facce non soddisfano alla legge degli spigoli; cercando di applicarla, non vi si riesce; per essi non ha senso parlare di volume, e l'insieme delle facce costituisce allora una superficie unilatera.[95]

Alla Mathesis, dopo aver individuato le condizioni necessarie e sufficienti affinché due superfici siano topologicamente equivalenti, Fano non introduce esplicitamente il concetto di superficie uniconnessa né la distinzione in tipi (o forme normali), cui aveva dedicato la penultima sezione de *Lo studio intuitivo del continuo* di «Scientia». A Torino, nella seconda parte della conferenza, Fano si concentra invece sullo sviluppo dell'analysis situs per le varietà a più dimensioni. Si tratta di un argomento non banale, di cui aveva dato qualche cenno sulle pagine di «Scientia», senza però poi entrare nel merito della questione. Richiamando la portata dell'opera di Riemann, prima di dedicarsi alla topologia combinatoria, egli aveva infatti concluso:

> […] d'allora in poi l'importanza dell'Analysis Situs per tutta la matematica è risultata sempre più manifesta. Sono stati pure studiati continui a un numero qualunque n di dimensioni, quali si possono formare con gruppi di n o più numeri, o con enti geometrici dipendenti da almeno n parametri. A questo studio hanno portato contributi importanti anche scienziati eminenti: fra altri Poincaré, uno appunto di coloro che dell'Analysis Situs hanno maggiormente e più intimamente sentita tutta la portata. I concetti di orlo o contorno, di genere e connessione di una superficie, di superficie bilatera ed unilatera, si possono estendere ai continui a più dimensioni; ma talune questioni presentano allora difficoltà e complicazioni notevolmente maggiori […]. Nonostante le ricerche di Poincaré, che sono fra le sue più profonde e ingegnose, e altre più recenti, non si è

[95] FANO 1924b, *cit.*, p. 225.

ancora riesciti a assegnare un complesso di condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza topologica di due continui a uno stesso numero arbitrario di dimensioni.[96]

Alla Mathesis quindi, per la prima volta, Fano illustra la questione dell'estensione a continui a più dimensioni, introducendo innanzitutto i numeri di Betti. Per avvicinare il pubblico ai diversi tipi di connessione che si possono incontrare passando alla dimensione superiore, tenendo conto della presenza di diversi insegnanti e non specialisti del settore, Fano inserisce tre esempi di continui tridimensionali abbastanza noti: la regione compresa tra due sfere concentriche, quella interna al toro e la zona tra due tori aventi il medesimo cerchio-asse. Si tratta di un accorgimento funzionale al graduale passaggio dalle superfici al mondo tridimensionale prima, e n-dimensionale poi. La ricerca di questi semplici esempi, che non si ritrovano nel corso di Geometria superiore da cui Fano prende invece spunto per la parte matematica sulle varietà n-dimensionali, denota una certa sensibilità nei confronti del pubblico. Allo stesso modo, questa attenzione verso chi lo ascolta porta Fano a evitare di entrare nei tecnicismi della definizione formale di cicli k-dimensionali, ma di introdurli in modo intuitivo come estensione dei cicli unidimensionali, ossia i cammini continui e chiusi su una superficie.

Nell'ultima parte della conferenza del 1926, vengono quindi introdotti nel modo più semplice possibile i concetti fondamentali di omologia, divisore a k dimensioni, indice e coefficienti di torsione, gruppo di torsione, per arrivare al gruppo fondamentale di Poincaré. Nella trattazione Fano utilizza alcuni aspetti affrontati durante le sue lezioni di Geometria superiore, tralasciando le parti più tecniche ed eliminando alcune parti, come il legame con gli integrali di Picard. Raggiunge così l'obiettivo che si era prefissato – illustrare i legami tra analysis situs e topologia – concludendo il suo intervento alla Mathesis con le tre proprietà topologiche fondamentali che soddisfa una varietà bilatera chiusa di dimensione n. Tra queste, la generalizzazione della formula di Descartes-Euler che Fano inserisce nella forma dell'EMW. Si tratta del risultato fondamentale che sarà illustrato, ancora una volta con la medesima notazione, anche da Severi durante le sue conferenze di topologia in Brasile qualche anno più tardi.[97]

La conferenza alla Mathesis, pur presentando – soprattutto nella prima parte – diversi punti di contatto con le altre occasioni in cui Fano si è occupato di topologia, si presenta come una rielaborazione originale del tema che viene declinato, questa volta, alla luce dei suoi legami con la geometria algebrica. L'obiettivo di Fano è ancor più ambizioso considerata la composizione del pubblico. Se, da un lato, Fano non può entrare nei dettagli matematici della trattazione, dall'altro riesce comunque a fornire un'efficace visione d'insieme delle applicazioni dell'analysis situs alla geometria n-dimensionale, settore particolarmente importante per i geometri della Scuola italiana. Le carte manoscritte rivelano, ancora una volta, un aspetto inedito dell'attività di Fano, portando alla luce un interessante tentativo di lettura della topologia classica alla luce dello studio delle varietà algebriche.

[96] FANO 1924b, *cit.*, pp. 229-230.

[97] Cfr. SEVERI 1931, *cit.*, p. 94.

5.6. Il Fano didatta

Il contributo di Fano alla didattica della matematica, pur essendo oggettivamente assai limitato rispetto a quello di un Peano, un Enriques o un Castelnuovo, presenta dal punto di vista storico elementi di interesse a tre livelli distinti: nazionale, nell'ottica della Scuola italiana di geometria algebrica; locale, in rapporto all'ambiente culturale piemontese e personale, per il riflesso della sua esperienza genitoriale.

Per quanto riguarda il primo aspetto, la riflessione di Fano nel campo della filosofia dell'educazione si pone chiaramente nell'alveo della Scuola italiana di geometria algebrica, la cui identità, come è noto, è andata definendosi non solo mediante lo sviluppo di un programma di ricerca comune, ma anche attraverso la condivisione di valori civili e di paradigmi socioculturali. La visione unitaria e dinamica della scienza e del suo insegnamento, l'importanza della dimensione storica del sapere matematico, anche in funzione didattica, sono elementi tipici della costruzione metodologica dei geometri italiani. Agli echi del Programma di Erlangen, tradotto da Fano ancor prima di laurearsi, all'impronta del magistero di Segre e Castelnuovo, si sovrappongono però altri accenti, che vanno dall'empiriocriticismo di Mach al Poincaré de *La science et l'hypothèse*, che Fano cita quasi testualmente quando afferma che senza l'intuizione il geometra sarebbe come uno scribacchino, ferrato nella grammatica, ma privo di idee.[98]

Un aspetto particolarmente significativo dell'impegno di Fano nell'ambito dell'educazione matematica – anch'esso nel solco della Scuola italiana – è rappresentato dai numerosi trattati da lui redatti per i corsi universitari, molti dei quali scritti a cavallo tra Ottocento e Novecento e poi perfezionati in edizioni successive. Essi ricoprono diversi settori della geometria: geometria della retta (1896); geometrie non euclidee (1898, 1935); geometria descrittiva (1903, 1910, 1914, 1926, 1932, 1935, 1944); geometria proiettiva (1902, 1903, 1907); geometria analitica e proiettiva (1926, 1929, 1940 e 1957 in collaborazione con Terracini), oltre ai già citati *Complementi di geometria* (1935). Vi sono alcuni tratti comuni che li caratterizzano: la chiarezza espositiva; l'alternanza di approccio analitico e sintetico a fini didattici; la presenza di cenni storici o di un vero e proprio approccio storico; l'attenzione alle applicazioni ad altri settori scientifici come la teoria delle ombre, la prospettiva, la fotogrammetria, la teoria della relatività; e la tendenza, appresa dal maestro Segre, a evidenziare collegamenti con la ricerca in modo da "far presagire sviluppi futuri".[99]

In secondo luogo, l'interesse di Fano per i problemi dell'insegnamento della matematica contribuisce a restituire la vivacità dell'ambiente torinese dell'epoca, caratterizzato da un vivo dialogo tra docenti universitari e professori di scuola secondaria. La sua sensibilità per questi temi nasce negli anni di studi universitari, quando Fano segue il corso di Magistero tenuto da Segre,[100] matura a contatto con due Scuole di ricerca, come quelle di Segre e di Peano, di cui

---

[98] Cfr. H. POINCARE 1899, *La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*, «Ens. Math.» 1, p. 161: senza l'intuizione, "le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées".

[99] G. FANO – A. TERRACINI 1929, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia, p. VI.

[100] ASUT, *Registro di carriera di Gino Fano*: nella sezione "Annotazioni diverse", in corrispondenza del primo anno di corso, compare l'annotazione *"Scuola di Magistero – Geometria – Segre"*. Dal *Quaderno 38* di Segre (*Elenco e valutazione degli studenti dal 1883 al 1892; Appunti di geometria proiettiva*, https://www.corradosegre.unito.it/Quaderni/Quad38/1_38.php) Fano risulta iscritto negli a.a. 1888-89, 1889-90, 1890-91, e riporta giudizi eccellenti: 10 in 'operosità'; 9+ e 10 in 'abilità didattica'. Fano è stato quindi uditore del

facevano parte molti insegnanti, e si riflette nei tanti incarichi da lui ricoperti negli anni seguenti: la direzione della Scuola operaia serale femminile, la presidenza della sezione torinese della Mathesis, l'aver seduto nei consigli direttivi della Società di Cultura di Torino (1899) e dell'Università Popolare (1900). In tutti questi vari ambiti, Fano non è un mero portavoce delle istanze della Scuola geometrica italiana, ma assume un ruolo di mediatore, con posizioni talvolta originali, come nel caso dell'istruzione popolare femminile e della Riforma Gentile.

Infine, una componente curiosa dell'impegno di Fano sul fronte educativo e didattico è costituita dal legame fra questo e la sua esperienza personale di papà. Fano contribuisce largamente e in prima persona all'educazione dei figli, soprattutto per quanto riguarda le discipline scientifiche. All'epoca capita spesso, tant'è che Castelnuovo, Enriques, Fubini, Levi fanno lo stesso con i loro figli e figlie. Ciò che non è comune è la consequenzialità fra le due sfere di impegno, pubblica e privata, che nel caso di Fano è davvero evidente. Fano accetta la direzione della Scuola operaia serale femminile quando arriva in casa sua, per la prima volta, una *baby sitter* analfabeta e interviene sul tema delle lauree miste in Matematica e Fisica negli anni in cui il suo primogenito sta frequentando proprio quel corso di studi. E ancora: nel 1920 pubblica sul giornale *La sera* un divertente elzeviro sulla 'piaga dei libri di testo', raccogliendo lo sfogo di un ingegnere governativo, costretto a trasferirsi con la famiglia in più sedi e ad acquistare ogni anno nuovi libri di testo di aritmetica e geometria per i suoi bambini, contenenti definizioni sempre diverse anche delle cose più basilari, a seconda dell'impostazione dell'autore. Accogliendo l'istanza del funzionario governativo, secondo il quale

> Metodi di insegnamento e libri di testo [...] dovrebbero costantemente indirizzarsi verso i loro pratici scopi istruttivi ed educativi, spogliandosi quindi di ogni ingombrante eccessività dottrinaria e rifuggendo dai torneamenti ipercritici che smarriscono ogni aderenza con lo scopo fondamentale[101],

Fano ne approfitta per insistere sulla "necessità di abbandonare, nell'insegnamento, il criticismo eccessivo e di tenere maggior conto delle esigenze pratiche".[102] In quel periodo, egli si sta dedicando alla stesura di un sussidiario di matematica per il figlio Ugo, che sta facendo da privatista la terza elementare, e si sta interrogando sulle finalità dell'insegnamento matematico a livello di scuola elementare e sull'esigenza di ridurre al minimo quelle "raffinatezze critiche" che allontanano la matematica dalla realtà e la rendono eccessivamente complicata agli occhi degli studenti e dei loro genitori.

In conclusione, nonostante il contributo apportato da Fano sul fronte dell'educazione e dell'istruzione non sia comparabile, dal punto di vista dell'intensità, della continuità e dell'originalità a quello lasciato in campo matematico, dagli scritti sull'argomento e dall'azione all'interno della Mathesis o della Scuola operaia serale femminile sono emersi aspetti del tutto inediti di Fano come scienziato e come uomo che hanno anche contribuito a svelare parti di un affresco intellettuale della Torino dell'epoca, fatto di storie famigliari, di reti di rapporti sociali, professionali e amicali. Le conferenze alla Mathesis restituiscono un volto differente di Fano

---

corso di Segre per tre anni, ma non ha poi completato il percorso sostenendo l'Esame di Magistero, dopo la laurea, come di consueto.

[101] *La piaga nazionale dei libri di testo. La definizione dell'addizione*, «La Sera: giornale politico, finanziario, illustrato, quotidiano della sera», 31.01.1920, p. 4.

[102] FANO 1920a, *cit.*, p. 129.

rispetto alle lezioni universitarie, “togate, preparate in ogni particolare, ma che nella potenza delle argomentazioni, nel loro concatenamento e nel rilievo dato alle idee fondamentali ritrovavano la più efficace spontaneità!”.[103] Rivelano infine una certa sensibilità di Fano per le questioni metodologiche e per la formazione dei docenti che rappresentano per lui anche un’occasione di riflessione personale su temi diversi da quelli affrontati abitualmente durante l’attività di ricerca, come l’analysis situs.

[103] TERRACINI 1953, *cit.*, p. 708.

6. *Achille Bassi in Brasile: tra divulgazione e fondazione di una scuola*

Durante la sua lunga attività di docenza all'interno dell'ateneo torinese, Fano è affiancato da diversi assistenti. Tra il 1933 e il 1938 è la volta di Achille Bassi, una figura non ancora presa in considerazione dalla storiografia italiana[1] ma decisamente interessante.

La sua biografia restituisce infatti l'immagine di una 'voce fuori dal coro' tra i geometri italiani dell'epoca e testimonia il sostanziale rifiuto dell'ambiente accademico nell'accogliere i nuovi indirizzi di ricerca, ostacolo insormontabile per un rinnovamento degli studi geometrici in Italia. Nel 1939, a distanza di circa sei mesi dal trasferimento di Fano a Losanna, Bassi – sfiduciato dall'ambiente matematico italiano – si trasferisce in Brasile, a Rio de Janeiro. È infatti invitato a ricoprire la cattedra di Geometria superiore in quella Università con l'intento di dar vita a un nuovo gruppo di ricerca matematica:

> era evidente che la mia azione non poteva limitarsi ai compiti di insegnamento. Il professore straniero deve essere messo in condizione di creare una vera scuola scientifica (asilo, per così dire, di nuovi scienziati), essendo questo infatti l'interesse dell'università che lo invita.[2]

Qui accosta all'insegnamento e alla ricerca l'attività di divulgazione, tenendo due stimolanti conferenze dedicate alla topologia che saranno analizzate in questo capitolo. La prima, intitolata *Da importância da topologia na matemática moderna*, risale all'inizio del 1940 e rappresenta la prolusione al primo corso di Geometria superiore tenuto da Bassi presso la Facoltà Nazionale di Filosofia (FNF) dell'Università di Rio. *A matemática moderna e a necessidade de sua difusão* è invece il titolo del discorso d'apertura dei corsi universitari a Minas Gerais, pronunciato da Bassi nel marzo 1945.

Per inquadrare al meglio l'attività di divulgatore di Bassi in Brasile è necessario esaminare la sua traiettoria scientifica e personale, con particolare attenzione ai primi anni della sua carriera – che vanno inscritti nel contesto più ampio della Scuola italiana di geometria algebrica – e al rapporto diretto con Fano.

6.1. Dagli anni della formazione all'assistentato a Torino

Nato a Mondovì (CN) il 9 agosto 1907, Achille Bassi cresce all'interno di una famiglia "di elevate tradizioni intellettuali".[3] Il padre, Alfredo, è un ottimo insegnante di matematica di scuola secondaria. Ben tre dei suoi allievi diventeranno docenti universitari: L. Cesari

---

[1] La figura di Bassi è stata invece presa in considerazione da alcuni storici della scienza sudamericani, dal punto di vista del suo ruolo nella formazione di una scuola di matematica brasiliana, in relazione ai processi di professionalizzazione e istituzionalizzazione della matematica e diffusione dello spirito scientifico nel Nuovo Continente. Al riguardo, cfr. A. LEME DA SILVA – H.M. ALVIM 2019, *Achille Bassi e os Elementos Contribuintes à Institucionalização da Matemática no Ensino Superior Brasileiro*, «Revista Brasileira de História da Matemática» 18, pp. 55-72; R. ALCAIRES DE CARVALHO 2020, *A missão italiana para a formação de matemáticos na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil: Achille Bassi e Gabriele Mammana, apenas diplomacia cultural?*, «Em Construção: arquivos de epistemologia histórica e estudos de ciência» 7, pp. 79-96.

[2] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 7: "era evidente que minha ação não podia limitarse a tarefas de ensino, o professor estrangeiro tem que ser pôsto em condição de fazer verdadeira escola científica (viveiro por assim dizer, de novos cientistas), sendo êste aliás o interêsse da universidade que o convida".

[3] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 1: "família de elevadas tradições intelectuais".

(Università di Bologna), U. Cassina (Milano) e A.M. Bedarida, "libero docente all'Università di Genova, uno dei massimi esperti che l'Italia ha in Teoria dei Numeri".[4] La madre, Stella Sacchi, proviene da una famiglia lombarda che ha contribuito attivamente all'unificazione dell'Italia e diversi parenti sono ben inseriti all'interno dell'élite intellettuale italiana.[5]

Gli studi secondari di Bassi si svolgono a Parma, dove frequenta il liceo classico conseguendo ottimi risultati.[6] Qui inizia a maturare un certo interesse per la matematica. A distanza di anni, nel 1961, Bassi ricorda un episodio particolare di quel periodo, che segnerà tutta la sua attività di docenza:

> essendo stato uno studente eccezionale in Matematica, più volte chiesi a mio padre di iniziarmi alla Matematica Superiore (Calcolo Infinitesimale, ecc., che conosceva perfettamente e che insegnava anche). Egli ha sempre ha rifiutato di farlo, tenendo i libri relativi sottochiave e consigliandomi di studiare la geometria elementare; da solo, ho quindi risolto quasi tutti i problemi classici risolvibili con riga e compasso. Mio padre evidentemente pensava che fosse più importante esercitare la mente adolescenziale su pochi concetti già noti, che riempirla di tanti, mal compresi. Anch'io sono della stessa opinione. Lo dico perché ora la tendenza è esattamente l'opposto.[7]

Bassi si iscrive al corso di laurea in matematica all'Università di Bologna, dove frequenta i corsi di L. Tonelli, Bompiani e Bortolotti. All'inizio del terzo anno di studi, passa alla Scuola Normale Superiore di Pisa, risultando primo nel concorso di ammissione. Qui segue le lezioni di Bianchi, Bertini e Rosati, ottenendo, agli esami, valutazioni eccellenti.[8] Si laurea nel 1929 con il massimo dei voti e la sua tesi di laurea è insignita del prestigioso Premio Bertini, assegnato annualmente alla migliore dissertazione di matematica discussa nell'ateneo pisano. La tesi, diretta da Brusotti, riguarda un argomento classico: le corrispondenze $(2,2)$ tra curve algebriche.[9] Vincitore della borsa di perfezionamento Lavagna in Geometria superiore, Bassi

---

[4] *Ibidem*: "livre-docente da Universidade de Gênova, um dos maiores especialistas que a Itália possui na Teoria dos Números".

[5] Il nonno, Achille Sacchi, aveva partecipato come medico alle campagne garibaldine. Gli zii di Bassi sono uno professore di Anatomia comparata all'Università di Genova e l'altro geologo; la zia dirige per anni il movimento femminile italiano, diventando successivamente direttrice di biblioteca. Anche i cugini di Bassi avranno un certo successo nel mondo accademico: uno sarà nominato professore all'Università di Perugia, un altro diventerà direttore della Clinica di otorinolaringoiatria dell'Università di Firenze.

[6] Cfr. BCMC, Memorial A. Bassi, p. 3. Il migliore tra i 120 studenti del suo anno, Bassi si diploma con una media di quasi 9/10.

[7] *Ivi*, pp. 3-4: "tendo sido um estudante excepcional em Matemática, várias vêzes pedi a meu pai que me iniciasse em Matemática Superior (Cálculo Infinitesimal, etc., que êle conhecia perfeitamente e também ensinou). Ele sempre se negou a isto, guardando sob chave os livros correspondentes e aconselhandome a estudar a geometria elementar; sozinho, resolvi então quase todos os problemas clássicos resolúveis com régua e compasso. Meu pai pensava evidentemente ter mais importância exercitar a mente adolescente sôbre poucos conceitos já conhecidos, do que enchê-la com muitos, mal compreendidos. Sou eu também do mesmo parecer. Digo isto porque agora a tendência é exatamente a contrária".

[8] *Ivi*, p. 4. Nei dodici esami sostenuti all'interno dell'ateneo pisano ottiene 358 punti su 360 e sette lodi.

[9] Cfr. ASUPi, Processi verbali degli esami e delle lauree della Facoltà di Scienze MFN 1929-30. Bassi consegue la laurea il 19.11.1929 con una dissertazione dal titolo *Le corrispondenze* $(2,2)$ *tra curve algebriche*, con relatore Brusotti. A questa si aggiungono tre tesine su: la teoria degli insiemi e i numeri cardinali transfiniti (O. Nicoletti); la teoria di Galois nella risoluzione delle equazioni algebriche (F. Cecioni); le omografie vettoriali e la loro integrazione come affinità spaziali. Il secondo tema, decisamente moderno, riflette un certo interesse per l'algebra e la teoria dei numeri all'interno della SNS in quel periodo. Tra gli undici membri della commissione, accanto a

si ferma a Pisa anche l'anno successivo.[10] Nel 1930 è nominato assistente di Severi a Roma, sulla cattedra di Analisi algebrica e infinitesimale.[11] Vincitore di concorso, tre anni più tardi diventerà assistente ordinario alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Torino, tenuta da Fano.[12]

Tale posizione era rimasta vacante nel novembre del 1932 in seguito alle dimissioni di Bonaparte Colombo.[13] Prontamente, dopo aver interpellato il Consiglio di Facoltà, Fano sollecita il rettore e il ministero per l'apertura di un concorso per il posto di assistente.[14] L'incarico è temporaneamente attribuito, fino a espletamento del concorso, a Piero Buzano, già assistente, dal 1° dicembre 1932, alla cattedra di Geometria analitica ricoperta da Terracini. Tale concorso, indetto nel gennaio del 1933, sarà espletato soltanto nel mese di giugno a causa di lungaggini burocratiche.[15] Buzano manterrà quindi l'incarico per tutto l'anno scolastico.[16] Tra il 21 e il 23 giugno si svolgono le tre prove (scritta, grafica e orale) del concorso; come membri della commissione esaminatrice, accanto a Fano, vi sono Terracini e Carlo Somigliana.[17] Oltre a Bassi, i candidati sono Margherita Calvi, Gilberto Severi e Giorgio

Brusotti, Nicoletti e Cecioni, spiccano i nomi di Bertini, Ricci e A. Chiellini. Cfr. anche «Annuario della R. Università di Pisa per l'a.a. 1929-30», p. 251; «Annuario della R. Università di Pisa per l'a.a. 1930-31», p. 253.

[10] Cfr. «Annuario della R. Università di Pisa per l'a.a. 1929-30», p. 250.

[11] Bassi aveva partecipato al concorso per assistente alla cattedra di Geometria analitica dell'Università di Roma, tenuta da Castelnuovo. Pur risultando nella terna degli idonei, non riesce a ottenere questa posizione che Castelnuovo assegna a chi l'aveva già ricoperta per incarico l'anno precedente. Tuttavia, Severi, che faceva parte della commissione esaminatrice, rimane impressionato dalle capacità di Bassi e lo nomina suo assistente. Cfr. ACS, *Fondo CNR-CMFA*, busta 8, fasc. 39, Curriculum vitae di A. Bassi.

[12] Sull'attività di assistente di Bassi, cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: S. Pivano a G. Fano, Torino, 2.1.1936; ASUT, Scienze MFN – Lezioni 1937-38, *Registri lezioni 1937-38*: Esercizi di Geometria descrittiva di A. Bassi; FANO 1935c, *cit*., p. IX.

[13] ASUT, *Fasc. personale di P. Buzano*: G. Fano a S. Pivano, Torino 16.11.1932.

[14] Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*, Estratto dal verbale della seduta del Consiglio di Facoltà del 15.11.1932: "La Facoltà, in considerazione che l'anno accademico è già iniziato, prega il Superiore Ministero di espletare sollecitamente le relative pratiche".

[15] ASUT, *Corrispondenza universitaria*: S. Pivano a G. Fano, Torino 11.1.1933. Il bando è pubblicato sul Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Educazione Nazionale il 29.12.1932. Il termine di presentazione delle domande per il concorso è fissato al 29.1.1933. Bassi invia la documentazione il 14.1.1933. Vi sono tuttavia dei problemi legati alla sua mancata domanda di ammissione al Partito Nazionale Fascista, che presenterà soltanto il 19.3.1933. A tal proposito, cfr. ASUT, Corrispondenza universitaria: A. Bassi al Direttore della Segreteria della R. Università, Roma 20.2.1933 e 5.5.1933; S. Pivano a F. Ercole, Torino 6.6.1933; F. Ercole a S. Pivano, Roma 16.6.1933. Bassi è ammesso al concorso sotto la condizione di esibire la tessera di iscrizione al PNF all'atto di nomina.

[16] ASUT, *Fasc. personale di P. Buzano*: G. Fano a S. Pivano, Torino 8.6.1933; ASUT, *Corrispondenza universitaria*: G. Fano a S. Pivano, Torino 15.7.1933. Relativamente all'a.a. 1935-36 Fano dichiara: "Lezioni e esercitazioni si svolsero regolarmente per l'intero anno scolastico; il sottoscritto ha impartite 68 lezioni; il Dott. Buzano ha tenute complessivamente 56 esercitazioni, fra orali e grafiche (queste ultime di 2 ore)". Cfr. «Annuario UTo» 1932-33, p. 57: il posto di assistente alla Scuola di geometria proiettiva e descrittiva con disegno risulta vacante.

[17] Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*: S. Pivano a G. Fano, Torino 29.4.1933; G. Fano al Direttore della Segreteria della R. Università, Torino 5.6.1933; A. Bassi al Direttore della Segreteria della R. Università, Roma 12.6.1933.

Paolozzi,[18] ma quest'ultimo non si presenta a sostenere le prove del concorso. Mentre Calvi e Severi riportano un giudizio insufficiente, Bassi è dichiarato idoneo all'assistentato. Le sue prove scritte non avevano avuto "esito molto felice", ma l'orale era stato determinante:

> Avendo il Dr. Bassi espresso il desiderio di comunicare alla Commissione alcuni risultati delle sue ricerche in corso, la Commissione volentieri lo ascoltò, riportandone impressione favorevole; e così anche da qualche domanda intesa ad accertare la sua cultura.[19]

I titoli presentati, l'esperienza didattica e il possesso di una buona cultura geometrica valgono quindi a Bassi la vittoria del concorso. Per essere nominato ufficialmente assistente a Torino, deve però risolvere la questione dell'iscrizione al PNF.[20] Egli è infine nominato assistente ordinario alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno a decorrere dal 1° novembre 1933.[21] Oltre a occuparsi delle esercitazioni di questa disciplina[22], a partire dalla sessione estiva del 1934, Bassi prende il posto di Buzano all'interno della commissione esaminatrice di Geometria proiettiva e descrittiva, accanto a Fano e Terracini, dedicandosi alla compilazione del relativo registro. Nelle cinque sessioni d'esame (estiva e autunnale del 1934; invernale, estiva e autunnale del 1935) che vedono questa terna di commissari sono esaminati una quarantina di studenti.[23] Tra questi vi sono Giuseppe Tanturri (1913-2001) e Ubaldo Richard (1915-2004) che, dopo la laurea, proseguiranno la carriera accademica.

Il primo è figlio di un matematico di formazione torinese, Alberto Tanturri, che si era laureato nel 1899 discutendo una tesi di geometria numerativa sotto la direzione di C. Segre e aveva conseguito, nello stesso anno, il diploma della Scuola di Magistero. Tra il 1900 e il 1905 era anche stato assistente di Geometria proiettiva e descrittiva, prima con Segre e poi con Fano. Conseguita la laurea *magna cum laude* nell'estate del 1937, nel 1938 anche Giuseppe sarà chiamato a ricoprire questo ruolo, diventando di fatto il successore di Bassi. Proseguirà la sua

---

[18] Margherita Calvi aveva conseguito la laurea in matematica a Torino il 5.12.1932 con 90 punti su cento. Gilberto Severi aveva conseguito la laurea in fisica presso l'ateneo torinese il 7.12.1932 con la medesima votazione di Calvi. Giorgio Paolozzi si era laureato in matematica il 5.11.1930 presso l'Università di Bologna, con il massimo dei voti. Dopo aver ricoperto il ruolo di assistente incaricato di Geometria descrittiva a Roma nel 1930-31, vincitore di un posto di perfezionamento finanziato dal CNR, nel gennaio del 1932 si trasferisce a Torino.

[19] ASUT, *Corrispondenza universitaria*, Relazione della Commissione giudicatrice a un posto di assistente alla Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno del 28.6.1933. Le quadriche rigate, a partire dalla loro generazione con rigate proiettive, rappresentano il tema affrontato da Bassi durante la prova orale di abilità didattica.

[20] Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*: F. Ercole a S. Pivano, Roma 27.6.1933; A. Bassi all'avvocato, Firenze 3.7.1933; A. Bassi a S. Pivano, Firenze 8.7.1933.

[21] Cfr. «Annuario UTo» 1933-34, p. 122; 1934-35, p. 120; 1935-37, p. 114.

[22] Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*, Relazione sull'attività didattica e scientifica della Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno per l'a.a. 1933-34. Fano dichiara 87 esercitazioni "fatte dall'Assistente Dr. Achille Bassi, sotto la sorveglianza del titolare". I registri di tali esercitazioni sono purtroppo mancanti.

[23] Cfr. ASUT, Registro degli esami speciali di Geometria proiettiva e descrittiva, Facoltà di Scienze MFN, pp. 88-100. Gli esami orali si svolgono nelle seguenti date: 25.6.1934, 7.7.1934, 24.10.1934, 18.1.1935, 5.6.1935, 12.6.1935, 18.6.1935, 8.7.1935, 9.10.1935, 24.10.1935. Tra i 44 candidati esaminati, ci sono 13 donne. Inoltre, 18 dei 31 studenti maschi che sostengono questo esame sono allievi ingegneri. Tra coloro che frequentano la Scuola di Ingegneria vi sono tre studenti di origine ungherese: Stefano Ney, Ladislao Romàn e Tiberio Fried. Solo tre studenti ottengono la valutazione massima: Giovanni Francia, Giuseppe Tanturri e Maria Saini.

carriera all'Istituto di Matematica del Politecnico di Torino, occupandosi dei corsi di geometria e facendo ricerca nell'ambito della geometria algebrica e differenziale.[24]

Richard, invece, dopo aver frequentato il liceo classico "D'Azeglio" di Torino, si era iscritto a matematica laureandosi nella sessione estiva del 1937 con il massimo dei voti. Dopo un periodo di assistentato alla cattedra di Analisi al Politecnico e di libera docenza all'Università, diventerà ordinario di Analisi matematica all'Università di Padova.[25]

6.2. Bassi autodidatta in topologia, tra Torino e Princeton

Sin dalla laurea, l'interesse di Bassi è rivolto verso la ricerca nel campo della topologia. A tal proposito, egli ricorda:

> In questi [studi] fui autodidatta, e nel 1935 potei ottenere la libera docenza in Introduzione alla Geometria Superiore con parere molto positivo da parte della commissione esaminatrice. I miei lavori si fecero presto conoscere, non solo in Italia ma anche in altri paesi, soprattutto negli Stati Uniti, in Germania e in Giappone.[26]

Il 1935 segna una svolta nella carriera di Bassi: non solo consegue l'abilitazione alla libera docenza, ma vince anche una borsa di perfezionamento negli Stati Uniti, presso il prestigioso Institute for Advanced Study di Princeton, finanziata dall'Istituto per lo scambio di studenti tra l'Italia e gli Stati Uniti.[27] Questo anno coincide anche con il picco della sua produttività scientifica: pubblica infatti cinque lavori, due nelle «Memorie della R. Accademia d'Italia», gli altri all'interno del «Bollettino dell'UMI», dei «Rendiconti del R. Istituto Lombardo» e del «Giornale di Matematiche».[28] Sono, questi, "profondi contributi di carattere critico e

---

[24] Cfr. ASUT, Registri di carriera scolastica, Facoltà di Scienze MFN, n. matricola 421. Cfr. anche Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*: G. Bottai a S. Pivano, Roma 16.3.1938; S. Pivano a G. Fano, Torino 22.3.1938. Sia Tanturri sia Richard compaiono tra i vincitori del concorso nazionale per assistente di Geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno, diventando possibili candidati al posto di assistente rimasto vacante dopo il trasferimento di Bassi a Bologna. Gli altri vincitori sono A. Faedo, G. Francia, A. Mascia, R. Perassi, G. Pompilj, F. Pretti, O. Tigano. Cfr. «Annuario UTo» 1937-38, p. 143.

[25] Cfr. ASUT, Registri di carriera scolastica, Facoltà di Scienze MFN, n. matricola 434. I principali interessi di ricerca di Richard furono le equazioni differenziali alle derivate parziali e l'analisi numerica. Tra i suoi allievi al Politecnico, vi fu anche Tullio Regge che, all'interno della sua autobiografia (cfr. https://static.sif.it/SIF/resources/public/files/ricordo/biografia-regge.pdf) ricorda: "Alla fine del biennio propedeutico il prof Ubaldo Richard, alla epoca assistente di analisi matematica, mi prese da parte e mi convinse a lasciare il Politecnico e a studiare Fisica all'Università".

[26] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 5: "Nostes fui autodidata. E me habilitaram a obter em 1935 a livre-docência em Introdução à Geometria Superior, com um parecer muito elogioso por parte da Comissão Examinadora. Meus trabalhos se tornaram em breve conhecidos, não somente na Itália mas também em outros países, especialmente nos Estados Unidos, na Alemanha e Japão".

[27] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: A. Bassi a S. Pivano, Torino 24.5.1935.

[28] Si tratta di A. BASSI 1935a, *Un problema topologico di esistenza*, «Mem. R. Acc. d'Italia» (7) 6, pp. 669-714; A. BASSI 1935b, *Su alcuni modelli topologici del Poincaré*, «Mem. R. Acc. d'Italia» (7) 6, pp. 1309-1333; A. BASSI 1935c, *Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni*, «Boll. UMI» 14, pp. 219-225, 286-292; A. BASSI 1935d, *Su di una formola topologica del Vietoris*, «Rend. R. Ist. Lomb.» (2) 68, pp. 880-890; A. BASSI 1935e, *Su di una notevole operazione topologica tra complessi*, «Giorn. di Mat.» (3) 73, pp. 49-90. Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*, Relazione sull'attività didattica e scientifica della Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno per l'a.a. 1933-

costruttivo”[29] al problema dell’esistenza delle varietà topologiche con numeri di Betti assegnati e allo studio di alcuni modelli topologici di Poincaré.

Trascorrere un periodo di studi negli Stati Uniti, dove gli studi di topologia sono ampiamente coltivati, costituisce una straordinaria opportunità per Bassi ma presenta anche alcune difficoltà. Innanzitutto, vi è la questione economica: la borsa di studio è infatti insufficiente a ricoprire le spese di viaggio e di soggiorno, motivo per cui Bassi chiede un finanziamento al CNR, dichiarando di aver concorso “dietro consiglio ed incitamento del Prof. Lefschetz dell’Università di Princeton e del [suo] Professore, Gino Fano”.[30] La risposta del CNR è però negativa; il segretario, U. Bordoni, lo comunica a Bassi in questi termini:

> Sono molto spiacente di non poterle dare buone notizie. […] mi è stato purtroppo escluso che il Sottocomitato per la Matematica Applicata possa avanzare con qualche probabilità di accoglimento una domanda per una borsa di studio riguardante argomenti di carattere tanto poco “applicato”.[31]

Gli interessi di ricerca di Bassi, così come la meta prescelta, rappresentano un ostacolo per la partenza. Riuscirà comunque a imbarcarsi per gli USA nel dicembre del 1935, grazie a un parziale finanziamento del Ministero dell’Istruzione e dell’Università di Torino.[32] A Princeton, che “può aspirare a sostituire l’antica Gottinga come importantissimo centro matematico”, egli trova l’ambiente ideale per dedicarsi alla topologia. Questa gode qui di un rigoglioso sviluppo grazie a quella

> capacità, dovuta all’intuizione poetica propria dei popoli giovani, di capire quali sono le teorie di maggiore avvenire. In tali teorie essi sperano, e con ragione, di poter imprimere più facilmente il sigillo della loro personalità. Tipica, a questo proposito, è la passione con cui si dedicano alla fisica atomica e alla topologia, delle quali si è, là, del tutto e per tempo compreso il valore.[33]

All’Istituto di Matematica dell’IAS, Bassi fa parte di un “auditorium sceltissimo, costituito di giovani appassionati, la maggioranza dei quali ha già dato belle prove di capacità scientifica”.[34] Contemporaneamente, soggiornano a Princeton giovani matematici provenienti da ogni parte del mondo quali V. Bargmann (Zurigo); E. Hecke (Amburgo); V. Hlavatý (Praga); W. Hurewicz (Amsterdam); L. Infeld (Lwow); W. Mayer (Vienna); T. Nakayama (Tokyo); M.H.A. Newman (Cambridge, UK); W.J. van Stockum (Edimburgo).[35] Bassi ha quindi la possibilità di seguire lezioni su argomenti avanzati, come quelle di algebra moderna di J. Wedderburn e i diversi corsi di topologia tenuti da Lefschetz, Alexander, N. Steenrood, A.W. Tucker e M. Morse. Tre dei corsi di perfezionamento frequentati da Bassi sono interamente dedicati ad argomenti di topologia. La teoria algebrica dei complessi rappresenta il tema

---

34: “L’assistente Dott. Achille Bassi ha continuato attivamente le sue ricerche di Analysis situs (o Topologia) pubblicando 5 lavori, di cui si unisce copia”.

[29] J.P. CECCONI 1974, *Achille Bassi*, «Boll. UMI» (4) 10, p. 545.

[30] ACS, *Fondo CNR-CMFA*, busta 8, fasc. 39: A. Bassi a U. Bordoni, Torino [s.d.].

[31] ACS, *Fondo CNR-CMFA*, busta 8, fasc. 39. U. Bordoni a A. Bassi, Roma 1.7.1935.

[32] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: A. Bassi a S. Pivano, Torino 30.11.1935.

[33] BASSI 1939, *cit.*, p. 68.

[34] *Ibidem*, p. 78.

[35] Cfr. la sezione *Notices* del «Bull. AMS» 1937, 43.1, p. 763.

centrale delle lezioni di topologia generale di Tucker, durante le quali affronta i gruppi di Betti, i gruppi di omologia e le relazioni di dualità. Lo stesso docente tiene il corso di topologia applicata, in cui sono analizzati i concetti topologici elementari che compaiono all'interno di analisi, algebra e geometria, con cenni alle superfici di Riemann, alla geometria differenziale in grande e ai gruppi continui. Lefschetz invece tiene un ciclo di lezioni su argomenti scelti, in cui introduce la topologia generale degli spazi astratti per passare poi alla topologia generale combinatoria. Elementi di topologia compaiono anche all'interno del corso di Geometria proiettiva complementare di Tucker che dedica le ultime lezioni agli aspetti topologici e differenziali delle varietà di configurazioni proiettive o di trasformazioni. Probabilmente Bassi ha occasione di frequentare anche il corso di Algebra tenuto da S. Bochner, giunto a Princeton nel 1933, dopo l'avvento del nazismo in Germania. Al suo interno, dopo un'introduzione ai problemi fondamentali dell'algebra, Bochner illustra alcuni elementi della teoria dei gruppi finiti.[36] La situazione in Italia è completamente differente: la maggior parte dei corsi avanzati di geometria è dedicata ad argomenti classici, con l'unica eccezione del corso di Geometria superiore tenuto da B. Segre a Bologna nell'a.a. 1935-36. Al suo interno egli parte dall'analysis situs e dalla topologia combinatoria per andare a esaminare le corrispondenze tra varietà e le applicazioni della topologia alla geometria algebrica.[37]

A complemento della formazione dei giovani, a Princeton si svolgono un gran numero di seminari che spesso scaturiscono dalle più recenti ricerche del relatore, andando quindi a costituire un importante stimolo alla ricerca. Frutto di questo periodo è una nota di Bassi su alcuni invarianti topologici delle varietà, apparsa sui «Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America».[38] Concluso il primo anno di perfezionamento, nel dicembre del 1936 si prospetta per Bassi un'ulteriore opportunità, grazie all'intervento di Lefschetz, Morse e J. von Neumann. Viene infatti nominato membro dell'IAS che gli conferisce così una sorta di stipendio per poter continuare l'attività di ricerca per un altro anno, fino al luglio 1938.[39] Facendo domanda al Rettore dell'Università di Torino, S. Pivano, di un prolungamento dell'aspettativa fino a tale termine, Bassi scrive:

> Ho accettato quest'offerta perché mi permette di portare in Italia quanto qui si insegna in un campo di studi e di ricerche in Italia finora poco coltivate. A tal fine ho anche rifiutato un'offerta, di per se stessa molto lusinghiera, di due corsi d'insegnamento presso l'Università di Bologna.

---

[36] BASSI 1939, *cit*., pp. 74-75.

[37] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1938, (1) 14.5, pp. 316-317.

[38] Si tratta di A. BASSI 1936, *On some new invariants of a manifold*, «Proc. Nat. Acad. USA» 22, pp. 698-699. Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*, Bassi a S. Pivano, Princeton (NJ) 19.6.1937: "Benché mi sia dedicato specialmente dapprima allo studio, ho steso in questo periodo di tempo quattro lavori, uno dei quali è già pubblicato nei rendiconti della 'National Academy of sciences' degli Stati Uniti; gli altri lavori usciranno entro l'anno corrente".

[39] Cfr. BCMC, Memorial A. Bassi, p. 5; ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: G. Fano a S. Pivano, Torino, 13.12.1936: "Offertami borsa che mi permette di rimanere questo anno e il prossimo sospendo partenza. Segue lettera."; A. Bassi a S. Pivano, Princeton, gennaio 1937; G. Fano a S. Pivano, Torino 10.1.1937; A. Bassi a S. Pivano, Princeton, 19.6.1937: "Posso dire che la mia attività scientifica fu qui assai ben giudicata: nel novembre scorso mi fu offerto per l'anno prossimo uno stipendio affinché mi dedichi a ricerche scientifiche, presso l'Institute for Advanced Study; onore che normalmente è concesso a stranieri solo se professori universitari di buona rinomanza".

Credo infatti di avere il dovere di fare tutto quanto sta in me per portare in Italia concetti e studi che certo vi saranno utilissimi.[40]

Tuttavia, tale proroga sarà concessa soltanto fino alla fine del mese di luglio di quello stesso anno.[41] Allo scadere del congedo, Bassi prova ancora a posticipare il suo rientro a Torino, adducendo come motivazione l'importanza di questo soggiorno negli Stati Uniti per poter poi svolgere, una volta rientrato in Italia, un'opera di diffusione delle più recenti teorie. Asserisce infatti:

Sono profondamente persuaso della reale utilità di questa permanenza all'estero. Essa mi metterà in grado di svolgere in Italia un'azione di rinnovamento di alcune parti della matematica, che credo necessaria, e che spero provochi, specialmente presso i giovani, un nuovo rifiorire di studi.[42]

Questa ulteriore richiesta non sarà tuttavia accolta.[43] Fano, interpellato dal Rettore per esprimere un parere al riguardo, replica:

Il periodo trascorso dal Bassi a Princeton deve essergli stato indubbiamente molto utile, come egli stesso afferma. Ma questo periodo di quasi due anni scolastici (dal dicembre 1935 in qua) deve pure ritenersi largamente sufficiente perché egli possa avere acquistata una buona conoscenza dell'indirizzo della Scuola di Princeton, e continuare a lavorarvi, come d'altronde anche prima egli si era occupato esclusivamente di topologia.[44]

Al di là dell'aspetto pratico relativo all'occupazione di un posto da assistente sottraendolo ad altri possibili candidati, Fano non condivide la forte propensione di Bassi verso un indirizzo di ricerca tipico della Scuola americana e così lontano dalla tradizione italiana. Durante l'assenza di Bassi da Torino, Fano aveva fatto assumere come assistenti provvisori alla Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva Maria Gramegna (a.a. 1935-36 e secondo semestre del 1936-37) e Piero Buzano (primo semestre dell'a.a. 1936-37).[45] In contemporanea, la prima era assistente incaricata presso la BSMT mentre il secondo proseguiva il suo incarico di assistente ordinario presso la Scuola di Geometria analitica.[46] Per l'a.a. 1937-38, tuttavia, Bassi è invitato a riprendere stabilmente il suo posto entro la fine di ottobre o a rinunciare all'assistentato. Rientra quindi in Italia nell'autunno del 1937, riprendendo le sue esercitazioni di Geometria descrittiva a Torino il 15 novembre 1937. Durante queste lezioni, in linea con il programma del

---

40 ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: A. Bassi a S. Pivano, Princeton 5.2.1937.

41 ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: S. Pivano a A. Bassi, Torino 13.4.1937.

42 ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: A. Bassi a S. Pivano, Princeton 9.6.1937. Cfr. anche la lettera di A. Bassi a S. Pivano, Princeton 19.6.1937: "sì da potere, tornato in Italia, svolgere un'opera di propaganda e di rinnovamento di alcune parti della Matematica moderna, opera cui mi dedicherò con tutte le mie forze".

43 Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: S. Pivano a A. Bassi, Torino 10.7.1937.

44 ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: G. Fano a S. Pivano, Torino 6.7.1937.

45 Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*: G. Fano a S. Pivano, Torino 24.6.1935, 29.11.1935, 11.1.1937; ASUT, *Fasc. personale di P. Buzano*: G. Fano a S. Pivano, Torino 18.11.1936; ASUT, Registro degli esami speciali di Geometria proiettiva e descrittiva, Facoltà di Scienze MFN, pp. 100-112.

46 Cfr. ASUT, *Corrispondenza universitaria*: A. Terracini a S. Pivano, Torino 18.6.1935; G. Fano a S. Pivano, Torino 8.10.1937; e ASUT, *Fasc. personale di P. Buzano*: S. Pivano a A. Terracini, Torino 15.12.1931; A. Terracini a S. Pivano, Torino 17.12.1931, 11.10.1936; A. Terracini a S. Pivano, Courmayeur 2.8.1938: "Magnifico Rettore, mi pregio di attestarvi con la presente che il servizio prestato dal Dr. Piero Buzano come assistente di ruolo alla mia cattedra, dal 1° dicembre 1932 XI fino ad oggi è stato lodevolissimo";

corso stilato da Fano, affronta temi iper-classici che nulla hanno a che fare con i corsi di topologia seguiti a Princeton.[47] Durante l'assistentato a Torino, dunque, Bassi non riesce ad esercitare un'azione di magistero in campo topologico, né vi sono studenti che preparano la tesi con lui. Probabilmente questo è anche dovuto al fatto che egli si occupa della parte di esercizi di un corso propedeutico, rivolto agli studenti del secondo anno, mentre – come scrive Fano – "le tesi di laurea si fanno generalmente in discipline di 2° biennio".[48]

Bassi si trasferisce non appena possibile all'ateneo bolognese, dove ricopre il ruolo di assistente alla cattedra di Geometria a partire dal 1° marzo 1938, pur continuando a tenere le esercitazioni nel capoluogo piemontese fino al 22 marzo.[49] È B. Segre a invitare Bassi a ricoprire questo ruolo, probabilmente anche alla luce del loro comune interesse per le questioni di topologia, come testimoniato dalle molteplici recensioni dei lavori stranieri in questo settore firmate da Segre per il «Bollettino dell'UMI».[50]

Prima di spostarsi a Bologna, Bassi tiene a Torino e a Roma due conferenze sul suo soggiorno negli Stati Uniti, all'interno delle quali descrive in termini entusiasti l'organizzazione istituzionale e scientifica della Scuola matematica di Princeton, sottolineando l'importanza dei rapporti diretti tra docenti, assistenti e studenti.[51] Una traduzione in spagnolo di questo intervento sarà pubblicata nel 1941 all'interno delle «Publicaciones» dell'Universidad Nacional del Litoral di Rosario.[52]

6.3. A contatto con i "valenti cultori di Topologia": il viaggio in Germania

A sei mesi dal suo trasferimento, Bassi partecipa alla XXVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze che ha luogo proprio a Bologna tra il 4 e il 6 settembre del 1938. In questo contesto, all'interno della sezione matematica, ha occasione di presentare il frutto delle sue ricerche in ambito topologico.[53]

---

[47] Cfr. ASUT, Registro delle lezioni di Esercizi di Geometria descrittiva a.a. 1937-38. I temi affrontati da Bassi durante le sue 40 lezioni sono la teoria delle proiettività, il teorema di Staudt, alcuni problemi geometrici risolubili con riga e compasso, le omologie piane, il metodo delle proiezioni ortogonali, le omografie tra piani punteggiati, le omografie involutorie, le rappresentazioni dei poliedri regolari; il metodo delle proiezioni quotate, le curve sghembe, le superfici elicoidali. Le restanti 17 esercitazioni sono tenute da Tanturri e vertono su rappresentazione delle superfici di rotazione in proiezione ortogonale, sezioni coniche, cilindri, quadriche e problemi di intersezione.

[48] ASUT, *Corrispondenza universitaria*, Relazione sull'attività didattica e scientifica della Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno per l'a.a. 1933-34.

[49] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di A. Bassi*: S. Pivano al Rettore dell'Università di Bologna, Torino 22.11.1937; A. Bassi a S. Pivano, Torino 28.1.1938; A. Bassi a M. Allara, Torino, 16.11.1965; M. Allara a A. Bassi, Torino, 17.11.1965.

[50] Cfr. la sezione *Recensioni* del «Boll. UMI» 1934, (1) 13.4, pp. 248-252, e del «Boll. UMI» 1936, (1) 15.3, pp. 134-139.

[51] Trattasi di A. BASSI 1938, *L'Università e la Scuola Matematica di Princeton. Conferenza tenuta il 21 febbraio 1938*, «Conferenze di Fisica e Matematica tenute presso la R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino 1938-1939», pp. 1-24 e BASSI 1939, *cit*. Il primo scritto rappresenta il testo integrale della conferenza tenuta a Torino il 21.2.1938.

[52] A. BASSI 1941b, *La Universidad y la Escuela matemática de Princeton*, «Publicaciones de la Facultad de Ciências matematicas, fisico-quimicas y naturales aplicadas a la industria de la Universidad Nacional del Litoral» 25, pp. 1-27. Cfr. BSMT, *FTe*, estratto n. 4812 della miscellanea Terracini.

[53] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1938, (1) 17.4, p. 250.

Il periodo bolognese di Bassi è segnato da un altro viaggio, quello in Germania nella primavera del 1939. È infatti invitato a tenere un ciclo di conferenze sui risultati delle sue recenti ricerche nel campo della topologia.[54] Questa volta, grazie anche all'intermediazione di Bompiani, il viaggio è in parte finanziato dal CNR.[55] Ciò che è cambiato è la meta – la Germania nazista – non i temi di ricerca, sempre lontani dall'ambito applicativo.

Bisogna tener presente che il Comitato per la Matematica per CNR aveva particolarmente a cuore le relazioni con i matematici tedeschi. Bompiani e Severi avevano gettato le basi per gli scambi scientifici tra la comunità matematica italiana e quella tedesca. Durante le prime tre settimane del mese di giugno del 1938, il primo si era recato a Giessen, Amburgo, Göttingen e Tübingen per tenere un ciclo di conferenze di geometria proiettivo-differenziale, durante le quali erano "intervenuti anche numerosi docenti delle Università viciniori".[56] Nel settembre dello stesso anno, Bompiani e Severi avevano rappresentato l'UMI al Congresso della *Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Mentre Bompiani aveva presentato un contributo sulle geometrie riemanniane di specie superiore, Severi si era occupato della teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche e dei relativi sistemi di equivalenza.[57] Ancora, a inizio novembre B. Manià era stato invitato da W. Blaschke a tenere tre conferenze al Seminario matematico dell'Università di Amburgo sulle recenti ricerche dei matematici italiani nell'ambito del calcolo delle variazioni.[58] Durante il viaggio di Manià in Germania, Blaschke, H. Geppert (Giessen) e H. Kneser (Tübingen) avevano manifestato il desiderio di invitare Bassi e Conforto a tenere alcune conferenze di topologia e di geometria algebrica presso le loro università. Al contempo, avevano suggerito alcuni nomi di giovani matematici tedeschi – E. Kähler dell'Università di Könisberg e H. Zassenhaus dell'Università di Amburgo – da invitare in Italia come conferenzieri.[59] L'invito di Geppert sarà poi esteso anche a Buzano:

[54] Sulla notizia dell'invito di Bassi in Germania, cfr. Archivio UMI, E. Bortolotti a E. Bompiani, Bologna 17.12.1938: "Bassi ha fatto una conferenza sulla Topologia al nostro Istituto, cui non ho potuto assistere; è stato invitato a tener conferenze su tale oggetto anche da Università tedesche, (Amburgo ed altre che non ricordo), pare sia molto ben quotato per quell'indirizzo"; E. Bompiani a L. Berzolari, Roma 3.2.1939: "Blaschke verrà in Italia a fine Febbraio o principio di Marzo; e farà una conferenza qui a Roma. Pensavo di ricambiare gli inviti fatti l'anno scorso a me, Severi, e quest'anno a tre giovani (Conforto, Bassi, Buzano) invitandolo, da parte dell'UMI a tenere una conferenza in qualche altro posto e dandogli una piccola somma".

[55] Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: A. Bassi a E. Bompiani, Bologna 31.12.1938; A. Bassi a ignoto, Bologna 14.1.1939; E. Bompiani a A. Bassi, Roma 19.1.1939; A. Bassi a E. Bompiani, Ceriale 23.1.1939; A. Bassi a U. Bordoni, Bologna 25.2.1939; E. Bompiani a A. Bassi, Roma 27.2.1939; A. Bassi a E. Bompiani, Bologna 1.3.1939; L. Tonelli a E. Bompiani, Pisa 4.3.1939; E. Bompiani a U. Bordoni, Roma 6.3.1939; E. Bompiani a A. Bassi, Roma 28.3.1939. A Bassi è assegnato un contributo di 800 £, con l'invito a presentare una relazione sul viaggio al suo ritorno.

[56] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1938, (1) 17.4, p. 249. Tra l'altro, Bompiani si occuperà della recensione dell'opera di Blaschke *Ebene Kinematik* (1938). Cfr. la sezione *Recensioni* del «Boll. UMI» 1939, (2) 1.1, pp. 84-85.

[57] *Ibidem*. Il Congresso si svolge dall'11 al 18 settembre 1938.

[58] *Ivi*, pp. 249-250. Le conferenze di Manià ad Amburgo hanno luogo dal 3 al 5 novembre. Il 7 novembre, invece, è invitato da Geppert a Giessen a presentare i suoi risultati di prossima pubblicazione sulle equazioni integrali il cui nucleo dipende da un parametro.

[59] Cfr. la lettera di B. Manià al CNR, Pavia 17.11.1938, edita al seguente link:
https://media.accademiaxl.it/pubblicazioni/Matematica/link/conforto.pdf

> ho invitato tre giovani italiani a Gießen, Conforto, Bassi e recentemente anche Buzano che d'accordo con Blaschke faranno delle conferenze qui ed a Amburgo. Spero che questi scambi come anche la collaborazione al *Zentralblatt* renderanno più intimi i legami scientifici e personali fra i nostri paesi.[60]

Disinteressato all'aspetto politico, Bassi si reca in Germania tra il 19 aprile e il 6 maggio 1939, tenendo una serie di conferenze di topologia a Giessen, Amburgo, Göttingen, Heidelberg e Tübingen.[61] Qui rimane favorevolmente colpito dallo "spirito di cooperazione" delle università tedesche e dalla presenza di "un gruppo di giovani capaci, al corrente delle teorie più recenti della Matematica, i quali fanno ben sperare per il prossimo avvenire". Augurandosi di poter assistere a un analogo movimento di rinnovamento degli studi geometrici in Italia, Bassi sottolinea le relazioni personali che ha intrecciato con "valenti" topologi quali Kneser, H. Seifert e K. Reidemeister, per lui molto importanti "dato che in Italia mancano quasi del tutto i cultori di Topologia".[62] Frutto del soggiorno in Germania è anche l'invito a tenere un corso di perfezionamento sulle moderne teorie topologiche al Seminario matematico di Amburgo nell'a.a. 1939-40. Una richiesta analoga arriva dall'INDAM di Severi, un'istituzione che, secondo Bassi, dovrebbe essere "di forte stimolo al progresso matematico" provocando "in Italia un più vivo interesse per la ricerca".[63] In seguito al viaggio in Germania, Bassi diventa anche collaboratore dello «Zentralblatt für Mathematik». Le premesse per tale collaborazione risalgono alla nomina di Severi e Bompiani a membri del comitato di redazione, in seguito alla quale "vari giovani Matematici italiani sono stati invitati a collaborare a questa importante rivista di carattere internazionale".[64]

Il 1939 è segnato dal proliferare degli scambi scientifici tra Italia e Germania. Quasi in contemporanea a Bassi, anche Mauro Picone si reca ad Amburgo e Giessen, dove tiene una conferenza intitolata *Metodi nuovi di indagine nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*.[65] A meno di un mese dal rientro di Bassi in Italia, Conforto trascorre una settimana in Germania, toccando – nell'ordine – le Università di Giessen, Göttingen, Amburgo, Berlino e Monaco. Se, da un lato, dedica le sue conferenze a temi classici della geometria algebrica italiana (le varietà algebriche con infinite trasformazioni birazionali in sé, il ruolo della continuità in geometria algebrica, le superfici razionali di ordine quattro, …), dall'altro presenta alcuni risultati scaturiti dalla sua collaborazione con Picone all'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo, legati all'utilizzo di un particolare metodo di integrazione per

---

[60] Archivio UMI: H. Geppert a E. Bompiani, Giessen 14.1.1939.

[61] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1939, (2) 1.5, p. 495: "Il prof. Achille Bassi, della R. Università di Bologna, ha tenuto in Germania, negli scorsi mesi di Aprile e Maggio, dietro invito delle Università di Giessen, Amburgo, Gottinga, Heidelberg e Tubinga, un ciclo di conferenze su argomenti di Topologia".

[62] Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: A. Bassi a E. Bompiani, Reggio Emilia 8.7.1939.

[63] BASSI 1939, *cit*., p. 79.

[64] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1939, (2) 1.1, p. 93. Cfr. Archivio UMI: H. Geppert a E. Bompiani, Giessen 14.1.1939: "A proposito del *Zentralblatt* Le volevo proporre di mettere una breve notizia nel Bollettino dell'UMI che lei e Severi sono stati nominati nel comitato di redazione e che gli italiani in seguito collaboreranno intensivamente a questa rivista (almeno lo spero perché sono stato io a tenerci che venissero invitati)".

[65] Cfr. la sezione *Notizie* del «Boll. UMI» 1939, (2) 1.4, p. 398. Le due conferenze di Picone in Germania si inseriscono all'interno di un viaggio più ampio nel quale tocca anche Cracovia e Varsavia (21.4.1939-6.5.1939).

affrontare il caso delle deformazioni elastiche di un diedro omogeneo e isotropo.[66] Durante il viaggio in Germania, Conforto si reca anche a Berlino per visitare la *Deutsche Gesellschaft für Bodenmechanik*, con l'incarico "di riferire dettagliatamente sulla sua organizzazione, sulle persone che la dirigono e che vi lavorano, sulle sue finalità anche in relazione a scopi pratici (prospezioni minerarie, per esempio), sulle sue attività" al CNR.[67] Ancora, nel mese di giugno anche Buzano, ex collega di Bassi a Torino, tiene due conferenze di geometria differenziale ad Amburgo e Giessen.[68] I viaggi in Germania di Bassi, Buzano e Conforto – appartenenti alla nuova generazione dei geometri italiani – si inseriscono dunque all'interno dell'azione del Comitato di Matematica del CNR per promuovere il confronto e la collaborazione con i matematici tedeschi e, in particolare, la cooperazione tra l'UMI e la DMV.

Per quanto riguarda Bassi, a questo periodo risale l'incarico per redigere un volume destinato alla topologia all'interno della collana di monografie matematiche del CNR.[69] I suoi lavori, per i quali gli è anche conferito un premio dall'Università di Bologna, sono inoltre oggetto di particolare studio all'interno del Seminario matematico dell'Università di Tokyo.[70]

6.4. I primi anni di impegno per una "vera Scuola scientifica" in Brasile

La scelta di Bassi per l'a.a. 1939-40 ricade, inaspettatamente, sul Brasile. Invitato a ricoprire la cattedra di Geometria superiore presso la neonata Facoltà Nazionale di Filosofia di Rio, egli si trasferisce nel capoluogo brasiliano insieme alla moglie, Elena Simonetta Bassi, da cui avrà tre figli. Probabilmente lo scoppio della Seconda guerra mondiale influisce sulla decisione di Bassi, che riesce a lasciare l'Italia insieme ai suoceri, antifascisti convinti.

La chiamata di Bassi in Brasile si inscrive nel processo più ampio di "internazionalizzazione della scienza e della vita accademica" i cui tratti fondamentali sono la circolazione transnazionale delle idee, teorie e individui e il moltiplicarsi di missioni scientifiche, conferenze internazionali, programmi di scambio, borse di studio e progetti di ricerca congiunti, riviste specializzate, che hanno contribuito al processo di istituzionalizzazione e professionalizzazione

---

[66] *Ibidem.* Conforto si reca in Germania tra il 31 maggio e il 6 giugno 1939.

[67] Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: E. Bompiani a F. Conforto, Roma 27.2.1939; F. Conforto a U. Bordoni, Roma 5.3.1939.

[68] Cfr. ASUT, *Fasc. personale di P. Buzano*: A. Arcangeli a A. Azzi, Torino 15.2.1939; A. Azzi al Ministero dell'Educazione Nazionale, Torino 17.2.1939; Ministero dell'Educazione Nazionale a A. Azzi, Roma 2.5.1939; A. Azzi al Questore di Torino, Torino 4.5.1939; G. Bottai a A. Azzi, Roma 4.6.1939; A. Azzi a P. Buzano, Torino 4.5.1939, 10.6.1939. Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: E. Bompiani a P. Buzano, Roma 27.2.1939; P. Buzano a E. Bompiani, Torino 1.3.1939; P. Buzano a E. Bompiani, Torino 1.5.1939.

[69] Sulla serie di monografie promossa dal Comitato matematico del CNR, cfr. P. NASTASI 1998, *La matematica italiana dal manifesto degli intellettuali fascisti alle leggi razziali*, «Boll. UMI» (8) 1-A, p. 329. Tuttavia, "la parte del progetto attinente ai settori nuovi non va al di là dell'aspetto propagandistico". L'idea dei nuovi volumi della serie di monografie del CNR è di Tonelli. Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: L. Tonelli a E. Bompiani, Pisa 4.3.1939: "Al Bassi si potrebbe far fare una monografia sulla Topologia"; E. Bompiani a U. Bordoni, Roma 6.3.1939. Oltre a quello sulla topologia, il progetto prevedeva altri tre volumi su: principi variazionali della meccanica (G. Lampariello), calcolo tensoriale con applicazione alla relatività (E. Bortolotti), calcoli numerici (L. Cesari). Tali monografie non saranno mai pubblicate, né vi si trovano tracce all'interno dei documenti del CNR degli anni 1922-1970 custoditi all'ACS.

[70] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 6. Purtroppo, la documentazione d'archivio è lacunosa: l'allegato relativo al Seminario matematico di Tokyo è attualmente disperso.

delle discipline accademiche.[71] Bassi arriva in Sud America con una "missione" precisa: formare una generazione di matematici brasiliani, interrompendo la consuetudine dell'autoformazione. L'intento del governo brasiliano era chiaro: la circolazione di idee matematiche provenienti dall'Italia e, in generale, dall'Europa avrebbe giovato alla formazione professionale dei matematici brasiliani e, di conseguenza, al fiorire di una tradizione di ricerca locale. L'assunzione di "maestri esperti" alla FNF di Rio era stata preparata a lungo: ancor prima della sua apertura, il ministero brasiliano aveva contattato L. Fantappiè e G. Wataghin chiedendo i nominativi di alcuni matematici europei che si sarebbero potuti inserire proficuamente nell'ambiente brasiliano per svolgere questa azione di 'guida'.[72] In un primo momento, tra i possibili candidati compaiono i nomi di B. Segre, Terracini, Levi-Civita e E. Schrödinger. Alla fine, gli stranieri assunti per insegnare all'interno del corso di matematica della FNF sono Gabriele Mammana per l'Analisi, Luigi Sobrero per la Fisica matematica e Bassi per la Geometria. Quest'ultimo raggiungerà Rio nell'ottobre 1939.

Nonostante la notizia appresa pochi giorni dopo il suo arrivo in Brasile della soppressione della cattedra di Geometria ad opera del DASP (Departamento Administrativo do Serviço Público), qui Bassi introduce l'insegnamento della topologia combinatoria cui dedica il corso di Geometria superiore nel 1940. A tal proposito, scriverà:

> Ricordo con orgoglio quanto fosse moderno e avanzato il mio corso! Ad esempio, la nozione di gruppo di omologia fu introdotta da me a Rio de Janeiro nel 1940, quattro o cinque anni dopo la sua comparsa nella scienza (ad Harvard e a Mosca). […] In poche università europee all'epoca venivano offerti corsi simili.[73]

Privo di una cattedra 'ufficiale', non riesce inizialmente a realizzare il progetto di creazione di una Scuola matematica per una duplice ragione. Innanzitutto non può nominare degli assistenti, il che impedisce di fatto ai giovani di proseguire con l'attività di ricerca. In secondo luogo, Bassi si rende ben presto conto del problema legato alla mancanza di una biblioteca adeguata, condizione necessaria per supportare gli studi e per favorire l'attività di ricerca. Il progetto della creazione di una biblioteca matematica a Rio fallisce a causa del mancato finanziamento del governo centrale. Nel 1942 il Brasile entra in guerra contro l'Asse e Bassi, che sceglie di non rientrare in Italia, è allontanato dal corpo docente della FNF e riammesso solo un anno più tardi. Nel frattempo, affianca alle lezioni private un corso di topologia algebrica a San Paolo. A tal proposito, C.S. Dias ricorda: "Fu il primo corso sistematico di topologia algebrica, basato essenzialmente sul trattato classico di Seifert e Threlfall".[74]

Personalità di spicco nell'ambiente intellettuale brasiliano, negli anni Quaranta Bassi è invitato a tenere conferenze in tutto il Paese, portando avanti un'efficace azione di formazione

---

[71] Cfr. A. IRIYE – P. SAUNIER (eds.) 2016, *The Palgrave Dictionary of Transnational History: From the mid-19th century to the present day*, Basel, Springer, p. 548.

[72] Per dettagli sulla "Missione italiana" in Brasile, cfr. LUCIANO 2022a, *cit*., pp. 92-94.

[73] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 6: "Lembro com orgulho como era moderno e adiantado o meu curso! Por exemplo, a noção de grupo de cchomologia foi por mim introduzida no Rio de Janeiro em 1940, quatro ou cinco anos depois de seu aparecimento na ciência (em Harvard e em Moscou). […] Em poucas universidades européias se faziam então oursos semelhantes".

[74] C.S. DIAS 1984, *Cândido Silva Dias*, «Revista Língua e Literatura» 10-13, p. 68: "Tratava-se do primeiro curso sistemático sobre Topologia Algébrica, baseado essencialmente no livro clássico de Seifert e Threlfall". Trattasi di H. SEIFERT – W. THRELFALL 1934, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, Teubner.

e diffusione della cultura matematica. Con una singolare coincidenza temporale, negli stessi anni in cui Fano a Losanna si prodiga per la promozione delle ricerche classiche della Scuola italiana di geometria algebrica attraverso le cinque conferenze al *Cercle,* Bassi fa della divulgazione uno degli aspetti principali del proprio impegno, anche se contesto e contenuti di tale azione sono del tutto differenti da quelli di Fano. In primo luogo, in Brasile manca del tutto una tradizione matematica, mentre in Svizzera si stanno ormai consolidando alcuni indirizzi di ricerca avanzati tra i quali spicca, in ambito geometrico, quello avviato da De Rham. Nel 1939 Fano è un'autorità affermata, quasi settantenne e al tramonto della propria carriera, con ingenti mezzi economici a propria disposizione; Bassi è un giovane entusiasta, poco più che ventenne e alla ricerca di un'affermazione nel mondo accademico e di una certa stabilità, professionale ed economica. Le motivazioni alla base della scelta di emigrare sono parimenti opposte: a causa dei provvedimenti razziali, Fano è costretto a lasciare l'Italia; Bassi invece, sfiduciato dall'ambiente matematico italiano – da un lato troppo ancorato a indirizzi di ricerca ormai superati, dall'altro incapace di fornire ai giovani buone prospettive lavorative – coglie la stimolante opportunità di trasferimento nel Nuovo Continente, preferendola a due incarichi forse più prestigiosi, ma temporanei: tenere un corso di perfezionamento di topologia all'INDAM nell'a.a. 1939-40, su invito di Severi, e presentare un ciclo di conferenze sullo stesso argomento all'Università di Amburgo. Anche l'immagine della matematica di cui i due si fanno promotori è radicalmente differente: il primo esalta la 'gloriosa tradizione' della geometria algebrica classica, di cui è stato uno dei principali interpreti, che ormai però è sull'orlo del declino; il secondo incoraggia invece lo studio di nuove e promettenti branche quali la topologia e l'algebra moderna. Quest'ultimo è l'obiettivo che accomuna i due discorsi di Bassi che saranno analizzati.

Il primo, dedicato al ruolo della topologia nella matematica moderna, è proposto in due occasioni: nel 1940, come prolusione al corso di Geometria superiore tenuto alla FNF,[75] e nel 1942 all'Instituto Ítalo-Brasileiro de Alta Cultura di Rio de Janeiro. Le conferenze patrocinate da questo istituto e promosse dalla Società Dante Alighieri mostrano che la "missione" italiana non si limita al mondo universitario né a una formazione matematica in senso stretto, ma riflette gli sforzi del governo di promuovere la propria cultura all'estero.[76] Nel 1945 Bassi presenta poi un ciclo di lezioni sulla matematica moderna a Minas Gerais che apre con un discorso sulla matematica moderna e la necessità della sua diffusione.[77] Quattro anni più tardi, nel 1949, tiene ulteriori interventi di questo tipo nella città di San Luís, nel Maranhão, e presso la FNF. Ancora, tra il 1948 e il 1952, propone un'ulteriore serie di conferenze agli studenti della Escola de Minas e Metalurgia di Ouro Preto.

[75] A. BASSI 1941a, *Da importância da topologia na matemática moderna,* Coleção de Monografias Cientificas dirigida por Luigi Sobrero, Rio de Janeiro, Instituto Ítalo-Brasileiro de Alta Cultura, pp. 7-32.

[76] Oltre alla conferenza di Bassi sulla topologia nella matematica moderna, si segnalano le due conferenze di Mammana del 23.8.1941 e del 17.9.1941 dal titolo *A concepção do universo segundo a Escola Itálica e os paradoxos de Zenon*.

[77] A. BASSI 1948, *A Matemática Moderna e a Necessidade de sua Difusão*, «Kriterion, Revista da Faculdade de Filosofia de Minas Gerais» 1, pp. 446-474.

6.5. Il ruolo della topologia nella matematica: la prima conferenza in Brasile

La prolusione al primo corso di Geometria superiore tenuto da Bassi alla FNF è intitolata *Da importância da topologia na matemática moderna* (1940). Come accennato, una conferenza di analogo contenuto sarà presentata presso l'Instituto Ítalo-Brasileiro de Alta Cultura due anni più tardi. Il testo della prima è pubblicato all'interno del primo numero della Collana di Monografie scientifiche diretta da Sobrero e finanziata da questo istituto. Il progetto editoriale prevede per ciascun volume la presentazione di un tema di attualità nel campo della fisica, della matematica e delle scienze in generale. Allo scritto di Bassi, seguirà il contributo di B. Zunini, libero docente in Scienza delle costruzioni presso il Politecnico di Torino. Presentando il primo volume, Sobrero afferma: "Una collezione di questo tipo è, crediamo, l'unica in Brasile e speriamo che il suo successo risponda alla cura con cui è stata creata".[78] A distanza di cinque anni, il testo della conferenza sarà ripubblicato, senza modifiche essenziali, nella rivista portoghese «Gazeta de Matemática», edita a Lisbona.[79]

L'incipit della conferenza di Bassi, che segna l'inizio della sua attività di divulgazione in Brasile, è il seguente:

> Le idee e i problemi della topologia, come spesso accade con le dottrine che hanno una profonda ragione d'essere, hanno la loro prima origine in fatti esperienziali comuni che riguardano la vita di tutti i giorni. La topologia, così come ogni altra branca della matematica, può, infatti, dar luogo a problemi che si prestano ad essere enunciati e compresi da chi è profano, o quasi, riguardo alle nozioni matematiche. La matematica divertente gli è quindi debitrice per un gran numero di piccoli passatempi o giochi.[80]

Tuttavia, questa contaminazione tra topologia e matematica ricreativa ha causato, secondo Bassi, l'allontanamento dei migliori intelletti dello studio di questa disciplina. Da sempre legata alla geometria, essa si afferma come branca importante della matematica solo a partire dalla metà dell'Ottocento grazie all'imponente opera di Riemann sulle funzioni di variabile complessa. Due sono gli indirizzi di ricerca sviluppati, "sia con attività occasionale e talvolta inconscia, sia con lavoro sistematico" [81]: il primo, scaturito dagli studi di Betti e Poincaré, è quello della topologia moderna (o "combinatoria"); il secondo, quello della topologia degli insiemi (o "puntuale"), affonda le radici nelle idee di G. Cantor, Peano, L. Brouwer e M. Fréchet.

Per convincere il pubblico dell'importanza della topologia all'interno della matematica moderna, Bassi adduce due ragioni principali. Innanzitutto, il suo legame con scoperte e risultati centrali della matematica. In secondo luogo, bisogna tener conto della molteplicità degli ambiti di sua applicazione (dalla meccanica celeste ai fondamenti dell'analisi moderna, dai problemi

---

[78] Prefazione di Sobrero a BASSI 1941a, *cit.*, p. 6: "ma coleção deste tipo é, acreditamos, a única exis tente no Brasil, e nós fazemos votos para que seu exito cor responda aos cuidados com que foi criada".

[79] A. BASSI 1945, *Da importância da topologia na matemática moderna*, «Gazeta de Matemática» 26, pp. 3-11.

[80] BASSI 1941a, *cit.*, p. 7: "As idéias e os problemas da topologia, como frequen temente acontece com as doutrinas que trazem em si uma profunda razão de ser, têm sua primeira origem em fa tos comuns experimentais que se relacionam com a vida quotidiana. A topologia, bem como qualquer outro ramo da Matemática, pode, com efeito, dar origem a problemas que se prestam para ser enunciados e compreendidos por quem é leigo, ou quasi, a respeito de noções matemáti cas. A matemática divertida lhe é, portanto, devedora de um grande numero de pequenos passatempos ou jogos".

[81] *Ivi*, p. 8: "quer com uma atividade ocasional e, por vezes, inconscientemente, quer com um trabalho sistemático".

dell'infinito alla teoria delle equazioni algebriche) a partire dai quali si è giunti ad un'unica corrente di idee, la topologia attuale. A tal proposito, Bassi afferma:

> Trent'anni fa era certamente meno facile immaginare l'unità delle nuove idee che stavano emergendo in matematica e si era ancora lontani dal poter comprendere tutta la nuova e feconda vitalità che queste idee avrebbero portato alla matematica stessa. Eppure anche allora i migliori intelletti non potevano fare a meno di sentirne il fascino e di prefigurare, almeno in parte, l'importanza di quanto stava maturando.[82]

La topologia ha avuto il merito di 'ringiovanire' un certo numero di teorie, superando man mano i vecchi schemi, a un passo "così accelerato che in pochi anni l'atmosfera di molti discorsi scientifici si era trasformata".[83] Oltre a portare con sé nuove conoscenze, la topologia fornisce gli elementi per una migliore comprensione di alcuni aspetti essenziali di diverse teorie, motivo per cui "per ogni giovane che voglia cogliere la conoscenza viva della matematica moderna, è della massima importanza familiarizzare, prima di tutto, con la topologia".[84] Una volta acquisite solide basi in questo campo, sarà più facile abbracciare molte altre teorie moderne. Ciò è evidente se si pensa alle innumerevoli applicazioni della topologia ad altri campi. Bassi fa riferimento ai legami con il calcolo delle variazioni (grazie alle ricerche di Morse, L. Lyusternik e L. Schnirelmann), con la teoria dei gruppi di trasformazioni (Cartan, O. Schreier e D. van Dantzig) e con la geometria differenziale. Emblematica di questo ultimo collegamento, inaugurato da Riemann nel 1868, è la serie *Topologische Fragen der Differentialgeometrie*, pubblicata dal Seminario matematico di Amburgo – un ambiente che Bassi conosce bene – che, pur essendo di recente fondazione, contiene già più di cento lavori sull'argomento.

Al di là delle applicazioni, la topologia ha un'importanza intrinseca poiché amplia i confini della conoscenza matematica. A supporto di tale affermazione, Bassi propone quattro esempi partendo dalla moderna teoria topologica della dualità, al cui interno si collocano due risultati apparentemente distinti. Il primo, messo in luce da Poincaré già nel 1895, consiste nell'uguaglianza tra l'i $-$esimo e l'$(n-i)$ $-$esimo numero di Betti di una varietà orientabile n $-$dimensionale. Il secondo è il cosiddetto teorema della curva chiusa di Jordan: ogni curva chiusa del piano che non si autointersechi divide il piano in due parti, una "interna" e una "esterna". Criticato da Peano con il celebre controesempio della costruzione di una curva che riempie il piano, questo risultato sembra non essere in alcun modo collegato alla dualità di Poincaré. Il topologo russo L.S. Pontrjagin è il primo ad accorgersi che, invece, queste due proprietà rappresentano casi particolari di relazioni più generali, le cosiddette "dualità". Nello specifico, Pontrjagin riformula i teoremi di dualità presentandoli come un caso particolare della dualità tra un gruppo abeliano discreto e il suo gruppo dei caratteri. La teoria omologica della dualità risulta così unificata, aprendo la strada all'introduzione dei gruppi duali dei gruppi di

---

[82] *Ivi*, p. 9: "Ha trinta anos, era, por certo, menos fácil vislumbrar a unidade subtancial das novas idéias que se iam delineando na ma temática e estava-se, ainda longe de poder compreender toda a nova e fecunda vitalidade que estas idéias teriam trazido à propria matemática. Todavia, mesmo então, os melhores intelectos não puderam deixar de sentir a sua fascinação e de presagiar, ao menos em parte, a impor tância de quanto se estava amadurecendo".

[83] *Ivi*, p. 11: "om um passo tão acelera do que em poucos anos se transformara a atmosfera de muitos discursos científicos".

[84] *Ibidem*: "para todo o jovem que queira apoderar-se dos conhecimentos vivos da matemática moderna, seja de suma importância familiarizar-se, em primeiro logar, com a topologia".

omologia, i cosiddetti “gruppi di coomologia”. Per Bassi questo esempio è emblematico dell’importanza della topologia poiché

> il valore di una teoria si misura dalla sua forza coordinatrice dei fenomeni, cioè dalla capacità di porre un insieme di fatti, che di per sé non darebbero una conoscenza scientifica dei fenomeni, in prospettive armoniche, facendoli derivare da pochi semplici principi.[85]

Un secondo esempio giunge dalla teoria delle equazioni algebriche: si tratta sdel celebre teorema fondamentale dell’algebra che è un risultato di natura essenzialmente topologica che come afferma Bassi, fa da “trampolino di lancio” per la ricerca dei punti fissi degli omeomorfismi.

La nozione di spazio astratto costituisce il terzo progresso importante apportato dalla topologia al pensiero matematico. Secondo Bassi, gli spazi astratti

> sono responsabili dell’introduzione in matematica di un gran numero di nuove denominazioni che potrebbero aver contribuito ad alienarne alcuni geometri e renderli sospettosi. Tale abbondanza di denominazioni era dovuta, a mio avviso, al febbrile sviluppo della topologia, che non consentiva, in un primo momento, di valutare e prevedere il pieno valore e l’esatta portata delle nozioni che venivano introdotte. Erano il risultato di un urgente bisogno di ricerca e costruzione e risentono della fretta con cui le teorie sono state sollevate.[86]

Le critiche e obiezioni sollevate a questo nuovo concetto sono in realtà di natura psicologica (e non logica o matematica) e del tutto analoghe a quelle scaturite dall’introduzione dei numeri complessi o della quarta dimensione. La scelta dell’aggettivo “astratto”, così come quella di “complessi”, non è delle più felici ma riflette la meraviglia che ha accompagnato tale scoperta. Gli spazi astratti, sottolinea Bassi, non sono nozioni matematiche più astratte delle altre, così come i numeri immaginari non sono enti più complessi rispetto agli altri numeri. L’estensione del concetto di numero ha portato un grande progresso nella matematica, aprendo la via alla teoria delle funzioni di variabili complesse, ai numeri ipercomplessi, ai numeri algebrici, alla teoria delle algebre. Allo stesso modo, l’estensione del concetto di spazio fornita dagli spazi astratti offre alla matematica notevoli benefici, come è emerso in maniera “evidente in molti paesi dove si tengono interi corsi ispirati a questa tendenza, che spesso è quasi esclusiva dei giovani. Risale a pochissimi anni fa, ma si è diffusa molto rapidamente”.[87] Se, da un lato, l’ammissione degli spazi astratti costituisce una creazione del tutto naturale del pensiero matematico, dall’altro non rappresenta un’invenzione semplice o intuitiva poiché comporta un cambiamento profondo di un modo istintivo di pensare, psicologicamente ben radicato.

---

[85] *Ivi*, pp. 15-16: “o valor de uma teoria se aquilata da sua força coordenadora de fenômenos, isto é, da capacidade de colocar um conjunto de fatos, os quais por si sós não dariam um conhecimento cientifico dos fenômenos, em perspectivas harmônicas, fazendo com que derivem de poucos e simples princípios”.

[86] *Ivi*, p. 17: “São êles os responsaveis pela intro dução na matemática de um grande número de denomi nações novas que talvez tenham contribuido para afastar dela alguns geômetras e a torná-los desconfiados. Tal abundância de denominações foi devida, a meu vêr, ao desenvolvimento febril da topologia que não permitiu, num primeiro momento, de avaliar e prever to do o valor e o alcance exato das noções que se iam introduzindo. Foram elas o fruto de uma urgente necessidade de pesquisa e de construção e ressentem-se da pressa com que as teorias foram levantadas”.

[87] *Ivi*, p. 20: “evidentissima em muitos países em que são realizados cursos inteiros inspirados por esta tendência que, de frequente, é quasi exclusiva nos jovens. Ela data de muito poucos anos, mas propagou-se com grandissima rapidez”.

Dopo aver messo in luce l'importanza filosofica di alcuni concetti introdotti dalla topologia, il quarto esempio fornito da Bassi è, invece, di natura tecnica: è la nozione di rappresentazione continua (o immagine continua) dei punti di un insieme A in un insieme B tramite una trasformazione continua f. Si tratta dell'operazione più generale che conserva il limite. Una rappresentazione $f(A)$ di uno spazio A su uno spazio B è detta "essenziale" se per ogni punto $b \in B$ esiste almeno un punto $a \in A$ tale che $f(a) = b$ e ciò vale per ogni deformazione continua di f. Sorge quindi il problema di capire quando uno spazio A può essere rappresentato su B in modo essenziale. Nel caso in cui A e B siano delle varietà orientabili senza bordo e della stessa dimensione n, indicando con R_p il numero di Betti relativo alla dimensione p, dovrà valere la relazione:

$$R_p(A) \geq R_p(B), \qquad 1 \leq p \leq n-1.$$

In generale per rappresentare A su B è necessario che lo spazio B sia "più semplice" rispetto a A ma, come osserva acutamente Bassi, bisogna ancora specificare cosa si intende esattamente con questa espressione. In questo ordine di idee si collocano anche la celebre congettura di Poincaré, secondo cui ogni varietà chiusa n-dimensionale omotopicamente equivalente alla n-palla è omeomorfa alla n-palla, e la questione di determinare l'immagine continua più generale di un segmento dato. Quest'ultimo problema, parzialmente affrontato già da Peano, è stato risolto in tutta la sua generalità nell'ambiente degli spazi astratti. H. Hahn e S. Mazurkiewicz sono così arrivati a caratterizzare le immagini continue dei segmenti come spazi astratti connessi, compatti e localmente connessi. Anche lo status del concetto di dimensione, un invariante fondamentale nella geometria classica, è cambiato: Hurewicz è però riuscito a individuare un criterio 'semplice' che regola le variazioni dimensionali delle immagini topologiche di uno spazio.[88] Bassi osserva che mediante opportune particolarizzazioni della teoria è possibile 'recuperare' le nozioni classiche, come quelle di dimensione e di curva continua, e conclude: "Così, attraverso concetti adeguati, è stato possibile estendere in poco tempo i ponti tra prospettive illimitate di fatti geometrici che la mente umana non aveva nemmeno concepito".[89]

Si potrebbe però pensare che la topologia, con il suo costrutto di teorie 'complicate', non si presti ad affrontare questioni semplici o di enunciazione elementare. Bassi sostiene che non è così: basti pensare al problema dei sette ponti di Königsberg o a quello dei quattro colori.[90] A titolo di esempio, egli porta la questione della rappresentazione essenziale di una sfera S_m di dimensione m su S_n, sfera n-dimensionale. Si tratta di un problema non ancora risolto nel caso generale ma per il quale si hanno alcuni risultati particolari. Hopf ha infatti dato una risposta affermativa per $n = 2k, m = 4k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, mentre Pontrjagin ha fornito un risultato negativo per $m = n + 2 > 4$.

Terminata così la rassegna degli esempi, Bassi sottolinea come la topologia costituisca il mezzo più rapido per acquisire molti dei più importanti concetti e delle teorie più significative

---

[88] Si tratta del risultato modernamente noto come teorema di Hurewicz che consente di descrivere il primo gruppo di omologia singolare di uno spazio topologico connesso per archi a partire dal suo gruppo fondamentale.

[89] *Ivi*, p. 25: "Assim, por meio de conceitos adequados, conseguiuse estender pontes entre perspectivas ilimitadas de fatos geométricos que ha bem pouco tempo a mente humana nem chegara a conceber".

[90] Cfr. FANO 1923a, *cit.*, p. 23. Si noti che questi due esempi corrispondono ai punti (3) e (4) delle questioni topologiche proposte da Fano ad Aberystwyth nella conferenza generale *All Geometry is Theory of Relativity*.

della matematica moderna. Al di là dell'aspetto tecnico, bisogna tener presente altri due livelli. Il primo è quello della mentalità del ricercatore: la topologia infatti, "esercitando un fascino molto particolare sulle menti dei suoi praticanti",[91] modifica radicalmente la visione del matematico. Anche quando si dedica a ricerche di un altro ambito, egli non rinuncia alla *forma mentis* acquisita grazie allo studio della topologia. Il secondo elemento da tenere in considerazione è rappresentato dall'impatto della topologia sui non specialisti del settore. È questo, secondo Bassi,

> un fatto molto raro per una teoria matematica. Ricordo, a questo proposito, come a Princeton, alle conferenze di topologia di carattere non eccessivamente specialistico, partecipava sempre un pubblico notevolmente più numeroso e interessato del solito, composto non solo da matematici. Non è cosa da poco, anche se non produce effetti immediati per la scienza, perché è proprio ispirando simpatia e fiducia nella cerchia più ampia possibile di persone intelligenti che una branca della scienza (soprattutto quando, come la matematica, non si concretizza sempre in applicazioni immediate) provoca quella comprensione e, ove necessario, quegli aiuti materiali e morali che ne impediscono il decadimento e che stimolano uomini di valore a dedicarsi al suo sviluppo.[92]

L'ultima parte della conferenza è segnata da un approccio storico. Sostenendo l'importanza di considerare le teorie scientifiche all'interno del loro sviluppo storico, in quello che veniva definito il "secolo della topologia" Bassi afferma che gli studi topologici sono quelli che portano i maggiori benefici a tutta la ricerca matematica. Coltivare la topologia non è quindi una moda, ma il modo migliore per far progredire l'intera matematica. In particolare, lo sviluppo della geometria è indissolubilmente legato a quello della topologia. Due dati corroborano questa affermazione: scuole di topologia sono ormai presenti in quasi tutte le nazioni e circa il 40% degli articoli di geometria non elementare riguardano questa disciplina, così come la maggior parte dei lavori firmati dai geometri più giovani.

In più punti della conferenza, Bassi lascia trasparire, in maniera più o meno velata, alcune critiche sostanziali alla Scuola italiana di geometria algebrica. Presentando i legami tra la topologia e le altre branche della matematica, Bassi sottolinea che le proprietà prese in considerazione dalla geometria algebrica altro non sono che proprietà topologiche. A tal proposito cita una frase che lui ha personalmente sentito pronunciare da Severi, ossia: "l'80% delle proprietà della geometria algebrica sono di natura topologica".[93] Il riferimento alla figura di Severi è funzionale a conferire maggior peso al pensiero di Bassi, secondo il quale sono le proprietà topologiche a costituire il nucleo fondamentale della geometria algebrica.

---

[91] BASSI 1941a, *cit.*, p. 27: "exerce, sôbre o ânimo dos seus cultores uma fascinação toda particular".

[92] *Ibidem*: "fato êste bastante raro para uma teoria matemática. Lembro, a êste respeito, como em Princeton, das con ferências de topologia de caráter não muito particular, participava sempre um auditório notavelmente mais vas to e interessado do que o normal, constituido não sómen te de matemáticos. Isto não é cousa de somenos impor tância, ainda que não produz para a ciência efeitos ime diatos, porque é, precisamente, inspirando simpatia e con fiança em circulo mais vasto possível de pessoas inteli gentes que um ramo da ciência (sôbretudo quando, como a matemática, nem sempre dá para logo, aplicações práticas) provoca aquela comprensão e, onde fôr preciso, aqueles auxilios materiais e morais que impedem a sua decadência e que estimulam homens de valor a dedica rem-se ao seu desenvolvimento".

[93] Bassi non specifica in quale occasione Severi avesse pronunciato tale frase. Probabilmente Bassi fa riferimento al periodo trascorso a Roma come assistente di Severi oppure potrebbe alludere alla comunicazione presentata da Severi all'ICM del 1932 a Zurigo, cui Bassi partecipa. Cfr. SEVERI 1932, *cit.*, p. 211.

Un'implicita accusa alla tradizione italiana è invece contenuta nel racconto di Bassi del suo arrivo negli Stati Uniti, all'interno del quale si fa riferimento al problema dell'incomunicabilità tra le due indirizzi di ricerca:

> Ho […] avuto l'opportunità di sperimentare la velocità di questo progresso, quando, nel 1935, andai negli Stati Uniti per vedere gli ultimi sviluppi della topologia. In effetti, ho scoperto, con sorpresa, che i topologi americani parlavano un linguaggio matematico che mi era difficile da comprendere. Erano, quindi, argomenti ordinari di conversazione, ad esempio: la topologia algebrica, gli spazi bi-compatti, i gruppi di coomologia, ecc. Quest'ultimo concetto era stato portato alla scienza proprio nel 1935, contemporaneamente da Alexander, a Princeton, da Withney, ad Harvard, e da Kolmogoroff, a Mosca.[94]

O ancora, riconoscendo il ruolo di massimo rilievo nel campo della topologia alle Scuole americana, russa e polacca, Bassi evidenzia il fatto che in Italia ci sono soltanto cultori isolati di questa disciplina. Infine, guardando ai lavori esplicitamente citati durante la conferenza, si nota la totale assenza di riferimenti ai contributi dei geometri italiani. Accanto al famoso scritto di Riemann *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1868), Bassi menziona Poincaré, pioniere della topologia con l'*Analysis situs* del 1895, e il lavoro *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (1937) di Weil, uno dei fondatori della moderna topologia e della teoria degli spazi astratti.

Se, da un lato, Bassi non risparmia le critiche alla tradizione geometrica italiana, dall'altro si fa portatore in Brasile di alcuni elementi tipici di essa. Primo tra tutti, il ruolo dell'analogia, "guida perenne dello scienziato".[95] Tuttavia, Bassi mette in guardia dal suo utilizzo eccessivo che aveva forse riscontrato nei geometri italiani durante gli anni della sua formazione: nella fase di formazione di una nuova teoria bisogna talvolta mettere da parte le analogie con quelle precedenti, per avventurarsi su strade del tutto inesplorate. In secondo luogo, Bassi insiste più volte sull'azione di sintesi svolta dalla topologia all'interno della matematica, favorendo quell'economia di pensiero cui spesso si appellano i membri della Scuola italiana.[96] Per questi ultimi si tratta di legittimare il ruolo principe della geometria algebrica, sorta dalla fusione tra la geometria proiettiva e le tecniche algebriche; per Bassi, invece, quella visione ancor più unitaria fornita dalla topologia. Infine, tra i diversi parallelismi che compaiono nel discorso di Bassi, spicca il riferimento alla fisica atomica:

---

[94] BASSI 1941a, *cit.*, p. 11: "Eu mesmo tive oportunidade de experimentar a ra pidez dêste progresso, quando, em 1935, fui aos Estados Unidos para conhecer os últimos passos da topologia. Efetivamente, verifiquei, com surpreza, que os topológos da América falavam uma linguagem matemática que me era dificil compreender. Eram, então, assuntos ordinários na conversação, por exemplo: a álgebra topológica, os espaços bi-compatos, os grupos de co-homologia, etc. Este último conceito tinha sido trazido para a ciência precisamente em 1935, simultaneamente por Alexander, em Princeton, por Withney, em Harward, e por Kolmogoroff, em Moscou".

[95] *Ivi*, p. 28: "guia perene do cientista".

[96] Cfr., *inter alia*, G. CASTELNUOVO 1907, *Il valore didattico della Matematica e della Fisica*, «Scientia» 1, p. 336: "Sarà utile esporre una teoria e valersene, solo quando l'uso di questa […] porti economia di pensiero"; FANO 1908a, *cit.*, p. 277: "Ma fra tante rappresentazioni, tutte approssimate […], la più semplice è certamente quella fornita dalla geometria euclidea. E pertanto ragioni di economia mentale (ma non altre!) ci inducono a darle preferenza"; FANO 1924d, *cit.*, p. 19: la geometria euclidea "è, per le applicazioni pratiche, preferibile; appunto perché, essendo più semplice, risponde a una maggiore economia di pensiero. Il pensare è anche esso un'attività, un lavoro; e anche per esso, come per ogni forma di attività, sono essenziali le leggi dell'economia".

> Sono convinto che solo un'altra teoria contemporanea, in campo fisico-matematico, possa vantare la sua formazione di una passione analoga: la fisica atomica. Entrambe queste teorie hanno avuto, a seguito di scoperte innovative, uno sviluppo simultaneo molto rapido e hanno trasformato rispettivamente i due campi della matematica e della fisica teorica.[97]

In queste parole di Bassi è manifesto sia il retaggio del triennio trascorso a Roma, durante il quale aveva sicuramente avuto dei contatti con il gruppo dei fisici di via Panisperna, sia una visione condivisa con Fano, di cui era stato assistente a Torino, uno dei primi matematici a evidenziare il carattere dirompente della fisica moderna anche da un punto di vista teorico.[98]

6.6. La diffusione della matematica moderna: il discorso a Minas Gerais

Nel marzo 1945 Bassi è invitato a tenere il discorso inaugurale all'Università di Minas Gerais. Rivolgendosi a un pubblico composto non soltanto da matematici e toccato dalle difficoltà incontrate nella creazione di una Scuola di matematica in Brasile, sceglie di aprire il proprio discorso mettendo in luce un pregiudizio,

> quello che fa credere che la matematica sia una scienza che è già stata costruita o è quasi costruita; e che, in ultima analisi, ha superato la sua fase creativa più importante ed è ora destinata a un lento sviluppo. Non ci sarebbe, quindi, bisogno di insistere troppo sulla ricerca da svolgere al suo interno.[99]

Questo preconcetto motiva, almeno in parte, gli ostacoli – di carattere economico ma non solo – incontrati da Bassi all'atto di promuovere e incentivare le ricerche matematiche in Brasile. Secondo lui, tale pregiudizio scaturisce dal fatto che le più note applicazioni alla vita quotidiana sono legate a parti della matematica sviluppatesi nell'antichità. Ancora, guardando le nozioni matematiche necessarie a uno studente di scuola secondaria, ci si arresta a quelle sviluppate nel Seicento. Tuttavia, per contrastare questo pregiudizio basta pensare al fatto che le teorie sviluppate nell'ultimo mezzo secolo costituiscono da sole quasi la metà dell'intero *corpus* del sapere matematico. Questo fenomeno è giustificato dall'enorme aumento del numero degli studiosi di matematica, in tutte le parti del mondo. A sua volta, ciò è dovuto a due fattori: il moltiplicarsi dei matematici in quei paesi che vantano una tradizione matematica molto antica e il progressivo espandersi dell'area geografica dei paesi che attribuiscono un posto di rilievo alla scienza. Nell'illustrare questo ampliamento dei confini, Bassi abbraccia una visione storica decisamente *naif* e, in larga parte, errata. Afferma infatti che si è passati dall'Italia (XII-XVI sec.) all'Europa (XVI-XVII sec.) – Francia in primis, seguita da Inghilterra, Germania e paesi scandinavi – per raggiungere a fine Ottocento gli Stati Uniti e "attualmente,

---

[97] BASSI 1941a, *cit.*, pp. 27-28: "Estou que sómente outra teoria contemporânea possa, no campo físico-matemático, orgulhar-se de ter a seu crédito a formação de uma análoga paixão: a fisica atômica. Ambas estas teorias tiveram, em consequência de descobertas inovadoras, um desenvolvimento simultâneo rapidissimo e transformaram respectivamente os dois campos da matemática e da fisica teórica".

[98] Cfr., ad esempio, FANO 1923a, *cit.*, pp. 43-44; FANO 2000, *cit.*, p. 182.

[99] BASSI 1948, *cit.*, p. 447: "que faz crer seja a Matemática ciência já acabada de construir ou quase construída; que, em última análise, já ultrapassou sua fase criadora mais importante e agora está destinada a um desenvolvimento vagoroso. Não haveria, pois, necessidade de insistir muito sobre pesquisas a serem feitas nela".

e per la prima volta, questo spirito di ricerca comincia a penetrare in America Latina, dove si riscontrano segnali molto vivi di stimolato interesse”.[100]

L’età contemporanea rappresenta per Bassi uno dei periodi di massimo sviluppo della matematica, accanto all’antica Grecia e alla rivoluzione scientifica del Seicento. La matematica attuale porta infatti con sé un numero di idee nuove superiore rispetto a qualsiasi altra scienza ugualmente antica. L’introduzione di nuovo lessico e di una terminologia specialistica è sintomatica di questo allargamento dell’orizzonte dei concetti matematici. Prima di esaminare i cambiamenti che hanno portato a una trasformazione così radicale del panorama matematico degli ultimi decenni, Bassi presenta un lungo *excursus* storico su due epoche precedenti, da lui chiamate “greco-italiana” e “cartesiano-newtoniana”. Anch’esso, tuttavia, è segnato da una serie di inesattezze che derivano in parte dalla fallacia della ricostruzione storica e in parte da un approccio discontinuo alla storia. Secondo Bassi, all’interno del primo periodo che si apre con la nascita della matematica come sistema logico-deduttivo, cristallizzato all’interno degli *Elementi* di Euclide, un ruolo fondamentale è rivestito dal *Liber Abaci* (1202) e dalla risoluzione tramite una formula generale delle equazioni di terzo e quarto grado (1510 circa). Con quel pizzico di orgoglio nazionale che si ritrova anche nelle conferenze di Fano a Losanna, Bassi commenta così questa scoperta: “quei limiti del mondo antico che, in campo geografico, erano stati appena varcati da Cristoforo Colombo, erano ora infranti anche in campo spirituale, e dall’opera della scuola italiana.”[101] L’epoca di Newton e Cartesio è caratterizzata, secondo Bassi, dall’introduzione di quattro nuovi concetti fondamentali – quelli di funzione, coordinate, integrale e differenziale – e dall’applicazione della neonata analisi infinitesimale a diversi settori. A partire dal 1820 la matematica si affranca dalla fisica acquistando “nuova libertà di spirito”[102] e, grazie all’azione di giovani studiosi come N.H. Abel e Jacobi, la disciplina inizia a volgersi verso studi astratti e di grande generalità.

> Nuove idee sono state introdotte, dapprima molto timidamente, e poi, nello stesso secolo scorso, in forma più intraprendente e sicura, sono venute a formare, fondendosi, estendendosi e assorbendosi a vicenda, una corrente immensa, che ha sommerso le vecchie idee e creato un mondo scientifico nuovo e più coeso, in cui le vecchie teorie si ritrovano come frammenti scarsi e separati. Idee e teorie che sono lontane dall’aver trovato la loro forma definitiva e sono in rapida trasformazione.[103]

Per illustrare come mai l’attenzione dei matematici negli ultimi decenni si sia diretta verso nuovi concetti, Bassi propone la metafora del giardiniere.

> Un giardiniere che, dopo una lunga assenza, torna nel suo giardino sarà certamente contento di vedere piante più alte, ma sarà attratto soprattutto da piante completamente nuove che, forse, sono

---

[100] *Ivi*, p. 448: “Atualmente, e pela primeira vez, este espírito de pesquisa começa a penetrar na America Latina, onde se manifestam bem vivos sinais de estimulado interesse”.

[101] *Ivi*, p. 451: “aqueles do mundo antigo que, no campo geográfico, acabavam de ser ultrapassados por Cristóvão Colombom, eram agora rompidos, também, no campo espiritual, e por obra da escola italiana”.

[102] *Ivi*, p. 455.

[103] *Ivi*, p. 456: “Idéias novas introduzidas, no comêço, de maneira muito tímida, e depois, no mesmo século passado, em forma mais desembaraçada e segura, vieram a formar, fundindo-se, es tendendo-se e absorvendo-se entre si, imensa corrente, que submergiu as velhas idéias e criou um novo e mais coeso mundo científico, em que se reencontram as velhas teorias como escassos e separados fragmentos. Idéias e teorias que estão muito longe de ter encontrado a forma definitiva e se acham em rápida transformação”.

> cresciute dove prima non esistevano o quasi. Così noi, posti nella posizione spirituale di un matematico di cinquant'anni fa, dirigeremmo la nostra attenzione su nuove teorie e le indicheremo ai giovani che ci ascoltano. Naturalmente, nell'attirare l'attenzione degli ascoltatori su queste nuove creazioni, non si intende negare l'interesse e l'importanza dello sviluppo e del completamento di teorie di origine più antica.[104]

Tra queste ultime, Bassi annovera la geometria algebrica, disciplina sorta come estensione dello studio delle equazioni algebriche, che ha permeato gli anni della sua formazione in Italia. È questo un aspetto condiviso tra i membri della Scuola che, in più occasioni, sottolineano come la geometria algebrica, occupandosi – diremmo noi modernamente – dello studio del luogo degli zeri di equazioni polinomiali, scaturisca dalla mirabile fusione tra algebra e geometria analitica. Basti pensare al trattato di Enriques e Chisini del 1915, dove essa è definita come la "dottrina qualitativa delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra". Se, da una parte, Bassi si colloca nel solco della tradizione, dall'altra inquadra la nascita della geometria algebrica all'interno di un processo più generale che segna diverse aree della matematica, per il quale idee e concetti emersi in precedenza, a un certo punto – anche a distanza di secoli come è accaduto per la teoria dei numeri diofantea – acquistano nuova luce e danno origine a nuovi filoni di indagine. Soffermandosi sull'epoca aurea della Scuola italiana, spesso richiamata dai geometri italiani durante la loro attività di divulgazione, Bassi ne dà però un'interpretazione del tutto originale. Afferma infatti:

> Penso che le nuove teorie siano più adatte a nuovi popoli, perché capita sempre che nelle nuove teorie riescano a trovare meglio la propria originalità. Questo è il motivo per cui l'Italia ha coltivato con tanto successo la geometria algebrica dagli anni Settanta dell'Ottocento e la teoria degli insiemi in Polonia dagli anni Venti del Novecento; teorie che, a quel tempo, erano entrambe nella loro giovinezza più promettente.[105]

Ciò che avrebbe portato l'Italia a raggiungere quella posizione di supremazia in campo geometrico è quindi, per Bassi, strettamente correlato all'unificazione e al bisogno, per un 'nuovo' popolo, di creare una propria identità, anche in campo culturale. Sul versante scientifico, l'identità nazionale si consolida attorno alle ricerche della Scuola di geometria.

Terminato questo *excursus* storico-culturale a tratti controverso, nella parte centrale della conferenza Bassi illustra le tre "idee-forza" della matematica moderna: la topologia, l'assiomatizzazione e la logica moderna. Prima tra tutte è, naturalmente, la topologia, per Bassi disciplina moderna per eccellenza. Questo nuovo indirizzo di ricerca è scaturito dalla critica ai fondamenti dell'analisi che

---

[104] *Ibidem*: "Um jardineiro que, depois de ausência prolongada, volte ao seu jardim, se compraz com certeza de ver mais altas as plantas deixadas já grandes, mas será atraído sobretudo pelas plantas completamente novas que tenham, porventura, cres cido onde nenhuma ou quase nenhuma antes existia. Assim nós, postos na posição espiritual de um matemático de cinqüenta anos atrás, dirigiremos nossa atenção às teorias novas e as indicaremos aos jovens que nos escutam. Evidentemente, ao atrair a atenção dos ouvintes para es tas novas criações, não pretendemos negar o interêsse e a importância que apresenta o desenvolvimento e a comple mentação das teorias de origem mais antiga".

[105] *Ivi*, p. 457: "Penso que a povos novos sejam mais adequadas teorias novas, porque sempre acontece que nas teorias novas conse guem êles encontrar melhor a própria originalidade. É esta a razão por que a Itália cultivou com tanto sucesso a geometria algébrica desde 1870 e a Polônia a teoria dos conjuntos des de 1920; teorias que, naquelas épocas, se achavam ambas na mais promissora mocidade".

> ha portato alla luce un fatto che i primi analisti nemmeno sospettavano, cioè che la base dell'analisi classica poggia sulle proprietà del *continuum*, un concetto, quest'ultimo, su cui, tempo fa, non c'era alcuna idea chiara A poco a poco, lo studio del *continuum*, che è alla base della topologia, è venuto alla ribalta, come argomento essenziale della matematica.
> In questo studio, i concetti di geometria antica e analisi classica sono intimamente fusi, in una nuova sintesi, che li trascende. La teoria delle funzioni delle variabili reali, la teoria classica degli insiemi, la teoria degli spazi astratti, frutto della critica sui fondamenti del calcolo funzionale, sono solo aspetti particolari di questa nuova teoria.[106]

In particolare, la nozione di spazio astratto – sulla quale Bassi ha già posto l'accento durante la conferenza del 1940 – ha permesso di lavorare con maggior generalità e unitarietà, grazie al nuovo concetto di connessione. La scoperta di spazi 'inusuali', come quelli contenenti insiemi patologici di punti, fa da collegamento tra la topologia e l'assiomatica moderna, secondo punto fondamentale affrontato da Bassi. Al suo interno il passaggio chiave è rappresentato dal fatto che la geometria euclidea cessa di essere l'unico sistema logico-deduttivo 'ammissibile' per diventare un semplice membro di una famiglia di sistemi più numerosa. Tali sistemi sono sorti, secondo Bassi, da un duplice impulso: critico e costruttivo. Il primo stimolo ha portato alla sistematizzazione dell'analisi e, in particolare, della teoria dei numeri reali. Il secondo, invece, ha generato la geometria proiettiva e la geometria descrittiva, due discipline fondamentali insegnate da Bassi in Italia per diversi anni. Dal punto di vista metodologico, il processo di assiomatizzazione ha portato alla luce la possibilità di lavorare su relazioni formali tra concetti che, attraverso un'opportuna particolarizzazione, si applicano in rami della matematica differenti. La legge di dualità in topologia – altro punto già toccato durante la prolusione al corso di Geometria superiore – rappresenta un esempio di questo fenomeno, consentendo di mettere a fuoco

> il vero carattere intimo delle teorie matematiche. In particolare, si può dimostrare che, in molti casi, questioni e teorie molto diverse, pertinenti anche ai rami più diversi della matematica, sono sostanzialmente identiche, perché hanno la stessa struttura logica. Se il tempo e la natura del pubblico me lo permettessero, discenderei a esempi particolari, che, sebbene molto elementari, susciterebbero, credo, sorpresa da parte dei matematici.[107]

Tra le conseguenze notevoli di tale approccio, Bassi sottolinea la possibilità di costruire dei sistemi matematici indipendenti dal mondo fisico e, con essi, nuove teorie. Tra queste, la teoria dei sistemi, quella dei gruppi, degli anelli e delle algebre e la teoria delle strutture. Un ulteriore vantaggio è rappresentato dal fatto di aver fermato quella che Bassi definisce una "tendenza

[106] *Ivi*, p. 459: "Porque aquêle trabalho crítico pôs em relêvo um fato de que os primeiros analistas não suspeitavam sequer, isto é, que a base da Análise clássica repousa sôbre as propriedades do contínuo, conceito, êste último, sôbre o qual, tempos atrás, nem se tinham idéias claras. Pouco a pouco, chegou, pois, ao primeiro plano, como argumento essencial da Matemática, o estu do do contínuo, que é base da topologia. Neste estudo, os conceitos da velha geometria e da análise clássica são intimamente fundidos, numa sintese nova, que os transcende. A teoria das funções de variável real, a teoria clássica dos conjuntos, a teoria dos espaços abstratos, fruto da crítica sobre os fundamentos do cálculo funcional, são tão sò mente aspectos particulares nesta nova teoria".

[107] *Ivi*, p. 462: "o verdadeiro caráter íntimo das teorias matemáticas. Em particular, pode-se mostrar que, em muitos casos, questões diversíssimas e teorias pertinentes até aos mais diferentes ramos da Matemática são substancial mente idênticas, porque têm a mesma estrutura lógica. Se o tempo e a natureza do auditório me permitissem, desceria a exemplos particulares, os quais, se bem que sejam muito elementares, suscitariam, acredito, surprêsa da parte dos matemáticos".

dispersiva”, ossia la difficoltà nel far comunicare tra loro ricercatori di diverse branche della matematica, “come due fratelli della stessa famiglia, ma che parlano lingue diverse”.[108] Questa tendenza, che sfocia in un’incomunicabilità tra indirizzi di ricerca diversi, è uno dei fattori che aveva contribuito all’isolamento e al declino della Scuola italiana, da cui Bassi ha ormai preso le distanze. Egli è forse uno dei pochi a rendersi conto che, all’epoca, i geometri italiani stavano lavorando sugli stessi oggetti matematici di russi, giapponesi e americani, ma con un linguaggio completamente diverso e ancorato al passato, al punto da risultare incomprensibile al di fuori di quella specifica tradizione. L’invito a non perdere il contatto con gli indirizzi di ricerca più recenti che Bassi fa agli studenti brasiliani, tenendosi aggiornati in termini di metodi e di linguaggio, assume un significato maggiore alla luce della situazione italiana, di cui egli è consapevole fin dal 1935.

Il terzo e ultimo elemento cardine della matematica moderna è rappresentato dalla logica, disciplina con molti punti di contatto con la filosofia e frutto di un’evoluzione millenaria, da Aristotele a K. Gödel. Dopo aver illustrato le implicazioni nell’approccio alla ricerca matematica che scaturiscono dal celebre teorema di Gödel, Bassi conclude con un accorato appello:

> Come vedete, questo è un momento favorevole affinché nuove energie, nuovi popoli inizino a cooperare alla costruzione di questo organismo in perenne metamorfosi, che è la Matematica. Grazie all’introduzione di nuove idee, in gran numero, tutto ribolle e cambia. Una volta, i matematici stavano cercando problemi. Ora, un sacco di nuovi problemi cercano... matematici, soprattutto giovani, che li trattino e li capiscano meglio. Permettetemi dunque di dirvi: andate, con fiducia e in gran numero, ad incontrare la Matematica. Lei non ti ingannerà. Andategli incontro sorridendo, perché la vita del ricercatore è bella, gioiosa e piena di salute morale.[109]

L’ultima parte del discorso rappresenta per Bassi un’occasione per rivolgersi direttamente alle istituzioni brasiliane, che fino a questo momento non gli hanno fornito i mezzi adeguati per fondare un istituto attrezzato per svolgere vera attività di ricerca matematica. Un primo problema è costituito dalla penuria di biblioteche specializzate, luoghi che per Bassi come per tutti i geometri italiani rappresentano non solo spazi di trasmissione e conservazione del sapere, ma anche centri di produzione di nuova conoscenza matematica. Paragonando il loro ruolo a quello dei custodi di un tesoro, Bassi denuncia con vigore la mancanza di biblioteche matematiche:

> Mancano ancora, proprio per i giovani del Paese, le biblioteche, nel campo della Matematica, dove si raccolgono questi documenti, e per quanto riguarda l’eco di quanto si fa nel mondo per il

[108] *Ivi*, p. 464: “como irmãos de uma mesma família, mas que falassem linguas diferentes”.

[109] *Ivi*, p. 467: “Como vêem, é êste um momento favorável para que no vas energias, novos povos passem a cooperar na construção dêste organismo em perpétua metamorfose, que é a Matemá tica. Graças à introdução de novas idéias, em grande núme ro, tudo ferve e se transforma. Outrora, os matemáticos es tavam à procura de problemas. Agora, problemas novos em grande quantidade, estão procurando... os matemáticos, es pecialmente jovens, que melhor os tratem e os compreen dam. Permiti, pois, que vos diga: ide, com confiança e em grande número, ao encontro da Matemática. Ela não vos enganará. Ide ao seu encontro sorrindo, porque a vida do pesquisador é bela, alegre e cheia de saúde moral”.

> progresso scientifico della Matematica. Di queste biblioteche, già abbondanti in Europa, la guerra ne avrà distrutto una parte. È necessario che ora appaiano qui.[110]

Vi sono poi due motivazioni fondamentali per lo sviluppo della ricerca scientifica che dovrebbero essere ben chiare agli occhi di chi governa un Paese. La prima è di carattere economico: non è infatti possibile sviluppare delle ricerche di carattere applicato senza aver prima investito sulla scienza pura e, senza la scienza applicata, è molto difficoltoso progredire. La ricerca pura ha quindi importanti ricadute economiche e l'investimento che Bassi chiede allo Stato per finanziare i centri di ricerca matematica porterà a benefici economici decisamente maggiori. Inoltre, la ricerca in matematica richiede investimenti minori rispetto a qualsiasi altra disciplina scientifica. I vantaggi economici non sono però i soli da tenere in considerazione per valutare i benefici apportati a una nazione dalla ricerca scientifica. Vi è infatti un secondo aspetto, di tipo sociale: il benessere di un Paese non si misura solo in termini materiali ma anche di sviluppo intellettuale. Il progresso della scienza, secondo Bassi, favorisce il diffondersi dell'amore per la conoscenza, del senso di civiltà e dei sentimenti patriottici tra gli abitanti di uno Stato. L'idea di cui Bassi si fa promotore e che, in estrema sintesi, è rappresentata dal legame tra scienza e amor di patria, è ben radicata all'interno della Scuola italiana.

Un'ultima obiezione alla quale Bassi vuole dar risposta davanti ai giovani brasiliani scaturisce dai dolorosi eventi bellici di quegli anni. Di fronte alle catastrofi della Seconda guerra mondiale, l'umanità potrebbe aver perso la fiducia nella scienza perché, così come ha una certa potenza creativa, allo stesso modo essa può arrecare danni irreparabili. Nelle parole di Bassi si avverte una sorta di presagio di quello che sarebbe accaduto a distanza di meno di cinque mesi dal suo discorso a Minas Gerias, con i disastrosi effetti degli ordigni nucleari che radono al suolo le città giapponesi di Hiroshima e Nagasaki. Tuttavia, afferma Bassi, bisogna tener presente che il progresso scientifico è molto più rapido di quello 'morale'; non si possono quindi attribuire alla scienza 'colpe' legate invece agli istinti dell'uomo. Viceversa, concedendole il giusto tempo, la ricerca scientifica può migliorare, anche dal punto di vista morale, coloro che vi si dedicano. Promuove infatti la collaborazione e la fratellanza tra gli scienziati e fa intravedere la continuità storica del pensiero umano, permettendo di elevarsi al di sopra degli eventi contingenti. La pratica scientifica, indagando l'essenza del mondo che ci circonda, contribuisce inoltre a combattere i pregiudizi e a promuovere il senso di giustizia. Lo scienziato è anzi caratterizzato da una profonda umanità – e, in questo, Bassi rivede la propria vicenda personale – e da un entusiasmo che lo fa sentire "un eterno ragazzo" (*ivi*, p. 473). Il modello dell'uomo-scienziato è l'ideale che deve ispirare gli studenti cui Bassi si rivolge concludendo così il suo discorso:

> Se posso darvi un consiglio, a voi giovani, da cui dipende il futuro, lasciate che vi dica: amate questo tipo di uomo e fatelo moltiplicare. Per migliorare il mondo, uno dei modi più sicuri è aumentare il numero di persone che lavorano nella scienza. Forse è l'unico modo giusto. Sono una piccola parte ora, anche nei paesi che si occupano di più di queste cose; che, senza alcun timore, ma con immenso beneficio, potrebbe essere centuplicato. Il mondo sarà allora

[110] *Ivi*, p. 468: "Faltam ainda, pela razão mesma da juventude do país, bibliotecas, no campo da Matemática, às quais êstes documentos sejam recolhidos, e até onde che que o eco do que se faz no mundo para o progresso científico na Matemática. Destas bibliotecas, já abundantes na Europa, terá a guerra destruído uma parte. É preciso que agora surjam aqui".

decisamente migliore e immensamente più felice di quello attuale, e le sue malattie psicologiche e sociali saranno eliminate. [111]

6.7. La topologia per i geometri italiani: Bassi, Fano, Severi e Terracini a confronto

Bassi, pur essendo uno dei pochi specialisti di topologia, non è l'unico geometra italiano a dedicare a questo tema corsi e conferenze tra gli anni Venti e gli anni Quaranta.

Nel 1926, Fano aveva destinato la sua conferenza alla Mathesis di Torino all'esame dei legami tra l'analysis situs e la geometria algebrica. Tra gli elementi in comune nella trattazione di Fano e di Bassi, vi è il ruolo della topologia all'interno di diversi giochi e rompicapi (il problema dei quattro colori, quello dei sette ponti di Königsberg, …), che permettono di avvicinare un pubblico di non specialisti a questa branca della matematica.[112] A differenza di Fano, però, nel 1940 Bassi fa anche riferimento all'esperienza sensoriale attraverso cui ciascuno entra in contatto, in prima persona, con alcuni aspetti concreti della topologia. Un certo numero di autori e lavori citati rappresenta il secondo punto di contatto tra le due conferenze. In primo luogo, sia Fano sia Bassi fanno riferimento all'importante opera di Riemann del 1857. Ancora, entrambi citano Jordan per la dimostrazione del fatto che un luogo geometrico di punti sul piano omeomorfo a un cerchio divide in due il piano. Non può mancare, infine, il riferimento ai contributi di Betti e Poincaré, con quest'ultimo ampiamente menzionato in entrambe le conferenze. Tra i suoi risultati, sia Fano sia Bassi sottolineano la proprietà per cui i numeri di Betti k-esimo e $(n-k)$-esimo di una varietà orientabile chiusa sono uguali.

Vi sono però alcune differenze notevoli tra l'approccio di Bassi e quello di Fano, *in primis* dal punto di vista delle radici culturali. Oltre agli autori già menzionati, Fano fa principalmente riferimento tradizione tedesca della seconda metà dell'Ottocento, da Listing a Klein, i cui frutti sono raccolti all'interno del saggio dell'EMW di Dehn e Heegaard. Egli inoltre richiama, a differenza di Bassi, gli scritti di Picard e Tietze e attribuisce un'importanza fondamentale al Programma di Erlangen. Bassi, invece, non cita neanche il programma kleiniano né sente la necessità di definire la topologia come branca della matematica che si occupa dello studio delle proprietà geometriche invarianti per deformazioni continue. Ancora, in entrambi i discorsi di Bassi in Brasile presi in esame manca ogni tipo di riferimento a Möbius così come alla formula di Eulero per i poliedri. Viceversa, tra coloro che si sono occupati almeno occasionalmente di topologia, egli cita Cantor, Peano, Brouwer e Fréchet e, all'interno delle applicazioni della topologia ad altri ambiti, annovera le ricerche di Morse, Lyusternik e Schnerelmann sul calcolo delle variazioni e quelle di Cartan, Schreier e van Dantzig legate ai gruppi di trasformazioni. Ma l'autore cui Bassi fa il maggior numero di riferimenti è Pontrjagin, esponente della scuola russa allievo di Aleksandrov. Bassi cita il suo intervento al Congresso Internazionale di Oslo

---

[111] *Ivi*, p. 474: "Se me é permitido dar-vos um conselho, a vós jovens, dos quais o futuro depende, deixai que vos diga: amai êste tipo de homem e fazei que possa multiplicar-se. Para melhorar o mundo, um dos meios mais seguros é aumentar o número das pessoas que trabalham na ciência. É talvez o único caminho certo. São uma infima parcela agora, também nos países que mais destas coisas cuidam; parcela que, sem receio nenhum, mas com benefício imenso, poderia ser centuplicada. O mundo será, então, bem melhor e imensamente mais feliz do que o atual, e eliminará suas doenças psíquicas e sociais".

[112] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*r* con BASSI 1941a, *cit.*, pp. 25 e 7: "A matemática divertida lhe é, portanto, devedora de um grande numero de pequenos passatempos ou jogos que se relacionam com problemas topologicos de enunciato elementar".

del 1936.[113] Ancora, all'interno della trattazione degli spazi astratti – tema, questo, non toccato da Fano nel 1926 – Bassi fa riferimento a Hopf, Weil, Hahn e Mazurkiewicz. Se, da una parte, alcune di queste differenze tra i lavori citati sono dovute al notevole progresso della topologia nei quindici anni che separano la conferenza di Fano a Torino e quella di Bassi in Brasile, dall'altra parte la mancanza di almeno un riferimento a Lefschetz (citato invece da Fano) appare singolare, ancor di più alla luce del fatto che Bassi aveva seguito i suoi corsi di topologia durante il soggiorno a Princeton. Mentre la visione che Fano ha dell'analysis situs è molto vicina a quella dell'EMW, il punto di vista di Bassi risente delle sue esperienze all'estero, sia negli USA sia in Germania. Introducendo i gruppi di omologia, egli fa infatti riferimento alle ricerche dei topologi americani Alexander e H. Withney, mentre nell'ambito della topologia differenziale cita le pubblicazioni della collana *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* edita dal Seminario matematico di Amburgo, di cui era stato ospite nel 1939.

Al di là delle fonti, un'altra differenza fondamentale tra le conferenze di Fano e Bassi è la suddivisione dell'analysis situs in due correnti. Mentre Fano distingue tra la topologia delle varietà continue e la topologia combinatoria, Bassi fa rientrare in un'unica categoria – quella della topologia moderna – questi due ambiti. Individua invece come secondo indirizzo la topologia degli insiemi, che affonda le radici nei fondamenti dell'analisi. Quest'ultimo aspetto è del tutto trascurato da Fano durante la conferenza alla Mathesis. Vi fa invece cenno all'interno della seconda parte del contributo apparso su «Scientia» in questi termini:

> Così pure la teoria generale degli «insiemi», che aveva avuto origine da ricerche classiche di G. Cantor, ha forniti i mezzi per stabilire con precisione, in modo geometrico, i concetti di continuo, di corrispondenza biunivoca e continua o «topologica», di deformazione continua, ecc., e di costruire su questa base l'Analysis Situs in modo completamente rigoroso; anche con maggior generalità, potendosi considerare altresì proprietà topologiche di insiemi che non sono continui. E si sono pure stabilite relazioni precise tra le espressioni analitiche e geometriche dei singoli concetti.[114]

Per Fano quindi la teoria degli insiemi, lungi da essere una branca della topologia, è uno strumento utile a conferire solide fondamenta logiche alla topologia e, di conseguenza, ad alcuni concetti fondamentali della geometria. Mentre Bassi coglie appieno il legame tra le ricerche legate alla rigorizzazione dell'analisi e la topologia, affermando anzi che quest'ultima scaturisce da alcune questioni di analisi, Fano è un convinto sostenitore della superiorità della geometria: secondo lui, infatti, "l'Analysis Situs offre un esempio interessante di altro campo, nel quale, nonostante talune questioni tuttora insolute, la geometria ha preso sull'analisi una brillante rivincita".[115]

Ma vi è una differenza ancor più sostanziale tra Fano e Bassi. Il primo è interessato quasi esclusivamente alle applicazioni della topologia alla geometria algebrica, con la prima che rappresenta una sorta di strumento per la seconda. Bassi invece, dopo aver messo in luce le applicazioni dell'analysis situs a una molteplicità di ambiti, ribalta completamente la prospettiva sostenendo che, in realtà, sono le proprietà topologiche a costituire il nucleo

[113] L. PONTRJAGIN 1937, *Sur les transformations des sphères en sphères,* in *Comptes Rendus du Congrès International des Mathematiciens. Oslo 1936*, vol. 2, Olso, Brøggers, p. 140.

[114] FANO 1924c, *cit.*, p. 290.

[115] *Ivi*, p. 300.

fondamentale della geometria algebrica.[116] A differenza di Fano, Bassi sottolinea due contributi fondamentali apportati dalla topologia, che vanno al di là delle sue applicazioni: il generale ampliamento dei confini del sapere matematico e la possibilità di una migliore comprensione di diversi aspetti della matematica. Secondo lui, grazie all'analysis situs, "l'acquisizione di molte altre teorie moderne avrà poi l'effetto di una facile discesa piuttosto che di una dolorosa ascesa".[117] La concezione della topologia di Fano e di Bassi, così come l'obiettivo delle loro conferenze, è profondamente diversa. Pur nella diversità dell'approccio di Bassi alla topologia, all'interno delle sue conferenze in Brasile compaiono alcuni elementi caratteristici della visione epistemologica e metodologica della Scuola italiana quali l'unitarietà della scienza, i tratti di semplicità ed economia di pensiero, il ruolo dell'analogia e la presenza di cenni storici. Su quest'ultimo aspetto, tuttavia, il punto di vista di Bassi è spesso *naif* mentre, in generale, le ricostruzioni storiche di Fano sono decisamente più accurate.

Tra coloro citati da Bassi (ma non da Fano) vi è Severi, di cui egli è stato assistente per tre anni a Roma, a partire dal 1930. Qualche anno prima, Severi aveva dato alle stampe – in veste litografica – le sue *Conferenze di geometria algebrica*, curate da B. Segre. Per alcuni aspetti, la concezione della topologia di Bassi è affine alla visione di Severi, secondo il quale la topologia è una

> branca importantissima, che progredendo intreccerà senza dubbio rapporti sempre più vasti con tutti i rami dell'analisi e della geometria. La fecondità e l'alta capacità di sintesi della topologia, sono già dimostrati alla luce ch'essa ha gettato finora nei campi più disparati della matematica pura e applicata.[118]

Tuttavia, pur invitando i giovani ad occuparsi di topologia, Severi è convinto che essa "ripete le sue origini da questioni di geometria algebrica, e che nel nostro Paese deve perciò trovare clima particolarmente adatto".[119] Questo concetto è ribadito da Severi durante la conferenza *Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques* presentata all'ICM di Zurigo nel 1932, cui partecipa anche Bassi.[120] A differenza di quest'ultimo – e avvicinandosi, invece, maggiormente alla posizione di Fano – l'interesse di Severi per la topologia scaturisce dunque dai suoi legami con la geometria algebrica, settore di cui egli è uno dei principali interpreti in questi anni. Un'ulteriore differenza tra Bassi e Severi si registra a livello di riferimenti culturali: accanto ai propri lavori, Severi fa riferimento quasi esclusivamente ai contributi di Veblen di topologia combinatoria,[121] non menzionati invece da Bassi. Infine, durante le sue conferenze sulla topologia tenute a Roma (a.a. 1927-28 e 1928-29) e a Buenos Aires (luglio 1930), Severi dedica ampio spazio alla teoria della base, che – per lui – rappresenta l'apice della trattazione.[122]

---

[116] Cfr. BSMT, *FFa*, *Appunti vari*, c. 139*v* con BASSI 1941a, *cit.*, p. 12.

[117] BASSI 1941a, *cit.*, p. 12: "a aquisição de muitas outras teorias modernas farà, então, o efeito de uma facil descida e não o de uma penosa ascensão".

[118] F. SEVERI / B. SEGRE (ed.) 1930, *Conferenze di Geometria Algebrica*, Roma, Genio Civile, p. I.

[119] *Ibidem*, p. II.

[120] SEVERI 1932, *cit.*, p. 211.

[121] SEVERI / SEGRE (ed.) 1930, *cit.*, p. I: "[…] tuttavia in varie parti della topologia combinatoria mi son conservato vicino all'eccellente trattazione del Veblen"; p. 224.

[122] Cfr. *ivi*, pp. 359 e seg. con SEVERI 1931, *cit.*, pp. 147 e seg.

Bassi non è l'unico geometra italiano ad accostare il nome di Severi allo studio della topologia tra gli anni Trenta e Quaranta. Nell'a.a. 1935-36 anche Terracini lo cita nell'introduzione al suo corso di Geometria superiore che quell'anno ha deciso di dedicare ad argomenti vari di topologia. In questo contesto, Terracini menziona le applicazioni della topologia alla fisica matematica, come farà Bassi qualche anno più tardi in Brasile ricordando l'interesse di Poincaré per alcune questioni di meccanica celeste.[123] A differenza di Bassi, però, Terracini sottolinea il ruolo di G.D. Birkhoff:

> In tante altre parti della matematica la topologia ha un'importanza fondamentale. Ricordo qui come esempio tipico il problema delle soluzioni periodiche nel celebre problema dei tre corpi dove Poincaré ha fatto dipendere la questione da un teorema di topologia, da lui solo intravisto e che è stato poi dimostrato da Birkhoff.[124]

Ciò che più interessa a Terracini è il legame tra la topologia e la teoria dei gruppi. A questo particolare rapporto, soltanto citato da Bassi durante la conferenza del 1940, dedica anche la seconda parte del corso di Geometria superiore che terrà Tucumán nell'a.a. 1950-51.[125]

Bassi, pur condividendo alcune idee sulla topologia con gli altri geometri italiani, si discosta dalla visione comune della Scuola, ben sintetizzata da R. Calapso durante il Congresso della SIPS del 1939 con queste parole:

> Gli studi di topologia sono in via d'incremento, specialmente per opera del Severi, il quale […] molto opportunamente nella sua Scuola ha insistito sulla necessità di far spiccare in molte questioni di geometria algebrica il loro contenuto topologico. […] Vari autori classici, nei loro studi geometrici, investirono qualche volta questioni di topologia ma, soltanto ora, con l'opera del Severi, si studia la geometria sotto una *coscienza topologica* che prima non esisteva.[126]

In sintesi: per la Scuola italiana la topologia classica assume importanza alla luce della sua capacità di illuminare i problemi posti dalla geometria algebrica ed è quindi, in sostanza, uno strumento al servizio di quest'ultima; per Bassi, invece, la topologia ha importanza intrinseca all'interno della matematica e la geometria algebrica è solo uno dei molteplici settori in cui emergono le sue potenzialità. Singolare, infine, è il fatto che Calapso non citi i lavori di Bassi tra i principali scritti italiani di topologia. Oltre ai contributi di E. Martinelli sulla geometria differenziale degli insiemi e a quelli di Brusotti e Buzano, fa invece riferimento ad autori sensibilmente meno noti come C. Gigli e M. Farina.

6.8. L'epilogo della carriera di un geometra italiano non convenzionale

Concluso il secondo conflitto mondiale, Bassi decide di non rientrare in Italia e nel 1947 si sposta a Minas Gerais, cercando di fare "ciò che sembrava impossibile ottenere a Rio, cioè

---

[123] Cfr. BASSI 1941a, *cit.*, pp. 8-9: "Poincaré partiu principalmente de questões de dinâmica celeste".

[124] BSMT, *FTe*, Quad. 14, p. 2.

[125] Cfr. BASSI 1941a, *cit.*, pp. 12-13 con BSMT, *FTe*, Quad. 33. Dopo aver fornito alcune generalità sui gruppi astratti, Terracini si concentra sui gruppi poliedrici, tetraedrici, icosaedrici, fattoriali e abeliani.

[126] R. CALAPSO 1940, *La produzione geometrica in Italia nell'anno XVII*, *in Atti della XXVIII Riunione SIPS. Pisa, 11-15 ottobre 1939*, Roma, SIPS, p. 18.

fondare una scuola di matematica",[127] assicurandosi la possibilità di avviare i giovani alla ricerca e di fondare una biblioteca. Tuttavia, in seguito a un cambio nella direzione amministrativa, sono infrante le clausole del contratto a tempo pieno di Bassi, che si vede costretto ad accettare altri incarichi a Ouro Preto. Anche questa volta, le aspettative sono disattese:

> È successo semplicemente che i tempi non erano maturi, gli sforzi dei bravi colleghi insufficienti, perché ciò che chiedevo sembrava troppo nuovo e audace, per cui l'ambiente non era preparato. Al rettorato, alle mie lamentele per il ritardo nell'adempimento delle clausole del contratto, mi hanno risposto che "l'Università di Minas Gerais non è interessata agli studi astratti".[128]

Scoraggiato dall'andamento del suo progetto in Brasile, durante un viaggio in Italia del 1952 Bassi partecipa al concorso per l'assegnazione di tre cattedre nelle università italiane, del quale era stato informato da Terracini.[129] Dopo alcuni tentennamenti, Bassi aveva già concorso alla cattedra di Geometria di Palermo nel 1951, ma era stato escluso dalla terna dei vincitori.[130] Il concorso successivo vede la partecipazione, oltre a Bassi, di M. Baldassarri, V. Galafassi, Turri, E. Calabi, A. Lo Voi e U. Salini. La commissione che esaminerà i sette candidati è composta da Chisini, Villa, Morin, Terracini e Severi.[131]

Dopo aver presentato la domanda per il concorso, nel novembre del 1952 Bassi è chiamato a organizzare il Dipartimento di Matematica della nuova Scuola di Ingegneria di San Carlos che "secondo la visione illuminata del suo Direttore, era decisamente orientata verso la ricerca".[132] Qui riesce finalmente a realizzare il suo progetto di creazione di una biblioteca matematica che è ancora oggi una delle migliori del Brasile. Approfittando del travagliato momento storico che l'Europa stava vivendo a causa delle devastazioni del secondo conflitto mondiale, Bassi riesce ad ottenere diversi volumi a prezzi vantaggiosi, acquistandoli da coloro che stavano cercando di vendere le proprie collezioni, e tramite i librai che trasportavano le copie dal Vecchio al Nuovo Mondo. Per comprendere l'entità di tale azione, basti pensare che nel 1953 il patrimonio librario consta di circa 2.600 volumi e, a distanza di cinque anni, il numero è più che quadruplicato, arrivando a 12.188. A San Carlos Bassi fa arrivare anche altri due italiani: Richard – suo ex allievo durante gli anni dell'assistentato a Torino e del quale ha chiesto preventivamente informazioni a Terracini[133] – sulla cattedra di Meccanica razionale e

---

[127] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 6: "o que parecia impossível obter no Rio, isto é, fundar uma escola matemática".

[128] *Ivi*, pp. 8-9: "O que simplesmente acontecia era que os tempos não eram maduros, os esforços dos bons colegas insuficientes, porque o que pedia parecia coisa demasiado nova e ousada, para a qual o ambiente não era preparado. Na Reitoria, às minhas reclamaçoes sobre o atraso em cumprir cláusulas do contrato, observaram-me que "à Universidade de Minas Gerais não interessam estudos abstratos".".

[129] Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: Bassi a A. Terracini, Niteroi 15.5.1952.

[130] Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: Bassi a A. Terracini, Niteroi 6.6.1951; L. Brusotti a A. Terracini, Pavia 4.11.1951. La terna dei vincitori del concorso è composta da Franchetta, C.F. Manara e V. Galafassi; gli esclusi sono Bassi, Turri e Andreotti. All'interno della commissione esaminatrice figurano Terracini, Chisini e Brusotti.

[131] Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: O. Chisini a L. Brusotti, U. Morin, A. Terracini e G. Zappa, Riccione 14.8.1952; O. Chisini a A. Terracini, Milano 18.12.1952.

[132] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 9: "pela esclarecida visão de seu Diretor era decididamente orientada para a investigação".

[133] Bassi aveva chiesto a Terracini qualche notizia su Richard, all'epoca libero docente a Torino. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Bassi a A. Terracini, Niteroi 20.4.1953: "Quelle che si desiderano avere non sono tanto informazioni scientifiche, che già risultano dai lavori che ha inviato, quanto informazioni, per così dire, "umane".

J.P. Cecconi su quella di Analisi. Poco dopo il loro arrivo, nel 1953 Bassi fa parte della terna dei vincitori del concorso per ordinario in Italia.[134] Di conseguenza, gli vengono offerte due cattedre di Geometria, una a Palermo e l'altra a Pisa. Come sottolinea,

> quest'ultima offerta è di grande importanza, in quanto Pisa è un centro matematico molto autorevole (il 50% dei docenti universitari italiani di matematica proviene dall'Università di Pisa). Tuttavia, non ho voluto lasciare il Brasile proprio nel momento in cui i miei sforzi di 15 anni di vita brasiliana, volti a fondare qui una scuola scientifica, sono stati coronati e, quindi, ho rinunciato alla carica di professore ordinario, in Italia, in un'Università del prim'ordine, un fatto che non ha precedenti nella storia culturale delle due nazioni, tanto discusso qua e là.[135]

Risolte alcune questioni burocratiche legate al riconoscimento del titolo di studio italiano in Brasile, a partire dal 1955 Bassi affianca all'attività di docenza la direzione del dipartimento. Vincitore di concorso, nel 1961 ottiene finalmente una posizione stabile a San Carlos, presentando un lavoro sulla teoria dei polinomi topologici che rappresenta per Bassi il

> definitivo reinserimento nella vita scientifica. Dopo aver sbriciolato per tanti anni il pane della scienza, con un atto che era solo di amore, ritorno con gioia a questi compiti. Giudico il Brasile, dal modo in cui ha saputo risolvere il problema dei rapporti umani, la Nazione più amabile di tutti quelli sotto il firmamento, e trovo in questo fatto l'intima ragione della mia permanenza definitiva. Mi auguro che risolva presto i tanti ostacoli che, nel campo della cultura, in molti modi ancora ostacolano il suo meritato progresso.[136]

I polinomi topologici, generalizzazione dei polinomi booleani classici, rappresentano "una risorsa tecnica totalmente nuova"[137] con molteplici applicazioni, dalla logica classica

---

Sapere se questa persona possiede in grado sufficiente quelle doti che gli inglesi chiamano di "companionship", cioè quel complesso di qualità che fanno di un uomo un buon collega".

[134] Cfr. «Bollettino Ufficiale della PI», parte 2, n. 30, 23.7.1953, pp. 2352-2363, *Relazione della Commissione giudicatrice del concorso a professore straordinario alla cattedra di geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno dell'Università di Catania*. La terna dei vincitori è composta, nell'ordine, da Baldassarri, Galafassi e Bassi. Il giudizio sull'attività di Bassi è il seguente: "L'attività scientifica del Bassi è dedicata quasi esclusivamente alla topologia, con qualche addentellato con la geometria algebrica e coi fondamenti della geometria proiettiva. Il candidato ha affrontato e risolto problemi difficili, attraverso un'impostazione rigorosa, dimostrando la conoscenza di teorie elevate, ampiezza di vedute e acume critico costruttivo. E però da rammaricare che da vari anni l'attività di ricerca del Bassi si sia notevolmente rallentata. Le sue qualità didattiche sono ben note e documentate".

[135] BCMC, Memorial A. Bassi, p. 9: "Êste último oferecimento é de grande relêvo, por ser Pisa um centro matemático muito abalizado (50% dos professores universitários italianos de matemática saem da Universidade de Pisa). Não quis entretanto sair do Brasil justamente no momento em que se coroavam meus esforços de 15 anos de vida brasileira, endereçados a fundar aqui uma escola científica e, portanto, renunciei à posiçao de catedrático efetivo, na Itália, numa Universidade de primeira ordem, fato êste sem precedentes na história cultural das duas nações e muito comentado aqui e lá".

[136] *Ivi*, p. 12: "definitiva reintegração na vida científica. Depois de ter, por tantos anos, esmiuçado o pão da ciêmcia, com um ate que foi so de amor, retorno com alegria a estas tarefas. Julgo o Brasil, pela maneira pela qual soube resolver o problema das relações humanas, a Nação mais digna de amor de quantas se acham debaixo do firmamento e encontro neste fatoa razão íntima de minha definitiva permanência. Faço votos que ela cedo resolva os muitos empecilhos que, no campo da cultura, de várias maneiras, ainda dificultam seu merecido progresso".

[137] BCMC, Relatório das atividades científicas do A. Bassi, 14.11.1964, p. 1: "um recurso técnico totalmente novo".

all’ingegneria elettronica. In contemporanea, Bassi si dedica allo studio dei gruppi topologici non associativi e delle algebre di Boole con topologia.[138]

Visionario ma metodico e determinato nella riorganizzazione dei corsi universitari, poco espansivo caratterialmente ma molto generoso, Bassi si spegne in Brasile il 9 novembre 1973, dopo una lunga malattia. Come si afferma nel suo necrologio,

> Chi ebbe la ventura di conoscerlo e di lavorare al suo fianco non può non ricordare, oltre alla vivacità del suo ingegno ed al suo appassionato interesse per ogni attività speculativa ed intellettuale, il suo ineguagliabile senso di ottimismo e la serenità con cui affrontava le situazioni più difficili e complesse.[139]

---

[138] Cfr. A. BASSI 1966, *Polinomi e dualità in un’algebra del Boole con topologia*, «Rend. ANL» (8) 40, pp. 29-34.

[139] CECCONI 1974, *cit*., p. 546.

7. *Il patrimonio materiale di Fano: biblioteca personale e miscellanea*

Tra i primi allievi di Segre, Fano eredita dal maestro sia l'interesse per gli studi di geometria algebrica sia il desiderio di rafforzare l'identità della Scuola italiana, cui unisce una proficua attività di ricerca avanzata e una forte attenzione verso le indagini coeve dei matematici tedeschi.

Il suo patrimonio librario, interamente conservato presso la BSMT, rappresenta un valido strumento per illuminare certi tratti della produzione di Fano e per indagare alcuni aspetti del processo di formazione ed evoluzione di un insieme letture condivise tra i membri della Scuola che non si arresta alla morte di Segre.[1] Formatosi su un arco temporale che si estende fino al 1952, anno della scomparsa di Fano, tale patrimonio è indicativo del suo posizionamento rispetto alle emergenti tendenze internazionali che vanno gradualmente affermandosi tra gli anni Venti e Trenta e riflette i mutamenti nelle reti di contatti internazionali dopo il 1938. Esso è costituito da due collezioni principali:[2]

- la miscellanea, composta 4810 estratti da riviste e periodici, 6 litografie di lezioni (comprese due litografie dei corsi universitari di Klein), 83 tesi di laurea, 51 recensioni e 14 discorsi inaugurali, ma anche necrologi, scritti d'occasione, liste di pubblicazioni e capitoli di volumi (Tab. 7.1);[3]
- la biblioteca personale, che consta di 147 volumi e due raccolte parziali di riviste: «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» e «Periodico di Matematiche: Storia, Didattica, Filosofia».[4]

Il regesto della miscellanea è disponibile online, all'interno del sito web a cura di L. Giacardi (http://www.corradosegre.unito.it/fondo_fano_m.php), mentre il catalogo della biblioteca è pubblicato in (E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2021, *cit.*, pp. 63-73). Entrambi sono posti in appendice a questa tesi.

Tipologia di opuscoli	**n. esemplari**
Scritti prosopografici	123
Estratti di Atti di Congressi	121
Dissertazioni	95
Recensioni	51
Rapporti	43
Estratti di *Festschrift*	30

[1] Una versione ridotta, in inglese, dei paragrafi 7.1, 7.2, 7.3 e 7.8 di questo capitolo è pubblicata in E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2021, *On Gino Fano's patrimony: Library and Miscellany,* «RSUT» 10.1, pp. 45-73.

[2] A queste si affiancano alcune carte manoscritte e 26 lettere (BSMT). Cfr. GIACARDI – RINALDELLI 2001, *cit.*, pp. 381-392.

[3] Dodici estratti (nn. 207, 781, 921, 1080, 1172, 1355, 1852, 2838, 3197, 3482, 4223, 4075) sono dispersi. A differenza dell'ultima ricognizione (cfr. GIACARDI 2011, *cit.*, p. 112), si considera qui come ultimo estratto della miscellanea l'ultimo opuscolo recante il timbro FANO.

[4] Due volumi (nn. G30, G105) e l'intera collezione dei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», con la sola eccezione del volume 25 (G1) sono mancanti. Il volume di Kötter (G26) è stato trasferito all'Accademia delle Scienze di Torino nel 2014.

Voci di enciclopedie	16
Elenchi di pubblicazioni	11
Capitoli di libri	8
Libri di collane editoriali	4

Tab. 7.1. Classificazione degli estratti della miscellanea Fano diversi da articoli su rivista.

Il patrimonio è pervenuto in biblioteca in momenti diversi. Una prima tranche di estratti è stata donata dallo stesso Fano, con l'intento di contribuire a ricostruire la ricca miscellanea della BSMT che i bombardamenti alleati del 1942 e 1943 avevano distrutto quasi completamente. Tredici scatole di estratti vennero così trasportate dalla casa di famiglia Fano a Colognola ai Colli, vicino a Verona, da Robert Fano, figlio di Gino, e acquisite il 18 settembre 1948.[5] La seconda parte della collezione fu probabilmente donata dagli eredi di Fano dopo la sua morte, seguendo un suggerimento di Terracini.[6] Purtroppo, non esiste alcun documento che attesti l'entità di quest'ultima donazione. Possiamo supporre che risalga al 29 dicembre 1954 quando i parenti di Fano donarono la sua biblioteca personale al neonato Istituto di Geometria, il cui patrimonio all'epoca contava solo una cinquantina di libri.[7]

7.1 Analisi quantitativa delle raccolte di Fano

Gli estratti che compongono la miscellanea Fano provengono da 381 riviste, edite in 30 paesi differenti. Secondo la classificazione adottata nel progetto di ricerca internazionale Cirmath *Circulations des mathématiques dans et par les journaux: histoire, territoires et publics* (https://cirmath.hypotheses.org), i giornali possono essere classificati come in (Tab. 7.2).

La maggior parte della miscellanea è costituita da estratti di periodici editi da accademie e società scientifiche. I «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei» sono la rivista più rappresentata (Fig. 7.1) all'interno della collezione (con 639 estratti), seguiti dai «Rendiconti del R. Istituto Lombardo» (283), dai «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» (212) e dagli «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino» (178). La presenza all'interno della miscellanea di un discreto numero di estratti degli «Atti» (22) e del «Bollettino» (4) dell'Accademia Gioenia di Catania o degli opuscoli stampati a Messina (17) è un riflesso del periodo trascorso da Fano in Sicilia.

[5] BSMT, *Carte Terracini*: G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 20.8.1948, 7.9.1948 e 25.9.1948, edite in appendice a questa tesi.

[6] ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: A. Terracini a U. Fano, Torino 3.12.1953: "Quanto agli opuscoli tuttora esistenti, cioè non donati in vita da tuo Padre alla Biblioteca matematica (credo del resto che non siano molti) ritengo che sarebbe molto utile che li donaste alla Biblioteca matematica".

[7] ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: A. Terracini a U. Fano, Torino 3.12.1953; U. Fano a A. Terracini, Washington 2.1.1954; A. Terracini a U. Fano, Torino 22.1.1954; A. Terracini a A. Allara, Torino 11.10.1954; A. Terracini a A. Provenzali, Torino 31.10.1954; A. Terracini a U. Fano, Torino 29.12.1954; A. Terracini a A. Provenzali, Torino 29.12.1954; A. Terracini a A. Provenzali, Torino 4.1.1955; U. Fano a A. Terracini, New York 22.1.1955. ASUT, *Patrim. Recap.* S.C. *Geometria* 1946-1983, *Donazione eredi prof. Gino Fano* e *Elenco delle opere donate dalla famiglia Fano all'Università di Torino*, 18.2.1956, 6.4.1956 e 12.5.1956; *Verbali di adunanza del Consiglio di amministrazione dal 21.7.1954 al 13.7.1956*, p. 24; *Verbali di adunanza del Consiglio di amministrazione dal 21.7.1954 al 13.7.1956*, p. 387. BSMT, *Registro d'ingresso – Libri 1. Scuola di Geometria*. Negli anni Ottanta, dopo la soppressione delle biblioteche dei vari Istituti, la biblioteca personale di Fano è confluita in quella della BSMT.

Tipo di collocazione editoriale	n. testate	n. estratti
Periodici editi da accademie e società scientifiche	113	2548
Riviste specialistiche di matematica	82	1176
Riviste tecnico-scientifiche	47	179
Atti di congressi	39	121
Riviste di didattica della matematica	21	301
Riviste di interesse generale	19	30
Annali di Università	16	22
Riviste specialistiche di astronomia	14	28
Riviste specialistiche di economia	6	21
Riviste specialistiche di fisica	5	8
Riviste specialistiche di geologia	4	6
Riviste specialistiche di storia della scienza	3	6
Riviste specialistiche di chimica	3	3
Riviste specialistiche di fisiologia e medicina	3	3
Riviste specialistiche di filosofia e teologia	2	3
Riviste specialistiche di ingegneria	1	5
Riviste specialistiche di artiglieria	1	2
Riviste specialistiche di lettere e storia antica	1	2
Riviste specialistiche di botanica	1	1

Tab. 7.2. Classificazione delle riviste della miscellanea Fano.

Vi è poi un corpus – numericamente esiguo ma significativo – di articoli di giornali di astronomia e di estratti da periodici tecnico-scientifici, che mostrano un certo interesse di Fano per la fisica, l'ingegneria e le applicazioni della matematica. (Fig. 7.2).[8]

787 sono gli autori rappresentati all'interno del patrimonio Fano,[9] tra cui 93 matematiche, per un totale di 259 estratti e 7 volumi dei quali almeno uno degli autori è donna (Tab. 7.3). Tra le autrici italiane, si segnalano Maria Cibrario (la più rappresentata, con 49 estratti), Rosetta Frisone, Elisa Viglezio, Clementina Ferrero e Fausta Audisio (tutte e cinque allieve di Peano), Emma Castelnuovo (la cui rinomata *Geometria intuitiva* figura tra i volumi della biblioteca[10]), Corinna Gualfredo, Ernesta Tedeschini and Jeannette Mongini.

[8] Cfr. FANO 2000, *cit.*, p. 182: "[…] when I was 12, during an evening meal, my father introduced me to atomic structure by explaining Bohr's new visualization of an atom as analogous to a planetary system". Cfr. FANO 1910b, *cit.*, pp. 12-13. Fano dedica a temi di astronomia le sue conferenze del 1909 presso la Scuola Operaia Serale Femminile di Torino, intitolate *Dimostrazioni sperimentali e spiegazioni relative ad alcuni fenomeni astronomici: movimenti della terra, fasi lunari, eclissi*. Fano è anche membro dell'Associazione Elettrotecnica Italiana.

[9] Quattro estratti della miscellanea sono senza autore o firmati da comitati editoriali.

[10] Si tratta del volume G59: E. CASTELNUOVO 1949, *Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori*, Roma, Carabba.

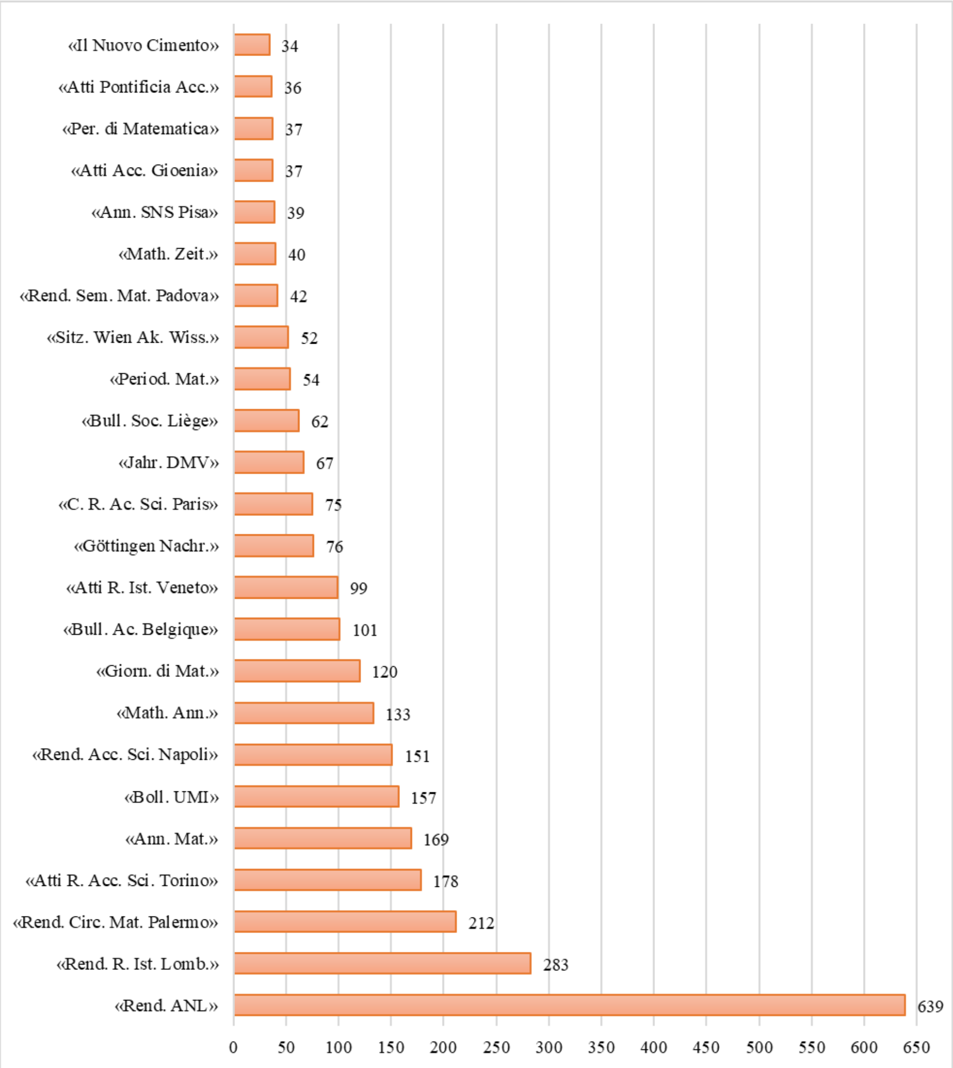


Fig. 7.1. Riviste maggiormente rappresentate, con oltre 30 estratti.

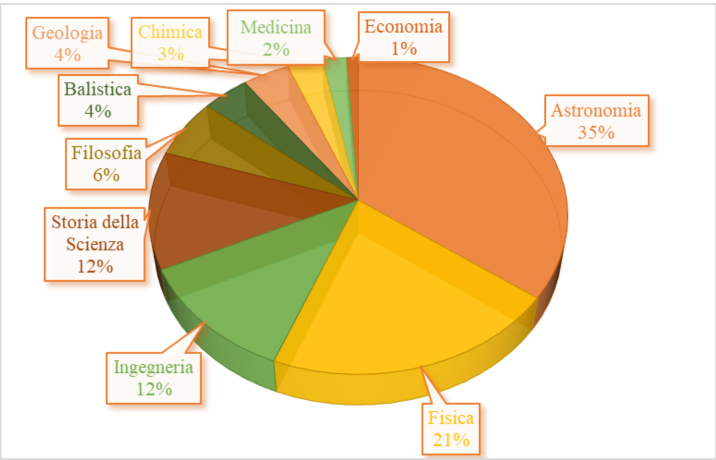


Fig. 7.2. Classificazione tematica del patrimonio Fano.

Le ultime tre furono assistenti volontarie presso l'Osservatorio Astronomico di Torino e furono incaricate dal direttore – Giovanni Boccardi – di effettuare alcuni calcoli astronomici, poi pubblicati a loro nome.[11] Tra le matematiche straniere che inviano a Fano i loro lavori compaiono la svizzera Sophie Piccard (autrice di tre volumi recanti dediche manoscritte a Fano[12]) e le inglesi Charlotte Scott e Grace Chisholm, quest'ultima più volte in contatto diretto con Fano. Infine, una percentuale significativa della miscellanea di Fano è costituita da dissertazioni della *Catholic University of America*, elemento che motiva il secondo posto degli USA all'interno della distribuzione delle autrici (Fig. 7.3). Scritta sotto la supervisione di Aubrey Landry, spicca in questo contesto la tesi di Mary Gervase, prima donna a conseguire il dottorato in matematica presso tale università.

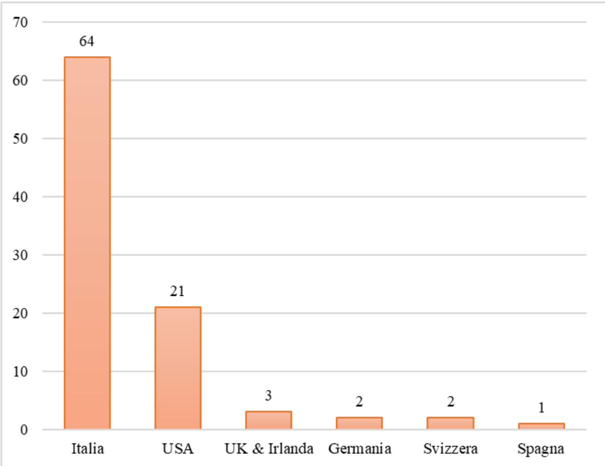


Fig. 7.3. Distribuzione per nazionalità delle autrici.

Autrici	Provenienza	n. esemplari
Cibrario Maria	Italia	49
Pastori Maria	Italia	40
Biggiogero Giuseppina	Italia	20
Scott Charlotte	UK	12
Del Re Maria	Italia	9
Pelosi Luisa	Italia	7
Piazzolla-Beloch Margherita	Italia	7
Brunetti Rita	Italia	5
Nöther Emmy	Germania	5
Piccard Sophie	Svizzera	4
Anselmo Anna	Italia	3
Grimaldi Gelsomina	Italia	3
Pisati Laura	Italia	3
Silvestri Clelia	Italia	3
Chisholm Grace	UK	3

Tab. 7.3. Autrici maggiormente rappresentate, con almeno 3 estratti.

[11] Per ulteriori dettagli sul ruolo delle donne presso l'Osservatorio Astronomico di Torino cfr. G. BERNARDI – A. VECCHIATO 2018, *The advent of female astronomers at Turin Observatory*, «The journal of Astronomical History and Heritage» 21.1, pp. 13-28.

[12] Trattasi dei volumi G84, G85 e G86.

7.2. La formazione del patrimonio Fano

Fano inizia a costruire la sua biblioteca all'epoca degli studi universitari (ricordiamo che si laurea nel 1892) e ne accresce abbastanza regolarmente il patrimonio fino alla morte (Fig. 7.4 e 7.5).

I volumi della biblioteca personale sono pubblicati tra la prima metà del XIX secolo e gli anni Cinquanta del XX: si spazia così dai grandi classici ottocenteschi – la 5° edizione della *Géométrie descriptive* di G. Monge (1827) e il *Traité de stéréotomie* di C.F.A. Leroy (1884) – ai più recenti progressi in campo matematico e fisico, quali le *Conferenze di fisica atomica* di Fermi (1950). L'arco di stampa degli opuscoli della miscellanea va dal 1871 al 1953, con 10 estratti che raggiungono la miscellanea dopo la morte di Fano.[13]

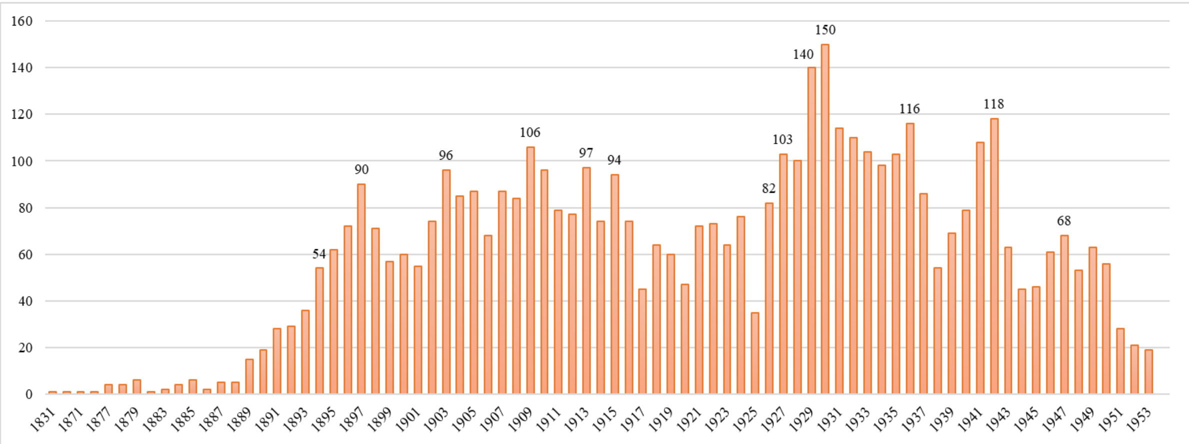


Fig. 7.4. Andamento temporale delle acquisizioni.

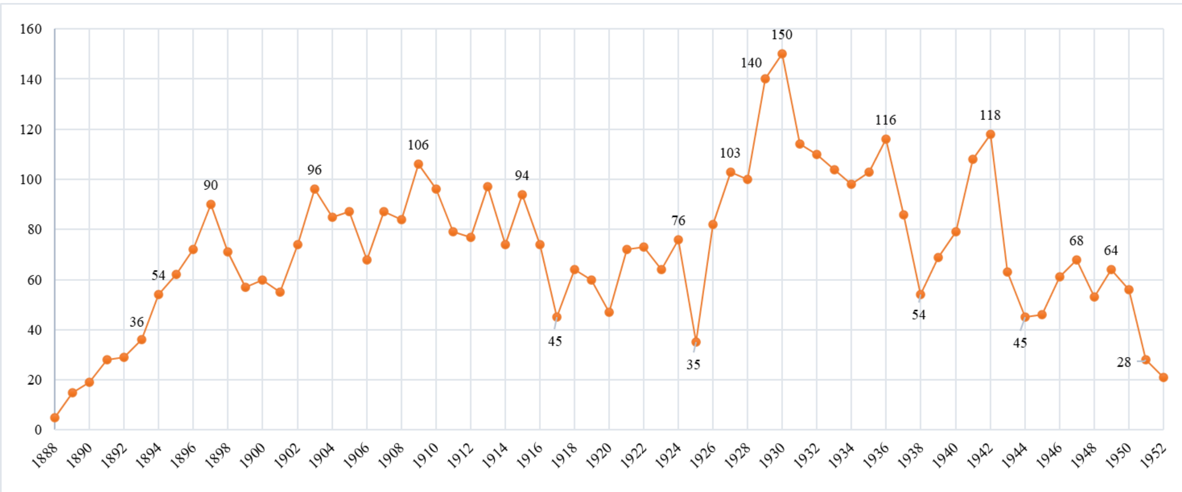


Fig. 7.5. Timeline della miscellanea Fano dal 1888 al 1952.

[13] Gli opuscoli più antichi furono probabilmente acquisiti da Fano in due momenti: all'epoca degli studi universitari, dono dei suoi docenti, e attorno al 1910 quando inizia a occuparsi di questioni didattiche. L'estratto del 1871 è infatti la dissertazione del danese J. Petersen sulle equazioni risolubili per radicali quadratici e la loro applicazione alla soluzione dei problemi con riga e compasso. Plausibilmente i lavori posteriori alla morte di Fano furono inseriti nella miscellanea dai figli, al momento della loro ricezione.

Quattro sono i “punti di minimo” che si osservano nell’andamento delle acquisizioni, rispettivamente nel 1925 (35 pezzi), 1917 (45), 1938 (54) e 1944 (45), con gli ultimi tre strettamente correlati ai conflitti mondiali e all’entrata in vigore dei provvedimenti razziali. Si osserva un’altra inflessione naturale dopo il pensionamento di Fano (1951). Tre picchi all’interno della distribuzione temporale degli estratti ricevuti da Fano corrispondono a momenti particolarmente intensi della sua traiettoria scientifica e personale: l’inizio della carriera accademica (1894-97), segnato dal viaggio a Gottinga; l’affermazione a livello internazionale e la direzione della BSMT (1924-38); la ripresa dei contatti con l’ambiente matematico e le nuove relazioni con i colleghi svizzeri in seguito all’emigrazione forzata a Losanna (1940-42).

La maggior parte degli opuscoli della raccolta di Fano sono frutto di doni e invii da parte di colleghi ed ex-allievi, come testimoniato da un elevato numero di dediche autografe. Viceversa, Fano acquista la maggioranza dei volumi della sua biblioteca: soltanto una decina di libri è donata a Fano dagli autori. Tra questi, vi sono diversi manuali italiani quali gli *Esercizi di geometria proiettiva* di U. Perazzo, A. Ferrari e G. Guareschi (Torino, Cecchini, 1905), le *Lezioni di meccanica razionale* di Amaldi e Levi-Civita (Bologna, Zanichelli, 1923)[14], i *Complementi di geometria descrittiva* di Loria (Milano, Hoepli, 1924), le *Lezioni di geometria descrittiva* di G. Sannia (Napoli, Mayo, 1926), destinate agli studenti di ingegneria, e le *Lezioni di geometria moderna* (Bologna, Zanichelli, 1948) che B. Segre dona a Fano “con affetto ed ammirazione”.[15] Sul fronte estero, oltre ai tre testi con dedica di Piccard che Fano porta con sé di ritorno dalla Svizzera, egli riceve in omaggio il volume *Géométrie algébrique* (Liège, Université, 1948-49) di Godeaux.

Sono più di duecento gli autori che inviano a Fano i propri lavori, alcuni dei quali con una certa assiduità. Tra questi vi sono colleghi e amici dell’ateneo torinese come Terracini, Tricomi, Togliatti, Colombo, Buzano, T. Boggio, Somigliana, D’Ovidio e Maria Cibrario. Numerosi sono anche i doni da parte di membri della Scuola geometrica italiana, a riprova dell’esistenza di una rete di scambi e di condivisione di letture: è questo il caso dei lavori di Rosati, Chisini, Del Re, Del Pezzo, S. Cherubino, Marletta, Montesano, A. Maroni, B. Levi, Berzolari, Brusotti, Comessatti, De Franchis, Severi e, naturalmente, Castelnuovo. Quest’ultimo invia a Fano un nucleo consistente di pubblicazioni negli anni immediatamente successivi al suo trasferimento a Roma ma tale condivisione di lavori continua, seppur più sporadicamente, almeno fino agli anni Trenta, come testimonia lo scritto di Castelnuovo apparso su «Scientia» nel 1932 che l’autore spedisce a Fano “con antica amicizia”. Un elevato numero di opuscoli è donato a Fano dai membri dell’Osservatorio di Pino Torinese: Boccardi *in primis* (10 estratti), ma anche Mongini e Gualfredo. L’interesse di Fano per l’astronomia, tuttavia, risale probabilmente alla stagione romana quando conosce Vincenzo Reina, titolare della cattedra di Geodesia, che inizia a omaggiargli diversi suoi lavori dedicati alle determinazioni astronomiche.[16] In questi anni, probabilmente grazie all’intermediazione di Reina, Fano riceve anche alcune note di astronomia pubblicate in Francia come quella di D. Klumpe (1897) sull’eclissi solare totale dell’agosto del

[14] Fano scrive a Levi-Civita alcuni commenti e suggerimenti per la ristampa di questo volume. Cfr. ASANL, *FLC*: G. Fano a T. Levi-Civita, Torino 6.2.1929, edita in appendice a questa tesi.

[15] Si tratta rispettivamente dei volumi G56, G32, G62, G108, G64.

[16] Buona parte di questi contributi reca una dedica autografa del tipo “All’amico Dr. G. Fano”. Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 3606-3607, 3609, 3611-3614, 3620-3624, 3632, 3671.

1896. Ancora, alcuni lavori con dedica firmati da O. Zanotti-Bianco e A. Viterbi testimoniano il permanere dell'interesse di Fano per questo ambito. Tra coloro che, pur occupandosi di temi di ricerca differenti da quelli di Fano, gli inviano un elevato numero di scritti vi sono Levi-Civita (67 estratti con dedica),[17] P. Burgatti e Wataghin (12 pezzi a testa).[18]

Altri opuscoli della miscellanea Fano sono legati al contesto dell'Accademia Virgiliana di Mantova, di cui Fano è socio effettivo dal maggio del 1893.[19] L'Accademia mantovana rappresenta un importante luogo di scambio per i soci: Fano stesso vi deposita 56 suoi lavori e riceve in omaggio gli scritti matematici degli altri membri quali Viterbi, Loria, C. Rimini e G. Vivanti. Quest'ultimo, oltre a donare a Fano 16 estratti di suoi articoli, gli lascia una cospicua parte della sua miscellanea: si tratta di oltre 130 opuscoli che, pur recando una dedica a Vivanti, sono confluiti nella miscellanea Fano. Tra questi, compaiono una ventina di lavori di C. Alasia de Quesada e altrettanti di V. Bernstein, accanto a diverse note di ex-studenti e studentesse, quali Maria Luisa Bassani e Luigi Barbaro. Quelli appartenuti a Vivanti non sono gli unici opuscoli a confluire all'interno della raccolta di Fano. Quattro estratti, infatti, provengono dalla collezione di Peano mentre R. De Paolis, Boggio e Giuseppe Bruno hanno donato a Fano almeno un opuscolo della propria raccolta personale.[20]

Fig. 7.6. Cartografia mondiale della miscellanea Fano.

---

[17] Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, Miscellanea, estratto n. 1653: "Coi più affettuosi saluti, con ringraziamenti cordiali per le parole gentili. T. Levi-Civita". Fano è inoltre in corrispondenza epistolare con Levi-Civita. Cfr. ASANL, *FLC*: G. Fano a T. Levi-Civita, Torino 9.2.1925; 14.6.1927; 16.11.1928; 6.2.1929; 25.5.1929; 5.6.1929; 31.3.1935; 23.11.1935; G. Fano a T. Levi-Civita, Losanna 9.5.1939.

[18] Cfr., BSMT, *FFa*, Miscellanea, estratto n. 1244: "Al Chiar.mo Prof. G. Fano. In devoto omaggio e con i più vivi ringraziamenti per prez.se domande inviate. G. Wataghin".

[19] Sulla partecipazione di Fano alle attività dell'Accademia, cfr. JANOVITZ –MERCANTI, *cit.*, pp. 54-57.

[20] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: trattasi rispettivamente degli estratti nn. 665, 1126 I, 1246, 1362 (lavori di G. Fazzari, Picone, Sansone e Pasch inviati a Peano), n. 646 (articolo di D'Ovidio del 1879, appartenuto a De Paolis), n. 974 (nota di C. Segre del 1891, appartenuta a Bruno) e n. 2174 (contributo fondazionale di Pieri del 1899, donato dall'autore a Boggio).

Ancora, Lia Predella omaggia la madre di Fano, Angelica, del suo contributo del 1895 sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine che compare tra gli opuscoli della miscellanea Fano (n. 1032).

Diversi fattori concorrono dunque alla formazione del patrimonio Fano. Oltre a quelli già menzionati e ai soggiorni all'estero di Fano che saranno approfonditi nel paragrafo successivo, non bisogna dimenticare la rete di relazioni intrecciate da Fano dal suo arrivo a Torino in poi, non solo come ricercatore ma anche come direttore della Biblioteca Speciale di Matematica dal 1924. Essa spiega il carattere internazionale del patrimonio negli anni 1910-1938 (Fig. 7.6). Fano riceve infatti articoli provenienti da Svezia («Arkiv för matematik, astronomi och physik», 16 pezzi), Finlandia («Annales Physico-Mathematicae, Societas Scientiarum Fennica»), Russia («Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou»), Polonia («Fundamenta Mathematicae»), Romania («Mathematica Cluj» e «Gazeta Matematică»), Peru («Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Lima») e Uruguay («Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias de Montevideo»), e intrattiene una larga corrispondenza con gli editori della maggior parte di queste riviste (Fig. 7.7).

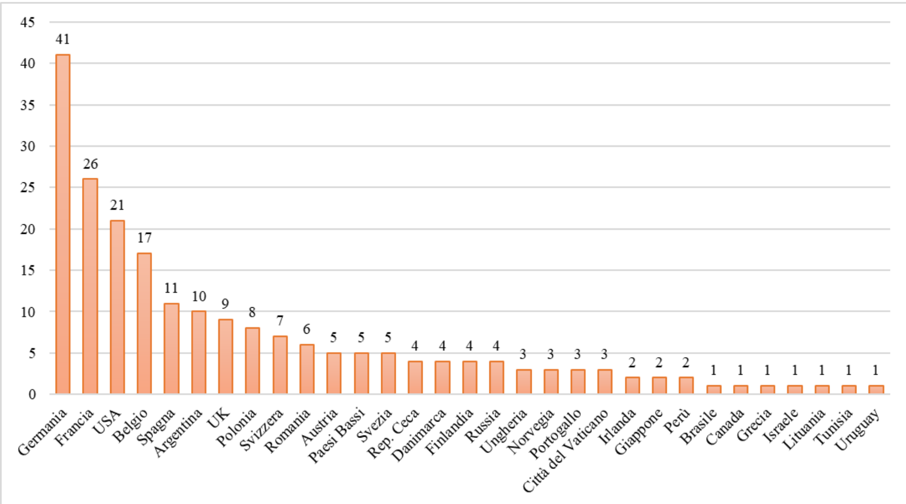


Fig. 7.7. Distribuzione geografica delle riviste straniere.

Ad esempio, la BSMT riceve la «Revista» pubblicata dalla Facoltà di Scienze dell'Universidad Mayor of San Marcos di Lima, grazie al rapporto di Fano con Alfred Rosenblatt, che aveva trascorso alcuni anni di studio in Italia alla Scuola di geometria algebrica, prima di essere chiamato come visiting professor in Peru.[21] Rosenblatt invia personalmente a Fano una quindicina di note di geometria algebrica, compreso il testo della sua comunicazione sulle varietà tridimensionali presentata all'ICM di Bologna, dove cita otto contributi di Fano.[22] I temi dei lavori donati da Rosenblatt, spesso accompagnati da un'annotazione autografa, sono molto vicini agli interessi di ricerca di Fano: le superfici algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali, le varietà tridimensionali che soddisfano la disuguaglianza $P_g \leq 3(p_g - p_a - 3)$, le relazioni tra gli integrali di Picard di prima specie di

[21] Cfr. BSMT, *FFa*, lettere. 24: A. Rosenblatt a G. Fano, Lima 21.4.1937, edita in appendice a questa tesi.

[22] Cfr. A. ROSENBLATT 1931, *Varietà algebriche a tre e più dimensioni*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 93-113. Si tratta dell'estratto n. 3515 della miscellanea Fano.

una superficie algebrica, le superfici irregolari per cui $p_g \geq 2(p_a + 2)$, quelle che possiedono un fascio irrazionale di curve iperellittiche di genere due e altro ancora.[23]

Frutto dei contatti stretti da Fano durante l'ICM di Bologna sono anche le tre note con dedica autografa pubblicate nel triennio 1926-28 da George Nicoladzé, specialista di geometria algebrica in Georgia.[24]

7.3. L'influenza dei soggiorni all'estero

I periodi, più o meno lunghi, trascorsi da Fano fuori dall'Italia sono stati determinanti per la formazione del suo patrimonio librario, non solo per quanto riguarda i contributi dei matematici stranieri che Fano porta con sé al suo ritorno, ma soprattutto a livello di relazioni personali e scientifiche instaurate che proseguono negli anni successivi e si manifestano anche tramite l'invio di lavori e letture.

Come noto, nell'a.a. 1893-94 Fano si recò a Göttingen per completare la sua formazione sotto la guida di Klein. I contatti con l'ambiente matematico tedesco si riflettono nella composizione del patrimonio Fano nei primi anni di attività scientifica: dopo il suo soggiorno a Gottinga il numero di lavori prevenienti dalla Germania quintuplica (Fig. 7.8), passando da 16 opuscoli del periodo 1888-1893 a 94 lavori degli anni 1894-1900.[25]

Tra gli estratti inviati dai matematici tedeschi, accompagnati da dediche e ringraziamenti, compaiono alcuni contributi di Study, Sturm, Klein, F. Engel, V. Schlegel, G. Haenzel, A. Sommerfeld, G. Wallenberg e M. Nöther.[26] Gli invii dalla Germania proseguono almeno fino al 1938, come testimoniano i lavori di questi anni firmati da L. Berwald e M. Steck che compaiono nella miscellanea Fano.[27] Dalla Germania provengono anche numerosi articoli di teoria dei numeri di E. Landau (74 estratti) che costituiscono un elemento di rilievo della raccolta di Fano, dato che gli studi di questa disciplina erano scarsamente coltivati all'epoca in Italia. Frutto del soggiorno alla Scuola di Göttingen sono anche due opuscoli con dedica autografa inviati a Fano nel 1898 da Snyder, cultore di geometria algebrica che aveva conseguito il dottorato con Klein nel 1895, lo stesso anno in cui Fano soggiornava lì.[28]

[23] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 3511-3516, 3519, 3522, 3522bis, 3523, 3525-3527, 3529-3530. Compaiono diverse dediche come "Omaggio di profonda stima dall'autore", "Con più perfetta stima dall'autore", ecc.

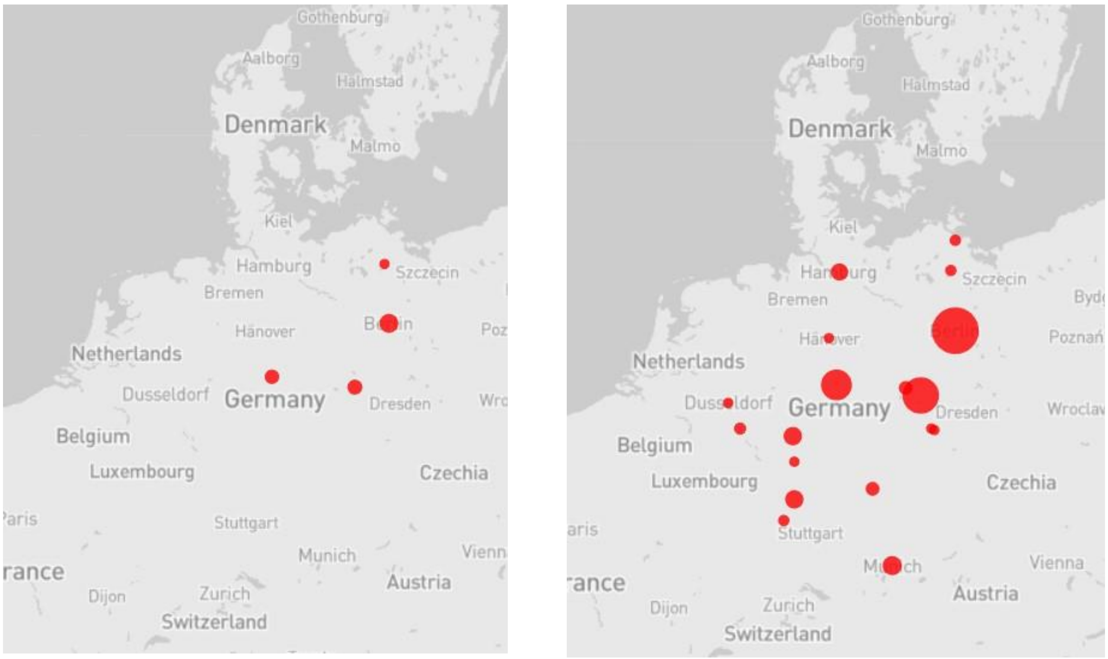
[24] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 4069, 4070, 4097.

[25] I rapporti con i matematici tedeschi e il successivo incontro con Klein nel 1899 in occasione del suo viaggio in Italia sono testimoniati anche dalla corrispondenza. Cfr. BSMT, *FFa*, lettere 2: M. Nöther a G. Fano, Erlangen 24.7.1894; lettere. 3: W. Voigt a G. Fano, Rapallo 12.10.1894; lettere. 6: R. Sturm a G. Fano, Breslau 4.7.1896; lettere. 8: W. Fiedler a G. Fano, Zürich 28.12.1897; lettere. 9: F. Klein a G. Fano, Göttingen 5.2.1899; lettere. 10: L. Cremona a G. Fano, Roma 21.3.1899; lettere. 11: G. Veronese a G. Fano, Roma 21.3.1899; lettere. 12: M. Nöther a G. Fano, Oberstdorf 7.9.1900; lettere. 13: E. Study a G. Fano, [s.d. ma 1900, s.l]; lettere. 17: F. Schur a G. Fano, Karlsruhe 19.11.1907.

[26] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 3850, 3852, 3867, 3872 (con dedica manoscritta: "Herrn collegen G. Fano mit freundlichen grüßen, E. Study"), 2777 ("Herr Professor Fano mit besten Danke!"), 2779, 2782, 3733, 3735, 560, 1411, 3824, 4008, 2629, 2829, 3049, 2419.

[27] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: si tratta rispettivamente degli estratti nn. 150 ("Besten grüßen, L. Berwald"), 1120 I e 1120 II.

[28] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: trattasi degli estratti nn. 3795-3796.



1888-1894 Dopo il 1895

Fig. 7.8. Cartografia delle acquisizioni dalla Germania.

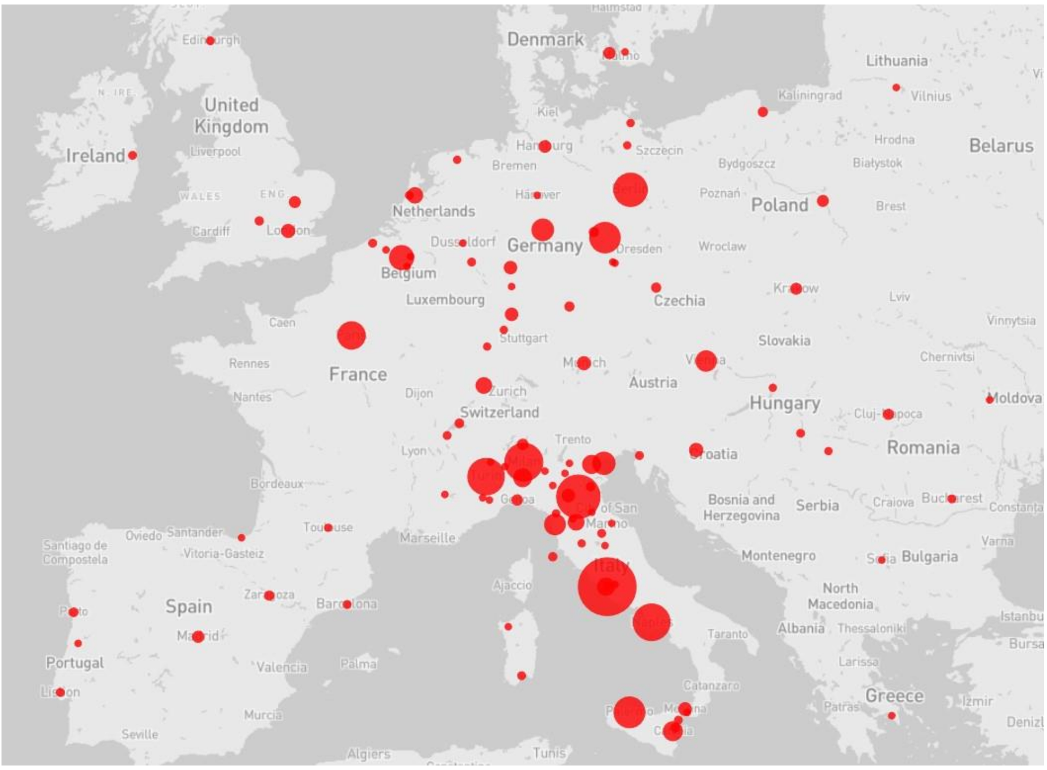


Fig. 7.9. Cartografia europea della miscellanea Fano.

Dal patrimonio librario – così come dalla corrispondenza scientifica – emergono alcune tracce delle proficue relazioni instaurate nel corso dell'esperienza di Fano come *visiting professor* all'University College of Wales di Aberystwyth, nel semestre invernale del 1923

(Fig. 7.7 e 7.9).[29] Dei 44 estratti firmati da membri della Scuola geometrica inglese che compaiono nella miscellanea Fano, più della metà è posteriore al viaggio di Fano in Galles. Tra questi, vi sono i contributi sulle trasformazioni delle curve algebriche piane di Charlotte Scott – una delle prime donne britanniche a ricevere un dottorato – insieme a quelli di Edge (10 estratti, principalmente sulle reti di quadriche), Roth, J.G. Semple,[30] G.H. Hardy e A.N. Whitehead.

Il trasferimento forzato in Svizzera, in seguito alla promulgazione delle leggi razziali, giustifica la composizione delle collezioni Fano negli ultimi anni, dal 1939 al 1952. Dal 1939 in poi l'8% degli opuscoli proviene da riviste elvetiche (*in primis* i «Commentarii Mathematici Helvetici», con 28 estratti) e i matematici svizzeri occupano il terzo posto nella distribuzione della nazionalità degli autori (Fig. 7.10). Notevole è poi la raccolta di tesi discusse in Svizzera che Fano porta con sé quando torna in Italia (1946) e che continua a ricevere negli anni successivi, tramite i colleghi svizzeri.[31] Il patrimonio librario di Fano, caratterizzato da diversi lavori stampati nei centri editoriali elvetici (Fig. 7.9), rispecchia i legami intrecciati con i matematici che frequentavano il *Cercle Mathématique* di Losanna: Le Blanc (5 lavori, pubblicati tra il 1940 e 1943), De Rham (5 estratti, l'ultimo dei quali risale al 1948) e P. Bidal. Oltre ai volumi già menzionati, Sophie Piccard dona a Fano tre suoi lavori di teoria dei gruppi pubblicati tra il 1941 e il 1946.[32]

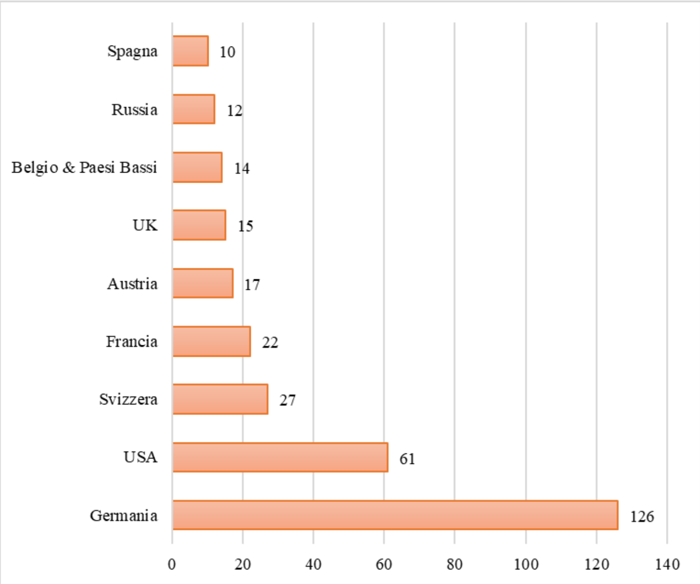


Fig. 7.10. Distribuzione degli autori stranieri per nazionalità.

[29] BSMT, *FFa*, lettere. 22: H.F. Baker a G. Fano, Cambridge 14.12.1931; lettere. 23: L. Roth a G. Fano, Londra 18.2.1937, edite in appendice a questa tesi. Entrambe le lettere testimoniano le relazioni tra le comunità matematiche inglesi e italiane negli anni Venti. Baker scrive: "Our students in Cambridge read many of your published papers, and find them very helpful – so that I am particularly grateful to you for writing to me".

[30] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 3780 e 4014. Semple invia a Fano due lavori con dedica autografa "With the autor's compliments".

[31] Si tratta di 10 tesi discusse a Basilea (n. 2729, 2730, 2731, 2732, 2733, 2734, 2735, 2736, 2737, 2738), 7 a Zurigo (n. 2566, 2622bis, 2623bis, 2631, 2739, 2743, 2744) e 3 a Ginevra (n. 1328, 1390, 1413).

[32] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 1037-1039, tutti recanti la dedica "à Monsieur le Professeur Gino Fano hommage respecteux de l'auteur".

Gli opuscoli della stagione svizzera che Fano conserva all'interno della sua raccolta personale non sono esclusivamente di carattere matematico. Tra essi, infatti, figurano il contributo filosofico di Dumas, intitolato *Sur les sentiers du savoir* (1942), e l'articolo di astronomia *La figure de la Terre* firmato nello stesso anno da R. Wavre, entrambi accompagnati dalla dedica manoscritta dell'autore.[33]

Dopo la nomina a professore emerito nel 1948, Fano trascorre gli ultimi anni della sua vita tra Italia e Stati Uniti, dove risiedono i figli: le relazioni con i matematici americani risalenti a questo periodo sono testimoniate, ancora una volta, dalla composizione della miscellanea. Fano fa anche parte della delegazione italiana al Congresso Internazionale dei Matematici che si svolge a Cambridge (MA) nel 1950.[34] Ciò gli permette di entrare ancor più in contatto con i matematici statunitensi da cui riceve alcuni lavori negli anni 1950-52. È questo il caso del contributo alla teoria degli insiemi di H.B. Curry e dell'articolo di A. Wald sui principi dell'interferenza statistica, entrambi pubblicati all'interno della collana *Notre Dame Mathematical Lectures*. Ancora, Hlavatý invia a Fano due scritti di fisica matematica pubblicati negli USA.

7.4. I rapporti con la Scuola di Peano

La presenza di 132 estratti di Peaniani documenta i rapporti di Fano con la Scuola di logica italiana negli anni 1890-1915, quando la sua produzione si concentra principalmente sui fondamenti della geometria proiettiva e quando, di conseguenza, interagisce con Peano (38 opuscoli) e con alcune figure-ponte tra i due gruppi di ricerca – la Scuola di Peano e quella di Segre – come Mario Pieri (39 estratti), Federico Amodeo (30), Beppo Levi (11) e Alessandro Padoa.[35]

Emblematica della collaborazione con Peano, docente di Analisi infinitesimale di Fano durante gli studi a Torino, è la redazione del IX capitolo del *Formulario*, dedicato alla teoria dei numeri algebrici. Seppure "a distanza", Fano partecipa attivamente a questo progetto editoriale nel periodo in cui è assistente di Castelnuovo a Roma. Alcuni opuscoli della sua miscellanea restituiscono l'immagine del rapporto con Peano che, in questi anni, gli spedisce diversi suoi lavori indirizzandoli alla R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma.[36] Analogamente, Amodeo gli invia nella capitale il suo contributo sulle curve k-gonali di s-esima specie (1899).

Ma l'elemento più significativo della collaborazione tra Fano e Peano che compare nella miscellanea è l'estratto n. 1362: si tratta dell'articolo di M. Pasch sui numeri irrazionali, pubblicato nei «Mathematische Annalen» nel 1892 che l'autore aveva spedito a Peano il quale, a sua volta, lo aveva donato a Fano, probabilmente come supporto nello studio preliminare alla stesura del contributo per il *Formulario*. La miscellanea Fano comprende anche i capitoli VI

[33] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti n. 616 ("à Monsieur le Professeur J. Fano avec tous ses remerciement. G. Dumas") e n. 1266 ("à Monsieur G. Fano. Respecteux hommages de R. Wavre").

[34] Tre estratti dagli Atti dell'ICM del 1950 compaiono all'interno della raccolta di Fano. Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 2727, 3407, 3440.

[35] G. FANO 1895b, *Contributo alla teoria dei numeri algebrici, osservazioni varie e parte IX del Formulario*, «RdM» 5, pp. 1-10.

[36] Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 2589 e 3175.

(teoria degli aggregati), VII (teoria dei limiti) e VIII (teoria delle serie) della prima edizione del *Formulario*.[37]

Lo scritto di Fano sui numeri algebrici si articola in tre parti: la prima è dedicata alle proprietà generali dei numeri interi algebrici, con cenni ai problemi di divisibilità e alle definizioni di corpo di numeri, basi e determinanti; la seconda è incentrata sui moduli, compresi quelli finiti; nell'ultima sezione è invece sviluppata la teoria degli ideali secondo R. Dedekind in un corpo di numeri, con l'introduzione delle nozioni di ideali primi, norma di un ideale e classi di ideali in un dato corpo. Questo contributo scaturisce dalle lezioni di H. Weber, da lui seguite durante la permanenza a Gottinga,[38] ma anche dallo studio dei lavori di Klein, Kronecker, Kummer, Dirichlet e Dedekind. Con l'unica eccezione di alcuni contributi di Klein, questi testi non figurano all'interno della raccolta personale di Fano. Il volume maggiormente citato, la quarta edizione delle *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1894) di Dirichlet curata da Dedekind, compare tuttavia tra i volumi della BSMT.

L'analisi della composizione delle raccolte personali di Fano rivela ulteriori fonti utilizzate per redigere il contributo per il *Formulario*. Tra i volumi della sua biblioteca vi sono le *Lezioni di algebra superiore* di Salmon nella traduzione francese di O. Chemin (Leipzig, Teubner, 1891) da cui Fano trae spunto per la parte sui determinanti. Nella miscellanea, oltre alla tesi di laurea di J. Petersen, compare uno dei suoi primi contributi di teoria dei numeri, *Über die Endlichkeit des Formensystems einer binären Grundform*, apparso sulle pagine dei «Mathematische Annalen» nel 1889. All'anno successivo risale il contributo di D. Hilbert sulle forme algebriche, la cui teoria è intimamente legata a quella dei numeri algebrici, pubblicato nella medesima rivista (estratto n. 563). Fano ha infine a disposizione l'articolo di R. Fricke intitolato *Zur Theorie der ternären quadratischen Formen in ganzen complexen Coefficienten* (1895). Rarissimi sono invece i contributi italiani di teoria dei numeri con cui Fano si sarebbe potuto confrontare all'epoca: nella sua miscellanea compaiono alcuni scritti di Vivanti, G. Frattini e F.A. Gagliuzzo, prevalentemente di carattere elementare.

Fano deve attendere gli anni Venti per ricevere i primi lavori di ricerca editi in Italia sugli argomenti da lui illustrati nel *Formulario*: è Bedarida, cultore di teoria dei numeri, che gli invia i suoi contributi sugli ideali primi in un corpo quadratico e sulla teoria degli ideali in un corpo algebrico finito. Questi si vanno a sommare agli scritti di Landau sulle classi di ideali che confluiscono nella miscellanea Fano tra il 1908 e il 1918.

Nonostante i rapporti con la Scuola di Peano vadano velocemente ad affievolirsi dopo la pubblicazione del contributo sui numeri algebrici, Fano rimane in contatto con alcuni peaniani anche negli anni successivi. È questo il caso di Ugo Cassina, suo studente presso l'ateneo torinese, laureatosi con lode nel 1919, che nel trentennio 1922-52 dona a Fano una serie di lavori su tematiche differenti, che spaziano dall'analisi della trattazione dei punti ciclici e del

[37] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 1845, 4560 e 2612 rispettivamente.

[38] Cfr. FANO 1895b, *cit.*, pp. 1-2: "La Parte IX del *Formulario* ha per iscopo di portare un primo contributo alla teoria importantissima dei numeri algebrici […]. Mi sono state di grande aiuto anche le lezioni sulla teoria dei numeri algebrici dettate dal Prof. H. Weber nell'Università di Gottinga durante il semestre invernale 1893-94 (alle quali ho avuta la fortuna di poter assistere)".

cerchio assoluto nel *Traité* di Poncelet ai fondamenti della geometria secondo Hilbert, dalla logica al latino *sine flexione*.[39]

7.5. Le fonti dei due saggi dell'EMW

Fano partecipa attivamente al progetto di Klein dell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen,* di cui possedeva tutti i volumi.[40] Invitato a contribuirvi già nel 1895, di ritorno dal soggiorno a Gottinga, egli sarà uno dei più attivi collaboratori e si recherà in Germania per partecipare alle riunioni relative all'EMW fino agli anni Trenta.[41] Frutto del suo coinvolgimento in questo progetto editoriale, sono due saggi contenenti preziose note storiche, entrambi pubblicati nel 1907. Il primo è dedicato alla dialettica tra geometria sintetica e analitica nel corso dell'Ottocento, il secondo affronta il tema dei gruppi continui.[42]

Molte delle fonti utilizzate per redigere questi contributi si trovano all'interno delle collezioni personali di Fano. La stesura dei due saggi richiede a Fano un lavoro bibliografico accurato, oltre che una profonda riflessione critica. I due contributi, frutto di diversi rimaneggiamenti, scaturiscono dall'esame, dalla lettura e dal confronto di una serie di testi che vanno dai trattati di inizio Ottocento ai più recenti articoli di ricerca avanzata. Per Fano è dunque importante avere "a portata di mano" una selezione della letteratura su cui basare la propria trattazione. Di conseguenza, si procura i volumi che ritiene essenziali e che, conseguentemente, consulta maggiormente: nella sua biblioteca personale custodisce una ventina di libri (18 testi sui 47 lavori citati) che, da soli, ricoprono il 56% dei riferimenti a volumi da lui inseriti nei due saggi dell'EMW.

Quattro lavori posseduti da Fano fanno da *trait-d'union* tra i due saggi, costituendo dei punti di riferimento imprescindibili. Il primo – con il maggior numero di citazioni (16 riferimenti) – è il *Traité des propriétes projectives des figures* di Poncelet (Parigi, Gauthier-Villars, 1865). Secondi per numero di riferimenti sono l'*Aperçu historique…* di Chasles (Parigi, Gauthier-Villars, 1875) e il *Beiträge zur Geometrie der Lage* di Staudt (Nürnberg, Korn, 1856-60), con 6 e 5 citazioni rispettivamente. Il quarto lavoro menzionato da Fano in entrambi i suoi contributi è un classico della tradizione italiana: si tratta delle *Lezioni di geometria proiettiva* di Enriques (Bologna, Zanichelli, 1904) che Fano cita e utilizza in più occasioni. Soltanto due sono i volumi ricordati da Fano all'interno di entrambi i saggi che non fanno parte della sua raccolta personale, ma che può consultare nella Biblioteca Speciale di Matematica torinese. Si tratta della *Theorie*

[39] Diversi lavori recano una dedica autografa di Cassina. Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 443 e 445: "Prof. Gino Fano, devoto omaggio dell'A. U. Cassina".

[40] All'interno della miscellanea compaiono vari opuscoli su questa impresa editoriale e scientifica e alcuni estratti della EMW (n. 1316, 1392, 2101, 2546).

[41] Sulla partecipazione di Fano al progetto di Klein, cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 6.10.1951: "Per la storia, nel 1895 o 96, quando è sorta la prima idea dell'Enciclopedia ancora molto indeterminata, Fr. Meyer aveva scritto a me per la geometria, proponendomi di redigere un contributo relativo alla (sostanzialmente) geometria algebrica (nome che forse allora non esisteva ancora) 'inclusive mehrdimensional Räume'. Io per il momento devo aver nicchiato, finché il piano si è meglio concretato, e ne è venuta la suddivisione". Cfr. ASUT, *Fasc. personale di G. Fano*: G. Fano a A. Pochettino, Torino 23.5.1923; A. Pochettino al Questore, Torino 23.5.1928; S. Pivano al Questore, Torino 21.5.1930.

[42] FANO 1907a e 1907b, *cit*.

der Transformationsgruppen di Lie e Engel (Leipzig, Teubner, 1888-93) e delle *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit Geometrischen und anderen Anwendungen* (Leipzig, Teubner, 1893), scaturite della collaborazione tra Lie e G. Scheffers.

Per la stesura del saggio *Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie…* Fano fa poi riferimento principalmente ai trattati pubblicati tra la seconda metà dell'Ottocento e l'inizio del Novecento in Germania; li conserva nella sua biblioteca personale e, almeno in parte, sono frutto dei suoi contatti con i matematici tedeschi: Klein in *primis*, con la sua opera *Anwendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1902), ma anche: H. Schubert, autore del *Kalkül der Abzahlenden Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1879); Reye, che aveva pubblicato il trattato in tre volumi *Die Geometrie der Lage* (Leipzig, Baumgärtner, 1886-92); E. Kötter, che – sei anni prima di Fano – aveva dato alle stampe il lavoro *Die Entwickelung der synthetischen Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1901); W. Fiedler, con il suo volume intitolato *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* (Leipzig, Teubner, 1885). Ancora, Fano utilizza diffusamente le *Vorlesungen über Geometrie* di Clebsch e F. Lindemann (Leipzig, Teubner, 1891), la *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker (Leipzig, Teubner, 1868) e la traduzione tedesca *Analytische Geometrie des Raumes* (Leipzig, Teubner, 1879) del trattato in inglese di Salmon. Altri due testi in lingua tedesca che costituiscono un punto di riferimento per Fano sono quelli pubblicati da Lie a fine Ottocento, dal titolo *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (Leipzig, Teubner, 1891) e *Geometrie der Berührungstransformationen* (Leipzig, Teubner, 1896). Sul versante dei trattati francesi, Fano possiede e utilizza in più punti del saggio dell'EMW la *Géométrie descriptive* di Monge (Paris, Bachelier, 1827) e la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard e G. Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1897). Fa infine riferimento ai due volumi delle *Opere* di Eugenio Beltrami (Milano, Hoepli, 1902-04) che fanno parte della sua raccolta personale.

Passando al saggio sui gruppi continui, Fano si basa sul volume di Klein in suo possesso, intitolato *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale...* (Leipzig, Teubner, 1882). Cita però anche altri sette testi di Klein che erano a sua disposizione in BSMT; alcuni dei questi – come le litografie delle lezioni sulle funzioni ipergeometriche dell'a.a. 1893-94 – erano stati portati a Torino da Fano stesso di ritorno da Göttingen. Ancora, egli fa riferimento al *Lehrbuch* di L. Heffter e C. Koehler (Leipzig, Teubner, 1905), ai *Selecta* di Möbius e al *Traité des substitutions…* di Jordan (Paris, Gauthier-Villars, 1870), custoditi in BSMT.

Pur servendosi anche dei testi della Biblioteca di Matematica, per quanto riguarda i volumi Fano attinge soprattutto alla sua raccolta personale che rappresenta uno strumento di lavoro imprescindibile all'atto della redazione dei due saggi per l'EMW. Minore è invece la percentuale di articoli citati in questi contributi che figurano all'interno della sua miscellanea. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che la maggior parte di questi lavori è pubblicata su riviste possedute dalla BSMT, che Fano è solito consultare, come i periodici tedeschi «Mathematische Annalen», «Archiv der Mathematik und Physik» – dove compaiono le sette note di F. Seydewitz citate da Fano – e «Jahresbericht der DMW». Lo stesso vale per il «Journal de l'École polytechnique», su cui C.-J. Brianchon aveva pubblicato alcuni scritti, e per gli «Annales scientifiques de l'ENS de Paris», che accolgono diversi contributi di Cartan sui gruppi infiniti di trasformazioni. Oltre a curare la traduzione in francese del saggio sui gruppi continui, Cartan invia a Fano alcuni suoi estratti.[43]

Nonostante rappresentino meno del 20% degli articoli citati nei due saggi, Fano possiede un certo numero opuscoli che utilizza all'atto della stesura dei contributi per l'EMW. Sul versante tedesco, fa riferimento a sei note di Schönflies del periodo 1904-07 e ad alcuni articoli di Engel (1900), Klein (1902) e Study (1905). Cita, inoltre, un lavoro inviatogli da G. Kohn[44] (1903) e l'articolo di Scott sull'intersezione delle curve piane, pubblicato sul «Bulletin of the AMS» nel 1898. Quattro sono infine i contributi della tradizione italiana menzionati da Fano nel saggio sullo sviluppo storico della geometria che fanno parte della sua miscellanea. Si tratta della nota lincea di D'Ovidio su *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (1877), dell'articolo di C. Segre *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* (1891) e del famoso contributo "a quattro mani" di Castelnuovo e Enriques per i «Mathematische Annalen», dal titolo *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (1897), cui Fano affianca la monografia storica di A. Ramorino dedicata agli elementi immaginari nella geometria (1898).

Pur non facendo tutti parte della miscellanea Fano, gli innumerevoli riferimenti agli scritti di Segre, Castelnuovo, Enriques e Severi che compaiono nel primo saggio di Fano per l'EMW testimoniano la sua volontà di promuovere i risultati della Scuola italiana di geometria algebrica. Sono, questi, lavori che Fano conosce bene e che ha a disposizione su rivista.

Per quanto riguarda la teoria dei gruppi, Schönflies[45] (35 estratti) e Klein (19) sono gli autori più citati da Fano nelle pagine dell'EMW e, al contempo, quelli maggiormente rappresentati all'interno della sua raccolta di opuscoli. L'unico matematico con nove riferimenti nel saggio *Kontinuierliche geometrische Gruppen* che non compare tra gli autori del patrimonio Fano è l'americano H.B. Newson. Anche la miscellanea quindi, seppur in minor misura rispetto alla biblioteca personale, si configura come un prezioso strumento di lavoro nelle mani di Fano da cui trae diverse informazioni, buona parte delle quali impreziosiscono le note storiche dei due saggi dell'EMW.

7.6. Il corso di Geometria superiore del 1924-25 alla luce del patrimonio materiale

Un discorso analogo vale per le fonti che Fano utilizza per progettare, articolare e redigere il corso di Geometria superiore, a lui affidato l'anno successivo alla morte di Segre. Al momento di strutturare le lezioni, Fano non può prescindere dal confronto con l'eredità lasciata dal Maestro, cristallizzata nei suoi *Quaderni*, ma deve anche delineare i confini della trattazione. A tal proposito, scrive che si tratta di un

[43] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 1894, 1897, 1900, 1901, 1903, con dedica autografa.

[44] Fano possiede 15 articoli di Kohn, tre dei quali con dedica autografa. Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 3058, 3068, 3069, con l'annotazione "Mit besten Grüßen".

[45] Diverse note di matematica sono inviate a Fano da Schönflies, accompagnate da una dedica. Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti n. 3561 ("Mit freundlichen Grüßen") e n. 3577 ("Mit besten dank für den freund brief").

campo vastissimo: in un corso annuale soltanto un campo molto ristretto; corsi monografici, spesso (e così quest'anno) solo una introduzione a un determinato argomento, preparazione e avviamento allo studio dei lavori originali sull'argomento stesso (36 corsi di Segre).[46]

L'argomento individuato da Fano per l'a.a. 1924-25 – lo studio delle serie lineari sulle curve e sulle superfici algebriche – è un tema classico della tradizione geometrica italiana. Conseguentemente, i lavori dei geometri italiani rappresentano una buona parte delle fonti di Fano. Ancora una volta, la maggioranza dei volumi compare all'interno della sua biblioteca personale. È questo il caso dell'*Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* di Bertini, che Fano possiede nella seconda edizione (Pisa, Spoerri, 1923^2). Analogamente, egli si serve di altri due trattati classici che fanno parte della sua collezione personale: le *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques e Chisini e il *Trattato di geometria algebrica* di Severi, entrambi editi da Zanichelli. La maggior parte degli articoli che Fano cita durante le sue lezioni si trovano su riviste che fanno parte del patrimonio della BSMT. Tra gli opuscoli della sua miscellanea, tuttavia, vi sono due contributi spesso menzionati durante il corso del 1924-25.[47] Il primo di essi è il lavoro di Segre del 1891, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, cui Fano fa riferimento sin dall'esordio delle lezioni, in questi termini:

È però da avvertire, come bene rilevò il Segre […], che questo modo un po' semplicista di concepire le trasformazioni geometriche può fornire serie di esercitazioni a chi studia, ma non fa progredire in modo essenziale la scienza. (Tic-tac geometria)[48]

La breve nota lincea di Castelnuovo del 1893, dal titolo *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, rappresenta il secondo estratto diffusamente utilizzato e citato da Fano. Sull'esempio di Segre, Fano inserisce un'ampia premessa storica con una duplice motivazione. A livello didattico, è convinto che

Presentare agli allievi un determinato argomento nella forma migliore, e più corretta, e logicamente ordinata e sistemata che ha finora raggiunto, è utile; ma è certo meno istruttivo che far vedere come tale complesso di questioni è sorto, si è sviluppato, come i problemi che si sono presentati sono stati risoluti, quali i procedimenti, spesso variati, che hanno cooperato a far assumere all'argomento una sistemazione, almeno momentaneamente, definitiva.[49]

Dal punto di vista storico-culturale, invece, è necessario che gli studenti abbiano piena consapevolezza dello sviluppo della geometria, in Italia e all'estero, dalla seconda metà dell'Ottocento. Infatti

La geometria delle curve algebriche non è sorta in Italia; anzi, essa ebbe origini e sviluppo, fino a un certo punto, principalmente, quasi esclusivamente in Germania; ma i geometri italiani hanno saputo impossessarsene, sviluppandola ulteriormente, e hanno avuta parte importantissima

---

[46] BSMT, *FFa*, Quad. Geo. Sup. 1, p. 1.

[47] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 974 e 2648.

[48] BSMT, *FFa*, Quad. Geo. Sup. 1, p. 59.

[49] *Ivi*, pp. 2-3.

> nell'affrontare e costruire l'analoga "geometria sulle superficie algebriche". E dobbiamo sapere particolarmente quello che si è fatto in Italia, e la sua importanza.[50]

Per comprendere in profondità i contenuti del corso, occorre conoscerne le radici culturali. Perciò Fano fa riferimento a una serie di trattati dell'Ottocento che hanno segnato le tappe fondamentali della geometria e che possiede all'interno della sua biblioteca: dai volumi già citati all'interno dei due saggi dell'EMW – quali la *Géométrie descriptive* di Monge, il *Traité* di Poncelet e i *Beiträge zur Geometrie der Lage* di Staudt – a quello di Salmon sulle coniche, nell'edizione tradotta e ampliata da Fiedler, intitolata *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* (Leipzig, Teubner, 1887-88). All'interno di questa prospettiva storica non può mancare il richiamo all'*Aperçu historique* di Chasles, lettura di riferimento costante per Fano. Se per gli aspetti più tecnici della trattazione Fano si basa sugli scritti dei geometri italiani, per i cenni storici fa affidamento ai classici stranieri. I principali punti di riferimento a livello didattico-epistemologico sono però, ancora una volta, Klein e Segre di cui Fano richiama la visione unitaria della matematica e i collegamenti con gli altri rami del sapere:

> Altra avvertenza: per quanto il nostro ordinamento didattico contempli corsi di Analisi Superiore, Geometria Superiore, Meccanica Superiore, Fisica matematica, è assolutamente impossibile fare una distinzione netta per le varie branche di Matematica [...]. Quasi ogni corso monografico di una di queste discipline avrà contatti e connessioni con qualcuna delle altre. Per noi si tratta principalmente delle connessioni fra Geometria e Analisi.[51]

Appare quindi in un certo senso naturale che Fano guardi ai *Quaderni* di Segre e alle lezioni di Klein per la costruzione del suo corso. Accanto al Programma di Erlangen, le *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert* sono l'opera di Klein maggiormente citata. Il lavoro è dato alle stampe nel 1926, l'anno successivo rispetto al corso di Fano, ma probabilmente egli ha a disposizione le lezioni di Klein del periodo 1915-19 da cui l'opera scaturisce. A distanza di una decina di anni dalle lezioni di Geometria superiore, Fano presenterà al Seminario Matematico di Torino una conferenza dedicata proprio a questo lavoro "interessante perché mette in evidenza [...] le grandi linee dello sviluppo delle matematiche e le principali connessioni fra i suoi rami".[52]

7.7. Le geometrie non euclidee, tra biblioteca e miscellanea

Dall'analisi del patrimonio materiale di Fano, emerge un nucleo di lavori dedicati alle geometrie non euclidee e non archimedee che trovano la loro ragion d'essere non soltanto nell'interesse di Fano per questo tema, ma soprattutto nella sua azione di diffusione di tale teoria in Italia. Pur non fornendo contributi innovativi dal punto di vista della ricerca, Fano affronta in più occasioni e a diversi livelli il tema delle geometrie non euclidee.

Già nell'a.a. 1897-98 il giovane Fano, allora assistente di Castelnuovo a Roma, sceglie di dedicare il suo corso libero alle geometrie non euclidee, con la speranza che le sue lezioni litografate "possano servire ai giovani di utile introduzione in un ramo così importante della

---

[50] *Ivi*, p. 3.

[51] *Ibidem*.

[52] G. FANO 1934, *Scorrendo il volume di F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert,* «Conf. fis. mat. Torino» 4, p. 151. La conferenza di Fano ha luogo il 27.2.1934.

geometria moderna".[53] Dieci anni più tardi, pubblica sulle pagine di «Scientia» uno scritto sull'argomento, intervenendo anche sul versante filosofico a proposito della controversia tra realismo e nominalismo in geometria.[54] Nel 1926 è poi invitato alle celebrazioni organizzate a Kazan in onore di Lobačevskij per i cento anni dalla nascita delle geometrie non euclidee; in quest'occasione, Fano presenta una conferenza durante la quale fornisce un'interpretazione proiettiva dei diversi cicli (cerchi, orocicli e ipercicli) che compaiono nello studio di queste geometrie.[55] Nel 1935, dopo quasi tre anni di lavoro, dà alle stampe una fortunata monografia dal titolo *Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività)*, che viene pubblicata all'interno della collana del CNR.[56] Una brillante sintesi di questo volume è costituita dal saggio sulle geometrie non euclidee e non archimedee, apparso a distanza di tre anni all'interno dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* di Gigli, Vivanti e Berzolari.[57] L'interesse di Fano per queste tematiche è anche testimoniato da una lunga lettera, articolata in sei punti, che Beke gli invia nel giugno del 1937, probabilmente poco dopo aver ricevuto in dono la monografia della collana del CNR.[58]

In tutti i suoi lavori, Fano predilige seguire lo sviluppo storico dell'argomento, in quanto necessario per comprendere il significato profondo di queste teorie:

> Una certa conoscenza anche della preistoria della geometria non euclidea è indispensabile a comprendere come, perché questa geometria sia sorta: mentre […] la trattazione metrico-proiettiva, ultima in ordine cronologico e concettualmente la più semplice e perfetta, non risponde in modo esauriente a questa necessità.[59]

Punto di partenza delle geometrie non euclidee è il V postulato di Euclide, equivalente all'unicità della retta parallela a un'altra, passante per un punto dato. Secondo Fano, il concetto di rette parallele è piuttosto complesso poiché racchiude "elementi di natura qualitativa e quantitativa, provenienti rispettivamente da sensazioni ottiche (rette che non si incontrano) e

---

[53] G. FANO 1897b, *Lezioni di geometria non euclidea*, Roma, Cippitelli, p. 1.

[54] Cfr. FANO 1908a, *cit.*, pp. 278-280.

[55] Cfr. G. FANO 1927, *Les cycles de la géométrie non euclidienne au point de vue projectif*, in *In memoriam N.I. Lobatschevskii: Collection des mémoires présentèes par les savants de divers pays à la Société physico-mathématique de Kazan à l'occasion de la célèbration du centenaire de la découverte de la géométrie non-Euclidienne par N.I. Lobatcheffsky (12/24 Février 1926)*, Kazan, Glavnauka, pp. 17-24. Fano dona una copia di questo suo intervento a Terracini. Cfr. BSMT, *FTe*, Miscellanea: estratto n. 1668.

[56] G. FANO 1935b, *Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività)*, Bologna, Zanichelli. Sulle vicende editoriali, cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: G. Fano a E. Bompiani, Torino 21.12.1932; E. Bompiani a G. Fano, Roma 27.12.1932; G. Fano a E. Bompiani, Torino 5.1.1933; E. Bompiani a G. Fano, Roma 11.3.1933; G. Fano a E. Bompiani, Torino 13.3.1933; E. Bompiani a G. Fano, Roma 15.3.1933; G. Fano a E. Bompiani, Torino 26.3.1934; E. Bompiani a G. Fano, Roma 5.4.1934; G. Fano a E. Bompiani, Colognola ai Colli 20.4.1934; E. Bompiani a G. Fano, Roma 25.4.1934; G. Fano a E. Bompiani, Colognola ai Colli 14.9.1934; E. Bompiani a G. Fano, Roma 14.11.1934; G. Fano a E. Bompiani, Torino 2.12.1934 e 28.1.1935; E. Bompiani a G. Fano, Roma 1.2.1935.

[57] G. FANO 1938c, *Geometrie non euclidee e non archimedee*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Hoepli, Milano, pp. 435-511.

[58] BSMT, *FFa*, lettere. 25: E. Beke a G. Fano, Budapest 19.6.1937. La lettera, infatti, si apre con queste parole: "Lieber Herr Collega! Ich danke sehr für das mir gesandte Buch, welche ich mit gronem Vergnügen durchlas. Bei dieser Gelegenheit möchte ich Ihnen einiges aus den Arbeiten mitteiler, welche ich gleider in ungarische Grache, über diese Angelegenheiten publicier habe".

[59] FANO 1935b, *cit.*, p. 2.

tattili (rette equidistanti)".[60] Fano individua quattro "vie" attraverso cui si perviene alla geometria non euclidea. La prima è quella elementare, di cui i massimi esponenti sono Bolyai e Lobačevskij. Si ha poi la via differenziale, tracciata da Riemann estendendo a varietà a tre e più dimensioni la geometria differenziale delle superfici e, in particolare, il concetto di superficie a curvatura costante. La terza via, quella gruppale, scaturisce da alcune considerazioni sui movimenti dei corpi rigidi. Infine, Klein e Cayley hanno aperto la via proiettiva. Come in geometria euclidea le proprietà metriche delle figure scaturiscono da relazioni proiettive tra tali figure e il cerchio immaginario all'infinito, dal punto di vista proiettivo le geometrie non euclidee sorgono dalla sostituzione del cerchio assoluto con un'opportuna quadrica a determinante non nullo.

Non bisogna inoltre dimenticare la brillante azione condotta da Fano per comprendere e diffondere i risultati di Beltrami. Fano riconosce la loro importanza fin dalla sua traduzione del Programma di Erlangen di Klein.[61] A Beltrami egli attribuisce un ruolo fondamentale nell'interpretazione della geometria iperbolica sulle superfici a curvatura costante negativa. Scrive infatti:

> A diffondere la conoscenza della nuova geometria e a metterne in luce l'importanza, contribuì […] una geniale applicazione immaginata da E. Beltrami. […] Beltrami ha dimostrato che la geometria di queste ultime superficie [=le pseudosfere] coincide (limitatamente a regioni opportune) colla geometria piana di Lobačevskij e Bolyai; cioè tutte le proprietà che in quest'ultima geometria si dimostrano per figure di punti e rette sussistono effettivamente, nello spazio euclideo, per figure di punti e linee geodetiche sopra una pseudosfera o una sua deformata.[62]

Fano non solo è conscio dell'importanza matematica della pseudosfera – modello euclideo di geometria non euclidea – introdotta da Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1868), ma ne coglie anche le profonde implicazioni filosofiche: dalla costruzione di tale modello discende il fatto che la geometria iperbolica gode dello stesso status logico-matematico della geometria euclidea classica. Come sottolineato da Fano, a Beltrami spetta inoltre il merito di aver gettato le basi per il collegamento tra l'indirizzo elementare e quello differenziale delle geometrie non euclidee.[63]

Pur prediligendo l'indirizzo gruppale, Fano è convinto che

[60] FANO 1938c, *cit.*, p. 441. Cfr. FANO 1935b, *cit.*, p. 6.

[61] F. KLEIN / G. FANO (trad.) 1890, *cit.*, p. 342. Fano ricorda i contributi di Beltrami alle geometrie non euclidee anche durante la sua conferenza del febbraio 1934. Cfr. FANO 1934, *cit.*, p. 168.

[62] FANO 1908a, *cit.*, pp. 267-268. Cfr. FANO 1935b, *cit.*, p. 99: "Doveva quindi venire il momento in cui qualcuno cogliesse il legame intimo fra la geometria di una superficie a curvatura costante negativa e la geometria piana non euclidea; e fu merito di Beltrami aver mostrato che la geometria sulle superficie a curvatura costante negativa coincide (limitatamente a regioni opportune) colla geometria piana non euclidea di Lobachevsky-Bolyai."; FANO 1938c, *cit.*, p. 468: "E. Beltrami si chiede se e fino a che punto si possa, anche sopra una superficie non piana, costruire una geometria analoga alla geometria piana euclidea, sostituendo alle linee rette altre linee opportunamente scelte".

[63] Cfr. FANO 1935b, *cit.*, p. 93; FANO 1938c, *cit.*, p. 468: "una geniale osservazione di E. Beltrami vivamente la avvalorava da un nuovo punto di vista, e ne preparava in pari tempo la connessione coll'indirizzo differenziale, abbozzato da B. Riemann fino dal 1854 […]".

> la conoscenza completa delle geometrie non euclidee può risultare soltanto dalla sintesi dei vari modi nei quali esse si sono presentate nella scienza e dei vari indirizzi secondo cui sono state oggetto di indagine.[64]

Per pervenire a una visione organica e unitaria, Fano ha bisogno di consultare diverse fonti, non tutte a disposizione in BSMT come il trattato di R. Bonola, *La geometria non euclidea* (Bologna, Zanichelli, 1906). Klein costituisce il vero punto di riferimento per Fano anche in questo ambito: tra i volumi della sua biblioteca personale, compaiono sia le litografie del corso di Klein sulle geometrie non euclidee (1892) sia l'edizione postuma a stampa (1928).[65] Da quest'ultima Fano trae anche alcune illustrazioni per la sua monografia del 1935.[66] Fano possiede anche i tre tomi delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* curate da Enriques: all'interno del primo volume, *Critica dei principi*, compare il contributo di Bonola intitolato *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee*, da cui Fano trae spesso spunto.

Tra gli opuscoli della miscellanea Fano figura il lavoro di Study, *Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie* (1907), con dedica autografa dell'autore.[67] Del medesimo autore Fano possiede le lezioni sulle geometrie non euclidee e sulla geometria della retta, apparse sullo «Jahresbericht der DMV» nel 1906. Ancora, ha a disposizione il *Supplementary report on non-euclidean geometry* pubblicato da G. Halsted nel 1901 sull'«American Mathematical Monthly». Vi sono poi alcuni contributi di ricerca avanzata come l'articolo di F. Hoffmann, intitolato *Die axonometrischen Sätze von Kruppa und Pohlke's Satz im nichteuklidischen Raume* (1926), lo scritto di O. Freidank, *Variationsprobleme in der nichteuklidischen Geometrie* (1929), e la nota di K. Strubecker, *Über Flächen mit zweigliedriger nichteuklidischer Bewegungsgruppe* (1936).

Fano possiede anche alcuni estratti sulle geometrie non archimedee che utilizza per redigere il saggio del 1938. Si va dai contributi di taglio storico-didattico, quali il *Saggio di geometria non-archimedea* di Pilo Predella (1911) e la nota lincea di Veronese intitolata *La geometria non Archimedea. Una questione di priorità* (1905), alla ricerca di nuove geometrie, operazione portata avanti da Schönflies nell'articolo *Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht-archimedischer) Massbestimmung* (1906).

Le raccolte librarie di Fano riflettono dunque la sua attenzione verso l'ambito delle geometrie non euclidee. Tale sensibilità è, da un lato, condivisa dai membri della Scuola italiana;[68] dall'altro è legata al ruolo che Fano attribuisce alla formazione dei docenti. Le

---

[64] FANO 1938c, *cit.*, p. 451. Cfr. FANO 1935b, *cit.*, pp. 25-26.

[65] F. KLEIN/ W. ROSEMANN (ed.) 1928, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlino, Springer.

[66] Cfr. FANO 1935b, *cit.* Si tratta delle figure 52a, 52b, 53a, 53b, 54a, 54b, 61, 66, 67 e 68. A tal proposito, cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: G. Fano a E. Bompiani, Torino 13.3.1933: "come ricorderai, era in programma di prendere alcune figure (e saranno 7 su 68) da un libro di Klein; io, richiesto da Zanichelli in ottobre u.s., gli avevo dati tutti gli elementi per accordarsi in proposito con Springer; ma dopo non ne ho più saputo nulla. Per queste figure mi occorrerebbe quindi sentire direttamente da Zanichelli se si è accordato con Springer".

[67] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratto n. 3872: "Herrn Collegen G. Fano mit freundlichen Grüßen, E. Study".

[68] Nell'a.a. 1902-03 C. Segre decide infatti di dedicare alle geometrie non euclidee le sue lezioni alla Scuola di Magistero, che svolgeva in parallelo al corso di Geometria Superiore presso l'Università di Torino. Cfr. BSMT, *FSe*, Quad. 16, disponibile al link http://www.corradosegre.unito.it/Quaderni/Quad16/1_16.php. Anche Enriques e Castelnuovo attribuiscono un certo rilievo a queste geometrie all'interno della formazione dei futuri docenti. Il primo dà alle stampe un sunto delle sue lezioni alla Scuola di Magistero nel volume *Conferenze sulla geometria*

geometrie non euclidee rappresentano soltanto uno degli aspetti del coinvolgimento di Fano nelle questioni metodologico-fondazionali. Indicativa di questo tipo di interesse è la presenza nella sua miscellanea di oltre 300 estratti (Tab. 7.2) di riviste di didattica della matematica (come il «Giornale di Matematiche» di Battaglini, con 120 opuscoli, e il «Periodico di Matematiche», con 45 pezzi).

7.8. Un tassello del patrimonio della Scuola italiana

Dal punto di vista della ricerca, Fano si colloca all'interno della *golden age* della geometria algebrica italiana con i suoi brillanti contributi allo studio delle varietà tridimensionali e le sue incursioni in molti campi centrali per il progresso della disciplina.

Accanto all'esistenza di una cultura condivisa tra i geometri italiani, lo studio di questo patrimonio restituisce alcuni elementi di interesse relativi al tardo periodo dell'attività scientifica di Fano, che coincide con il declino della Scuola italiana di geometria algebrica. In primo luogo, emergono i primi segnali di allontanamento dalla tradizione tedesca a distanza di un decennio dalla morte di Klein. L'analisi statistica ha infatti mostrato che le pubblicazioni delle Scuole di geometria belga e americana rappresentano, rispettivamente, il 18% e il 9% del patrimonio complessivo. In particolare, si osserva che nel biennio 1937-38 la percentuale di estratti firmati da matematici statunitensi diventa pari a quella degli articoli tedeschi (Fig. 7.11) e, a partire dal 1939, il numero di estratti provenienti dal Belgio supera quello di qualsiasi altro paese (Italia esclusa).

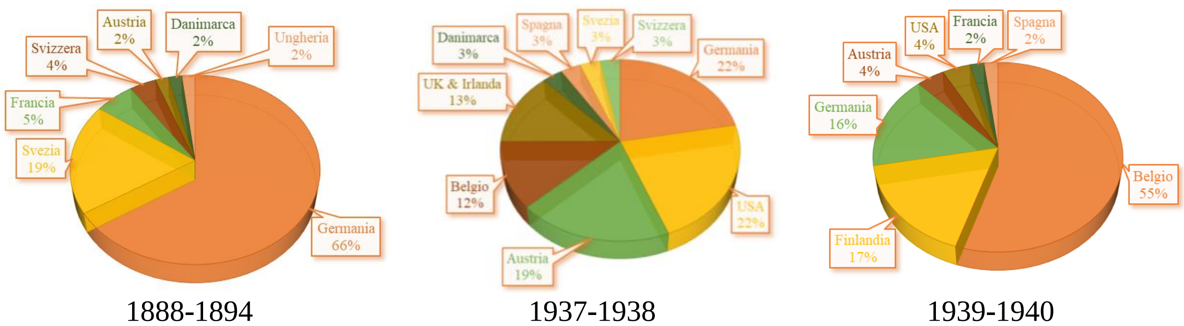


Fig. 7.11. Variazione della nazionalità degli autori della miscellanea Fano.

In tal senso, significativo è il fatto che l'autore maggiormente rappresentato nell'intera miscellanea sia Godeaux, di frequente citato da Fano nei suoi lavori sulle threefolds. Tra gli autori americani, invece, il nome che compare più frequentemente è quello di Snyder (con 39 opuscoli degli anni 1897-1941), seguito da Lefschetz (9 estratti del periodo 1921-1938) e Emch (9 lavori, apparsi tra il 1912 e il 1937).[69]

Restringendo l'attenzione ai soli opuscoli di matematica, emerge poi che oltre metà della miscellanea di Fano è costituita da lavori di geometria (intendendo con questo termine tutti i lavori incentrati su temi di geometria algebrica, geometria proiettivo-differenziale, geometria descrittiva ed elementare), tratto comune ai membri Scuola italiana. Accanto al 25% di estratti

non-euclidea (1918); il secondo dedica a tale argomento i suoi corsi di Geometria Superiore all'Università di Roma negli a.a. 1910-11 e 1919-20.

[69] Tre estratti recano la dedica autografa di Emch. Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea: estratti nn. 2769, 2773, 2775.

di analisi, il numero di opuscoli di fisica matematica (11,8%), teoria dei numeri, algebra e teoria dei gruppi (6,5%) rendono la raccolta di Fano tutto sommato di avanguardia. L'unica eccezione è rappresentata dall'esiguo numero di estratti di topologia (1,2%), tra i quali spiccano i lavori di A. Errera, altro matematico belga ben rappresentato nella miscellanea (con 39 estratti), Cartan (12) e De Rham (Fig. 7.12).

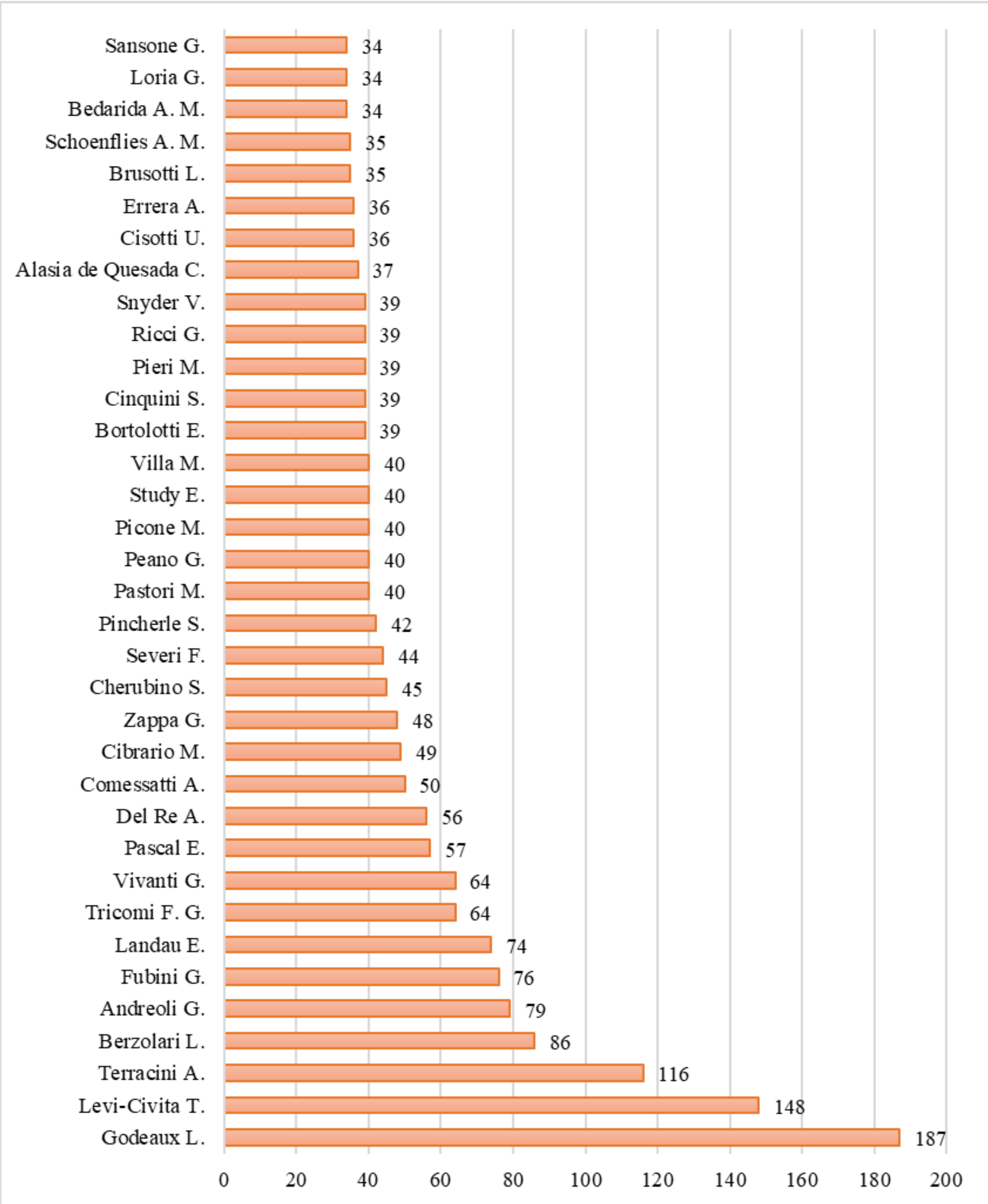


Fig. 7.12. Autori maggiormente rappresentati, con più di 30 estratti.

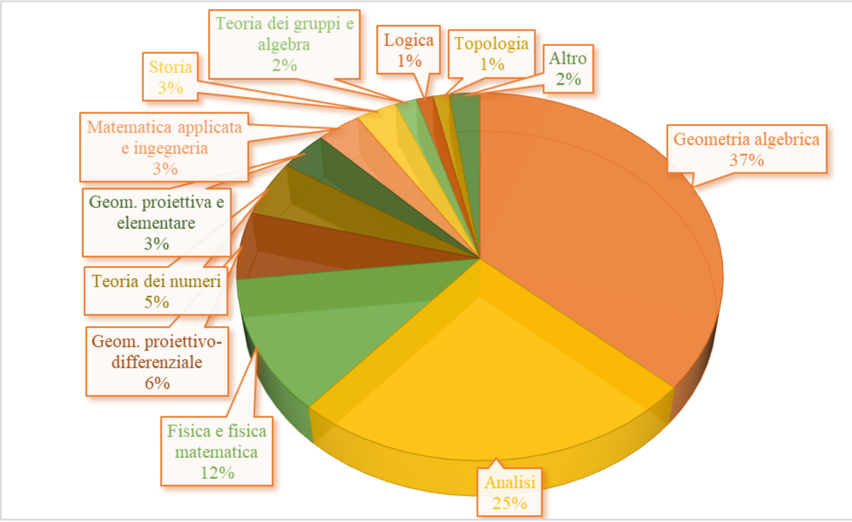


Fig. 7.13. Distribuzione disciplinare degli opuscoli matematici.

Il complicato rapporto di Fano – e dei geometri italiani in generale – con questa disciplina è sicuramente un elemento da tenere in considerazione nel valutare l'involuzione della Scuola dagli anni Venti in poi. A differenza della miscellanea – tutto sommato aggiornata – la biblioteca di Fano risulta per contro abbastanza antiquata ed esclusivamente eurocentrica, con il 54% dei volumi provenienti da centri editoriali italiani, il 29% da editori tedeschi e il 9% dalla Francia (Fig. 7.14).

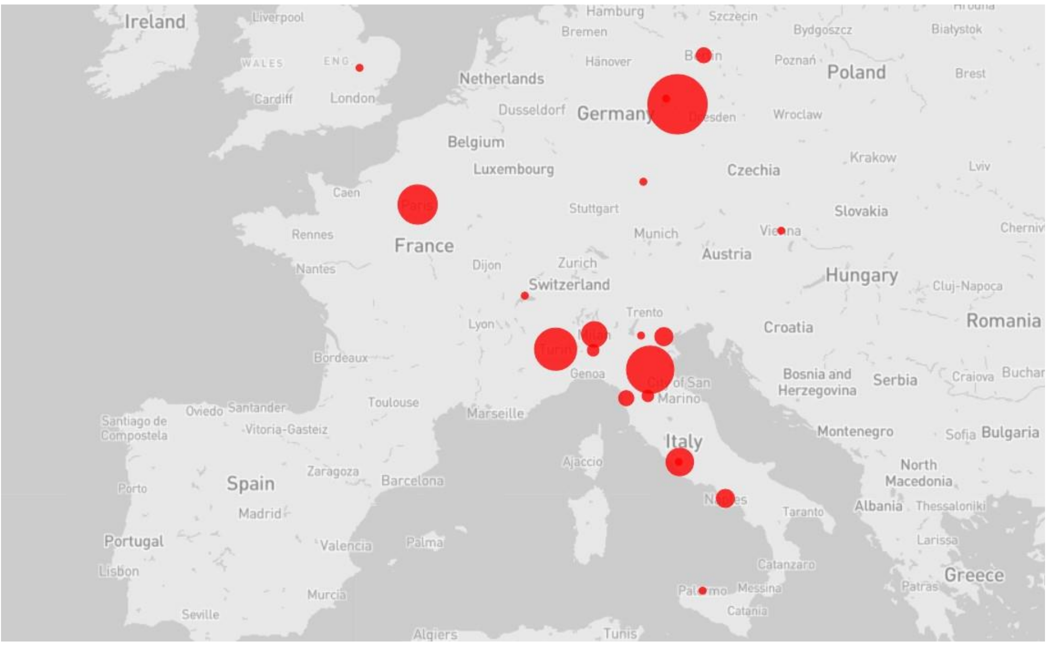


Fig. 7.14. Cartografia della biblioteca Fano.

Tra gli editori, Teubner occupa il primo posto con 26 volumi, seguito da Zanichelli con 19 e Gauthier-Villars con 11. Un elemento interessante è rappresentato dal fatto che la geografia dei volumi della biblioteca Fano riflette il passaggio della *Fuhrende Stellung* in campo geometrico dalla Scuola tedesca a quella italiana: fino al 1900 i volumi firmati da matematici tedeschi superano quelli degli italiani; questi ultimi occupano poi, dal 1901 al 1952, tra il 50% e l'87% della biblioteca (Fig. 7.15).

In conclusione, il patrimonio librario di Fano permette di evidenziare ulteriori tratti delle radici culturali della tradizione geometrica italiana e suggerisce alcuni spunti di riflessione sul declino della Scuola. A livello individuale, esso restituisce alcuni aspetti meno noti della attività scientifica di Fano, nonché la formulazione di nuove domande di ricerca, sviluppate nei capitoli 3 e 4 di questa tesi.

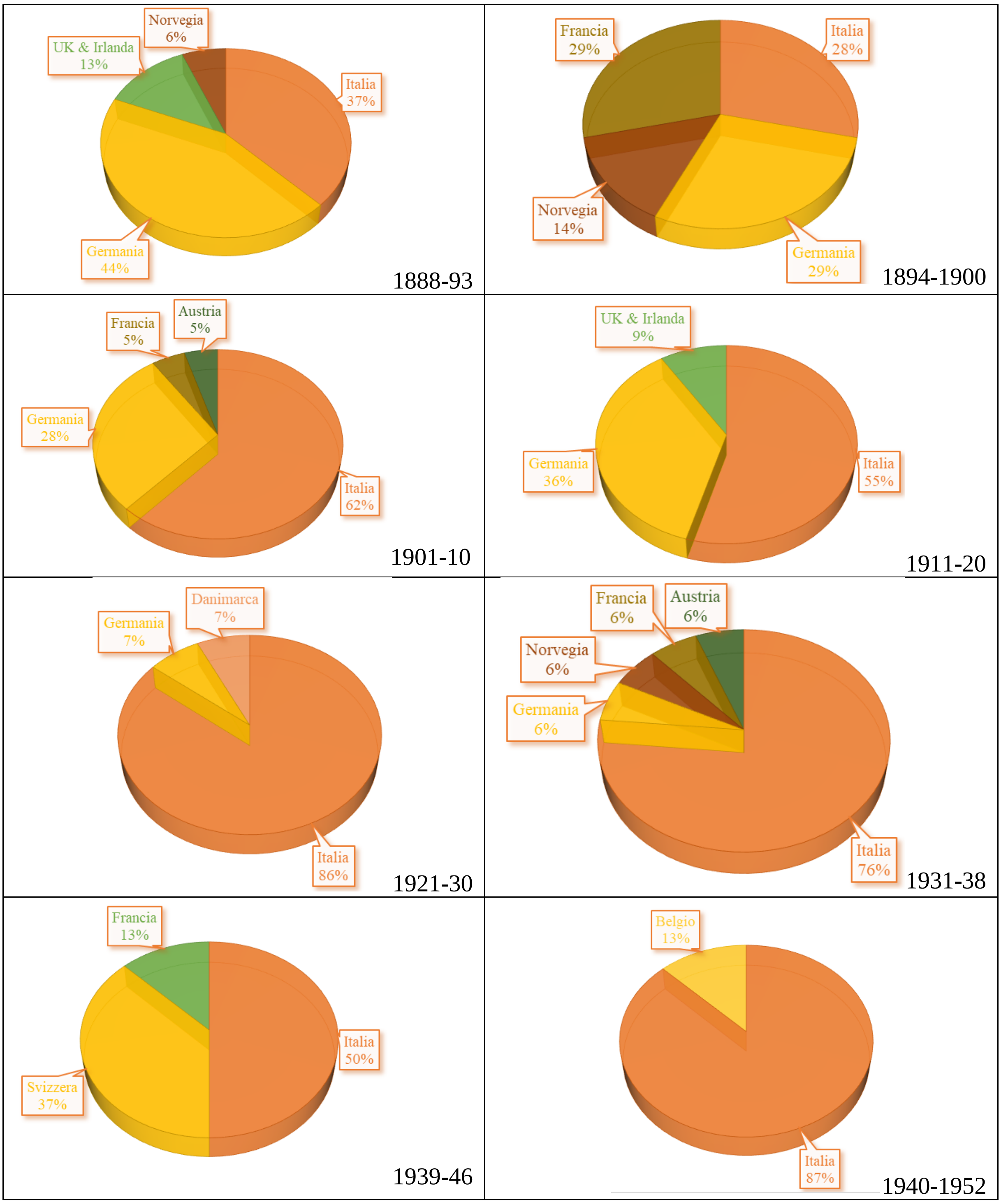


Fig. 7.15. Variazione della nazionalità degli autori della biblioteca Fano.

8. *Lo* Schedario *di Corrado Segre*

Un tassello fondamentale nell'analisi del vasto patrimonio materiale della Scuola italiana di geometria algebrica è costituito dalle collezioni del suo leader, Corrado Segre,[1] che possono essere così suddivise.

- I manoscritti e i documenti scientifici e personali (BSMT), acquisiti dalla Biblioteca Speciale di Matematica di Torino in più tranches, tra il 1926 e il 2015.[2] Tra questi, le tavole di Geometria proiettiva e descrittiva, che Segre aveva realizzato all'epoca dei suoi studi superiori presso l'Istituto tecnico "G. Sommeiller" di Torino, e una ricca raccolta di corrispondenze e necrologi, già custoditi ad Ancona dai discendenti di Segre. Una catalogazione preliminare di questi materiali, suddivisi in dieci serie, è stata pubblicata nel 2016 da L. Giacardi, E. Luciano, C. Pizzarelli e C.S. Roero.[3]
  Il sub-fondo Segre-Fuà è stato completamente schedato nel 2017 da Pizzarelli (https://www.corradosegre.unito.it/doc/archiviosegre.pdf).
- I quaranta *Quaderni delle Lezioni* (BSMT), donati dalla vedova Olga Michelli nel 1926, che contengono le tracce manoscritte dei corsi di Geometria superiore di C. Segre e delle sue lezioni per la Scuola di Magistero.[4] Essi sono disponibili in formato elettronico all'interno del sito web *Corrado Segre e la Scuola italiana di geometria algebrica* a cura di L. Giacardi (https://www.corradosegre.unito.it/quaderni.php).
- La biblioteca personale (BIMF), composta da 406 volumi, da raccolte rilegate di memorie di una trentina di autori e da 12 collezioni parziali o complete di riviste, tra cui spiccano i primi 77 volumi dei «Mathematische Annalen» e i primi 47 dei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» con i relativi Supplementi. Tale collezione fu acquistata nel 1924 da Guido Toja, presidente dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni. Divenuto docente di Matematica attuariale presso la Facoltà di Economia e Commercio di Firenze, nel suo testamento Toja lasciò la sua intera biblioteca personale, compresi i volumi appartenuti a

[1] Sulla biografia scientifica di C. Segre cfr. M. MENGHINI 1986, *Sul ruolo di C. Segre nello sviluppo della geometria algebrica italiana*, «Rivista di Storia della Scienza» 3, pp. 303-322; GIACARDI 2001, *cit.*; L. GIACARDI 2003, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, «Boll. UMI» (8) 6-A, pp. 141-164; BRIGAGLIA 2013, *cit*. Nei paragrafi successivi si ripercorrono solo gli aspetti essenziali della sua traiettoria scientifico-professionale con particolare attenzione a quegli elementi che assumono ulteriore significato alla luce dello Schedario.

[2] A tal proposito cfr. P. GARIO 1989, *Su alcune carte di Corrado Segre recentemente rinvenute*, «Atti Acc. Sci. Torino» 123, pp. 187-198; L. GIACARDI – T. VARETTO 1996, *Il Fondo Corrado Segre della Biblioteca G. Peano di Torino*, «QSUT» 1, pp. 337-370. A quanto qui contenuto si aggiunge che nel 1949 Elena Fuà Segre offre alla BSMT, allora diretta da A. Terracini, le fotografie dei matematici che erano nello studio del padre. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: E. Fuà Segre a A. Terracini, Ancona 3.3.1949.

[3] L. GIACARDI – E. LUCIANO – C. PIZZARELLI – C.S. ROERO 2016, *Corrado Segre's Archives at the University of Turin*, in G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry*, Basel, Birkhäuser, pp. 717-730.

[4] Cfr. L. GIACARDI 2004, *Il magistero di Corrado Segre a Torino. I quaderni manoscritti delle lezioni universitarie (1888-1924)*, in B. CASTRILLO, Á. MANUEL (eds.) *Manuales y textos de enseñanza en la universidad liberal: VII congreso internacional sobre la historia de las universidades hispánicas*, Madrid, Biblioteca del Instituto Antonio de Nebrija de estudios sobre la universidad, pp. 449-476; GIACARDI 2011, *cit*., pp. 106-111.

Segre, all'Istituto Matematico "U. Dini" di Firenze, dov'è tuttora conservata.[5] Il regesto della biblioteca è pubblicato in (LUCIANO – ROERO 2016, *cit*., pp. 211-230).

- La miscellanea (BSMT), che consta di oltre 6.200 estratti e opuscoli in lingua italiana, francese, inglese, tedesca e spagnola. Essa pervenne in BSMT nel maggio 1924, subito dopo la scomparsa di C. Segre. Schedata tra il novembre del 1924 e il maggio del 1926 da Ada Terraciano, per volontà dell'allora direttore della Biblioteca Speciale di Matematica di Torino Gino Fano,[6] la miscellanea Segre pare essere andata totalmente distrutta nel bombardamento alleato dell'8 dicembre 1942 che colpì la sala lettura della BSMT. Nessuno degli opuscoli di questa collezione è stato ad oggi ritrovato.

Per contro rimane uno Schedario tematico, compilato da Segre fino a pochi giorni prima della sua scomparsa. Il regesto completo dei riferimenti bibliografici dello Schedario è pubblicato al link https://www.corradosegre.unito.it/doc/Segre_LoSchedariocompleto.pdf e posto in appendice a questa tesi. Non ancora analizzato in dettaglio, tale elenco di lavori annotati da Segre rappresenta una fonte notevole per ricostruire il patrimonio materiale della Scuola italiana di geometria algebrica. Esso, infatti, restituisce alcuni tratti fondamentali non soltanto del patrimonio del suo possessore, ma anche di quello della sua Scuola.

Racchiuso in due cartoncini, lo Schedario comprende 538 carte autografe, non datate e poste in ordine alfabetico; una sezione di 30 carte sciolte non numerate è a sé stante e riguarda unicamente la didattica della Matematica. Le prime 45 carte dello Schedario contengono appunti per conferenze e per dissertazioni di laurea – tra cui uno suggerito da Fano (scheda n. 19)[7] – ma anche argomenti di ricerca (n. 34-38) e un elenco di spunti per eventuali discorsi inaugurali (n. 45). La sezione più corposa è quella bibliografica (nn. 46-508), suddivisa in oltre 300 voci tematiche ordinate alfabeticamente, tranne rare eccezioni.

8.1. Analisi statistica dello Schedario

Le sezioni bibliografica e didattica dello Schedario contengono 6.238 riferimenti bibliografici. Si tratta per la maggior parte di estratti da riviste e periodici (91% del totale), ma compaiono anche 227 volumi, 136 dissertazioni (di cui 13 inaugurali), opuscoli stampati in regime di proprietà letteraria, estratti da atti congressuali, *Festschrift* e volumi collettivi (Tab. 8.1).

Gli articoli che Segre annota provengono da 207 riviste, pubblicate in più di 25 paesi e in 137 sedi editoriali differenti, e da tre supplementi a periodici italiani: «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», «Periodico di Matematiche» e «Giornale di Matematiche».

---

[5] Cfr. S. DE DONNO 2008, *La Biblioteca dell'Istituto nazionale delle assicurazioni*, «Le Carte e la Storia», pp. 98-99.

[6] BSMT, *Libro Cassa Fondi Universitari, Provvedimenti varii*, 17.5.1926, p. 106. Gli opuscoli del lascito Segre, riportati nel Registro di Ingresso della BSMT tra il 15.6.1924 e il 2.6.1926, sono 5976 e corrispondono ai numeri di inventario 2698-2940, 2943-3420, 3427-3479, 3489-3652, 3670-3790, 3799-3872, 3877-4073, 4075-4241, 4255a-4841, 4844-5198, 5201-5282, 5289- 5656, 5681-5701, 5705a-5846, 5900-8866.

[7] Cfr. BSMT, *FSe*, scheda n. 19: "C_0^n normale. Son note le quadriche per essa. Si cerchino i sistemi lineari di quadriche passanti: per tutte le tangenti, per tutti i piani osculatori, … […]. Secondo Fano posson venire alcune cose interessanti".

Tipologia	n. esemplari	%
Estratti di riviste e periodici	5696	91,31
Volumi	227	3,64
Dissertazioni	136	2,18
Note matematiche (in corso di stampa o non edite su riviste)	92	1,47
Estratti di Atti di Congressi	37	0,59
Estratti di *Festschrift*	32	0,51
Programmi scolastici	18	0,29

Tab. 8.1. Classificazione dei documenti riportati nello Schedario.

Oltre 650 pubblicazioni, i cui titoli sono riportati da Segre all'interno dello Schedario, sono tratte dai «Mathematische Annalen» (Fig. 8.1), la più celebre rivista matematica tedesca fra il 1860 e il 1920, e costituiscono da sole quasi l'11% del patrimonio. Hanno sede in Germania anche altre riviste, i cui articoli sono registrati da Segre: «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung» (243 estratti), «Berichten der Mathematisch-Physischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig» (174), «Archiv der Mathematik und Physik» (132). I «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» sono il secondo titolo per numero di pezzi (283), seguiti dai «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris» (255). Subito dopo i «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei» (239 estratti) spiccano due riviste americane, con oltre 200 pubblicazioni per ciascuna segnalate da Segre: l'«American Journal of Mathematics» e le «Transactions of the American Mathematical Society».

I riferimenti che Segre appunta nello Schedario sono prettamente italo-tedeschi. Su 1550 autori,[8] la metà sono tedeschi e italiani: nello specifico, il 30% dei lavori è firmato da autori tedeschi, il 20% da italiani (Fig. 8.2). Spicca anche l'elevata rappresentanza di matematici statunitensi (14%), peraltro comprensibile se si tiene conto del fatto che la fama di Segre come docente aveva indotto parecchi americani, come J. Coolidge, C.H. Sisam e E.B. Stouffer, a trascorrere un periodo di studio a Torino per seguire le sue lezioni. Seguono i francesi, gli inglesi e gli austriaci.

Pur a fronte della bassa percentuale sul totale, i due autori che, individualmente, sono più rappresentati provengono dai Paesi Bassi e dal Belgio. Con 80 lavori, il primo è Jan De Vries, professore di Geometria all'Università di Utrecht e autore di circa 200 articoli apparsi sulle riviste matematiche più accreditate del tempo. Al secondo posto, con 75 estratti, si colloca Lucien Godeaux, uno dei matematici più prolifici di sempre, la cui produzione conta oltre 1000 fra articoli e volumi, 669 dei quali recensiti nelle «Mathematical Reviews». La combinazione di questo fattore con i profondi legami tra gli interessi scientifici di Godeaux e quelli della Scuola italiana portano il belga a essere tra i matematici maggiormente rappresentati all'interno delle collezioni librarie di tutti i geometri italiani del tempo. I posti immediatamente successivi sono occupati da due tedeschi: Blaschke e Study, con 62 e 61 estratti rispettivamente. Accanto agli autori tedeschi, si segnala – come è naturale – la presenza di numerosi geometri italiani, con i quali Segre instaura relazioni di magistero e di collaborazione scientifica: tra questi, Severi (60 estratti) ed Enriques (47) con cui lavora a stretto contatto, ma anche Montesano, Marletta,

[8] Si intendono persone fisiche, ovvero non si comprendono i 4 estratti firmati dai comitati di redazione di riviste o da Università.

Scorza e Bompiani con più di 30 lavori citati. Si noti inoltre che Segre registra lo stesso numero di lavori (28) di Max Nöther e del giapponese T. Kubota (Fig. 8.4).

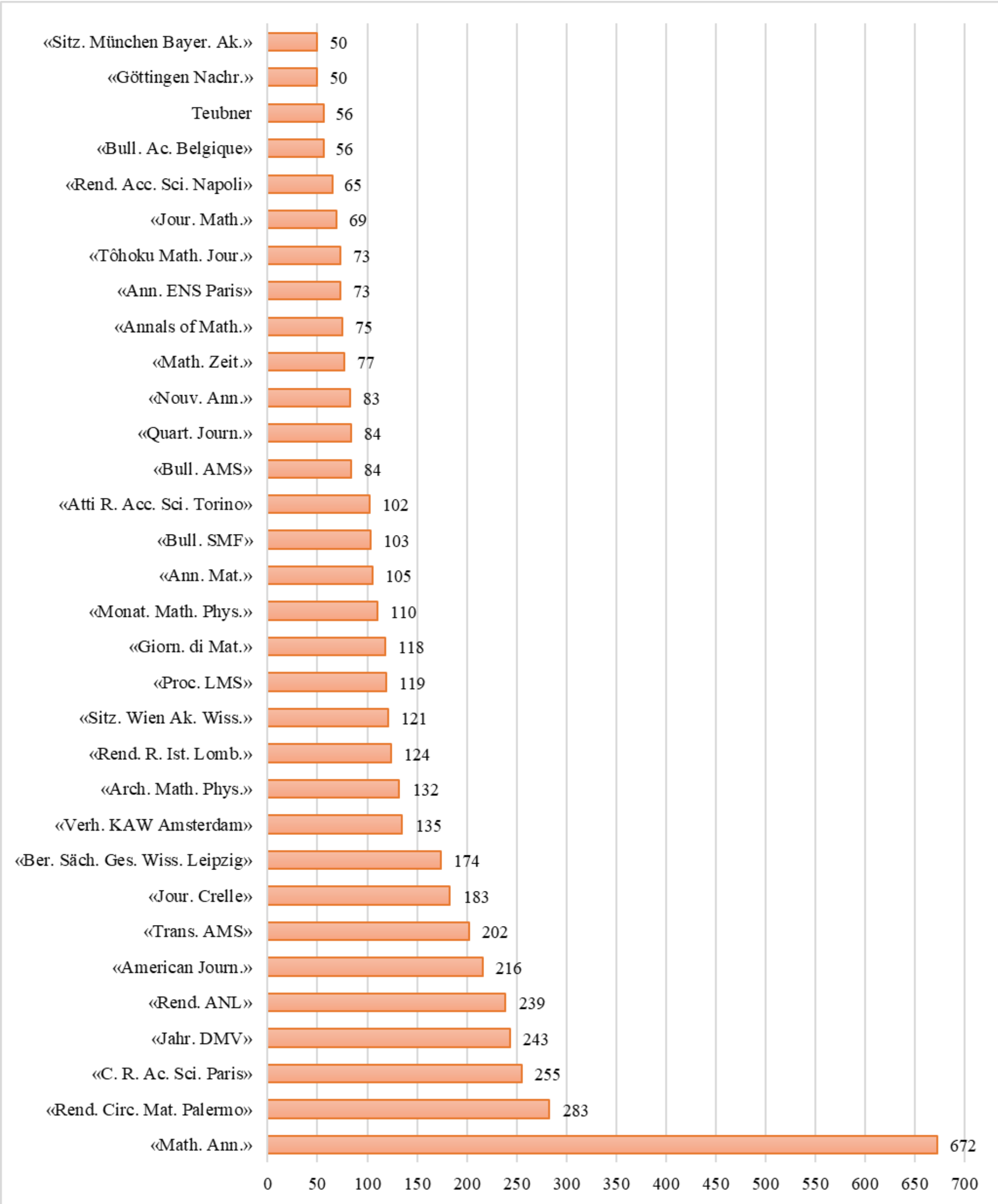


Fig. 8.1. Riviste maggiormente rappresentate, con almeno 50 estratti.

Per contro, emerge la penuria di lavori dell'ambiente torinese quali quelli di Peano (6 estratti appena); Volterra, docente di Meccanica razionale a Torino tra il 1892 e il 1900; G. Morera, successore di Volterra e poi docente di Meccanica superiore; Picone, al Politecnico a partire dal 1913; e, soprattutto, D'Ovidio, relatore della tesi di laurea di Segre.

Se la scarsità di riferimenti a Peano può essere giustificata dalla nota polemica che lo contrappose a Segre e da una certa rivalità personale tra i due capiscuola, l'assenza di rimandi ai lavori di D'Ovidio appare del tutto singolare. L'esiguo numero di estratti di Picone (4) – così come quelli firmati da Levi-Civita (5) – e l'assenza di lavori di Volterra, Morera e Somigliana trovano invece una spiegazione nelle rare voci dello Schedario dedicate a temi di matematica applicata. Sul versante tedesco, si segnala un solo opuscolo di Landau, così come di Dedekind, e l'assenza di riferimenti ai lavori di Weierstrass e Kronecker. Tuttavia, Segre possiede l'intera raccolta di memorie di quest'ultimo all'interno della sua biblioteca personale, rilegati insieme in due volumi. Non si registra quindi una totale sovrapposizione tra i lavori posseduti da Segre e quelli annotati nello Schedario: ciò porta ad avanzare l'ipotesi che i riferimenti bibliografici registrati da Segre potessero servirgli per rintracciare più agevolmente quelle note di matematica sparse all'interno delle diverse riviste della BSMT.

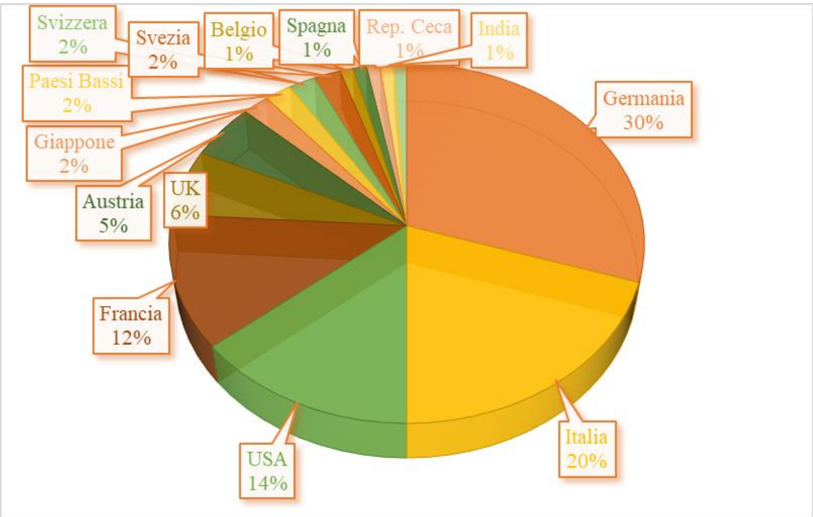


Fig. 8.2. Distribuzione percentuale degli autori per nazionalità.

All'interno dello Schedario compaiono 110 riferimenti a lavori firmati da una donna, per un totale di 51 autrici. Le prime posizioni sono occupate da due matematiche britanniche, entrambe coinvolte nell'ambito dell'educazione femminile e interessate a questioni di geometria algebrica. La prima, Scott (18 estratti) fu direttrice del Dipartimento di Matematica del Bryn Mawr College; condivideva con Segre l'interesse per lo studio delle curve algebriche di grado superiore a due. H. Hudson (16 opuscoli) volse invece la propria attenzione verso le trasformazioni cremoniane. Sul versante didattico, nel 1916 diede alle stampe la pregevole monografia *Ruler and compasses*, registrata da Segre nella sezione "Costruzioni geometriche", al confine tra matematica avanzata ed elementare. Tra le autrici donne, il terzo posto è ricoperto da E. Nöther con 8 estratti (Tab. 8.2), la metà dei quali dedicati alla teoria degli invarianti.

L'arco temporale di stampa dei lavori annotati da Segre all'interno dello Schedario va dal 1812 al 1924 (Fig. 8.3). Il lavoro più antico, le *Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École Normale en 1795* di A.-L. Cauchy, compare due volte all'interno della sezione didattica, in relazione alle voci "Analisi indeterminata di 1° grado" e "Divisibilità". I riferimenti a scritti antecedenti al 1880 sono probabilmente stati inseriti da Segre all'epoca dei suoi studi universitari o durante la successiva carriera accademica. Non è escluso alcune di queste letture gli siano state suggerite dai suoi docenti, quali Bruno, suo insegnante durante gli studi superiori, A. Genocchi e D'Ovidio.

Se, attualmente, non è possibile collocare temporalmente l'inizio della compilazione dello Schedario, ciò che è certo è che Segre abbia proseguito ad annotare riferimenti bibliografici in modo abbastanza regolare fino alla sua morte, come testimoniato dai 38 riferimenti bibliografici a lavori apparsi nel 1924. In alcuni casi, il numero di lavori pubblicati in un certo anno supera le 200 unità: è quanto accade nel periodo 1903-1906 (con ben 228 scritti nel 1903), in concomitanza con la partecipazione di Segre al Congresso Internazionale dei Matematici di Heidelberg, e tra il 1915 (226 articoli) e il 1923, quando egli intraprende nuovi filoni di ricerca nell'ambito della geometria proiettivo-differenziale.

Autrici	**Provenienza**	**n. esemplari**
Scott Charlotte	UK	18
Hudson Hilda	UK	16
Nöther Emmy	Germania	8
Cohen Teresa	USA	4
Del Re Maria	Italia	4
Piazzolla-Beloch Margherita	Italia	4
Grimaldi Gelsomina	Italia	3
Biggiogero Giuseppina	Italia	2
Boole Stott Alicia	Irlanda	2
Chisholm Grace	UK	2
Larice Ines	Italia	2
Nobile Grazia	Italia	2
Prampolini Matilde	Italia	2
Puccini Ada	Italia	2
Turner Bird Margaret	USA	2
Wood Ruth G.	USA	2

Tab. 8.2. Autrici maggiormente rappresentate, con almeno 2 estratti.

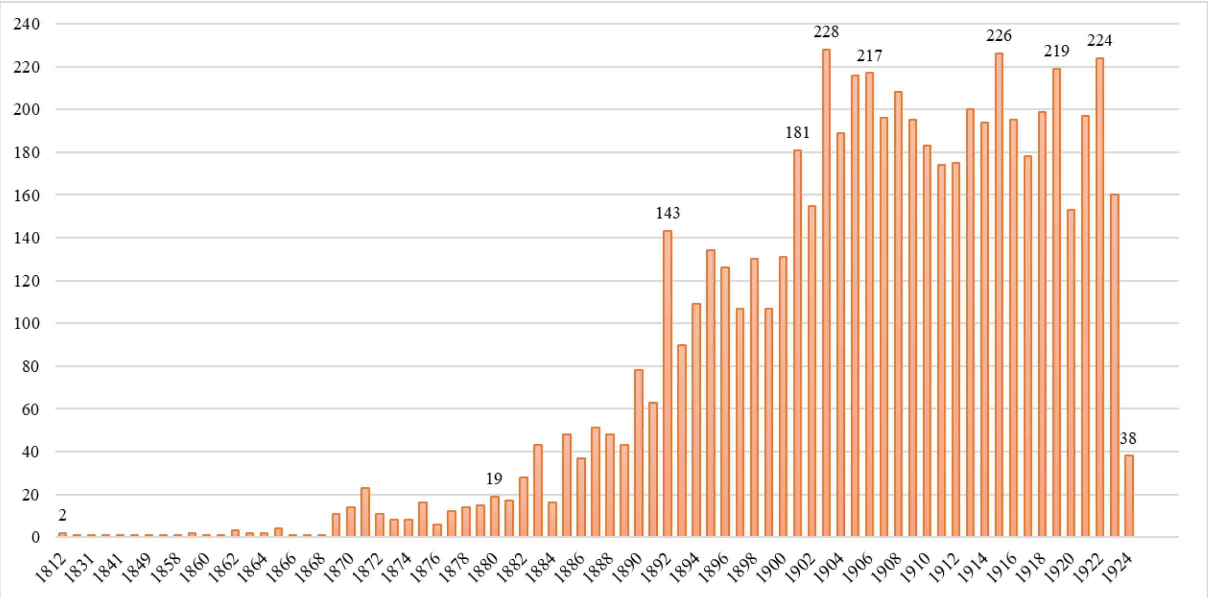


Fig. 8.3. Andamento temporale dei lavori annotati nello Schedario Segre.

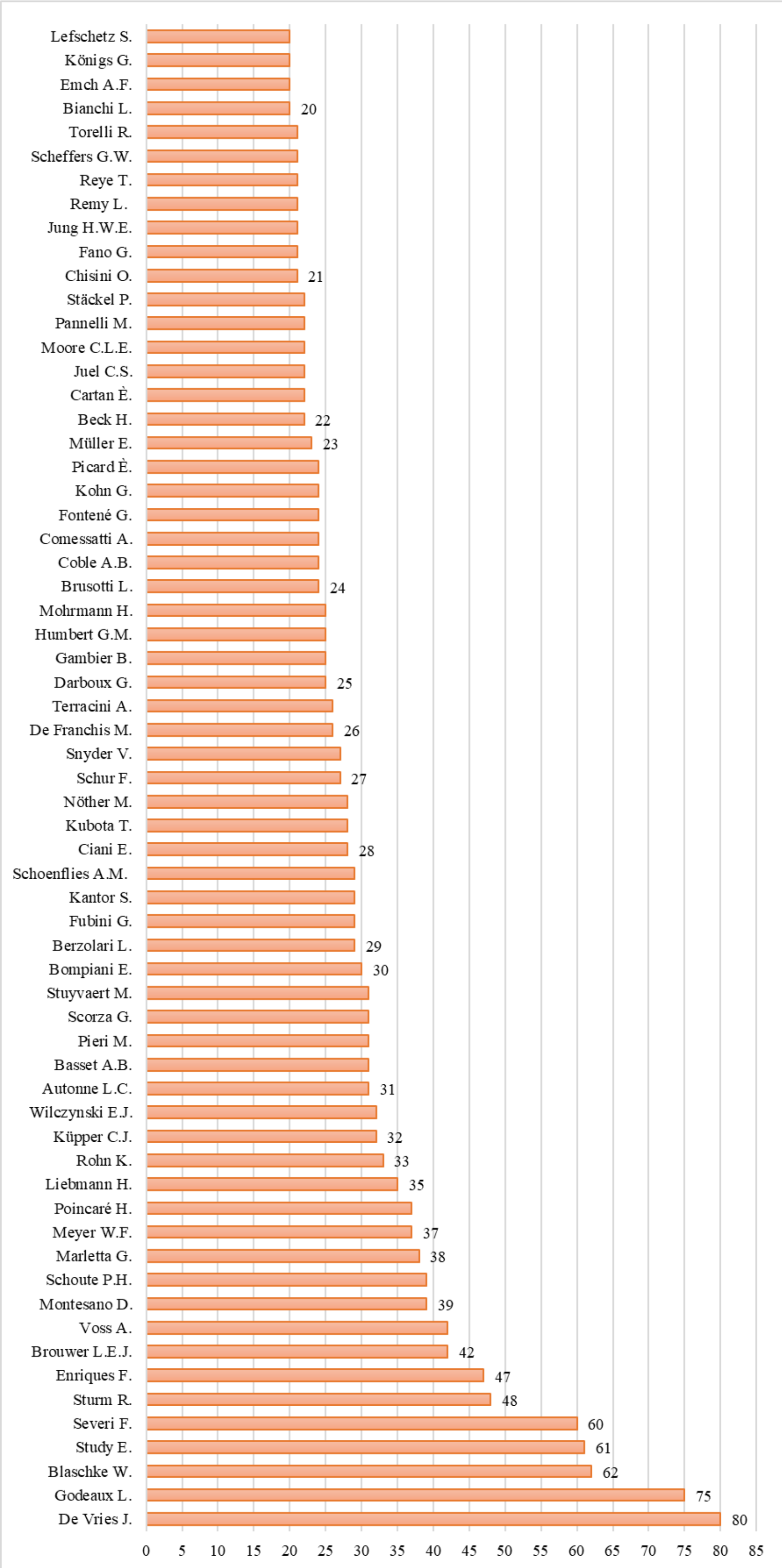


Fig. 8.4. Autori maggiormente rappresentati, con almeno 20 estratti.

8.2. Patrimonializzazione della cultura geometrica nello Schedario

Lo Schedario, con la sua suddivisione per argomenti, costituisce un osservatorio privilegiato sul modo di patrimonializzare i concetti matematici all'interno della Scuola italiana di geometria algebrica.

Esso consta di 321 voci tematiche ciascuna delle quali contiene un numero variabile di pubblicazioni relative all'argomento, da un minimo di 1 per la voce "Postulazione" a un massimo di 241 lavori per la voce "Curve (geometria algebrica)". Le voci contenenti il maggior numero di riferimenti bibliografici sono naturalmente quelle dedicate a temi di geometria (Tab. 8.3), con l'unica eccezione rappresentata dalla voce "Biografie" (147 riferimenti). Degni di nota sono i 90 lavori sotto la voce "Fondamenti della geometria" e gli 89 relativi all'"Analysis situs", indice di una certa attenzione di Segre per questi temi.

Voci dello schedario	n. riferimenti
Curve (geometria algebrica)	241
Superfici algebriche (particolari)	219
Cubiche	202
Quartiche	184
Curve (generale)	147
Biografie	147
Geometria non euclidea	143
Congruenze di rette	141
Superfici algebriche (generali)	133
Geometria su una superficie	117
Quadriche	115
Sistemi di enti algebrici	113
Superfici del 4° ordine	113
Superfici cubiche	103
Trasformazioni cremoniane	101
Rigate	99
Forma di curve e superfici	93
Singolarità	90
Fondamenti della geometria	90
Analysis situs	89
Movimenti	85
Complessi di rette	83
Involuzioni	80

Tab. 8.3. Voci dello Schedario contenenti almeno 80 riferimenti bibliografici.

Pur tenendo presente che il confine tra i diversi settori della matematica è spesso labile, è possibile avanzare una ripartizione disciplinare di massima delle voci dello Schedario (e, di conseguenza, dei riferimenti biografici). Se, da un lato, essa conferma la prevalenza della componente geometrica dello Schedario, con oltre l'80% delle voci e dei lavori citati, dall'altro consente di rilevare alcuni elementi interessanti. Innanzitutto, la discreta presenza di opuscoli di analisi (principalmente funzionale e complessa), teoria dei gruppi e topologia (Tab. 8.4). Mentre l'interesse verso la teoria dei gruppi e, in particolare, per i gruppi di trasformazioni, frutto dell'approccio kleiniano, è un fattore comune tra i geometri italiani, non è così per le ricerche di analisi pura e di topologia. Segre, scomparso nello stesso anno della pubblicazione de *L'analysis situs et la géométrie algébrique* di Lefschetz, aveva forse intuito l'importanza di questa disciplina per lo sviluppo della geometria.

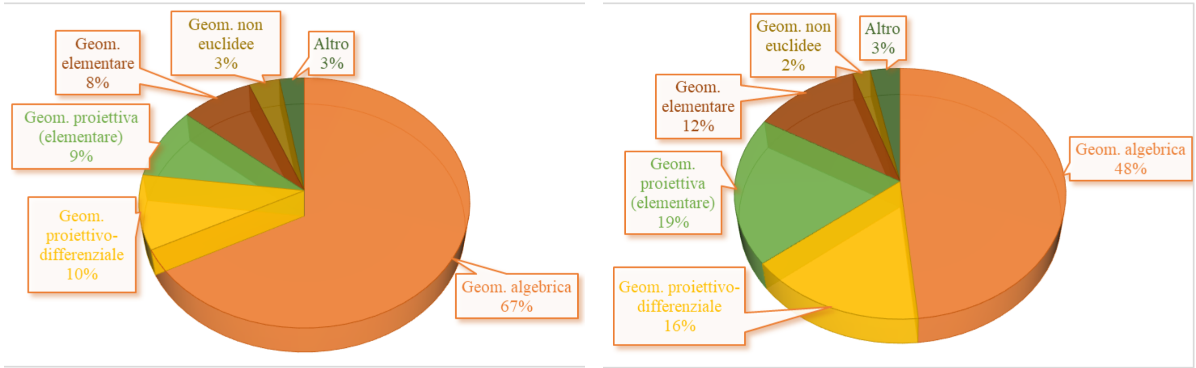
Dallo Schedario emerge però un diverso livello di patrimonializzazione del sapere matematico: nel caso dell'analisi e della teoria dei gruppi il rapporto tra il numero dei riferimenti e quello delle voci è decisamente minore rispetto a quanto accade per la topologia. Questo è sintomatico del fatto che la conoscenza matematica di Segre nei primi due ambiti è, in un certo senso, più 'fine' e profonda rispetto a quella in campo topologico, come testimoniato dalla più accurata suddivisione in voci. Si rileva invece la scarsità di lavori di teoria dei numeri: i riferimenti a tale disciplina compaiono sotto un'unica voce, dal significativo titolo "Teoria dei numeri (geometria)".

Area disciplinare	**% riferimenti**	**% voci**
Geometria	85,7	81,3
Analisi	3,9	6,7
Teoria dei gruppi	3,5	3,6
Storia (biografie dei matematici)	2,4	1
Topologia	2,1	1,6
Applicazioni	1	3,1
Teoria degli insiemi	0,7	0,5
Teoria dei numeri	0,2	0,5
Probabilità	0,2	1
Varie	0,2	0,5

Tab. 8.4. Distribuzione disciplinare delle voci e dei riferimenti bibliografici della sezione bibliografica.

Lo Schedario del caposcuola dei geometri italiani risulta poi particolarmente significativo in relazione alla rappresentazione, al suo interno, delle diverse branche della geometria. La geometria algebrica costituisce la componente prevalente, sia per numero di riferimenti bibliografici sia per quello delle voci (Fig. 8.5). L'elevata specializzazione del sapere matematico in questo settore ben emerge dalla molteplicità di voci riferibili a uno stesso macro-argomento. Già solo limitandosi alle voci contenenti almeno 80 riferimenti riportate in (Tab. 8.3), spiccano più schede relative alle superfici algebriche: "Superfici algebriche (particolari)", "Superfici algebriche (generali)", "Geometria su una superficie", "Superfici del 4° ordine", "Superfici cubiche", "Rigate", cui se ne aggiungono numerose altre con meno riferimenti bibliografici. Un discorso del tutto analogo vale per il macro-tema delle curve algebriche.

La suddivisione in voci dello Schedario Segre riflette anche la progressiva stratificazione del sapere in ambito geometrico: è presumibile che le voci più 'generiche' (nel caso delle superfici, quelle relative alle superfici generali e particolari) siano cronologicamente le più antiche. Di pari passo alla costruzione della teoria e come conseguenza della crescente specializzazione, Segre ha probabilmente avvertito la necessità di inserire all'interno dello Schedario voci maggiormente 'specifiche' (nel caso in oggetto, superfici rigate, superfici di grado 3 e 4, superfici di grado superiore, superfici razionali, …). Un ulteriore grado di specializzazione compare all'interno delle schede relative a temi di ricerca particolarmente cari a Segre: è questo il caso delle superfici rigate al cui interno, accanto alla generica voce “Rigate”, si trovano quelle relative alle rigate algebriche e alle rigate di grado 4, 5 e 6.



% riferimenti bibliografici % voci

Fig. 8.5. Distribuzione dei riferimenti (a sx) e delle voci (a dx) nei diversi settori della geometria.

I lavori di geometria proiettivo-differenziale costituiscono il 10% degli opuscoli geometrici, nonostante non sia sempre possibile individuare una netta demarcazione tra questi lavori e quelli appartenenti al dominio della geometria algebrica. Segre è però molto preciso nella suddivisione di quelle voci che potrebbero afferire ad entrambi i settori: spesso infatti accosta al termine in questione – come “curve”, “superfici” o “varietà” – la dicitura esplicita “geom. differenziale” o “geom. infinitesimale”. È, questo, indicativo del fenomeno di progressiva stratificazione, intreccio e parziale sovrapposizione dei saperi matematici. Specificare la branca della geometria cui si fa riferimento non è solo funzionale, per Segre, a tenere ordinate le proprie carte nel momento in cui lo Schedario si arricchisce di nuove voci; è anche sintomo di una spiccata consapevolezza dell’evoluzione interna della disciplina, che fa da contraltare all’impetuoso sviluppo della geometria di quegli anni.

8.3. Uno sguardo ad alcune voci dello Schedario

Con l’obiettivo di analizzare più in profondità l’operazione di compilazione delle voci dello Schedario da parte di Segre, ci soffermiamo su tre di esse afferenti a tre ambiti differenti: geometria algebrica, teoria dei numeri e topologia.

Particolarmente interessante dal nostro punto di vista per quanto riguarda la geometria algebrica è come Segre redige la voce relativa alle varietà. Occorre osservare che, in questo caso, i lavori sono ordinati cronologicamente e si collocano su un arco temporale di quasi vent’anni (1906-1924). I primi scritti che Segre annota sono due note lincee di Pannelli del 1906, punto di riferimento anche per Fano nei suoi contributi sulle varietà tridimensionali, le *Osservazioni varie…* di Severi e il lavoro *Sur les intégrales simples de première espèce d’une variété algébrique à plusieurs dimensions* firmato da Enriques e Castelnuovo. Fin dall’inizio della compilazione di questa voce si registra quindi una forte presenza dei contributi della Scuola italiana che culmineranno con gli scritti di Fano sulle threefolds, dei quali Segre annota quelli del 1908 e del 1915. Accanto agli articoli di Fano, egli menziona una serie di lavori sulle varietà algebriche pubblicati tra gli anni Dieci e Venti ancora da Severi (5 articoli) e Pannelli (2), ma anche da Scorza (3 lavori), Comessatti e Torelli (2 a testa). Se, da un lato, egli annota un buon numero di contributi classici della tradizione geometrica italiana, dall’altro si mostra attento nell'individuare e segnare anche i lavori meno noti. È questo il caso dello scritto di C. Sadowski, dal titolo *Un criterio d'equivalenza per le* ∞^{r-1} *di una varietà* ∞^{r} *algebrica* (1919), in cui è risolto il problema dell'estensione del teorema di Torelli a tutte le varietà. Nel 1924, inoltre, Albanese pubblica due note lincee sulle varietà a quattro dimensioni che Segre appunta prontamente all'interno dello Schedario. Per quanto riguarda gli autori stranieri, soltanto tre sono quelli menzionati da Segre. Il primo per numero di riferimenti è Lefschetz, con 11 lavori del periodo 1915-23. In essi l'autore spazia dallo studio dei cicli n −dimensionali a quello degli integrali multipli, dall'analysis situs sulle varietà algebriche all'esame di quelle abeliane, con particolare attenzione alle ipersuperfici reali in esse contenute. Tre sono i contributi di Rosenblatt annotati nello Schedario, tutti dedicati allo studio degli invarianti delle varietà tridimensionali – tema tipico della Scuola italiana – e risalenti al triennio 1913-15. Due, infine, gli articoli di Godeaux: il primo, pubblicato nel 1909, riguarda il teorema fondamentale dell'aggiunzione per una threefolds; il secondo, dato alle stampe due anni più tardi, concerne un particolare luogo dei punti di contatto di una V_3. Con la sola eccezione del 'peso' attribuito ai lavori di Lefschetz, la selezione della letteratura sulle varietà effettuata da Segre è in linea con quella che, in contemporanea, fa Fano all'interno degli scritti sulle threefolds. Naturalmente, negli anni successivi alla scomparsa di Segre le ricerche dei geometri italiani in questo ambito aumentano notevolmente, così come i contributi apportati in questo ambito da Godeaux i cui scritti sulle threefolds rivestono una certa importanza all'interno delle raccolte personali di Fano e Terracini. Mentre la Scuola americana è rappresentata da Lefschetz, all'interno di questa voce dello Schedario mancano i riferimenti ai lavori della Scuola inglese. Bisogna però tener presente che Segre possiede i tre volumi dei *Principles of geometry* di Baker all'interno della sua biblioteca personale: questo può essere uno dei motivi per cui egli non sente la necessità di annotare ulteriori riferimenti.

Per quanto riguarda l'ambito topologico, Segre effettua una selezione ragionata dei riferimenti, suddividendo circa un centinaio di lavori in tre diverse categorie: topologia vera e propria, analysis situs e connessione. È, questo, emblematico di una certa attenzione verso questo settore, in crescente espansione. Il fatto che la prima metà dei lavori che compaiono sotto la voce "topologia" non è annotata in ordine cronologico potrebbe suggerire che Segre inizia la sua compilazione non prima del 1915. All'interno di questa scheda spicca, in primo luogo, la mancanza di riferimenti all'indirizzo francese di Poincaré, ampiamente rappresentato invece nella categoria analysis situs. Per contro, si registra una certa meticolosità di Segre nel rintracciare le origini della topologia all'interno di due contesti: quello tedesco e quello austriaco. I lavori più antichi che Segre inserisce sotto la voce "topologia" sono infatti due note di Oskar Simony, professore a Vienna, apparse sui «Mathematische Annalen» tra il 1881 e il 1883. La medesima collocazione editoriale spetta al contributo di V. Eberhard del 1890, *Ein Satz aus der Topologie*, con cui Segre apre la scheda. Due lavori del 1892 firmati da H. Brunn, specialista di geometria convessa formatosi a Monaco, completano l'insieme di articoli apparsi su periodici tedeschi a fine Ottocento: dal primo, intitolato *Über Verkettung*, scaturirà la nozione di collegamenti brunniani; *Topologische Betrachtungen* è il titolo del secondo contributo, dedicato ad alcune considerazioni topologiche legate alla teoria dei nodi. Tra i primi riferimenti di Segre compaiono poi un lavoro di W. Thomson sulla divisione omogenea dello spazio (1894) e uno di Petersen sul teorema di Tait (1898). Passando ai primi anni del Novecento, si assiste ancora al connubio tra lavori tedeschi e austriaci: da una parte, Segre annota alcuni contributi di Tietze, tra cui l'imponente memoria di oltre cento pagine *Über die* *topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten* (1908); dall'altra, vi sono gli articoli pubblicati nei «Mathematische Annalen» da P. Wernicke (1904), Dehn (1910 e 1914) e Landsberg (1911) e la tesi di dottorato di Paul Mahlo, *Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene und sphärische Polygone*, difesa ad Halle nel 1908. L'autore di cui Segre annota il maggior numero di lavori è l'olandese Brouwer, con cinque pubblicazioni nel periodo 1912-1920: probabilmente ciò è anche dovuto al fatto che, in questi anni, egli si occupa sì di questioni di topologia ma, in un certo senso, 'vicine' agli interessi dei geometri italiani quali le involuzioni topologiche, i gruppi finiti di trasformazioni topologiche del toro, le classi di trasformazioni del piano proiettivo e di una superficie sull'altra.[9] Alla voce "topologia" compare invece un solo lavoro americano: si tratta dell'articolo di Birkhoff del 1913, intitolato *The reducibility of maps* e dedicato – come appunta Segre – al problema dei quattro colori, questione ampiamente citata anche da Fano e dai membri della Scuola italiana quando si tratta di topologia. Chiudono questa voce dello Schedario due contributi di Béla Kerékjártó del biennio 1922-23. Emerge quindi l'assenza di lavori italiani di topologia; questi sono rarissimi anche nelle voci affini, ossia "analysis situs" e "connessione". Qui Segre annota soltanto sei note di A. Tonelli (1874), Bortolotti (1890), Vivanti (1895), G. Andreoli (1915 e 1921) e P. Benedetti (1923) e le litografie del volume di Torelli, *Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali* (1908).

Vivanti è l'unico matematico italiano che compare tra gli autori di riferimento per quanto riguarda la teoria dei numeri. Segre segnala infatti il suo contributo del 1892 per la «Rivista di Matematica», intitolato *Sull'uso della rappresentazione geometrica nella teoria aritmetica dei numeri complessi*. L'articolo *Sur la possibilité de la décomposition des nombres en trois carrés* di Dirichlet, pubblicato nel 1859, rappresenta il lavoro più antico della voce "teoria dei numeri". Gli altri scritti annotati da Segre, appena una dozzina, sono dati alle stampe tra il 1900 e il 1917: si tratta perlopiù di contributi nei quali la teoria dei numeri è applicata all'ambito geometrico. Tra questi, vi sono naturalmente i lavori dei tedeschi E. Busche (1900 e 1905) e H. Minkowski (1901 e 1905), di cui Segre possiede anche il volume della *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, Teubner, 1910) all'interno della sua biblioteca. Tuttavia, almeno in questo ambito, la Germania non risulta nettamente prevalente come accade per altre voci dello Schedario. Tra i contributi francesi citati da Segre compaiono le tre note del 1916 di Émile Turrière – *Notions d'arithmogéométrie* – e l'articolo di Gaston Cotty del 1913. Ancora, i due articoli firmati da H. Blichfeldt (1914) e H. Hancock (1917) provengono dal versante statunitense. Completa la voce "teoria dei numeri" il volume di Klein *The Evanston Colloquium: Lectures on mathematics* (Macmillan, New York, 1894) che Segre custodisce anche all'interno della sua raccolta personale. Nello Schedario mancano invece i riferimenti ai lavori di A. Hurwitz e Kronecker, punti di riferimento – ad esempio – per il corso di teoria dei numeri tenuto da Fubini a Torino nell'a.a. 1916-17.[10] Segre, tuttavia, possiede una selezione di opuscoli di entrambi gli autori, da lui fatti appositamente rilegare in due volumi: questo potrebbe essere uno dei motivi per cui

[9] Segre inserisce alcuni commenti e osservazioni accanto alle opere di Brouwer citate. Cfr., ad esempio, BSMT, *FSe*, Schedario, c. 417*v*: "Numero dei giri di una curva di S_3 intorno ad un'altra. Analogo in S_n per una V_h e una V_{n-h-1}".

[10] Sulle fonti del corso di Fubini, cfr. E. LUCIANO – E. SCALAMBRO – L. TERRACINI 2020c, *Le Lezioni di Teoria dei numeri di Guido Fubini (1916-1917)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 40.2, 2020, pp. 378-388; G. FUBINI / E. LUCIANO – E. SCALAMBRO – L. TERRACINI (eds.) 2020, *Lezioni di teoria dei numeri 1916-17*, Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese n. 4, Torino, CSSUT, pp. 4-8.

non inserisce i relativi riferimenti all'interno dello Schedario. Avendo a disposizione tali scritti, senza bisogno di reperirli all'interno delle riviste della BSMT, probabilmente Segre non sente la necessità di annotarli. Un ulteriore discrepanza tra i lavori registrati nello Schedario e la biblioteca personale di Segre è rappresentata dalle *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici…* di Bianchi (Pisa, Spoerri, 1921).

8.4. Tracce delle radici della Scuola italiana all'interno dello Schedario

Nato a Saluzzo il 20 agosto 1863 all'interno di una famiglia della borghesia ebraica, Segre si iscrive all'Università a soli 16 anni, laureandosi brillantemente nel luglio 1883. Sin dalla tesi di laurea[11] egli apre la via per quei filoni di ricerca che caratterizzeranno l'evoluzione della Scuola geometrica italiana. La sua dissertazione rappresenta infatti una sintesi dei lavori nati in ambiente tedesco che sono però inseriti in un quadro di riferimento più organico e generale, quello della geometria proiettiva iperspaziale. Esso si mostrerà di fondamentale importanza per le successive ricerche di Segre ma anche per gli sviluppi della geometria algebrica italiana, aprendo la strada a molteplici applicazioni.

La maggior parte dei riferimenti a lavori pubblicati degli anni 1883-1891 che compaiono nello Schedario è costituita dai contributi dei matematici tedeschi, che rappresentano quasi il 60% del totale. Tuttavia, a differenza della Scuola tedesca che fa largo uso di ragionamenti e manipolazioni algebriche per darne solo alla fine un'interpretazione geometrica, Segre interpreta geometricamente fin dall'inizio i concetti algebrici. Ciò costituirà il metodo principe della Scuola italiana. Sin dal biennio 1883-84, il geometra piemontese individua così un procedimento generale mediante il quale questioni a priori differenti rappresentano in realtà aspetti diversi di un medesimo problema, gettando le basi di un programma di ricerca cui resterà fedele per tutta la vita. Uno dei primi obiettivi che Segre si pone è quello della completa classificazione delle rigate algebriche, un terreno che vedrà intrecciarsi i metodi iperspaziali con quelli birazionali. Le superfici rigate rappresentano un nucleo fondamentale dello Schedario, con ben 99 riferimenti a lavori su questo tema. Tra il 1884 e il 1889 Segre dedica all'argomento una serie di articoli all'interno dei quali le sue ricerche si intrecciano con quelle di Nöther e A. Brill, entrambi citati per 28 e 17 pubblicazioni rispettivamente.

Come noto, un evento centrale per lo sviluppo della Scuola è l'incontro tra Segre e Castelnuovo (con 17 lavori annotati nello Schedario) che si trasformerà ben presto in una proficua collaborazione scientifica, in particolare a partire dall'autunno del 1887 quando Segre lo presenta a D'Ovidio, facendogli ottenere il posto di assistente. Sul versante accademico, nel 1888 Segre vince a Torino la cattedra di Geometria superiore. Inizia così il suo insegnamento cristallizzato nei 40 *Quaderni* manoscritti. Pur spaziando su tematiche diverse, i corsi di Segre sono prevalentemente incentrati sulla geometria algebrica attraverso quei metodi che lui e Castelnuovo stanno elaborando. Celebre è il corso del 1890-91, intitolato *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti* e seguito – tra gli altri – da Fano (21 riferimenti) e Amodeo (9), al cui interno viene affrontato lo studio della geometria sopra una

[11] Trattasi di C. SEGRE 1883, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 36, pp. 3-86.

curva alla luce di considerazioni birazionali.[12] Il 1891 è un anno significativo della traiettoria di Segre che avrà alcune ripercussioni sullo sviluppo della Scuola italiana. Sul versante matematico, egli definisce e individua le proprietà della varietà prodotto di due spazi proiettivi, oggi nota come "varietà di Segre";[13] a livello personale, Segre si rammarica per la partenza di Castelnuovo che, vincitore di cattedra a Roma, lascia Torino.[14] Sul piano delle relazioni internazionali, nell'estate di quell'anno compie un viaggio in Germania (Göttingen, Francoforte, Norimberga, Berlino, Dresda, Leipzig e Monaco), incontrando Sturm (48 estratti), K. Rohn (33), Reye (21), M. Cantor (1), Kronecker, Weierstrass, Nöther e, naturalmente, Klein, con cui è in contatto epistolare dal 1883.[15]

In questa prima fase di fondazione ed espansione della Scuola, i riferimenti a lavori stranieri che Segre annota all'interno dello Schedario sono essenzialmente limitati, a livello di centri editoriali, a Germania, Italia, Francia, Regno Unito e Austria (Fig. 8.6). Accanto a quelle tedesche, le riviste maggiormente rappresentate sono i «Nouvelles Annales de Mathématiques» e i periodici viennesi «Monatshefte für Mathematik und Physik» e «Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien». Un elemento di rilievo è costituito dal fatto che il 4% degli opuscoli registrati da Segre pubblicati in questo primo periodo sono stampati a Praga: si tratta perlopiù di lavori di C. Küpper (32 estratti) sulle curve algebriche. Essi andranno diminuendo fino a scomparire negli anni seguenti: gli ultimi estratti pubblicati a Praga sono due lavori, firmati da Bydžovský nel 1917, uno sulle cubiche piane e l'altro sulle curve piane di grado $2n$ aventi tre punti di molteplicità n.

Il 1892 segna uno snodo importante sia per la carriera accademica di Segre sia per lo sviluppo della Scuola. Nel novembre, infatti, Segre è promosso al grado di professore ordinario a Torino. Entrano inoltre in campo nuovi protagonisti della geometria italiana: Fano, che si laurea in quell'anno con Segre discutendo una tesi di geometria iperspaziale, ed Enriques che, conseguita la laurea nel 1891, è vincitore di una borsa di perfezionamento a Roma nell'autunno del 1892.

Gli anni tra il 1893 e il 1904 rappresentano il periodo in cui si rafforza non solo il ruolo istituzionale[16] di Segre ma anche il suo riconoscimento – in Italia e all'estero – come caposcuola della geometria algebrica italiana. Segre gode infatti di un'ottima fama in campo internazionale. Nel 1897 è vicepresidente della sezione di geometria all'interno del primo Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi a Zurigo.[17] A questo contesto risale l'incontro con Scott, una delle quattro donne a partecipare al Congresso insieme a Iginia Massarini, citata nello

---

[12] Cfr. C. SEGRE / A. CONTE – L. GIACARDI – M.A. RASPANTI (eds.) 2020, *Lezioni inedite di due corsi universitari*, Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese n. 5, Torino, CSSUT.

[13] Cfr. C. SEGRE 1891, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 5, pp. 192-204.

[14] Cfr. la lettera di C. Segre a G. Castelnuovo, Torino 12.11.1892, in BRIGAGLIA 2013, *cit.*, p. 455.

[15] A tal proposito, cfr. E. LUCIANO – C.S. ROERO 2012, *cit.*

[16] Nota è la vicenda legata al concorso per la nomina a professore ordinario di Del Pezzo, Gerbaldi e Guccia della cui commissione Segre faceva parte insieme a Bertini, D'Ovidio, Veronese e F. Aschieri. Per approfondire questo aspetto, cfr. BRIGAGLIA 2013, *cit.*, pp. 460-461.

[17] Notevole è il fatto che all'interno della sezione di geometria, presieduta da Reye, la metà delle comunicazioni è presentata da italiani, i cui scritti compaiono all'interno dello Schedario Segre: Fano, Burali-Forti (16 riferimenti), Aschieri (2). Vi sono poi due interventi dei geometri tedeschi Reye e Brunn (7) e uno del francese J. Andrade (4).

Schedario per un lavoro sulle coniche,[18] Vera von Schiff e Charlotte Wedell. L'anno seguente Segre è insignito del prestigioso Premio Reale per la Matematica dell'Accademia dei Lincei, a pari merito con Volterra. Ma il momento di suo massimo riconoscimento a livello internazionale è rappresentato dal Congresso di Heidelberg del 1904, quando è invitato a tenere una conferenza generale. Il 1904 segna il definitivo passaggio da Cremona, morto l'anno precedente, a Segre come principale esponente della geometria algebrica italiana. Occorre infine tenere presente che, a partire da questo momento, Segre entra a far parte del comitato editoriale degli «Annali di Matematica pura ed applicata», rivista ampiamente rappresentata all'interno dello Schedario con 105 riferimenti. La posizione di co-editor degli «Annali» favorisce lo scambio con riviste straniere quali gli «Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris» (73 riferimenti).

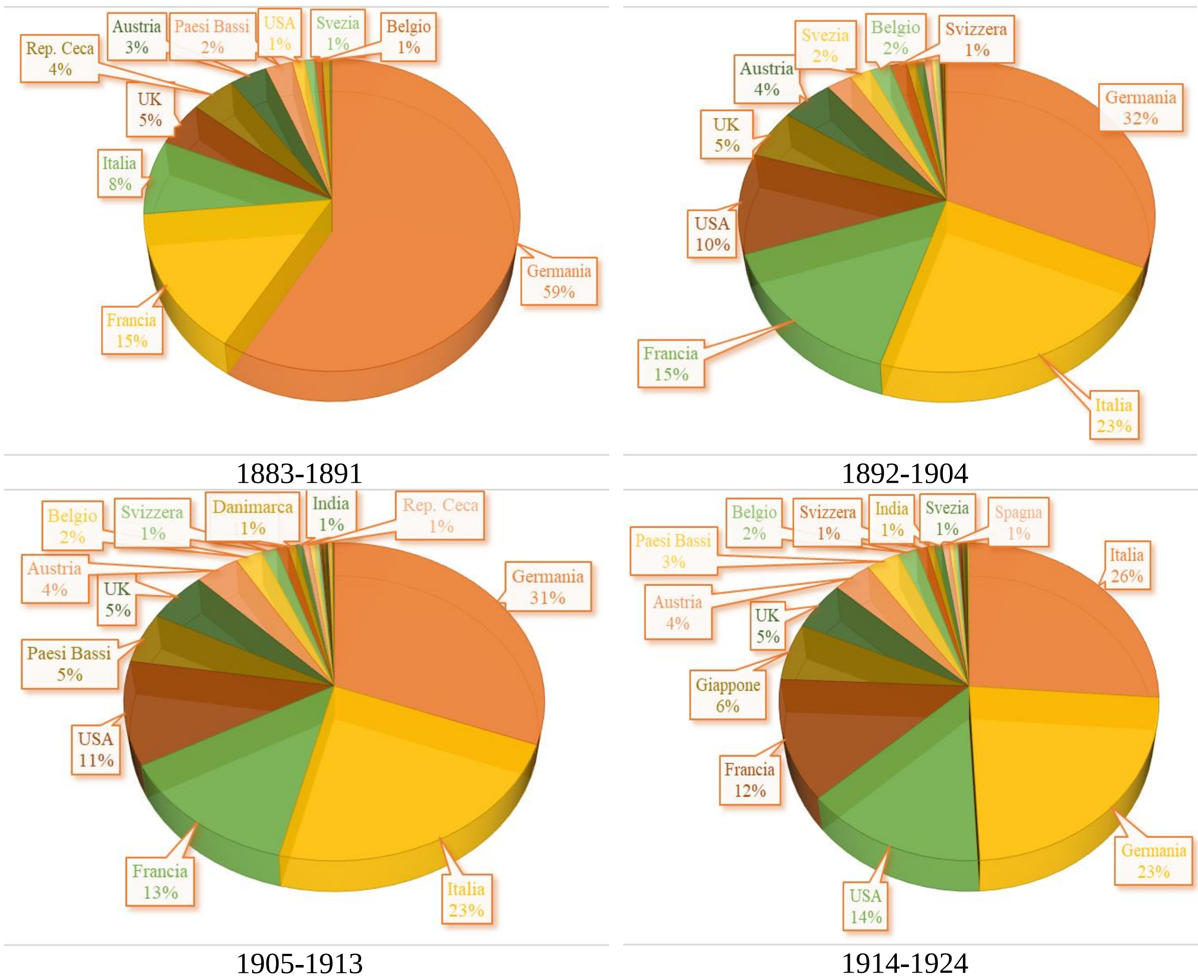


Fig. 8.6. Variazione dei lavori pubblicati tra il 1883 e il 1924, annotati nello Schedario Segre.

In questi anni Segre gode di un ampio successo come docente, testimoniato dalla folta schiera di allievi che si laureano con lui o che ne seguono i corsi come perfezionandi. Oltre ai già menzionati Castelnuovo, Fano, Amodeo, Enriques (1892-93) e Severi (1900), bisogna

[18] Si tratta di I. MASSARINI 1899, *Intorno alle coniche rispetto alle quali due altre sono tra loro polari reciproche*, «Giorn. di Mat.» 37, pp. 23-40.

ricordare Beppo Levi (1896, con 14 lavori citati nello Schedario), A. Tanturri (1899, 2 citazioni) e Giambelli (1901, 7 riferimenti). Le lezioni di Geometria superiore di Segre attirano studenti anche dall'estero: è questo il caso dei coniugi inglesi Young (14 riferimenti) e Chisholm (2), che si recano a Torino nel 1898-99, e di Coolidge (17) che trascorre nel capoluogo piemontese l'a.a. 1903-04. Dal 1907, inoltre, Segre assume la direzione della Biblioteca Speciale di Matematica, ereditando il posto di D'Ovidio.

Gli anni a cavallo tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento sono quindi caratterizzati dall'affermazione della Scuola italiana all'estero. Riflesso di ciò è anche l'intreccio da parte di Segre di una rete di contatti a livello internazionale che manterrà fino alla sua morte. Conseguentemente, tra i lavori annotati nello Schedario compaiono un buon numero di estratti di riviste danesi, norvegesi, ungheresi e argentine (Fig. 8.7). Inoltre, i periodici statunitensi assumono un ruolo importante all'interno dello Schedario passando dall'ospitare appena l'1% dei lavori pubblicati prima del 1892 al 10% dei lavori totali (Fig. 8.6). Spiccano in particolare quelli editi sulla costa est degli Stati Uniti: oltre alle già citate «Transactions of the AMS» e l'«American Journal of Mathematics», vi sono il «Bulletin of the AMS» (Providence, 84 citazioni), gli «Annals of Mathematics» (Princeton, 75) e i «Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences» (Cambridge, MA, 14). Tra i riferimenti dello Schedario iniziano a comparire alcuni lavori pubblicati nei paesi iberici (Fig. 8.8), sulle pagine degli «Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto», delle «Memorias da Academia Real de ciencias de Madrid» e delle «Publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático», edite nella capitale spagnola. Ma aumentano soprattutto le citazioni agli scritti pubblicati in Belgio e Paesi Bassi. La percentuale di pubblicazioni edite in questi territori passa da rappresentare appena il 2% dei riferimenti bibliografici dello Schedario ante 1904 al 7% dei lavori dati alle stampe dopo il 1904. Segre annota diverse note apparse sui «Verhandelingen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam» (135 in tutto) e sul «Nieuw Archief Voor Wiskunde» (28). Sul fronte belga, si segnalano i lavori pubblicati all'interno del bollettino e delle memorie dell'Académie royale de Belgique (con 56 e 14 riferimenti rispettivamente), seguiti da quelli apparsi nelle «Mémoires de la Société royale des sciences de Liège» (11).

Fig. 8.7. Cartografia mondiale delle opere dello Schedario.

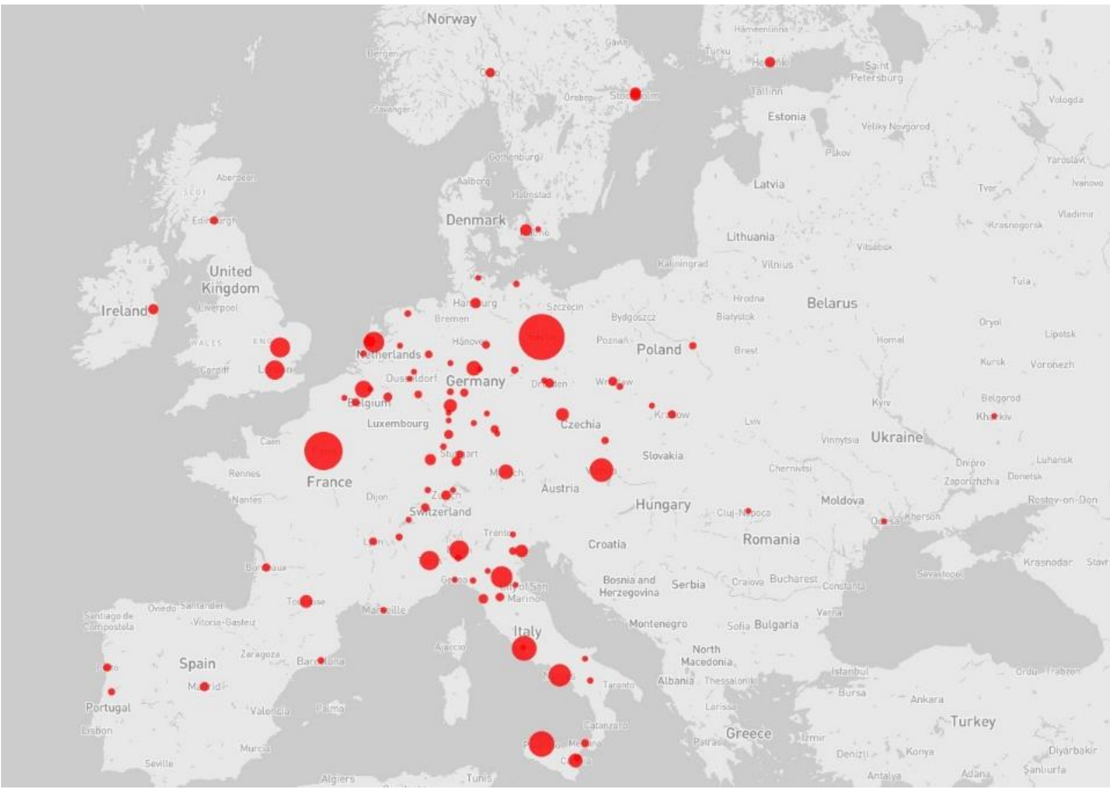


Fig. 8.8. Cartografia europea delle opere dello Schedario.

Il range delle letture di Segre degli ultimi quindici anni di attività è ampliato ulteriormente dagli articoli apparsi all'interno del «Bulletin of the Calcutta Mathematical Society» (24 riferimenti), rivista bimestrale internazionale di ricerca matematica fondata nel 1909. I lavori ivi contenuti, riportati da Segre nello Schedario, sono in buona parte firmati da matematici americani (P. Franklin, …) e inglesi (G.H. Bryan, C.E. Cullis, …) in quanto la Calcutta Mathematical Society aveva un rapporto di reciprocità con l'American Mathematical Society e la Cambridge Philosophical Society. Tra i geometri indiani, il più rappresentato è Syamadas Mukhopadhyaya con 11 lavori citati.

8.5. La svolta proiettivo-differenziale alla luce dello Schedario

Come noto, gli ultimi quindici anni di attività scientifica di Segre sono segnati dall'inaugurazione di un nuovo campo di indagine, quello della geometria proiettivo-differenziale, di cui egli delinea un vero e proprio programma di ricerca nel 1910, sulle pagine dei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».[19] La via tracciata da Segre in questo ambito è percorsa dai suoi studenti dell'ultimo periodo, in particolare da Terracini e Togliatti che si laureano sotto la sua direzione rispettivamente nel 1911 e nel 1912.

La svolta proiettivo-differenziale, scaturita dalla rilettura della teoria geometrica delle equazioni differenziali dal punto di vista proiettivo e dalla sua generalizzazione agli spazi di dimensione superiore, sta alla base di alcuni mutamenti nei riferimenti che Segre appunta all'interno dello Schedario nell'ultimo decennio di vita. Le voci dedicate a temi di geometria

[19] C. SEGRE 1910, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 30, pp. 87-121, 346-348.

proiettivo-differenziale vedono l'ingresso dei lavori degli ultimi allievi di Segre: Terracini (26 citazioni), Togliatti (13) e B. Segre (3).[20] I loro opuscoli vanno ad affiancare quelli firmati da Fubini (29), collega di Segre a Torino dal 1908, e Bompiani (30), allievo di Castelnuovo a Roma.[21]

All'interno dell'ambizioso progetto di ricerca in geometria proiettivo-differenziale di Segre si inscrivono anche i suoi contatti con i geometri giapponesi (Fig. 8.7): ai già menzionati lavori di Kubota si aggiungono quelli firmati da T. Hayashi (13), K. Ogura (9) e T. Nishiuchi (6). In questo periodo, Segre registra nello Schedario diversi lavori apparsi sulle testate giapponesi «The Tôhoku Mathematical Journal» (73), fondato da Hayashi nel 1911, «The Science Reports of the Tôhoku Imperial University» (35) e «The Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University» (12).

È interessante osservare come Segre, all'interno dello Schedario, suddivida i riferimenti bibliografici tra i lavori che affrontano un certo tema dal punto di vista della geometria proiettivo-differenziale e da quello della geometria algebrica. Ciò accade anche per temi molto specifici, come quello delle curve sghembe, e contribuisce a mettere in luce quali sono per Segre gli autori di riferimento nei due settori, le eventuali intersezioni e i rispettivi orizzonti temporali. Nel caso delle curve sghembe, entrambe le voci racchiudono un insieme di riferimenti a lavori apparsi tra gli anni Sessanta dell'Ottocento e il 1922-23. Tuttavia, mentre più della metà dei riferimenti in campo proiettivo-differenziale riguarda pubblicazioni del primo ventennio del Novecento, minore è la percentuale dei lavori registrati da Segre pubblicati in questo periodo nel settore della geometria algebrica: ciò riflette lo spostamento dei suoi interessi di ricerca.

Sul versante della teoria delle curve sghembe in geometria algebrica, Segre annota diversi contributi dei matematici tedeschi: Brill e Rohn *in primis* (con 3 citazioni a testa nel periodo 1871-1907), ma anche Clebsch (1867), Voss (1878), W. End (1890), H. Mohrmann (1918) e F. Löflund di cui registra la tesi discussa a Tübingen nel 1912. A questi si sommano i lavori pubblicati a Praga e Zurigo rispettivamente da Küpper (1891) e A. Beck (1908). Numerose sono anche le pubblicazioni dei matematici francesi che compaiono sotto questa voce dello Schedario Segre: si va dalle note di Autonne del triennio 1894-96 ai due articoli di E. Fabry del periodo 1906-08, dalla memoria sulle curve sghembe algebriche di R. De Montessus de Ballore (1917) al lavoro dedicato alle curve di Bertrand firmato da B. Gambier (1923). Ma la maggioranza dei contributi annotati da Segre reca la firma di autori del Belgio e dei Paesi Bassi: il più rappresentanto è W. Versluys (con 4 riferimenti a lavori degli anni 1903-1918), seguito – a pari merito – da P.-H. Schoute e M. Stuyvaert (2 citazioni a testa) e De Vries (con una pubblicazione del 1903). Non mancano naturalmente i riferimenti ai lavori degli esponenti della Scuola italiana, come quelli di Castelnuovo (1893) e Loria (1897). Completano questa voce dello Schedario gli scritti di Zeuthen (1869), Cayley (1893) e Snyder (1907).

[20] L'esiguo numero di opuscoli di B. Segre è dovuto esclusivamente alla poca distanza temporale tra la sua laurea e la morte di Segre: Beniamino, infatti, consegue il titolo con Segre nel 1923.

[21] La relazione di magistero tra Segre e Bompiani è riflessa nella corrispondenza scientifica tra i due degli anni 1913-14. Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: C. Segre a E. Bompiani, Torino 2.1.1913, 3.1.1913, 4.1.1913, 7.1.1913, 13.1.1913, 23.1.1913, 9.5.1913, 16.6.1913, 23.10.1913, 10.1.1914, 4.2.1914; C. Segre a E. Bompiani, Varallo Sesia (VC) 15.8.1913; C. Segre a E. Bompiani, Ancora 20.9.1913, edite in PAOLONI 1991, *cit*., pp. 64-93.

Hayashi è l'unico autore a far da *trait-d'union* tra l'impostazione della geometria algebrica e quella proiettivo-differenziale nello Schedario. Segre segnala infatti il suo articolo del 1916 apparso sugli «Annals of Mathematics» alla voce "Curve sghembe algebriche" ma annota anche un contributo del medesimo anno, pubblicato invece nel «Giornale» di Battaglini, all'interno della scheda "Curve sghembe (geom. differenziale)".

Tra le letture di riferimento per quanto riguarda l'approccio proiettivo-differenziale compare innanzitutto il volume delle *Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* (Leipzig, Teubner, 1893) di Lie e Scheffers che Segre possiede all'interno della sua biblioteca personale. Lo stesso vale per il trattato *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* (Leipzig, Teubner, 1906) di E. Wilczynski, autore di cui Segre registra anche il contributo presentato all'ICM di Heidelberg. Netta è la prevalenza di contributi dei matematici tedeschi a questo settore: con due riferimenti a testa, vi sono Hurwitz (1884 e 1885), P. Stäckel (1893 e 1894) e E. Salkowski (1909 e 1918), seguiti da R. Hoppe (1862), Study (1908), O. Venske (1903),[22] G. Gräbner (1916). Soltanto tre sono i riferimenti a pubblicazioni francesi, due articoli di J. Andrade apparsi nei «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris» (1896 e 1920) e il contributo di E. Goursat per i «Nouvelles Annales de Mathématiques» (1920). Sul versante italiano, Segre si annota le litografie della *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe* di Sannia (1922) e gli scritti precedenti di G. Pirondini (1892), Ramorino (1897) e E. Raimondi (1919). L'insieme dei lavori sulle curve sghembe secondo l'approccio differenziale è completato dal contributo sulle curve di Cesàro firmato dal greco Nikolaos Hatzidakis (1906).

8.6. Lo Schedario al crocevia con l'attività di docenza

Numerosi riferimenti bibliografici appartengono ad aree della geometria verso le quali Segre nutre un certo interesse in relazione alla sua attività di docenza. Notevoli sono infatti le sovrapposizioni tra le voci dello Schedario relative alla geometria proiettiva ed elementare e i contenuti degli appunti di geometria proiettiva (Quad. 38) e del corso di Geometria superiore dell'a.a. 1916-17 (*Vedute superiori sulla Geometria elementare*, Quad. 30).[23] *Idem* dicasi per la corrispondenza tra i riferimenti bibliografici sulle geometrie non euclidee e quanto esposto nelle lezioni degli a.a. 1902-03 (*Lezioni di Geometria non euclidea*, Quad. 16), 1908-09 (*Rassegna di concetti e metodi della Geometria moderna*, Quad. 22, pp. 144-154) e 1923-24 (*Geometria differenziale*, Quad. 37, pp. 96-104). Anche una buona parte delle letture consigliate durante i corsi di geometria differenziale (a.a. 1915-16, Quad. 29; a.a. 1923-24, Quad. 37) compare all'interno dello Schedario.

Dal confronto tra i riferimenti bibliografici annotati nelle voci dello Schedario e nei *Quaderni* emerge inoltre come, con il passare del tempo, Segre faccia un utilizzo crescente dello Schedario. Mentre rari sono i lavori citati nei primi corsi di Geometria superiore che appaiono nello Schedario – basti pensare che solo 2 dei 72 riferimenti contenuti

[22] Cfr. BSMT, *FSe*, Schedario, c. 142*r*. Segre inserisce la seguente osservazione accanto all'opera di Venske citata: "Determina lo spazio riempito dagli archi di data lunghezza che escono da un punto dato in data direzione".

[23] Cfr. E. LUCIANO 2023b, *A permanent construction site: from Segre's mind palace to his libraries*, «Nuncius» 38, 14 pp. f.c

nell'*Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti* (Quad. 3)[24] sono riportati nello Schedario – questi vanno aumentando con la fase di piena maturità scientifica di Segre, raggiungendo un alto grado di sovrapponibilità nelle lezioni di geometria numerativa (a.a. 1899-1900, Quad. 13) e in quelle dedicate ai gruppi continui di trasformazioni (a.a. 1897-98, Quad. 11; a.a. 1911-12, Quad. 25).

Lo stretto legame tra l'attività di docente di Segre e la costruzione dello Schedario emerge anche dalla perfetta corrispondenza tra alcune voci dello Schedario e specifiche sezioni dei corsi di Geometria superiore: è questo il caso dell'Hessiana (Quad. 23, pp. 182-212), della quadratura del cerchio (Quad. 30, pp. 181-200) o, ancora, degli aggregati infiniti (Quad. 39, pp. 3-11). Analogamente, si può presumere che le voci dello Schedario "Cerchi I, II, III", "Sfere I, II" e "Sfere (Geom. delle)" siano state compilate da Segre durante la preparazione delle lezioni per l'a.a. 1922-23 dedicate proprio alla *Geometria dei cerchi e delle sfere* (Quad. 36).

Area disciplinare	n. riferimenti	% riferimenti	n. voci	% voci
Aritmetica e analisi	29	40,3	12	40
Geometria	20	27,8	12	40
Teoria dei numeri	12	16,7	4	13,4
Didattica	6	8,3	1	3,3
Probabilità	5	6,9	1	3,3

Tab. 8.5. Distribuzione disciplinare delle voci e dei riferimenti bibliografici della sezione didattica.

Il maggior numero di riferimenti in comune si presenta però confrontando la sezione didattica dello Schedario con gli *Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero* (Quad. 40).[25] Tra le numerose indicazioni bibliografiche ripartite per argomento ivi contenute, quattro sono quelle relative alla didattica in generale che compaiono anche tra le carte dello Schedario, cui si affiancano tre lavori sull'insegnamento della geometria elementare e altrettanti sull'apprendimento dell'aritmetica, due di storia e soltanto uno di "didattica algebrica", il *Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis* di M. Simon (Leipzig, Teubner, 1906).

Lo straordinario impegno profuso da Segre nella formazione dei docenti attraverso la sua attività presso la Scuola di Magistero, da lui diretta tra il 1916 e il 1921, è dunque riflesso nelle annotazioni dello Schedario. Accanto alla sezione didattica e ai numerosi estratti di metodologia ed epistemologia della matematica che testimoniano la sensibilità di Segre verso tali tematiche, è necessario analizzare più da vicino la presenza di opuscoli firmati da autrici donne. Le matematiche italiane costituiscono quasi la metà delle autrici della miscellanea (Fig. 8.9), seguite da americane e tedesche. Tra loro non compaiono soltanto i nomi delle specialiste di geometria algebrica, quali Margherita Piazzolla-Beloch e Maria Del Re (entrambe con 4 estratti), Gelsomina Grimaldi (3) e Giuseppina Biggiogero (2). Un quinto delle autrici italiane è rappresentato da allieve di Segre che hanno sostenuto l'Esame di Magistero tra il 1914 e il 1919 ottenendo ottime valutazioni: Teresa Castelli (27/30), Maria Fritzsche (27/30), Maria Mancinelli (40/40), Elisa Viglezio (40/40) e Pia Locchi (40/40). Le ultime due sono anche

[24] Da questo corso, scaturirà l'importante memoria di Segre del 1894. Cfr. C. SEGRE 1894, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, «Ann. Mat.» (2) 22, pp. 41-142.

[25] Cfr. SEGRE / CONTE – GIACARDI –RASPANTI (eds.) 2020, *cit.*

assistenti presso la Facoltà MFN di Torino durante gli ultimi sei anni di attività di Segre: la prima alla cattedra di Calcolo infinitesimale, la seconda su quella di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno.

La sezione didattica, articolata in 30 voci per un totale di 72 riferimenti bibliografici, vede un equilibrio tra le voci relative ai concetti di aritmetica e analisi e quelle di geometria (Tab. 8.5). I lavori dedicati al calcolo elementare e infinitesimale, due aspetti fondamentali nell'insegnamento della matematica, superano di nove unità i riferimenti bibliografici ai testi geometrici. A differenza di quanto accade nella sezione bibliografica, la teoria dei numeri elementare occupa quasi il 17% dei riferimenti, rivestendo quindi per Segre una certa importanza in ambito didattico, in particolare in relazione alle questioni di divisibilità e di analisi indeterminata.

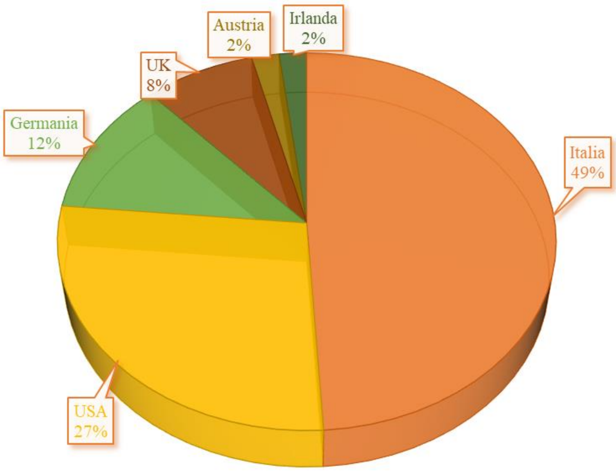


Fig. 8.9. Distribuzione per nazionalità delle autrici dello Schedario Segre.

8.7. Segre e Fano a confronto

Una delle peculiarità dello Schedario è il fatto che esso non è un semplice catalogo dei lavori del patrimonio Segre, come emerge dal confronto tra le sue voci e gli esemplari della biblioteca personale di Segre. Né possiamo supporre che Segre abbia sempre annotato i vari riferimenti bibliografici necessariamente nel loro anno di pubblicazione: può essere accaduto così per alcuni lavori, ma non per la maggior parte. Probabilmente Segre ha inserito alcune schede in momenti successivi, a seconda del tema di ricerca di cui si stava occupando in un determinato frangente o in relazione alla scelta di temi dei suoi corsi. Così, all'interno di una certa sezione, ha effettuato una selezione della letteratura sull'argomento, andando a registrare contributi magari apparsi diversi anni prima rispetto alla loro annotazione. Quel che è certo, tuttavia, è che Segre ha portato avanti un'operazione di analisi e cernita del materiale a disposizione, annotando quei lavori che per lui erano, per qualche ragione, maggiormente significativi.

In quest'ottica può aver senso confrontare il patrimonio virtuale di letture e riferimenti di Segre con il patrimonio materiale di Fano, frutto invece degli invii dei matematici contemporanei, dei viaggi all'estero e dei contatti accademici, piuttosto che di una selezione mirata. Alla luce di questa sostanziale differenza, appare rilevante esaminare quali sono quegli autori che, pur non figurando nella miscellanea Fano (o occupandone una parte irrisoria), costituiscono un punto di riferimento per Segre ed, eventualmente, anche per lo stesso Fano.

Sul versante francese, si segnala l'assenza di opuscoli firmati da Autonne nella raccolta di Fano mentre Segre menziona una trentina di suoi contributi nello Schedario. Alla luce del fatto che le ricerche di Fano sulle trasformazioni di contatto birazionali del piano affondano le radici nei contributi di Autonne, possiamo ascrivere l'assenza di tali scritti nella miscellanea Fano a una mancato contatto diretto tra i due. Ancora, tra i matematici francesi che compaiono nello Schedario e che, pur non trovando riscontro nella miscellanea Fano, sono punti di riferimento anche per quest'ultimo vi sono Poincaré (37 riferimenti), Gambier e Humbert (entrambi con 25 citazioni). Come emerge dall'analisi dei lavori citati da Fano, gli scritti di Picard costituiscono una lettura condivisa da Segre e Fano, anche se quest'ultimo possiede soltanto 5 estratti del matematico francese (contro i 25 riferimenti dello Schedario). Un discorso analogo vale per i contributi di alcuni geometri tedeschi quali Beck (22 citazioni nello Schedario), H. Liebmann (35), K. Kommerell (17), G. Kowalewski (16) e Voss (42 riferimenti nello Schedario, contro 2 opuscoli di Fano) e Meyer (37 citazioni vs. 2 estratti). Ancor più significativa è la discrepanza tra i lavori della Scuola di geometria inglese annotati da Segre e posseduti da Fano. Pur non avendoli a disposizione nella miscellanea personale, quest'ultimo condivide sicuramente con il Maestro l'interesse per i contributi di geometria algebrica di A. Basset (22 riferimenti), W.P. Milne (16) Baker (12) e A. Berry (4). Sul fronte statunitense, mentre Alexander compare solo tra i riferimenti di Segre, il numero di lavori di Lefschetz annotati da quest'ultimo e posseduti da Fano risulta invece paragonabile. *Idem* dicasi per Klein, di cui Fano conserva 19 estratti mentre Segre appunta 13 lavori nello Schedario, e per Cartan.

L'assenza di opuscoli di alcuni autori nella raccolta personale di Fano è sicuramente dovuta a ragioni temporali: è questo il caso di Cayley, deceduto due anni dopo la laurea di Fano, che compare invece nello Schedario Segre con 16 riferimenti. Un discorso analogo può valere per Lie – di cui Segre annota 18 lavori mentre Fano possiede un solo estratto – e Küpper, un autore non rappresentato nella miscellanea di Fano e citato da Segre per 33 contributi.

Un'altra ragione della discrepanza tra i due patrimoni risiede nei diversi interessi di ricerca dei due matematici, soprattutto per quanto riguarda il filone della geometria proiettivo-differenziale. Nello Schedario, infatti, Segre registra diversi contributi di Kubota e Mukhopadhyaya che non compaiono invece nella raccolta Fano. Lo stesso vale per Mohrmann (25 riferimenti), R. Mehmke e E. Kasner (entrambi con 18 citazioni), specialisti di geometria differenziale. Analogamente, si registra una netta differenza tra il numero di lavori di Bianchi, Blaschke e Wilczynski annotati da Segre e posseduti da Fano (rispettivamente nei rapporti di 20:1, 62:10 e 32:2). Si osserva infine un netto divario per quanto concerne i contributi di topologia: mentre Segre prende nota di vari articoli di Brouwer (42 riferimenti) e Kerékjártó (5), Fano conserva soltanto due estratti del primo e nessuno del secondo.

8.8. Reti di significato tra le voci dello Schedario

Lo Schedario Segre non si presenta come un mero elenco di riferimenti bibliografici suddivisi per tema. Le carte che lo compongono non contengono solo cancellature, correzioni e sottolineature, ma sono ricche di annotazioni di diversa natura, solitamente segnalate da Segre tra parentesi quadre.

È possibile suddividere tali note in due categorie principali, in base alla loro collocazione fisica all'interno della singola carta dello Schedario e alla loro funzione: le annotazioni accanto ai titoli delle schede, con lo scopo di creare un collegamento con altre voci dello Schedario, e quelle che accompagnano i riferimenti bibliografici. Queste ultime assumono molteplici funzioni, dal fornire ulteriori indicazioni sul lavoro in questione (Fig. 8.10) al racchiudere commenti e osservazioni personali.

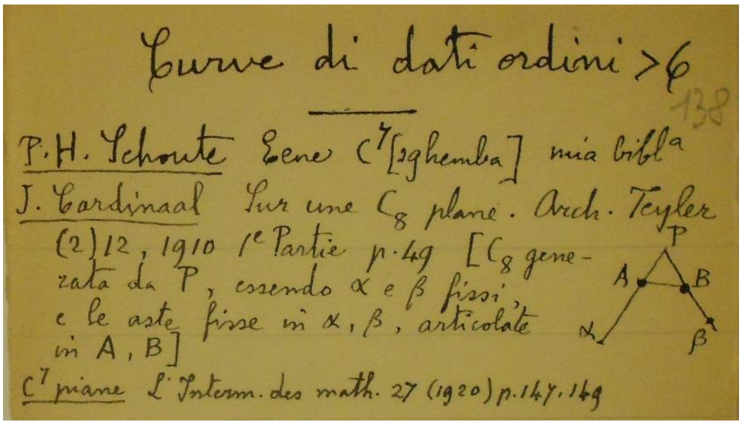

Curve di dati ordini >6
138
P.H. Schoute Gene C^7 [sghemba] mia bibl^a
J. Cardinaal Sur une C_8 plane. Arch. Teyler (2) 12, 1910 1e Partie p. 49 [C_8 generata da P, essendo α e β fissi, e le aste fisse in α, β, articolate in A, B]
C^7 piane L'Interm. des math. 27 (1920) p. 147, 149

Fig. 8.10. Carta 138r dello Schedario Segre.

Le note giustapposte ai titoli delle schede aprono una finestra su quelli che, per Segre, sono i collegamenti tra diversi problemi e punti di vista all'interno della matematica. Oltre a mettere in rapporto coppie di voci dello Schedario, Segre costruisce reti più ampie. Si presentano infatti due tipi diversi di collegamenti: 'a triangolo', nel caso in cui ciascuna voce risulti collegata ad altre due, e 'ad albero', quando invece vi sono due voci tra loro non correlate che contengono un riferimento ad una medesima voce (Fig. 8.11). Non è, questa, una distinzione 'astratta' ma implica differenti relazioni a livello degli oggetti matematici coinvolti: il collegamento 'a triangolo' connette concetti che, per Segre, hanno un simile grado di generalità e lo stesso rilievo a livello di costruzione di una teoria matematica, come accade per alcuni particolari tipi di corrispondenze (algebriche, trilineari e plurilineari). Nella configurazione 'ad albero', invece, compare una voce 'madre' con un peso maggiore rispetto alle voci 'figlie' cui è collegata: è questo il caso della nozione tedesca di *Nullsystem* che interviene nella trattazione di argomenti – per Segre – sostanzialmente distinti (in questo caso, i sistemi di superfici e i complessi lineari di rette).

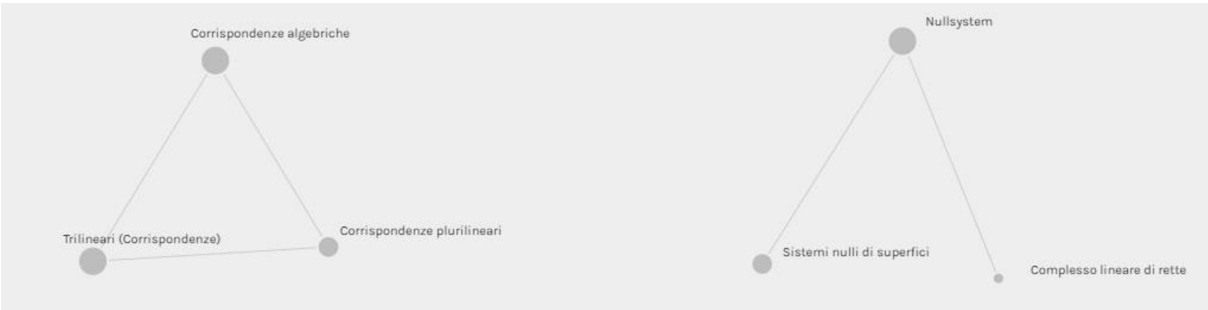


Fig. 8.11. Collegamento tra tre voci 'a triangolo' (a sx) e 'ad albero' (a dx).

Se già i legami tra tre voci dello Schedario sono di un certo interesse, di maggior rilievo risultano le reti di significato costruite da Segre tra un numero maggiore di oggetti matematici, al cui interno possono comparire più livelli gerarchici. Si ritrovano, anche in questo caso, i collegamenti 'a triangolo' e 'ad albero' precedentemente introdotti, come per il network di argomenti di geometria differenziale che si viene a creare attorno alla voce “Curvatura” (Fig. 8.12, c.).

Dall’analisi di queste reti complesse emerge come il sapere matematico sia patrimonializzato da Segre in uno scenario dinamico e interconnesso. Da un lato, alcuni networks di voci riflettono collegamenti classici tra i concetti matematici: ad esempio, la nozione generale di configurazione si specializza nei casi particolari di triangolo, tetraedro ed esagono, quest’ultimo a sua volta strettamente correlato al noto teorema di Pascal (Fig. 8.12, b.). O ancora, un caso particolare di trasformazioni cremoniane è costituito da quelle nello spazio, al cui interno rientrano le trasformazioni quadratiche e le involuzioni; queste ultime comprendono poi le trasformazioni cremoniane periodiche (Fig. 8.12, d.). Dall’altra parte, le reti di voci dello Schedario sono il luogo in cui meglio emergono i collegamenti tra i diversi settori del sapere matematico, all’interno di quella prospettiva interdisciplinare fortemente auspicata da Segre, a Heidelberg come durante le sue lezioni. La voce “Movimenti” fa così da *trait-d’union* tra una branca della matematica applicata – la meccanica – e una della matematica pura – la teoria dei gruppi (Fig. 8.12, a.). La nozione di sistema di curve (Fig. 8.12, e.) unisce invece concetti della matematica di base (coniche) a nozioni avanzate di geometria algebrica (congruenze di curve) e infinitesimale (curve definite da equazioni differenziali). Ma la rete più ampia di significati geometrici è quella che si articola attorno al concetto di trasformazione che supera i confini tra geometria algebrica (con gli studi sulle curve e sulle superfici algebriche), geometria proiettivo-differenziale (geodetiche e trasformazioni conformi) e topologia, con quest’ultima che forma a sua volta una configurazione ‘a triangolo’ con le voci “Connessione” e “Analysis situs”.

8.9. Tracce della costruzione di un patrimonio nelle note puntuali

Le annotazioni di Segre accanto ai riferimenti bibliografici che compongono lo Schedario restituiscono alcuni elementi interessanti relativi al processo di patrimonializzazione del sapere matematico dell’epoca. Al loro interno, Segre non si limita infatti a fornire qualche dettaglio sull’opera in questione o a riportare le definizioni o le idee più importanti.

Una prima tipologia di note – quelle numericamente più consistenti – è strettamente correlata a quello che per Segre è il ruolo delle biblioteche nella costruzione, trasmissione e circolazione della conoscenza matematica. Sul modello della *Lesezimmer* di Gottinga, egli concepisce la biblioteca come uno spazio per fare ricerca, dove poter lavorare collettivamente, insieme a allievi e colleghi, sui testi a disposizione.[26] All’interno dello Schedario inserisce così un elevato numero di note per indicare dove è possibile reperire un determinato testo. In questo senso, tre sono i punti di riferimento di Segre: la propria biblioteca personale (129 note), la BSMT (15) e la Biblioteca dell’Accademia delle Scienze di Torino (11), di cui Segre è socio dal 1889.

Al secondo posto per numerosità, spiccano i riferimenti alle recensioni pubblicate all’interno dello «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» (65 note). Si tratta perlopiù di annotazioni relative ai lavori tedeschi che testimoniano l’importanza attribuita da Segre ai repertori bibliografici internazionali. Una tendenza, questa, che scaturisce anche dall’incarico affidatogli da Klein tra il 1884 e il 1885 di recensire i lavori dei matematici italiani per tale rivista. La posizione di rilievo assunta dallo «Jahrbuch» nella patrimonializzazione del sapere

[26] Durante la sua direzione Segre lavora per trasformare la BSMT in questo senso. A tal proposito, cfr. LUCIANO 2018, *cit*., pp. 441-442.

matematico del tempo (e, in particolare, del sapere geometrico) emerge anche dai riferimenti bibliografici ai lavori di geometria redatti in lingue non conosciute da Segre: egli li trae infatti dalla lettura dello «Jahrbuch» e specifica nello Schedario, accanto al riferimento puntuale all'interno della rivista, la lingua originale (boemo, ceco, russo, olandese, danese…) in cui sono editi. Per Segre lo «Jahrbuch» costituisce il principale mezzo di aggiornamento, ma non l'unico. Egli riporta anche i riferimenti a sunti e recensioni apparsi su altre riviste: *in primis*, «L'Intermédiaire des mathématiciens», ma anche i «C. R. de l'Académie des Sciences de Paris», l'«Archiv der Mathematik und Physik» e i periodici italiani «Bollettino dell'UMI» e «Periodico di Matematiche».

Un'ulteriore serie di note segnala la presenza di una bibliografia particolarmente ricca all'interno di un certo lavoro riportato nello Schedario.[27] Dalla necessità di orientarsi all'interno della letteratura scientifica, caratterizzata da una crescente specializzazione, e dalla volontà di fondare la 'nuova' conoscenza matematica su un retroterra culturale il più ampio possibile scaturiscono anche i riferimenti a bibliografie su uno specifico argomento, come quella dedicata alla configurazioni apparsa nell'ottavo volume de «L'Intermédiaire» nel 1901 (c. 81*r*).

Altre due categorie di note, seppur meno frequenti, sono significative in relazione all'operazione culturale di selezione, organizzazione e rielaborazione del sapere matematico portata avanti da Segre nello Schedario: quelle relative ai metodi e procedimenti utilizzati nelle dimostrazioni e quelle che ricostruiscono l'evoluzione di un certo filone di indagine o ne rintracciano le origini. Le prime[28] mettono in luce l'attenzione di Segre verso i diversi metodi di ricerca matematica cui, fin dai primi anni di attività scientifica, attribuisce pari valore:

> L'argomento è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che […] si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni, in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri.[29]

Le seconde[30] sono emblematiche della meticolosità di Segre nel seguire i progressi della geometria, con particolare attenzione ai contributi della Scuola italiana: è questo il caso del lavoro di Kasner del 1903 accanto al quale Segre appunta "il più è già in Veneroni" (c. 97*r*) o della dissertazione di O. Göhner (1913) sulle curve algebriche iperspaziali accanto alla quale compare l'annotazione "estensioni dei numeri di Castelnuovo, Severi" (c. 454*r*). Ancora, accanto alla nota *Sur les périodes des intégrales doubles* di H. Poincaré (1906), Segre scrive con un certo orgoglio "il mio invariante".

---

[27] Questa tipologia di annotazioni è caratterizzata dalla presenza di espressioni come "con altre citazioni", "con altre indicazioni bibliografiche", "con ricca bibliografia", "con citazioni di lavori precedenti". Cfr. BSMT, *FSe*, Schedario, cc. 82*r*, 108*v*, 257*r*, 287*r*, 322*r*, 354*r*.

[28] Cfr., *inter alia*, BSMT, *FSe*, Schedario, cc. 50*v*, 125*v*, 218*v*, 421*r*, 442*r*: "Poche cose con dimostrazione analitica", "Dimostrazioni rigorose delle proprietà fondamentali", "Metodo funzionale", "Trattazione geometrica minuta", "Metodo semplice di deduzione, con certi triangoli rettilinei analoghi forse a quelli di Lobacefski".

[29] SEGRE 1894, p. 200.

[30] Cfr., ad esempio, BSMT, *FSe*, Schedario, cc. 79*v*, 147*r*, 159*r*, 393*v*: "Prosegue le ricerche di realità del Reye", "Ritrova, per nuova via, i risultati di Weingarten", "Mio libretto di Geometria numerativa 1899-1900 p. 71 e seg.", "Ciò si trova già in Voss". Compaiono inoltre alcune note – quali "Corregge tutto quanto!" (c. 406*v*) – che segnalano emendamenti e rettifiche di risultati precedenti (cc. 123*v*, 144*v*, 194*r*, 216*r*, 267*r*).

Una sesta categoria di annotazioni rivela l'impegno di Segre nell'ambito della formazione dei docenti, mostrando una prima fase di elaborazione di quelle ampie bibliografie ragionate che Segre propone ai suoi studenti della Scuola di Magistero. L'ampia panoramica sulla letteratura relativa ai problemi dell'insegnamento delle varie branche della matematica, a manuali e libri di esercizi, ai lavori di matematica dilettevole e di storia della matematica, agli scritti sui fondamenti e a quelli pedagogici così come alla legislazione scolastica dei vari paesi affonda le radici nella redazione dello Schedario. Non di rado in esso si trovano quei commenti e giudizi personali sui testi segnalati che Segre riporta poi nei suoi *Quaderni*.[31]

La natura degli appunti di Segre che appaiono sulle carte dello Schedario è quindi eterogenea, in termini quantitativi e qualitativi, andando dalle note che segnalano l'appartenenza di un'opera a una collana – è questo il caso di cinque volumi della *Mathematische Bibliothek* (n. 1, 3, 11, 12, 16) – a spunti per nuove ricerche.[32] Nelle loro molteplici sfaccettature, le annotazioni dello Schedario riflettono i diversi aspetti e momenti del processo di patrimonializzazione del sapere: reperibilità dei testi matematici; necessità di una bibliografia adeguata, che tenga conto dello sviluppo storico e della molteplicità di approcci alla materia; ricezione in campo internazionale tramite le recensioni su riviste; implicazioni sull'insegnamento della disciplina.

8.10. Un patrimonio peculiare di un geometra italiano

Se, da un lato, è indubbio che lo Schedario rappresenta uno strumento di lavoro individuale nelle mani di Segre, dall'altro può considerarsi come un osservatorio privilegiato sul mondo della Scuola italiana di geometria algebrica, anche in virtù del ruolo di *leader* di Segre. Tenendo conto di questo aspetto e grazie alla minuziosa articolazione in voci condotta da Segre, è possibile confrontare tale insieme di riferimenti con le raccolte bibliografiche o enciclopediche edite in altri paesi europei e dunque rappresentative di un diverso processo di patrimonializzazione dei medesimi oggetti matematici.

Sul versante francese, di primaria importanza è il progetto di costruzione della bibliografia matematica ideale nel «Répertoire bibliographique des sciences mathématiques». Ciò che emerge è un profondo divario tra le letture di riferimento di Segre e quelle dei matematici francesi, sia in quelle aree di ricerca tipiche della Scuola sia in quei settori meno coltivati in Italia, quali la topologia e la teoria dei numeri. Soltanto in parte esso è ascrivibile al crescente ritardo con cui venivano pubblicate le *fiches* del «Répertoire» rispetto alla loro redazione e al fatto che la geometria è il settore meno rappresentato, con solo il 17% dei riferimenti bibliografici.[33] Il concetto di trasformazione birazionale, centrale per i geometri italiani, corrisponde alla sezione *P 4g* del «Répertoire». Qui solo due sono i riferimenti bibliografici in

[31] Cfr., *inter alia*, BSMT, *FSe*, Schedario, cc. 209*r*, 213*v*, 216*v*, 233*v*, 372*v*: "Storico", "Filosofico", "Trattato utile, moderno", "Articoletto scolastico", "Trattato ampio e moderno", "Opera completa, ricca di commenti". Segre, maestro esigente, inserisce anche giudizi non del tutto positivi: "Non contiene nulla di nuovo" (c. 104*r*), "Nulla di essenziale" (c. 122*v*), "Non va" (cc. 167*r*, 398*v*).

[32] Cfr., ad esempio, BSMT, *FSe*, Schedario, c. 426*r*. A proposito delle trasformazioni cremoniane, Segre annota che il lavoro di Picard del 1893 "sarebbe da confrontare quanto prevede Caporali nella relazione su Kantor sulla riducibilità del problema delle trasformazioni periodiche a quello della divisione di nuove trascendenti".

[33] Cfr. L. ROLLET – P. NABONNAND 2002, *Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*, «Gazette des Mathématiciens» 92, p. 11.

comune con lo Schedario di Segre, rappresentati dai lavori di E. Picard (1894) e di Schoute (1898). Ancor più sorprendente è il fatto che non ci sia alcun lavoro condiviso sul tema delle superfici rigate, con cui Segre si confronta in una lunga serie di lavori tra il 1884 e il 1889, risolvendo brillantemente questioni di crescente difficoltà. Tenendo anche presente che l'80% dei testi sull'argomento indicati nel «Répertoire» è anteriore al 1890, una discrepanza così netta con lo Schedario è emblematica della diversa patrimonializzazione delle ricerche sulla geometria delle rigate in Francia e in Italia. Pur sempre numericamente esigui, maggiori sono invece i punti di contatto per quanto riguarda gli autori di riferimento in un campo scarsamente 'frequentato' in entrambe le nazioni quale l'Analysis situs (Poincaré, O. Simony, …). Per quanto riguarda la teoria dei numeri, ciò che emerge è una diversa collocazione all'interno dei settori della matematica: per Segre si tratta di una branca della matematica 'al servizio' della geometria nel campo della ricerca avanzata; in Francia, invece, fa parte a pieno titolo dell'analisi, all'interno della quale interviene nella risoluzione delle equazioni algebriche e delle questioni di analisi indeterminata.

La patrimonializzazione del sapere matematico di Segre è invece più vicina a quella dei matematici tedeschi, con i quali è in stretto contatto. Diversi sono i punti in comune tra le sezioni della *Literatur* dell'*Encyklopädie* relative a temi di matematica pura (e, in particolare, di geometria) e le voci dello Schedario Segre. Bisogna tener presente che la partecipazione in prima persona di Segre a tale progetto editoriale – con la stesura del capitolo *Mehrdimensionale Räume* – ha sicuramente giocato un ruolo importante.[34] La massiccia presenza di matematici della 'Segre connection' (Fano, Enriques, Castelnuovo, Loria e Berzolari) nella sezione di geometria dell'enciclopedia tedesca è poi un forte segnale del crescente prestigio internazionale della Scuola. Appare in un certo senso naturale, ma anche altamente significativo, il fatto che il maggior numero di sovrapposizioni tra lo Schedario Segre e le sezioni bibliografiche dell'EMW si registri proprio nelle voci firmate dai geometri italiani, raggiungendo il massimo nei *Prinzipien der Geometrie* di Enriques (19 riferimenti in comune).[35] Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, la maggior parte dei testi di riferimento in comune (circa il 60%) non è firmata dai geometri italiani, ma dai tedeschi. Non è, questo, un aspetto legato esclusivamente al fatto di scrivere un contributo all'interno un progetto editoriale tedesco, seppur di evidente vocazione internazionale. Si tratta invece di un fattore rilevante per comprendere come il patrimonio geometrico italiano sia fortemente radicato sui contributi tedeschi di fine Ottocento e inizio Novecento. Essi fanno da sfondo ineludibile per la nascita e il proliferare della Scuola italiana, almeno fino alla Prima guerra mondiale.

Vi è un ultimo elemento di interesse da tenere in considerazione all'atto di analizzare il processo di patrimonializzazione dei saperi matematici alla luce del patrimonio materiale di un singolo, costruito nel tempo come strumento di lavoro, come quello Segre. Si tratta di quei testi

---

[34] C. SEGRE 1921, *Mehrdimensionale Raume*, in EMW, III.2.2a, pp. 769-972. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 6.10.1951: "Anch'io, per quanto ricordo, ho netta impressione che C. Segre, redigendo il suo articolo sugli iperspazi, lo abbia fatto volentieri; anzi molto volentieri, ritenendo egli stesso di essere a ciò particolarmente indicato. I suoi lavori del periodo 1883-96 si riferiscono quasi tutti alla geometria proiettiva degli iperspazi; sono questi che hanno cominciato a creargli la posizione".

[35] F. ENRIQUES 1907, *Prinzipien der Geometrie*, in EMW, III.1.1, pp. 1-129. Diversi sono anche i testi dello Schedario che sono citati nella sezione redatta da Fano sulla teoria dei gruppi continui, in quella di Castelnuovo ed Enriques sulla teoria delle superfici algebriche e in quella relativa alle curve algebriche di grado superiore al quarto firmata da Loria.

che non compaiono all'interno delle voci dello Schedario in quanto così fondamentali e talmente cristallizzati all'interno del patrimonio culturale da rendere superflua una loro annotazione.[36] Prima fra tutte, spicca l'assenza del *Programma di Erlangen* di Klein, sia in tedesco sia nella traduzione italiana. Per Segre, così come per i suoi allievi, esso riveste un'importanza fondamentale all'interno dello sviluppo della matematica e ha notevoli implicazioni sia in campo didattico – come Segre sottolinea nei suoi corsi alla Scuola di Magistero – sia nella ricerca geometrica avanzata. Per quanto riguarda un tema centrale della Scuola italiana come quello della teoria delle superfici, emblematica è l'assenza di due dei lavori fondanti per tale indirizzo di ricerca: i *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (1866) di Cremona e il saggio *Sur une classe de surfaces algébriques* (1900) dei cognati Castelnuovo ed Enriques. Ancora, tra le carte dello Schedario mancano i riferimenti a quei testi classici che Segre possiede all'interno della biblioteca personale o che è solito consultare in BSMT e citare durante le sue lezioni: il trattato di Salmon sulla geometria analitica in dimensione tre (1865) e l'*Analytische Geometrie des Raumes* scritta in collaborazione con Fiedler (1880); i testi francesi *Aperçu historique…* (1837) di Chasles e *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (1897 e 1906) di Picard e Simart; le rassegne italiane di taglio storico-bibliografico quali *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (1887) di Loria e il *Repertorio di matematiche superiori* (1900) di E. Pascal; ma anche gli scritti più famosi di Klein di cui Segre ha una conoscenza approfondita.

Ciò che emerge è una sedimentazione della conoscenza matematica della Scuola italiana di geometria algebrica. Gli strati inferiori fanno parte di un retroterra culturale collettivo che non necessita di essere esplicitato; i livelli sovrastanti, manifesti nelle voci dello Schedario del caposcuola, hanno una duplice funzione: consolidare l'identità del gruppo di ricerca e tracciarne la via per nuove ricerche.

Oltre a consentire di individuare con maggior dettaglio le radici culturali del pensiero di Segre in campo matematico e le fonti cui attinge (provenienti soprattutto da Germania e Italia, ma non solo), la ricostruzione di questo patrimonio virtuale restituisce l'immagine di un ambiente in cui matura una visione condivisa della trasmissione della conoscenza matematica, aperto alle interazioni con l'ambiente internazionale, almeno nel primo periodo della Scuola.

La rilevanza storica dello Schedario è dunque indiscutibile nella misura in cui essa documenta, a livello individuale, lo spessore della cultura matematica e scientifica di Segre e la vastità dei contatti che stabilisce con centri editoriali di tutto il mondo e, a livello di Scuola, le diverse fasi del processo di trasformazione dei singoli contributi matematici a patrimonio condiviso e riconosciuto, implicitamente 'istituzionalizzato' all'interno della socialità del gruppo di ricerca.

[36] Alcuni di questi lavori, come quelli di Mehmke e W. Clifford, sono soltanto citati da Segre all'interno delle note a margine dei riferimenti bibliografici. Cfr. BSMT, *FSe*, Schedario, cc. 67*v*, 347*r*, 376*r*, 459*r*.

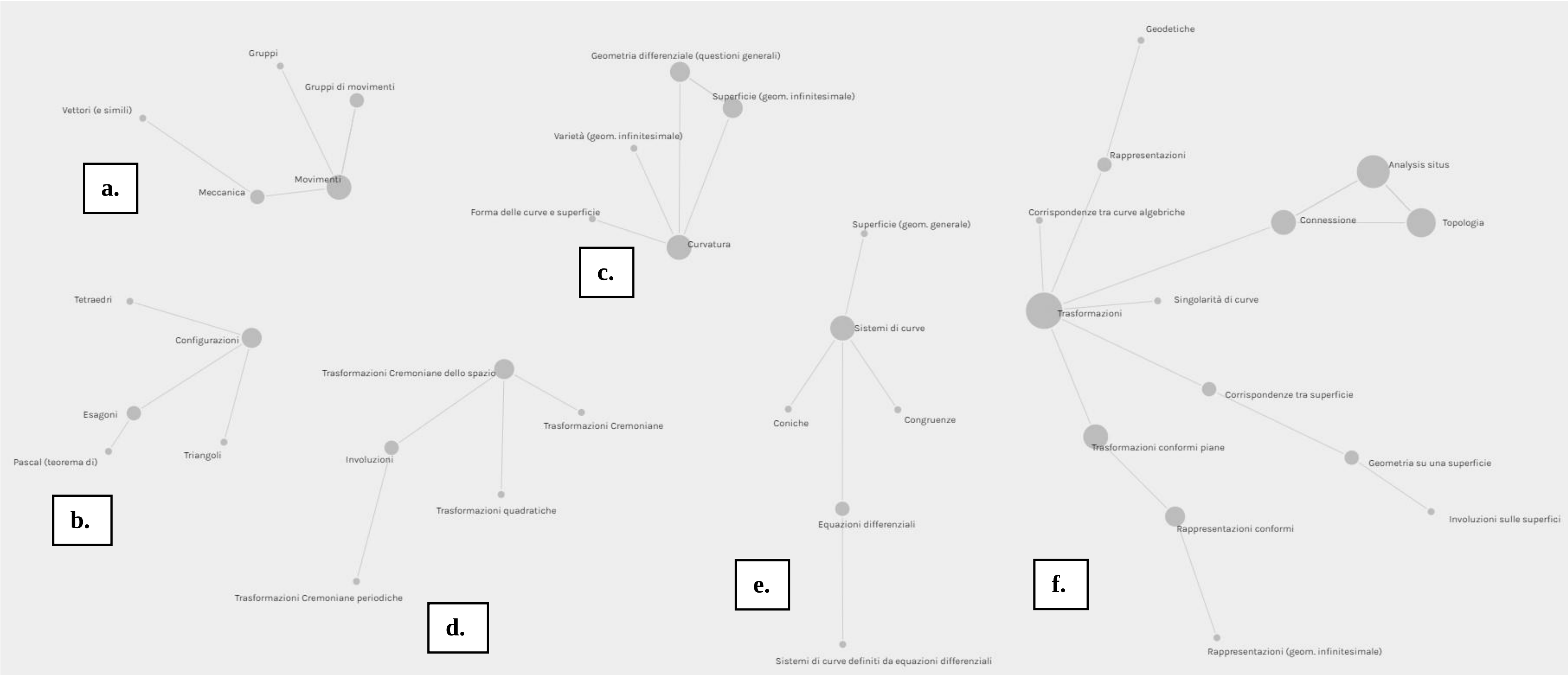


Fig. 8.12. Reti tra più di quattro voci dello Schedario.

9. *La Biblioteca Matematica di Roma*

Quella che oggi è la Biblioteca del Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo" dell'Università di Roma "La Sapienza" (nel seguito BIMR) è, almeno in parte, frutto dell'attività istituzionale, scientifica, e organizzativa di quei matematici che hanno rappresentato il polo romano della Scuola italiana di geometria algebrica.[1] Dagli anni Settanta dell'Ottocento agli anni Cinquanta del Novecento la Biblioteca ha accompagnato le ricerche dai geometri italiani – da Cremona a Bompiani, passando per Castelnuovo, Enriques, Severi, Scorza e altri ancora – venendo a sua volta arricchita dai testi da loro utilizzati, dai volumi scambiati con i colleghi italiani e stranieri, dalle loro pubblicazioni a stampa.

Il fondo librario, che attualmente consta di oltre 105.000 volumi e 1.300 collezioni di riviste, rende la Biblioteca dell'ateneo romano la più completa in Italia in ambito matematico e tra le maggiori in tutto il mondo. Il suo patrimonio è impreziosito da centinaia di manoscritti e carteggi autografi e da un fondo antico, costituito da circa 2.500 opere edite tra il 1482 e il 1830. Tra esse, di particolare pregio sono nove incunaboli e 140 cinquecentine.[2]

La Biblioteca, così com'è oggi, è il risultato di due secoli di crescita e di spostamenti che in larga parte si intrecciano con la storia della Scuola italiana di geometria algebrica. In quest'ottica e alla luce di fonti d'archivio inedite, si ripercorre la storia della Biblioteca con particolare attenzione al suo patrimonio geometrico.

9.1. Dalla fondazione a inizio Novecento: l'eredità di Cremona

La creazione della Biblioteca risale alla fondazione della Pontificia Scuola degli Ingegneri di Roma, istituita motu proprio il 23 ottobre 1817 dal papa Pio VII.[3] Nel 1826, in seguito al trasferimento della Scuola nel Palazzo della Sapienza – attuale sede dell'Archivio di Stato di Roma (Complesso di Sant'Ivo alla Sapienza, in Corso del Rinascimento 40) – l'esiguo patrimonio librario, che all'epoca contava meno di un centinaio di volumi, è ospitato dalla Biblioteca Alessandrina,[4] conservando un catalogo separato.

---

[1] Sulla matematica a Roma in questo periodo, cfr. P. NASTASI – E. ROGORA 2020, *From internationalization to autarky: Mathematics in Rome between the two world wars*, «Rend. Mat. e Appl.» 41, pp. 1-50.

[2] Cfr. P. BIANCOFIORE BUONGIORNO 1982, *Il Fondo librario antico della Biblioteca dell'Istituto Matematico "G. Castelnuovo"*, «Accademie e Biblioteche d'Italia» 50.2, pp. 112-125: sono qui catalogati i 120 volumi risalenti ai secoli XV e XVI. I frontespizi delle opere più preziose sono riprodotti in 1993, *La biblioteca del Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"*, in F. CONTI, E. GIUSTI (eds.), *Oltre il compasso. La geometria delle curve*, Roma, Edizioni Carte Segrete, pp. 79-87. Tra gli incunaboli, di particolare importanza sono la prima edizione a stampa degli *Elementi* di Euclide (1482), la prima edizione delle tavole alfonsine (1483), due differenti edizioni della *Sphera mundi* di Sacrobosco (1482 e 1499), la prima edizione delle *Tavole* di Giovanni Bianchini (1495), la prima edizione dell'*Epitoma in Almagestum Ptolomei* del Regiomontano (1496) e il "Libro d'abacho" (*Qui comenza la nobel opera de arithmethica ne la qual se tracta tute cosse a mercantia pertinente..*.) di Pietro Borghi (1491).

[3] Essa rappresenta la prima Scuola d'ingegneria civile in Italia. Dipendente in un primo momento della Prefettura di Acque e Strada, essa è annessa alla Facoltà di filosofia e matematica dell'Università romana da Leone XII con la *Ordinatio De Scholis Tecnicis* del 12 febbraio 1826. Giuseppe Venturoli fu il suo primo direttore.

[4] Il nome deriva da quello del suo fondatore, il papa Alessandro VII, che tra il 1660 e il 1666 ne costituì il primo nucleo.

La sua fase di crescita inizia solo nel 1870, grazie all'iniziativa di Luigi Cremona, direttore della Reale Scuola di Applicazione degli Ingegneri, riorganizzata con il Regio Decreto del 9 ottobre 1873 e destinata agli allievi ingegneri che avevano superato il biennio fisico-matematico. Alla Scuola è assegnata come sede l'ex-convento di San Pietro in Vincoli: in un primo momento i volumi della Biblioteca, trasferiti dall'Alessandrina[5], sono ripartiti tra gli uffici della Segreteria – dove vengono collocati quelli di uso più frequente – e l'antica Biblioteca dei frati, che funge contemporaneamente da aula di disegno. Nel 1876 alla Biblioteca è destinato il pian terreno dell'ala nord-est dell'edificio (ex-refettorio dei frati) cui saranno aggiunti l'ex-cucina del convento (1879) e buona parte del chiostro.

Sotto la direzione di Cremona (1870-1878) la Biblioteca non si arricchisce soltanto delle raccolte di periodici e delle opere di ingegneria, ma anche delle collezioni matematiche della Facoltà di Scienze MFN, acquistate con i fondi universitari, che andranno a costituire il primo nucleo della Biblioteca matematica. Nel 1878 è annessa la Biblioteca della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), composta principalmente da atti e memorie delle maggiori accademie e società scientifiche europee. Trasferita da Modena dove "era andata soggetta a vicende assai lagrimevoli", a Roma essa è collocata in "due camerette dell'edificio della Scuola degl'ingegneri"; è qui completamente riordinata per volere di Cremona che si prodiga anche per colmare le lacune nelle collezioni delle riviste, scrivendo in prima persona alle istituzioni che ne curavano la pubblicazione.[6] Cremona rilancia così la Biblioteca della Società dei XL, invitando i soci a inviare le loro memorie scientifiche e dandone alle stampe il catalogo nel 1884.

A causa dei crescenti impegni istituzionali, Cremona lascia la carica di direttore della Biblioteca della Scuola di Applicazione che passa a Valentino Cerruti. Quest'ultimo prosegue l'opera di formazione di una Biblioteca scientificamente aggiornata, dotata sia di volumi di specifico interesse tecnico-matematico sia di spiccato interesse storico bibliografico. Come scriverà a distanza di anni R. Marcolongo,

> Il Cremona prima e il Cerruti poi seppero creare in San Pietro in Vincoli una biblioteca preziosissima e forse senza rivali, esclusivamente matematica, arricchita dall'acquisto della ricca Biblioteca Stefanucci (un bibliofilo colto, buon conoscitore di opere rare e artista nel farle sfarzosamente rilegare) e poscia dai doni dei libri che appartennero a Cremona e a Beltrami.[7]

---

[5] Il trasferimento della Biblioteca avviene nell'aprile 1874. All'atto di restituzione mancano 24 volumi, solo quattro dei quali sono rintracciati all'Alessandrina e collocati sugli scaffali della Scuola il 12.7.1881. Cfr. AA.VV. 1882, *Cataloghi del materiale scientifico. Scuola d'Applicazione per gl'ingegneri*, Roma, Salviucci, pp. IX-XV.

[6] Cfr. L. CREMONA 1884, *Prefazione al Catalogo della Biblioteca Sociale*, Appendice alle «Mem. Soc. it.» (3) 5, pp. I-IV. Pur conscio che "i vuoti erano così grandi che sperare di riempirli tutti sarebbe stata follia", Cremona scrive alla Royal Society di Londra, all'Associazione britannica per il progresso delle scienze, alle Accademie di Dublino, Stoccolma, Monaco, Bruxelles e Bologna, all'Istituto Lombardo, all'Accademia Gioenia e a quella dei Lincei, all'Istituto tecnico di Palermo, al Comitato Geologico e agli Osservatori di Milano e Palermo.

[7] R. MARCOLONGO 1933, *Le Scienze Fisiche e Biologiche in Roma e nel Lazio*, Roma, Istituto di Studi Romani, p. 372.

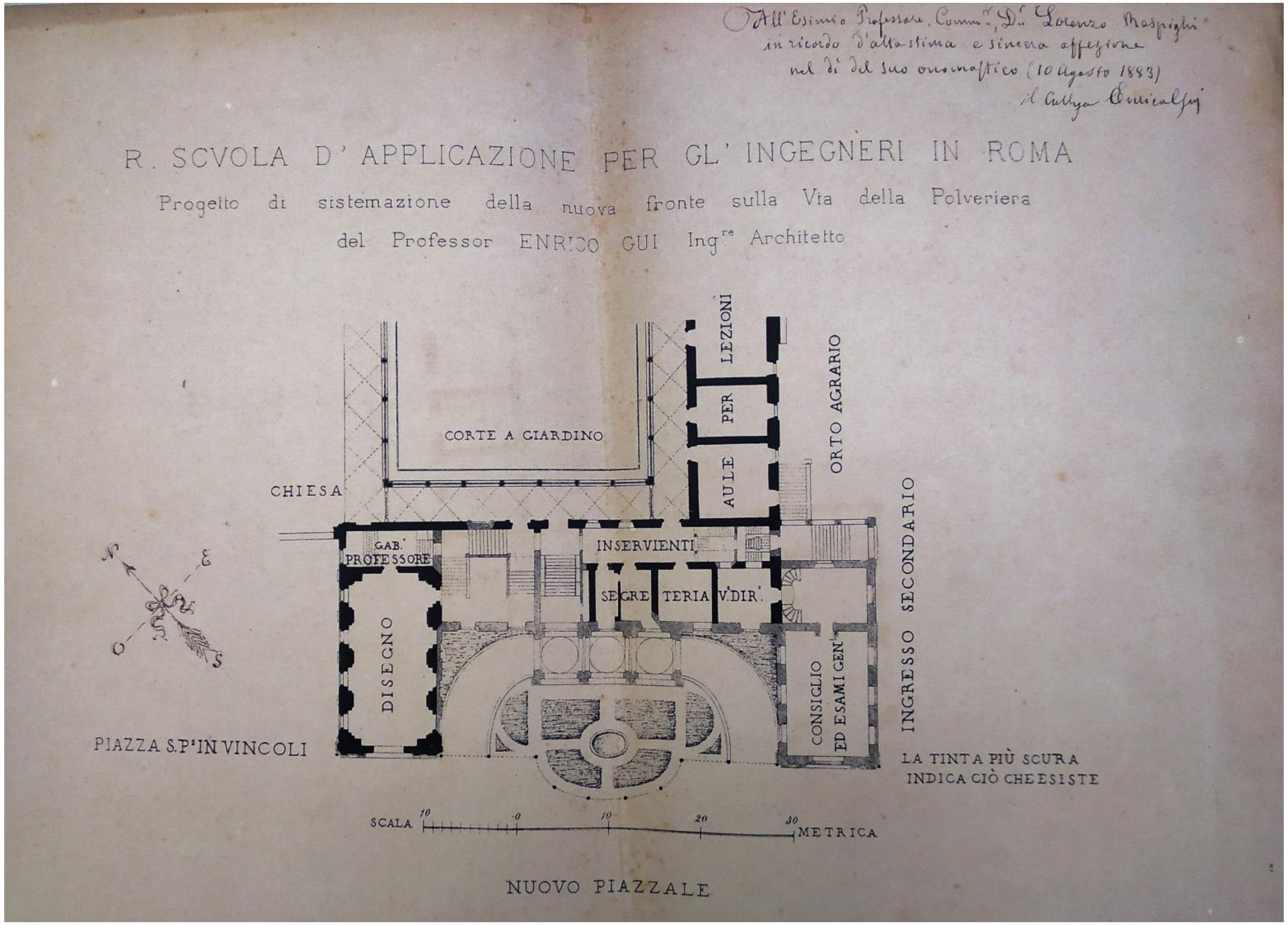


Fig. 9.1 Pianta della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma con dedica autografa di E. Gui a L. Maspighi.

Alla direzione di Cerruti (1878-1904) risalgono infatti due importanti acquisizioni: nel 1882 è rilevata la collezione matematica dell'ingegnere Antonio Stefanucci (oltre 1.800 pezzi, per un valore di £ 11.000),[1] mentre nel 1900 la vedova Beltrami fa dono alla Biblioteca delle cospicue raccolte del marito, per un totale di 2.000 volumi e 8.000 opuscoli.

Durante i primi tre anni di direzione, Cerruti si dedica anche a una prima ricognizione del materiale librario che dal 1873 includeva le opere acquistate dai gabinetti di geodesia e meccanica applicata (gestito da A. Bettocchi) e da quello di architettura e idraulica (E. Gui). Se il patrimonio risultava ben fornito sul versante tecnico, su quello matematico "si fece tosto sentire la necessità che la Biblioteca fosse provveduta de' lavori de' più insigni geometri".[2] Per ovviare a questa penuria, dal 1878 la Facoltà di Scienze Matematiche e Fisiche ottiene dal Rettore un fondo annuale per acquistare i volumi maggiormente utili per la formazione fisico-matematica. I soli sussidi universitari sono però insufficienti per sopperire alla mancanza di lavori matematici,[3] motivo per cui, parallelamente, Cerruti percorre la strada delle donazioni private.

I primi opuscoli di matematica donati alla Biblioteca sono quelli di Giuseppe Battaglini, dal 1871 professore di Geometria superiore a Roma e poi preside di Facoltà. Tra il 1880 e il 1884 raggiungono gli scaffali della Biblioteca più di una cinquantina di sue pubblicazioni, cui si sommano alcune note di Caporali, A. Tonelli e V. Reina, quest'ultimo docente di geodesia presso la Scuola di Ingegneria di Roma fino alla sua morte (1919). Tra le opere da lui depositate in Biblioteca figura il volume autolitografato *Teoria degli strumenti diottrici. Lezioni dettate nell'anno 1899-1900* (Roma, 1900). Accanto agli opuscoli di Battaglini, di particolare importanza sul fronte geometrico sono i lavori di Alfonso Del Re: una prima *tranche* di 30 opuscoli raggiunge la BIMR nel 1890, ma gli invii di estratti da Napoli a Roma proseguono fino al 1919.[4]

Il principale interprete dell'esigenza di ammodernamento e costante aggiornamento delle collezioni matematiche è Cremona, ex-direttore della Biblioteca e Senatore del Regno d'Italia dal 1879. Egli contribuisce all'incremento del patrimonio matematico della Biblioteca con donazioni regolari nel periodo 1881-1898. Nel secondo semestre del 1881 destina alla BIMR una raccolta di quasi 450 opuscoli firmati perlopiù da autori italiani (G. Bardelli, A. Cossa, E. Cavalli, F. Chiò, A. De Gasparis, A. Forti, C. Marangoni, C. Modigliano, A. Righi, F. Siacci, ...). Altri 90 volumi sono donati nel gennaio del 1889, e a essi se ne aggiungeranno quasi il doppio tre anni più tardi. Un solo volume è invece depositato da Veronese, altro protagonista

---

[1] La raccolta Stefanucci è acquistata con il concorso della Facoltà per £ 7.350 e della Scuola degli Ingegneri per £ 3.650. I volumi, catalogati nel 1884, corrispondono ai nn. 5001-6864 del *Registro di Ingresso* della Biblioteca. Cfr. E. SINESTRARI 1979-80, *La Biblioteca dell'Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"*, «Bollettino della Facoltà di Scienze MFN» 3, p. 55.

[2] AA.VV. 1882, *cit*., p. XIV.

[3] *Ibidem*. Il sussidio concesso dal Rettore diminuisce drasticamente già nei primi anni, passando da £ 909 nel 1878 ad appena £ 140 nel 1880.

[4] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Battaglini (30.10.1880 e 15.9.1884), Caporali (7.4.1883), Tonelli (10.2.1893), Reina (25.3.1890, 17.4.1890, 6.2.1897, 28.5.1901, 30.4.1911, 2.7.1911, 6.5.1913, 8.2.1916, 30.6.19189), Del Re (5.10.1890, 4.12.1893, 31.12.1914, 29.11.1915, 5.1.1916, 26.5.1916, 30.12.1916, 20.5.1918, 6.4.1919).

della geometria italiana dell'epoca; si tratta di un manuale scolastico, gli *Elementi di geometria* (1898, Verona, Drucker).[5]

Sul versante degli acquisti esteri, due sono i principali interlocutori di Cerruti in questi anni: la casa editrice Hermann di Parigi per i lavori francesi e la libreria torinese Loescher per le pubblicazioni tedesche. Grazie a Hermann arrivano a Roma un buon numero di opere di J.-B. Biot, A.-J. Fresnel, G.-H. Halphen, E.N. Laguerre, G.A. Hirn e altri ancora.[6] Loescher fa invece da principale tramite con l'editoria tedesca nel decennio 1883-1893. In un primo momento sono così acquisiti dalla BIMR non solo i volumi di F. Prym e A.V. Bäcklund, ma anche diversi opuscoli firmati da Kronecker (34 pezzi) e Weierstrass (18). Altri 180 lavori, per la maggior parte di fisica matematica e matematica applicata, sono ingressati nel 1890: tra questi, vi sono una decina di articoli di W. Voigt sulla teoria dell'elasticità. Due anni più tardi, sono acquistate tramite Loescher altre 50 opere che comprendono varie tesi discusse in Germania e uno scritto di Dedekind sulle classi di ideali (1867, Braunschweig). Ancora, nel 1893 Loescher invia alla BIMR una decina di opuscoli di calcolo delle variazioni firmati da L. Scheeffer e due lavori di fisica di A.T. Kuppfer.[7] La geometria, pur rappresentata da testi scientificamente di rilievo come le litografie di Chasles, occupa una parte minima dei volumi che arrivano da oltralpe.

Ulteriori volumi di matematica firmati da autori stranieri (L. Fuchs, O. Schlömilch, H. Weber, …) compaiono all'interno della Biblioteca personale di Mattia Azzarelli, ma si tratta prevalentemente di lavori di analisi. Specialista di meccanica e idraulica, Azzarelli viene a mancare nel 1897 e la sua collezione libraria è acquistata dalla BIMR l'anno successivo.[8]

Particolarmente interessanti per inquadrare la cultura geometrica del tempo sono invece gli acquisti del gabinetto di geometria pura: nel 1882 si va dai manuali di T. Olivier, Poncelet, Petersen, Schröter e H. Hankel a opere decisamente meno recenti quali i *Développements de géométrie* a cura di Dupin (1813, Parigi, Courcier) e la *Géométrie descriptive* di Monge (1820, Parigi, Courcier). Ancora, con un ordine a Hermann del 1897, sono acquisiti testi ormai classici come quelli di G. Lamé (1818, Parigi, Courcier), Hamilton (1853, Dublino, Hodges & Smith), Halphen (1878, Parigi, Gauthier-Villars) e una ventina di lavori di C. Hermite.[9]

Nei primi ottant'anni dalla fondazione, la componente prettamente matematica occupa però una posizione di secondo piano all'interno della Biblioteca romana. Nonostante alcuni volumi siano recepiti con grande prontezza – nello stesso anno della loro pubblicazione sono ingressate le *Vorlesungen über Geometrie* di Clebsch (1891, Leipzig, Teubner), le litografie delle lezioni di Klein del 1892-93 e le *Vorlesungen über Zahlentheorie* di Dirichlet (1894, Braunschweig, Vieweg)[10] – si registrano anche notevoli ritardi. Basti pensare che il lavoro di Kummer *Über*

---

[5] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Cremona (12.3.1881, 15.7.1881, 4.1.1885, 10.1.1889, 31.12.1891, 14.6.1898) e Veronese (24.3.1898).

[6] In particolare, cfr. BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 29.12.1881 e del 21.6.1887.

[7] In particolare, cfr. BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti effettuati in data 10.7.1883, 1.8.1890, 28.1.1892 e 13.7.1893.

[8] BIRM, *Registri di Ingresso*: si tratta di un centinaio di volumi registrati tra il 22 e il 25 maggio 1898 con l'annotazione "Vendita Arzarelli".

[9] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 16.1.1882 e del 20.4.1897.

[10] *Idem* dicasi per il volume di Klein e Sommerfeld *Über die Theorie des Kreisel* (1897, Leipzig, Teubner), per i *Werke* di Dirichlet (1897, Berlino, Reimer) e per le *Questioni riguardanti la geometria elementare* di Enriques (1900, Bologna, Zanichelli).

die algebraischen Strahlensystem... del 1867 raggiunge gli scaffali della Biblioteca solo nel 1900.[11] I primi due lavori donati da Castelnuovo sono ingressati nel 1894, quando egli si trova a Roma già da tre anni,[12] e le *Lezioni di geometria descrittiva* di Enriques (1902, Bologna, Zanichelli) solo nel 1905. In ambito matematico accanto ai diversi testi di taglio didattico, quali le litografie delle *Lezioni di geometria analitica* di F. Gerbaldi (1891, Palermo, Caccamo) donate dall'autore nel 1891, si riscontra una commistione di lavori di matematica 'pura', come i *Fondamenti di geometria a più dimensioni* di Veronese (1891, Padova, Tip. del Seminario), e volumi di carattere applicativo, quali le *Ricerche geometriche ed idrometriche* di M. Brighenti (1871, Bologna, Parmeggiani).

In questo periodo, la Biblioteca di Roma è invece all'avanguardia sul versante tecnico-scientifico non solo grazie alla mirata politica di acquisti portata avanti dai gabinetti di macchine e di idraulica (tra le cui collezioni figurano i testi di G.B. Venturi) ma anche attraverso le importanti donazioni degli ingegneri che gravitavano attorno alla Scuola romana: Alessandro Cialdi, specialista di navigazione; Camillo Guidi, laureatosi alla Scuola degli Ingegneri della capitale nel 1873 e poi docente di statica grafica e scienze delle costruzioni a Torino; e Giovanni Battista Favero. Quest'ultimo, ordinario di ponti e strade e incaricato di strade ferrate presso l'ateneo romano, nel 1881 fa dono alla BIMR di una settantina di volumi della sua collezione personale. Bisogna poi aggiungere i lavori di Alessandro Portis, professore di geologia e mineralogia a Roma, e gli innumerevoli opuscoli della stessa disciplina donati da Romolo Meli nel periodo 1888-1916, tra cui vari scritti del suo maestro C. Ponzi.[13]

Accanto al gran numero di volumi di taglio tecnico, la componente più 'ingegneristica' del patrimonio della Biblioteca è arricchita dalle carte idrografiche donate dal Ministero dell'agricoltura e da testi e programmi redatti da diverse scuole tecniche, quali il *Polytechnikum* di Dresda e le *Technische Hochschulen* di Graz e Vienna e da numerosi istituti italiani: la Scuola Professionale di Mondovì, il R. Istituto tecnico superiore di Milano, la Scuola Industriale di Vicenza; la R. Scuola Superiore d'Applicazione per gli ingegneri di Torino, la R. Scuola superiore per gli Studi commerciali e la R. Scuola Navale di Genova.

Nel luglio 1903 il patrimonio librario supera i 16.000 esemplari, per un valore di quasi 200.000 £.[14]

9.2. 1904-1927: l'evoluzione della Biblioteca tra matematica pura e applicazioni

---

[11] Quest'opera di Kummer, tra l'altro, non era disponibile su rivista in quanto la collezione degli «Abh. Berl. Ak.» della BIRM parte dal 1877.

[12] BIRM, *Registri di Ingresso*, nn. 9815-9816. Trattasi di G. CASTELNUOVO 1891, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 42, pp. 1-43; ID. 1889, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, «Atti R. Acc. Sci. Torino» 24, pp. 346-373. Sono probabilmente lavori già presenti in Biblioteca su rivista; tuttavia, questo elemento è indicativo di un lento e progressivo interessamento dei geometri nella Biblioteca.

[13] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Cialdi (2.5.1881), Favero (25.12.1881), Guidi (14.4.1884), Portis e Cavalli (11.6.1887), Meli (14.4.1888).

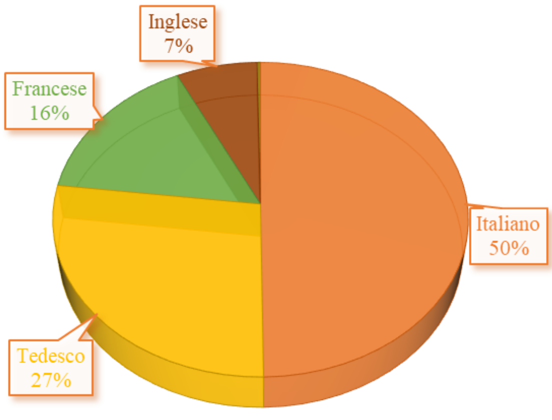
[14] BIRM, *Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*: Processo verbale della consegna dei beni mobili di proprietà dello Stato al Sig. Dr. Lucio Silla, 1.7.1903. Sono qui registrati 16.052 libri e atlanti e 5 strumenti scientifici. In poco più di vent'anni il valore del patrimonio della Biblioteca è quasi quadruplicato: nel 1880 il valore dei volumi e dei periodici si aggirava intorno a £ 5.580. Cfr. AA.VV. 1882, *cit.*, p. XIII.

Quando Cerruti è costretto a lasciare la direzione della Biblioteca a causa della sua nomina a direttore della Scuola degli Ingegneri, propone come successore Lucio Silla, suo assistente per l'insegnamento della meccanica razionale. Questi, dal 1904 al 1921, prosegue la politica di acquisti e acquisizioni per la Biblioteca del suo predecessore, con particolare attenzione ai testi di matematica.

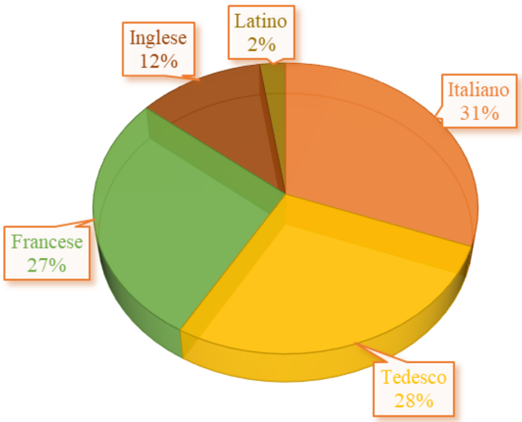
Tra le prime opere ingressate sotto la direzione Silla troviamo la nuova edizione delle *Lezioni di geometria proiettiva* di Enriques (1904, Bologna, Zanichelli), ma anche *Gli elementi della teoria dei numeri* di P. Gazzaniga (1903, Verona, Drucker), sintomo di un primo allargamento degli interessi dei matematici della capitale.

Il 1909 è un anno particolarmente fortunato per la crescita del patrimonio librario. Da un lato, infatti, fanno ingresso in Biblioteca 911 dissertazioni di laurea in matematica e fisica, donate dal Rettore; dall'altro, sono acquistate la ricca collezione matematica di Cremona e la raccolta tecnica di Alessandro Bettocchi (£ 24.000 in tutto), composta prevalentemente da lavori sulle costruzioni idrauliche e marittime. Quest'ultima andrà a costituire una speciale sezione della Biblioteca dedicata alle scienze delle acque insieme alla Biblioteca Idraulica di Luigi Luiggi (1.500 volumi e 30.000 opuscoli), annessa nel 1932 tramite un'apposita fondazione.

Sul versante geometrico, di particolare rilievo è, naturalmente, la collezione libraria di Cremona che va a 'completare' – per così dire – le importanti donazioni dei suoi ultimi vent'anni di vita. Composto da 7.346 opuscoli, 755 volumi e 80 collezioni complete o parziali di riviste, che includono 6 giornali editi nei paesi baltici,[15] il patrimonio è di carattere prevalentemente geometrico, anche se presenta un buon numero di lavori di analisi e di ingegneria. A differenza della miscellanea Segre, la raccolta di estratti di Cremona è costituita quasi per metà da pubblicazioni di autori italiani: tra essi spiccano una sessantina di lavori di Segre (nn. 3187-3242) e gli scritti giovanili di Fano (nn. 1474-1487). Più variegata è invece la Biblioteca personale, composta principalmente da volumi italiani, tedeschi e francesi (Fig. 9.2).



Miscellanea Cremona



Biblioteca Cremona

[15] Cfr. AA.VV. 1905, *Catalogo delle opere esistenti nella libreria del Senatore Prof. Luigi Cremona in Roma*, Roma, Tip. Romana. Le opere, catalogate in ordine alfabetico, sono suddivise per tipologia ("fascicoli", pp. 3-459; "libri", pp. 460-507; "periodici") e poi per nazionalità. Il catalogo è stato donato alla BIRM dal figlio di Cremona, Vittorio, con la dedica: "Alla Biblioteca della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Roma. Omaggio di V. Cremona. Bari. Gennaio 1910".

Fig. 9.2. Composizione linguistica della miscellanea (a sx) e della Biblioteca (a dx) di Cremona.

I lasciti di Bettocchi e Cremona non sono però gli unici della direzione Silla. Nel 1911 sono acquisiti 115 volumi della Biblioteca personale di Tarquini, al cui interno compaiono preziosi esemplari settecenteschi quali gli *Elementi di geometria* di A.-C. Clairaut (1773) e l'edizione francese delle *Instituzioni analitiche* di M.G. Agnesi (1775). L'anno successivo, la sorella del capitano Verri dona cinque lavori di matematica (J.A. Serret, G.A. Maggi, M. Navier, G. Bertrand, E. Pascal) appartenuti al fratello defunto.[16] A distanza di qualche mese, la vedova Battaglini offre alla Biblioteca alcune memorie, una ventina di volumi e otto collezioni di riviste della raccolta del marito, lascito che sarà completato nel dicembre del 1913 con ulteriori 51 libri e tre raccolte di giornali di matematica.[17] Al 1915 risalgono altre due donazioni: la più consistente (oltre 200 volumi) è quella della vedova Cammarota. Vi sono poi 89 opuscoli di Geminiano Pirondini e 12 volumi della sua collezione personale, omaggio della moglie alla Biblioteca, a distanza di sei mesi dalla scomparsa: si tratta perlopiù di manuali di algebra e geometria pubblicati in Italia, con l'unica eccezione del trattato *Theorie der Prymschen Funktionen…* di Prym e G. Rost (1911, Leipzig, Teubner). Una dozzina di lavori firmati da Giacinto Morera degli anni 1887-1908 sono infine inviati a Roma dalla vedova nel 1918.[18]

Tra i lasciti avvenuti durante la direzione Silla, bisogna annoverare gli opuscoli di geometria di E. Cesàro, donati da A. Perna, e le memorie di E.E. Levi e U. Barbieri offerte alla BIMR dagli autori.[19] Sul versante ingegneristico, Meli, Guidi e Luiggi depositano in maniera regolare in Biblioteca i loro lavori. A questi si affiancano gli acquisti sempre più consistenti dei gabinetti di scienze delle costruzioni, chimica e geologia.

Silla porta avanti anche la collaborazione con Loescher e Hermann per l'acquisto delle opere straniere: arrivano così in BIMR una trentina di lavori di Poincaré (14.3.1910) e varie edizioni dell'*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* di Klein.

Tra il 1921 e il 1927 si susseguono alla direzione della Biblioteca Anastasio Anastasi (ingegnere specializzato in aviazione), Vittorugo Foschi (ingegnere meccanico) e Augusto Stella (ingegnere esperto di geologia applicata e mineraria).

Coerentemente con il loro profilo professionale, la politica delle acquisizioni di questi anni è maggiormente rivolta alle applicazioni. Nel 1922 Ugo Bordoni, appena nominato docente di misure elettriche presso la Scuola di Ingegneria romana, dona alla Biblioteca 1180 opuscoli di elettrotecnica.[20] Un buon numero di lavori è poi acquistato mediante il "fondo

---

[16] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni del 15.6.1911, 23.6.1911 (nn. 18095-18198) e 15.1.1912 (nn. 18502-18506).

[17] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisizioni dei giorni 16.5.1912, 20.5.1912, 23.5.1912 (nn. 18869-18956) e 2.12.1913, 4.12.1913, 6.12.1913, 9.12.1913 (nn. 20146-20199). Le riviste di Battaglini donate alla BIRM sono le seguenti: «Ann. Toulouse», «Atti R. Acc. Sci. Torino», «Atti Acc. Sci. Napoli», «Mém. Soc. Bordeaux», «Phil. Trans. RSL», «Nouv. Ann.», «Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig», «Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky», «Annales de l'Observatoire d'astronomie physique de Paris», «Atti del R. Istituto d'incoraggiamento alle scienze naturali di Napoli», «Atti dell'Accademia Pontaniana». Il lascito Battaglini comprende 74 opuscoli, alcuni dei quali in doppio esemplare.

[18] BIRM, *Registri di Ingresso*: il lascito Cammarota è ingressato tra il 1.4.1915 e il 4.6.1915 (nn. 20974-21182); quello Pirondini tra il 10 e il 12 giugno 1915 (nn. 21203-21297). Gli estratti di Morera raggiungono la BIMR il 30.1.1918 (nn. 22361-22372).

[19] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Perna (18.2.1907), Levi (16.7.1912) e Barbieri (7.5.1916).

[20] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni del 10.3.1922 (nn. 25864-26059) e del 23.5.1922 (nn. 26093-27077).

dell'aeronautica".[21] Sono inoltre intensificati i rapporti con le maggiori scuole di ingegneria europee e, in particolare, con i Politecnici di Zurigo e di Delft che iniziano a inviare regolarmente alla BIMR le tesi discusse dai loro studenti.[22]

Un elemento di novità nella composizione della Biblioteca di Roma è apportato da Paolo Straneo che nel 1921 è chiamato nella capitale come professore incaricato di fisica tecnica nella R. Scuola superiore di architettura, ruolo che manterrà fino al 1923. Nei tre anni di permanenza a Roma egli dona alla Biblioteca quasi 400 opuscoli di fisica e matematica e una settantina di volumi. Ulteriori manuali sono acquistati con i fondi del gabinetto di fisica tecnica.[23] Ad arricchire il patrimonio librario della BIMR dopo la Prima guerra mondiale contribuiscono anche le riviste e gli oltre 200 volumi "ricevuti dalla Germania in conto riparazioni".[24]

Sul versante matematico, nei primi trent'anni del XX secolo i lavori donati alla Biblioteca rispecchiano la presenza della Scuola di geometria algebrica e di quella di fisica matematica di Volterra e Levi-Civita, con una netta prevalenza in termini numerici della prima rispetto alla seconda. Se Levi-Civita invia regolarmente le proprie pubblicazioni alla BIMR, più rari sono gli invii di Marcolongo, laureatosi a Roma e poi docente di meccanica razionale a Napoli. Un solo lavoro è depositato in BIMR da Volterra, a Roma dal 1900.[25] In campo geometrico, accanto alle prime pubblicazioni inviate da Severi, Chisini e Bompiani, spiccano le ingenti donazioni di Castelnuovo.[26] Nel ventennio 1907-1927 egli destina alla Biblioteca 2360 opuscoli di matematica e quasi un centinaio di volumi, mettendoli a disposizione degli studenti e dei molti matematici che si recavano a Roma per perfezionarsi in geometria algebrica. Tra gli autori dei volumi donati da Castelnuovo compaiono sia le grandi firme della geometria algebrica italiana (soprattutto Fano ed Enriques, seguiti da Severi) sia i geometri dell'indirizzo proiettivo-differenziale (Fubini *in primis*, ma anche Calapso, V. Strazzeri e altri ancora). La forte attenzione di Castelnuovo per le questioni metodologiche e la formazione degli insegnanti di matematica sta alla base dei 158 opuscoli e 32 volumi donati alla BIMR nel 1923, anno 'caldo'

---

[21] In particolare, cfr. BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 23.7.1926, 2.8.1926 e 28.2.1927.

[22] BIRM, *Registri di Ingresso*: le oltre 200 tesi discusse a Zurigo tra il 1911 e il 1925 raggiungono la BIRM in data 6.11.1911, 3.11.1914, 18.5.1920, 29.4.1924, 10.6.1925, 27.6.1926. Quelle del Politecnico di Delft sono ingressate nei giorni 10.6.1925, 27.6.1926, 13.5.1927.

[23] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Straneo (2.10.1921, 16.11.1921, 30.3.1922, 3.6.1922, 18.5.1923, 11.6.1923). Per quanto riguarda gli acquisti del gabinetto di fisica tecnica cfr., ad esempio, i 115 volumi ingressati il 30.11.1925.

[24] BIRM, *Registri di Ingresso*: la maggior parte dei volumi è ingressata tra i mesi di agosto e ottobre 1923. Un'ulteriore tranche raggiunge la BIRM il 27.1.1926 e comprende le riviste di carattere tecnico «Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Flugtechnik», «Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft», «Handbuch für Eisenbetonbau», «Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure», «Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt», «Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen».

[25] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Levi-Civita (23.3.1912, 2.4.1913, 18.5.1913, 14.10.1913, 14.6.1914, 22.14.1914, 22.2.1916, 4.6.1916, 10.7.1917, 30.6.1920, 25.10.1922, 27.2.1924, 11.2.1925, 5.1.1926, 27.5.1926, 11.11.1926, 26.10.1928, 16.11.1928, 25.5.1930, 23.3.1929, 20.3.1930), Marcolongo (27.4.1916, 16.6.1916) e Volterra (7.3.1916).

[26] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Severi (30.3.1906), Castelnuovo (27.3.1907, 1.2.1908, 4.7.1912, 15.1.1914, 7.3.1916, 10.1.1920, 29.2.1920, 4.1.1922, 5.3.1923, 27.7.1924, 3.2.1925, 10.5.1925, 30.12.1925, 23.6.1926, 13.2.1927), Bompiani (8.1.1916, 16.2.1920, 21.6.1925, 27.12.1926) e Chisini (31.1.1923). Per la miscellanea Castelnuovo, cfr. in particolare nn. 23449-24546, 24591-24695, 25573-25763, 27518-27753, 29318-30144.

sul versante dell'istruzione a causa della Riforma Gentile. In questo frangente, Castelnuovo deposita in Biblioteca una lunga serie di pubblicazioni sull'insegnamento della matematica in moltissimi paesi europei (Russia, Svezia, Spagna, Italia, Germania, Ungheria, Svizzera, Inghilterra, Austria, Francia, Danimarca e Paesi Bassi) ed extraeuropei (USA, Giappone, Argentina e Australia). Egli, infine, contribuisce anche all'incremento delle collezioni di periodici donando, ad esempio, 9 volumi dei «Proceedings of the London Mathematical Society».

Dal punto di vista istituzionale, nel 1923 la R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri assume il nome di "R. Scuola d'Ingegneria". Formalmente autonoma dall'Università già dal 1913, con la Riforma Gentile, in qualità di Ente Autarchico, essa non dipende più dal Ministero della Pubblica Istruzione. Permangono però forti collegamenti con la Scuola di Matematiche, dovuti sia all'unica sede, sia al biennio preparatorio universitario in comune.[27]

9.3. Il Seminario Matematico: dalla fondazione alla direzione dei geometri algebrici

Prima di proseguire con la storia della Biblioteca, è necessario fare un passo indietro all'a.a. 1913-14. In questo frangente, quando Silla dirige la BIMR, i matematici della Facoltà di Roma danno vita al Seminario Matematico, istituzione ufficiale con "lo scopo di diffondere la cultura matematica e di promuovere studi e ricerche matematiche" e i cui lavori "consistono in esercitazioni, conferenze, discussioni, comunicazioni scientifiche".[28]

La fondazione del Seminario può considerarsi, in un certo senso, il compimento di quel processo di rinnovamento e rilancio degli studi di matematica nella capitale auspicato da Quintino Sella fin dal 1860, che aveva acquisito nuovo impeto con la chiamata a Roma di Castelnuovo (1891) e di Volterra (1900). Frutto della profonda collaborazione tra i due non sono solo un'oculata scelta dei docenti invitati a ricoprire le cattedre universitarie – che negli anni Venti porterà Roma a divenire il terzo centro universitario d'Europa, dopo Göttingen e Parigi[29] – e l'organizzazione del Congresso Internazionale dei Matematici del 1908, ma anche la nascita del Seminario romano e dei relativi «Rendiconti».

Fin dai primi anni, il Seminario organizza conferenze di alto livello inerenti diversi ambiti della matematica e della fisica, comprese le applicazioni. Il fine primario di questa istituzione è quello di incrementare il livello degli studi matematici, in un clima di marcata apertura internazionale e a partire dall'avviamento alla ricerca dei giovani. Nella seduta del 17 gennaio 1914 Volterra, direttore del Seminario dalla sua fondazione fino al 1921,

> esprime l'augurio che il vantaggio maggiore della nuova istituzione tocchi ai giovani i quali, col frequentare le sedute del Seminario, avranno occasione di approfondire ed estendere le loro

[27] BIRM, *Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*: Il R. Istituto Superiore di Ingegneria. Cenno storico.

[28] «Rend. Mat. e Appl.» (1) 1, p. 1. Il Regolamento del Seminario è approvato dalla Facoltà di Scienze nella seduta 4 giugno 1913 e sanzionato dal Ministero della Pubblica Istruzione con lettera n. 14604 del 22.7.1913.

[29] È, questo, il parere espresso da Birkhoff nel suo report del 1926 per l'*International Education Board* sullo stato della matematica in Europa.

conoscenze matematiche e, nel tempo stesso, riceveranno un efficace incitamento alla ricerca scientifica.[30]

Nell'organizzazione delle sedute e nella pubblicazione della prima serie della relativa rivista, Volterra è coadiuvato da Silla in qualità di segretario del Seminario e dai membri del Consiglio Direttivo, tra cui compare, naturalmente, Castelnuovo.[31]

L'impronta di Volterra sul Seminario Matematico nei primi dieci anni di attività è tangibile: le conferenze dedicate ad argomenti di fisica matematica e analisi funzionale – principali ambiti di ricerca di Volterra all'epoca – rappresentano da sole oltre il 60% delle 42 conferenze svolte a Roma in questo periodo (Fig. 9.3). Tra le comunicazioni su diversi temi di fisica matematica, cinque sono dedicate alla neonata teoria della relatività di Einstein, presentate da Marcolongo, Straneo e U. Crudeli. Sul versante dell'analisi funzionale, sono da segnalarsi le conferenze tenute dai matematici francesi R. Gâteaux e J. Pérès, dagli statunitensi E.B. Van Vleck e G.C. Evans e dallo svedese N. Zeilon, dalle quali traspare il prestigio di Volterra in campo internazionale. Egli si era recato più volte in Francia (nel 1900, tra l'altro, come conferenziere plenario al Congresso Internazionale di Parigi) e nell'estate del 1909 era stato invitato a Boston per le celebrazioni del ventennale della Clark University, dove aveva conosciuto Evans. A breve distanza temporale, quest'ultimo, Gâteaux e Pérès si recano a Roma per trascorrere un periodo di perfezionamento proprio sotto la guida di Volterra; Zeilon, invece, era entrato in contatto con Volterra durante il corso di fisica matematica che quest'ultimo aveva tenuto all'Università di Stoccolma ed era stato invitato a presentare i propri risultati al Seminario nel 1915. In quello stesso anno, Emma Sciolette – allieva di Volterra – è la prima donna a tenere una comunicazione in questa sede: nella seduta del 6 marzo espone alcuni suoi contributi sull'integrale di Denjoy.

Per contro, rare sono le sedute del Seminario Matematico dedicate ad argomenti di geometria: delle 42 conferenze totali, solo cinque sono incentrate su temi di taglio geometrico e si condensano nel biennio 1914-15. Una soltanto è presentata da un matematico straniero, Kasner, che si occupa della geometria conforme. G. Pittarelli, professore ordinario di Geometria descrittiva con disegno e applicazioni a Roma, tiene due conferenze nel 1915, una sulla trisezione dell'angolo e l'altra di impostazione proiettivo-differenziale intitolata *Le asintotiche della superficie di Steiner e le linee di curvatura della superficie di secondo grado*. Nella stessa seduta, Bompiani presenta alcuni contributi al problema di Moutard. L'unica conferenza su un oggetto classico della geometria algebrica, l'invariante di Zeuthen-Segre, è tenuta da Pannelli. I tre interventi di Castelnuovo al Seminario affrontano invece questioni di calcolo delle probabilità (1917), didattica (1914) e storia (1919), ambito nel quale si colloca anche l'unica conferenza tenuta da Enriques (1920) durante gli anni della direzione di Volterra.

Se durante il primo periodo le attività del Seminario Matematico e della Biblioteca sembrano nettamente distinte, esse andranno a intrecciarsi in misura crescente a partire dall'a.a. 1921-22, quando Castelnuovo diventa direttore del Seminario. Quest'ultimo lascerà questo incarico già l'anno successivo affidandolo ad Enriques, suo allievo e collaboratore appena giunto nella capitale, che si occuperà di dare alle stampe la seconda e terza serie dei «Rendiconti» (1922-34). A partire da questi anni si assiste ad una graduale inversione di tendenza: se, da un lato, le

[30] «Rend. Mat. e Appl.» (1) 1, p. 11.

[31] Tra il 1914 e il 1922 il Consiglio Direttivo del Seminario è composto, oltre che da Volterra, Silla e Castelnuovo, da E. Almansi, P. Blaserna, C. Ceradini, O.M. Corbino, A. Di Legge, G. Pittarelli, V. Reina, A. Tonelli e – dal 1918 – T. Levi-Civita.

conferenze su temi afferenti all'ambito fisico restano le più numerose (rappresentando quasi il 30% del totale), dall'altro si assiste ad un importante incremento delle comunicazioni di geometria, che passano dal 12% al 23%, raggiungendo il 27%, se si considerano anche le cinque tenute da Severi nei mesi di gennaio e febbraio 1930, dedicate alla topologia.

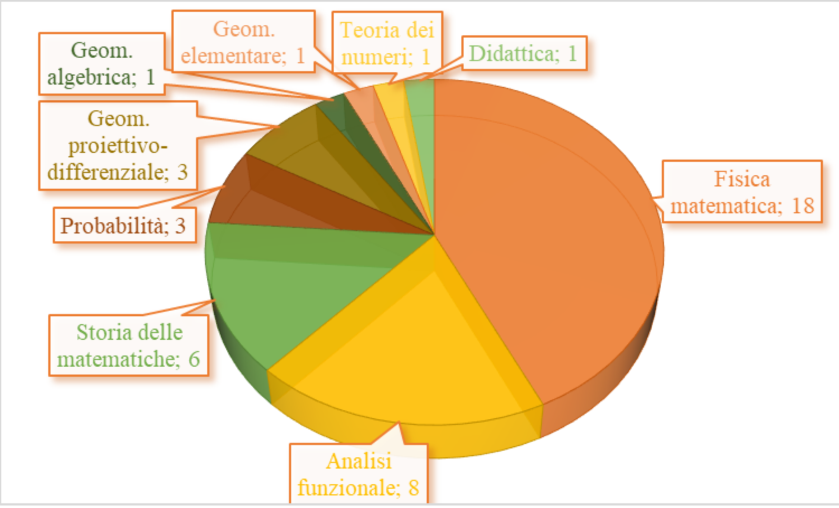


Fig. 9.3. Distribuzione disciplinare delle conferenze del Seminario sotto la direzione di Volterra.

Accanto alle conferenze incentrate su temi di fisica matematica, gran parte delle quali tenute da ospiti stranieri (Birkhoff, A.E. Kennelly, A. Weinstein, T. von Kármán, M. Brelot…), spiccano quelle dedicate alla teoria della relatività da P. Langevin e Levi-Civita e soprattutto quelle di fisica atomica tenute da O.M. Corbino – che aveva fatto istituire a Roma, nel 1926, la prima cattedra di Fisica teorica in Italia – e da diversi esponenti del gruppo di via Panisperna: Fermi e Persico *in primis*. Lo stretto legame tra l'Istituto Matematico e quello di fisica in questi anni, oltre che dall'alto numero di comunicazioni presentate dai suoi membri (Tab. 9.1), è sancito anche dall'utilizzo della grande aula dell'Istituto Fisico per ospitare le sedute del Seminario.

Conferenzieri	N. conferenze al Seminario (1923-1934)
Severi Francesco	14
Fermi Enrico	7
Enriques Federigo	4
Giorgi Giovanni	4
Levi-Civita Tullio	4
Fantappié Luigi	3
Minetti Silvio	3
Persico Enrico	3
Vacca Giovanni	3

Tab. 9.1. Relatori del Seminario maggiormente rappresentati, con almeno 3 conferenze.

Pur restando sempre in numero minore rispetto agli ospiti stranieri che presentano ricerche di fisica matematica o di analisi funzionale (quali C. de La Vallée-Poussin, S. Mandelbrojt, H. Lewy, H. Hamburger, …), si registra un incremento significativo dei geometri stranieri invitati al Seminario. Sul versante della geometria algebrica, si segnalano gli interventi degli americani J.W. Young e Coolidge e del polacco Rosenblatt. Nell'aprile del 1926 quest'ultimo presenta la comunicazione *Sopra i moduli delle varietà algebriche a tre dimensioni*, i cui successivi sviluppi saranno illustrati al Congresso Internazionale di Bologna due anni più tardi. Ancora maggiori sono i contributi stranieri presentanti al Seminario romano nell'ambito della geometria proiettivo-differenziale: tra questi si annoverano le due conferenze di Blaschke e quelle di D.J. Struik, Hlavatý, Kähler e Hamburger. Le sedute dedicate ad argomenti di algebra e teoria dei numeri continuano ad occupare una posizione di secondo piano (Fig. 9.4). In questo ambito, tuttavia, si segnalano le due comunicazioni presentate da Fantappiè all'inizio del 1925, dedicate alla teoria degli ideali.

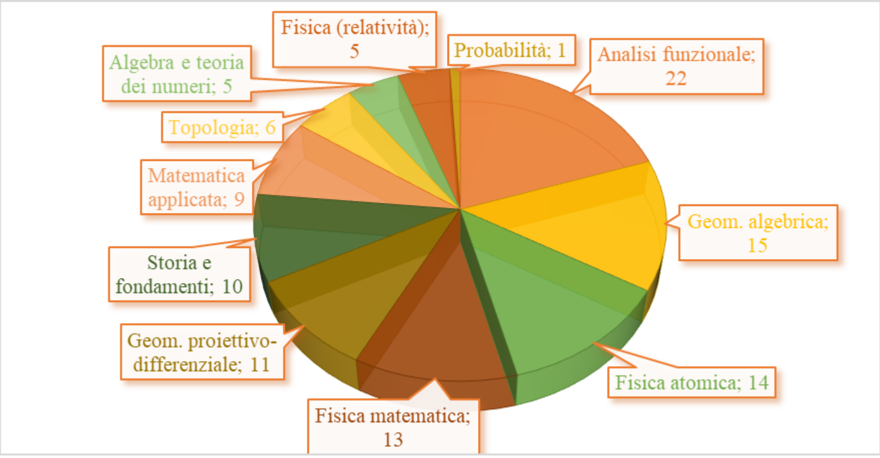


Fig. 9.4. Distribuzione disciplinare delle conferenze del Seminario sotto la direzione di Enriques.

A distanza di qualche anno dall'inizio dell'attività di Enriques all'interno del Seminario, Castelnuovo assumerà la direzione della Biblioteca Matematica: a partire da questo momento e fino al secondo dopoguerra, Seminario e Biblioteca sono dirette da geometri della Scuola italiana. La storia e lo sviluppo della Biblioteca e del Seminario diventano così legati a filo doppio con l'evoluzione della geometria algebrica nel nostro paese.

9.4. 1927-1935: Castelnuovo alla guida della Biblioteca Matematica

Alla graduale distinzione tra la Scuola di Ingegneria e quella di matematica si accompagna la nascita di una particolare sezione della Biblioteca di S. Pietro in Vincoli destinata specificatamente alle opere matematiche (denominata "Biblioteca Matematica") che, a partire almeno dal 1926-27, è diretta da Castelnuovo.[32] Proseguendo l'azione in favore della Biblioteca del ventennio precedente, Castelnuovo diventa il principale protagonista del movimento di rinnovamento e aggiornamento del patrimonio matematico, rilanciando la funzione della Biblioteca Matematica di Roma come centro di studi. Attraverso una mirata politica di acquisti, egli fa arrivare in Biblioteca un gran numero di opere di matematica, italiane e straniere, a poco tempo di distanza dalla loro pubblicazione. Pur essendosi ormai allontanato dalla ricerca attiva, Castelnuovo è particolarmente sensibile verso gli sviluppi della geometria in questi anni.

Da un lato, tra il 1927 e il 1930, raggiungono gli scaffali della BIMR i trattati dei geometri italiani di recente pubblicazione: le *Lezioni di geometria descrittiva* di Fano (1926, Torino, Paravia), il *Trattato di geometria algebrica* di Severi (1926, Bologna, Zanichelli), gli *Esercizi e complementi di analisi algebrica* (1928, lit.) di B. Segre, le *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Comessatti (1930, Padova, Cedam) e quelle di Fano e Terracini (1930, Torino, Paravia). A questi bisogna aggiungere i manuali di geometria proiettivo-differenziale quali le *Lezioni di geometria differenziale* di Bianchi (1927, Bologna, Zanichelli), il celebre trattato di Fubini e Čech (1927, Bologna, Zanichelli) e il secondo volume dell'*Analisi vettoriale generale e applicazioni* a cura di Burgatti, Boggio e Burali-Forti (1930, Bologna, Zanichelli).

Dall'altro lato, Castelnuovo è molto attento a ciò che accade oltre i confini italiani. Oltre a ordinare regolarmente i volumi delle opere complete di Weierstrass, Kronecker, Dedekind, Lie e Hurwitz, egli si dedica all'ammodernamento della Biblioteca Matematica arricchendone il patrimonio con i pregevoli testi *Cremona transformations in plane and space* di H. Hudson (1927, Cambridge, CUP) e *Differentialgeometrie* di L. Bieberbach (1930, Leipzig, Teubner) e con i più recenti lavori firmati da Blaschke, Kowalewski, Cartan, Picard, J. Hadamard, E.T. Whittaker e A.R. Forsyth. A cavallo tra gli anni Venti e Trenta, con prontezza, sono anche recepiti dalla Biblioteca dell'ateneo romano alcuni volumi dedicati a filoni di indagine scarsamente coltivati in Italia. In *primis*, l'*Algebren und ihre Zahlentheorie* di L.E. Dickson (1927, Zurigo, Füssli) e i due tomi della *Moderne Algebra* di Van der Waerden (1930-31, Berlino, Springer). Accanto ai testi di Hilbert, W. Osgood e S. Cohn-Vossen, nel 1932 sono acquistati tramite la libreria Rosenberg due importanti lavori di topologia: *Einfachste Grundbegriffe der Topologie* di P. Aleksandrov (1932, Berlino, Springer) e *Einführung in die kombinatorische Topologie* di Reidemeister (1932, Braunschweig, Vieweg).[33] L'acquisizione di tali volumi può forse considerarsi un effetto della conferenza *Ricerche recenti in topologia* presentata da Lefschetz al Seminario Matematico nel marzo dell'anno precedente.

---

[32] Non è purtroppo possibile stabilire con esattezza la data di fondazione della Biblioteca Matematica a causa delle lacune delle fonti d'archivio. Tuttavia, gli «Annuari della R. Università degli Studi di Roma» attestano la sua esistenza a partire dall'a.a. 1926-27. La Biblioteca Matematica non ha tuttavia un registro d'ingresso distinto. Nel periodo preso in esame in questo paragrafo, A. Stella rimane in carica come direttore della Biblioteca della R. Scuola d'Ingegneria. A tal proposito, cfr. BIRM, *Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*: Relazione inviata in risposta alla lettera di M. Casalini alla Biblioteca, Roma 6.11.1934.

[33] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 24.9.1932 e del 27.10.1932.

È proprio il Seminario, sotto la direzione di Enriques, a rappresentare in questi anni una straordinaria risorsa per l'ampliamento del patrimonio librario della Biblioteca. Innanzitutto, frutto dello scambio con i volumi dei «Rendiconti», giungono per la prima volta a Roma le riviste provenienti da centri scientifici emergenti, come il Giappone. Oltre al «Japanese Journal of Mathematics», vengono così ingressati in Biblioteca i primi volumi del «Journal of Science» dell'Università di Hiroshima e le riviste di matematica edite a Tôhoku e Kyoto. Dalla Romania provengono invece i fascicoli del periodico «Prace Matematyczno-Fizyczne». Alla rivista statunitense «The Rice Institute Pamphlet» (1915), si affianca «The Kansas University Science Bulletin» (1926), di recente fondazione. Nel 1932 fa il suo arrivo in Biblioteca anche il primo volume dei «Sydney University Reprints», editi in Australia.[34] In secondo luogo, diversi matematici provenienti da ogni parte del mondo inviano i loro lavori al Seminario, arricchendo la miscellanea della Biblioteca. Tra questi vi sono anche alcuni dei relatori delle conferenze organizzate dal Seminario come Rosenblatt, Marcolongo e Landau. Quest'ultimo aveva presentato in questa sede un interessante contributo di teoria dei numeri, dedicato al computo asintotico dei nodi di un reticolo entro un cerchio (14.3.1925). Infine, i rapporti istituzionali tra il Seminario romano e i suoi omologhi, come il *Laboratorio y Seminario Matemático* spagnolo, giustificano ulteriori acquisizioni che comprendono esemplari quasi introvabili. È questo il caso del *Catalogo della Biblioteca di Buenos Aires* inviato nell'ottobre del 1932 da Enrique Butty, unitamente a due suoi lavori di fisica matematica. Dal neofondato IAS di Princeton, anche Veblen invia i suoi lavori al Seminario Matematico e, tra questi, l'*Analysis situs* (1931, New York, AMS).[35]

Oltre a Castelnuovo, tra i matematici italiani che depositano regolarmente i loro lavori in Biblioteca in questo periodo spicca la figura di Luigi Campedelli che, dopo essersi laureato con Enriques nel 1928, rimane a Roma come assistente di Castelnuovo fino al 1935. Alle pubblicazioni di Campedelli si affiancano ben presto quelle di un altro studente di Enriques: Ettore Carruccio. Si segnalano anche gli invii di opuscoli di geometria di Bassi, Ciani, M. Cipolla e G. Vitali.[36] Il 'patrimonio geometrico' della miscellanea della Biblioteca Matematica è accresciuto anche grazie alle donazioni di diversi matematici stranieri: N. Abramescu, A. Lowey, Eisenhart, M. Riesz, E. Peschl, R. König, L. Schlesinger, Lindemann e G. García. Tra questi, particolarmente interessanti sono gli estratti di teoria dei grafi inviati a Roma da H. Grötzsch e i lavori di geometria algebrica di Snyder del periodo 1926-1932. Infine, bisogna aggiungere alcuni contributi di impostazione proiettivo-differenziale firmati da T. Salvemini e L. Lichtenstein.[37]

Le donazioni più cospicue di opuscoli matematici stampati all'estero provengono dai borsisti Rockfeller che, durante il periodo di studio trascorso a Roma o negli anni immediatamente

[34] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisizioni contrassegnate con "Cambio" dei giorni 22.4.1932, 7.6.1932, 16.6.1932, 17.6.1932, 21.6.1932, 3.9.1932, 9.9.1932.

[35] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Rosenblatt (5.3.1932), Veblen (7.4.1932 e 23.7.1932), Landau (13.10.1932), Marcolongo (24.10.1932) e Butty (4.10.1932 e 26.10.1932).

[36] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Castelnuovo (6.5.1931), Campedelli (2.6.1931, 9.5.1932, 13.5.1932, 18.10.1932), Vitali (7.4.1932), Ciani (17.6.1932), Cipolla (21.6.1932), Carruccio (5.9.1932), Bassi (3.11.1932).

[37] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Lowey (25.4.1932), Eisenhart (25.4.1932), Snyder e Riesz (9.5.1932), Lichtenstein (27.6.1932 e 5.10.1932), Salvemini (30.6.1932), Peschl (4.10.1932), Schlesinger, Konig e Grötzsch (5.10.1932), G. García (26.10.1932).

successivi, inviano alla Biblioteca le proprie pubblicazioni. È questo il caso di Roth, allievo di Severi, che, rientrato in Inghilterra, spedisce diversi suoi lavori di geometria algebrica editi a Cambridge. Lo stesso accade per i borsisti che si recano nella capitale per perfezionarsi in fisica matematica con Volterra e Levi-Civita: al rientro in Romania, G. Moisil invia alla BIMR una ventina di estratti sul calcolo differenziale assoluto e sulle applicazioni dei sistemi di equazioni alle derivate parziali in ambito fisico. A questi unisce una raccolta di tesi di matematiche discusse a Bucarest e alcune pubblicazioni dei suoi colleghi a Iaşi, come quelle di N. Theodoresco.[38]

Sotto la direzione di Castelnuovo la Biblioteca non si arricchisce solo di lavori di stampo geometrico. Una buona parte delle acquisizioni è infatti rappresentata da opere di fisica matematica, disciplina coltivata dall'altro 'polo' dell'ateneo romano che si era ormai consolidato dopo l'arrivo di Levi-Civita a Roma (1918) e che godeva di un sempre maggiore riconoscimento all'estero. Alle pubblicazioni di Straneo e Levi-Civita, che continuano ad affluire in Biblioteca come negli anni precedenti, si aggiungono i lavori stranieri di fisica e di matematica applicata inviati da Sommerfeld, N. Kryloff, A. Korn, H. Rutishauser, N. Bogoliunoff e P. Hertz. Sul versante italiano, da Padova Luigi Sante Da Rios invia i propri lavori di dinamica dei fluidi al Seminario Matematico.[39] Un'importante novità rispetto al periodo precedente è il fatto che il Seminario si apre ad alcune comunicazioni incentrate sulle applicazioni della matematica: quelle di scienza delle costruzioni presentate da A. Signorini e G. Krall, quelle di elettronica tenute da G. Giorgi e L. Tonelli o, ancora, le due di Sobrero sulla teoria dell'elasticità.

Negli stessi anni in cui Castelnuovo dirige la Biblioteca Matematica a S. Pietro in Vincoli, tiene il corso libero di calcolo delle probabilità e statistica. Non è quindi un caso che in questo periodo appaiono per la prima volta in Biblioteca opuscoli di tale disciplina come quelli di V. Romanowsky, S. Bernstein e B. De Finetti.[40] Tra il 1927 e il 1931 quest'ultimo lavora a Roma presso l'ufficio matematico del neonato Istituto Nazionale di Statistica e presenterà al Seminario Matematico una conferenza intitolata *Le leggi differenziali e la rinuncia al determinismo* (5.4.1930).[41] Un ulteriore impulso per l'arrivo di lavori di probabilità in BIMR è costituito dalla creazione della Scuola di Scienze Statistiche e Attuariali all'interno della Facoltà.

Negli anni della direzione Castelnuovo, nuovi stimoli per l'allargamento degli interessi della Biblioteca scaturiscono dalla nascita delle Scuole di Magistero per la matematica, la fisica e le scienze naturali e della Scuola di Perfezionamento in Storia delle Scienze, fondata e diretta da Enriques. Anche attraverso donazioni personali, Enriques contribuisce ad arricchire il

[38] BIRM, *Registri di Ingresso*: opuscoli donati da Roth (9.5.1932, nn. 32153-32165), Moisil (3.9.1932, nn. 32462-32481), N. Theodoresco (5.9.1932, nn. 32482-32485).

[39] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Straneo (30.9.1931, 12.5.1932, 4.10.1932), Levi-Civita (14.5.1932), Sommerfeld (10.3.1932), Kryloff (10.3.1932, 11.5.1932, 13.10.1932), Korn e Rutishauser (5.9.1932), Da Rios (26.9.1932), Bogoliunoff (13.10.1932) e Hertz (26.10.1932).

[40] BIRM, *Registri di Ingresso*: opuscoli di Romanowsky (25.4.1932 e 12.5.1932), Bernstein (25.4.1932) e De Finetti (3.11.1932).

[41] Anche negli anni successivi, tuttavia, le conferenze di probabilità tenute al Seminario di Roma occuperanno sempre una percentuale decisamente ridotta. Oltre agli interventi di Castelnuovo (*Legame tra il calcolo astratto delle probabilità e la esperienza*) e De Finetti, le uniche altre comunicazioni su queste tematiche sono quelli di E.P. Cantelli (1917 e 1920), L. Cesari (1941), K. Popoff (1942) e A. Ghizzetti (1943).

patrimonio librario con opere di notevole interesse in ambito storico e filosofico. Le conferenze presentate al Seminario nel decennio 1923-33 dallo stesso Enriques – ma anche da Vacca, Bortolotti, E.L. Cavazzoni e T. Greenwood – riflettono pienamente la sensibilità dell'ambiente romano verso queste tematiche.

Durante l'a.a. 1931-32 alla Biblioteca Matematica sono unite le biblioteche del Seminario Matematico e della Scuola di Perfezionamento in Storia delle Scienze. Con Castelnuovo si assiste ad una crescita significativa delle pubblicazioni di matematica ingressate in BIMR (Tab. 9.2).[42] Il patrimonio 'matematico' della Biblioteca di Roma arriva per la prima volta ad essere paragonabile, anche in termini numerici, alla componente ingegneristico-applicativa. Esso va inoltre a delinearsi come patrimonio definito e a sé stante anche dal punto di vista istituzionale, tant'è che da lì a poco sarà trasferito nella nuova sede della Facoltà di Matematica, andando a costituire il primo nucleo della nuova Biblioteca.

Anno accademico	**N. volumi**	**N. opuscoli**	**N. riviste**	**N. lettori nell'a.a. precedente**
1927-28	25.150	12.925	88	1.030
1928-29	25.649	13.130	88	1.050
1929-30	25.700	13.300	88	1.149
1930-31	25.700	13.300	88	1.140
1931-32	45.000	105.000	207	1.750
1932-33	40.900	37.800	252	12.000
1933-34	40.900	37.800	252	8.750
1934-35	41.000	37.960	253	12.600

Tab. 9.2. Andamento del patrimonio della Biblioteca Matematica durante la direzione di Castelnuovo.

In questi anni, la Biblioteca centrale dell'Istituto Superiore d'Ingegneria (nome assunto nel 1933 al fine di uniformare le denominazioni degli Istituti di istruzione superiore) continua invece ad essere amministrata da Augusto Stella. Negli anni Trenta, sotto la spinta della politica autarchica promossa da Mussolini, si registra una crescente attenzione verso le questioni di tipo economico, accompagnata dall'acquisto di testi specifici come le *Lezioni di economia agraria, forestale, montana* di V. Nazari (1932, Roma).

La componente 'tecnica' della Biblioteca è arricchita soprattutto dalle acquisizioni del gabinetto di mineralogia applicata, che beneficia delle importanti donazioni di V. Novarese (65 opuscoli e 3 volumi). A queste bisogna aggiungere i lavori di R. Verduzio sull'aviazione e quelli di B. Montel dedicati a problemi di fluidodinamica.[43]

Tra il 1931 e il 1934 l'ordinamento della Biblioteca è affidato a un ingegnere, Riccardo Ceccherini. In vista dell'imminente trasferimento della Facoltà di Scienze, dal 1933 è compilato un catalogo separato per i volumi della Biblioteca di ingegneria: di conseguenza, le uniche

[42] I dati riportati in tabella sono desunti dagli «Annuari della R. Università degli Studi di Roma» del periodo 1927-1935. Cfr. BIRM, *Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*: Relazione inviata in risposta alla lettera di M. Casalini alla Biblioteca, Roma 6.11.1934; è qui riportato il numero di lettori complessivi negli anni 1929 (3.420), 1930 (3.420), 1931 (8.300), 1932 (8.650), 1933 (8.750).

[43] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Novarese (17-18.5.1932, 21.5.1932, 25.5.1932, 27.5.1932; nn. 32217-32253, 32257-32264, 32284-32291, 32293-32299, 32301-32308), Verduzio (15.7.1932; nn. 32405-32429) e Montel (5.4.1933, 6.4.1933; nn. 32843-32859).

opere di matematica ingressate in quell'anno sono i tre trattati di H. Sarnetzky, P. Gast e R. Hugershoff acquistati dal gabinetto di geometria descrittiva.[44]

9.5. 1935-1939: il trasferimento alla Città Universitaria e la direzione di Scorza

Lasciando la sede di S. Pietro in Vincoli all'Istituto Superiore di Ingegneria, nell'ottobre del 1935 la Facoltà di Scienze si trasferisce nella nuova Città Universitaria. Qui si terranno i corsi del biennio di preparazione per gli ingegneri e gli insegnamenti per la laurea in fisica e matematica annessi alla Facoltà di Scienze MFN. La nuova sede è uno degli edifici costruiti nell'ambito dell'intervento della nuova Città Universitaria della capitale, destinata a dodicimila studenti e commissionata dal governo a M. Piacentini nel 1932, con l'obiettivo di trasformarla nella "sede del principale centro studi del Mediterraneo". La progettazione dell'edificio dell'Istituto di Matematica è affidata all'architetto Giovanni Ponti. Pur rifacendosi alla monumentalità della tradizione classica, secondo le indicazioni del governo, Ponti adotta una soluzione architettonica a corpi distinti: il corpo rettangolare destinato alla matematica pura, con le sale dei docenti e la Biblioteca; le due ali curve delle aule di disegno; la torre delle tre aule 'a teatro' (da 450 posti ciascuna). Il locale da adibirsi a Biblioteca è di notevoli dimensioni (640 m^2 di superficie e 3760 m^3 di volume) e comprende la sala di lettura, quattro piani di scaffalature aperte e due piani di magazzino. Ancora oggi funzionalmente ed esteticamente valido, il complesso rappresenta uno dei rari esempi esistenti nelle università italiane di uno spazio appositamente concepito per una Biblioteca.[45]

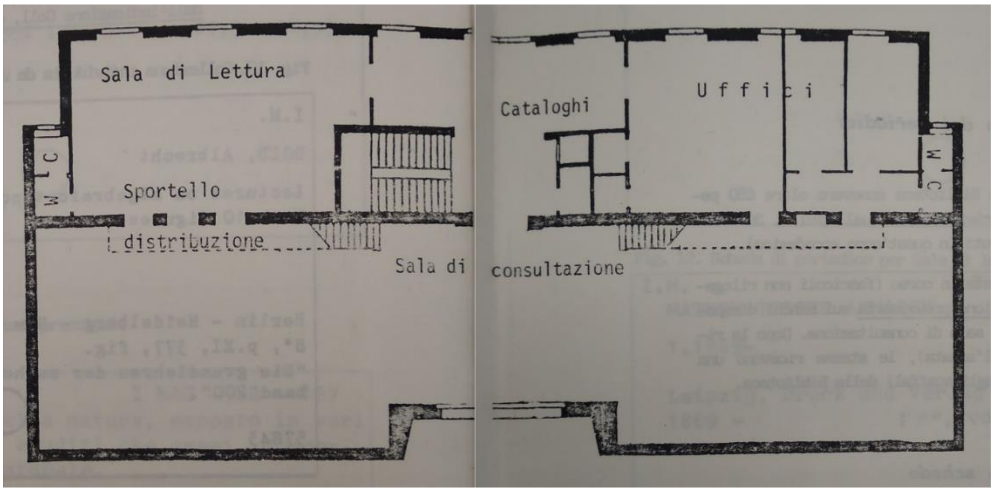


Fig. 9.5. Pianta della BIMR della nuova Città Universitaria.

Nel 1935 sono dunque posizionati sugli scaffali della nuova Biblioteca i volumi di interesse più specificatamente matematico. Anche grazie a lasciti successivi, ad essi si affiancheranno numerose opere e riviste riguardanti le scienze fisiche, chimiche e umanistiche.

---

[44] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 7.4.1933.

[45] La struttura dell'edificio e il progetto architettonico di Gio Ponti della Biblioteca sono stati ampiamente studiati in ambito architettonico. Cfr., *inter alia*, G. ARDITI – C. SERATTO 1994, *Gio Ponti. Venti cristalli di architettura*, Venezia, Il Cardo; S. MORNATI 2002, *L'edificio della Scuola di Matematica di Gio Ponti alla Città universitaria di Roma*, «Boll. UMI» (8) 5-A, pp. 43-71. La piantina della BIMR è pubblicata in AA.VV. 1982, *Guida all'uso della Biblioteca dell'Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"*, Roma, Istituto Matematico "G. Castelnuovo".

Nello stesso anno è commissionata alla ditta “Luigi Fontana” l’enorme vetrata artistica (circa 5×10 metri) della facciata della Scuola di Matematica, disegnata da Ponti su cartoni preparatori. Due sono i protagonisti del disegno: un angelo, che rappresenta colui che mette in comunicazione due realtà diverse – il sapere umano e il sapere divino – e una figura femminile, simbolo della geometria, della razionalità e della scienza. Nell’angolo a destra compaiono alcuni studenti intenti alla lettura e alla meditazione che alludono probabilmente alla presenza della Biblioteca in quello spazio. La vetrata, ben visibile anche dalla sala di lettura della Biblioteca, sarà distrutta durante la Seconda guerra mondiale a causa dell’onda d’urto provocata dai bombardamenti al vicino quartiere di San Lorenzo (19 luglio 1943).[46]

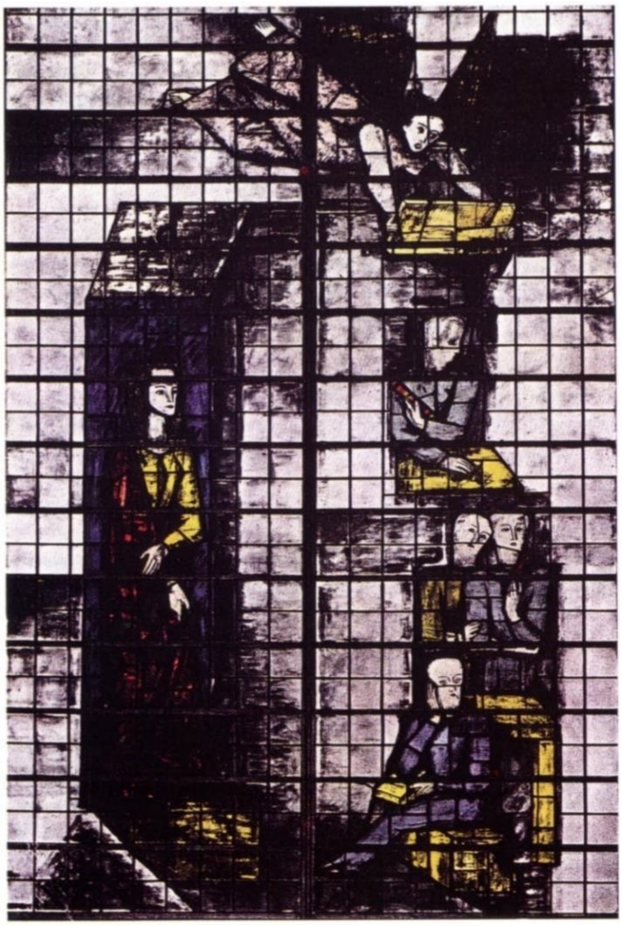


Fig. 9.6. Riproduzione a colori del cartone preparatorio della vetrata artistica della BIMR apparsa sulla copertina della rivista «Domus» (n. 98).

Su invito unanime della Facoltà di Scienze, nell’a.a. 1935-36 Gaetano Scorza si trasferisce da Napoli a Roma, dove gli è assegnata la cattedra di Geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno, cui Scorza affiancherà il corso facoltativo di

---

[46] Sulla vetrata, cfr. in particolare S. CATUCCI – G. GARRONI – S. SALVO 2017, *La vetrata artistica della Scuola di Matematica*. *Disegno di Gio Ponti per Luigi Fontana*, Macerata, Quodlibet. Rimangono pochissime testimonianze della vetrata artistica: tra queste, la copertina del numero 98 della rivista «Domus». Nel novembre 2017, la vetrata originale ha ripreso vita per due giorni grazie ad una proiezione luminosa *in situ*, realizzata dal gruppo del Master di I livello in Lighting Design della Sapienza. Il video dell’evento è disponibile al link: https://video.repubblica.it/edizione/roma/roma-restauro-virtuale-a-la-sapienza-ecco-la-vetrata-di-gio-ponti-distrutta-nel-43/290503/291116.

teoria dei numeri. A partire dal 1936 egli assume congiuntamente la direzione dell'Istituto di Matematica e della relativa Biblioteca, del Seminario e dei suoi «Rendiconti», incarichi che manterrà fino alla sua scomparsa nell'agosto 1939. La figura di Scorza è del tutto particolare all'interno del panorama della Scuola italiana. Da un lato, si colloca nel solco della tradizione italiana poiché, come scrive Conforto,

> la sua produzione scientifica, tranne pochissime eccezioni, fu tutta dedicata alla geometria algebrica ed alle teorie analitiche ad essa collegate, estendendosi alla teoria dei gruppi e delle algebre.[47]

Le sue prime ricerche vertono su temi classici: dalla polarità delle curve algebriche piane alle corrispondenze tra curve di genere p, dalle varietà a curve-sezioni ellittiche alla classificazione delle superfici irregolari a sezioni piane di genere tre.

Dall'altro lato, Scorza è un profondo innovatore: il collegamento da lui individuato tra la teoria delle matrici di Riemann e quella delle algebre sta alla base del lavoro *Corpi numerici ed algebre* (1921, Messina, Principato), "trattato di cristallina purezza di forma" che contribuisce a diffondere tra i geometri italiani "una teoria che si riteneva completamente estranea alla geometria algebrica".[48] Al momento del suo arrivo nella capitale, da una quindicina d'anni Scorza si occupa quasi esclusivamente di algebra e teoria dei numeri, ha apportato contributi originali alla classificazione delle algebre del terzo e quarto ordine ed è ormai un algebrista più che un geometra. È, anzi, uno dei pochissimi cultori di algebra di tutta la penisola.

Consapevole dell'arretratezza degli studi di algebra e teoria dei numeri in Italia, a Roma Scorza tenta di porvi rimedio agendo su più fronti: all'insegnamento accosta una mirata politica di inviti ai conferenzieri del Seminario e di acquisti per la Biblioteca. Facendo seguito alla conferenza del febbraio 1929 dedicata alla teoria delle matrici di Riemann, Scorza si impegna in prima persona nel diffondere la cultura algebrica nella capitale, tenendo due relazioni al Seminario Matematico nel 1936. Nella prima, intitolata *Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre*, fornisce una caratterizzazione delle algebre primarie e completamente primarie mediante la segnatura; la seconda è invece volta a illustrare la teoria di riducibilità delle algebre. Nel biennio 1938-39 'passa il testimone' al suo brillante allievo Lucio Lombardo-Radice, invitandolo a presentare – in due parti – i risultati della tesi di laurea, discussa nel 1938 e incentrata sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito. Frutto dell'incontro con Scorza sono anche i primi contributi di Guido Zappa sulla teoria dei gruppi. Come ricorderà Zappa molti anni dopo,

> nel 1938 ebbi la fortuna di conoscere Gaetano Scorza, grande algebrista, autore di alcune fondamentali Memorie sulle matrici di Riemann e del volume «Corpi numerici ed Algebre». [...] Fui attratto dalla personalità di Gaetano Scorza, per la sua gentilezza e signorilità, e per la sua concezione della matematica come regno dell'armonia. Egli portò la mia attenzione su alcuni settori della teoria dei gruppi da me poco conosciuti, e mi suggerì interessanti temi di ricerca.[49]

---

[47] CONFORTO 1940, *Gaetano Scorza*, «Annuario della R. Università degli Studi di Roma», a.a. 1939-40 p. 791.

[48] *Ivi*, p. 792.

[49] G. PATRIZIO 2005, *Intervista a Guido Zappa*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (8) 8-A, p. 244.

Dal 1937 al 1940 Zappa è assistente di Corrado Gini, preside della Facoltà di Scienze Statistiche di Roma. In questi anni, tiene ben cinque conferenze al Seminario dedicate a gruppi semplici, gruppi finiti non riducibili a gruppi semplici e gruppi supersolubili, per concludere con la relazione dal titolo *Sull'ampliamento degli automorfismi*. Al suo interno, Zappa risolve il problema di determinare la condizione necessaria e sufficiente affinché, dati un gruppo G, un suo sottogruppo invariante N con fattoriale ciclico di ordine n e un automorfismo α di N, esista un automorfismo β di G che determini sugli elementi di N la stessa sostituzione individuata da α. Un elemento caratteristico delle sedute del Seminario dedicate ad argomenti di algebra e teoria dei gruppi – che, sotto la direzione di Scorza, superano per la prima volta il 10% del totale (Fig. 9.7) – è la loro impostazione prevalentemente didattica, emblematica sia dello stato degli studi in Italia sia dell'intento di Scorza di promozione e diffusione di queste teorie.

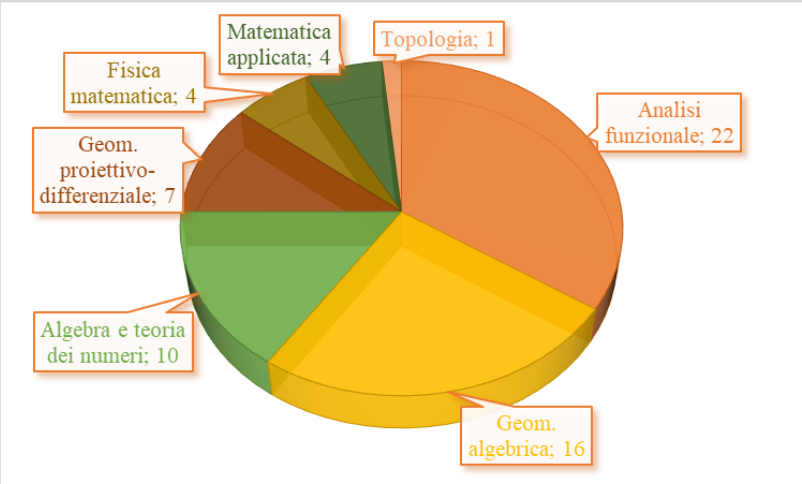


Fig. 9.7. Distribuzione disciplinare delle conferenze del Seminario sotto la direzione di Scorza.

Naturalmente, per incoraggiare le indagini in questo ambito non bastano le conversazioni che si tengono al Seminario ma vi è la necessità di avere a disposizione dei testi di riferimento da studiare e consultare durante l'attività di ricerca. Scorza fa dunque arrivare a Roma un gran numero di lavori di algebra e teoria dei numeri, nel tentativo di colmare il divario in questo settore tra l'Italia e gli altri paesi. Oltre a donare alla BIMR molti suoi lavori, Scorza si fa inviare da V. Bernstein, russo che insegna all'Università di Milano, diverse note di teoria analitica dei numeri (funzioni olomorfe, singolarità delle serie di Dirichlet, …) e le *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet* (1933, Parigi, Gauthier-Villars).

Sono però Germania e Stati Uniti i paesi che vedono il massimo sviluppo nel campo dell'algebra e della teoria dei numeri. Scorza acquista quindi per la Biblioteca diversi testi dei colleghi tedeschi, a partire dai manuali *Arithmetik, Algebra und Analysis* di H. Weber (1934, Leipzig, Teubner) e *Algebren* di Deuring (1935, Berlino, Springer). Numerosi sono anche i lavori sulla teoria degli ideali, poco diffusa all'epoca in Italia e ampiamente coltivata dalla Scuola tedesca che, formatasi attorno alla figura di Emmy Nöther prima del suo allontanamento da Göttingen (1933), continua a produrre in questo periodo contributi notevoli. Tra questi, i volumi *Zerfallende verschränkte produkte und ihre maximalordnungen* della Nöther (1934, Parigi, Hermann), *Idealtheorie* di W. Krull (1935, Berlino, Springer) e l'opuscolo *Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra* firmato da H. Hasse (1934, Parigi, Hermann). Bisogna poi aggiungere le ricerche sulla teoria dei numeri additiva di Landau (*Über einige neuere*

Fortschritte der additiven Zahlentheorie, 1937, Cambridge, CUP) e sui corpi quadratici di H. Jung (*Einführung in die Theorie der quadratischen Zahlkörper*, 1936, Leipzig, Janecke) prontamente recepite da Scorza durante la sua direzione della Biblioteca. Frutto dell'ambiente tedesco è anche il volume dello svizzero A. Speiser, docente a Zurigo ma laureato a Göttingen nel 1912, dal titolo *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1937[3], Berlino, Springer). Tra gli studiosi formatisi alla scuola di algebra astratta di Göttingen nel decennio 1915-1925 vi sono anche due norvegesi, specialisti di teoria dei numeri e allievo l'uno dell'altro: Thoralf A. Skolem, di cui Scorza acquista per la BIMR le *Diophantische Gleichungen* (1938, Berlino, Springer), e Øystein Ore, autore de *L'algèbre abstraite* (1936, Paris, Hermann).

Sul versante statunitense, Scorza è particolarmente attento alle pubblicazioni dei capiscuola dell'indirizzo algebrico nordamericano: Dickson e A.A. Albert. Giungono così a Roma i due volumi del primo *History of the theory of numbers* e *Algebras and their arithmetics* (1934 e 1938, New York, Stechert) e i trattati di algebra moderna del secondo: *Modern higher algebra* (1937, Chicago, ChUP) e *Structure of algebras* (1939, New York, AMS). Nel 1939 Scorza si fa inviare dagli USA anche le opere *Development of the Minkowski geometry of numbers* di Hancock (1939, New York, Macmillan) e *Elementary number theory* di J.V. Uspensky (1939, New York, Mc Graw-Hill), specialista russo di teoria delle equazioni trasferitosi a Stanford negli anni Trenta. Dall'editoria francese provengono invece due scritti relativi alla teoria dei gruppi e alle sue applicazioni in ambiti differenti: il primo, rivolto verso la fisica quantistica, è la tesi di E. Bauer *Introduction à la théorie des groupes et a ses applications à la physique quantique* (1933, Paris, PUF); il secondo, le *Leçons sur la théorie des équations selon Galois: précédées d'une introduction à la théorie des groupes* di G. Verriest (1939, Parigi, Gauthier-Villars), è invece incentrato sulla teoria di Galois.

L'attenzione e la sensibilità di Scorza per gli sviluppi dell'algebra è capillare. Non solo acquista per la BIMR le *Diophantische Approximationen* (1936, Berlino, Springer) dell'olandese J.F. Koksma, ma vi affianca tutta una serie di opuscoli sulle classi di ideali provenienti dal Giappone, quali *Sur les classes d'idéaux dans les corps quadratiques* di S. Iyanaga e *Nichtkommutative Hauptidealringe* di K. Asano (1935 e 1938, Paris, Hermann).

L'impatto di Scorza sulla composizione della Biblioteca è quindi particolarmente forte in campo algebrico. Anche in ambito geometrico, però, si registrano alcuni elementi di novità. Bisogna tener presente che, dagli anni Trenta, fuori dall'Italia si affermano l'indirizzo topologico e lo studio degli spazi astratti. Già rappresentate da alcuni volumi che iniziano a comparire sugli scaffali della BIMR durante gli ultimi anni della direzione Castelnuovo – come la *Topologie* di K. Kuratowski (1933, Varsavia, Polskie Towarzystwo Matematyczne), i *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels* di Lyusternik e Schnirelmann (1934, Parigi, Hermann) e le *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux* di A. Appert (1934, Parigi, Hermann) – con Scorza le ricerche in questi ambiti iniziano a occupare una posizione di rilievo tra i lavori di geometria. Sul fronte degli invii dagli Stati Uniti, all'impostazione di taglio classico della *Inversive Geometry* di F. Morley e F.V. Morley (1933, New York, Ginn) e degli argomenti scelti di geometria algebrica editi da Snyder, si contrappongono quella adottata da M. Marston nel volume *Functional topology and abstract variational theory* (1938, Paris, Gauthier-Villars) e l'approccio di Zariski nel suo celebre trattato sulle superfici algebriche (1935, Berlino, Springer). Sotto la direzione di Scorza arrivano in Biblioteca anche le opere dei topologi russi Aleksandrov (*Topologie*, 1935, Berlin, Springer) e Pontrjagin (*Topological groups*, 1939, Princeton, PUP). A queste bisogna aggiungere i volumi firmati da Weil, dall'*Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques* a *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (1935 e 1938, Parigi, Hermann). In questi anni gli scaffali della BIMR si arricchiscono anche dei primi lavori di topologia combinatoria, quali la *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe* di D. König e la *Topologie der polyeder und kombinatorische topologie der komplexe* di Reidemeister (1936 e 1938, Leipzig, Akademische Verlag.). Dalla Germania arrivano anche l'*Einführung in die algebraische Geometrie* di Van der Waerden (1939, Berlino, Springer) e la seconda edizione della sua *Moderne Algebra*, il secondo volume della quale raggiungerà la BIMR qualche mese dopo la morte di Scorza.[50] La presenza di un buon numero di testi di topologia sugli scaffali della Biblioteca di Roma non basta però a spostare gli interessi di ricerca dei geometri della Scuola romana. Tramite i contatti con la Scuola belga e inglese, arrivano in BIMR diversi lavori di Godeaux, tra cui le *Leçons de géométrie supérieure* (1933, Liege, Bourguignon) donate dall'autore a Castelnuovo, e i *Principles of Geometry* di Baker (1923-33, Cambridge, CUP). In questa fase, la tradizione culturale della geometria algebrica italiana è sempre più cristallizzata all'interno dei trattati classici e dei testi delle lezioni che Enriques, Severi, Fano, Campedelli, Bortolotti e G. Gallucci tengono negli atenei di tutta la penisola. Negli a.a. 1936-37 e 1937-38 il fondo librario è gestito da Emma Castelnuovo, figlia di Giudo, appena laureata con una tesi in geometria algebrica caratterizzata dall'impostazione tipica della Scuola italiana.[51]

All'apertura di Scorza dal punto di vista delle acquisizioni librarie non corrisponde un rinnovamento all'interno delle conferenze presentate al Seminario in ambito geometrico. All'acquisto dei volumi di topologia non si accompagna un incremento delle comunicazioni in questo campo, tant'è che l'unica conferenza su un argomento di carattere topologico è quella di G. Scorza-Dragoni del 1936 dedicata alle traslazioni piane di Brouwer. Le relazioni di geometria algebrica presentate al Seminario sono di impostazione 'classica', coerentemente con il fatto che i conferenzieri sono tutti membri o allievi della Scuola italiana. L'unico straniero a presentare una conferenza in questo campo è il belga P. Defrise (*Sur les courbes multiples cycliques*), studente di P. Libois che, a sua volta, era stato allievo di Enriques.

Non a caso, tra coloro che tengono più comunicazioni durante la direzione di Scorza vi sono Conforto, Cherubino e Pompilj (Tab. 9.3). Il primo dedica i suoi tre interventi al Seminario a temi tipici della tradizione italiana: i piani doppi razionali; un caso particolare di bisezione della serie canonica; i fasci di Halphen aventi i punti base su una cubica ellittica degenere. Anche Cherubino – all'epoca titolare della cattedra di geometria analitica all'Università di Pisa – pur affrontando il tema del simbolismo delle matrici durante la sua prima comunicazione, nelle tre successive si concentra sulla teoria delle omografie e sulla geometria sopra una curva algebrica, andando ad analizzare l'identità birazionale tra due curve. Appena laureatosi con una tesi di geometria algebrica redatta sotto la supervisione di Enriques (1935), Pompilj presenta al Seminario tre comunicazioni nel pieno solco della tradizione geometrica italiana: nella prima esamina le trasformazioni cremoniane del piano che posseggono una curva di punti uniti, mentre le altre due sono dedicate alla rappresentazione algebrica dei piani tripli e dei piani multipli diedrici. Accanto a Franchetta che presenta un contributo su alcuni esempi di superfici

[50] BIRM, *Registri di Ingresso*: ordinato da Scorza, il secondo volume (n. 37290) è ingressato in data 9.4.1940.

[51] Cfr. E. CASTELNUOVO 1936, *Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sé*, «Rend. ANL» (6) 24, pp. 342-346.

canoniche, sono invitate al Seminario due allieve di Enriques e Castelnuovo: Carmela Carbonaro, che propone un intervento dal titolo *Le varietà caratteristiche dell'*S_{2n} *immagini delle funzioni di variabile* n *−duale, totalmente derivabili*, e Lina Proia che approfondisce lo studio dei gruppi finiti di omografie piane.[52] Quest'ultimo tema sarà poi ripreso da C. Zito nella conferenza del 1939 volta ad analizzare le omografie di $\mathbb{P}^3$ che ammettono un complesso lineare unito non speciale. Tra il 1935 e il 1938 l'impronta di Enriques sugli interessi geometrici nella capitale è tangibile: egli stesso presenta per la pubblicazione all'interno dei «Rendiconti» due memorie relative al problema delle curve infinitamente vicine su una superficie algebrica.

Conferenzieri	**N. conferenze al Seminario (1936-1939)**
Scorza-Dragoni Giuseppe	6
Zappa Guido	5
Cherubino Salvatore	4
Miranda Carlo	4
Blaschke Wilhelm	4
Conforto Fabio	3
Pompilj Giuseppe	3

Tab. 9.3. Relatori del Seminario maggiormente rappresentati, con almeno 3 conferenze.

Sul versante della geometria differenziale, chi tiene il maggior numero di interventi è Blaschke. Al Seminario presenta tre comunicazioni, l'ultima delle quali in collaborazione con il suo studente H. Terheggen. A queste bisogna aggiungere la conferenza *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero* tenuta da Bompiani, l'intervento di Calapso sulle reti di Voss e il *Contributo allo studio proiettivo-differenziale delle singolarità: punto di flesso e punto parabolico delle superficie* proposto da I. Popa. Quest'ultimo, addottoratosi nel 1934 presso l'Università di Iași, si trovava a Roma per perfezionarsi in geometria proiettivo-differenziale sotto la guida di Bompiani grazie ad una borsa di studio biennale assegnatagli dall'Accademia delle Scienze rumena, che lo avrebbe portato anche ad Amburgo, per collaborare con Blaschke. In questo settore, accanto a Bompiani, l'autore maggiormente rappresentato all'interno della composizione della BIMR nel periodo 1935-1939 è Eisenhart. In ambito analitico, sono invece da segnalarsi le litografie delle lezioni di analisi superiore tenute da Picone nell'a.a. 1937-38.

Sotto la direzione di Scorza, si assiste anche al fiorire della manualistica destinata all'insegnamento medio e secondario: sono ingressati in Biblioteca moltissimi libri di testo redatti sia dai professori universitari in servizio presso l'ateneo romano (Castelnuovo, Enriques, Severi e Amaldi *in primis*) sia da figure minori come C. Baffi, A. Vergerio, G. Pedote e G. Bisconcini. All'interno di questi compaiono alcuni testi di geometria in cui è privilegiato un approccio intuitivo e pratico – caratteristico della concezione didattica condivisa dai membri della Scuola – con l'obiettivo di fornire agli studenti nozioni operative e non solo conoscenze teoriche. È questo il caso del manuale *Aritmetica e geometria ad uso delle scuole di avviamento professionale* di Adriana Enriques (1937, Bologna, Zanichelli).

[52] Durante la direzione di Scorza del Seminario, le uniche altre donne a presentare un contributo sono Maria Badellino (*Sul calcolo delle funzioni di Bessel*) e Valeria Stefani (*Sull'integrazione di taluni problemi al contorno relativi al* Δw *e al* $\Delta\Delta w$), le cui ricerche si collocano invece nell'ambito dell'analisi funzionale.

Negli anni Trenta fanno anche il loro ingresso in Biblioteca per la prima volta diversi lavori di matematica applicata alle scienze biologiche e sociali. Il merito è, probabilmente, di Volterra che a partire dal 1926 aveva volto i propri interessi verso gli studi di biomatematica. La via per la diffusione di questo tipo di indagini nella capitale era stata favorita anche da L. Amoroso che, nell'aprile del 1929, aveva presentato al Seminario una conferenza intitolata *L'equazione differenziale del movimento della popolazione*. Nonostante l'allontanamento di Volterra dall'Università nel 1931, in seguito al rifiuto di prestare il giuramento di fedeltà al regime, permane un certo interesse per queste tematiche. A Roma giungono quindi i primi testi del settore, all'epoca del tutto pioneristico, come *Les phénomènes biologiques dans le cadre des sciences exactes* di T. Cahn (1933, Parigi, Hermann); *Théorie analytique des associations biologiques* di A.J. Lotka (1934-39, Parigi, Hermann); *Vérifications expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie* di G.F. Gause (1935, Parigi, Hermann); *Biologie mathématique* di V.A. Kosticyn (1937, Parigi, Colin); *Elementi per una teoria matematica del contagio* di M. Puma (1939, Roma, Aeronautica).

Frutto dell'impegno di Enriques nella direzione della Scuola di Perfezionamento in Storia delle Scienze sono invece i volumi di storia e filosofia della matematica che egli continua ad acquistare con grande prontezza, fino al suo allontanamento in seguito ai provvedimenti razziali. Ancora nel 1938 raggiungono la Biblioteca i testi di due autori ungheresi: *Denker der italienischen Renaissance: Gestalten und Probleme* di R. Hönigswald (1938, Basel, Falken) e *Logic of algebra* di P. Diens (1938, Paris, Hermann).

Pur adoperandosi soprattutto per l'incremento del patrimonio librario sul versante della matematica pura, Scorza mantiene i contatti con gli studiosi stranieri che avevano trascorso un periodo di perfezionamento a Roma. Oltre ai geometri già citati (Zariski, allievo di Castelnuovo tra il 1921 e il 1926; Weil, vincitore di una borsa di studio della Sorbonne per l'a.a.1925-26; Deuring[53], allievo di Severi nell'a.a. 1928-29, e Reidemeister nel 1933), anche Struik continua a inviare alla BIMR i suoi lavori di fisica matematica scaturiti dall'incontro con Levi-Civita. Ai suoi contributi si affiancano quelli di fisica atomica dei "ragazzi di via Panisperna" che, dal 1937, si trasferiscono nel nuovo Istituto Fisico della Città Universitaria, adiacente all'Istituto di Matematica.

Le applicazioni occupano una porzione decisamente limitata del patrimonio librario della Biblioteca sotto la direzione di Scorza e sono per la stragrande maggioranza ascrivibili ad un unico ambito, quello aeronautico. In questo settore si colloca anche il contributo di C. Minelli *Su una possibile forma di instabilità dell'equilibrio elastico nelle ali a sbalzo* presentato al Seminario Matematico nel 1937. Tra il 1935 e il 1939 giungono in Biblioteca numerosi estratti de «L'aerotecnica», di taglio sempre meno scientifico, che anticipano l'imminente conflitto mondiale: dalle *Impressioni sull'aviazione civile degli Stati Uniti* di G. Gabrielli (1935) a *Il regime autarchico dei materiali aeronautici ed il legno migliorato* di G. Carro Cao (1939). Dalla Germania nazista sono anche inviati al governo italiano alcuni saggi di carattere eminentemente politico, come il volume *Japans Werdegang als Weltmacht und Empire* di K. Haushofer (1933, Berlino, de Gruyter).

Alla morte di Scorza, il patrimonio della Biblioteca dell'Istituto di Matematica conta 30.000 volumi, 40.000 opuscoli e 205 periodici.

---

[53] Deuring terrà anche una conferenza al Seminario nel giugno 1941, intitolata *La teoria aritmetica delle funzioni algebriche di una variabile*.

9.6. 1939-1946: la direzione di Bompiani durante gli anni della Seconda guerra mondiale

Dal settembre 1939 la direzione della Biblioteca dell'Istituto di Matematica passa a Enrico Bompiani che, contestualmente, diventa direttore del Seminario Matematico insieme a Severi. All'atto di inaugurare la quinta serie della rivista del Seminario, ne viene modificato il nome in «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni». Bompiani assume la direzione della Biblioteca in una temperie difficile, segnata dallo scoppio della Seconda guerra mondiale e dagli effetti dei *Provvedimenti per la difesa della razza* anche a livello accademico. Le complicate ripercussioni a livello economico fanno sì che la via privilegiata per l'incremento del patrimonio librario sia quella delle donazioni.

Il lascito più importante è sicuramente quello di Scorza. Come naturale proseguimento dell'azione di Scorza in favore della BIMR, gli eredi destinano alla Biblioteca le sue collezioni di opuscoli e di volumi. Tra i mesi di settembre e dicembre 1939 sono depositati in Biblioteca 1.565 estratti appartenuti a Scorza, per la maggior parte di autori italiani.[54] Il nucleo più consistente è costituito da lavori dei geometri italiani ma, coerentemente con il profilo professionale di Scorza, compaiono diversi scritti di algebra e teoria dei numeri firmati per la maggior parte da Bedarida, oltre ai conferenzieri del Seminario romano (Bernstein, Lombardo-Radice e Zappa). In un secondo momento (aprile 1940-ottobre 1941) giungono sugli scaffali della BIMR anche una quarantina di volumi della Biblioteca personale di Scorza, formata in gran parte da testi 'classici' della tradizione italiana e da testi di stampo didattico.[55]

Al secondo posto per numero di pezzi, vi sono le importanti donazioni effettuate dallo stesso Bompiani tra il marzo del 1940 e l'aprile del 1943. Esclusa la sua *Geometria analitica con elementi di proiettiva* (1940, Roma, Pioda) e i due volumi delle lezioni di geometria descrittiva di Pittarelli (1926, Roma, Sapienza) e Gerbaldi (1922, Pavia, Tip. Cucchi, Pellegrini, Pieroni & co.), si tratta di quasi 1.450 note di matematica.[56] Pur essendo perlopiù il frutto della ricerca dei geometri italiani dell'indirizzo proiettivo-differenziale (Terracini, Strazzeri, …) – di cui Bompiani si afferma in questi anni come il massimo esponente anche a livello internazionale – numerosissimi sono anche gli scritti della seconda generazione della Scuola di geometria algebrica: Aprile, B. Segre, Morin, Turri e altri ancora.

A differenza di Scorza, Bompiani dona alla Biblioteca un nucleo consistente di lavori stranieri, in parte frutto dei suoi viaggi di propaganda del regime in Austria e nella zona dei Balcani.[57] Tra questi si annoverano gli scritti su argomenti di topologia differenziale firmati

[54] BIRM, *Registri di Ingresso*: gli opuscoli della miscellanea Scorza corrispondono ai nn. 35994-36097, 36159-36347, 36349-36450, 36452-36547, 36549-36748, 36352-36844, 36846-37123.

[55] BIRM, *Registri di Ingresso*: i volumi della Biblioteca Scorza corrispondono ai nn. 37430-37439, 38766-38773, 38996-38999, 39111, 39161-39171, 39173-39175, 39178, 39180, 39208-39209.

[56] BIRM, *Registri di Ingresso*: gli opuscoli donati da Bompiani corrispondono ai nn. 37276-37281, 37305, 37468-37563, 37568-38489, 38526-38527, 38543, 38568-38569, 38594, 38612-38660, 38680-38723, 38726, 38870-38908, 38922-38923, 38928-38933, 38963-38968, 39014-39106, 39116-39156, 39195-39204, 39246-39256, 39260-39275, 39457-39461, 39515, 39532-39556, 39597-39609, 39612-39616, 39637, 39659-39668; i volumi ai nn. 37424, 37425, 38794.

[57] Nei mesi di aprile e maggio del 1942 Bompiani si reca in missione a Budapest, Sofia, Bucarest, Iasi, Vienna e Bratislava, alternando lezioni tecniche di geometria differenziale a conferenze propagandistiche. Cfr. la sezione

dall'ungherese Kerékjártó e dal rumeno Simion Stoilow. Agli opuscoli dell'austriaco Tietze depositati in BIMR da Bompiani, si somma il volume *Ein Kapitel Topologie: zur Einführung in die Lehre von den verkoteten Linien* (1942, Leipzig, Teubner), acquistato dalla Biblioteca nel febbraio 1943. All'interno dei contatti tra l'Italia fascista e l'area balcanica si possono inscrivere anche i 20 opuscoli di analisi complessa inviati alla BIMR nel biennio 1942-43 da N. Obreshkov e Abramescu.[58] Sul versante della geometria differenziale, Bompiani dona alla BIRM i lavori che gli hanno inviato Mukhopadhyaya dall'India e T. Takasu dal Giappone. Questi si vanno a sommare alle numerose ricerche di taglio proiettivo-differenziale della collezione Bompiani provenienti dalla Germania, soprattutto ad opera di Salkowski e Blaschke, cui si aggiungono i lavori in lingua francese di P. Delens e Godeaux. Dal mondo anglosassone provengono invece diversi estratti di geometria algebrica, come quelli di Roth, Snyder e Zariski.

Durante i primi tre anni della direzione Bompiani, la Biblioteca dell'Istituto Matematico di Roma beneficia dell'invio di opuscoli da parte di matematici di tutta la penisola, la cui maggioranza è rappresentata dagli autori della Scuola italiana. Tra i cultori dell'indirizzo proiettivo-differenziale, Togliatti spedisce regolarmente alla BIMR i suoi lavori per una trentina di note matematiche in totale.[59] A queste si aggiungono, in un secondo momento, le opere donate da Vacca e V. Boccara, tra cui le antiche litografie della *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* di Bianchi (1897, Pisa, Gozani). Dall'estero, invece, la maggior parte delle donazioni proviene dalla Germania. Tali invii sono probabilmente favoriti dai rapporti di natura politica tra il governo italiano e quello tedesco. Giungono così nella capitale i lavori di geometria di O. Haupt, G. Nöbeling, W. Meyer-König, H. Muggli e quelli dedicati alla teoria dei gruppi di H. Wielandt.[60]

Il forte interesse di Bompiani e Severi per le indagini geometriche si riflette sulla distribuzione disciplinare dei contributi presentati al Seminario Matematico: le ricerche di geometria algebrica e proiettivo-differenziale rappresentano da sole oltre il 30% del totale (Fig. 9.8). La presenza di conferenzieri italiani dell'indirizzo algebrico (oltre a Severi, Cherubino, Brusotti e Campedelli) o differenziale (oltre a Bompiani, Buzano, Villa, Bortolotti e Pastori) è dominante, con le uniche eccezioni del tedesco R.W. Leidheuser e del rumeno J. Creanga. Entrambi però presentano dei contributi nel solco della tradizione italiana: il primo, infatti, affronta il problema della rappresentazione di una particolare ipersuperficie di $\mathbb{P}^4$ di quarto grado su $\mathbb{P}^3$; il secondo si occupa delle trasformazioni degli intorni del secondo ordine di punti in corrispondenza puntuale.

Notizie in «Boll. UMI» 1942, (2) 4.3, p. 207. Ancora, nell'aprile del 1943 Bompiani tiene un corso a Bratislava sulle proprietà proiettive e topologiche dello spazio ordinario e degli iperspazi e due conferenze a Budapest. Tra il 10 e il 30 maggio dello stesso anno, presenta dieci conferenze di geometria differenziale in diverse città della Romania (Bucarest, Cernăuți, Iași, Timișoara). A tal proposito, cfr. la sezione *Notizie* in «Boll. UMI» 1943, (2) 5.3, p. 204.

[58] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Obreshkov (13.3.1943 e 15.3.1943; nn. 39563-39582) e Abramescu (3.9.1942; nn. 39476-39480).

[59] BIRM, *Registri di Ingresso*: doni di Togliatti (3.4.1941 e 11. 4.1941; nn. 38800-38802, 38818-38832, 38834-38849).

[60] BIRM, *Registri di Ingresso*: opuscoli nn. 37191-37198, 37200-37214, 37228-37245, 37249-37275, 37287, 37289, 37426-37429, 38544-38567, 38596-38609.

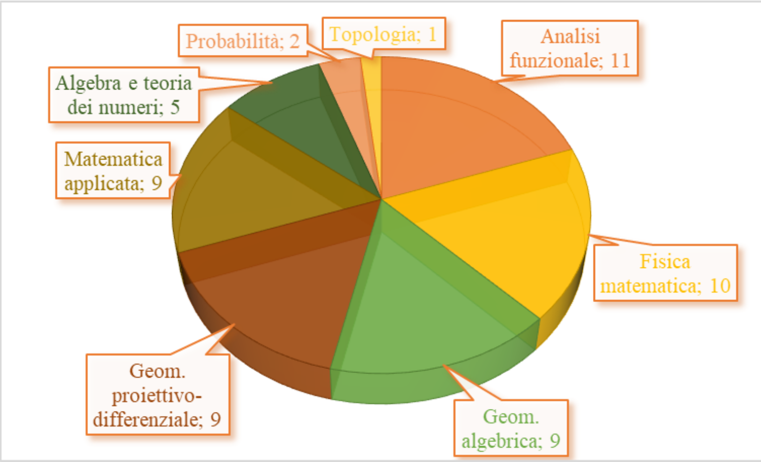


Fig. 9.8. Distribuzione disciplinare delle conferenze del Seminario negli anni 1940-1943.

Nel periodo immediatamente successivo alla morte di Scorza e fino all'entrata in guerra dell'Italia, a Roma permane una certa sensibilità per le questioni algebriche. Accanto ai lavori di Reidemeister donati da Bompiani, dall'Inghilterra arriva il trattato *An introduction to the theory of numbers* di Hardy e E.M. Wright (1938, Oxford, Claredon). Con i fondi universitari è invece acquistata l'opera postuma di Scorza *Gruppi astratti* (1942, Roma, Cremonese) edita da Zappa e Scorza-Dragoni. Nel 1941 sono anche acquisite diverse monografie della collana *Colloquium Publications* dell'AMS: tra questi anche testi di notevole interesse algebro-geometrico come *Algebraic arithmetic* di E.T. Bell (1927), *Differential equations from the algebraic standpoint* di J.F. Ritt (1932), *Algebraic functions* di G.A. Bliss (1933), *Structure of algebras* di Albert (1939) e *Lattice theory* di Birkhoff (1940).[61] All'interno del Seminario Matematico permane una certa attenzione verso queste tematiche, seppur minore rispetto al periodo precedente. Delle cinque conferenze di carattere algebrico svolte tra il 1940 e il 1943, due sono dedicate alla teoria dei gruppi: la prima, tenuta da Giuseppina Casadio, moglie di Zappa, prende in esame la costruzione dei gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili; la seconda, tenuta da G. Mignosi, si intitola *Sulla definizione di gruppo*.[62]

Il gruppo dei cultori di fisica matematica, pur decisamente 'indebolito' dall'allontanamento di Levi-Civita dall'ambiente universitario, continua a depositare in BIMR il frutto delle sue indagini. È in primo luogo Signorini, successore di Levi-Civita sulla cattedra di Meccanica razionale dal 1938, a incentivare questa pratica donando alla Biblioteca le sue *Lezioni di fisica matematica* del 1934-35 e vari opuscoli. A questi bisogna aggiungere i lavori di C. Cattaneo, titolare della cattedra di Fisica matematica a Roma, i quasi cinquanta estratti inviati da Messina da C. Agostinelli e i vari contributi di G. Sestini, U. Bencivenga, G. Melchiorri e Maria Pastori.[63] Parallelamente, al Seminario romano sono presentato alcuni lavori di indirizzo fisico-matematico: oltre a quelli di Cattaneo e Agostinelli, rientrano in questa categoria i contributi di A. Ferrari-Toniolo, A. Tonolo, C. Tolotti, F. Sibirani, A. Galli e Bruna Paolini.

[61] BIRM, *Registri di Ingresso*: acquisti del 3.2.1941 (nn. 38743-38750).

[62] Le altre tre comunicazioni relative a questo ambito sono presentate da L. Cavallucci, Spampinato e Deuring.

[63] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni di Signorini (nn. 36845, 39638-39644), Agostinelli (nn. 37144-37187), Sestini (nn. 37307-37310), Cattaneo (nn. 38737-38739, 39645), Bencivenga (n. 38727), Melchiorri (nn. 38751-38755) e Pastori (nn. 39380-39387).

Sul versante dell'analisi le opere ingressate in Biblioteca in questo periodo recano la firma di autori estranei all'ambiente accademico romano (Tonolo, Andreoli e S. Cinquini *in primis*), con l'unica eccezione dei manuali di Severi e T. Viola.[64]

Nel 1942 la donazione più consistente proviene dall'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo (INAC), fondato da Picone nel 1927 e con sede a Roma dal 1932. Si tratta di un centinaio di opuscoli firmati dai principali collaboratori dell'INAC in questi anni: Picone, Conforto, Viola, Krall, Minelli, Tolotti, Cesari[65]. Questi – cui si aggiungono E. Aparo, L. Crocco, A. Marcantoni, C. Polidoro e G. Zin – sono anche protagonisti di un buon numero di conferenze tenute al Seminario Matematico nel periodo 1940-43.

Sempre sul fronte applicativo, i lavori di Giorgi – docente trasmissioni e misure telegrafiche e telefoniche e di comunicazioni elettriche a Roma tra il 1934 e il 1940 – rappresentano un altro contributo importante che giunge in Biblioteca in questi anni.[66] Degni di rilievo sono infine i lavori di fotogrammetria donati da P. Dore e l'innovativo volume *Mathematical biophysics: physicomathematical foundations of biology* (1938, Chicago, ChUP) di N. Rashevsky, pioniere della biologia teoretica.

Per quanto riguarda le riviste, la strada principale percorsa da Bompiani è quella dello scambio con i «Rendiconti». Ai periodici editi in tutto il mondo acquisiti fin dalla direzione di Castelnuovo ed Enriques del Seminario, si aggiungono nuove riviste pubblicate in centri editoriali ancora più periferici, quali le «Transactions of the R. Society of South Australia» e il «Journal of the Indian Mathematical Society». Con i fondi universitari, a un 'prezzo di favore' grazie ai rapporti amichevoli con la Germania, sono acquistati 18 volumi dello «Jahresbericht der DMV». Allo scarseggiare dei finanziamenti per l'acquisto del «Bollettino dell'UMI», suppliscono le donazioni dei singoli, come quella di Sibirani.[67]

Bompiani riesce così a incrementare il numero di testate ingressate in Biblioteca, inserendo nuovi centri editoriali all'interno della già fitta rete di scambi dei «Rendiconti» che, nell'estate 1941, includeva anche un buon numero di riviste provenienti da oltreoceano[68]: quelle statunitensi *in primis* (10 periodici), ma anche il «Boletin Matematico» edito a Buenos Aires (Fig. 9.9). Alle otto testate giapponesi che arrivano regolarmente a Roma già dagli anni Venti, bisogna aggiungere tutta una serie di riviste provenienti dai paesi baltici quali Danimarca («Matematisk Zidsskrift»), Svezia («Arkiv Mathematik, Astronomi, fysik»), Russia («Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae») ed Estonia («Acta et

[64] BIRM, *Registri di Ingresso*: doni di Tonolo (19.2.1940; nn. 37228-37231), Andreoli (22.4.1940; nn. 37293-37303) e Cinquini (23.4.1942, nn. 39413-39419).

[65] Lamberto Cesari, pur occupandosi prevalentemente di questioni applicative, nel 1941 presenta al Seminario un contributo di carattere geometrico-topologico intitolato *Sui punti di diramazione delle trasformazioni continue e sull'area delle superficie in forma parametrica*.

[66] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni dell'INAC (3.3.1942; nn. 39279-39379) e di Giorgi (23.4.1942; nn. 39420-39430). Tolotti invia anche individualmente alla BIRM i suoi lavori (come, ad esempio, il n. 39453).

[67] BIRM, *Registri di Ingresso*, nn. 36099-36158, 37319-37405, 38672-38675.

[68] BIRM, *Fondo in corso di lavorazione sulla storia della Biblioteca di Matematica*: CNR a E. Bompiani, Roma 20.7.1941; E. Bompiani al CNR, Roma 30.7.1941, con oggetto "Periodici stranieri che si trovano nelle Biblioteche degli Istituti scientifici dei principali Enti industriali italiani". Il regesto di tali riviste si trova in appendice a questa tesi.

Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica»[69]). La collezione dei periodici della Biblioteca di Roma, pur segnata dalla netta prevalenza di riviste tedesche e francesi (Fig. 9.10), ha una forte vocazione internazionale che si consoliderà in misura ancora maggiore nel dopoguerra.

Fig. 9.9. Cartografia mondiale delle riviste straniere della BIMR nel 1941.

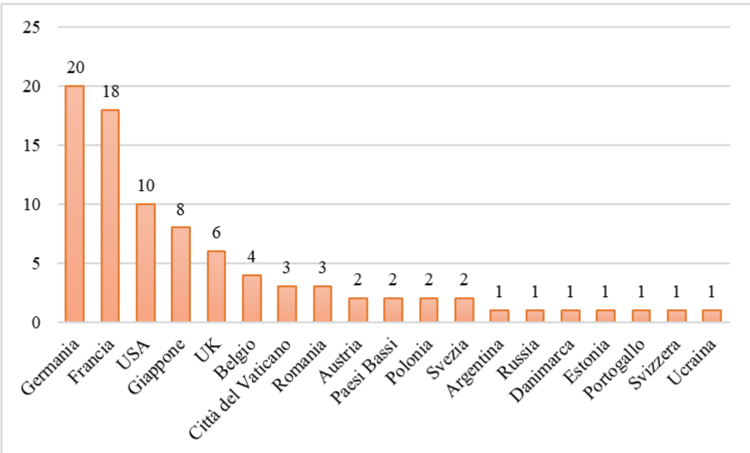


Fig. 9.10. Distribuzione geografica delle riviste straniere della BIMR nel 1941.

All'inasprirsi del conflitto mondiale, con la conseguente penuria di risorse finanziarie da utilizzare per la BIMR, si accompagna un riordino della Biblioteca con catalogazione di quei volumi "trovati nel magazzino senza numero d'inventario" o "nuovamente inventariati perché avevano numeri duplicati". Tra le ultime acquisizioni antecedenti la fine della guerra si registrano gli opuscoli inviati dalla *Technischen Hochschule* di Zurigo – tra cui la tesi di dottorato di Eckmann di topologia, *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume* (1941) – e quelli scambiati con la *Bibliothek der Technischen Hochschule* di Danzig.[70]

[69] Questa rivista è fondata nel 1921, anno successivo all'indipendenza dell'Estonia dalla Russia sancita dal trattato di Tartu del 2 febbraio 1920.

[70] BIRM, *Registri di Ingresso*, nn. 39448-39452 e 39465-39470.

Le attività della Biblioteca si interrompono nell'estate del 1943, quando Roma è martoriata da una cinquantina di incursioni aeree che provocano quasi 7.000 vittime, e riprenderanno solo a distanza di sei mesi dalla Liberazione, nel novembre 1946. Nonostante le difficoltà dovute all'inasprirsi del conflitto, Bompiani è riuscito a incrementare il patrimonio della Biblioteca che, alla fine dell'a.a. 1943-44 comprende 36.000 volumi, 40.000 opuscoli e 300 riviste.

Le prime acquisizioni del periodo post-bellico sono frutto, naturalmente, di donazioni private: Castelnuovo, da poco reintegrato e nominato commissario speciale del CNR, deposita in Biblioteca gli Atti del Congresso Internazionale dei Matematici del 1932; dal Brasile Sobrero invia il volume *Elasticidade* (1942, Rio de Janeiro, Boffoni); ancora, A. Frajese dona le opere matematiche di Ruffini, Conforto le sue lezioni di geometria analitica e meccanica razionale, Fantappiè il testo delle conferenze sui funzionali analitici da lui tenute a Madrid nel 1943.[71] L'unico acquisto effettuato nella prima metà del 1945 è quello di una trentina di volumi appartenuti a Baraldi, tra i quali compaiono diversi lavori stranieri (Kowalewski, D. Grave, E. Madelung, R. Rothe, …).[72]

Buona parte delle riviste che arrivano in Biblioteca nel primo dopoguerra è frutto della cooperazione internazionale per la ricostruzione dell'Europa. È questo il caso dei periodici dell'AMS e delle riviste «Duke Mathematical Journal» e «Journal of Mathematics and Physics» donate alla BIMR dall'*American Library Association*. Dagli Stati Uniti provengono anche testi di L.G. Simons, D. Smith, C.J. Keyser, J. Douglas, Franklin, Infeld e altri ancora, inviati dalla *Scripta Mathematica Library* con sede al Yeshiva College di New York. Analogamente, il comitato svizzero *Aide par le livre* spedisce a Roma i primi 19 volumi dei «Commentarii Mathematici Helvetici», oltre alle opere di E.C. Titchmarsh, R. Fueter, F. Deprez, A. Grosrey e J. Malengreau, stampate a Zurigo e Losanna.[73]

Il ruolo della BIMR e del Seminario Matematico appare dunque decisivo nello sviluppo della matematica e, in particolare, della geometria algebrica nella capitale tra la fine dell'Ottocento e il secondo dopoguerra. La storia di queste istituzioni non fornisce soltanto una serie di elementi sul contesto in cui la produzione matematica si è situata e al quale è imprescindibilmente legata. Essa riflette anche le diverse fasi di evoluzione dell'attività scientifica a Roma, segnate da diverse strategie di acquisizioni librarie e da una diversa distribuzione disciplinare e di nazionalità dei conferenzieri del Seminario (Fig. 9.11). A tal proposito, basti osservare il passaggio dal graduale rilancio dell'attività matematica nella "Roma degli scienziati" (la "terza" Roma, dopo quella degli imperatori e quella dei papi) auspicato da Sella alla fase di internazionalismo scientifico e al ruolo di primo piano di Roma come meta di studi e centro di ricerche con Volterra, Castelnuovo ed Enriques. Al periodo di massimo splendore della capitale sul fronte matematico, seguono ben presto gli anni segnati dall'autarchia culturale imposta dal regime prima (con la conseguente drastica diminuzione degli ospiti stranieri al Seminario) e dalla Seconda guerra mondiale poi, uno dei fattori che sanciscono il definitivo declino della Scuola italiana di geometria algebrica.

---

[71] BIRM, *Registri di Ingresso*. Si tratta, rispettivamente, dei volumi nn. 39635, 39709, 39685, 39687-39689, 39790.

[72] BIRM, *Registri di Ingresso*: tali volumi sono contrassegnati da "acquistato dal prof. Baraldi" (17.2.1945 e 22.3.1945; nn.: 39646-39658, 39669-39684).

[73] BIRM, *Registri di Ingresso*: donazioni dell'*American Library Association* (20.11.1946; nn. 39746-39776), dell'*Aide par le livre* (28.6.1947; nn. 39850-39875) e della *Scripta Mathematica Library* (18.10.1947; nn. 39889-39904).

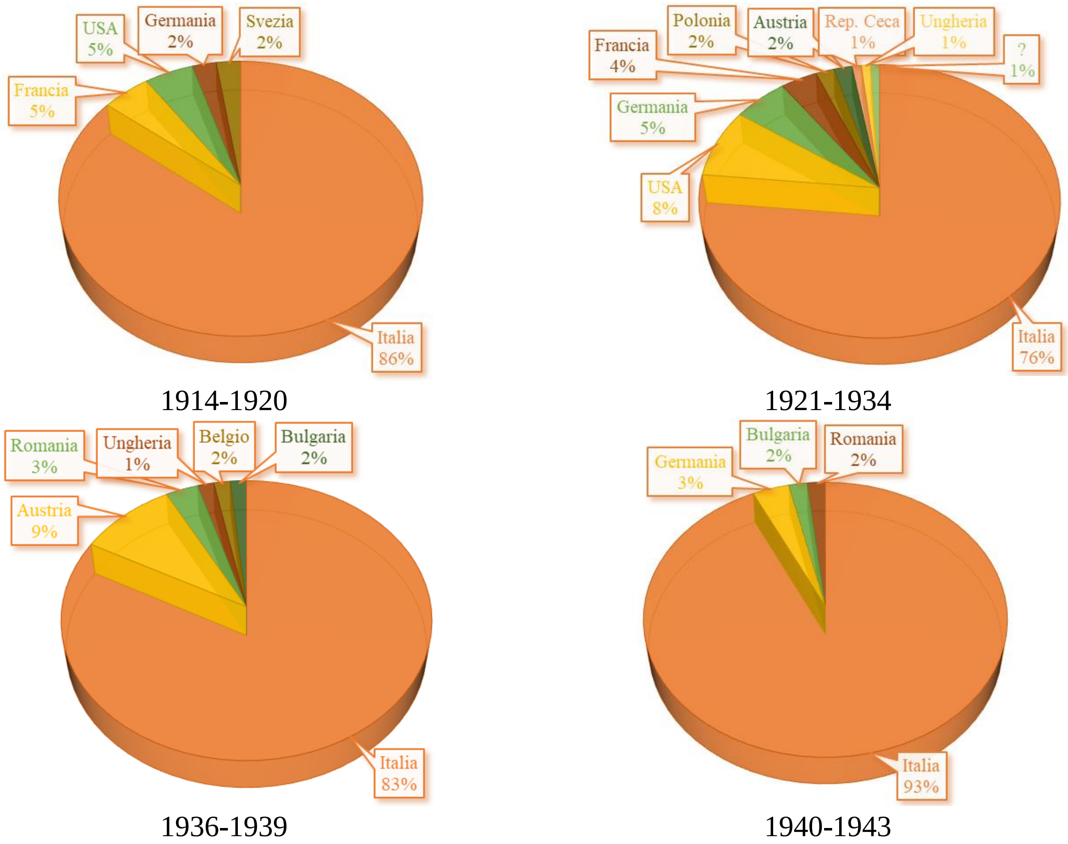


Fig. 9.11. Variazione della nazionalità dei conferenzieri del Seminario Matematico di Roma.

10. *La Biblioteca Speciale di Matematica di Torino*

La storia della Biblioteca Speciale di Matematica di Torino (BSMT), oggi intitolata a Giuseppe Peano[1], è fortemente interconnessa con il progresso degli studi geometrici in Italia, dalla sua fondazione nel 1883 fino agli anni Cinquanta. Non è anzi eccessivo affermare che l'evoluzione della biblioteca e del 'polo torinese' della Scuola italiana di geometria algebrica procedono di pari passo.

Per quasi ottant'anni, infatti, sono i geometri algebrici e/o proiettivo-differenziali a dirigere la BSMT: D'Ovidio (1883-1906), Segre (1907-1924), Fano (1925-1938) e Terracini (1948-1964). L'unica eccezione è costituita dal decennio di direzione di Tricomi (1938-1948), un analista che assume la direzione della Biblioteca quando Fano è allontanato da tutti i suoi incarichi a causa dei provvedimenti razziali. I direttori della BSMT non sono soltanto membri dello stesso gruppo di ricerca, ma sono allievi l'uno dell'altro. È, questo, un elemento significativo, emblematico del ruolo centrale che le diverse generazioni della Scuola attribuivano alla Biblioteca: essa rappresenta non solo un luogo di conservazione e fruizione del sapere ma anche (e soprattutto) un centro di ricerca e di produzione di nuova conoscenza matematica.

Il fondo librario è oggi composto da 80.000 monografie e 700 collezioni di periodici (20.000 annate per un totale di circa 100.000 unità), accanto a una collezione di modelli matematici e di materiale archivistico di diversa natura.[2] All'interno della Biblioteca vi è un'ampia sezione di volumi ammessi alla sola consultazione e catalogati come "rari", per data (ante 1830) o per valore intrinseco: si tratta di circa 2.500 unità, tra cui 600 libri antichi.[3]

Dopo i primi studi sui tratti generali della storia della BSMT e sulle collezioni di riviste acquisite tra il 1883 e il 1948, l'immenso patrimonio di volumi e opuscoli della Biblioteca torinese restava ancora da analizzare nel dettaglio.[4] Scopo del seguente capitolo è dunque inserire un ulteriore tassello in questa direzione a partire dalla ricostruzione della collezione di volumi e della leggendaria miscellanea di estratti, con un focus sul loro nucleo geometrico. Il regesto completo delle opere (riviste escluse) ingressate in Biblioteca dalla sua fondazione fino alla fine del secondo conflitto mondiale, realizzato confrontando diversi materiali d'archivio e incrociando i dati ivi contenuti, è posto in appendice a questa tesi.

[1] L'intitolazione avviene nel 1983, in occasione del centenario della fondazione della BSMT.

[2] Si ringrazia Antonella Taragna per l'informazione. La Biblioteca è oggi organizzata a scaffale aperto con i volumi raggruppati per argomento secondo il *Mathematics Subject Classification* dell'AMS. Per quanto riguarda la struttura architettonica, la BSMT si compone di tre piani di monografie, di cui due soppalcati, e da un'ampia zona sotterranea che consta di un ulteriore settore di monografie da collezione e di due magazzini di periodici cartacei. Il sotterraneo attualmente è inaccessibile al pubblico.

[3] La creazione del fondo *Rari* è promossa da F. Arzarello che, divenuto direttore della BSMT nel novembre 1992, dispone che i libri antichi e rari siano raccolti e custoditi in un apposito fondo, protetto e non accessibile al prestito.

[4] Sulla storia della BSMT, cfr. L. GIACARDI – C.S. ROERO 1999, *Biblioteca Speciale di Matematica "Giuseppe Peano"*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 1, *Ricerca, Insegnamento, Collezioni scientifiche*, Torino, DSSP, pp. 437-458; LUCIANO 2018, *cit*.

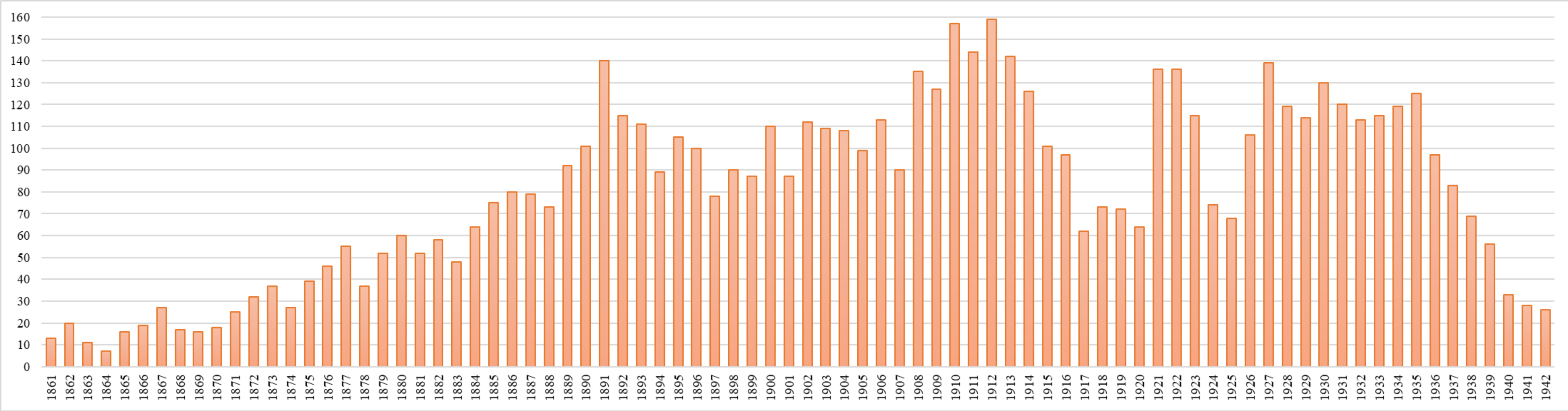


Fig. 10.1 Volumi pubblicati tra l'Unità d'Italia e la Seconda guerra mondiale acquisiti dalla BSMT dalla sua fondazione al 1945.

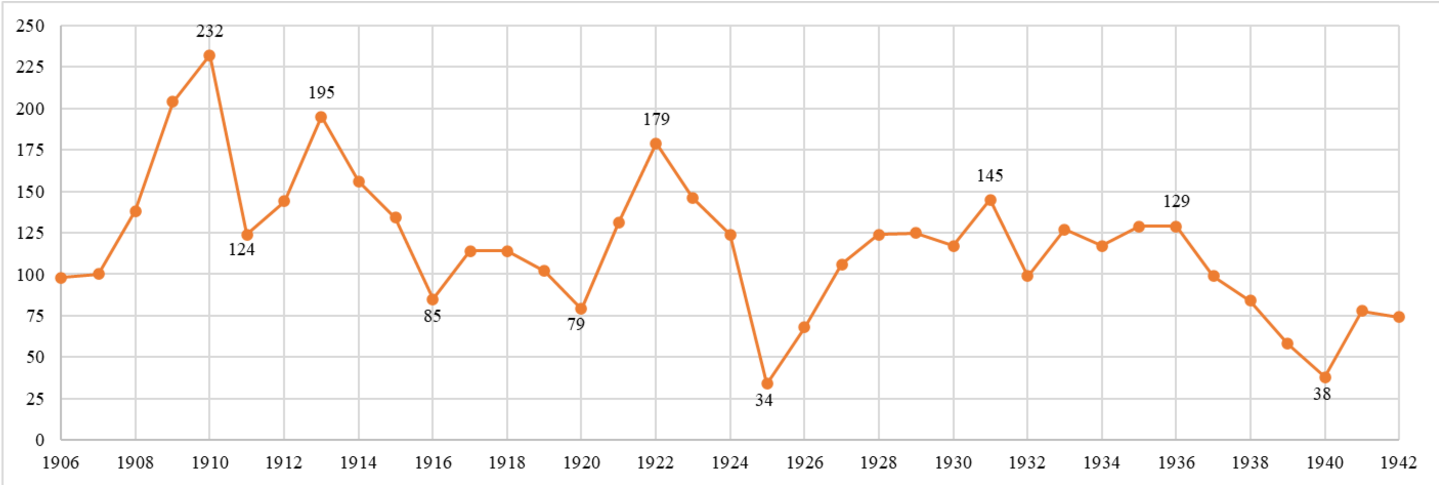


Fig. 10.2 Andamento delle acquisizioni della BSMT dal 1906 alla Seconda guerra mondiale.[1]

[1] Sono contati una sola volta gli opuscoli e i volumi ingressati insieme, allo stesso numero d'inventario. In tutti i grafici di questo tipo si adotterà tale convenzione.

10.1. Dalla fondazione al 1906: la direzione di D'Ovidio

La creazione della BSMT risale al marzo del 1883, quando Enrico D'Ovidio è direttore della Facoltà di Scienze MFN. Consapevole della necessità di ampliare i locali della Biblioteca Universitaria Nazionale, egli chiede al Ministero della Pubblica Istruzione di nominare una commissione per individuare nuovi spazi adeguati a ospitare il crescente patrimonio della Biblioteca e a soddisfare le esigenze degli utenti. La soluzione cui perviene la commissione è la seguente: la Biblioteca Nazionale deve essere trasferita e i suoi locali essere messi a disposizione di tre Biblioteche Speciali dedicate agli studenti delle Facoltà di Giurisprudenza, Lettere e Filosofia, Scienze MFN, nonché delle rispettive Scuole di Magistero.[1]

Fin dalla fondazione, la BSMT è interamente finanziata dal Consorzio Universitario piemontese, un ente filantropico statale, e dal Ministero della Pubblica Istruzione. Notevole è l'impegno finanziario della prima istituzione: essa accoglie prontamente l'appello di D'Ovidio che, tra le cause della scarsa vitalità delle Scuole di Magistero torinesi, annoverava "la mancanza di piccole biblioteche speciali, e materiale scientifico per le varie sezioni della scuola, specie nella Sezione di Matematica",[2] istituita nell'a.a. 1886-87. In quello stesso anno, il solo Consorzio eroga una somma forfettaria di 1.500 lire per l'acquisto di libri e strumenti scientifici, a fronte di uno speciale sussidio statale di sole 500 lire.

Grazie a tali finanziamenti è acquistato il primo fondo librario della Biblioteca, all'epoca situata all'ultimo piano del Palazzo dell'Università di via Po 13. Questo nucleo originario è ben presto incrementato dagli importanti lasciti testamentari di tre docenti di matematica dell'ateneo torinese: Camillo Ferrati (1822-1888), Francesco Faà di Bruno (1825-1888) e Giuseppe Bruno (1828-1893), quest'ultimo preside della Facoltà di Scienze MFN all'epoca della fondazione della BSMT.[3]

Nel marzo del 1888 è reso pubblico il testamento di Ferrati, ordinario di Geodesia teoretica, che dona alla Biblioteca le principali opere della sua raccolta libraria, assegnandole anche una rendita perpetua di 200 lire. Il figlio Cesare completerà il lascito con tutti gli altri lavori di matematica appartenuti al padre.[4] Si tratta di 310 opere in tutto (246 volumi e 64 opuscoli) che comprendono alcuni pezzi d'antiquariato quali l'edizione del 1554 del *De subtilitate libri XXI* di G. Cardano[5] e una trentina di settecentine, tra cui diversi lavori di Euler (6 titoli), C. Bossut (4) e Newton (3). Numerosi sono i testi francesi di inizio Ottocento firmati da Biot, Lamé, L. Carnot, S. Lacroix, J.-L. Lagrange, A.-M. Legendre, J. Hachette, P.S. de Laplace, S.D. Poisson e Poncelet. Essi costituiscono il nucleo maggiore del lascito (40%), andando a superare il numero di lavori editi in Italia (113 esemplari) e Germania (39). Altri centri editoriali di rilievo all'interno della collezione di Ferrati sono San Pietroburgo, dove sono pubblicati 12 lavori (7 dei quali firmati da V. Bouniakowski), e Bruxelles (9 volumi, tra cui due di J.-B. Liagre).

[1] Cfr. LUCIANO 2018, *cit.*, p. 435.

[2] E. D'OVIDIO 1884, *Mutazioni e aggiunte avvenute nella R. Università di Torino dal 1872 in poi*, in *Appendice ai Cenni storici sulla Regia Università di Torino pubblicati nell'anno 1872,* Torino, Stamperia Reale, p. 7.

[3] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, pp. 437-438.

[4] Cfr. *ivi*, p. 438. È anche istituito il "Premio Ferrati" che, con cadenza biennale, assegna £ 301 agli studenti del 3° e 4° anno del corso di laurea in Matematica in base alla media dei voti degli esami del primo biennio. A tal proposito, cfr., *inter alia*, «Annuario UTo» 1934-35, p. 413.

[5] Questo volume rappresenta ancora oggi il raro più antico dell'intera collezione della BSMT.

Scarsamente rappresentati sono invece Svizzera, Paesi Bassi, Austria, Polonia, Svezia, UK, USA, con soltanto un lavoro edito in ciascuno degli ultimi cinque paesi elencati.

Il lascito di Ferrati è caratterizzato da una certa varietà a livello disciplinare (Fig. 10.3): pur con una leggera prevalenza di testi di analisi (70 esemplari), vi è tutto sommato un equilibrio tra il numero di lavori di geometria (65), ingegneria (65) e fisica (60). Tra le 34 opere di geodesia e astronomia, principale settore di studio di Ferrati, compaiono gli importanti lavori di C.F. Gauss *Méthode des moindres carrés* (1855) e *Théorie du mouvement des corps célestes* (1857), numerosi testi in lingua francese (C. Delaunay, L. Francoeur, E. Liais, L. Puissant, …), due contributi di O. Struve editi dall'osservatorio astronomico russo di Poulkova, fondato nel 1839, e diversi scritti dei geodeti italiani contemporanei (F. Amante, A. Bordoni, L. Giletta, G. Lantelme, F. Schiavoni). Poche invece le opere complete e varie che comprendono gli *Elementa matheseos universae* di C. Wolff (5 vols., 1746-54) e la *Metrologia* di A. Favaro (1826). Solo due sono invece i lavori di taglio storico: la traduzione di G. Fontana del *Saggio* di Bossut (1802-03) e l'*Histoire de l'astronomie ancienne et moderne* di J.-S. Bailly (2 vols., 1805).

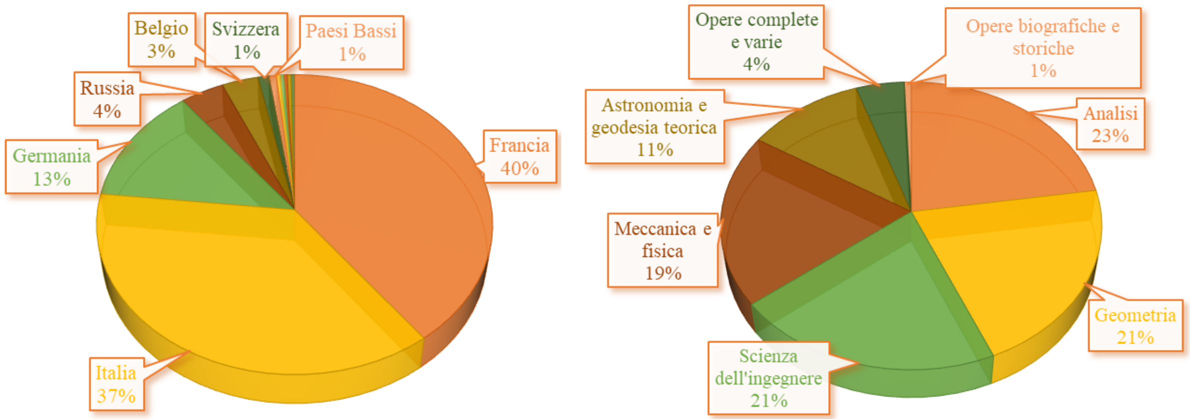


Fig. 10.3. Distribuzione per nazione (a sx) e per disciplina (a dx) delle opere del lascito Ferrati.

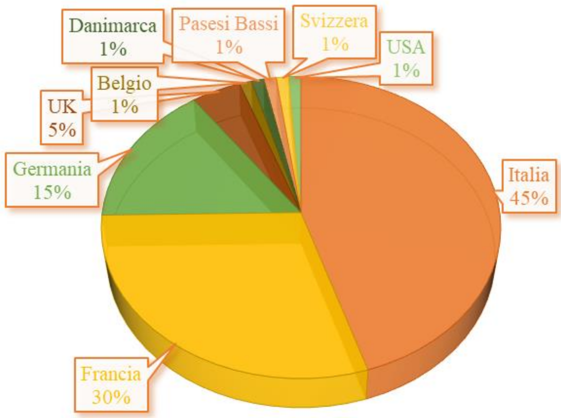
Nel mese di aprile giungono in Biblioteca le opere della raccolta di Faà di Bruno, straordinario di Analisi superiore, accompagnate dall'auspicio dell'apertura al pubblico di una sala di lettura e della pubblicazione di un catalogo a stampa della Biblioteca.[6] Sono così ingressati in BSMT una cinquantina di volumi e 7 opuscoli, pubblicati tra il 1735 e il 1884, insieme a diversi fascicoli delle principali riviste di matematica dell'epoca. L'esigua raccolta di estratti consta prevalentemente di note di geometria dei colleghi dell'ateneo torinese (Segre, Bruno e D'Ovidio) e dei loro collaboratori (A. Fais, F. Maglioli), dedicate alle superfici rigate, alla teoria delle coniche e delle quadriche e alle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere. A queste bisogna sommare 25 pubblicazioni di matematica di M. Azzarelli su questioni varie di idraulica e geometria (studio di particolari luoghi geometrici, curve di secondo e quarto ordine, questioni di rettificazione e quadratura, …), fatte rilegare insieme dallo stesso Faà di Bruno.[7] Per quanto riguarda i volumi, netta è la prevalenza di quelli di analisi (oltre il 50% del totale): si tratta di lavori di calcolo differenziale e integrale, perlopiù sulle funzioni analitiche, ellittiche e di variabile complessa. Rientrano in questa categoria anche alcuni scritti di teoria

[6] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, p. 439.

[7] Per questo motivo le 25 note di matematica di Azzarelli risultano come un unico volume all'interno del Catalogo Paravia, fasc. 1, p. 32, e sono registrate all'interno della sezione "Opere complete".

dei numeri (Cauchy e Legendre) e di calcolo delle probabilità (A. Cournot e Lacroix). Due soli i trattati di geometria: la *Géométrie du compas* di L. Mascheroni, tradotta in francese da A.M. Carette (1828), e la traduzione di A. Faifofer della *Geometria di posizione* di Reye (1884). Tra le opere complete e varie, di rilievo sono quelle di Abel, la traduzione francese di F. Peyrard delle opere di Euclide (1819) e la *Collectanea mathematica. In memoriam Dominici Chelini*, curata da Beltrami e Cremona (1881). Del tutto assenti invece i lavori di carattere applicativo-ingegneristico (Fig. 10.4).

Quasi la metà delle opere (45%) lasciate in eredità da Faà di Bruno sono edite in Italia. Seguono Francia (27 pezzi), Germania (14) e Regno Unito (4) cui si aggiungono – con un solo lavoro – Belgio, Danimarca, Paesi Bassi, Svizzera e Stati Uniti.



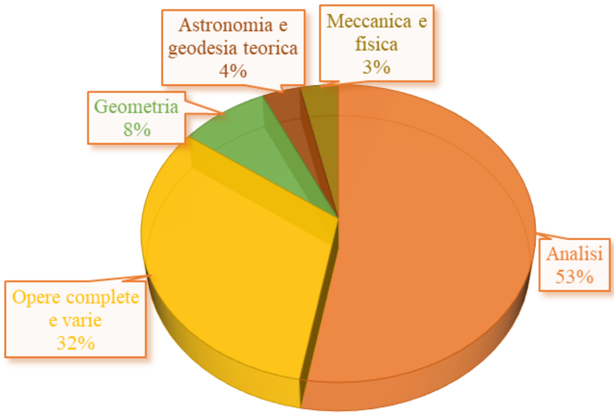


Fig. 10.4. Distribuzione per nazione (a sx) e per disciplina (a dx) delle opere del lascito Faà di Bruno.

Il terzo cospicuo lascito testamentario risale al 1893: Giuseppe Bruno, ordinario di Geometria descrittiva, destina alla BSMT 208 volumi e 376 opuscoli. L'edizione degli *Elementi* di Euclide di C. Clavio (1603) rappresenta l'opera più antica della collezione. Coerentemente con il profilo professionale di Bruno, la geometria è la disciplina più rappresentata (quasi 40% del totale), in quasi tutte le sue branche: geometria elementare, descrittiva, proiettiva e algebrica. Tra i volumi di questo ambito, compaiono sia importanti trattati stranieri, prevalentemente firmati da autori francesi e tedeschi (Biot, Brianchon, Chasles, Clairaut, Monge, Fiedler, von Staudt, P. de la Hire, G.F. L'Hôpital, E. de Jonquières, A. Milinowski, oltre ai già citati Lacroix, Legendre, Gauss, …), sia i primi contributi dei geometri italiani (Cremona *in primis*, ma anche Aschieri, A. Bordoni, Pieri, Veronese, F. Revelli, F. Toffoli, S. Vecchi, …). Sul versante geometrico, numerosissimi sono gli estratti pubblicati dall'Italia, con una significativa maggioranza dei colleghi dell'ateneo torinese: accanto alle 18 note di matematica dello stesso Bruno, si registrano 24 opuscoli di C. Segre, 13 di Loria, 9 di Pieri, 7 di Amodeo, D'Ovidio e Peano, 6 di G. Bordiga, oltre a diversi scritti firmati da Caporali, Casorati, G. Castelnuovo, Chiò, Fais, Fano, Genocchi, Gerbaldi, Sella, G. Torelli e altri ancora. Tra i contributi torinesi inviati a Bruno relativi ad altri ambiti disciplinari, si possono citare quelli di A. Dorna (astronomia), G. Ferraris (teoria dell'elettricità), N. Jadanza (geodesia e diottrica) e G. Plana (fisica e meccanica).

Complessivamente, le note del lascito Bruno sono pubblicate sui principali periodici italiani editi da accademie e società scientifiche, con la locale Accademia delle Scienze di Torino che registra il maggior numero di pubblicazioni (Tab. 10.1). Le uniche eccezioni sono rappresentate dagli «Annali di Matematica pura ed applicata» e dal «Giornale di Matematiche» di Battaglini.

L'analisi ricopre un quarto delle opere donate da Bruno alla BSMT; gli scritti degli altri settori sono in numero minore ma comprendono autentiche rarità quali le *Lectiones optices* (1760) di R. Rampinelli. Ancora, all'interno di questo lascito compaiono i volumi *Elettricismo artificiale* (1772) e *Gradus Taurinensis* (1774) di G.B. Beccaria, le *Récréations mathématiques et physiques* di J. Ozanam (1774), e le memorie di matematica di A. Lorgna (1770) e G. Mainardi (1833).

Altamente significativo a livello di patrimonio culturale dei primi geometri dell'ateneo torinese è il fatto che il nucleo di lavori editi in Italia è nettamente prevalente (75%) all'interno della collezione di Giuseppe Bruno. Sul versante delle pubblicazioni straniere, la Francia ricopre il primo posto, seguita da Germania, Belgio e Inghilterra (Fig. 10.5).

Periodico	Sede	N. di estratti
«Atti R. Acc. Sci. Torino»	Torino	80
«Giorn. di Mat.»	Napoli	30
«Ann. Mat.»	Bologna	20
«Mem. R. Acc. Sci. Torino»	Torino	16
«Rend. Circ. Mat. Palermo»	Palermo	14
«Rend. ANL»	Roma	13
«Rend. R. Ist. Lomb.»	Milano	13

Tab. 10.1. Riviste maggiormente rappresentate nella miscellanea Bruno, con più di 10 estratti.

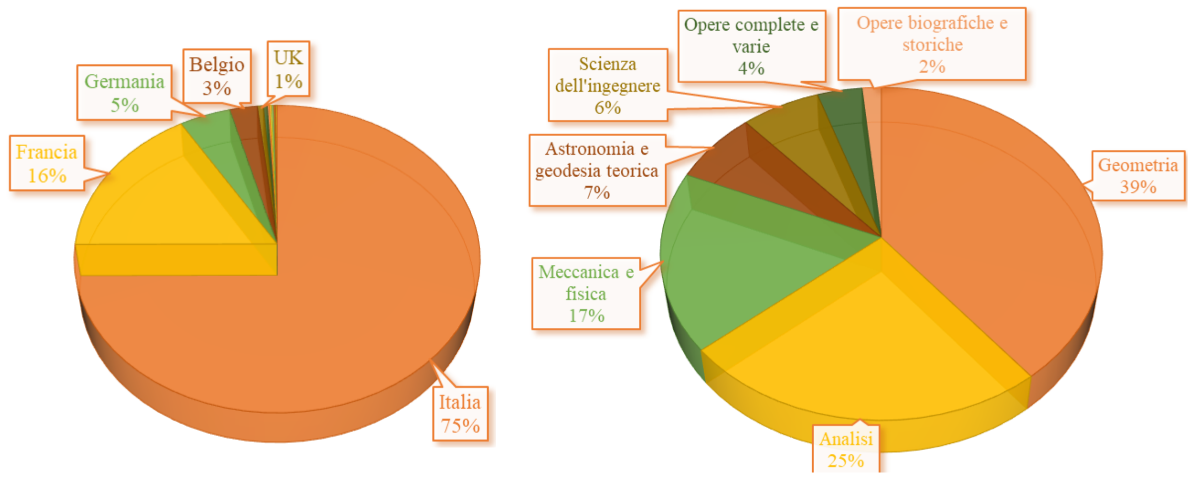


Fig. 10.5. Distribuzione per nazione (a sx) e per disciplina (a dx) delle opere del lascito G. Bruno.

Come da regolamento, nei primi anni di esistenza la Biblioteca provvede alla compilazione di un catalogo a stampa, edito da Paravia. Il primo fascicolo di tale catalogo è pubblicato nel maggio 1891; i due successivi, che hanno una numerazione consecutiva delle pagine e che non ripetono le acquisizioni precedenti, sono dati alle stampe nel maggio del 1896 e del 1905. Oltre a contenere un'indicazione sulla provenienza dei volumi,[8] i fascicoli sono organizzati per materie (analisi, astronomia e geodesia teorica, geometria, meccanica e fisica, opere biografiche e storiche, opere complete e varie, scienza dell'ingegnere) cui si affianca una sezione dedicata

[8] Le lettere B, F e B' indicano rispettivamente i lasciti di F. Faà di Bruno, C. Ferrati e G. Bruno. Le lettere M e C denotano i libri acquisiti rispettivamente con i fondi del Ministero e del Consorzio.

ai periodici. All'interno di ciascuna sezione, i titoli sono ordinati alfabeticamente per autore. La tiratura dei fascicoli del *Catalogo della Biblioteca* non è nota, ma è certo che la sua diffusione travalica i confini cittadini: il *Catalogo* non è solo distribuito alle biblioteche di Torino e delle altre Università, ma viene anche inviato dai matematici torinesi ai loro collaboratori sparsi in tutta la penisola.[9]

Il Catalogo Paravia restituisce una panoramica completa del patrimonio di volumi e opuscoli della BSMT nei primi vent'anni di esistenza. Il nucleo maggiore è costituito da lavori italiani (oltre il 40%), seguiti dalle opere edite in Germania (28%) e Francia (22%). Gli unici altri paesi da cui provengono almeno 20 degli scritti ingressati in Biblioteca in questo periodo sono Inghilterra (85 pezzi), Belgio (40) e Stati Uniti (24). Dal punto di vista disciplinare, significativa è la maggioranza di lavori di geometria (35%) che spaziano dalla geometria analitica nel piano e nello spazio alle geometrie non euclidee, dalle lezioni di geometria proiettiva, descrittiva e differenziale ai contributi sulla teoria delle curve e delle superfici algebriche; segue l'analisi, con un centinaio di esemplari in meno. All'interno di questa categoria – accanto ai temi classici dell'analisi infinitesimale e allo studio delle funzioni di più variabili e delle funzioni ellittiche – rientrano l'algebra elementare e la teoria delle forme binarie Consistente è anche la percentuale di lavori afferenti all'ambito fisico (15%) – meccanica soprattutto, ma anche termodinamica, teoria dell'elasticità e dell'elettricità – mentre decisamente minoritaria a livello globale è la componente di geodesia e astronomia (Fig. 10.6).

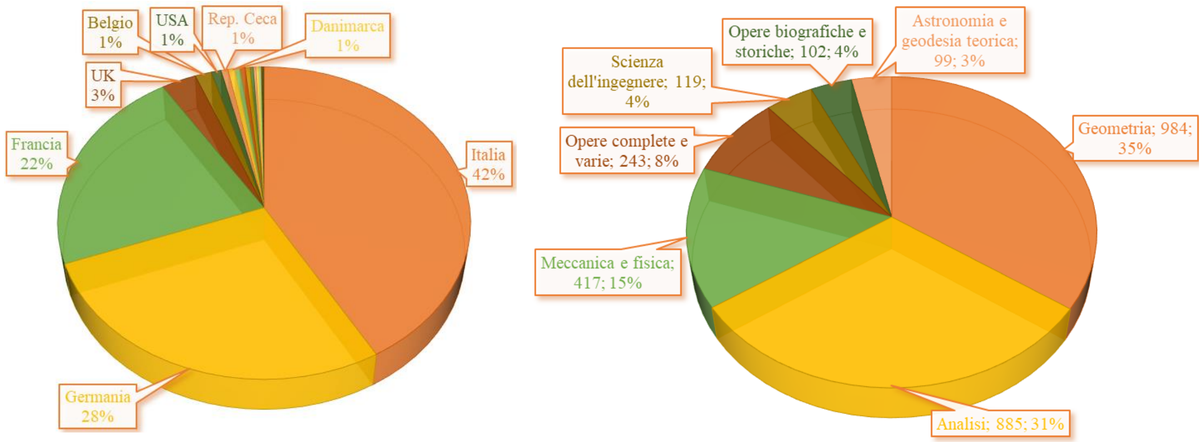


Fig. 10.6. Distribuzione per nazione (a sx) e per disciplina (a dx) delle opere del Catalogo Paravia.

Restringendo l'attenzione al campo geometrico, aumenta la percentuale dei lavori tedeschi che, da soli, superano la metà degli scritti stranieri. Tra questi spiccano le opere dei geometri tedeschi cui la Scuola italiana farà sempre riferimento: 16 volumi di Klein *in primis*, due edizioni delle *Vorlesungen über Geometrie* di Clebsch (1876^1, 1891^2) e della *Geometrie der Lage* di Reye (1882^2, 1893^3), lo scritto *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* di M. Nöther (1883) su cui Segre e Castelnuovo innesteranno la geometria sopra

[9] Cfr., ad esempio, la lettera di C. Segre a F. Amodeo, Torino 24.11.1891: "T'invierò (d'accordo con D'Ovidio) una copia del Catalogo: [...] sono ancora innumerevoli le opere importanti che ci mancano, e solo coll'andar degli anni la nostra Biblioteca potrà esser un po' completa", edita in F. PALLADINO – N. PALLADINO 2006, *Dalla moderna geometria alla nuova geometria italiana: viaggiando per Napoli, Torino e dintorni: lettere di Sannia, Segre, Peano, Castelnuovo, D'Ovidio, Del Pezzo, Pascal e altri a Federico Amodeo*, Firenze, Olschki, p. 186. Sulla diffusione del Catalogo Paravia, cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit*., p. 441, e LUCIANO 2018, *cit*., pp. 436-437.

una curva algebrica, cinque volumi rispettivamente di Lie e Plücker, quattro di Fiedler e W. Killing e, ancora, vari lavori di Schubert, Schröter, Steiner, von Staudt, Zeuthen, E. Weyr. Numerosi anche i testi di geometria provenienti dall'editoria francese, mentre decisamente esigui – in questa prima fase – sono quelli americani (Tab. 10.2). Degno di nota è anche il fatto che l'unica opera proveniente dall'India ingressata in Biblioteca in questo periodo sia di taglio geometrico: si tratta del contributo di E. Jamshedji intitolato *Reciprocal polygons* (1898).

L'impegno profuso da D'Ovidio nella creazione e nella gestione della BSMT scaturisce da una duplice motivazione. Da un lato, infatti, la fondazione della Biblioteca si inscrive all'interno dei diversi impegni istituzionali di D'Ovidio, come preside della Facoltà di Scienze MFN dal 1879 al 1881 e dal 1894 al 1907 e come rettore dell'Università dal 1880 al 1885, che lo avevano portato a promuovere la costruzione di nuovi edifici e a inaugurare la pubblicazione dell'«Annuario dell'Università di Torino».[10] Dall'altro lato, la BSMT riveste un ruolo importante nell'avviamento alla ricerca dei giovani auspicato da D'Ovidio che ha, tra le conseguenze, la nascita della Scuola italiana di geometria algebrica che da lì a poco, sotto la guida di C. Segre, raggiungerà una *Führende Stellung* in campo matematico a livello internazionale.

Nazione di provenienza	**N. lavori di geometria**
Germania	280
Francia	173
UK	16
Belgio	11
Rep. Ceca	7
Danimarca	6
Svezia	6
Austria	5
USA	5
Svizzera	2
India	1
Paesi Bassi	1
Polonia	1
Portogallo	1
Romania	1

Tab. 10.2. Numero di lavori stranieri della sezione di geometria del Catalogo Paravia.

Nel maggio 1905, accanto alle 48 collezioni di riviste, sono 2.850 i titoli dei volumi e degli opuscoli custoditi in Biblioteca. Di questi, 1.321 sono stati acquistati grazie al contributo del Consorzio Universitario, 182 con i fondi ministeriali. Il patrimonio della BSMT, oltre che dai tre lasciti testamentari già citati, è stato incrementato da importanti donazioni personali, quelle di D'Ovidio *in primis*. Ulteriori contributi sono depositati in Biblioteca dai vari esponenti dei due principali gruppi di ricerca dell'ateneo torinese, capeggiati da Segre e Peano (Castelnuovo,

[10] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, p. 442; LUCIANO 2018, *cit.*, p. 437.

Enriques, Severi, Fano, Pieri, B. Levi, Burali-Forti, Ramorino, …), ma anche dai fisici-matematici (Boggio, Somigliana, Morera). Sul fronte delle donazioni provenienti dall'estero, l'unico nucleo consistente è rappresentato dalle cinque note di A. MacFarlane, socio del Circolo Matematico di Palermo dal 1894 (Fig. 10.7).

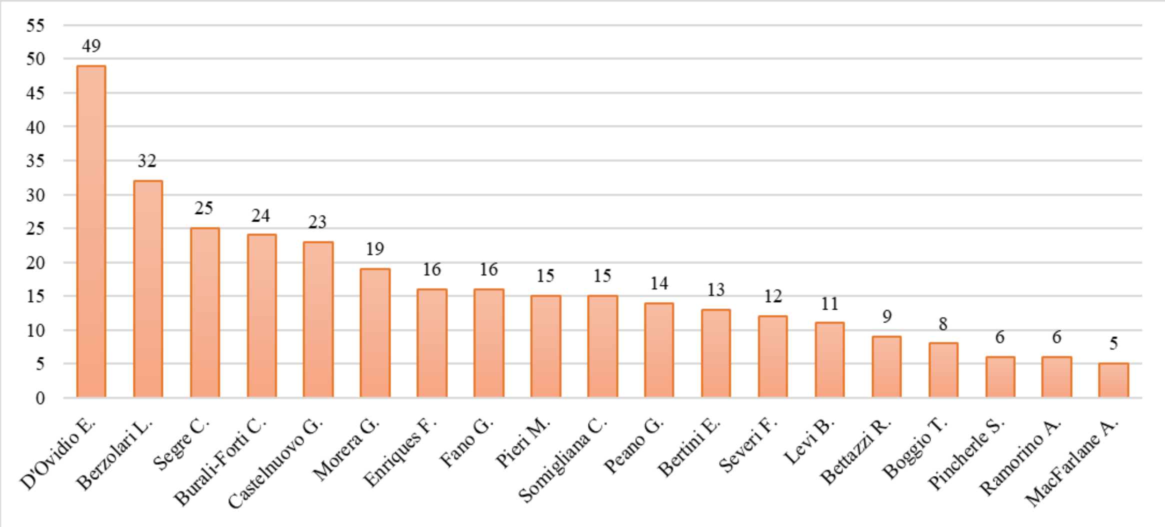


Fig. 10.7. Numero di esemplari donati da diversi matematici alla BSMT tra il 1883 e il 1905.

Altri lavori depositati in BSMT da geometri legati all'ambiente torinese sono quelli di Berzolari – secondo autore per numero di donazioni che, dopo aver ricoperto la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva dell'ateneo torinese dal 1893 al 1899, passa a Pavia sulla cattedra di Analisi algebrica e di geometria analitica – e di Giambelli, laureatosi a Torino con Segre e poi assistente di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Genova (1904-1911). A differenza di quanto accade per le altre discipline, gli scritti di geometria donati alla BSMT non provengono soltanto dall'ambiente locale: è questo il caso sia degli scritti di Bertini che arrivano da Pavia, sia dei contributi di geometria proiettivo-differenziale di Martinetti provenienti da Messina, ma anche degli opuscoli di Veronese, Ciani, Montesano e Scorza. È, questo, un elemento emblematico della rete di contatti e relazioni tra i geometri italiani che, in questi anni, iniziano a sentirsi sempre più parte integrante di una Scuola che travalica i confini delle singole università.

Pur essendo nata in stretto collegamento con la Scuola di Magistero, diretta da D'Ovidio tra il 1883 e il 1907, la BSMT sembra essere destinata più a un pubblico di docenti universitari e di ricercatori che ai futuri insegnanti, a livello sia di gestione sia di politica delle acquisizioni librarie. L'unica eccezione è rappresentata dalla pregevole collezione di modelli geometrici in cartone, gesso, legno e fil di ferro che sono acquistati dalla Germania fin dal 1882.[11] Significativa in tal senso è la presenza sugli scaffali della Biblioteca del *Katalog mathematischer und mathematische-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* di W. Dyck (1892).

[11] Sui modelli geometrici cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, pp. 441-442; L. GIACARDI 2011, *Testimonianze sulla Scuola italiana di geometria algebrica nei fondi manoscritti della Biblioteca "Giuseppe Peano" di Torino*, in S. MONTALDO, P. NOVARIA (eds.), *Gli archivi della scienza: l'Università di Torino e altri casi italiani*, Milano, Angeli, pp. 117-119. Essi andranno completamente distrutti nei bombardamenti della Seconda guerra mondiale.

10.2. C. Segre direttore: la BSMT sul modello della *Lesezimmer* di Göttingen

Quando nel 1907 D'Ovidio lascia la carica di preside della Facoltà di Scienze MFN è C. Segre ad assumere la direzione della Biblioteca. Il 'testimone' passa così ad un altro geometra cui, in questi anni, è riconosciuto il ruolo di caposcuola della geometria algebrica in Italia.[12] Segre non si risparmia neppure sul fronte della direzione della Biblioteca, adoperandosi per ottenere sempre più finanziamenti per incrementarne il patrimonio librario.

Innanzitutto, grazie a cospicui fondi consorziali e ministeriali, sono acquistate le raccolte di opere complete e *Selecta* dei grandi matematici, classici e contemporanei. Tra gli stranieri: Cauchy, Euler, Descartes, Leibniz, Hermite, Fuchs, Newton, Sylvester, Weierstrass, Grassmann, Fresnel, Halphen, Boole, Poincaré, J. MacCullagh, F. Arago, F.W. Bessel, W. Ritz, W.G. Hill, F. Neumann, J. Kepler, P.L. Čebyšev, T. Stieltjes, C. Huygens, J. Tannery, Lord Kelvin e i fratelli Bernoulli. Sul fronte italiano, Segre ordina prontamente le collezioni dei lavori di G. Fagnano, Brioschi, Beltrami e Cremona, cui si affiancano le pregevoli edizioni curate da J.L. Heiberg degli scritti di Archimede, Erone e Tolomeo. Segre, mostrando una certa apertura per la scienza 'a tutto tondo', non acquista per la BSMT soltanto le opere complete dei matematici ma anche quelle di importanti figure di scienza: A. Avogadro, A. Volta, P. Curie (1859-1906) e G. Darwin (1845-1912). Segre aveva conosciuto personalmente quest'ultimo durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Roma (1908).

Fin dai primi anni della sua direzione, si dà da fare per colmare i ritardi nelle acquisizioni librarie. Oltre a recuperare gli atti dei Congressi Internazionali di Zurigo e Parigi, tra il 1910 e il 1923 fa arrivare in Biblioteca preziosi testi antichi, quali il *General trattato* di Tartaglia (1556) e il *Liber Abaci* di Fibonacci curato da B. Boncompagni (1857).[13] Si segnala inoltre l'acquisizione della *Geometria indivisibilibus* di B. Cavalieri nell'edizione del 1653 e della *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* di Clairaut (1808). Ma è sul fronte geometrico che Segre cerca di 'correre ai ripari' più rapidamente, per rendere la Biblioteca aggiornata e ben fornita di tutti i lavori fondamentali in questo settore. Tra i primi volumi ordinati da Segre vi sono le *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare* di Klein (1896) e le *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne* di J. Richard (1899). Ancora, tra il 1912 e il 1915, tentando di sopperire alla mancanza di alcuni testi dell'Ottocento che hanno una certa importanza in ambito geometrico, acquista per la BSMT il volume di Hachette e Monge *Application de l'algèbre à la géometrie. Traité des surfaces du second degré* (1813) e i lavori in lingua inglese *Chapters on the modern geometry of the point, line and circle* (1865) e *An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry* (1884), firmati rispettivamente da R. Townsend e C. Scott.

La politica delle acquisizioni librarie riflette l'attenzione di Segre per gli sviluppi della geometria, in Italia e all'estero. In primo luogo, sono ingressati in BSMT numerosi trattati e raccolte delle lezioni dei membri della Scuola italiana: da quelle di geometria proiettiva di Aschieri (1886), B. Levi (1905) e Del Pezzo (1913) a quelle di geometria descrittiva di A. Del Re (1906) e Bertini (1907); dai testi di geometria analitica di Castelnuovo (1909) e B. Levi (1918) alle prime lezioni di geometria algebrica tenute da Severi a Padova (1908); dalle *Lezioni*

---

[12] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, p. 443-444; LUCIANO 2018, *cit.*, p. 441.

[13] Questi due volumi, pagati rispettivamente £ 628.20 e £ 114.70, sono tra i più costosi acquistati dalla BSMT in questo periodo.

sulla teoria delle forme algebriche firmate da A. Capelli (1902) ai due volumi che compongono le *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques e Chisini (1915 e 1918). Nel 1910, lo stesso Segre deposita in Biblioteca le litografie delle *Lezioni di geometria descrittiva* di Fano (1902) e fa acquistare quelle del corso di geometria proiettiva tenuto a Torino da Berzolari nel 1897. In secondo luogo, il patrimonio librario è costantemente arricchito con i testi che arrivano dalla Germania, gran parte dei quali sono ingressati a breve distanza dalla loro pubblicazione. Oltre alle opere di Klein, autore tedesco più rappresentato nella composizione della BSMT durante la direzione Segre, si registrano diversi lavori di geometria di A. Adler, H. Müller, F. Schur, R. Fricke, Clebsch, Grassmann, Meyer, Reye, Schubert, Steiner e Sturm. Dalla Francia Segre fa arrivare gli scritti di C. Guichard e R. Bricard che si vanno ad affiancare ai lavori in francese del belga Stuyvaert. La rete di contatti di Segre si estende anche all'Inghilterra: accanto alle opere di Salmon, la Biblioteca acquisisce lo scritto di Basset *A treatise on the geometry of surfaces* nello stesso anno della sua pubblicazione (1910). Dopo il Congresso Internazionale dei Matematici tenuto a Cambridge (1912), le relazioni con la locale Scuola di geometria si intensificano, come documentano i lavori di Baker e C. Jessop che arrivano in Biblioteca in questi anni. L'incontro tra Segre e Coolidge all'ICM di Heidelberg del 1904 sta alla base delle diverse pubblicazioni del geometra americano conservate in BSMT, che non si riscontrano invece nella composizione della Biblioteca di Roma in quegli stessi anni. Segre fa inoltre arrivare alcuni lavori anche dalla penisola iberica: è questo il caso dei sette volumi di *Obras sobre mathematica* di F. Gomes Teixeira, primo rettore dell'Università di Porto, e delle due opere pubblicate nel 1916 da J. Rey Pastor (*Fundamentos de la geometría proyectiva superior* e *Introducción a la matemática superior: estado actual, métodos y problemas*) che aveva da poco fondato la *Sociedad Matemática Espanola* (1910). Tra i lavori di geometria algebrica, numerosi sono gli scritti sulla teoria delle curve, uno dei principali settori di ricerca di Segre. Accanto ai due volumi dell'*Algebraische Kurven* di E. Beutel, spiccano due rassegne di carattere generale e bibliografico: la *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890-1904* curata da H. Wieleitner (1905) e il *Catálogo general de curvas: comprende sumariamente la historia, ecuación, forma, propiedades y bibliografía de todas las curvas de denominación especial*, pubblicato da J. de Vargas y Aguirre (1908) nelle «Memorias de la R. Academia de Ciencias de Madrid».

Segre, pur collocandosi nel solco della continuità con l'opera di D'Ovidio sotto diversi aspetti (impegno istituzionale, interessi geometrici, influenza tedesca, …), introduce due importanti elementi di novità nella gestione della BSMT tra il 1907 e il 1924.

Il primo è la trasformazione della Biblioteca torinese sul modello della leggendaria *Lesezimmer* dell'Università di Göttingen che aveva notevolmente colpito Segre durante il suo soggiorno in Germania e che continuava ad esercitare un forte fascino sui giovani geometri (Fano, Caporali, …) che vi si recavano per perfezionarsi. Sull'esempio di Klein, Segre estende gli orari di apertura della BSMT, facilitando l'accesso e l'utilizzo anche da parte degli studiosi e dei ricercatori che trascorrevano un periodo nel capoluogo piemontese. Durante la sua direzione, la BSMT passa così da una media di circa 4.000 accessi all'anno a un picco di 7.500. In piena adesione al modello di Göttingen, Segre concepisce la Biblioteca come spazio per la ricerca, dove può lavorare con i suoi allievi e collaboratori, avendo a disposizione le fonti e i testi necessari. La BSMT aggiunge così alle sue funzioni tradizionali di conservazione, deposito e prestito dei volumi quella di luogo di ritrovo e di studio collettivo, in cui le attività di lettura e consultazione prevalgono rispetto ai prestiti.[14] Un tale utilizzo della Biblioteca presuppone tuttavia un buon numero di testi di carattere avanzato e sui più recenti temi di ricerca.

Per dotare la BSMT di un tale patrimonio Segre si impegna in prima persona, agendo su più fronti. Innanzitutto, assembla e mette a disposizione dei lettori una raccolta di appunti litografati delle lezioni di Klein, Hurwitz, Clebsch, H. Weber e altri ancora, gran parte dei quali raccolti dai suoi allievi che trascorrono qualche semestre in Germania.[15] Contribuisce inoltre ad arricchire la miscellanea di opuscoli della Biblioteca, donando gli estratti delle sue pubblicazioni ed invitando i colleghi a fare altrettanto (Tab. 10.3). Non è dunque un caso che tra chi deposita il maggior numero di opuscoli in Biblioteca tra il 1907 e il 1924 vi sono numerosi geometri della Scuola italiana: D'Ovidio, Berzolari e Fubini *in primis*.

Donatore	**N. esemplari**
Corrado Segre	49
Giuseppe Peano	46
Guido Ghersina	38
Giuseppe Battaglini	27
Giovanni Boccardi	26
Enrico D'Ovidio	25
Ugo Cassina	13
Eduard Čech	13
Luigi Berzolari	9
Guido Fubini	8
Casa editrice Zanichelli	8
Francesco Caldarera	7
Camillo Guidi	7

Tab. 10.3. Donatori che hanno depositato in Biblioteca almeno 7 lavori durante la direzione di Segre.

Diverse sono anche le donazioni da parte dell'altra Scuola dell'ateneo torinese con Peano che dona ben 46 lavori, seguito dal giovane Cassina (13 pezzi), prima assistente alla cattedra di Algebra e geometria analitica (1920-23) e poi assistente di Peano su quella di Analisi algebrica e infinitesimale (1924). Vi sono inoltre 27 opuscoli di Battaglini, spediti a Torino dalla vedova nella primavera del 1914.[16] Un'ulteriore via percorsa da Segre per incrementare il patrimonio della Biblioteca consiste nel farsi inviare dai colleghi stranieri le tesi discusse nei loro atenei. La maggioranza verte su temi di geometria, con una ventina di esse che proviene da centri universitari tedeschi (Erlangen, Göttingen, Greifswald, Halle, Jena, Kiel, Königsberg, München, Münster, Tübingen, …): è questo il caso delle dissertazioni di Mahlo, R. Baldus, H. Brandes, H. Egerer, M. Feldblum, P. Finke, A. Finzel, H. Fuss, H. Keisker, V. Kommerell, W. Hauser, K. Hertel, J. Meyer, W. Merté, K. Nitz, F. Nugel, C. Rodenberg, H. Schübel, G. Spitz,

[14] Cfr. LUCIANO 2018, *cit*., pp. 441-442.

[15] Cfr. *ivi*, p. 443. Alcune di queste litografie sono portate nel capoluogo piemontese da Fano. Cfr. G. Fano a F. Klein, Roma 8.6.1895, edita in LUCIANO – ROERO 2012, *cit*., pp. 180-183.

[16] A questi si aggiungeranno altri 15 lavori di Battaglini donati da D'Ovidio due anni più tardi.

E.A. Weiß e W. Widder. Ai lavori di geometria che confluiscono nella miscellanea della BSMT bisogna aggiungere le due tesi discusse a Zurigo da F. Gonseth (*Étude synthétique et application de la polarité*) e a Madrid da O. Fernández Baños (*Estudio sintético de los espacios complejos de n dimensiones*). Quattro infine sono le tesi provenienti dalla Francia (Finzel, A. Besserve, M. Gevrey e M. de Montcheuil).

Segre è ben consapevole dell'importanza del costante aggiornamento del patrimonio librario: per questo motivo sfrutta i propri contatti con Klein, Walther Lietzmann e con la casa editrice Teubner (Tab. 10.4) per ordinare varie collane edite in Germania, tra cui 29 volumi degli *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, 14 esemplari della raccolta *Mathematisch-physikalische Bibliothek* e quattro del *Die Kultur der Gegenwart: ihre Entwicklung und ihre Ziele*. A questi bisogna aggiungere gli oltre 40 volumi della collana *Klassiker der exakten Wissenschaften*, curata da W. Ostwald, che Segre acquista tramite la libreria Rosenberg.

Casa editrice	**Sede**	**N. esemplari**
Teubner	Leipzig	396
Gauthier-Villars	Parigi	257
CUP	Cambridge	100
Hermann	Parigi	84
Hoepli	Milano	81
Zanichelli	Bologna	62
Engelmann	Leipzig	50
Macmillan	New York	49
Springer	Berlino	49
Paravia	Torino	39
Alcan	Parigi	30
Vieweg	Braunschweig	30
Göschen	Leipzig	26
Giusti	Livorno	23
Barth	Leipzig	22
Bocca	Torino	21
Spoerri	Pisa	21

Tab. 10.4. Case editrici maggiormente rappresentate in BSMT sotto la direzione di Segre.

Emblematici della forte attenzione per quanto accade nel mondo dell'editoria tedesca sono gli estratti dei vari capitoli dell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* che Segre si fa inviare singolarmente, non appena sono pronti, e che farà successivamente rilegare in volumi a Torino.

Il secondo cambiamento apportato dalla direzione di Segre consiste nel rafforzamento del legame tra la Biblioteca e la Scuola di Magistero, da lui diretta tra il 1916 e il 1921.[17] Segre è fermamente convinto che così come è necessario disporre di un patrimonio librario consistente

[17] Cfr. LUCIANO 2018, *cit.*, p. 441.

e aggiornato per favorire gli studi matematici e avviare i giovani alla ricerca, allo stesso modo bisogna dotare la Biblioteca di quei volumi utili ai futuri docenti di scuola secondaria. Non si tratta solo dei manuali scolastici e dei programmi per ogni ordine e grado scolare[18], ma anche dei testi necessari alla formazione storico-metodologica dei docenti e degli scritti relativi all'insegnamento della matematica nei diversi paesi europei e al dibattito internazionale di quegli anni. Numerosissimi sono i manuali stampati in tutta la penisola che sono ingressati in BSMT a partire dal 1907 e che sono destinati ad ogni tipo di scuola. Per le scuole medie, si registra una preponderanza dei testi di aritmetica pratica e di algebra elementare (Bortolotti, L. Lo Monaco-Aprile, S. Catania, F. Palatini) rispetto a quelli di geometria (Palatini). La geometria intuitiva è invece oggetto di diversi trattati destinati al ginnasio inferiore e alle scuole complementari, come quelli di Amaldi e Enriques, B. Bettini e C. Ciamberlini, Frattini, Lo Monaco-Aprile, Gazzaniga e Veronese. Ancora, molti manuali sono rivolti agli studenti del liceo classico e moderno: tra questi vi sono quelli di algebra di Bortolotti, Catania, Faifofer, M. Chini, P. Predella, con quest'ultimo che firma anche un trattato di geometria e uno di trigonometria piana destinati al medesimo indirizzo di studi. Numerosi poi sono i testi per gli istituti tecnici: sul fronte dell'algebra e dell'aritmetica ricordiamo quelli di A. Amanzio, Alfredo Bassi, Catania, Bettini e Ciamberlini; sul versante geometrico, invece, troviamo i *Complementi di geometria* di G. Ascoli (1912) e la quarantesima edizione del *Trattato di geometria intuitiva* di Faifofer (1909). A questi si aggiungono le *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria* di Frattini (1911), destinate specificatamente alla sezione fisico-matematica degli istituti tecnici, e gli *Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche* firmati da De Franchis, acquistati nel 1909 in tre diverse edizioni (1900^1, 1901^2, 1910^3). Giungono in BSMT anche alcuni trattati di aritmetica (A. Conti, Bettini e Ciamberlini), algebra (Burali-Forti) e geometria intuitiva (Faifofer) per le scuole normali. Bisogna infine ricordare i tre volumi delle *Lezioni ed esercizi di algebra complementare* di G. Bellacchi, donati alla Biblioteca da Peano, e i *Complementi d'algebra per l'ammissione alla R. Accademia navale* (1907) firmati da G. Lazzeri e G. Pesci. L'attenzione di Segre per la manualistica scolastica italiana è dunque capillare, così come l'interesse per le questioni didattico-metodologiche. A tal proposito, fa arrivare in BSMT gli *Errori ed inesattezze più comuni in aritmetica e geometria…* di Ersilia Bisson (1908), *La matematica nel suo insegnamento primario e secondario* di C. Leoni (1915) e la raccolta di *Saggi di Didattica matematica* curata da Ciamberlini (1920). Ma Segre non si limita alle opere edita in Italia. Con i fondi del Consorzio Universitario acquista anche le due traduzioni – in tedesco (1908) e in italiano (1911) – del trattato *The first book of geometry* dei coniugi Young, con i quali è in regolare contatto fin dal 1897.[19] Dal mondo dell'editoria francese fa arrivare in Biblioteca cinque manuali di Borel degli anni 1905-07, il volume *Les systèmes logiques et la logistique. Étude sur l'enseignement et les enseignements des mathématiques modernes* di L. Peslouan (1909) e la *Geometrie du triangle à l'usage des classes de mathématique spéciales* di C.A. Laisant (1896), che Segre acquista da Gauthier-Villars nel

[18] Sotto la direzione di Segre della BSMT sono acquistati sette opuscoli contenenti i programmi scolastici per le scuole medie, il ginnasio, il liceo, il ginnasio-liceo moderno, le scuole normali, le scuole e gli istituti tecnici.

[19] La traduzione tedesca, pubblicata da Teubner, è curata da S. Bernstein. L'edizione italiana, edita da Paravia, è affidata a Luisa Viriglio, allieva di Segre e di Peano. Sui contatti con Chisholm, cfr. G. Fano a F. Klein, Roma 9.4.1897, edita in LUCIANO – ROERO 2012, *cit*., pp. 190-195: "Vorigen Sommer reiste ich nach Norvegen, Nordkap und Vaolsø: ich war auch auf einige Tage in London, u. von da aus besuchte ich Mrs. Young,745 mit der ich in öfterer Correspondenz bin".

1910, grazie al finanziamento del Ministero. L'influenza kleiniana sul pensiero didattico di Segre è nota[20] e si rivela corroborata dalla politica delle acquisizioni librarie per la BSMT in questo settore: a distanza di pochi mesi dalla loro pubblicazione sono ingressate le *Vorträge über den mathematischen unterricht an den höheren schulen* di Klein (1907), così come i primi due volumi della sua *Elementarmathematik vom Höheren standpunkte aus* e la *Didaktik des mathematischen Unterrichts* di A. Höfler (1910).

Segre è decisamente sensibile al dibattito sulle questioni didattiche e sugli approcci metodologici adottati nelle diverse nazioni. Frutto di tale attenzione sono le acquisizioni degli scritti *L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne* di F. Marotte (1905), *Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn: im Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelsschulprofessoren* di Beke (1911), *L'Enseignement mathématique en Suisse* a cura di H. Fehr (1913) e *Problems in the Teaching of Secondary Mathematics* di Smith (1913). Quest'ultimo è anche autore del primo contributo statunitense ordinato da Segre, *The teaching of geometry* (1911). Dagli USA R.C. Archibald invia poi in dono alla Biblioteca il volume *The training of teachers of mathematics* (1918). Diversi sono anche i titoli che Segre fa giungere dall'Inghilterra, quali *Elementary practical mathematics* di J. Perry (1913) e *A study of mathematical education* di B. Branford (1921). Dalla Svizzera arriva invece lo scritto di Andrade intitolato *Nouvel Enseignement d'initiation* (1908).

Vi è poi uno stretto legame tra le lezioni alla Scuola di Magistero, i corsi di Geometria superiore che Segre tiene in Facoltà e le acquisizioni bibliotecarie di volumi e opuscoli sul tema delle geometrie non euclidee.[21] Oltre alla famosa *Geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo* di Bonola (1906), cui Segre rimanda spesso durante le sue lezioni, egli si impegna per mettere a disposizione degli studenti anche i testi originali più antichi quali la *Theorie der Parallellinien* di J.H. Lambert (1766) e i *Quaesita geometrica* di G. Saccheri (1693), entrambi acquistati nel 1908. Nello stesso anno ordina la *Nichteuklidische Geometrie* di Liebmann (1905), gli *Études de géométrie analytique non euclidienne* di Barbarin (1901) e la *Pangeometrie* di N.I. Lobačevskij, curata da Liebmann (1902). A distanza di qualche anno sono ingressate in Biblioteca anche le opere pubblicate in Inghilterra da Coolidge (*The elements of non-Euclidean geometry*, 1909), W.B. Frankland (*Theories of parallelism: an historical critique*, 1910) e D. Sommerville (*Bibliography of Non-Euclidean geometry*…, 1911). Una seconda *tranche* di lavori sulle geometrie non euclidee è acquisita all'inizio degli anni Venti. Tra questi, l'edizione dell'*Euclides Vindicatus* di Saccheri curata da Halsted (1920), *Introduction elementaire à la géométrie Lobatschewskienne* di A. Turc (1914) e *Introduction à la geometrie non-euclidienne* di A.H.D. Macleod (1922).

Durante i primi dieci anni della direzione di Segre della Biblioteca si registra una netta prevalenza di testi di taglio geometrico e didattico. Non mancano tuttavia le acquisizioni di volumi di analisi (comprese quattro edizioni delle *Lezioni di Analisi* di Fubini), meccanica razionale e fisica, tra cui ben 14 volumi del *Traité de physique* di O.D. Hvol'son. Rare sono invece le opere di teoria dei numeri che arrivano in BSMT in questo periodo. Si tratta perlopiù

---

[20] Cfr. GIACARDI 2010 e 2013, *cit*.

[21] Il corso dell'a.a. 1902-03 (Quad. 16) è interamente dedicato alle geometrie non euclidee. Segre darà spazio a questo tema anche all'interno dei corsi degli a.a. 1908-09 (Quad. 22, *Rassegna e metodi della Geometria moderna*), 1916-17 (Quad. 30, *Vedute superiori sulla Geometria elementare*), 1923-24 (Quad. 37, *Geometria differenziale*).

di lavori tedeschi: oltre ai contributi di Landau[22] e E. Netto, si segnalano tre volumi di P. Bachmann, lo scritto di Dirichlet del 1897, le *Diophantische approximationen* (1907) e la *Geometrie der Zahlen* (1910) di Minkowski e le *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1907) di J. Sommer. Dagli Stati Uniti provengono invece *The elements of the theory of algebraic numbers* di L.W. Reid (1910) e *The theory of numbers* di R.D. Carmichael (1914). I due volumi della *Théorie des nombres* di Eugène Cahen (1913 e 1924) rappresentano l'unico contributo francese, accanto alla traduzione di A. Levy dell'opera di Hilbert (*Théorie des corps de nombres algébriques*, 1911).

L'andamento delle acquisizioni della BSMT registra una naturale inflessione durante la Prima guerra mondiale (Fig. 10.8). In questi anni, tuttavia, Segre continua ad adoperarsi per il costante aggiornamento della collezione libraria inviando varie lettere di sollecito alle librerie e alcune istanze al Ministero per sbloccare il divieto di importazione dei libri tedeschi, "indispensabili per la Biblioteca matematica".[23] Nonostante l'iniziativa di Segre, gran parte dei volumi pubblicati in Germania durante la guerra arrivano a Torino solo dopo la fine del conflitto mondiale: è questo il caso delle *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre* di A. Pringsheim e del *Kreis und Kugel* di Blaschke, entrambi pubblicati nel 1916 e ingressati solo quattro anni più tardi, e di vari lavori di Fueter, Mehmke, Schur, M. Planck e altri ancora.

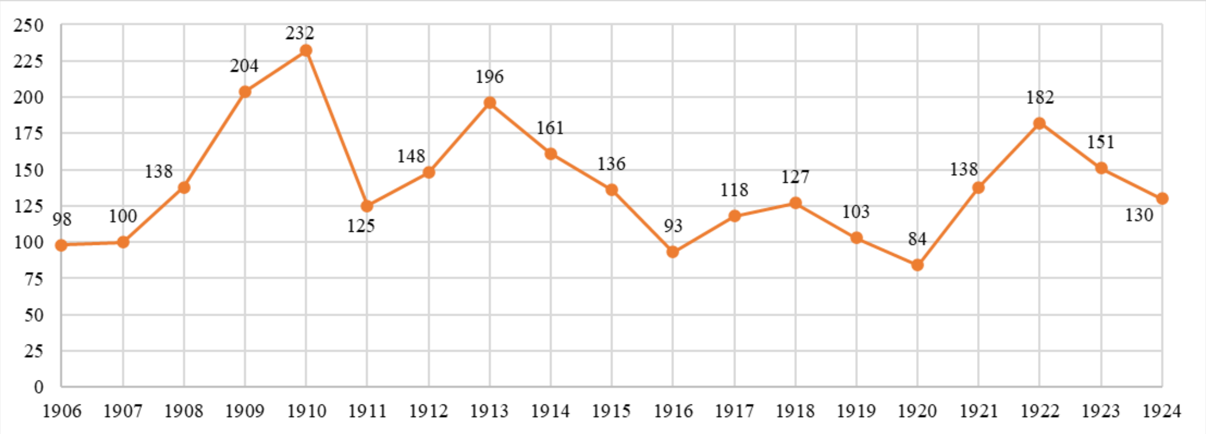


Fig. 10.8. Andamento delle acquisizioni durante la direzione di Segre della BSMT.

Per ovviare, almeno in parte, alle difficoltà nell'arrivo di lavori dall'estero nel periodo 1914-1918, Segre dona in prima persona diversi volumi – tra cui due esemplari della collana *Bryn Mawr College monographs* – e, nell'aprile 1918, utilizza i fondi ministeriali per acquistare la collezione libraria dell'ingegnere Della Casa. Si tratta di una trentina di volumi pubblicati tra il 1629 e il 1912, il 90% dei quali stampato in Francia. Accanto ai diversi testi di architettura e scienze delle costruzioni, troviamo due volumi di geometria di inizio Settecento: i *Nouveaux elemens de géométrie* di A. Arnauld (1711) e gli *Éléments de géométrie de Monseigneur le duc de Bourgogne* (1713). L'altra via percorsa da Segre per incrementare il patrimonio della BSMT dopo il conflitto mondiale è quella delle donazioni private. Nell'estate del 1922 sei volumi di autori francesi (Goursat, Painlevé, G. Bigourdan, P. Lévy, F. Michaud, T. Moreux) sono

[22] Di particolare rilievo è la sua *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (1918), ingressata in BSMT nel dicembre 1919.

[23] ASUT, *Corrispondenza universitaria*: C. Segre al Rettore dell'Università di Torino, Torino 25.2.1916. Cfr. anche BSMT, FTe, Carte Terracini: il Rettore dell'Università di Torino a C. Segre, Torino 10.7.1917. Su questo aspetto, cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, p. 444; LUCIANO 2018, *cit.*, p. 444.

devoluti alla Biblioteca dall'ingegner Guagno. Anche Camillo Guidi, docente di scienze delle costruzioni presso la R. Scuola d'ingegneria di Torino, deposita in Biblioteca sette suoi lavori nel primo dopoguerra. A questi si sommano una quarantina di opere in lingua italiana, tedesca, francese e inglese donate da Guido Ghersina in due *tranches* (estate 1922 e primavera 1924), tra cui *The geometry of the complex domain* di Coolidge (1924). Originario di Biella e assiduo frequentatore della BSMT, Ghersina effettua nel 1923 una donazione di £ 15.000 per istituire la fondazione "Premio Corrado Segre", destinata a conferire premio triennale ad un laureato in matematica pura.[24]

A partire dai primi anni Venti le acquisizioni librarie della BSMT registrano una serie di fenomeni interessanti. Per prima cosa, esse riflettono una grande prontezza dell'ambiente torinese a recepire i volumi delle lezioni e i lavori di ricerca dell'ateneo romano. È così ingressato un buon numero di testi dei corsi svolti nella capitale da Castelnuovo, Enriques, Levi-Civita, Severi, Scorza e Volterra, sovente nello stesso anno della loro pubblicazione. Si tratta di un fenomeno che non ha un corrispettivo a Roma: mentre Segre acquista o si fa inviare dai colleghi romani praticamente tutti i loro lavori, negli stessi anni giunge in BIMR solo una piccola parte dei testi dei geometri torinesi. Un secondo elemento inedito è il grande afflusso di pubblicazioni sulla teoria della relatività, in concomitanza con il viaggio di A. Einstein in Italia. L'interesse per queste tematiche all'interno dell'ateneo torinese era probabilmente stato sollevato anche dal corso di Analisi superiore tenuto da Fubini nell'a.a. 1920-21, il cui testo litografato, dal titolo *Lezioni sulla teoria della relatività*, è depositato in Biblioteca alla fine del mese di giugno. Tra il 1921 e il 1923 arrivano dunque in BSMT numerosissimi lavori sull'argomento, sia di ricerca sia di taglio divulgativo-filosofico, italiani (Castelnuovo, Cassina, Marcolongo, A. Occhialini, …) e stranieri (J. Becquerel, T. de Donder, M. Dubroca, L.G. du Pasquier, P. Dupont, A.S. Eddington, L. Fabre, E.M. Lémeray, H. Lorentz, H. Schmidt, I. Schneider, C. Nordmann, H. Weyl, Picard, …). Oltre a quello di Fubini, due sono i testi di corsi dedicati alla teoria della relatività. Il primo, intitolato *Questions de mecanica classica y relativista*, è depositato da Segre in Biblioteca nell'ottobre 1922 e racchiude le lezioni svolte all'*Institut d'estudis catalans* di Barcellona da Levi-Civita nel gennaio 1921. Il secondo, invece, dal titolo *The theory of general relativity and gravitation*, è il ciclo di conferenze tenute da L. Silberstein all'Università di Toronto. A sette mesi di distanza dalla morte di Segre, arriverà in Biblioteca il testo delle quattro conferenze sulla teoria della relatività tenute da Einstein a Princeton nel 1921. Un terzo aspetto di novità nella composizione della BSMT in questo ultimo periodo riguarda il nucleo dei lavori di geometria proiettivo-differenziale. Se prima della Grande Guerra si registra l'ingresso di pochissimi scritti afferenti a tale settore – con poche eccezioni rappresentate, ad esempio, dalle *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces* di Forsyth (1912) – dagli anni Venti si assiste ad un netto incremento delle pubblicazioni di geometria differenziale, che non può essere attribuito esclusivamente allo spostamento degli interessi di ricerca di Segre verso questa area della geometria, risalente a una decina d'anni prima. Bisogna piuttosto tener presente che nel biennio 1921-22 Eduard Čech raggiunge Torino per collaborare con Fubini. Dal loro sodalizio scientifico di questi anni

[24] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit.*, pp. 444-446. Cfr., *inter alia*, «Annuario UTo» 1934-35, p. 414: il premio, del valore di £ 2.500, "è destinato a favore d'un laureato in matematica pura, il quale abbia dimostrato colla dissertazione di laurea, ed eventualmente anche con pubblicazioni successive, notevole attitudine alla ricerca matematica".

scaturisce la fondazione della moderna geometria proiettivo-differenziale. Durante il soggiorno torinese, Čech deposita in Biblioteca diverse sue pubblicazioni che continuerà a donare – tramite Fubini o per invio diretto alla BSMT – anche una volta rientrato a Brno. Accanto ai contributi di Čech, entrano in Biblioteca anche i volumi di Blaschke, Struik, e Schouten.

Negli ultimi anni della direzione di Segre sono ingressati in BSMT i primi tre volumi di topologia: l'*Analysis situs* di Veblen (1922), le *Vorlesungen über Topologie* di Kerékjártó (1923) e *L'analysis situs et la géométrie algébrique* di Lefschetz (1924). Inoltre, nel 1923 la Biblioteca torinese acquista tramite la libreria Bocca tre manuali di computisteria commerciale (V. Gitti, S. Spinedi, G.B. Zanutta), settore in cui la BIMR è decisamente carente.[25]

Un ultimo elemento interessante per quanto riguarda la composizione della BSMT durante la direzione Segre è rappresentato dall'acquisizione di oltre cinquanta lavori di astronomia, strettamente legati alla presenza a Torino di Giovanni Boccardi. Questi arriva nel capoluogo piemontese nel 1903, come vincitore di concorso sulla cattedra di Astronomia dell'Università di Torino, e assume contemporaneamente la direzione dell'Osservatorio astronomico – la cui sede all'epoca era una delle quattro torri di Palazzo Madama – lasciata vacante da F. Porro. Con Boccardi – che nel 1913 si occuperà anche del trasferimento nel nuovo sito di Pino Torinese – l'Osservatorio acquista grande slancio e vitalità, anche dal punto di vista delle pubblicazioni scientifiche. Non a caso, nel periodo 1907-24 Boccardi è l'autore più rappresentato all'interno della composizione della BSMT, cui dona anche una trentina di lavori. Ai contributi di Boccardi si vanno presto ad affiancare quelli di Zanotti-Bianco, libero docente di Geodesia e cultore di astronomia, autore del pregevole saggio divulgativo *Storia popolare dell'astronomia*, acquistato dalla libreria Lattes nel 1913. La Biblioteca si arricchisce così non soltanto degli scritti del gruppo che gravita attorno all'Osservatorio torinese ma anche di una cinquantina di manuali di astronomia, tra cui i testi di diversi corsi tenuti in Francia da Bailly, B. Baillaud, H. Bouasse, É. Caspari, J. Delambre, H. Faye e altri ancora.

Alla morte di Segre, il patrimonio della BSMT conta 39.377 volumi e opuscoli; la Biblioteca della Facoltà di Scienze MFN torinese è dotata di una ricca miscellanea di estratti e di una sala di lettura funzionale e altamente frequentata.

10.3. 1925-1938: Fano tra internazionalismo, espansione della miscellanea e fondazione del Seminario

Alla fine del mese di maggio 1924 la direzione della Biblioteca passa temporaneamente a Somigliana, preside della Facoltà di Scienze MFN, cui presto subentra Boggio, allievo di Peano che avrà questo ruolo per circa un anno. Nel febbraio del 1925, giungono in BSMT tredici tesi discusse nel decennio 1914-24, inviate in dono dall'Università di Zurigo: molte di queste sviluppano temi di carattere geometrico (C. Cailler, M. Gut, E. Blaesi, G. Hauser, A. Lips, S. Straszewicz, …). Dopo questo breve intermezzo, il 7 novembre 1925 è Gino Fano ad assumere la direzione della BSMT, incarico che manterrà fino all'autunno del 1938 quando, a causa delle leggi razziali, sarà rimosso da ogni incarico.

[25] L'unico manuale sull'argomento posseduto dalla BIRM è la quinta edizione degli *Elementi di computisteria* di A. Comanducci (1905, Livorno, Giusti), di carattere elementare. Solo nel 1960, grazie al lascito di Ugo Amaldi, sono ingressati gli altri due volumi di computisteria ancora oggi posseduti dalla BIRM, entrambi curati da S. Pincherle.

La direzione di Fano è segnata da una marcata apertura internazionale[26] che si manifesta nell'arrivo di volumi e opuscoli da ben 25 nazioni straniere (Fig. 10.10), compresi paesi emergenti in ambito matematico quali Giappone (N. Tunazima), India (S.M. Sulaiman, M.N. Saha, G. Prasad) e Russia (A. Ljapunov). La maggior parte degli opuscoli provenienti dalla Russia sono depositati in Biblioteca da Fano nel 1927, di ritorno dal viaggio a Kazan. In questo periodo, raggiungono per la prima volta gli scaffali della BSMT volumi stampati in Australia (T.B. Robertson), Argentina (F. Ameghino), Cile (R. Poenisch) e Canada. A questi si aggiunge un buon numero di lavori provenienti dai paesi Balcani (Fig. 10), dalla Romania in particolare: negli anni Venti sono qui pubblicati la *Géométrie différentielle projective des réseaux* di G. Tzitzéica (1924) e i due opuscoli di carattere divulgativo *Das Fermatsche Theorem* di I. Muika (1927) e *La somme des angles d'un triangle rectiligne* di T. Crivetz (1928).

In meno di quindici anni di direzione, Fano riesce a far giungere in Biblioteca i lavori firmati da più di 1.600 matematici, superando di oltre 200 unità il numero di autori dei diciott'anni della direzione Segre. Proseguendo l'azione di ampliamento del patrimonio librario promossa da quest'ultimo, ogni anno sono ingressati in BSMT tra i 100 e i 150 nuovi esemplari (Fig. 10.9).[27] Di fronte alla penuria di fondi ministeriali – utilizzati per acquistare solo una quindicina di volumi – Fano può contare sugli importanti finanziamenti del Consorzio (444 esemplari) e su cospicue donazioni che, da sole, incrementeranno il patrimonio di 9.303 opuscoli e 115 volumi. Con l'obiettivo di gestire e riordinare efficacemente il crescente patrimonio librario, negli anni Trenta egli fa assumere per la Biblioteca alcune assistenti incaricate, come Maria Schepisi e Maria Gramegna.[28]

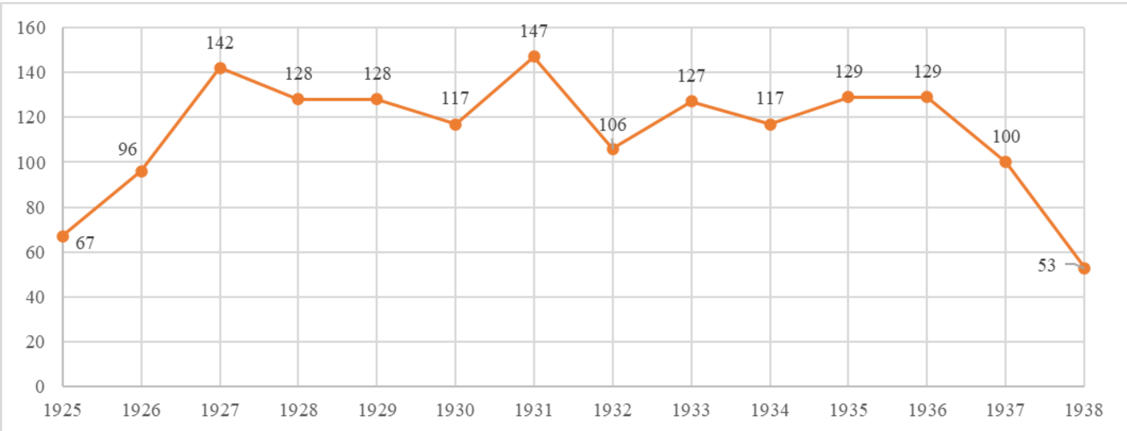


Fig. 10.9. Andamento delle acquisizioni durante la direzione di Fano della BSMT.

[26] Cfr. Luciano 2018, *cit.*, p. 445; Luciano – Scalambro 2021, *cit.*, p. 51.

[27] Sono contati una sola volta gli opuscoli e i volumi ingressati insieme, allo stesso numero d'inventario.

[28] Cfr. «Annuario UTo» 1930-31, p. 99; ASUT, *Corrispondenza universitaria*: G. Fano a S. Pivano, Torino 8.10.1937.

Fig. 10.10. Cartografia mondiale del patrimonio librario della BSMT tra il 1906 e il 1945.

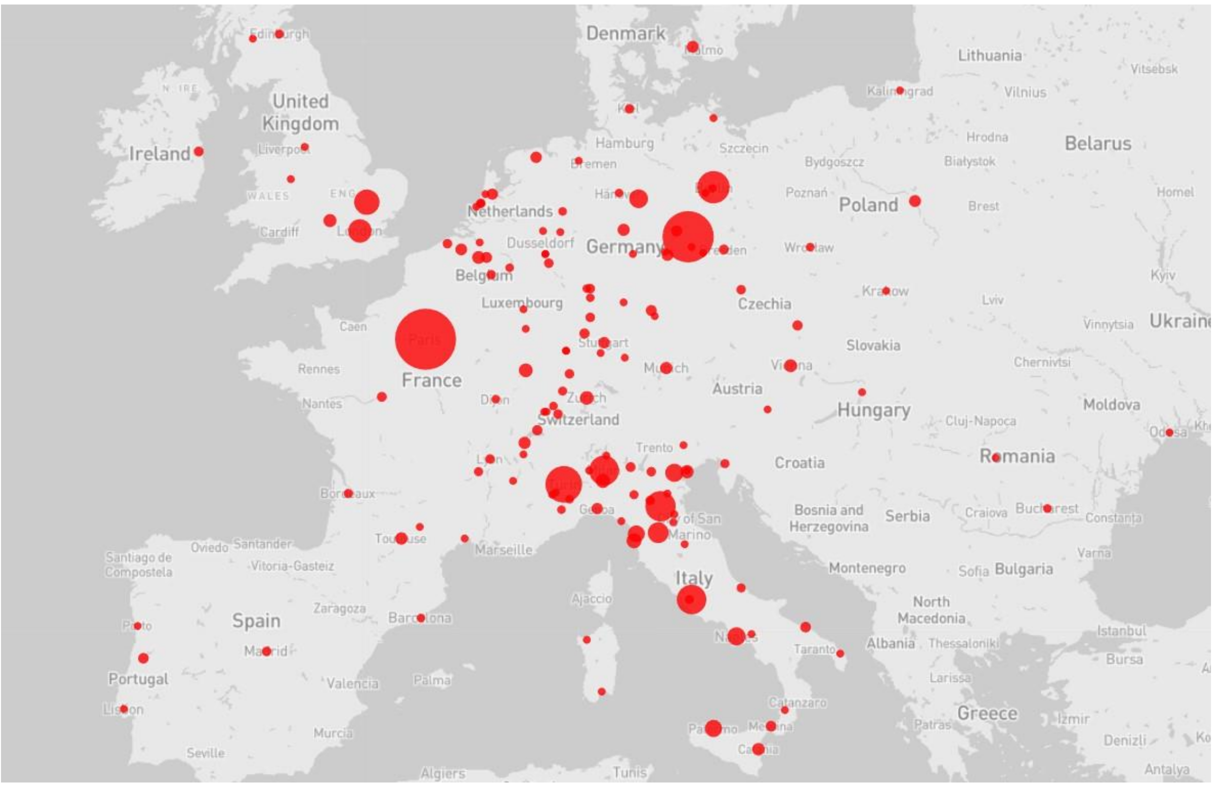


Fig. 10.11. Cartografia europea del patrimonio librario della BSMT tra il 1906 e il 1945.

Quasi il 60% degli opuscoli è frutto del lascito di C. Segre: a partire dal novembre 1925 sono ingressati 5.981 estratti della sua collezione personale,[29] insieme a sette volumi. Quattro di questi sono testi litografati di corsi universitari: quelli di geometria descrittiva e proiettiva tenuti a Torino da Berzolari (a.a. 1894-95) e da Fano (a.a. 1901-02, in due volumi) e quello di calcolo

[29] L'intera collezione di opuscoli di Segre è attualmente dispersa.

infinitesimale di E. Pascal, svolto a Pavia (a.a. 1891-92). Completano il lascito il *Corso di disegno geometrico per le scuole secondarie* di A. Magrini (1902) e 60 memorie di Bianchi, rilegate in due volumi. Il secondo contributo più importante è quello di Peano. Nella primavera del 1928, in occasione dei festeggiamenti per il suo 70° compleanno, egli dona alla Biblioteca 2.659 opuscoli e nove volumi, in gran parte manuali scolastici (Lazzeri, Ortu-Carboni, S. Piazza, L. Ponzinibio) ma anche testi di carattere fondazionale (la *Philosophie der Arithmetik* di E. Husserl e i *Principles of the algebra of logic* di MacFarlane) e l'opera storico-didattica di R. Guimaraes *Les mathématiques en Portugal* (1909). A questi si sommano 173 opuscoli depositati in BSMT nel 1931, insieme alle *Lezioni di meccanica ondulatoria* di Persico (1930) e al supplemento speciale di «Schola et Vita» dedicato a Peano che raccoglie gli scritti dei suoi collaboratori più stretti e di un comitato internazionale di linguisti e matematici. La terza donazione numericamente più consistente è quella di Somigliana (92 opuscoli e un volume, gli *Elementi di trigonometria* pubblicati nel 1929 da Burali-Forti e Marcolongo). Accanto alle 85 sue pubblicazioni e a sei scritti commemorativi, Somigliana deposita in Biblioteca due lavori stranieri: il contributo di Mandelbrojt apparso sul periodico americano «Rice Institute Pamphlet» nel 1927 e l'articolo del ceco O. Borůvka *Sur les racines imaginaires de l'équation* $\Gamma(z) = a$ (1923). A questi bisogna sommare le litografie delle sue *Lezioni di fisica matematica* del 1926-27, dono dello "studente Oberto".[30] Ancora, nel biennio 1930-31 D'Ovidio destina altri 54 opuscoli alla miscellanea che, dagli anni della sua direzione, ha visto un'enorme espansione. Non manca, naturalmente, l'apporto di Fano che, oltre a promuovere l'invio di lavori dall'Italia e dall'estero, dona alla Biblioteca una quarantina di opuscoli – tra cui la *Teoria de la representació conforme* di Rey Pastor (1915) – e 36 volumi. Accanto a numerosi testi di lezioni, tenute sia da Fano stesso sia dai colleghi (D'Ovidio, Castelnuovo, Enriques, Fubini, Ciani, Comessatti), egli deposita in BSMT opere di tipo diverso, dal raro *Dictionaire mathématique* di Ozanam (1691) ai *Selecta* di Picard (1928) e Hadamard (1935). A queste affianca i lavori in tedesco di Blaschke, W.H. Lexis e H. Scheffler, diversi volumi di fisica pubblicati tra il 1884 e il 1916 (R. Ferrini, A. Naccari, A. Roiti, A. Rossi, F. Sacco) e le *Lezioni di chimica generale* di M. Fileti (1889).

A Torino, sotto la direzione di Fano, si consolida dunque la tradizione di depositare in Biblioteca i propri lavori. È questo un tratto comune ai geometri che sono in servizio o che trascorrono un periodo nel capoluogo piemontese (B. Segre, Buzano, Bassi, …), ma non solo. Diversi sono gli analisti (Tricomi, Ascoli, Colombo, Andreoli, …) e i matematici applicati (Agostinelli, C.E. Bonferroni, …) che inviano regolarmente alla BSMT le proprie pubblicazioni (Tab. 10.5). Nutrito è anche il gruppo degli astronomi, come testimoniano le numerose note di Boccardi, G. Bemporad, M. Ferrero, A. Fresa, R. Invrea, L. Volta presenti all'interno della miscellanea, buona parte delle quali pubblicate tra le «Memorie della Società Astronomica Italiana». Si segnalano infine i cinque opuscoli di idrografia e oceanografia fisica donati nel biennio 1926-27 da F. Vercelli che era stato assistente di Volterra a Torino.

Seppur in numero nettamente inferiore rispetto ai lavori italiani, alcuni estratti della miscellanea provengono dall'estero: è questo il caso degli opuscoli di Franciszek Leja – fondatore della scuola di funzioni analitiche di Cracovia – inviati dalla Polonia nel gennaio

[30] Il volume è ingressato in BSMT in data 16.1.1928. Lo "studente Oberto", così segnato sul Registro di ingresso, potrebbe essere l'autore delle litografie o, semplicemente, uno studente del corso dell'a.a. 1926-27 che, una volta sostenuto l'esame, dona le dispense delle lezioni alla Biblioteca.

1931 o dell'articolo di Jiří Klapka sulle congruenze W, proveniente da Brno. Un fenomeno interessante che emerge dalla composizione della miscellanea torinese in questo periodo è l'incremento delle pubblicazioni firmate da una donna: *in primis* Maria Cibrario che, laureata proprio a Torino sotto la guida di Peano nel 1927, dona alla Biblioteca una trentina di lavori. Con 10 estratti segue Silvia Martis che, conseguita la laurea a Roma nel 1921, è assistente e poi docente di Analisi a Cagliari. Diverse infine sono le donazioni delle allieve che si sono formate all'interno dell'ateneo torinese quali Fausta Audisio, Giacinta Andruetto, Piera Calleri[31] e Giuseppina Casara. Sul versante delle autrici straniere, spiccano invece i contributi di Emmy Nöther, Hilda Geiringer e Hilda Hudson.

Donatore	**n. opuscoli**	**n. volumi**
Corrado Segre	5.981	7
Giuseppe Peano	2.832	11
Carlo Somigliana	93	1
Enrico D'Ovidio	54	
Gino Fano	41	36
Beniamino Segre	28	1
Maria Cibrario	28	
Guido Ascoli	18	
Bonaparte Colombo	16	1
Pietro Buzano	15	
Francesco Tricomi	14	2
Giulio Bemporad	10	
Silvia Martis	10	
Giulio Andreoli	9	
Achille Bassi	9	

Tab. 10.5. Matematici che hanno donato alla Biblioteca almeno 9 lavori durante la direzione di Fano.

Per tenere costantemente aggiornato il patrimonio librario, Fano non agisce solo sul fronte della miscellanea di opuscoli ma vi affianca una lungimirante politica di acquisti dei volumi, a partire dalle opere complete di Dedekind (in tre volumi, pubblicati rispettivamente nel 1930, 1931 e 1932 e acquistati nel medesimo anno), Kronecker e Lie e dai venti tomi della ristampa delle opere di Galileo. Massima è l'attenzione per le opere di geometria algebrica, settore in cui Fano è particolarmente attivo in questi anni. Con grande prontezza, spesso a pochi mesi di distanza dalla pubblicazione, sono acquistati i principali lavori tedeschi: l'*Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes* di Schönflies nel 1925; le *Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen* di Brill – insieme alle *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Pasch e Dehn – nel 1926; l'*Algebraische Flächen* di H. Jung nel 1927. Numerosissime, naturalmente, le opere della Scuola italiana: dal *Trattato di geometria algebrica* di Severi (1926) ai contributi di Loria, Comessatti, Enriques e Chisini, per non citare

[31] Tra il 1932 e il 1935 lavora come assistente incaricata presso la BSMT. Questo incarico e la frequentazione con Fano, la spingono ad approfondire ricerche di carattere storico-scientifico.

quelli dei geometri torinesi. Negli anni Trenta si osserva un ampliamento degli orizzonti nella geografia delle acquisizioni geometriche: dagli Stati Uniti arriva il volume *Algebraic geometry and theta functions* di A.B. Coble (1929) mentre dall'Inghilterra provengono *A treatise on algebraic plane curves* di Coolidge (1931) e *The theory of ruled surfaces* di Edge (1931). Diversi sono anche i volumi di Godeaux che raggiungono gli scaffali della BSMT in questo periodo: *La géométrie* (1931), *Questions non résolues de géométrie algébrique…* (1932), *Leçons de géométrie projective* (1933), *Les géométries* (1937), solo per citarne qualcuno.

Con una leggera diminuzione rispetto al periodo precedente, proseguono gli acquisti dei volumi di geometria proiettivo-differenziale. Nel periodo 1930-33 giungono così nel capoluogo piemontese il *Lehrbuch der Differentialgeometrie* di A. Duschek e W. Mayer (1930), *Invariants of quadratic differential forms* di Veblen (1927) e *The foundations of differential geometry* (1932) scritto da quest'ultimo in collaborazione con Whitehead.

Pur occupando sempre un'esigua percentuale del totale, aumentano i lavori di algebra e teoria dei numeri ingressati in Biblioteca, editi soprattutto in Germania. È questo il caso dei tre volumi delle *Vorlesungen über Zahlentheorie* di Landau (1927), della traduzione tedesca curata da E. Bodewig dell'*Einführung in die Zahlentheorie* di Dickson (1931), dell'omonimo testo di H. Jung (1935), della *Zahlentheorie* di Hilbert (1932) e dei due tomi dell'*Algebra* di O. Perron (1933). Tra gli opuscoli, figura la traduzione francese del lavoro di J. Mordell intitolata *Le dernier théorème de Fermat* (1929). Nel 1931 giungono in BSMT anche i due volumi della *Moderne Algebra* di Van der Waerden che, quattro anni più tardi, saranno affiancati dalle *Premieres leçons sur la théorie générale des groupes et ses applications à l'arithmétique, à l'algèbre, à la géométrie* di G. Bouligand (1935). In questo settore la Biblioteca torinese è più sguarnita di quella dell'ateneo romano e si registrano maggiori ritardi. A titolo di esempio, basti pensare che solo nel 1936 sono acquistati l'*Einführung in die Axiomatik der Algebra* di H. Beck, pubblicato dieci anni prima, e il volume *Gruppentheorie* di L. Baumgartner, dato alle stampe nel 1921. Ancora, a Torino sono assenti i testi di algebra di Albert, Krull, Deuring, Z. Dienes e l'*Algebren und Zahlentheorie* (1927) di Dickson.

Una situazione analoga si verifica nel campo della topologia. Il nucleo torinese dei volumi di questo settore è composto dai lavori di Lefschetz (*Topology*, 1930), Aleksandrov (*Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, 1932), Kuratowski (*Topologie*, 1933), Seifert e W. Threlfall (*Lehrbuch der Topologie*, 1934) e Lyusternik (*Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, 1934). Due sono gli scritti di topologia combinatoria: *Einführung in die kombinatorische Topologie* di Reidemeister (1932) e *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe* di D. König (1936). Mancano invece i volumi di Weil (topologia generale), Eckmann, Pontrjagin e Tietze che troviamo sugli scaffali della BIRM. Tra gli opuscoli della miscellanea torinese, la nota di Hopf *Géométrie infinitésimale et topologie* (1932) rappresenta l'unico contributo afferente a questo settore. Bisogna però tener presente che gran parte delle note di topologia di questo periodo sono pubblicate all'interno delle riviste possedute dalla BSMT. Tra il 1934 e il 1935, inoltre, sono ingressati in Biblioteca due lavori sugli spazi astratti – le *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux* (1934) di Appert e *Le rôle des espaces abstraits en physique nouvelle* di J.-L. Destouches (1935) – che vanno a sommarsi al volume di Fréchet, *Les espaces abstraits* (1928).

L'impressione di arretratezza del patrimonio della BSMT in alcuni settori della matematica è, almeno in parte, fugata dai volumi delle importanti collane francesi e tedesche che Fano acquista prontamente grazie all'intermediazione delle librerie Lattes, Hirschwald e Rosenberg.

Da Berlino arrivano quasi venti testi della collana *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, tra cui la *Topologie* di Aleksandrov e Hopf (1935). Nel 1932 per la prima volta fanno il loro ingresso in BSMT tre testi della collana *Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien* (H. Hans, W. Müller, Popoff), cui si sommano quaranta volumi della serie *Mathematisch-physikalische Bibliothek*, edita a Leipzig. Sul versante francese, più di sessanta sono invece le opere del *Mémorial des sciences mathématiques* acquistate da Fano, da quelle di impostazione più classica come *Les courbes de l'espace à n dimension* di Guichard (1928) ai testi *Géométrie sur les surfaces et variétés algébriques* di Lefschetz (1929), *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* di Cartan (1930), *Les corps algébriques et la théorie des idéaux* di Ore (1934) e *Functional topology and abstract variational theory* di Morse (1938).[32] A questi bisogna aggiungere 17 volumi dei *Cahiers scientifiques*, la metà dei quali su argomenti di geometria: accanto ai tre contributi di Cartan, si segnalano i titoli *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes* di G. Julia e *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* di Picard (entrambi pubblicati nel 1931). Una cinquantina sono infine i testi della collana *Actualités scientifiques et industrielles* edita da Hermann, al cui interno sono pubblicati alcuni scritti innovativi come *Sur les classes d'ideaux dans les corps quadratiques* del giapponese Iyanaga (1934), *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne* di P. Dubreil (1935), *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques* di Weil (1935) e *La topologie des groupes de Lie* di Cartan (1936).

Questo elemento motiva anche il primato della casa editrice Gauthier-Villars per numero di volumi stampati che giungono in Biblioteca durante la direzione di Fano (Tab. 10.6), superando così le opere edite da Teubner, principale protagonista della stagione di Segre.

Casa editrice	**Sede**	**N. esemplari**
Gauthier-Villars	Paris	244
Teubner	Leipzig	126
Springer	Berlin	121
Hermann	Paris	87
Zanichelli	Bologna	87
Hoepli	Milano	29
CUP	Cambridge	28
De Gruyter	Leipzig	25
Akademische Verlag.	Leipzig	22
Cedam	Padova	22
Alcan	Paris	20
Barbèra	Firenze	20
Blanchard	Paris	15
Vieweg	Braunschweig	14

[32] Tra i lavori pubblicati all'interno di questa collana vi è anche il contributo di una matematica italiana: si tratta di *Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* di Elena Freda (1937), allieva di Castelnuovo e di Corbino.

Nijhoff	Groningen	12
Hirzel	Leipzig	11
Ponzio	Pavia	10
Vuibert	Paris	10
Gili	Torino	9
STEN	Torino	9
PUF	Paris	8

Tab. 10.6. Case editrici maggiormente rappresentate in BSMT sotto la direzione di Fano.

L'importante numero di volumi delle collane francesi spiega, almeno in parte, il cambiamento della composizione della BSMT sotto la direzione di Fano: per la prima volta la percentuale di lavori pubblicati in Francia (più del 30% del totale) arriva a superare quella dei testi editi in Germania. Questi ultimi, tuttavia, coerentemente con la traiettoria scientifica e personale di Fano e con gli interessi dei geometri del polo torinese della Scuola di geometria algebrica, rappresentano un quarto dei volumi acquisiti tra il 1925 e il 1938 (Fig. 10.12). Rispetto alla direzione Segre, aumenta la componente dei lavori italiani, risentendo – almeno in parte – dell'autarchia culturale promossa dal regime fascista, mentre diminuisce di oltre il 50% la percentuale dei lavori provenienti dal mondo anglosassone.

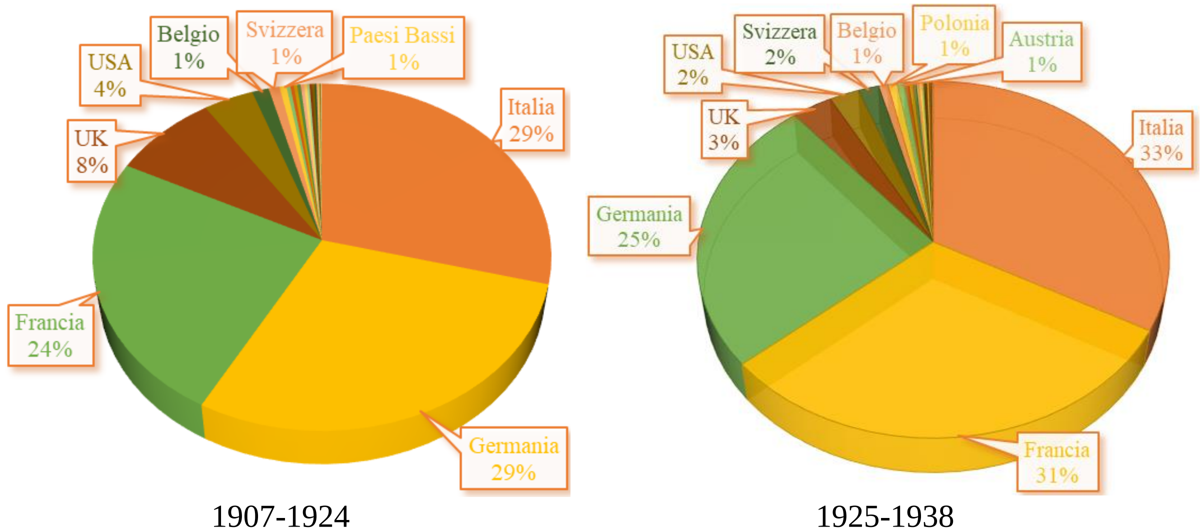


Fig. 10.12. Distribuzione per nazione di pubblicazione delle opere ingressate in BSMT.

Un ulteriore cambiamento significativo nella composizione della Biblioteca rispetto al periodo precedente si registra a livello disciplinare.

Da un lato, si riduce il numero di contributi di carattere fondazionale, didattico ed epistemologico ingressati in BSMT. Tra i rari testi che rientrano in questo ambito ve ne sono due pubblicati nel 1936 a Leipzig e Vienna rispettivamente: *Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik in ausgewählten Kapiteln dargestellt* di V. Kommerell e *Einführung in das Mathematische Denken: die Begriffsbildung der modernen Mathematik* di F. Waismann. Sul fronte dei manuali, spicca un contributo intimamente legato allo sviluppo industriale della città di Torino: si tratta de *La Matematica d'officina: trattato di matematica elementare per gli* *allievi delle scuole apprendisti FIAT e dopolavoro* di A. Callabioni, la cui terza edizione è ingressata in BSMT nel 1929.

Dall'altro lato, si assiste ad un incremento dei volumi di fisica, meccanica, ingegneria e applicazioni, ambiti verso cui Fano nutre un marcato interesse. Sul versante della fisica, numerosi e variegati sono i contributi di fisica nucleare ingressati in questo periodo (M. Born, P. Frank, L. Brillouin, J. Perrin, H. Dänzer, Eddington, Tunazima, …) che comprendono la voce "Quanti" dell'Enciclopedia Treccani redatta da Persico e gli *Atti* del convegno di fisica nucleare tenutosi a Roma nell'ottobre 1931. A questi si aggiungono testi di taglio didattico come la *Guida pratica per esperienze didattiche di fisica sperimentale* di E. Perucca (1937) e il testo ciclostilato delle *Lezioni di meccanica razionale* tenute da Persico nell'a.a. 1933-34. L'attenzione per gli studi di tipo ingegneristico emerge dalla presenza sia di testi di carattere prettamente applicativo, quali i sei tomi dell'*Aerodynamic theory* di W.F. Durand (1934-36), sia di volumi specificatamente dedicati all'insegnamento della geometria per gli allievi ingegneri, come il contributo di P. Field *Projective Geometry with applications to engineering* (1923) che Fano fa acquistare nel 1931.

La valorizzazione del ruolo della Biblioteca come centro propulsore per l'avanzamento della ricerca matematica rappresenta un ultimo aspetto altamente significativo della direzione Fano. Nel 1929, prendendo come modello i neonati Seminari Matematici di alcuni atenei italiani (Roma, Padova e Milano), Fano avvia i lavori delle "Conferenze di Fisica e di Matematica della R. Università e della R. Scuola di Ingegneria di Torino" ospitandole nei locali della Biblioteca.[33] Fano, affiancato da Terracini, è uno dei protagonisti di tale iniziativa, presentando in questa sede diversi interventi e curando la pubblicazione della relativa rivista, edita dalla BSMT a partire dal 1931. Nel primo periodo di attività, dalla fondazione al 1938, sono ospitate una sessantina di conferenze, tenute prevalentemente da matematici in servizio a Torino (oltre a Fano e Terracini, anche Fubini, Persico, Somigliana, Bassi, Perucca, Colonnetti, …). Scopo precipuo di queste sedute è rendere partecipe la comunità scientifica locale dei progressi dei rispettivi settori, stimolando eventuali collaborazioni. Solo quattro sono le conferenze dedicate a un argomento di geometria (Fubini, Terracini, Fano e Buzano) e, in tutti e quattro i casi, si tratta di geometria proiettivo-differenziale, nonostante la predilezione del direttore per la geometria algebrica. Del tutto assenti, invece, gli interventi di algebra moderna e teoria dei numeri.[34] Quasi la metà delle conferenze afferisce all'ambito fisico (Fig. 10.13): solo Persico, giunto a Torino nel 1929 per interessamento di Tricomi e di Fano, presenta otto comunicazioni. Dal 1933 al 1938 le Conferenze di Fisica e di Matematica sono organizzate in collaborazione con la sezione torinese dell'Associazione Elettrotecnica Italiana: ciò, unitamente alla cooperazione con il Politecnico, spiega sia il numero di interventi dedicati alle applicazioni (Perucca, C. Ferrari, Ferraris, G. Vallauri, G. Valle, …), che rappresenta il 15% del totale sia le lezioni di analisi applicata all'elettrotecnica, come quella tenuta da Fubini nel gennaio 1936.

[33] Sul Seminario torinese, cfr. M. ZEULI 1971, *Indice dei Rendiconti del Seminario Matematico. Anni Accademici 1929-30 – 1970-71*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 30, pp. I-VI, 1-109; A. SANINI 1999, *Rileggendo i Rendiconti*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 57, pp. 1-10.

[34] L'unica conferenza su un oggetto dell'algebra classica è quella presentata da Boggio nel febbraio 1932 sulla teoria delle matrici.

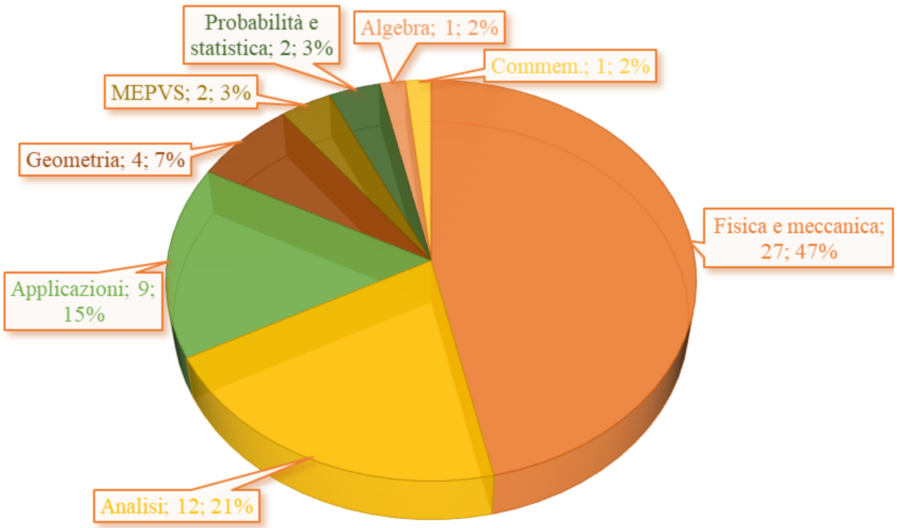


Fig. 10.13. Distribuzione per disciplina delle Conferenze di Fisica e di Matematica nel periodo 1929-38.

10.4. 1938-1948: la 'parentesi' di Tricomi

Quando Fano è costretto a lasciare Torino, Tricomi subentra nella direzione della Biblioteca. Ordinario di analisi, egli mantiene questo incarico fino al dicembre 1948 con un'interruzione di due anni, 1943-44 e 1944-45, quando Tricomi, in seguito all'armistizio, entra in clandestinità ed è sostituito da Renato Einaudi, docente di meccanica razionale. La Seconda guerra mondiale suddivide in due fasi distinte il decennio in questione (Fig. 10.14).

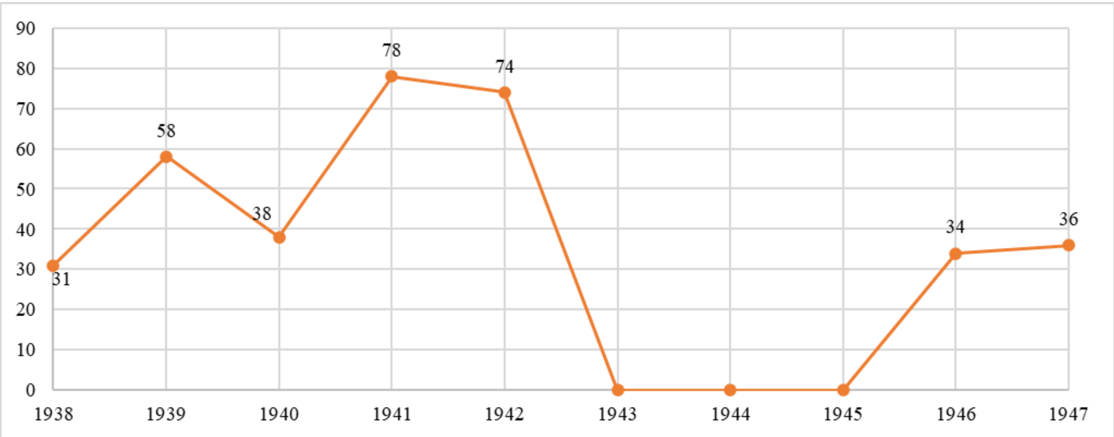


Fig. 10.14. Andamento delle acquisizioni durante la direzione di Tricomi della BSMT.

Nel primo periodo, Tricomi si colloca nel solco dell'operato del suo predecessore. Diviene dunque direttore anche delle Conferenze torinesi e del relativo periodico che, nel 1938, assume l'attuale denominazione: «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino». Esso vedrà la stampa di un solo volume, che racchiude le conferenze degli a.a. 1938-39 e 1940-41, prima dell'inevitabile interruzione determinata dall'evento bellico. Ampio spazio è dedicato alla fisica atomica (Persico, G. Moretti) e, soprattutto, alle applicazioni (Miranda, G.B. Madella, M. Panetti, A. Ghizzetti). È Tricomi a presentare l'unico contributo di diversa impostazione, dal titolo *Essenza e didattica delle Matematiche in un manoscritto inedito di Corrado Segre* (22.11.1940).

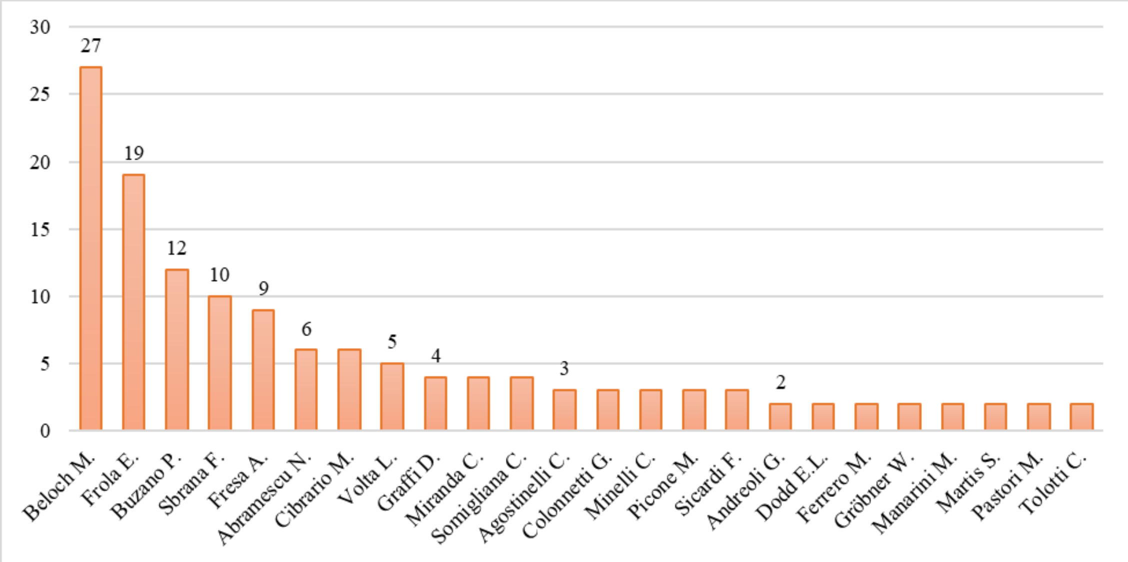


Fig. 10.15. Donazioni di almeno 2 opuscoli tra il 1938 e il 1943.

Per quanto riguarda la Biblioteca, nel novembre del 1938 confluiscono nella miscellanea 26 opuscoli di Margherita Piazzolla-Beloch, docente di geometria all'Università di Ferrara. Anche i matematici del capoluogo piemontese incrementano il patrimonio di opuscoli con le proprie pubblicazioni, come testimoniato dal numero di estratti depositati da Buzano, Cibrario, Fresa (assistente presso l'Osservatorio di Pino Torinese dal 1934) e E. Frola (docente di geometria descrittiva al Politecnico), cui si sommano i lavori inviati da F. Sbrana, titolare della cattedra di meccanica razionale a Genova (Fig. 10.15). Da Cluj provengono invece alcuni articoli di Abramescu, ingressati nell'ottobre 1942. Permane anche l'abitudine di depositare in Biblioteca gli appunti delle lezioni: è questo il caso delle litografie del *Corso di matematica per i chimici ed i naturalisti* tenuto dalla Cibrario nell'a.a. 1936-37 e delle *Esercitazioni di meccanica razionale* svolte l'anno successivo da M. Zeuli, entrambe ingressate nel dicembre del 1938.

Notevoli sono i contributi di geometria proiettivo-differenziale che raggiungono gli scaffali della BSMT prima dello scoppio della guerra – come la *Differentialgeometrien in den Kugelräumen* di Takasu, pubblicato a Tokyo nel 1938, e l'*Einführung in die neueren methoden der Differentialgeometrie* di Schouten (1938) – che comprendono anche i suoi legami con la topologia (Blaschke e G. Bol, 1938, *Geometrie der Gewebe: topologische Fragen der Differentialgeometrie*) e il calcolo tensoriale (Hlavatý, 1939, *Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung*). Nell'ambito della geometria algebrica italiana, accanto ai volumi di Conforto *Le superficie razionali* (1939) e *Funzioni abeliane e matrici di Riemann* (1942), sono ingressati in BSMT alcuni testi delle lezioni – tra cui il corso *Spazi a connessione proiettiva* (1941) tenuto all'INDAM da Bortolotti e le *Lezioni di geometria algebrica* (1942) svolte a Palermo da Lo Voi – e un lavoro di taglio storico, l'*Origine e sviluppo della geometria proiettiva* di Amodeo (1939). Tramite Hirschwald è acquistato nello stesso anno di pubblicazione il volume *Einführung in die algebraische Geometrie* di Van der Waerden (1939).

Continuano invece a registrarsi alcuni ritardi temporali nell'acquisizione dei lavori di algebra e teoria di numeri, con l'unica eccezione dell'opera postuma di Scorza *Gruppi astratti* (1942).

Nel 1939 arriva in Biblioteca *An introduction to the theory of numbers* di Hardy e Wright (1938), seguito l'anno successivo da *Nichtkommutative Hauptidealringe* di Asano (1938). Addirittura, solo nel 1941 – a cinque anni di distanza dalla sua pubblicazione – è ingressato il trattato di Ore intitolato *L'algèbre abstraite* (1936).

In ambito fisico si registra un elevato afflusso di libri tedeschi: accanto a tredici volumi dell'*Handbuch der Physik* pubblicati tra il 1926 e il 1928, è da segnalarsi la presenza dei "Rompicapi fisici dal mondo dei soldati" (*Physikalische Denkaufgaben aus der Welt des Soldaten*, 1939) di H. Weinreich. Gli ultimi testi ad arrivare in Biblioteca, un mese prima dell'inizio dei bombardamenti su Torino, sono sette volumi della serie *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* dati alle stampe tra il 1890 e il 1927.

L'8 dicembre 1942 gli spezzoni incendiari di un bombardamento aereo colpiscono l'ultimo piano del Palazzo dell'Università, dove si trova la Biblioteca, distruggendo gran parte della ricca miscellanea di opuscoli e la raccolta di modelli geometrici. Il patrimonio librario è invece tratto in salvo grazie all'intervento di numerosi docenti e studenti universitari – guidati da Zeuli, che coadiuvava Einaudi nella gestione della Biblioteca, Agostinelli e G. Tanturri – che erano riusciti a trasferire la maggior parte dei volumi nelle cantine del Rettorato pochi giorni prima degli attacchi aerei. Nell'attesa di una nuova sistemazione (il palazzo di San Filippo di via Carlo Alberto 10, sede attuale della Biblioteca), i libri sono trasferiti in via provvisoria all'Istituto chimico (corso Massimo d'Azeglio 48).[35] La BSMT resterà dunque chiusa fino al termine del conflitto. Ciò rappresenta un limite per l'attività di ricerca dei matematici torinesi, come esprime Buzano a Conforto in questi termini:

> Quel che più mi dispiace è che, evacuate le biblioteche, l'unica fonte a cui posso ricorrere sono i libri ed opuscoli che io possiedo e che sto riordinando in seguito al caos del trascolo. […] Mi è impossibile (non essendoci biblioteca) consultare le fonti bibliografiche.[36]

Alla ripresa delle attività universitarie, dopo la Liberazione, Tricomi deve fronteggiare notevoli difficoltà economiche, tant'è che gli acquisti dei volumi riprendono solo nel febbraio 1946 tramite la libreria Elit. In questo delicato frangente, Tricomi è coadiuvato nella riorganizzazione della Biblioteca da Maria Gramegna, assistente di Matematiche complementari, che dopo aver contribuito a titolo volontario alla revisione dell'inventario della BSMT nel 1947 si prodiga per la creazione di

> un nuovo catalogo per materia che – date le conoscenze specifiche all'uopo occorrenti – non può venir fatto soltanto dalla tecnica attualmente adibita alla Biblioteca che ha una preparazione di carattere letterario.[37]

Per questo motivo, le è attribuito uno speciale premio di operosità.[38]

Oltre al direttore, vi sono diversi geometri (Conforto e Buzano *in primis*) che donano alla BSMT le copie dei loro volumi, per colmare almeno parzialmente i ritardi dovuti al secondo

---

[35] Cfr. GIACARDI – ROERO 1999, *cit*., p. 448.

[36] Il Giardino di Archimede, *FCo*: P. Buzano a F. Conforto, Scandeluzza (AT) 6.1.1943. Cfr. anche la lettera del 29.12.1942: "Caro Conforto, il prof. Bompiani ti avrà informato delle peripezie della mia famiglia e del conseguente sfollamento. La Biblioteca di Matematica è chiusa. Io sto riordinando le mie carte".

[37] BSMT, FTe, Carte Terracini: F. Tricomi a M. Allara, Torino 6.10.1947.

[38] BSMT, FTe, Carte Terracini: M. Allara a F. Tricomi, Torino 20.12.1947. L'importo del premio è £ 10.000.

conflitto mondiale. A questi si sommano nove opuscoli delle pubblicazioni del CNR che, trasferiti “dalla cantina”,[39] sono ingressati nell’estate del 1946. Tra i primi lavori provenienti da oltreconfine si segnala il volume di A. Niklitschek, tradotto da L. Lamorlette, intitolato *L’attrait des mathématiques* (1946).

Sul versante algebro-geometrico, nel primo dopoguerra vi è una certa ‘nota di contrasto’ nelle acquisizioni librarie. Ad esempio, nel marzo 1948 sono ingressati a breve distanza il testo *Funzioni quasi abeliane* (1947) di impostazione tradizionale, donato da Severi, e la *Topologie générale* (1940-47) di Bourbaki, di indirizzo decisamente moderno. Contemporaneamente, grazie alla collaborazione della libreria Lattes, vengono anche recuperati testi ‘di base’, pubblicati oltre oltre cinquant’anni prima, delle discipline meno studiate nell’ambiente italiano, come *A treatise on algebra* di C. Smith (1888). Ancora, nel settembre 1948, è acquistato *A treatise on projective differential geometry* di E.P. Lane, pubblicato quattro anni prima. Tra gli ultimi atti della direzione di Tricomi vi è l’acquisto, questa volta a poca distanza dalla sua pubblicazione, del primo volume delle *Lezioni di geometria moderna. Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi* (1948) di B. Segre.

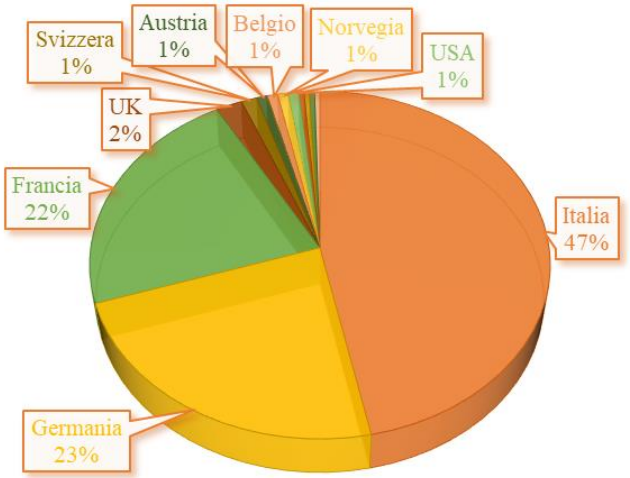


Fig. 10.16. Distribuzione per nazione di pubblicazione delle opere ingressate in BSMT sotto la direzione di Tricomi.

Gli anni della direzione di Tricomi sono dunque profondamente segnati dal secondo conflitto mondiale che annovera, tra le varie conseguenze, il fatto che la maggior parte dei volumi acquisiti in BSMT provenga da centri editoriali italiani (Fig. 10.17). Se, almeno in parte, si riesce a reperire un buon numero di lavori pubblicati in Germania, si registra una drastica diminuzione nell’afflusso di opere provenienti dal mondo dell’editoria anglosassone (Fig. 10.16). Ciò concorrerà all’arretratezza dell’attività di ricerca in Italia nel primo dopoguerra, soprattutto nei settori della geometria algebrica, della topologia e dell’algebra astratta.

[39] BSMT, *Registro d’ingresso 3*, n. d’ingresso 14737.

Fig. 10.17. Cartografia italiana del patrimonio librario della BSMT tra il 1906 e il 1945.

10.5. Ricostruire e mantenere 'up-to-date': Terracini direttore della BSMT

Rientrato a Torino all'inizio del febbraio 1948, dopo la parentesi delle leggi razziali e del soggiorno in Argentina, nell'autunno di quello stesso anno Terracini assume la direzione della Biblioteca Speciale di Matematica, tenuta dall'amico Tricomi dal 1938 ad allora.[40] Con questo avvicendamento il direttore della Biblioteca è di nuovo un membro della Scuola italiana di geometria algebrica, come sempre era stato dalla sua creazione nel 1883.[41]

A Terracini toccano impegni onerosi e importanti, a partire dalla ricostruzione delle dotazioni materiali e delle collezioni della Biblioteca, andate distrutte durante la guerra mondiale e il loro trasferimento nella nuova sede di via Carlo Alberto.[42]

Come si desume da un'ampia e intensa corrispondenza, fra il 1948 e il 1955 Terracini dedica tutte le sue energie al ripristino degli abbonamenti interrotti durante gli anni di guerra: le riviste nord e sud Americane, ma anche i «Commentarii Mathematici Helvetici», i «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris», la serie di testi «Memorial

---

[40] ASUT, *Fasc. personale di A. Terracini*, lettere del 14.11.1945, 21.11.1945, 1.2.1946, 8.2.1946, 18.5.1946, 21.12.1946, 5.5.1952 e BSMT, FTe, Carte Terracini: 8.9.1947 e 15.3.1947. In questo frangente Tricomi lascia Torino per recarsi al Caltech di Pasadena, dove collabora al *Bateman Manuscript Project*. Egli rimarrà negli Stati Uniti fino all'agosto 1951 ma manterrà una fitta corrispondenza con Terracini su diversi temi, inclusi gli aspetti organizzativi della BSMT.

[41] BSMT, *Processo verbale di consegna dei beni mobili di proprietà dello Stato esistenti nella Biblioteca Matematica*, dicembre 1948. Sulla direzione Terracini della BSMT, cfr. A. CONTE – L. GIACARDI 2020, *La variegata attività organizzativa di Alessandro Terracini nel secondo dopo-guerra alla luce della corrispondenza inedita* in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 73-76; E. LUCIANO – E. SCALAMBRO 2020b, *Sul ruolo euristico dei patrimoni matematici: il case-study delle collezioni di A. Terracini*, «RSUT» 9.2, pp. 275-278.

[42] Archivio Persico (Roma): A. Terracini a F. Tricomi e E. Persico, 3.7.1946.

des Sciences Mathématiques» edita da H. Villat, e molti altri periodici ancora tornano così a popolare gli scaffali della Sala di lettura torinese.[43] Per raggiungere l'obiettivo, Terracini si vale dell'*American Rescue Plan* messo a punto dal *Committee on Aid to Devastated Libraries*,[44] ma soprattutto fa tesoro dei contatti stabiliti durante l'esilio a Tucumán nelle vesti di presidente dell'Unione Matematica Argentina e in quelle di direttore della «Revista de Matemática y Fisica teorica». L'aiuto di altri editori di giornali matematici, come Mauro Picone, Luis Santalò e Beppo Levi,[45] e la collaborazione di colleghi come Tricomi e Fano, che nel secondo dopoguerra trascorrono lunghi periodi negli Stati Uniti per motivi scientifici o famigliari, si rivela preziosa in questo frangente. Anche i figli di Fano, Ugo e Roberto, fungono ad esempio da intermediari fra la Biblioteca Speciale di Matematica, librai e case editrici americane (Stechert, the American Mathematical Association, the National Bureau of Standards, Caltech, ...), supportando Terracini nella sua opera di ricucitura della circolazione internazionale di testi e periodici.[46] A sua volta, Eugenio Fubini invia alla Biblioteca di Torino vari libri, intere collezioni o singoli numeri di riviste («Duke Mathematical Journal», ecc.) e – cosa ancor più importante – i manoscritti di suo padre Guido, scomparso a New York nell'aprile del 1943.[47]

In un arco di tempo relativamente breve Terracini riesce così a ricostruire il patrimonio della Biblioteca e ad accrescerlo, grazie al suo talento di organizzatore e promotore culturale, con l'acquisto di nuove serie («Intermédiaire des recherches mathématiques», «Anales de la Sociedad cientifica argentina», «Bulletin of the Research Council of Israel», ...). Nel settembre del 1952, la BSMT conta 106 collezioni complete di giornali matematici (40 italiani e 66 stranieri), che si aggiungono alle 64 di riviste cessate (26 italiane e 38 internazionali). In appena tre anni (1946-49), e con finanziamenti penosamente limitati, Tricomi e Terracini sono riusciti a ripristinare ben 33 abbonamenti.[48]

Visti i notevoli sforzi finanziari per la sottoscrizione degli abbonamenti ai periodici, minori sono le risorse disponibili per l'acquisto di monografie. Terracini, tuttavia, si adopera per ottenere nuovi finanziamenti, coinvolgendo l'ambiente industriale (FIAT, Olivetti, CEAT,

---

[43] BSMT, *Inventari Consorzio Universitario Piemontese. Registro di Inventario*: n. 1143, ottobre 1946–1967/68.

[44] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a A. Dresden 17.2.1949; A. Dresden a A. Terracini, 28.3.1949.

[45] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a M. Picone, 8.3.1949; M. Picone a A. Terracini, 12.3.1949.

[46] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a G. Fano, 17.1.1949; G. Fano a A. Terracini, 23.2.1949; G. Fano a A. Terracini, 7.5.1949 e 12.4.1949; F. Tricomi a A. Terracini, 4.11.1948; F. Tricomi a A. Terracini, 3.4.1950; A. Terracini a F. Tricomi, 14.4.1950 e 26.6.1951 Nella prima lettera dell'elenco, Terracini scrive: "Mi permetto di darti noie per conto della nostra biblioteca. Avrei intenzione di prendere l'abbonamento ad alcune riviste americane, alle quali ancora non siamo abbonati. Facendolo per mezzo dei librai italiani, si paga il dollaro a 800 mentre se io potessi trovare un librario a New York che accetti l'ordinazione, si pagherebbero al cambio ufficiale, cioè circa 575". Ancora, nell'ultima lettera inviata a Tricomi: "Grazie per la trasmissione dell'ordine di abbonamento a «Pacific»: speriamo che giunga presto la rivista".

[47] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: E. Fubini a A. Terracini, New York 30.12.1949 e 21.1.1950; A. Terracini a E. Fubini, Torino 15.1.1950 e 7.2.1950; A. Terracini a U. Fano jr, Torino 12.4.1953. In particolare, nella lettera del 15 gennaio Terracini scrive: "resto in attesa degli opuscoli e memorie di tuo Padre: sta sicuro che li curerò in modo affatto speciale […]. Grazie anche per l'invio da te annunciato di altri opuscoli e memorie destinati alla biblioteca matematica". Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020b, *cit.*, p. 275.

[48] BSMT, *Inchiesta sulle biblioteche, Nota illustrativa sulle distruzioni e ricostruzione delle apparecchiature scientifiche della Biblioteca Matematica 15.9.1952*; *Elenco delle opere scaricate (avariate e andate perdute per eventi bellici)*, 22.12.1949, ff. 1-4. Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020b, *cit.*, p. 276.

Pirelli, SIP)[49] e bancario (Istituto di San Paolo). La sua lungimiranza lo spinge ad acquistare le opere afferenti a quei settori della matematica in cui gli studi in Italia erano più carenti, elemento essenziale per rilanciare l'attività di ricerca. Accanto ai testi tipici della tradizione geometrica italiana, come le litografie dei *Fondamenti di geometria algebrica* di Severi (1948), già nell'autunno 1948 sono acquisiti i seguenti volumi stranieri: *Algèbre. Structures algébriques* di Bourbaki (1941), *A survey of modern algebra* di Birkhoff (1941), *Introduction a la topologie combinatoire* di Fréchet (1946), *Methods of algebraic geometry* di Hodge (1947). È soprattutto sul versante americano che si concentrano gli sforzi di Terracini all'inizio degli anni Cinquanta. Grazie ai rapporti con l'American Mathematical Sociey acquista diversi volumi delle collane *Colloquium Publications* (Weil, Lefschetz, Albert, N. Jacobson, N. Levinson, J.L. Walsh, R.L. Wilder, G.T. Whyburn) e *Mathematical Surveys* (M. Marden), tra cui compaiono vari testi di topologia e algebra astratta. Terracini riesce così a rinnovare il patrimonio librario della BSMT al punto che Tricomi, scrivendogli da Pasadena nella primavera del 1951, afferma:

> Mi compiaccio molto di constatare ancora una volta che la nostra Biblioteca torinese è perfettamente 'up-to-date'. Essa potrebbe […] competere con quella di qui, specialmente per quel che concerne i libri.[50]

A distanza di qualche mese (2.10.1951) giungono a Torino alcune monografie donate dall'Università del Michigan, come *Lectures in Topology* (1940), a cura di Wilder e W.L. Ayres, e *Rings with minimum condition* (1944) di E. Artin. Terracini beneficia anche di donazioni private: nel dicembre 1952 Zeuli deposita in Biblioteca il testo *Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées* di W. Wen-Tsun e G. Reeb (1952), insieme alle tavole dei logaritmi di O. Müller (1940) e alla terza edizione degli *Esercizi e complementi di analisi matematica* a cura di Richard, A. Corio e V. Capra (1952). Ancora, nel giugno 1954, Andreotti dona alla BSMT il testo dattiloscritto dei *Complementi di geometria proiettiva* (a.a. 1953-54), la cui prima parte è interamente dedicata all'introduzione delle nozioni fondamentali dell'algebra moderna (gruppi, corpi, anelli, ideali) con particolare attenzione all'anello dei polinomi sopra un corpo.[51]

Infine, in linea con i suoi interessi storici, Terracini si occupa personalmente dell'acquisto di testi antichi come, ad esempio, l'*Opera Mathematica* di J. Wallis e i volumi di F. Feliciano, G. Grandi, Mascheroni e altri ancora. Nel 1951 aderisce anche prontamente all'iniziativa dell'UMI per la ricostruzione delle collezioni di modelli geometrici delle varie università italiane che la guerra aveva in gran parte distrutto.[52]

---

[49] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: F. Tricomi a M. Olivetti, Torino 29.11.1947 e 17.12.1947; M. Olivetti a F. Tricomi, Ivrea 3.12.1947 e 14.2.1948; M. Olivetti a C. Agostinelli, Ivrea 21.4.1948; A. Terracini a M. Olivetti, Torino 28.4.1949; C. Paietta a A. Terracini, Torino 23.3.1950, 1.4.1950 e 7.4.1950; A. Terracini a C. Paietta, Torino 12.4.1950; V. Valletta a A. Terracini, Torino 13.4.1950; A. Terracini a V. Tedeschi, Torino 17.4.1950; A. Terracini a V. Valletta, Torino 20.4.1950; A. Terracini a V. Valletta, Torino 11.5.1950; V. Tedeschi a A. Terracini, Torino 11.5.1950; A. Terracini a V. Tedeschi, Torino 12.5.1950; V. Valletta a A. Terracini, Torino 26.5.1950; A. Terracini a V. Valletta, Torino 2.2.1951; E. Bompiani a V. Valletta, Roma 6.2.1951.

[50] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: F. Tricomi a A. Terracini, Pasadena 29.5.1951.

[51] Il corso di articola in quattro parti: dopo la prima dedicata ai concetti fondamentali dell'algebra (pp. 1-45), Andreotti affronta il Programma di Erlangen (parte II, pp. 46-58) per arrivare alla geometria proiettiva piana (parte III, pp. 59-134) e concludere con alcuni cenni di geometria proiettiva nello spazio (parte IV, pp. 135-152).

[52] Cfr. le 13 lettere di A. Terracini a L. Campedelli del periodo 1952-56, in BSMT, *FTe*, Carte Terracini.

Molto più complessa è la ricostruzione della leggendaria miscellanea della BSMT, raccolta da Segre e Fano nel periodo 1907-38 e andata quasi completamente distrutta nel bombardamento alleato del 1942. La miscellanea, la cui consistenza superava i 35.000 documenti secondo l'ultimo inventario del 1926, comprendeva autentiche rarità fra cui scritti d'occasione, estratti di periodici a circolazione locale, o cessati, o introvabili sul mercato, ritagli di quotidiani, e soprattutto due collezioni di rilevante valore: quella delle litografie dei corsi universitari di matematiche superiori tenuti nelle Università italiane ed estere e quella delle dissertazioni di laurea e delle tesi di dottorato difese in Germania.[53]

Per recuperare ciò che era andato perduto, Terracini non può che percorrere la strada delle donazioni private.

Il primo importante lascito, in tal senso, giunge da parte di Fano che, nell'autunno 1948, dona alla Biblioteca quasi 5.000 opuscoli della sua collezione personale custodita fra Torino, Mantova e Colognola ai Colli. Alla morte di Fano il lascito è, per così dire, completato: Ugo e Roberto donano infatti alla Biblioteca i manoscritti del padre, alcuni opuscoli (appena 8, di Severi, D'Ovidio, Peano, C. Botto e del *Research Council*), e 147 libri della sua biblioteca privata, destinati alla Biblioteca del neonato Istituto di Geometria.[54]

Alla fine del novembre 1950, da Genova Sbrana invia vari opuscoli alla Biblioteca, per un valore complessivo di £ 300. A questi si aggiungono alcuni lavori donati da Castelnuovo nel gennaio 1953, per un totale di £ 6.000.

Un ulteriore importante legato che Terracini riesce a recepire per la BSMT è quello del collega Guido Ascoli, analista, docente di Matematiche Complementari a Torino dal 1948, scomparso improvvisamente nel 1957. La famiglia di Ascoli dona infatti alla Biblioteca la sua intera miscellanea: 3.455 pezzi, di 414 autori, inclusi estratti di 39 giornali, decine di opuscoli fuori commercio, 40 recensioni, 28 scritti commemorativi e 3 tesi di laurea.[55]

Questa politica di ricostruzione e di rilancio della BSMT prosegue senza sosta durante il periodo 1955-62: Terracini ricompra decine di volumi antichi andati distrutti nei bombardamenti, ne acquista di nuovi, e sottoscrive ulteriori abbonamenti agli «Annals of Mathematics», al «Journal of Mathematics and Physics» e al «Pacific Journal».

Cosa ancora più importante: Terracini fa della Biblioteca un luogo di costruzione e socializzazione del sapere, aggiungendo alle sue funzioni 'naturali' (conservazione e fruizione),

---

[53] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: F. Tricomi a A. Terracini, 22.11.1949. Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020b, *cit.*, p. 276.

[54] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a U. Fano, 11.2.1953; U. Fano a A. Terracini, 22.3.1953, U. Fano a A. Terracini, 16.5.1953, A. Terracini a U. Fano, 3.6.1953, U. Fano a A. Terracini, 10.6.1953, A. Terracini a U. Fano, 28.7.1953, U. Fano a A. Terracini, 28.11.1953, A. Terracini a U. Fano, 3.12.1953, A. Terracini a U. Fano, 22.1.1954, U. Fano a A. Terracini, 2.1.1954; BSMT, *FTe*, Lettere: U. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 3.8.1953, lettera n. 3; ASUT, *Patrim. Recap.* S.C. *Geometria* 1946-1983, *Donazione eredi prof. Gino Fano* ed *Elenco delle opere donate dalla famiglia Fano all'Università di Torino*, 18.2.1956, 6.4.1956 e 12.5.1956; *Verbali di adunanza del Consiglio di amministrazione dal 21.7.1954 al 13.7.1956*, p. 24; *Verbali di adunanza del Consiglio di amministrazione dal 21.7.1954 al 13.7.1956*, p. 387. Sul patrimonio Fano, cfr. il CAPITOLO 7 di questa tesi.

[55] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini al rettore M. Allara, 3.12.1957; Maurizia Sossi Ascoli a A. Terracini, 5.12.1957. La miscellanea Ascoli è stata esaminata in F. VISCONTI 2016, *Guido Ascoli: ricerca, insegnamento e attività istituzionale*. Tesi di Laurea magistrale, Università di Torino, Dip. di Matematica "G. Peano", rel. Prof.ssa E. Luciano, a.a. 2015-16, pp. 173-202.

quella di centro di studi.[56] A partire dal 1950-51, infatti, egli modifica lo statuto della BSMT trasformandola in Istituto di Ricerca Matematica ed editore della rivista «Rendiconti del Seminario Matematico».[57] Quest'ultima ospiterà contributi di eminenti matematici, logici, fisici, di tutto il mondo (Čech, Bodewig, Godeaux, Dienes, Bochner, A. Erdélyi, P. Berg, P. Lax, F.E. Herrera, J. Leray, S. MacLane, …).[58] L'impronta di Terracini sul Seminario Matematico è evidente sin dai primi anni della sua direzione, quando è coadiuvato da Tricomi. In primo luogo, la percentuale di lavori di geometria pubblicati nei «Rendiconti» quadruplica, passando dal 7% del periodo 1929-38 al 31% degli anni 1947-51.[59] Tra questi, accanto a interventi più 'tradizionali' (quali la conferenza di ampio respiro culturale tenuta da Severi su *I fondamenti remoti e prossimi della geometria algebrica*), compare la prima comunicazione di topologia presentata al Seminario torinese: si tratta di *Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra*, tenuta appositamente su una base elementare da uno dei matematici più significativi del XX secolo, Heinz Hopf (27.3.1952). Questa è seguita dall'*Introduzione elementare alla geometria simplettica*, presentata da Conforto (29.5.1952). In linea con i gusti scientifici di Terracini, il 44% delle pubblicazioni di taglio geometrico dei primi trenta volumi della rivista afferisce all'ambito della geometria proiettivo-differenziale. Tra queste, spicca la nota di Luis Santalò, uno dei maggiori esponenti della moderna geometria integrale, intitolata *Cuestiones de geometría diferencial e integral en espacios de curvatura constante*. In secondo luogo, Terracini stesso presenta 12 contributi, tra cui quattro saggi a carattere storico. Infine, si occupa della pubblicazione all'interno dei «Rendiconti» degli *Atti del Convegno Internazionale di geometria algebrica*, da lui organizzato a Torino nel maggio 1961. La rivista della BSMT si trova così ad ospitare diversi contributi sui più recenti sviluppi della geometria algebrica sotto l'influsso dell'algebra moderna (Van der Waerden, Zariski, P. Samuel) e in relazione alle applicazioni dell'analisi complessa (Andreotti, Kähler, P. Dolbeault).

All'aprile del 1962 risale l'ultimo atto della direzione Terracini:[60] il tentativo di acquistare la miscellanea di Leonida Tonelli (circa 5.400 opuscoli di matematica avanzata di autori italiani e stranieri, prevalentemente del Novecento, dagli anni Trenta in avanti), per la quale Terracini riesce a strappare un cospicuo finanziamento dal Consiglio di Amministrazione dell'Università di Torino. L'acquisto è autorizzato per la somma di un milione di lire ma la collezione Tonelli non raggiungerà mai gli scaffali della Biblioteca Speciale di Matematica.[61]

---

[56] ASUT, *Fasc. personale di A. Terracini*, lettera e curriculum vitae datati 21.4.1965.

[57] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a V. Tedeschi, 17.4.1950; *Relazione sull'attività svolta dalla biblioteca matematica dell'Università di Torino nell'anno accademico* 1950-51, 1.2.1952, ff. 1-2. Su questo aspetto, cfr. CONTE – GIACARDI 2020, *cit*., pp. 76-79.

[58] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: C. Agostinelli a A. Terracini, 4.8.1950; A. Terracini a C. Agostinelli, 10.8.1950; A. Terracini a F. Tricomi, 26.6.1951; A. Terracini a L. Geymonat, 31.1.1952; A. Terracini a L. Geymonat, 15.6.1952; L. Geymonat a A. Terracini, 26.12.1951; A. Terracini a Z. Dienes, 18.4.1952; E. Čech a A. Terracini, 4.7.1955.

[59] A partire dall'ottavo volume (a.a. 1947-48 e 1948-49) insieme ai testi delle conferenze iniziano a comparire le note, presentate prevalentemente dalla comunità scientifica locale, ma anche provenienti dall'estero grazie alle collaborazioni che i docenti dell'ateneo torinese riescono a riprendere dopo la guerra.

[60] Cfr. F. TRICOMI 1967, *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori (Bibliografia commentata 1916-1967)*, Padova, Cedam, p. 149.

[61] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: Libreria Sala delle Stagioni di Pisa a A. Terracini, 2.3.1962; A. Terracini alla Libreria Sala delle Stagioni di Pisa, 28.2.1962 e 9.3.1962; A. Terracini al rettore M. Allara, 9.3.1962; M. Allara a

Al pensionamento di Terracini,[62] Tricomi assume per la seconda volta la direzione della BSMT (1.11.1964).[63] In poco meno di trent'anni questa ha conosciuto uno sviluppo esponenziale e il suo patrimonio librario è ora valutato circa 37 milioni di lire, cui se ne aggiungono altri 2 di strumenti e modelli.[64] In occasione del suo ritiro Terracini dona una parte della sua miscellanea alla BSMT,[65] dove è tutt'oggi conservata insieme alle già citate raccolte di Fano e Ascoli, e a quelle di Tricomi (11250 pezzi) e Emilio Artom (252 estratti).[66] Grazie a un'azione sistematica su diversi fronti, Terracini è riuscito a portare la Biblioteca a un livello di aggiornamento notevole:

> Questa Biblioteca matematica è andata aumentando il numero dei volumi (sia di libri sia di riviste) in suo possesso, così da raggiungere un grado di efficienza che – per giudizio generale – trova pochi riscontri nelle biblioteche matematiche delle altre università italiane.[67]

A. Terracini, 6.4.1962; ASUT, *Verbale di adunanza del Consiglio di amministrazione del giorno* 28.3.1962, p. 90-91; *Verbali sedute facoltà di Scienze*, 1966-69, pp. 83, 90, 95.

[62] ASUT, *Fasc. personale di A. Terracini*, lettere del 1.11.1962, 1.11.1964, 12.11.1962.

[63] ASUT, *Processo di consegna dei beni mobili di proprietà della Università esistenti nella Biblioteca Matematica, 30.10.1964 e 6.11.1964, in seguito al collocamento a riposo del sig. prof. Alessandro Terracini, passaggio a Francesco Tricomi*. Cfr. anche ASUT, *Istituto di Geometria sottoserie 1964, Verbale di consegna da A. Terracini a Romolo Deaglio* 6.11.1964.

[64] BSMT, *Inventario d'impianto dell'anno 1963-64 secondo l'ultima ricapitolazione approvata dal Ministero per le variazioni inventariali a tutto il 1.11.1963*.

[65] ASUT, *Fasc. personale di A. Terracini*: Giulia Sacerdote Terracini al Rettore, Torino 8.4.1968. Sul patrimonio Terracini, cfr. il CAPITOLO 11 di questa tesi.

[66] Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020b, *cit.*, pp. 277-278.

[67] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Terracini a M. Allara, Torino 6.7.1962.

11. *Il patrimonio materiale di A. Terracini: biblioteca personale e miscellanea*

Formatosi a Torino, Alessandro Terracini appartiene alla seconda generazione della Scuola italiana di geometria algebrica, della quale eredita il gusto per le questioni proiettive e differenziali affrontate con approccio sintetico.[1]

Matematico di alta levatura intellettuale, uno dei più colti tra gli allievi di Segre, Terracini ha ben chiaro il valore, non solo materiale, di un patrimonio: la ricerca matematica di alta qualità – in qualsiasi ramo – presuppone secondo lui il confronto con le fonti e con la letteratura, sia recente e contemporanea, sia del passato. Di qui l'impossibilità di lavorare scientificamente con successo, senza disporre di libri, riviste, estratti, opuscoli, manoscritti testi e documenti di studio. Non a caso, Terracini si costruisce fin dagli anni giovanili una ricca biblioteca e un'amplissima miscellanea, che fortunatamente sopravviveranno alla guerra e alle requisizioni dei beni da parte del famigerato EGELI, Ente gestione e liquidazione immobiliare dei beni ebraici espropriati.[2]

L'analisi delle sue raccolte librarie appare significativa nella misura in cui apre uno scenario sull'ultima fase della Scuola geometrica italiana; riflette inoltre i notevoli cambiamenti nelle dinamiche di trasmissione e circolazione dei saperi matematici e la riorganizzazione del mondo accademico, a livello politico e istituzionale, negli anni immediatamente successivi al secondo conflitto mondiale. A livello individuale, il patrimonio Terracini restituisce un largo insieme di dati che, opportunamente messi a sistema, da un lato portano a ricostruire con maggior ampiezza e precisione di dettagli la sua traiettoria scientifica e professionale.[3] Esso si può ripartire nelle seguenti quattro collezioni.

- La miscellanea (BSMT): 10336 fra estratti, opuscoli, litografie di lezioni, tesi di laurea e discorsi inaugurali, 239 dei quali attualmente mancanti.[4] La schedatura della miscellanea, a

[1] Per dettagli sul profilo biografico di Terracini si rimanda a E. LUCIANO 2019, 2019, *Terracini Alessandro*, DBI, vol. 95, https://www.treccani.it/enciclopedia/alessandro-terracini_%28Dizionario-Biografico%29/, ID. 2020a, *'Alla ricerca di uno spazio di sopravvivenza intellettuale': A. Terracini, le leggi razziali e il soggiorno a Tucumán (1938-1948)*, in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 39-62; ID. 2020b, *Jewish intellectual diaspora and the circulation of mathematics. The case of Alessandro Terracini*, in M.T. BORGATO, C. PHILI (eds.), *In Foreign Lands: The Migration of Scientists for Political or Economic Reasons*, Basel, Springer, pp. 1-19; L. GIACARDI 2020, *La formazione scientifica di Alessandro Terracini e i successi prima delle leggi razziali* in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 13-38; CONTE – GIACARDI 2020, *cit*.

[2] Cfr. A. TERRACINI 1968, *Ricordi di un matematico. Un sessantennio di vita universitaria*, Roma, Cremonese, pp. 157-158: "Un'altra gradita sorpresa avuta a Torino e dovuta alla previdenza di mia cognata Rita Artom Sacerdote e di suo marito l'Avvocato Alberto Artom, e di mio cognato ing. Aldo Sacerdote, è stata il ritrovamento, oltre che della nostra casa, anche dei nostri mobili e dei miei libri, ai quali essi avevano provvisto mediante ripetuti e opportuni spostamenti per salvarli dai bombardamenti. […] Il ritrovare quasi tutti i miei libri è stata per me una gioia grandissima".

[3] Una versione ridotta dei paragrafi 11.1-11.7 e 11.10 di questo capitolo della tesi è pubblicata in LUCIANO – SCALAMBRO 2020, *cit.*, pp. 273-289.

[4] Si tratta degli estratti nn. 790-799, 1281, 1364, 1508, 1656, 1727, 2436, 2479, 3345, 3408, 3448, 3535, 3802, 4186, 4279, 4340, 4341, 4360, 4429, 4457, 4923, 5353-5417, 5468, 5783, 6474, 6738, 8320-8380, 8454-8524, 8695, 8949, 9090, 9141-9144, 9585, 9589. Rispetto all'ultima ricognizione (cfr. GIACARDI 2011, *cit*., p. 115), sono stati individuati ulteriori 4982 estratti della miscellanea, numerati consequenzialmente e spesso contraddistinti da segni di possesso (firma, note autografe) o dediche a Terracini.

cura di E. Luciano e E. Scalambro, è disponibile all'interno del sito web a cura di L. Giacardi (http://www.corradosegre.unito.it/fondo_terracini_m.php).

- I *Quaderni* (BSMT): 35 quaderni manoscritti o dattiloscritti che documentano i corsi universitari svolti a Torino e Tucumán fra il 1919 e il 1958. La schedatura del Fondo Terracini, che comprende anche alcune lettere, pubblicata da L. Giacardi e L. Rinaldelli nel 2000, è consultabile al link http://www.corradosegre.unito.it/fondo_terracini_l.php.[5]
- La biblioteca personale (BSMFGP): 589 volumi e 37 collezioni complete o parziali di riviste scientifiche: «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», «Periodico di Matematiche», «Le Matematiche», «Rendiconti dell'Istituto Lombardo», «Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège», «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», «Rivista di Matematica dell'Università di Parma», «Annali di matematica pura e applicata», «Mathematische Annalen», «Bollettino della Mathesis» e «Revista de la Unión Matemática Argentina». Il regesto della Biblioteca è stato pubblicato da E. Luciano e E. Scalambro nel 2020 e posto in appendice a questa tesi.[6]
- I materiali non catalogati (BMSFGP): parecchi materiali non librari che per varie ragioni non sono stati catalogati al momento dell'arrivo a Perugia e che oggi versano purtroppo in precarie condizioni di conservazione. Fra questi vi sono 32 estratti di Peano, incluse copie parziali del *Formulario Matematico* e della «Rivista di Matematica», risalenti al periodo 1894-1908 e con note autografe di Terracini; manoscritti di articoli di Beppo Levi proposti per la pubblicazione sulla «Revista de Matematicas y Fisica Teorica»; litografie e dispense dei corsi di Geometria proiettiva e descrittiva di Fano, seguiti da Terracini nel 1907-08, anch'essi disseminati di marginalia, e i relativi esercizi e complementi, compilati dagli assistenti di Fano (A. Pensa, Giraud, Lo Monaco-Aprile, Ferrari e Perazzo) o raccolti da studenti (Domenico Pastore, Emilio Ponzano, Boncini, Costa, Perucca). Il catalogo di questi materiali, a cura di E. Luciano e F. Focacci, è in corso di completamento.

In occasione del suo ritiro, nel 1964, Terracini dona una parte della sua miscellanea alla BSMT,[7] dove è tuttora conservata insieme allo *Schedario Segre*, alla già citata raccolta di Fano, e a quelle di Tricomi, Ascoli e Artom. Come nel caso di Fano, alla sua scomparsa (quattro anni più tardi, nell'aprile del 1968), la famiglia Terracini completa il lascito con gli estratti del periodo 1962-68 e con la donazione della raccolta dei *Quaderni* manoscritti di Terracini, relativi ai corsi da lui tenuti nel capoluogo piemontese e in Argentina. Per interpretare al meglio i desiderata del loro congiunto, che aveva sempre sostenuto le comunità matematiche emergenti, i Terracini dispongono invece che i volumi e le riviste vadano all'allora neonata Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Perugia.[8]

---

[5] Cfr. GIACARDI – RINALDELLI 2001, *cit.*, p. 393.

[6] Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020, *cit.*, pp. 291-332.

[7] ASUT, *Fasc. personale di A. Terracini*: Giulia Sacerdote Terracini a M. Allara, Torino 8.4.1968.

[8] BSMFGP: F. Tricomi a Adriano Barlotti (direttore del Dipartimento), 4.6.1968, 6.6.1968, prot. n. 735, A. Barlotti a F. Tricomi, 14.6.1968, A. Barlotti ai Terracini, 22.11.1968; *Note di spesa autorizzate da Adriano Barlotti a Giulia Sacerdote Terracini*, 24.6.1969, 17.7.1969, 28.7.1969, 2.9.1969 e 5.9.1969.

11.1 Analisi statistica della miscellanea

La miscellanea, originariamente suddivisa in 127 faldoni, all'atto dell'arrivo alla BSMT era plausibilmente corredata da un catalogo o da uno schedario originale, purtroppo ad oggi perduti. Ogni estratto reca sulla prima o sulla seconda coperta il timbro di possesso TERRACINI, seguito da un numero d'ordine progressivo e talora affiancato da altri numeri d'ordine che si riferiscono appunto a uno o più cataloghi (per autore, o forse per soggetti). La numerazione progressiva degli estratti è destituita di significato e quasi certamente fu attribuita ex post, nel momento in cui gli estratti furono impacchettati in casa Terracini per essere trasportati nella Biblioteca Speciale di Matematica o al momento dell'estrazione dalle casse e della collocazione nel magazzino della stessa. È invece interessante una tipologia di numeri d'ordine, purtroppo presente solo su alcuni pezzi della collezione, che rimanda ad un'antica forma di catalogazione, in base alla data di ricevimento dei singoli estratti.

L'analisi statistica ha evidenziato che il nucleo più consistente della miscellanea è costituito da estratti di giornali e periodici. La percentuale di altri tipi di documenti (opuscoli stampati a proprie spese, estratti di volumi collettivi, ritagli di quotidiani, ciclostile, copie autografe di articoli, relazioni di commissioni di concorso, relazioni per premi o su lavori presentati per la pubblicazione, rapporti, scritti prosopografici, verbali di riunioni di società scientifiche, ecc.) è del 4,5% (Tab. 11.1) e include documenti pressoché introvabili come i testi delle due conferenze plenarie *Intuition in Mathematics* e *All Geometry is theory of Relativity*, che Fano aveva tenuto ad Aberystwyth nel 1923. Per quanto riguarda gli estratti non a stampa, si segnalano 4 litografie, 20 lavori dattiloscritti e una nota manoscritta.

Tipologia di opuscoli	n. esemplari
Note matematiche (in corso di stampa o non edite su riviste)	125
Estratti di *Festschrift*	79
Capitoli di libri	33
Tesi (non pubblicate)	22
Voci di enciclopedie	21
Dissertazioni accademiche	20
Elenchi di pubblicazioni	20
Conferenze	13
Commemorazioni (non edite su riviste)	11
Saggi	9
Rapporti e verbali	6
Libri di collane editoriali	2
Ritagli di quotidiani	2

Tab. 11.1. Classificazione degli estratti della miscellanea Terracini diversi da articoli su rivista.

Gli opuscoli della miscellanea provengono da giornali pubblicati in 38 nazioni differenti (Fig. 11.1, 11.2 e 11.3); più europocentrica la biblioteca Terracini, con il 92,1% dei volumi provenienti da un centro editoriale europeo e il 6,5% americano. Fra gli editori spiccano Teubner (Leipzig) con 63 volumi, Gauthier-Villars (Parigi) con 65, Zanichelli (Bologna) con 31, e i sud-americani *Centre de documentation universitaire*, *Editorial Mundo cientifico C.*

Colomino, *Espesa-Calpe S.A.*, *Talleres gràficos Tomas Palumbo* e *Universidad de Buenos Aires*.

In accordo con la classificazione elaborata all’interno del già citato progetto *Cirmath*, le 557 riviste su cui sono pubblicati gli articoli della collezione Terracini, possono essere classificate come in tabella (Tab. 11.2).

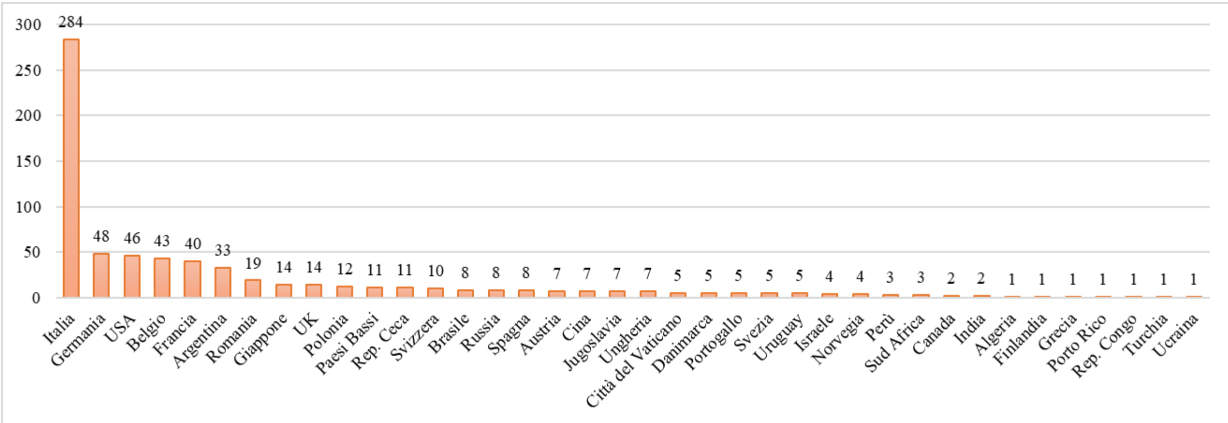


Fig. 11.1. Distribuzione geografica delle riviste.

Fig. 11.2. Cartografia mondiale della miscellanea Terracini.

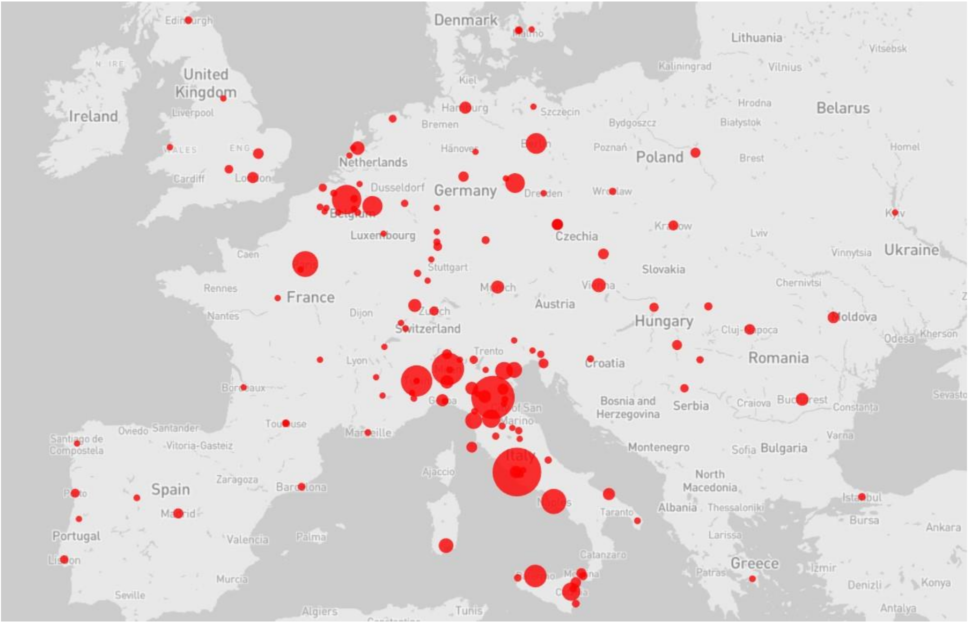


Fig. 11.3. Cartografia europea della miscellanea Terracini.

Tipo di collocazione editoriale	n. testate	n. estratti
Riviste tecnico-scientifiche	159	606
Periodici editi da accademie e società scientifiche	156	4736
Riviste specialistiche di matematica	134	3237
Atti di congressi	101	315
Riviste generaliste	42	77
Riviste di didattica della matematica	34	574
Annali di Università	23	66
Riviste specialistiche di filosofia	11	17
Riviste specialistiche di fisica	9	45
Riviste specialistiche di storia della scienza	6	16
Altro	13	19

Tab. 11.2. Classificazione delle riviste della miscellanea Terracini.

L’analisi quantitativa (Fig. 11.4) mostra la netta predominanza delle collezioni di periodici editi da accademie e società scientifiche: i Lincei (che da soli costituiscono oltre il 12% della miscellanea), l’Unione Matematica Italiana (5,7%), l’Istituto Lombardo (5,1%), le Accademie delle Scienze di Torino, Parigi, del Belgio, ecc. Fra le riviste specialistiche le prime posizioni sono occupate, come prevedibile, dagli «Annali di matematica pura e applicata», e dai «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», con 376 e 256 estratti rispettivamente. Stupisce per contro la presenza, tutto sommato limitata, dei «Mathematische Annalen» (1,2% del totale) e dei «Mathematische Zeitschrift» (0,9% del totale) che invece avevano costituito il cuore delle raccolte di Segre e di Fano. Marginale anche la consistenza degli estratti di giornali matematici americani («Annals of Mathematics», pubblicazioni dell’American Mathematical Society), almeno fino alla fine degli anni Trenta.

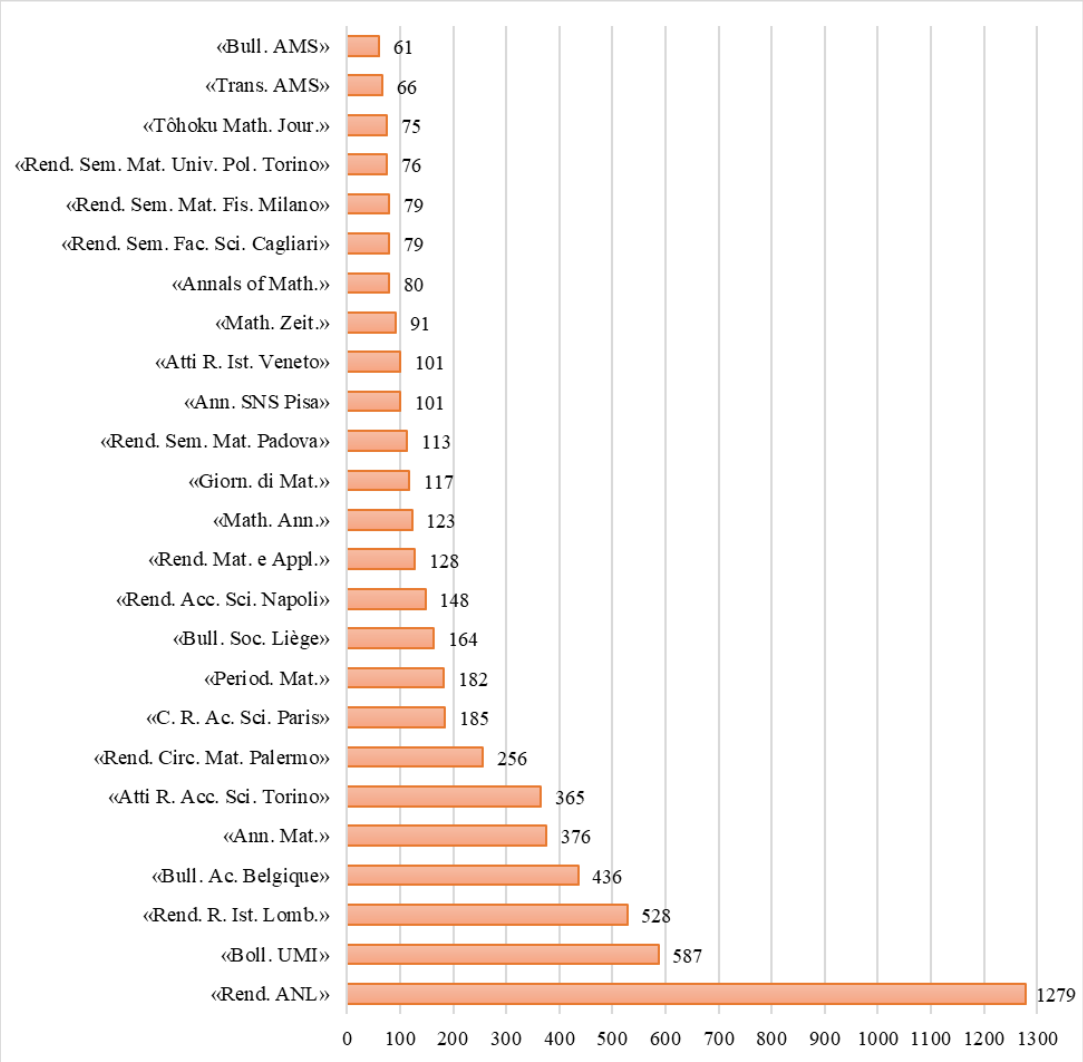


Fig. 11.4. Riviste maggiormente rappresentate, con almeno 60 estratti.

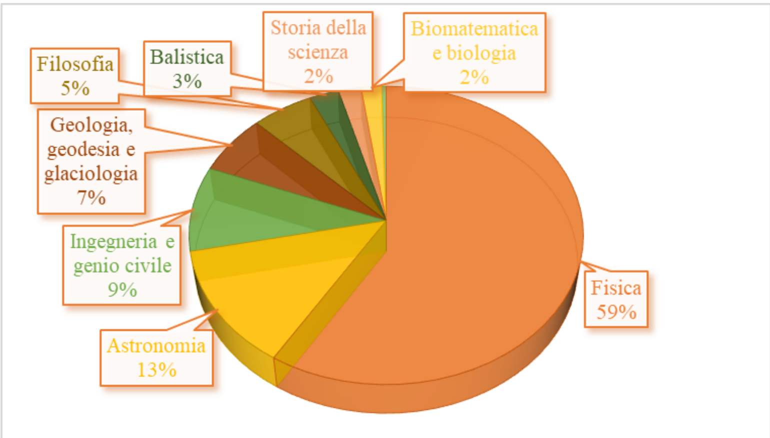


Fig. 11.5. Classificazione tematica del patrimonio Terracini.

La stragrande maggioranza degli opuscoli della miscellanea (oltre il 90% del totale) è di carattere prettamente matematico; gli estratti di altre discipline appartengono a 10 aree del sapere (Fig. 11.5). Mentre è consueta la presenza di lavori di fisica, risulta particolare la buona percentuale di estratti di geologia e geofisica, discipline verso le quali Terracini nutre un certo interesse.[9]

Quello Terracini è un patrimonio autenticamente internazionale. Sui 1078 autori rappresentati,[10] 507 sono stranieri, di 33 nazionalità diverse. Il 95% di essi è europeo (tedeschi, francesi e belgi *in primis*). A livello extraeuropeo spiccano le rappresentanze argentina e americana (67 e 64 autori), seguite da Giappone e Cina, con 25 e 12 matematici rispettivamente (Fig. 11.6).

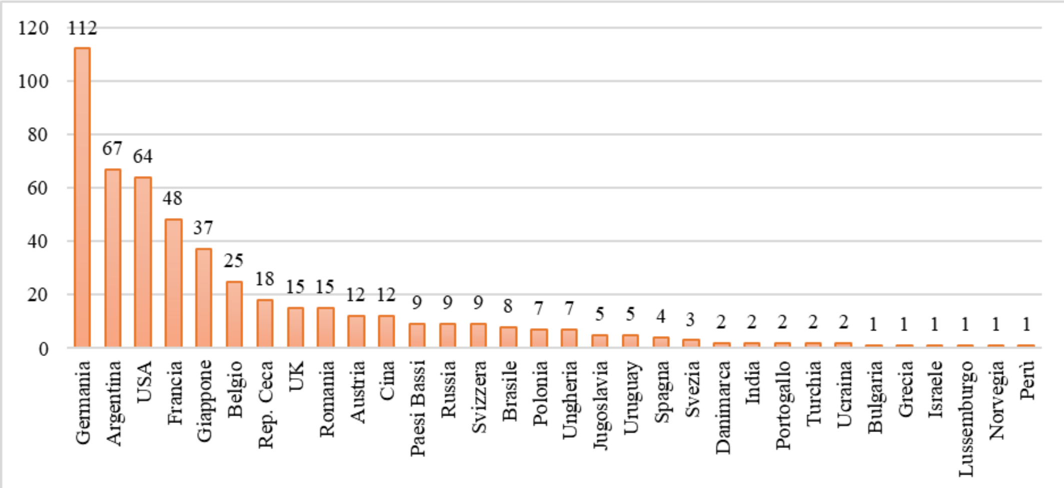


Fig. 11.6. Distribuzione per nazionalità degli autori stranieri.

Quella Terracini non è una miscellanea a indirizzo esclusivamente geometrico: fra gli autori maggiormente rappresentati troviamo sì i grandi nomi della geometria algebrica e proiettivo-differenziale italiana (Bompiani[11], Severi, Fubini…) e internazionale, fra cui il belga Godeaux (l'autore più rappresentato, con quasi 750 estratti) e i giapponesi Takasu (67 opuscoli) e A. Kawaguchi (63), ma anche analisti, algebristi, fisici, cultori di matematiche complementari, ecc. (Fig. 11.6). Moltissimi i matematici torinesi, intendendo con questa dizione studiosi formatisi a Torino, ex studenti, colleghi antichi e recenti di Terracini in Università e al Politecnico (da Fano a Viola), o amici di lunga data, come Tricomi.[12]

---

[9] Cfr., ad esempio, la dedica manoscritta di A. Debenedetti al lavoro intitolato *Probabili relazioni tra cicli glaciali e momenti epirogenici alpini e subalpini* (n. 9504): "A Sandro, con affettuosi ringraziamenti per il contributo! Arturo". Cfr. gli opuscoli, ricchi di dediche e annotazioni, nn. 1216, 1664, 1664bis, 2371, 3143-3146, 3569, 3585, 3650, 3708, 3943, 3944, 4194, 4195, 4329, 4653, 4794, 5323, 5324, 5719, 5775, 5776, 6164, 6165, 6330, 8061-8063, 8303.

[10] Si intendono persone fisiche, ovvero non si comprendono i 9 estratti firmati dai comitati di redazione di riviste o da Università.

[11] Subito dopo la laurea Terracini intrattiene una fitta corrispondenza con Bompiani, con il quale si confronta a proposito di alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale. Cfr. Archivio Acc. XL, *FBo*: A. Terracini a E. Bompiani, Torino 5.2.1913, 4.4.1913, 21.6.1913, 20.7.1913, 3.8.1913; A. Terracini a E. Bompiani, Bologna, febbraio 1913 e marzo 1913; A. Terracini a E. Bompiani, Roma 26.2.1913, 5.3.1913, edite in G. PAOLONI (ed.) 1991, *Il Fondo "Enrico Bompiani"*, Milano, Università Bocconi, pp. 98-106.

[12] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: F. Tricomi a A. Terracini, Pasadena 4.3.1950, 17.6.1950, 21.7.1950; A. Terracini a F. Tricomi, Torino 14.7.1950; F. Tricomi a A. Terracini, Balme (TO) 3.7.1952. Cfr. ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: A. Terracini a F. Tricomi, Torino 5.6.1948, 4.9.1948, .6.12.1949, 6.6.1950, 23.4.1951,

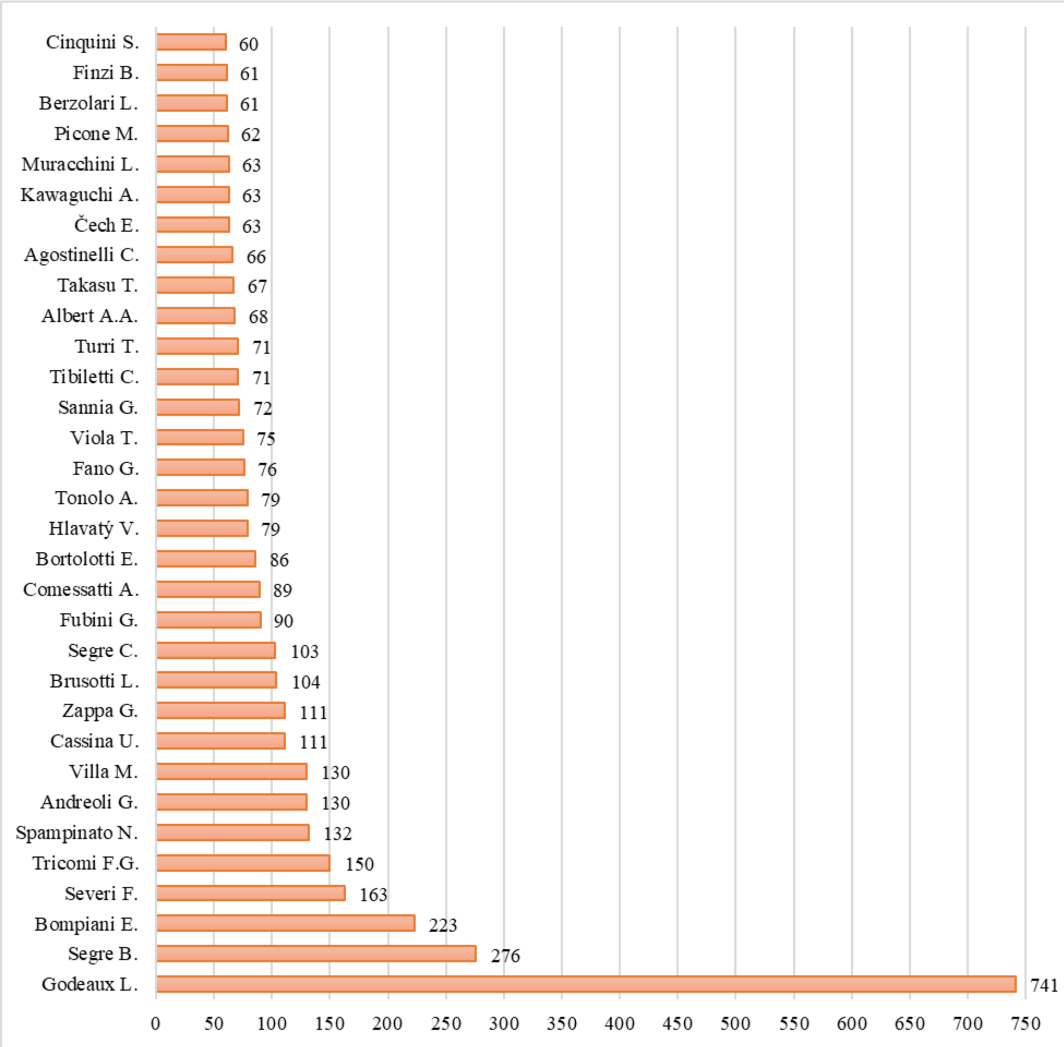


Fig. 11.7. Autori maggiormente rappresentati, con almeno 60 estratti.

L'*authorat* del patrimonio Terracini comprende inoltre ben 122 autrici, per un totale di 539 estratti e 3 volumi di cui almeno uno degli autori è donna (Tab. 11.3 e Fig. 11.8).

Al loro interno vi sono due allieve del gruppo che gravitava attorno a Chisini a Milano tra gli anni Trenta a Quaranta: Cesarina Tibiletti (l'autrice più rappresentata, con ben 71 estratti) e Giuseppina Biggiogero, entrambe specialiste di geometria algebrica.[13] Afferiscono a questo

23.5.1951, 4.6.1951, 5.6.1951 e 26.6.1951; F. Tricomi a A. Terracini, Pasadena 22.11.1949, 3.5.1951, 15.6.1951 e 18.6.1915.

[13] Dopo aver conseguito la laurea nel 1921 sotto la direzione di L. Brusotti, Giuseppina Biggiogero diventa incaricata di Geometria descrittiva e proiettiva al Politecnico di Milano (1924), dove entra in contatto con Chisini. Nel campo della geometria algebrica dà importanti contributi allo studio della forma delle curve algebriche reali che presentano massimi d'inclusione e alla costruzione di curve di diramazione di piani multipli. Cesarina Tibiletti, invece, si laurea nel 1943 con Chisini discutendo una tesi di geometria algebrica, disciplina che rappresenta il *leit-motiv* della sua produzione scientifica fino alla fine degli anni Cinquanta quando inizia a indirizzarsi verso l'algebra. Le sue ricerche principali riguardano la teoria dei piani multipli, la costruzione ed applicazione di trecce algebriche di curve di diramazione; i problemi di intersezione di curve e superficie algebriche; la rappresentazione topologica delle curve di una superficie. Parte dei lavori della Tibiletti sono inviati a Terracini da Chisini nel 1952 per avere una sua valutazione e, di conseguenza, consigliarle se partecipare o meno al concorso per la libera docenza. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: O. Chisini a A. Terracini, Milano 20.5.1952: "Come ti avevo già detto a voce vorrei sapere la tua opinione prima di consigliare la Tibiletti a concorrere […]. A me importa che – se

ambito anche diversi lavori di Margherita Piazzolla-Beloch. Quest'ultima invia regolarmente a Terracini i propri contributi, scambiandosi anche consigli sulle letture da proporre agli studenti che frequentano i loro corsi a Ferrara e a Torino rispettivamente. Ad esempio, nel dicembre del 1950 gli scrive:

> Ch. Collega,
> in plico a parte le invio in omaggio il mio volumetto "Teoria diametrale delle curve algebriche piane" di cui le parlai quando ci siamo visti l'ultima volta, e che Lei disse che avrebbe consigliato agli allievi (Laureati) del corso di perfezionamento e preparazione ai concorsi a cattedra di scuole medie (per gli esami scritti). Le sarei molto grata se volesse ricordarsi di questa sua promessa. Io ho già mantenuto la mia ieri all'inaugurazione del corso analogo che teniamo qui a Ferrara, e di cui la direzione è stata affidata a me, ho consigliato come testo le sue (Fano – Terracini) *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Le mando anche gli estratti di alcune mie recenti Note. […] Io ho pubblicato le mie *Lezioni di Matematiche complementari* in edizione litografata, e sarei molto lieta se potessero essere segnalate agli studenti, anche ai laureati del corso suddetto, per cui è particolarmente adatto, poiché si tratta tutta la materia degli esami di Concorso. Se potrà interessare manderò una copia in omaggio.[14]

Degno di nota è anche il settimo posto di Yoshie Katsurada, allieva di Kawaguchi. Esperta di geometria differenziale, fu la prima donna ad ottenere un dottorato in matematica in Giappone (1950) e a diventare professore ordinario all'Università imperiale di Hokkaido.

Autrici	**Provenienza**	**n. esemplari**
Tibiletti Cesarina	Italia	71
Cibrario Maria	Italia	53
Pastori Maria	Italia	41
Biggiogero Giuseppina	Italia	35
Piazzolla-Beloch Margherita	Italia	21
Roux Delfina	Italia	16
Katsurada Yoshie	Giappone	14
Aliverti Giuseppina	Italia	11
Skof Fulvia	Italia	11
Graiff Franca	Italia	10
Vacca Maria Teresa	Italia	10
Nöther Emmy	Germania	7

Tab. 11.3. Autrici maggiormente rappresentate, con almeno 7 estratti.

Di rilievo è infine la presenza di un nutrito gruppo di scienziate argentine legate alla *Comision Nacional de Energia Atomica*: Alsina Fuertes Fidel, Sonia Nassiff, Olga Brieux de Mandirola, Emma Perez Ferreira e Cecilia Mossin Kotin.[15]

presentata – la Tibiletti ottenga un giudizio ampiamente favorevole così da costituire un incoraggiamento (ed una relativa promessa) per il futuro"; O. Chisini a A. Terracini, Milano 21.6.1952.

[14] Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: M. Piazzolla-Beloch a A. Terracini, Ferrara 8.12.1950.

[15] Cfr. gli opuscoli nn. 5089, 5870-5872, 7597, 8064, 8572, 8572bis, 8642, 8765.

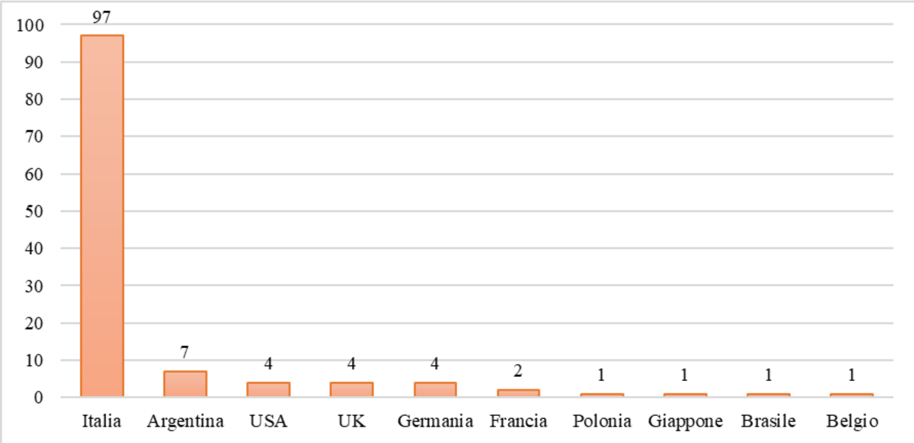


Fig. 11.8. Distribuzione per nazionalità delle autrici.

11.2. Costruzione del patrimonio Terracini

L'arco temporale di stampa degli opuscoli della collezione Terracini va dal 1829 al 1968 (Fig. 11.9), quello dei volumi dal 1808 al 1964. In realtà, però, gli estratti più antichi sono sicuramente stati acquisiti da Terracini in due momenti: durante gli studi liceali e universitari e nel secondo dopoguerra, quando si occupò di storia della matematica. È sicuramente questo il caso del *Traité des propriétes projectives des figures* di Poncelet, un testo di antiquariato che Terracini ricevette in dono dalla madre per la licenza liceale, o della *Mémoire sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'elimination* di Cauchy (Parigi, 1829, estratto n. 1653), acquistata per scrivere il saggio su Cauchy a Torino. Non è escluso che alcuni degli estratti più antichi possano essergli stati donati dai suoi docenti: D'Ovidio, Fano, Fubini, e soprattutto Segre, suo relatore di tesi di laurea.

La biblioteca matematica di Terracini (sia i libri che gli estratti) inizia a costituirsi all'epoca dei suoi studi universitari, incrementandosi con una certa regolarità (Fig. 11.10). I picchi si registrano in concomitanza con le fasi di attività scientifica maggiormente produttive, ovvero gli anni successivi alla Grande Guerra, la decade 1928-1938, e dopo il ritorno dall'Argentina: 359 estratti sono acquisiti dalla laurea al momento della partenza per il fronte (1912-15), 151 solo nel 1921, alla ripresa degli studi a Modena dopo l'esperienza militare, addirittura 345 nel 1935 e oltre 270 nel 1951. I minimi si registrano negli anni del primo e secondo conflitto mondiale, con appena 56 opuscoli nel 1917 e 84 estratti nel 1944. Si assiste poi a un decremento, anch'esso del tutto naturale, a seguito del pensionamento.

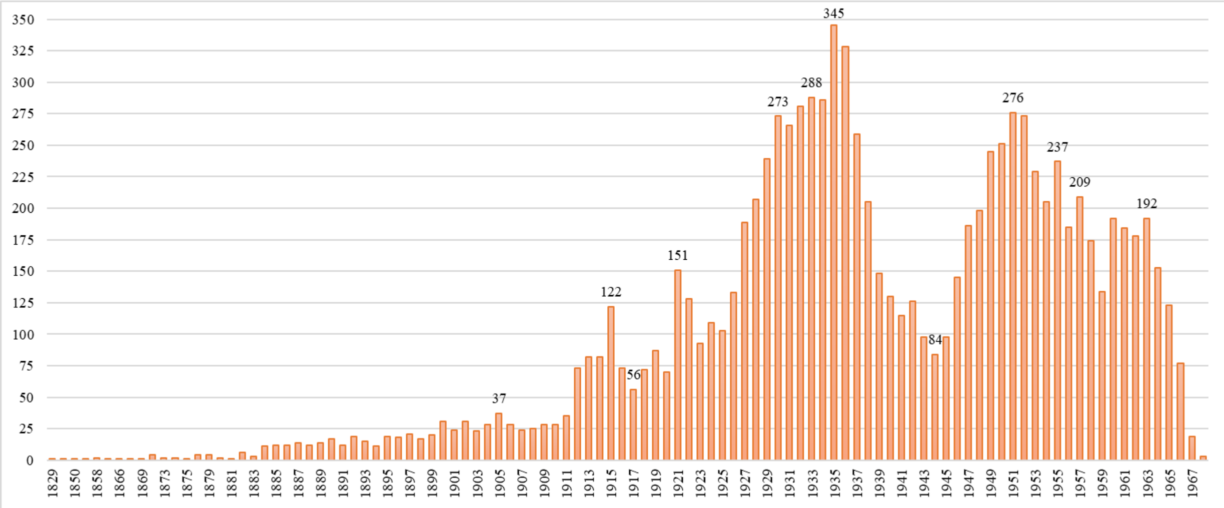


Fig. 11.9. Andamento temporale delle acquisizioni.

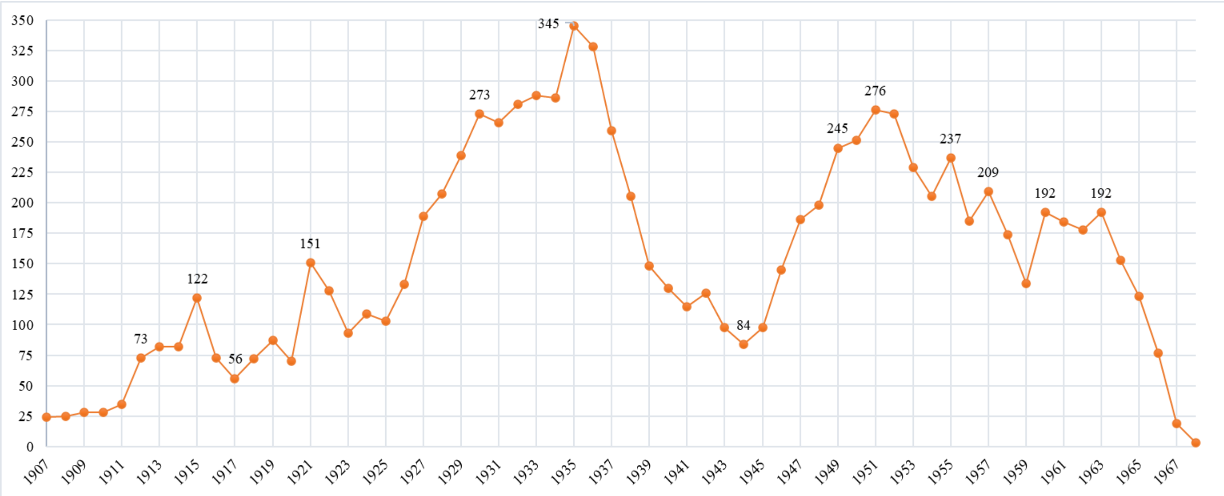


Fig. 11.10. Timeline della miscellanea Terracini dal 1907 al 1968.

11.3. 1907-1925: tra Torino, Modena e Catania

Nato a Torino il 19 ottobre 1889 da Eugenia Levi e Benedetto Terracini, fin dall'adolescenza Alessandro dimostra una speciale passione per la matematica risolvendo 92 problemi proposti su «Il Pitagora», «Mathesis» e sul «Periodico di matematiche».

Conseguita la maturità con licenza d'onore, nell'autunno del 1907 si iscrive al corso di laurea in Matematica dell'Università di Torino dove ha docenti illustri (D'Ovidio, Fano, Peano, …) e dove incontra i suoi due veri 'maestri': Fubini, che lo avvia alla ricerca in geometria proiettivo-differenziale e C. Segre, del quale segue tre corsi di Geometria superiore e che è relatore della sua tesi di laurea sulla teoria delle varietà luoghi di spazi.

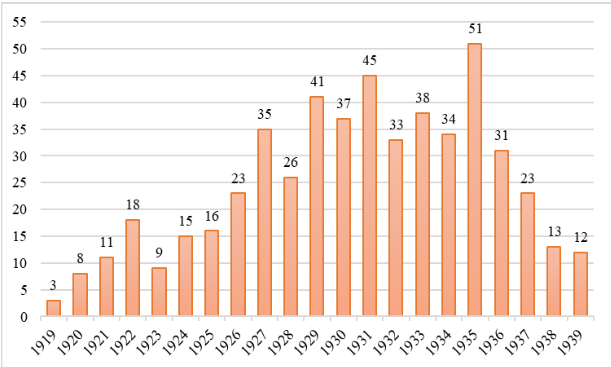
Addottoratosi con lode il 5 luglio 1911 e conseguito il diploma di Magistero, intraprende la carriera accademica in qualità di assistente di Fano sulla cattedra di Geometria proiettiva (novembre 1911) e inizia a sviluppare ricerche sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà in relazione con le singolarità che essi possono presentare, ricerche che è costretto ad interrompere temporaneamente per la chiamata alle armi, come ufficiale nella 22ª compagnia minatori di stanza a Gorizia, Gemona e infine a Breganze. Non abbandona però l'attività matematica, anzi: durante una licenza dal fronte, consegue la libera docenza, sviluppa una variante a un periscopio inserito nella linea fortificata intorno a Gorizia, si dedica con Picone alla compilazione di innovative tavole di tiro per l'artiglieria e dimostra una formula legata alla compilazione delle tavole di tiro da montagna della quale va particolarmente fiero.[16]

Un primo elemento di interesse relativo a questo periodo che affiora dall'analisi della miscellanea Terracini riguarda le riviste di scienze applicate (fisica, ingegneria, ecc., quali «L'Elettrotecnica» e «L'Ingegnere», …), assenti nel patrimonio di Segre e in minor misura rappresentate in quello Fano: Terracini si è probabilmente avvicinato alla loro lettura proprio all'epoca del suo impegno militare al fronte, quando era stato incaricato di compiere ricerche di balistica.

Terminata la guerra, Terracini torna a Torino dove tiene il corso di integrazione alle lezioni di Geometria superiore di Segre fino al 1919, quando si trasferisce a Modena, come incaricato di Analisi algebrica. Rientrato a Torino nel 1923, riprende il ruolo di assistente di Fano all'Università ed assume l'incarico di Geometria analitica al Politecnico.

Nel febbraio del 1925, risultato vincitore di due concorsi a cattedra, uno a Cagliari e l'altro a Catania, sceglie quest'ultimo ateneo, che vantava una buona tradizione scientifica e che forniva un ambiente stimolante per la ricerca grazie al Circolo Matematico creato nel 1921.

Dalle raccolte librarie di Terracini emerge un secondo aspetto degno di rilievo che tocca il tema dei contatti che egli stringe con i luoghi e gli ambienti in cui vive e lavora (Torino, Modena, Catania prima, Tucumán poi). Dal 1919 la collezione Terracini si arricchisce infatti di estratti di riviste modenesi (ben 522 opuscoli) e dal 1924 di pubblicazioni siciliane (in primo luogo le «Note e Memorie del Circolo di Catania» e le «Esercitazioni Matematiche», per un totale di quasi 200 estratti). Gli scambi con queste comunità di ricerca travalicano, peraltro, i periodi effettivamente trascorsi da Terracini a Modena e Catania poiché i suoi ex colleghi continuano a inviargli regolarmente i loro lavori – e quelli dei loro studenti – fino alla parentesi argentina (Fig. 11.11).



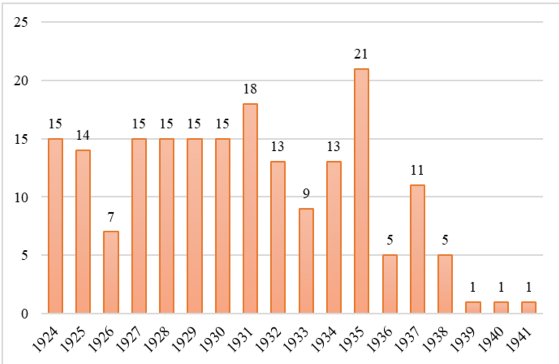


Fig. 11.11. Acquisizioni dalle aree modenese (sx.) e siciliana (dx.).

[16] Cfr. M. PICONE 1918, *Tavole di tiro da montagna. Bozze in esperimento*, f. IB, *Teoria e metodi di compilazione*, Comando 6ª Armata Artiglieria, s.l., n. 12, p. 43. Terracini resterà per tutta la vita in rapporti amichevoli con Picone, come testimoniato anche dall'opuscolo che quest'ultimi gli invia nel 1953 (n. 6807) con dedica "Al mio caro Sandro, ricordo di M. Picone". O, ancora, cfr. estratto n. 2245 accompagnato dalla frase "Con un formidabile abbraccio dell'a. M. Picone". Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: M. Picone a A. Terracini, Roma 14.4.1949 e 10.4.1950.

11.4. 1925-1938: tra ricerca e insegnamento all'ateneo torinese

Alla fine del 1925 Terracini è stabilizzato a Torino sulla cattedra di Geometria analitica, che terrà fino all'autunno del 1938. Saranno, questi, tredici anni estremamente produttivi per Terracini, che pubblicherà una quarantina di importanti lavori, fra cui spiccano il saggio *Sul significato geometrico della normale proiettiva* («Rend. ANL» 3, 1926, pp. 584-591), in cui estende alle rette normali affini e proiettive l'usuale definizione di retta normale metrica su un piano, e l'Appendice III *Alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi* al trattato di Fubini e Čech *Geometria proiettiva differenziale* (Bologna, Zanichelli, II, 1927, pp. 729-769) nella quale, pur avvalendosi di sistemi di equazioni differenziali, accompagna ogni risultato analitico con una chiara interpretazione geometrica, al fine di dimostrare come i procedimenti analitico e sintetico si possano integrare e illuminare a vicenda, suggerendo anche estensioni e generalizzazioni. Di pari rilievo sono i suoi contributi sulle congruenze W (1927-28) e le memorie riguardanti il concetto di ordine di approssimazione nell'incidenza di due piani o spazi (1936-38). Emblematiche del raffinato talento didattico sono, infine, le sue *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (Torino, Paravia, 1929, 1940^2, 1948^3, 1957^4), scritte in collaborazione con Fano.

In questi anni, l'esame del patrimonio Terracini presenta i fenomeni più interessanti a livello di circolazione matematica internazionale. In primo luogo, la cronologia della sua costruzione restituisce pienamente il variare di scala di diffusione e di circolazione del sapere dal primo Novecento in avanti. Il *corpus* di titoli rappresentato è infatti transnazionale.[17] Sul versante asiatico, per la prima volta appaiono all'interno della raccolta di un geometra italiano opuscoli provenienti non solo da India e Giappone, ma anche dalla Cina (43 estratti), cui si aggiungerà nel secondo dopoguerra la Turchia con la «Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul». Con i geometri cinesi (J. Kanitani, B. Su, M. Kimpara e M. Tsuboko in particolare) Terracini condivide un forte interesse per le questioni di geometria differenziale.[18] La maggiore novità è però rappresentata dall'ingresso sulla scena internazionale di centri editoriali africani. *In primis* il Sud Africa, all'epoca sotto il dominio britannico, con 14 estratti pubblicati a Cape Town tra il 1903 e il 1929. Dopo il secondo conflitto mondiale inizieranno anche ad arrivare nella miscellanea Terracini alcuni opuscoli delle «Publications scientifiques de l'Université d'Alger» e delle «Publications de l'Université de l'état à Elisabethville» pubblicate in Algeria e Congo, di amministrazione francese e belga rispettivamente.

Del tutto nuova è inoltre la sfera di circolazione del sapere dell'ex Impero austro-ungarico. Per quanto riguarda le pubblicazioni provenienti dai paesi dei Balcani e dalle nazioni sorte in seguito alla dissoluzione dell'Impero austro-ungarico (Fig. 11.12), che Terracini acquista o riceve regolarmente, occorre tenere presente che negli anni 1926-1938 «Mathematica Cluj»,

---

[17] Questa tendenza si consolida nel dopoguerra quando Terracini continua a inviare e ricevere estratti da matematici di tutto il mondo. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Dalla Volta a A. Terracini, Roma, dicembre 1949; C. Birindelli a A. Terracini, Roma 17.5.1949; L. Brusotti a A. Terracini, Pavia 20.7.1950; M. Marden a A. Terracini, Madison 9.11.1950; W. Ströher a A. Terracini, Vienna 30.11.1950; M. Piazzolla-Beloch a A. Terracini, Ferrara 18.12.1950; G. Loria a A. Terracini, Genova 19.1.1951; L. Brusotti a A. Terracini, Pavia 20.1.1951; M. Villa a A. Terracini, Bologna 20.1.1951; G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 19.9.1951; J. Marcus a A. Terracini, Botoşani 24.9.1951; J. Levine a A. Terracini, Raleigh 26.3.1952; C. Fusa a A. Terracini, Tregnago (VE) 30.6.1952.

[18] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: B. Su a A. Terracini, Hangchow 20.3.1949. Cfr. gli estratti nn. 2061, 2104, 2105, 2351-2353, 2739, 2971, 2972, 3382, 3383, 3386, 3387, 3472, 3484, 3699, 3700, 4005-4007, 4060, 4061, 4066, 4332, 4353, 4405, 4461, 4585-4587, 4655, 4656, 5224, 5566, 5572, 7990-7993, 8025, 8209, 8218, 8219.

così come altre riviste serbe, cecoslovacche, polacche e ungheresi erano ottimamente posizionate nel *ranking* per la ricerca in geometria. A inviare i loro volumi e articoli in omaggio a Terracini sono poi i parecchi autori – da C. Stephanos a Čech (63 estratti) – che hanno trascorso un soggiorno di studio a Torino o che sono in contatto con Segre e la sua Scuola.[19]

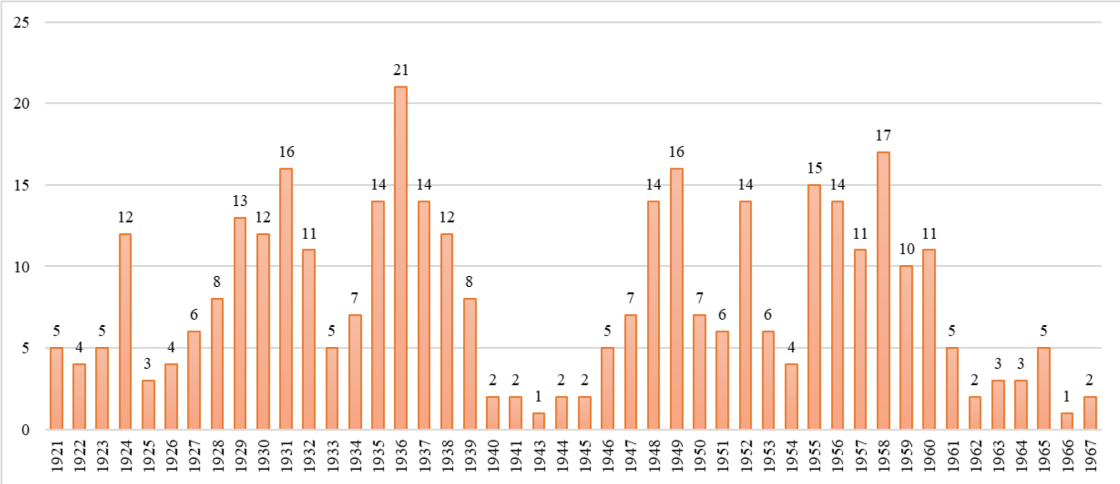


Fig. 11.12. Acquisizioni dai Balcani e dai territori dell'ex Impero asburgico.

11.5. 1939-1947: l'Argentina come 'spazio di sopravvivenza intellettuale'

Dispensato dal servizio a seguito delle leggi razziali, espulso da tutte le accademie e società scientifiche di cui era membro, Terracini trascorre l'inverno del 1939 in una sorta di 'volontario isolamento', adoperandosi per la riorganizzazione della scuola ebraica di Torino e pubblicando sotto falso nome, grazie a Tricomi, un volume di *Algebra per i licei* (Messina, Principato, 1940). Incapace di tollerare la perdita dei diritti e l'emarginazione dal mondo accademico, è fra i primi ad andare alla ricerca di uno spazio di sopravvivenza intellettuale all'estero, negli USA, nel Regno Unito o in America Latina. Costretto a sfruttare gli spiragli di politiche migratorie sempre più selettive, approda infine a Tucumán nell'ottobre del 1939. Per lui è l'inizio di una nuova fase di attività scientifica, come organizzatore culturale e ambasciatore delle tradizioni matematiche italiane in Argentina.

Oltre ad un'intensa attività di ricerca incentrata sulla cosiddetta geometria delle equazioni differenziali (studi sulle linee integrali di equazioni del terz'ordine e loro sistemi, teoria delle equazioni F e G), Terracini tiene corsi di Matematiche superiori e di Metodologia per il professorato; fonda e dirige con F. Cernuschi la «Revista de Matematicas y Fisica Teorica» (1940-), che ospita contributi di P. Erdös, Einstein e Cartan; coordina e tiene cicli di conferenze su temi di carattere geometrico ed epistemologico e assume la presidenza dell'Unión Matemática Argentina. Il suo magistero trasforma Tucumán in una sorta di *Little Italy* della matematica italiana in esilio.

Ulteriori piste di indagine aperte dall'analisi del patrimonio Terracini concernono, da una parte, le dinamiche della circolazione del sapere tra Italia, Europa e Sud America negli anni 1938-1945 e, dall'altra, l'esportazione di quel modello di biblioteca – tipico della Scuola

[19] Cfr., ad esempio, BSMT, *FFa*, lettere. 21: C. Stephànos a G. Fano, Atene 18.1.1931; lettere. 25: E. Beke a G. Fano, Budapest 19.6.1937. Cfr. ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: E. Čech a A. Terracini, Praga 4.7.1955; A. Terracini a E. Čech, Torino 27.7.1955.

italiana – come centro non solo di conservazione e fruizione della conoscenza matematica ma anche della sua costruzione.

Appena insediatosi a Tucumán, infatti, Terracini creerà sostanzialmente dal nulla una biblioteca matematica presso l'Universidad Nacional. E ancora: approfittando della presenza di Birkhoff e di M.H. Stone a Tucumán nell'autunno del 1942, farà loro presenti le difficoltà di quegli studiosi che vivendo lontani dai centri di studio e dalle grandi biblioteche sono costretti a dipendere dall'aiuto dei colleghi e degli amici per portare avanti la propria attività di ricerca. Di qui la proposta (arenatasi sul nascere a causa della guerra) di istituire un *Comité central para informaciones bibliográficas matemáticas*.

Inoltre, in questa cornice storica, la composizione del patrimonio Terracini va incontro a due sostanziali cambiamenti. Da un lato, si registra un afflusso consistente di estratti di giornali fino ad allora del tutto assenti o presenti molto sporadicamente come quelli editi principalmente in Argentina, ma anche negli stati neutrali quali Svizzera (73 estratti), Spagna e Portogallo (59 opuscoli complessivamente), Città del Vaticano (49) e Svezia (31). Dall'altro lato, la geografia delle acquisizioni è radicalmente mutata: le pubblicazioni del mondo anglosassone e dell'America latina diventano numerosissime (Fig. 11.13). La miscellanea Terracini si arricchisce così non solo dei lavori pubblicati sui periodici argentini e brasiliani, ma anche di estratti di riviste uruguayane (quali le «Publicationes del Instituto de Matematica y Estadistica» di Montevideo), peruviane («Actas de la Academia Nacional de Ciências Exactas, Fisicas y Naturales de Lima») e portoricane («Publicación del Centro Estudiantes de Ingeniería de San Juan»). Con il rientro a Torino non si interromperanno i legami instaurati con i matematici sudamericani con i quali, anzi, Terracini manterrà una fitta rete di scambio di notizie e letture.[20]

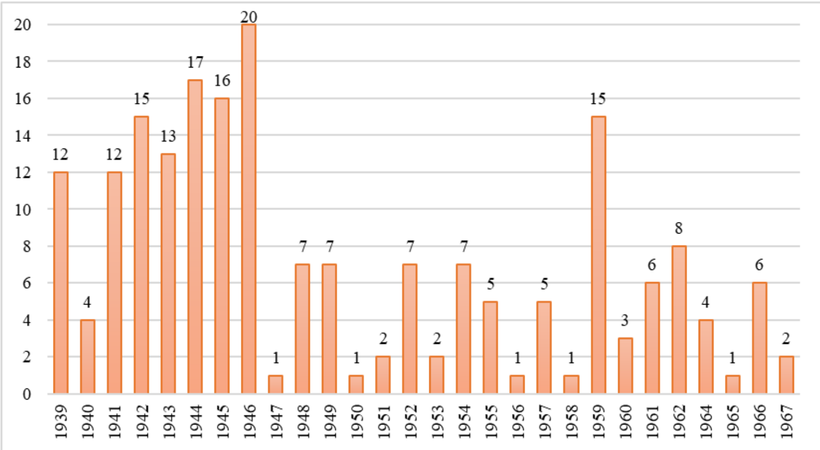


Fig. 11.13. Acquisizioni dal Sud America.

[20] Oltre a ricevere e inviare lavori matematici, Terracini riceve costanti aggiornamenti sulla situazione universitaria in Argentina, suggerendo ai colleghi argentini i nomi di alcuni matematici italiani per ricoprire le cattedre vacanti e aiutando questi ultimi a trovare una collocazione nel Nuovo Continente. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: F. Herrera a A. Terracini, Tucumán 5.2.1948, 14.3.1948, 18.3.1948; C. Protti a A. Terracini, Mortara (PV), 4.1.1949; A. Rollero a A. Terracini, Genova 24.1.1949; J. Würschmidt a A. Terracini, Tucumán 16.2.1949; F. Cernuschi a A. Terracini, Montevideo 19.5.1949; F. Herrera a A. Terracini, Tucumán 21.5.1949; S. Freiberg a A. Terracini, Tucumán 7.7.1949; M. Valentinuzzi a A. Terracini, Buenos Aires 10.8.1949; F. Herrera a A. Terracini, [s.l. ma Tucumán] 15.9.1949; J. Würschmidt a A. Terracini, Tucumán dicembre 1949; R.L. Carezani a A. Terracini, Tucumán 3.4.1950; R. Pastor a A. Terracini, Roma 1.11.1950; A. Gonzalez Dominguez a A. Terracini, Buenos Aires 4.3.1952; F. Herrera a A. Terracini, Tucumán 20.4.1952; A. Terracini a G. Sansone, Torino 18.5.1953; A Terracini a R. Pastor e P. Pi Calleja, Torino 4.12.1953; P. Pi Calleja a A. Terracini, La Plata 14.12.1953.

11.6. 1948-1968: un'intensa attività istituzionale al rientro in Italia

Reintegrato nei ruoli, Terracini fa ritorno a Torino nel febbraio del 1948 e riprende il filo interrotto della sua traiettoria scientifica e professionale. Ricopre la cattedra di Geometria I e di Geometria superiore fino al collocamento fuori ruolo nel 1963. Contemporaneamente assume la direzione della BSMT, prodigandosi nella ricostruzione del suo patrimonio e nel suo rilancio come centro di ricerca.[21]

A partire dal 1952, affianca alla ricerca geometrica studi di carattere storico-matematico, pubblicando fra l'altro un pregevole saggio sul soggiorno di Cauchy a Torino (1957). Terracini inizia quindi a occuparsi di storia e filosofia della scienza solo dopo il ritorno in Italia nel 1948, motivo per cui non stupisce che solo a partire da questa data diventi significativa la consistenza di «Isis», «Osiris», «Archeion», «Scripta mathematica», ecc. all'interno della sua miscellanea.[22] Analogamente – e concordemente al suo profilo professionale – fino al 1924 è esiguo il numero di estratti di giornali didattici e intermediari («Bollettino di Matematica», «Bollettino della Mathesis», …) e in generale di testi di giornalismo matematico a carattere elementare, assai numerosi invece nel patrimonio Segre. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che Terracini, pur essendo un docente di grande talento didattico sin dall'inizio della sua carriera, sviluppa un interesse specifico per le questioni metodologiche e per la formazione dei professori solo dopo le persecuzioni razziali e l'emigrazione in Argentina.

Dagli anni Cinquanta, Terracini dedica la maggior parte del suo impegno a compiti istituzionali, ricoprendo cariche di prestigio a livello nazionale e internazionale. Convinto da Berzolari ad accettare il reintegro fra i membri dell'Unione Matematica Italiana, dalla quale era stato espulso nel 1938, ne è vicepresidente (1952-58) e presidente per i due trienni successivi.[23] È inoltre eletto membro del comitato esecutivo del *Groupement des mathématiciens d'expression latine* (1955), del consiglio direttivo dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica (1958), delegato italiano all'International Mathematical Union e accademico linceo (corrispondente dal 1948, nazionale dal 1960). Negli anni Sessanta crea i Gruppi di Seminari e Istituti matematici italiani, che costituiscono uno dei motori propulsori della ricerca scientifica italiana.

Insignito della medaglia d'oro dei Benemeriti della Scuola e della Cultura, nominato professore emerito nel 1964, Terracini si spegne a Torino il 2 aprile 1968 pochi giorni dopo che erano stati dati alle stampe la sua autobiografia *Ricordi di un matematico*, e i due volumi di *Selecta* delle sue 180 pubblicazioni apparse fra il 1909 e il 1968.

---

[21] Sulla direzione di Terracini della BSMT, cfr. il CAPITOLO 10 di questa tesi.

[22] Riguardo l'interesse di Terracini per la storia maturato in questi anni, cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Loria a A. Terracini, Genova 12.3.1949; F. Sicardi a A. Terracini, Mondovì 13.4.1949; G. Loria a A. Terracini, Genova 3.5.1949; G. Loria a A. Terracini, Genova 24.8.1951. Cfr. ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: G. Loria a A. Terracini, Genova 21.8.1951. Oltre a Cauchy, Terracini è interessato anche alle figure di Newton e Lagrange.

[23] Sulla vicepresidenza di Terracini dell'UMI cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: O. Chisini a A. Terracini, Milano 13.3.1952; A. Terracini a O. Chisini, Torino 15.3.1952; O. Chisini a A. Terracini, Milano 19.3.1952; A. Terracini a M. Picone, Torino 29.3.1952; O. Chisini a A. Terracini, Milano 30.3.1952; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 30.3.1952; C. Miranda a A. Terracini, Napoli 31.3.1952; F. Severi a A. Terracini, Roma 31.3.1952; B. Segre a A. Terracini, Roma 1.4.1952; B. Segre a F.G. Tricomi, Roma 1.4.1952; A. Pignedoli a A. Terracini, Bologna 1.4.1952; L. Brusotti a A. Terracini, Bologna 1.4.1952; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 10.4.1952; G. Fano a A. Terracini, Washington 24.5.1952.

11.7. Uno sguardo al patrimonio della 'seconda generazione' Scuola italiana

Nell'ottica di gettare maggior luce sulla formazione, evoluzione e cristallizzazione del patrimonio geometrico italiano, un primo elemento di rilievo riguarda l'apprendistato alla ricerca di Terracini, che rivendica in molteplici occasioni di essersi formato alla Scuola italiana di geometria algebrica, ponendo esplicitamente tutta la prima fase della sua attività e produzione nel solco di quella tradizione. Non è, questa, una formula retorica o di legittimazione ex-post. L'eredità dei maestri torinesi (Segre, Fano e Fubini), delle letture che loro prediligevano e che suggerivano nei corsi universitari, nella fase di stesura delle tesi di laurea e di avviamento alla ricerca originale, trova infatti saldissimo riscontro nella composizione del patrimonio Terracini relativo agli anni 1908-1919. I periodici delle accademie (Lincei, Accademie delle Scienze di Torino, Istituto Lombardo, Istituto Veneto) emergono quali principali vettori di acculturazione matematica, ancor più degli «Annali di matematica pura e applicata» e dei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo». Solo dopo la Grande Guerra essi cederanno il testimone, per così dire, al «Bollettino dell'UMI», agli «Annali della Scuola Normale Superiore» e ai Rendiconti dei vari Seminari Matematici istituiti dalle Università di Roma, Padova, Torino, Cagliari e Milano. Singolarmente poco presenti, per contro, i giornali per studenti, benché la testimonianza autobiografica voglia che Terracini si sia avvicinato al mondo della matematica prima del diploma, cimentandosi nella risoluzione di problemi e questioni proposte proprio da questo tipo di riviste.

L'esame della miscellanea e della biblioteca conduce però anche a ridimensionare il carattere filo-germanico della Scuola italiana di geometria, al punto da mettere in discussione anche la stessa influenza di Klein sugli allievi della seconda generazione di questo team di ricerca. Alla luce di un raffronto con i patrimoni Segre e Fano, si deduce con chiarezza che i parametri di riferimento della cultura dei giovani geometri italiani (Terracini, ma lo stesso si potrebbe dire per B. Segre) sono abbastanza lontani da quelli dei loro mentori.[24] Oltre ai «Mathematische Annalen» e ai «Mathematische Zeitschrift», di cui si è già detto, anche gli «Acta Mathematica», autentico *point de répère* per Segre e – in parte – per Fano, sono una fonte tutto sommato marginale per Terracini. Per contro, dagli anni Venti in poi, le direttrici della sua attività di ricerca si delineano sempre più tramite suggestioni e stimoli esteri: belgi (le pubblicazioni dell'Accademia Reale e della Società Reale delle Scienze di Liegi sono innumerevoli, grazie ai contatti con Errera e Godeaux)[25] e statunitensi *in primis*.

Per quanto riguarda le diverse aree della matematica, la miscellanea Terracini riflette il graduale spostamento degli interessi di ricerca dalla geometria algebrica alla geometria differenziale, disciplina il cui numero di estratti dopo gli anni Trenta inizia a superare quello di tutte le altre.[26] La crescente attenzione verso questa branca della geometria è testimoniata anche grande impegno profuso da Terracini nell'organizzazione del Convegno internazionale di

[24] Cfr. LUCIANO – SCALAMBRO 2020b, *cit.*, p. 288.

[25] I contatti con i centri di ricerca del Belgio si rafforzano nel dopoguerra. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Errera a A. Terracini, Parigi 3.1.1949; A. Errera a A. Terracini, Bruxelles 29.6.1950; A. Errera a A. Terracini, Roma 18.12.1951; A. Terracini a L. Godeaux, Torino 5.12.1953; L. Godeaux a A. Terracini, Liège 9.12.1953. Cfr. ASUT, *Fondo Corrispondenza BSMT*: A. Terracini a L. Godeaux, Torino 22.12.1952.

[26] Tra l'altro, Terracini è invitato da C. Ehresmann a tenere una relazione al Colloque International de Géométrie différentielle di Strasburgo (1953). Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: C. Ehresmann a A. Terracini, Strasburgo 5.3.1953.

Geometria differenziale nel 1953.[27] Svoltosi dal 20 al 26 settembre a Venezia, Padova, Pisa e Bologna, esso rappresenta per Terracini anche un'occasione per consolidare le relazioni con i geometri stranieri e per tenersi aggiornato sui più recenti sviluppi della disciplina a livello mondiale.[28]

Pur occupando sempre una percentuale esigua sui lavori totali, nella raccolta di opuscoli di Terracini aumenta il numero di estratti di topologia: si spazia dagli scritti degli anni Trenta di Blaschke ai contributi di topologia differenziale di Bompiani, dagli opuscoli firmati da G. Nagy o inviati dai connazionali come Bassi (21 estratti),[29] Galafassi, Zappa e E. Visentini agli importanti lavori degli anni Sessanta di Lorenzo Calabi (22 pezzi), Aldo Adreotti (26, due dei

---

[27] BSMT, *FTe*, Carte Terracini: G. Sansone a A. Terracini, Firenze 28.5.1953; A. Terracini a G. Sansone, Torino 2.6.1953; G. Sansone a E. Bompiani, Firenze 5.6.1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Padova 19.6.1953; E. Togliatti a A. Terracini, Genova 20.6.1953; A. Terracini a G. Sansone, Torino 23.6.1953; A. Terracini a G. Scorza-Dragoni, Torino 23.6.1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Padova 25.6.1953; A. Terracini a E. Togliatti, Torino 29.6.1953; G. Sansone al CNR, Firenze 26.6.1953; G. Sansone al Ministero degli Esteri Direzione Affari Culturali, [s.d., s.l.]; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini e G. Sansone, Padova 2.7.1953; G. Scorza-Dragoni a G. Sansone, Padova 4.7.1953; A. Terracini a E. Togliatti, Torino 5.7.1953; A. Terracini a G. Scorza-Dragoni, Torino 5.7.1953; A. Terracini a G. Sansone, Torino 5.7.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 6.7.1953; E. Togliatti a A. Terracini, Bardonecchia 7.7.1953; G. Sansone a C. Cattaneo, F. Cecioni, S. Cherubino, G. Cimmino, G. Dantoni, S. Faedo, D. Graffi, G. Grioli, O. Lazzarino, U. Morin, A. Pignedoli, G. Scorza-Dragoni, A. Terracini, A. Tonolo, M. Villa, Firenze 8.7.1953; M. Villa a A. Terracini, Riccione 15.7.1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Padova 16.7.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 17.7.1953; G. Scorza a A. Terracini, Padova 18.7.1953; A. Terracini a G. Sansone, Courmayeur 19.7.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 19.7.1953; M. Villa a A. Terracini, Bologna 21.7.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 28.7.1953; A. Terracini a E. Togliatti, Courmayeur 30.7.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 30.7.1953; E. Togliatti a A. Terracini, Courmayeur 31.7.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 1.8.1953; S. Cherubino a G. Sansone, G. Scorza, A. Terracini, M. Villa, Pisa 3.8.1953; A. Terracini a E. Togliatti, Courmayeur 3.8.1953; G. Sansone a G. Bouligand, [s.l.] agosto 1953; G. Sansone a E.T. Davies, [s.l.] agosto 1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Padova 4.8.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 5.8.1953; S. Cherubino a G. Sansone, G. Scorza-Dragoni, A. Terracini, A. Tonolo, M. Villa, Pisa 5.8.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 6.8.1953; A. Terracini a G. Scorza-Dragoni, Courmayeur 7.8.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 7.8.1953; A. Terracini a S. Cherubino, G. Sansone, G. Scorza-Dragoni, M. Villa, Courmayeur 9.8.1953; G. Sansone a A. Terracini, Vallombrosa 10.8.1953; A. Einstein a G. Sansone, Princeton 19.7.1953; G. Sansone a A. Einstein, Firenze 12.8.1953; S. Cherubino a G. Sansone, G. Scorza-Dragoni, A. Terracini, M. Villa, Pisa 14.8.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 14.8.1953, 15.8.1953, 19.8.1953; A. Terracini a S. Cherubino, G. Scorza-Dragoni, G. Sansone, Courmayeur 22.8.1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Campiglio 25.8.1953; G.Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, A. Tonolo, M. Villa, Campiglio 27.8.1953; A. Tonolo a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 27.8.1953; A. Terracini a G. Scorza-Dragoni, Courmayeur 29.8.1953; A. Terracini a G. Sansone, Courmayeur 29.8.1953; A. Terracini a S. Cherubino, G. Sansone, G. Scorza-Dragoni, A. Tonolo, M. Villa, Courmayeur 29.8.1953; G. Scorza-Dragoni a E. Bompiani, G. Sansone, A. Terracini, Padova 1.9.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 2.9.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 2.9.1953; D. Graffi a A. Terracini, S. Vito, 3.9.1953; G. Scorza-Dragoni a A. Terracini, Padova, 6.9.1953; A. Terracini a S. Cherubino, M. Villa, Torino 8.9.1953; S. Cherubino a A. Terracini, Pisa 9.9.1953; G. Scorza-Dragoni a S. Cherubino, L. Onofri, G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, Padova 13.9.1953; A. Andreotti a A. Terracini, S. Pellegrino al Cassero (PT), 17.9.1953; G. Sansone a A. Terracini, Firenze 17.10.1953.

[28] Cfr. *Notizie*, «Boll. UMI» (3) 8, 1953, pp. 351-355. Terracini conserva nella miscellanea opuscoli della maggior parte dei relatori in questa occasione (29 su 41). Fanno eccezione soltanto P. Finsler, W.V.D. Hodge, H. Hopf, W. Suess, A.G. Walker, W. Barthel, E. Kähler, W. Fenchel, G. Rund, T.H. Willmore, A.D. Alexandrov, W. Klingenberg.

[29] Riguardo l'invio dei lavori di Bassi dal Brasile cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: A. Bassi a A. Terracini, Niteroi 6.6.1951, 15.5.1952, 19.10.1952.

quali in collaborazione con l'indiano R. Narasimhan) e Shiing-Shen Chern (13) che gettano le basi della moderna geometria algebrica e differenziale.

Nonostante sia composta per il 46% da opere italiane, la biblioteca Terracini assume una dimensione extraeuropea, con volumi che arrivano dall'Asia (Cina e India) e dalle Americhe (Fig. 11.14). Di particolare rilievo sono gli 11 volumi sudamericani, editi in Argentina ma anche in paesi non rappresentati all'interno della miscellanea quali Messico e Colombia (Tab. 11.4). Nonostante la presenza di ben 9 centri editoriali, la Germania occupa solo il terzo posto per numerosità di volumi che rappresentano appena il 17% del totale (contro il 29% della biblioteca Fano).

Nazione	**n. centri editoriali**	**n. volumi**
Italia	21	242
Francia	2	105
Germania	9	89
UK	3	19
USA	6	19
Argentina	2	11
Belgio	3	9
Spagna	3	8
Romania	1	4
Città del Vaticano	1	3
Messico	1	2
Colombia	1	1
Danimarca	1	1
Finlandia	1	1
Giappone	1	1
India	1	1
Norvegia	1	1
Paesi Bassi	1	1
Polonia	1	1
Svezia	1	1

Tab. 11.4. Composizione della biblioteca Terracini.

Fig. 11.14. Cartografia mondiale della biblioteca Terracini.

11.8. La collaborazione tra Fano e Terracini nelle *Lezioni di geometria*

Frutto della proficua collaborazione tra Fano e Terracini a Torino sono le *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, pubblicate nel 1929 presso la casa editrice Paravia. Nel 1940 il volume ebbe una seconda edizione cui fece seguito, dopo la ristampa del 1948, una terza versione nel 1957, aggiornata da Terracini.[30] L'opera fu ampiamente apprezzata in Italia (Conforto, De Finetti, …) e all'estero (Godeaux, Struik, J. Favard, F. Marcus) per la completezza, l'armonia e l'equilibrio tra le diverse parti della trattazione e la chiarezza nell'esposizione.[31]

Nel 1929, sia Fano sia Terracini avevano già dato alle stampe individualmente delle *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (nell'a.a. 1926-27 il primo, l'anno successivo il secondo). La collaborazione tra i due è promossa dal fatto che nel 1927-28 entrambi insegnavano presso il Politecnico di Torino: Fano era infatti professore incaricato di Geometria descrittiva con applicazioni, mentre Terracini ricopriva la cattedra di Geometria analitica e proiettiva.

La riunione sotto un unico insegnamento dei due corsi di Geometria proiettiva e Geometria analitica aveva posto i docenti universitari di fronte all'esigenza di dover

> fondere in un tutto, per quanto possibile armonico, le nozioni più elementari e importanti di cui si è arricchita la geometria moderna, e lo studio dei due metodi con cui i nuovi risultati sono stati acquisiti: il metodo analitico e il metodo sintetico. E questa ragione rimane importante,

[30] FANO – TERRACINI 1929, *cit*; ID. 1940², *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia; ID. 1957³, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia. Sulla ristampa del 1948, cfr. BSMT, *FTe*, Carte 1947-48: G. Fano a G. Sacerdote Terracini, New York 16.12.1947; G. Fano a A. Terracini, New York 6.2.1948; G. Fano a A. Terracini, Mantova 7.4.1948; G. Fano a A. Terracini, Mantova 9.5.1948; G. Fano a A. Terracini, Mantova 20.5.1948; Tip. Paravia a A. Terracini, Torino 8.6.1948; G. Fano a A. Terracini, Colognola ai Colli 20.8.1948; L. Godeaux a A. Terracini, Liége 24.10.1948.

[31] A tal proposito, cfr. GIACARDI 2020, *cit*., pp. 29-30.

> specialmente nel suo contenuto pratico […] di raggiungere con il minor dispendio di energia il massimo effetto conseguibile.[32]

Pur rimpiangendo i "corsi di geometria proiettiva sintetica, che in Italia valorosi docenti avevano portato a un alto grado di perfezione logica, didattica e artistica",[33] Fano e Terracini sono favorevoli all'unificazione dei due insegnamenti e concepiscono le loro *Lezioni* come un supporto in questa direzione. Gli autori non si limitano però agli argomenti standard del corso, ma inseriscono nel volume alcune "nozioni complementari, importanti o come elementi di una più larga cultura geometrica, o per applicazioni che possono ricevere nelle scienze tecniche",[34] con l'obiettivo di collegare i diversi insegnamenti universitari. Senza attribuire un peso eccessivo agli esercizi, Fano e Terracini scelgono di seguire l'approccio gruppale alla Klein nella trattazione della geometria analitica del piano e dello spazio, cui sono dedicate le prime due parti delle *Lezioni*. Al loro interno, pur muovendosi nel solco della tradizione italiana, gli autori introducono due elementi di novità. Il primo è costituito da un cenno ai nomogrammi – "innovazione rispetto agli altri trattati italiani di geometria analitica" [35] – ossia strumenti di rappresentazione per il calcolo grafico, in crescente diffusione all'epoca. La seconda innovazione è l'introduzione del calcolo vettoriale, in quanto mezzo più adatto per la rappresentazione di alcune grandezze fisiche. Il trattato prosegue con la terza parte, dedicata alla geometria proiettiva. A livello di metodo, Fano e Terracini non privilegiano il punto di vista sintetico rispetto a quello analitico ma procedono "caso per caso con quel metodo che appar[e] più semplice e più atto a conseguire rapidamente l'intento",[36] fornendo anche qualche cenno alla trattazione nel caso complesso. Nella quarta parte delle *Lezioni* sono esaminate le coniche, mentre nella quinta si affrontano alcune questioni complementari di geometria dello spazio. Ampio spazio è inoltre dedicato alla geometria della retta, con particolare attenzione alle applicazioni del concetto di complesso lineare di rette.

All'interno della trattazione, segnata dall'intento di "far man mano quasi presagire […] il contenuto degli sviluppi ulteriori",[37] compaiono sia alcune semplificazioni (come restrizioni o condizioni non tutte necessarie) sia una certa commistione di approcci (ad esempio, l'utilizzo di nozioni tipiche dell'analisi infinitesimale – quali la continuità – per risolvere questioni di natura algebrica). Interessante è il parallelo, di taglio storico, fornito nell'introduzione. Fano e Terracini osservano che, come per i numeri è stato possibile raggiungere una maggior generalità e uniformità di concetti passando dalla sfera dell'aritmetica a quella dell'algebra, lo stesso avviene nel passaggio dalla geometria elementare alla geometria analitica. Quest'ultima consiste "nello studio sistematico della geometria per mezzo dell'analisi algebrica e infinitesimale".[38]

Per la stesura delle *Lezioni*, Fano e Terracini hanno effettuato una selezione delle fonti, prediligendo i trattati italiani sul tema, e si sono confrontati su quali aspetti della trattazione

---

[32] FANO – TERRACINI 1929, *cit*, p. V.

[33] *Ivi*, p. VI.

[34] *Ibidem*.

[35] *Ivi*, pp. VI-VII.

[36] *Ivi*, p. VII.

[37] *Ivi*, p. VIII.

[38] *Ivi*, p. 2.

prendere da ciascun autore, come modificarli, quali migliorie apportare e altro ancora. Al di là dell'aspetto contenutistico, merita esaminare più da vicino questo lavoro "a quattro mani" di lettura, paragone, cernita e riordinamento dei materiali alla luce delle collezioni librarie dei due autori. Per la parte di geometria analitica, il principale punto di riferimento sono le *Lezioni di geometria analitica* di Castelnuovo, di cui Fano possiede la seconda edizione (1909) e Terracini la terza (1915).[39] Fano, inoltre, conserva nella sua collezione personale il volume *Geometria analitica* di D'Ovidio (Torino, Loescher, 1903), da lui ampiamente consultato nella stesura delle *Lezioni*. Fano e Terracini, infine, consultano i due testi delle *Lezioni di geometria analitica* di Bianchi (Pisa, Spoerri, 1915) e Berzolari (Milano, Hoepli, 1911), che hanno a disposizione all'interno della Biblioteca Speciale di Matematica di Torino.

Sul fronte della geometria proiettiva, Fano e Terracini si basano in primo luogo sui trattati di Enriques e Severi. Di quest'ultimo, entrambi custodiscono nella loro raccolta personale i *Complementi di geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1906); Fano possiede inoltre la *Geometria proiettiva* (Firenze, Vallecchi, 1926) di più recente pubblicazione, a lui donata da Severi.[40] Ancora, sia Fano sia Terracini hanno una copia personale della seconda edizione delle *Lezioni di geometria proiettiva* di Enriques (Bologna, Zanichelli, 1904).[41]

Infine, nella stesura del trattato i due autori non possono prescindere dal confronto con gli altri testi di lezioni di geometria analitica e proiettiva. Fano utilizza i *Complementi ed esercizii di geometria analitica e proiettiva* di Sannia e C. Rovetti (Torino, Paris, 1909)[42], mentre Terracini guarda alle litografie delle *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Comessatti da cui scaturirà il volume in suo possesso (Padova, Cedam, 1930). Entrambi, inoltre, si confrontano con le litografie del medesimo corso tenuto di Geometria analitica e proiettiva, tenuto da Togliatti al Politecnico di Torino nell'a.a. 1919-20. Pur non facendo parte delle collezioni personali di Fano e Terracini, questo volume era stato depositato in BSMT nel maggio 1920, al termine delle lezioni.[43]

Dall'analisi delle fonti delle *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Fano e Terracini emerge dunque sia il ruolo delle raccolte personali, che rappresentano un punto di vista privilegiato per analizzare quali sono i testi più utilizzati da un certo autore, sia l'importanza di avere a disposizione un'ampia gamma di testi all'interno delle biblioteche universitarie, da consultare abitualmente e sui quali lavorare e confrontarsi con i colleghi.

---

[39] Trattasi rispettivamente di G. CASTELNUOVO 1909[2], *Lezioni di geometria analitica*, Milano, Alighieri, vol. n. 68 della Biblioteca Fano, e di G. CASTELNUOVO 1915[3], *Lezioni di geometria analitica*, Milano, Alighieri.

[40] Si tratta rispettivamente dei volumi nn. 162 e 163 della Biblioteca Fano.

[41] Su tale opera cfr. la lettera di F. Enriques a G. Castelnuovo, Bologna 31.5.1896, edita in BOTTAZZINI – CONTE – GARIO (eds.) 1996, *cit.*, p. 272: "Vedrò di serbare al Fano una copia delle lezioni di Geometria Proiettiva". Tuttavia, la prima edizione delle *Lezioni* (citata nella corrispondenza) non compare tra i volumi del lascito Fano.

[42] Si tratta del volume n. 176 della Biblioteca Fano.

[43] Cfr. BSMT, *Registro d'ingresso*: il volume, dono di Togliatti stesso, è ingressato il 18.5.1920, con collocazione M.II.112 per un valore stimato di £ 15.00.

11.9. Alcuni tratti peculiari della biblioteca di un geometra proiettivo-differenziale

Dal confronto tra le Biblioteche personali dei due matematici – limitandoci alla prima metà del Novecento[44] – emerge un nucleo di lavori posseduti da Terracini e non da Fano che afferiscono al settore della geometria proiettivo-differenziale. Ciò permette di evidenziare quali fossero, all'epoca, i punti di riferimento privilegiati nell'ambito della geometria proiettivo-differenziale, naturalmente diversi da quelli per la geometria algebrica.

Sul fronte della pura geometria differenziale, Terracini possiede due edizioni delle *Lezioni di geometria differenziale* di Bianchi (Pisa, Spoerri, 1909[2]; Bologna, Zanichelli, 1923[3]), quelle di Strazzeri (Palermo, Boccone del Povero, 1924) e il primo volume della *Geometria differenziale* di Bompiani (Roma, Pioda, 1950). Ma il vero *point-de-repère* per Terracini è la *Geometria proiettiva differenziale* di Fubini e Čech (Bologna, Zanichelli, 1926-27), i cui due volumi mancano invece all'interno della collezione di Fano. A questi, si sommano l'*Introduction à la geometrie projective differentielle des surfaces* (Paris, Gauthier-Villars, 1931), firmata dai medesimi autori, e le *Lezioni di geometria differenziale e proiettiva* di Strazzeri (Palermo, Trimarchi, 1928).

Se Fubini rimane il punto di riferimento indiscusso per l'attività di ricerca di Terracini all'interno dell'indirizzo proiettivo-differenziale, nella sua raccolta libraria si trovano anche diversi volumi editi in Germania. Non può mancare, innanzitutto, il volume *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* di Wilczynski, uno dei fondatori della geometria proiettivo-differenziale. In secondo luogo, spicca l'opera di Klein intitolata *Der differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien Anwendung* (Leipzig, Teubner, 1907) che, sorprendentemente, non compare all'interno della biblioteca personale di Fano. Legate al tema delle equazioni differenziali sono le *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* di Lie (Leipzig, Teubner, 1912) e i due volumi che compongono l'opera *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen* di H. Weber (Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1919). Due sono i testi di geometria differenziale pubblicati da matematici tedeschi negli anni Trenta che Terracini possiede nella sua raccolta personale. Il primo è la *Theorie der Raumkurven und krummen Flächen* dei fratelli Kommerell (Berlino, De Gruyter, 1931), in due volumi. *L'Affine Differentialgeometrie* (Berlino, De Gruyter, 1935) di Salkowski, docente di Geometria descrittiva a Berlino, rappresenta il secondo contributo.

Dalla Francia provengono invece le *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes* (Parigi, Gauthier-Villars, 1917) di M. Bôcher, curate da Julia. Tra i volumi editi in Europa, Terracini possiede anche l'*Einführung in die neueren methoden der Differentialgeometrie* (Groningen, Noordhoff, 1935) di J.A. Schouten, docente al Politecnico di Delft, e la *Géometrie différentielle projective des réseaux* di Tzitzéica (Bucarest, Cultura nationala, 1923). Nel 1928 entrambi gli autori partecipano all'ICM di Bologna, dove entrano in contatto con Terracini. Tzitzéica si reca al Congresso come rappresentante della Romania, mentre Schouten presenta un contributo all'interno della sessione di geometria differenziale, dedicato alle connessioni lineari indotte nei campi m-direzionali, nelle varietà a connessione affine e nelle varietà riemanniane. Inoltre,

[44] Si è analizzato più nello specifico il cinquantennio 1905-1955: Terracini, infatti, intraprende gli studi universitari nel 1907, mentre Fano si spegnerà nel 1952.

Schouten presiede la sessione dei lavori del convegno in cui Terracini presenta un intervento dal titolo *Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale*.[45]

Vi sono infine due opere della collezione Terracini che arrivano da fuori dell'Europa. La prima, dal titolo *Géométrie différentielle projective des hypersurfaces* (Ryojun, College of Engineering, 1923), proviene dal Giappone e reca la dedica autografa dell'autore, Kanitani. Il trattato di geometria proiettivo-differenziale statunitense firmato da Lane (*A treatise on projective differential geometry*, Chicago, ChUP, 1942) rappresenta il secondo contributo.

Agli anni Cinquanta risalgono tre convegni dedicati a questioni di geometria differenziale, i cui atti compaiono tra i volumi della Biblioteca Terracini. Si tratta del *Colloque de géometrie différentielle* di Lovanio (1951), del Convegno internazionale di geometria differenziale organizzato da Bompiani nel 1953 con interventi in diversi atenei italiani e del Convegno sulle equazioni lineari alle derivate parziali, svoltosi a Trieste nell'agosto del 1954.

11.10. Patrimoni individuali *vs* patrimoni collettivi

Rimandando alle conclusioni per un confronto dettagliato tra le biblioteche personali di Fano, Segre e Terracini, ci soffermiamo sul paragone tra gli articoli citati nello Schedario Segre e gli estratti contenuti nelle miscellanee degli altri due. Tre quarti delle pubblicazioni in comune sono lavori di geometria algebrica (Fig. 11.15), della 'golden age' della Scuola italiana, dedicati perlopiù a temi quali la geometria sopra una curva, le diverse questioni della teoria delle superfici algebriche, i problemi di razionalità e unirazionalità, le trasformazioni birazionali e le involuzioni. Il restante 25% degli estratti condivisi è rappresentato principalmente da contributi di geometria proiettivo-differenziale e dalle biografie dei matematici redatte da M. Nöther per i « Mathematische Annalen».

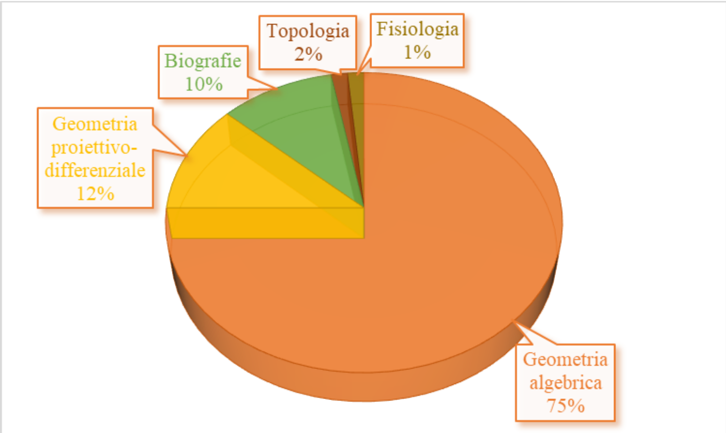
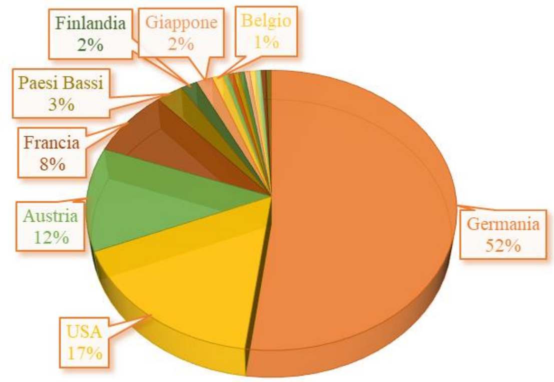


Fig. 11.15. Classificazione tematica degli opuscoli in comune a Segre, Fano e Terracini.

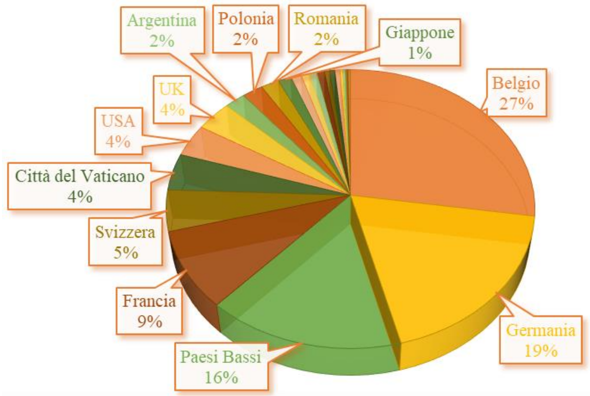
Accanto agli oltre 250 opuscoli stampati in 12 città italiane, la maggior parte delle letture condivise da Segre e Fano proviene dalla Germania (Fig. 11.16). Quasi un terzo degli estratti della miscellanea Fano, invece, compare anche in quella di Terracini. La maggiore sovrapposizione si ha quando i due sono colleghi a Torino e lavorano insieme sulle *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Il 1942 segna un secondo momento di sovrapposizione

[45] A. TERRACINI 1931, *Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 301-304.

importante tra le due collezioni: Fano e Terracini sono lontani l'uno dall'altro (il primo a Losanna, il secondo in Argentina) ma mantengono un fitto dialogo scientifico attraverso la corrispondenza e l'invio di letture. Naturalmente, la maggior parte delle letture comuni verte su temi di ricerca di geometria, ma Fano e Terracini condividono anche un buon numero di estratti di analisi (21%) – tra cui si registra una prevalenza di lavori di analisi funzionale e sulle equazioni alle derivate parziali – e di applicazioni della matematica alla fisica e all'ingegneria (12,5%), almeno in parte frutto della loro comune esperienza di insegnamento al Politecnico (Fig. 11.17). La matematica applicata occupa invece una parte marginale dello Schedario Segre, con sole cinque voci dello Schedario relative alle applicazioni per un totale di 43 riferimenti bibliografici.[46]



Segre – Fano



Fano – Terracini

Fig. 11.16. Classificazione per provenienza degli opuscoli comuni a Segre e Fano (a sx) e a Fano e Terracini (a dx).

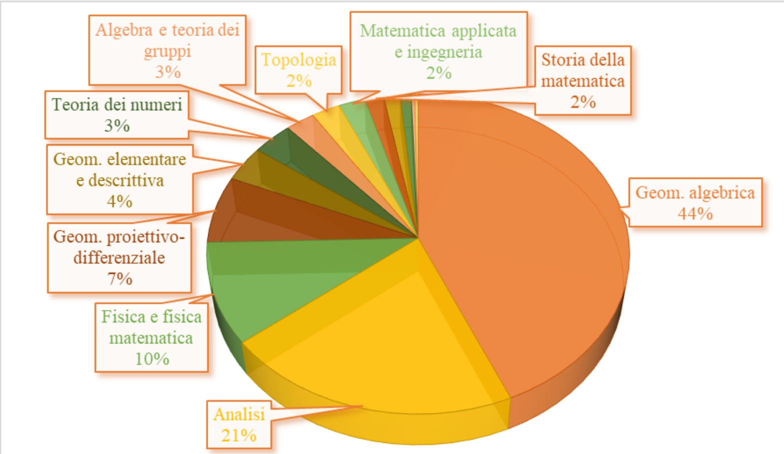


Fig. 11.17. Classificazione tematica degli opuscoli in comune a Segre, Fano e Terracini.

Al di là del paragone per temi di ricerca e per provenienza, lo studio dei tre patrimoni presi in esame permette di evidenziare alcuni fenomeni peculiari relativi ai meccanismi di produzione e diffusione dei saperi matematici nel periodo storico considerato.

In primo luogo, tra i due conflitti mondiali si afferma una nuova sfera di circolazione del sapere: quella nipponica. La componente dei lavori pubblicati in Giappone – estratti del «The

[46] Alcune voci, come "Carte geografiche", "Isofote" e "Cristalli", contengono riferimenti a lavori a cavallo tra geometria e applicazioni.

Tôhoku Mathematical Journal», pubblicazioni dell'Accademia Imperiale di Tokyo, delle società di Osaka, Okkaido, Chekiang – aumenta passando dallo Schedario Segre alla miscellanea Fano, per raggiungere l'apice nella raccolta Terracini. Le premesse per l'afflusso a Torino di pubblicazioni giapponesi sono probabilmente poste dai partenariati stabiliti a partire dal Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna (1928) – che vede Fano e Terracini tra i relatori della sezione di geometria – e culminati con la celebrata missione scientifica di Severi nell'Impero del Sol Levante (1936).

Un secondo elemento riguarda gli effetti dei provvedimenti razziali sulla circolazione del sapere matematico, non solo a livello geografico ma anche in relazione alle dinamiche editoriali e all'affermarsi di nuovi vettori del sapere matematico. È ben noto che disegno politico persecutorio, posto in essere dalla Germania nazista e dall'Italia fascista, ha avuto conseguenze terribilmente rilevanti anche sulla cultura e sulla scienza: spoliazione dei diritti, esilio forzato degli intellettuali, loro emarginazione dai diversi contesti tipici della socialità scientifica (insegnamento, società, accademie, ecc.). La Scuola italiana di geometria algebrica, in cui la 'componente ebraica' era prevalente, si disperde fra Svizzera, UK e Americhe. Anche chi resta in Italia è costretto a interrompere le pubblicazioni a causa della cosiddetta Bonifica libraria, che impedisce agli ebrei qualsiasi forma di attività editoriale. Giornali quali gli «Acta» e le «Commentationes» della Pontificia Accademia, editi nella Città del Vaticano e quindi non soggetti alla legislazione razziale, si trovarono così, inaspettatamente, a beneficiare della collaborazione di grandi 'firme', come Levi-Civita, Volterra, Castelnuovo, Enriques, Fano e altri ancora. In questa cornice storica, ecco che la composizione delle collezioni di Fano e Terracini vanno incontro a due importanti trasformazioni: da una parte, una geografia delle acquisizioni radicalmente mutata, in cui le pubblicazioni del mondo anglosassone e del Sud America sono sempre più numerose; dall'altra parte, un afflusso consistente di riviste di nuova fondazione, come la «Revista de Matematicas y Fisica Teorica» di Terracini, o presenti fino a quel momento molto raramente (i «Commentarii» elvetici, la «Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich», la «Revista de la Unión Matemática Argentina», …).

In terzo luogo, si assiste al graduale inserimento delle donne nel mondo universitario, prima come studentesse e poi come ricercatrici e docenti. Se il Regio Decreto del 3 ottobre 1875 apriva ufficialmente le porte dell'Università al pubblico femminile, tra il 1877 e il 1900 furono conferite soltanto 49 lauree in Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali in tutta la penisola italiana.[47] Le collezioni Segre, Fano e Terracini, ricoprendo un arco temporale che va dal 1880 al 1960, rispecchiano il progressivo ingresso della componente femminile nel mondo accademico, pur segnato da notevoli difficoltà. Tra gli anni Dieci e Cinquanta del XX secolo la percentuale di donne laureate in campo scientifico passa dal 5% al 30%. Parallelamente, mentre le matematiche rappresentate all'interno della raccolta Segre rappresentano appena il 3,3% degli autori, esse raggiungeranno quasi il 12% nei patrimoni Fano e Terracini.

Un ulteriore elemento d'interesse è progressiva espansione dei centri editoriali italiani. Se, da un lato, Roma, Bologna, Palermo e Torino (poi affiancati da Milano e Napoli) si confermano i fulcri dell'editoria scientifica italiana, dall'altro si registra un aumento in termini di numero

---

[47] Per ulteriori dati, cfr. L. BRANCIFORTE – R. TAZZIOLI 2002, *La presenza delle donne nella matematica e nel suo insegnamento*, in C. DOLLO (ed.), *Per un bilancio di fine secolo. Catania nel Novecento*, Catania, Società di storia patria per la Sicilia Orientale, pp. 96-97.

di città coinvolte (Fig. 11.18). Nel patrimonio Fano, si assiste all'ingresso di Cagliari e Ferrara tra i poli editoriali e all'espansione di Padova, che passa da appena 6 riferimenti nel 1908, all'interno dello Schedario Segre, a 57 opuscoli della miscellanea Fano nel 1948. Analogamente, in quello Terracini compaiono per la prima volta nel 1941 tra le sedi editoriali Bari e Reggio Calabria (con 10 opuscoli, perlopiù provenienti dal «Bollettino della Società Matematica Calabrese»), mentre Cagliari e Trieste[48] sono protagoniste di un aumento significativo nel numero di pubblicazioni rispetto alla raccolta Fano.

Miscellanea Segre | Miscellanea Fano | Miscellanea Terracini

Fig. 11.18. Cartografia dell'Italia nelle tre miscellanee.

Infine, si evidenzia un cambiamento a livello di vettori di acculturazione matematica: a partire dagli anni Venti e Trenta alla progressiva diminuzione di estratti da periodici di accademie e società scientifiche fa da contraltare un significativo incremento di lavori apparsi nei rendiconti dei vari Seminari Matematici che vanno via via formandosi nei maggiori centri universitari italiani, Roma (1913), Milano (1927) e Padova (1930) *in primis*. A Torino è proprio Fano, coadiuvato da Terracini, che durante la sua direzione della BSMT si fa promotore delle *Conferenze di Matematica e Fisica* (1929), cui successivamente è attribuito il nome di *Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*. I testi delle relazioni più pregevoli tenute in questa sede iniziano ben presto ad essere pubblicati nei «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino» (1931–), edito dalla BSMT. A partire da questo periodo, la miscellanea Fano si arricchisce degli estratti provenienti dai «Rendiconti» di Seminari Matematici di Padova (con 42 opuscoli), Milano (29), Torino (26), Roma (16), Modena (5), Cagliari (2) e Ferrara (1). Questa tendenza si consolida nella collezione Terracini dove accanto ai testi delle conferenze tenute a Roma (169 estratti), Torino (124), Padova (113), Milano[49], Cagliari (entrambe con 79 lavori a stampa) e Modena (35), troviamo quelli apparsi nei neonati «Rendiconti» del Seminario Matematico di Bari (fondato nel 1954, con 41 estratti) e Messina (nel 1955, con 9 pezzi).

---

[48] In particolare, Trieste passa da un solo lavoro della miscellanea Fano apparso negli «Annali Triestini» a 20 estratti nella raccolta Terracini, in gran parte pubblicati presso l'Osservatorio Astronomico di Trieste. Cagliari passa da 2 a 95 opuscoli.

[49] Grazie anche all'intervento di Terracini, nel dopoguerra è avviata una proficua collaborazione tra il Seminario Matematico di Milano e quello di Torino. Cfr. BSMT, *FTe*, Carte Terracini: B. Finzi a A. Terracini, Milano 18.5.1939: "Hai voluto sottolineare che la mia venuta fra voi inizia la collaborazione fra il Seminario torinese e quello milanese, e non dimentico la tua promessa di far seguire a tale inizio una tua conferenza a Milano nel prossimo anno accademico".

Conclusioni

La letteratura su Gino Fano aveva finora indagato, da un punto di vista prettamente interno, la prima fase della sua attività scientifica (la formazione alla Scuola di Klein, i contributi ai fondamenti della geometria e ai gruppi continui, …) e parte delle sue ricerche sulle varietà tridimensionali, cui il suo nome rimane ancora oggi associato. Le commemorazioni, le biografie e alcuni studi avevano evidenziato soltanto alcuni tratti della sua azione all'interno della Scuola italiana di geometria algebrica, senza ricostruire nel dettaglio i metodi da lui elaborati, il suo posizionamento rispetto ai principali filoni di ricerca dell'epoca, il suo peculiare approccio alla ricerca geometrica e il suo ruolo di promotore di uno specifico indirizzo di indagine, a più livelli e all'interno di diversi contesti.

Fano tra ricerca, insegnamento e divulgazione

L'esame delle carte manoscritte portato avanti in questo lavoro di tesi, unitamente allo studio e al confronto con le principali pubblicazioni di Fano e le fonti da lui utilizzate, ha consentito di analizzare in profondità la genesi e l'evoluzione dei suoi contributi nell'ambito della geometria algebrica. Nell'ottica di fornire una visione più completa e coerente della figura di Fano, sono stati esplorati tre diversi livelli in cui si è concretizzata la sua azione: ricerca, divulgazione e insegnamento.

Matematico e intellettuale "a tutto tondo", uomo di "grande rettitudine, lunga esperienza e […] perfetta informazione",[1] Fano si è rivelato attento sia allo sviluppo della matematica (e, nello specifico, della geometria algebrica) in sé, sia al posizionamento e all'affermazione di una specifica tradizione di ricerca – quella della Scuola italiana – a livello internazionale.

Per quanto riguarda l'attività di ricerca di Fano, un'indagine di tipo genetico ha permesso di rintracciare le origini delle sue ricerche sulle threefolds e di portare alla luce una serie di tentativi da lui condotti per affrontare un problema centrale per lo sviluppo della disciplina, non tutti confluiti nei lavori a stampa. Indubbia è l'importanza dei suoi contributi allo studio della cubica di $\mathbb{P}^4$, a proposito dei quali B. Segre afferma che occorre

> rilevare come tale V_3^3 – nelle Sue mani – abbia per lunghissimi anni servito da bussola di orientamento, allo stesso tempo ispiratrice e unificatrice di un vasto complesso di indagini.[2]

Dall'esame della fase di produzione di nuovo sapere matematico è emerso un peculiare approccio di Fano alla ricerca avanzata, caratterizzato dalla ricerca di metodi efficaci per affrontare il problema delle varietà tridimensionali, senza però uscire al di fuori della via tracciata dalle prime generazioni della Scuola italiana. Lo studio dei contributi sulle Fano threefolds e sulle Fano-Enriques threefolds rivela dunque una sorta di 'tensione' tra tradizione e innovazione. Se, da un lato, Fano si addentra in territori fino a quel momento inesplorati, come le varietà algebriche in dimensione superiore, dall'altro colloca esplicitamente le sue ricerche nel solco della Scuola. Per questa ragione, pur elaborando una serie di nuovi metodi e strumenti atti ad affrontare lo studio delle threefolds, Fano porta avanti questo tentativo nel

[1] TERRACINI 1953, *cit.*, p. 710.

[2] SEGRE 1952, *cit.*, p. 263.

pieno spirito della tradizione geometrica italiana: cerca dunque di estendere lo studio delle sezioni iperpiane al caso delle varietà tridimensionali, fa largo uso dell'analogia come mezzo di indagine, enfatizza il ruolo dell'intuizione geometrica come strumento della scoperta, introduce diversi tipi di proiezioni (variazione del centro di proiezione, metodo della "doppia proiezione", …) per ricondurre lo studio delle threefolds a quello di varietà algebriche più semplici, analizza il gruppo delle trasformazioni birazionali sulle varietà tridimensionali con particolare attenzione alle involuzioni ed esamina i sistemi di ipersuperfici su di esse, nello spirito della geometria proiettiva iperspaziale. All'introduzione di nuovi oggetti matematici e tecniche di lavoro, non del tutto sufficienti per affrontare il caso delle varietà tridimensionali, Fano accompagna uno stile espositivo talvolta nebuloso – per il quale è stato spesso criticato dai posteri – ma che non risulta così oscuro se storicamente collocato all'interno del contesto dei geometri italiani del tempo, che condividevano un peculiare approccio alla ricerca e un lessico comune. Alla luce di queste peculiarità, non sembra improprio parlare di un patrimonio immateriale della Scuola italiana, costituito da un insieme risorse specifiche e uniche, destinato a garantire la perpetuazione del *team* di ricerca e ad alimentare una dinamica collettiva propria, basata su un certo particolarismo culturale, sociale e – almeno in parte – geografico.

Al tempo stesso, bisogna tener conto che nel corso di queste ricerche Fano, il "vincitore della V_3^3 di S_4" secondo Brusotti,[3] si pone in dialogo con alcuni indirizzi di ricerca coevi, come quello della Scuola di geometria di Cambridge e quello belga, capeggiato da Godeaux.

La rilettura storico-critica dei contributi di Fano sulle varietà tridimensionali, alla luce dei documenti editi e inediti, ha quindi portato a fornire una visione coerente dei punti di forza e di debolezza delle ricerche di Fano, alla luce del contesto matematico e sociale in cui si inserisce la sua attività. Le sue brillanti costruzioni geometriche, alcune delle quali riprese a distanza di diversi anni dalla geometria algebrica moderna, sono frutto di uno specifico approccio alla ricerca della Scuola italiana, che privilegia l'interpretazione geometrica piuttosto che le manipolazioni algebriche. D'altra parte, l'autosufficienza dei metodi geometrici – di cui Fano è uno dei più convinti sostenitori – che ha impedito di trarre nuova linfa dai risultati dell'algebra e della topologia algebrica sviluppati all'estero tra gli anni Venti e Trenta del Novecento, va interpretata alla luce del contesto in cui Fano orienta le sue indagini.

In sintesi, non è possibile separare i contenuti delle sue ricerche sulle threefolds dalle condizioni storiche, sociali e politiche in cui si sono sviluppate. Si correrebbe il rischio di cadere in facili esaltazioni del talento matematico di Fano, autore di costruzioni geometriche quasi 'mistiche', o viceversa di tacciare di mancato rigore le sue spiegazioni e dimostrazioni, senza tener conto degli strumenti effettivamente a sua disposizione all'epoca, ed è compito dello storico della matematica far sì che ciò non avvenga.

Un aspetto del tutto peculiare dell'attività di Fano all'interno della Scuola di geometria algebrica italiana, fino a questo momento non esaminato in letteratura, è rappresentato dalla divulgazione. Dall'analisi delle minute manoscritte delle conferenze di Losanna e del ciclo di lezioni di Aberystwyth è emerso uno specifico impegno di Fano nella promozione della tradizione geometrica italiana all'estero, che fa da *fil rouge* della sua intera traiettoria scientifica e personale: dalla gioventù, con gli interventi presentati alla *Mathematische Gesellschaft* di Göttingen, agli anni dell'esilio in Svizzera, con il ciclo di conferenze al *Cercle Mathématique*. L'attività di alta divulgazione di Fano si inscrive all'interno del processo di costruzione e

[3] Cfr. BSMT, *FFa*, Miscellanea, estratto n. 11.

rivendicazione di una specifica identità della Scuola italiana di geometria. Oltre a costituire un tratto inedito dalla figura di Fano, questo tipo di impegno è strettamente correlato a uno degli aspetti fondanti della concezione di patrimonio immateriale, ossia la diffusione e la trasmissione di questo insieme di elementi al di fuori del gruppo da cui sono stati creati e che, tramite l'attribuzione dello *status* di patrimonio, ha conferito loro un valore riconosciuto e condiviso. Le conferenze divulgative di Fano mostrano il preciso intento di rivendicare l'appartenenza di una serie di indagini, risultati, tecniche e strumenti al patrimonio della tradizione geometrica italiana, delimitandone al contempo i confini e le radici culturali. Dal confronto tra gli interventi di Fano e alcune comunicazioni presentate da altri geometri italiani è emersa una visione comune dell'immagine che la Scuola italiana desiderava dare di sé nel *parterre* della ricerca internazionale. Il ruolo che i geometri italiani attribuivano all'attività di divulgazione rappresenta un elemento interessante e da approfondire, a partire dall'esame di ulteriori interventi di questo tipo, che potranno essere oggetto di future ricerche.

Il terzo e ultimo aspetto finora non noto che è emerso dall'esame incrociato delle carte manoscritte di Fano e delle pubblicazioni su rivista è il suo coinvolgimento nell'ambito dell'educazione matematica, a diversi livelli. Egli ha partecipato attivamente sia ai principali dibattiti dell'epoca (unificazione dei programmi delle terre redente, soppressione delle Scuole di Magistero, Riforma Gentile, …) sia alla formazione degli insegnanti di matematica, come ha rivelato l'analisi della sua presidenza della sezione piemontese dell'associazione Mathesis. Dai corsi universitari alla direzione della Scuola operaia serale femminile di Torino, Fano manifesta uno spiccato senso del dovere cui accompagna, anche nell'insegnamento, "un concetto elevato della matematica".[4] Nonostante i suoi contributi in ambito metodologico siano minori rispetto a quelli di altri esponenti della Scuola, essi rivelano la profonda sensibilità di Fano per queste tematiche, frutto – da una parte – della sua esperienza personale e genitoriale e, dall'altra, di un'attenzione condivisa tra geometri italiani per gli aspetti didattici.

È, questo, un elemento collegato al processo di patrimonializzazione dei saperi geometrici di cui Fano e la Scuola italiana sono interpreti. Tramite l'attività di docenza e, in particolare, attraverso i corsi superiori destinati all'avviamento alla ricerca si alimenta un meccanismo collettivo: esso consiste nel riconoscimento da parte dei soggetti coinvolti che un insieme di oggetti assume un significato particolare per il gruppo di appartenenza, determinando una relazione specifica tra passato e presente.

Lo studio delle minute della conferenza dedicata all'analysis situs e alla geometria algebrica ha inoltre costituito un osservatorio privilegiato sui delicati rapporti tra topologia e geometria algebrica che vanno a delinearsi tra gli anni Venti e Cinquanta del Novecento. Come noto, Fano non pubblica alcun lavoro di analysis situs; tuttavia, contrariamente a quanto si credeva, egli non è del tutto disinteressato a quanto accade in questo settore. Emerge però che l'interesse di Fano verso la topologia scaturisce principalmente dalle sue possibili applicazioni alla geometria algebrica. È questo un ulteriore elemento che accomuna molti degli esponenti della Scuola, con rare eccezioni. Una di queste è rappresentata da Achille Bassi, assistente di Fano a Torino durante i primi anni Trenta. Finora non presa in considerazione in storiografia, la sua figura restituisce l'immagine di una "voce fuori dal coro" tra i geometri italiani, oltre ad aprire interessanti scenari di scambio tra Italia e Sud America nella prima metà del Novecento, in parte ancora da esplorare. Il legame tra la topologia classica e le ricerche di geometria algebrica

[4] TERRACINI 1968, *cit.*, p. 28.

sviluppate all'interno della Scuola è forse uno degli aspetti più trascurati in letteratura. Pur essendovi la necessità di ulteriori indagini per giungere a una visione globale, il confronto tra la concezione di Fano e quella di Bassi portato avanti in questa tesi rappresenta un primo contributo in questa direzione.

Patrimoni materiali a confronto

Lo sviluppo delle idee e il susseguirsi delle teorie matematiche non si è realizzato a livello astratto ma all'interno di contesti sociali e materiali con cui i matematici hanno interagito attivamente e il caso della Scuola italiana di geometria algebrica non costituisce un'eccezione. Occorre però tener conto della complessità degli esiti cui queste interazioni hanno dato luogo.

In matematica, uno dei presupposti più comuni è l'idea che le fonti teoriche del pensiero matematico precedano i suoi legami con il mondo materiale. L'analisi dettagliata delle raccolte librarie, private e istituzionali, condotta in questa tesi ha contribuito a mostrare che non è così. Anzi, le fonti materiali a disposizione dei matematici, i lavori letti e consultati, i testi acquistati o ricevuti in dono sono dei fattori essenziali da tenere in considerazione per investigare la produzione di un singolo autore, come Fano, o le caratteristiche e i risultati di un certo indirizzo di ricerche, quale quello della Scuola italiana.

Al di là della loro importanza intrinseca e delle vicende politico-amministrative, lo studio delle Biblioteche Matematiche di Torino e Roma, esaminate nei CAPITOLI 9 e 10 della tesi, ha messo in luce non soltanto il loro ruolo di centri di conservazione del sapere ma anche quello di luoghi di ricerca e di produzione di nuova conoscenza matematica. Come abbiamo visto, la storia di queste due istituzioni è legata a filo doppio con lo sviluppo della Scuola italiana di geometria algebrica che vede in Torino e Roma i due centri propulsori nel periodo considerato. Il fatto che Fano stesso, così come Segre prima e Terracini poi, sia stato direttore della BSMT è significativo nella misura in cui la politica delle acquisizioni bibliotecarie rappresenta un riflesso degli interessi di ricerca della Scuola, dei punti di riferimento a livello culturale e delle relazioni con i centri matematici esteri. Analogamente, la formazione del patrimonio librario della BIMR risente della direzione di Castelnuovo, Enriques, Scorza, Severi e Bompiani. L'esame analitico di queste due collezioni ha contribuito a delineare con precisione quali fossero le fonti a disposizione dei geometri algebrici di Roma e Torino, a partire da quale momento e in che modo erano state acquisite.

L'analisi delle collezioni private di Fano, Segre e Terracini, cui sono dedicati i CAPITOLI 7, 8 e 11 di questo elaborato, ha offerto la possibilità sia di approfondire alcuni tratti dei singoli autori, portando alla luce aspetti 'nascosti', sia di toccare con mano una parte del processo di creazione e sviluppo di una specifica tradizione matematica, individuando un retroterra culturale comune all'interno della geometria algebrica lungo un intero periodo della storia della matematica in Italia (1880-1950).

A livello collettivo, è rilevante l'esistenza di una cultura comune, un insieme di riferimenti e letture condivise tra i membri della Scuola, e tra Segre, Fano e Terracini in particolare. Confrontando i patrimoni di questi tre geometri, è emerso un nucleo di una ventina di volumi che compaiono nelle biblioteche personali di tutti e tre. Tenendo presente che il confronto tra le tre collezioni si arresta necessariamente al 1924, anno della morte di Segre, i volumi in comune possono essere suddivisi in due categorie: i testi di geometria classica e i capolavori della tradizione geometrica italiana. All'interno della prima categoria rientrano alcuni volumi francesi pubblicati nel corso dell'Ottocento come la *Géométrie descriptive* di Monge, il *Traité des propriétes projectives des figures* di Poncelet, l'*Aperçu historique…* di Chasles e il *Traité d'analyse* di Picard, cui si somma la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* scritta da quest'ultimo in collaborazione con Simart. Se questi sono i principali riferimenti sul versante francese, su quello tedesco si segnalano due grandi classici di fine Ottocento: la *Geometrie der Lage* di Reye e la *Geometria di posizione* di Staudt. Passando al secondo gruppo di lavori, tra i volumi firmati da esponenti della Scuola che troviamo nelle collezioni di Segre, Fano e Terracini vi sono, in primo luogo, le *Lezioni di geometria analitica* di Castelnuovo (1909), quelle di geometria proiettiva di Enriques (1904) e i *Complementi* di Severi (1906). A questi bisogna aggiungere i due volumi delle *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* di Bianchi e la celebre *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* di Bertini. Non possono poi mancare la *collectanea* degli *Scritti matematici offerti a Enrico D'Ovidio* e le *Memorie di geometria* di Caporali (1888). A questi si sommano due volumi che travalicano i confini della geometria: si tratta degli *Scritti* di Giovanni Vailati (1901) e delle *Lezioni di meccanica razionale,* scaturite dalla collaborazione tra Amaldi e Levi-Civita.

All'interno delle biblioteche di Segre e Fano compare un nucleo di volumi comuni che mancano invece all'interno della raccolta Terracini. Trattandosi per lo più di contributi dei geometri tedeschi, essi rispecchiano il fatto che, tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, i geometri italiani guardano alla Scuola di Göttingen come modello. Si va dai tre volumi della *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* di Fiedler ai due delle *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie* di Study; dal *Kalkül der Abzahlenden Geometrie* di Schubert alle *Vorlesungen über Geometrie* di Clebsch e Lindemann; dalle *Vorlesungen über Differentialgleichungen* di Lie nell'edizione di Scheffers alle *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* di C. Neumann; dalla *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker alla *Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung* di Prym e Rost e al *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* di E. Müller, per concludere con tre volumi di Klein: *Nicht-Euklidische Geometrie* (1892), *Einleitung in die hohere geometrie* (1893) – questi due in veste litografica – e l'*Anwendung der differential und integralrechnung auf geometrie* (1902). A questi si sommano le traduzioni in tedesco di due contributi di Salmon, intitolati rispettivamente *Analytische Geometrie des Raumes* (1879) e *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* (1887-88). Tra gli autori italiani di riferimento per Segre e Fano troviamo, naturalmente, gli esponenti delle prime generazioni della Scuola (oltre alla triade Castelnuovo-Enriques-Severi, Cremona, D'Ovidio, Del Pezzo, Chisini) ma anche Beltrami e Casorati. L'intera raccolta dell'EMW, progetto cui entrambi avevano partecipato attivamente, completa i volumi in comune tra Fano e Segre.

Il raffronto tra le biblioteche Fano e Terracini ha messo invece in luce alcune opere fondamentali per i geometri italiani tra gli anni Venti e Cinquanta. *In primis,* i testi firmati dagli esponenti della Scuola (Enriques, Severi, Loria, Brusotti, …) tra cui figurano i geometri della nuova generazione: Conforto, con *Le superficie razionali* (1939); B. Segre, autore delle *Lezioni di geometria moderna* (1948); Chisini e Biggiogero, con le loro *Lezioni di geometria descrittiva* (1946). Si segnalano anche due corsi di analisi di Favard (1933 e 1953), le *Vorlesungen* di Kowalewski (1931) e, soprattutto, la *Géométrie algébrique* di Godeaux (1949). Quest'ultima riflette il dialogo – di cui Fano è uno dei protagonisti – tra la Scuola italiana e quella belga nel periodo in esame.

Oltre a delineare ancor di più i tratti di una cultura geometrica condivisa, un ulteriore confronto tra le biblioteche dei tre geometri torinesi e quelle di Severi e Conforto,[5] colleghi 'romani', porta alla luce alcune specificità delle due sedi e sembra suggerire uno spostamento del baricentro della Scuola italiana verso la capitale dopo la morte di Segre. Mentre a livello di autori italiani la maggioranza dei volumi in comune alle biblioteche Segre, Fano e Terracini compare anche tra gli scaffali di Severi e Conforto, è a livello di autori stranieri che si registra una differenza importante. Nelle collezioni romane manca una buona parte di testi tedeschi tipici della Scuola di Göttingen, centrali per la formazione dei geometri torinesi, come i volumi di Staudt, Müller e Schubert precedentemente citati. Sul versante francese, invece, i trattati classici di Picard (1896) e di Picard e Simart (1897) costituiscono una pietra miliare anche per Severi e Conforto. Questi ultimi posseggono inoltre un maggior numero di volumi dedicati all'algebra astratta e alla topologia di indirizzo francese e tedesco, poco 'attenzionate' a Torino. Pur rivestendo sempre una posizione marginale all'interno della cultura geometrica, a Roma gli sviluppi di queste due discipline sono seguiti con più attenzione, grazie anche alla presenza di Scorza. Non è un caso che il suo trattato *Corpi numerici e algebre* appaia nelle collezioni di Severi e Conforto e non in quelle dei colleghi dell'ateneo torinese. Ancora, all'interno delle raccolte romane troviamo alcuni dei 'grandi assenti' delle collezioni torinesi. In primo luogo, i testi editi dal gruppo bourbakista negli anni Cinquanta che, a livello tematico, spaziano dalla topologia generale alla teoria delle funzioni di variabile reale, passando per gli spazi vettoriali topologici e la teoria degli insiemi.[6] In secondo luogo, si registra la presenza di un discreto numero di lavori di Weil, Hopf, Veblen, Zariski, Van der Waerden e W. Gröbner, sui più recenti sviluppi della geometria algebrica, della topologia e dell'algebra.[7]

Naturalmente, l'analisi quantitativa e qualitativa dei patrimoni materiali di Segre, Fano e Terracini, insieme al loro esame comparato, costituisce soltanto un primo tassello nello studio del patrimonio materiale della Scuola italiana, con l'auspicio che, in futuro, questo tipo di indagine possa essere esteso alle biblioteche personali e alle miscellanee di altri esponenti della Scuola (Severi, Enriques, Conforto, Scorza, Bompiani e altri ancora).

---

[5] La biblioteca di Severi consta di 1433 volumi, contrassegnati dal timbro DONO DI F. SEVERI, ed è attualmente conservata all'INDAM. Al suo interno compaiono 109 volumi stampati a Roma e 85 a Torino. Il regesto di tale biblioteca è pubblicato in FONTANARI – GATTEI 2022, *cit.*, pp. 6-64. La collezione dei 728 volumi appartenuti a Fabio Conforto è invece stata donata alla Biblioteca Matematica dell'Università di Ferrara dove è oggi custodita. Si ringrazia Maria Giulia Lugaresi per questa indicazione. Tra essi si contano 109 volumi editi a Roma, 25 a Torino.

[6] Nel caso di Severi, si tratta dei volumi nn. 505, 849, 1282, 1284.

[7] Sotto questo punto di vista, la biblioteca di Conforto – il più giovane tra i geometri qui presi in esame – contiene una serie di testi pubblicati tra gli anni Trenta e Cinquanta del tutto inusuali per un geometra italiano, che non compaiono all'interno delle raccolte dei colleghi torinesi e nemmeno in quella del suo 'maestro' Severi, quali P. ALEKSANDROV – H. HOPF 1935, *Topologie*, Berlino, Springer; A.A. ALBERT 1937, *Modern higher algebra*, Chicago, Chicago University Press; A.A. ALBERT 1939, *Structure of algebras*, New York, AMS; G. BIRKOFF - S. MACLANE 1941, *A survey of modern algebra*, New York, Macmillan; W. KRULL 1948, *Idealtheorie*, New York, Chelsea Publishing; C. CHEVALLEY 1951, *Groupes algebriques*, Parigi, Hermann. Severi possiede ben 4 lavori di Gröbner, pubblicati tra il 1941 e il 1955. Si tratta dei nn. 1, 626, 645, 703, 704 della collezione.

Bibliografia

AA.VV. 1882, *Cataloghi del materiale scientifico. Scuola d'Applicazione per gl'ingegneri*, Roma, Salviucci.

AA.VV. 1905, *Catalogo delle opere esistenti nella libreria del Senatore Prof. Luigi Cremona in Roma*, Roma, Tip. Romana.

AA.VV. 1982, *Guida all'uso della Biblioteca dell'Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"*, Roma, Istituto Matematico "G. Castelnuovo".

ALCAIRES DE CARVALHO RAPHAEL 2020, *A missão italiana para a formação de matemáticos na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil: Achille Bassi e Gabriele Mammana, apenas diplomacia cultural?*, «Em Construção: arquivos de epistemologia histórica e estudos de ciência» 7, pp. 79-96.

AMODEO FEDERICO 1890-91, *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r, «Atti R. Acc. Sci. Torino» 26, pp. 741-770.

AMOUGOU EMMANUEL 2004, *La Question patrimoniale. De la « patrimonialisation» à l'examen des situations concrètes*, Paris, L'Harmattan.

ANDREATTA MARCO – PIGNATELLI ROBERTO 2023, *Fano's Last Fano*, «Atti ANL» (9) (in corso di stampa) arXiv:2209.07390v2 [math.AG].

APRILE GIORGIO 1921, *Sopra la involuzione non razionale di Enriques*, «Rass. Mat. Fis.» 1, pp. 133-136.

ARDITI GLORIA – SERATTO CESARE 1994, *Gio Ponti. Venti cristalli di architettura*, Venezia, Il Cardo.

AVELLONE MAURIZIO – BRIGAGLIA ALDO – ZAPPULLA CARMELA 2002, *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, «Archive for History of Exact Sciences» 56.5, pp. 363-425.

BAKER HENRY F. 1913, *On some recent advances in the theory of algebraic surfaces*, «Proc. LMS» (2) 12, pp. 1-40.

BARROW-GREEN JUNE – GRAY JEREMY 2006, *Geometry at Cambridge*, «Historia Mathematica» 33, pp. 315-356.

BASSI ACHILLE 1935a, *Un problema topologico di esistenza*, «Mem. R. Acc. d'Italia» (7) 6, pp. 669-714.

BASSI ACHILLE 1935b, *Su alcuni modelli topologici del Poincaré*, «Mem. R. Acc. d'Italia» (7) 6, pp. 1309-1333.

BASSI ACHILLE 1935c, *Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni*, «Boll. UMI» 14, pp. 219-225, 286-292.

BASSI ACHILLE 1935d, *Su di una formola topologica del Vietoris*, «Rend. R. Ist. Lomb.» (2) 68, pp. 880-890.

BASSI ACHILLE 1935e, *Su di una notevole operazione topologica tra complessi*, «Giorn. di Mat.» (3) 73, pp. 49-90.

BASSI ACHILLE 1936, *On some new invariants of a manifold*, «Proc. Nat. Acad. USA» 22, pp. 698-699.

BASSI ACHILLE 1938, *L'Università e la Scuola Matematica di Princeton. Conferenza tenuta il 21 febbraio 1938*, «Conferenze di Fisica e Matematica tenute presso la R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino 1938-1939», pp. 1-24.

BASSI ACHILLE 1939, *L'Università e la Scuola di Matematica di Princeton*, «Period. Mat.» (4) 19, pp. 57-79.

BASSI ACHILLE 1941a, *Da importância da topologia na matemática moderna*, Coleção de Monografias Cientificas dirigida por Luigi Sobrero, Rio de Janeiro, Instituto Ítalo-Brasileiro de Alta Cultura, pp. 7-32.

BASSI ACHILLE 1941b, *La Universidad y la Escuela matemática de Princeton*, «Publicaciones de la Facultad de Ciências matematicas, fisico-quimicas y naturales aplicadas a la industria de la Universidad Nacional del Litoral» 25, pp. 1-27.

BASSI ACHILLE 1945, *Da importância da topologia na matemática moderna*, «Gazeta de Matemática» 26, pp. 3-11.

BASSI ACHILLE 1948, *A Matemática Moderna e a Necessidade de sua Difusão*, «Kriterion, Revista da Faculdade de Filosofia de Minas Gerais» 1, pp. 446-474.

BASSI ACHILLE 1966, *Polinomi e dualità in un'algebra del Boole con topologia*, «Rend. ANL» (8) 40, pp. 29-34.

BAYLE LIONEL 1994, *Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d'Enriques*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik» 449, pp. 9-63.

BERETTA MARCO 2002, *Storia materiale della scienza. Dal libro ai laboratori*, Milano, Mondadori.

BERETTA MARCO 2011, *Editorial*, «Nuncius» 26, pp. 3-6.

BERNARDI GABRIELLA – VECCHIATO ALBERTO 2018, *The advent of female astronomers at Turin Observatory*, «The journal of Astronomical History and Heritage» 21.1, pp. 13-28.

BIANCOFIORE BUONGIORNO PIERA 1982, *Il Fondo librario antico della Biblioteca dell'Istituto Matematico "G. Castelnuovo"*, «Accademie e Biblioteche d'Italia» 50.2, pp. 112-125.

BIASI PIERRE-MARC DE 2003, *Sciences: des archives à la genèse. Pour une contribution de la génétique des textes à l'histoire des sciences*, «Genesis (Manuscrits-Recherche-Invention)» 20, pp. 19-52.

BIRKAR CAUCHER – CASCINI PAOLO – HACON CHRISTOPHER D. – MCKERNAN JAMES 2010, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, «Jour. AMS» 23.2, pp. 405-468.

BOI LUCIANO 1990, *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry 1880-1890: n-dimensional geometry in the works of D'Ovidio, Veronese, Segre e Fano*, «Arch. Int. Hist. Sci.» 40, pp. 30-75.

BOREL ÉMILE 1907, *La logique et l'intuition en mathématiques*, «Revue de Métaphysique et de Morale» 15, pp. 273-283.

BORTOLOTTO CHIARA (ed.) 2011, *Le Patrimoine culturel immatériel. Enjeux d'une nouvelle catégorie*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme.

BOTTAZZINI UMBERTO – CONTE ALBERTO – GARIO PAOLA (eds.) 1996, *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino, Bollati Boringhieri.

BOUDIA SORAYA – RASMUSSEN ANNE – SOUBIRAN SÉBASTIEN 2009, *Patrimoine et communautés savantes*, Rennes, Presses universitaires de Rennes.

BRANCIFORTE LAURA – TAZZIOLI ROSSANA 2002, *La presenza delle donne nella matematica e nel suo insegnamento*, in C. DOLLO (ed.), *Per un bilancio di fine secolo. Catania nel Novecento*, Catania, Società di storia patria per la Sicilia Orientale, pp. 95-112.

BRIGAGLIA ALDO – CILIBERTO CIRO 1995, *Italian Algebraic Geometry Between the Two World Wars*, Kingston, Queen's University.

BRIGAGLIA ALDO – CILIBERTO CIRO 1998, *Geometria Algebrica*, in S. DI SIENO, A. GUERRAGGIO, P. NASTASI (eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, pp. 185-320.

BRIGAGLIA ALDO – CILIBERTO CIRO 2004, *Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20th century*, «Historia Mathematica» 31, pp. 310-319.

BRIGAGLIA ALDO – SCIMONE ALDO 1998, *Algebra e Teoria dei numeri*, in S. DI SIENO, A. GUERRAGGIO, P. NASTASI (eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, pp. 505-568.

BRIGAGLIA ALDO 2001, *The creation and persistence of national schools: the case of Italian algebraic geometry*, in U. BOTTAZZINI, A. DAHAN-DALMÉDICO (eds.), *Changing Images of Mathematics*, Londra, Routledge, pp. 187-206.

BRIGAGLIA ALDO 2013, *Per una biografia scientifica di Corrado Segre*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 6, pp. 415-474.

BRUNEAU OLIVIER – LASOLLE NICOLAS – LIEBER JEAN – NAUER EMMANUEL – PAVLOVA SIYANA – ROLLET LAURENT 2021, *Applying and Developing Semantic Web Technologies for Exploiting a Corpus in History of Science: the Case Study of the Henri Poincaré Correspondence*, «Semantic Web: Interoperability, Usability, Applicability» 12.2, pp. 359-378.

BUEKENHOUT FRANCIS 2016, *Godeaux de Liège. Mathématicien de génie*, Bruxelles, Académie Royale de Belgique.

CALAPSO RENATO 1940, *La produzione geometrica in Italia nell'anno XVII*, *in Atti della XXVIII Riunione SIPS. Pisa, 11-15 ottobre 1939*, Roma, SIPS, pp. 25-47.

CAMPANA FRÉDÉRIC 1992, *Connexité rationelle des varietés de Fano*, «Ann. ENS Paris» (4) 25.5, pp. 539-545.

CANADELLI ELENA 2020, *Documentare e celebrare: Pier Andrea Saccardo e l'Iconoteca dei botanici di Padova tra Otto e Novecento*, «Physis» 55, pp. 71-86.

CARTAN ÉLIE 1915, *La théorie des groupes continus et la géométrie (exposé d'après l'article allemand de G. Fano)*, in ESM 3.1, Paris, Gauthier-Villars, pp. 1-135.

CASTELNUOVO EMMA 1936, *Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sé*, «Rend. ANL» (6) 24, pp. 342-346.

CASTELNUOVO EMMA 1949, *Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori*, Roma, Carabba.

CASTELNUOVO GUIDO – ENRIQUES FEDERIGO 1897, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, «Math. Ann.» 48, pp. 241-316.

CASTELNUOVO GUIDO 1888, *Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio ordinario e sulle sue projezioni nello spazio ordinario*, «Atti R. Ist. Veneto» (6) 5, pp. 1249-1281.

CASTELNUOVO GUIDO 1895, *Sulle superficie di genere zero*, «Mem. Soc. it.» (3) 10, pp. 103-123.

CASTELNUOVO GUIDO 1907, *Il valore didattico della Matematica e della Fisica*, «Scientia» 1, pp. 329-337.

CASTELNUOVO GUIDO 1929, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 1, Bologna, Zanichelli, pp. 191-201.

CASTELNUOVO GUIDO 1930, *Luigi Cremona nel centenario della nascita*, «Rend. ANL» (6) 12, pp. 613-618.

CASTELNUOVO GUIDO 1933, *Determinismo e probabilità*, «Scientia» 53, pp. 8-12.

CASTELNUOVO GUIDO 1947, *Commemorazione di Federigo Enriques*, «Period. Mat.» (4) 25, pp. 81-94.

CATUCCI STEFANO – GARRONI GIOVANNI – SALVO SIMONA 2017, *La vetrata artistica della Scuola di Matematica*. *Disegno di Gio Ponti per Luigi Fontana*, Macerata, Quodlibet.

CECCONI JAURES PACIFICO 1974, *Achille Bassi*, «Boll. UMI» (4) 10, pp. 545-546.

CHATTERJI SRISHTI – OJANGUREN MANUEL 2013, *A Glimpse of the de Rham Era*, «Notices of the International Congress of Chinese Mathematicians» 1, pp. 117-137.

CHELTSOV IVAN 1996, *Three-dimensional algebraic varieties that have a divisor with a numerically trivial canonical class*, «Russian Mathematical Surveys» 51, pp. 140-141.

CHELTSOV IVAN 1997, *On the rationality of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds with an integer Fano index*, in Y. KAWAMATA, V.V. SHOKUROV (eds.), *Birational algebraic geometry*, Providence, AMS, pp. 43-50.

CHELTSOV IVAN 1999, *Boundedness of Fano 3-folds of integer index*, «Mathematical Notes» 66, pp. 360-365.

CHELTSOV IVAN 2004, *Rationality of an Enriques–Fano threefold of genus five*, «Izvestiya: Mathematics» 68, pp. 607-618.

CHOW WEI-LIANG – VAN DER WAERDEN BARTEL L. 1937, *Zur algebraische Geometrie. IX*, «Math. Ann.» 113, pp. 629-704.

CILIBERTO CIRO – SALLENT DEL COLOMBO EMMA 2018, *Francesco Severi: il suo pensiero matematico e politico prima e dopo la Grande Guerra*, pp. 1-30, https://arxiv.org/abs/1807.05769.

CILIBERTO CIRO 2022, *Uno sguardo alla geometria proiettivo-differenziale*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 7.2, pp. 97-119.

CLEMENS HERBERT C. – GRIFFITHS PHILLIP A. 1972, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, «Annals of Math.» (2) 95, pp. 281-356.

COBLE ARTHUR B. 1950, *Virgil Snyder, 1869–1950*, «Bull. AMS» 56.5, pp. 468-471.

COLLINO ALBERTO – CONTE ALBERTO – VERRA ALESSANDRO 2014, *On the life and scientific work of Gino Fano*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 7, pp. 99-137.

COLLINO ALBERTO 1999, *Aldo Andreotti*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 2, I docenti, Torino, DSSP, pp. 660-662.

CONFORTO FABIO – ZAPPA GUIDO 1946, *La geometria algebrica in Italia (dal 1939 a tutto il 1945)*, in *Relationes de auctis scientiis tempore belli. A. 1939-45*, Città del Vaticano, Pontificia Academia Scientiarum, pp. 1-43.

CONFORTO FABIO 1939, *Il contributo italiano al progresso della geometria algebrica negli ultimi cento anni*, in *Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939*, vol. 1, Roma, SIPS, pp. 125-153.

CONFORTO FABIO 1940, *Gaetano Scorza*, «Annuario della R. Università degli Studi di Roma», a.a. 1939-40, pp. 790-793.

CONTE ALBERTO – CILIBERTO CIRO 2004, *La scuola di geometria algebrica italiana*, in *Storia della Scienza. La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica*, Roma, Treccani. http://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-la-scuola-di-geometria-algebrica-italiana_%28Storia-della-Scienza%29/

CONTE ALBERTO – GIACARDI LIVIA 1999, *Gino Fano*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 2, I docenti, Torino, DSSP, pp. 548-554.

CONTE ALBERTO – GIACARDI LIVIA 2016, *Segre's University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry*, in G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry. Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Basel, Birkhäuser, pp 3-91.

CONTE ALBERTO – GIACARDI LIVIA 2020, *La variegata attività organizzativa di Alessandro Terracini nel secondo dopo-guerra alla luce della corrispondenza inedita* in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 63-94.

CONTE ALBERTO – MURRE JACOB 1985, *Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, «Ann. SNS Pisa»12, pp. 43-80.

CONTE ALBERTO 1982, *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni*, Quaderni dell'UMI, n. 22, Bologna, Pitagora Editrice.

CONTE ALBERTO 1983, *Two examples of algebraic threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, in C. CILIBERTO, F. GHIONE, F. ORECCHIA (eds.), *Algebraic geometry - Open problems*, Berlin-New York, Springer, pp. 124-130.

CREMONA LUIGI 1868, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, «Jour. Crelle» 68, pp. 1-133.

CREMONA LUIGI 1884, *Prefazione al Catalogo della Biblioteca Sociale*, Appendice alle «Mem. Soc. it.» (3) 5, pp. I-IV.

D'OVIDIO ENRICO 1884, *Mutazioni e aggiunte avvenute nella R. Università di Torino dal 1872 in poi*, in *Appendice ai Cenni storici sulla Regia Università di Torino pubblicati nell'anno 1872,* Torino, Stamperia Reale, pp. 3-7.
DAVALLON JEAN 2000, *Le patrimoine: "une filiation inversée"*, «Espaces Temps» 74-75, pp. 6-16.
DE DONNO STEFANIA 2008, *La Biblioteca dell'Istituto nazionale delle assicurazioni*, «Le Carte e la Storia», pp. 97-99.
DEHN MAX – HEEGAARD PAUL 1907, *Analysis situs*, in EMW, Bd. 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 153-220.
DEL PEZZO PASQUALE 1887, *Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 1, pp. 241-271.
DESCHEPPER JULIE 2021, *Notion en débat. Le patrimoine*: http://geoconfluences.ens-lyon.fr/informations-scientifiques/a-laune/notion-a-la-une/patrimoine.
DI NICOLA LAURA 2013, *I libri "di" Italo Calvino*, «Bollettino di italianistica» 1, pp. 275-294.
DIAS CÂNDIDO SILVA 1984, *Cândido Silva Dias*, «Revista Língua e Literatura» 10-13, pp. 60-74.
DOGLACHEV IGOR 2004, *Luigi Cremona and cubic surfaces*, arXiv:math/0408283, pp. 1-12.
DOGLACHEV IGOR 2016, *A brief introduction of Enriques surfaces*, in F. OSAMU, K. SHIGEYUKI, M. ATSUSHI, S. MASA-HIKO, Y. KŌTA (eds.), *Development of Moduli Theory - Kyoto 2013*, Tokyo, Mathematical Society of Japan, pp. 1-32.
DU VAL PATRICK 1932a, *Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 276-279.
DU VAL PATRICK 1932b, *Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 345-347.
EHRHARDT CAROLINE – BRUNEAU OLIVIER – D'ENFERT RENAUD (eds.) 2022, *Patrimonialisation en mathématiques (XVIII^{e}–XX^{e} siècles)*, Cahier thématique de «Philosophia Scientiæ» 26.2.
EHRHARDT CAROLINE 2010, *Histoire sociale des mathématiques*, «Revue de synthèse» 131.4, pp. 489-493.
ENRIQUES FEDERIGO – CHISINI OSCAR 1915, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 1, Bologna, Zanichelli.
ENRIQUES FEDERIGO – CHISINI OSCAR 1934, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. 4: Funzioni ellittiche e abeliane*, vol. 4, Bologna, Zanichelli.
ENRIQUES FEDERIGO – FANO GINO 1897, *Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane dello spazio*, «Ann. Mat.» (2) 26, pp. 59-98
ENRIQUES FEDERIGO 1893, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 44, pp. 171-232.
ENRIQUES FEDERIGO 1896, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, «Mem. Soc. it.» (3) 10, pp. 1-81.
ENRIQUES FEDERIGO 1906, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, «Mem. Soc. it.» (3) 14, pp. 327-352.
ENRIQUES FEDERIGO 1909, *Le superficie di genere uno*, «Rend. R. Ac. Sci. Bologna» 13, pp. 25-28.
ENRIQUES FEDERIGO 1912, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, «Rend. ANL» (5) 21, pp. 81-83.
ENRIQUES FEDERIGO 1949, *Le superficie algebriche*, Bologna, Zanichelli.
FANO GINO – TERRACINI ALESSANDRO 1929, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia.
FANO GINO – TERRACINI ALESSANDRO 1940^{2}, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia.
FANO GINO – TERRACINI ALESSANDRO 1957^{3}, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Torino, Paravia.

FANO GINO 1892, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, «Giorn. di Mat.» 30, pp. 106-132.
FANO GINO 1893, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» 44, pp. 335-382.
FANO GINO 1894, *Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga*, «RdM» 4, pp. 170-188.
FANO GINO 1895a, *Uno sguardo alla storia della matematica*, «Atti e Mem. Acc. Virgil.», pp. 3-34.
FANO GINO 1895b, *Contributo alla teoria dei numeri algebrici, osservazioni varie e parte IX del Formulario*, «RdM» 5, pp. 1-10.
FANO GINO 1897a, *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sé*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 11, pp. 241-246.
FANO GINO 1897b, *Lezioni di geometria non euclidea*, Roma, Cippitelli.
FANO GINO 1901, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 51, pp. 1-79.
FANO GINO 1904, *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti*, «Ann. Mat.» (3) 10, pp. 251-285.
FANO GINO 1905, *Un po' di matematica per i non matematici*, «Rivista d'Italia» 2.9, pp. 366-377.
FANO GINO 1906, *Sopra alcune superficie del IV ordine rappresentabili sul piano doppio*, «Rend. R. Ist. Lomb.» (2) 39, pp. 1071-1086.
FANO GINO 1907a, *Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX Jahrhundert*, in EMW 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 221-228.
FANO GINO 1907b, *Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip*, in EMW 3-1-1, Leipzig, Teubner, pp. 289-388.
FANO GINO 1908a, *La geometria non euclidea*, «Scientia» 26, pp. 257-282.
FANO GINO 1908b, *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, «Atti R. Acc. Sci. Torino» 43, pp. 973-984.
FANO GINO 1910a, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 29, pp. 98-118.
FANO GINO 1910b, *Scuola Operaia Serale Femminile. Relazione 1909-1910. Unione Femminile Nazionale. Sezione di Torino*, Torino, Derossi, pp. 1-17.
FANO GINO 1910c, *Sui fondamenti della geometria*, «Boll. Mathesis» 2, pp. 119-127.
FANO GINO 1911, *Matematica esatta e matematica approssimata*, «Boll. Mathesis» 3, pp. 106-126.
FANO GINO 1915a, *Osservazioni su alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, «Atti. R. Acc. Sci. Torino» 50, pp. 1067-1072.
FANO GINO 1915b, *Sui fondamenti della geometria*, «Rivista di Filosofia» 7, pp. 374-408.
FANO GINO 1920a, *A proposito di un articolo del giornale "La Sera"*, «Boll. Mathesis» 12, pp. 128-131.
FANO GINO 1920b, *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali*, «Rend. ANL» (5) 29, pp. 408-415, 485-491, 113-118, 175-182, 231-236.
FANO GINO 1922, *Le Scuole di Magistero. Relazione al Congresso della Società Italiana Mathesis*, «Period. Mat.» (4) 2, pp. 102-110.
FANO GINO 1923a, *A preface to a series of special lectures on 'Italian Geometry'*, Shrewsbury, Walker.
FANO GINO 1924a, *I gruppi di trasformazioni nella geometria*, «Scientia» 36, pp. 145-154.
FANO GINO 1924b, *L'analysis situs I*, «Scientia» 36, pp. 217-230.
FANO GINO 1924c, *L'analysis situs II*, «Scientia» 36, pp. 289-300.
FANO GINO 1924d, *Intenti, carattere, valore formativo della matematica. Conferenza tenuta alla scuola di guerra il 15 marzo 1924*, «Alere Flammam» 2, pp. 9-32.
FANO GINO 1927, *Les cycles de la géométrie non euclidienne au point de vue projectif*, in *In memoriam N.I. Lobatschevskii: Collection des mémoires présentèes par les savants de divers pays à la Société*

physico-mathématique de Kazan à l'occasion de la célèbration du centenaire de la découverte de la géométrie non-Euclidienne par N.I. Lobatcheffsky (12/24 Février 1926), Kazan, Glavnauka, pp. 17-24.

FANO GINO 1928a, *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 445-451.

FANO GINO 1928b, *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 529-534.

FANO GINO 1928c, *Congruenze Ω_0 di curve razionali e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare*, «Rend. ANL» (6) 8, pp. 623-627.

FANO GINO 1930b, *Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri*, «Rend. ANL» (6) 11, pp. 227-232.

FANO GINO 1930c, *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, «Rend. ANL» (6) 11, pp. 329-335.

FANO GINO 1931a, *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 35-42.

FANO GINO 1931b, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 115-121.

FANO GINO 1932, *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli*, «Rend. ANL» (6) 15, pp. 3-5.

FANO GINO 1934, *Scorrendo il volume di F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert*, «Conf. fis. mat. Torino» 4, pp. 151-171.

FANO GINO 1935a, *A proposito della nota del prof. Majorana: Sull'insegnamento della fisica in Italia*, «Nuovo Cimento» 12, pp. 49-51.

FANO GINO 1935b, *Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività)*, Bologna, Zanichelli.

FANO GINO 1935c, *Complementi di geometria*, Torino, Gili.

FANO GINO 1936a, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Istituto Matematico della R. Università, pp. 329-349.

FANO GINO 1936b, *Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, «Rend. ANL» (6) 23, pp. 813-818.

FANO GINO 1937, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Mem. R. Acc. d'Italia» 8, pp. 23-64.

FANO GINO 1938a, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, in *Atti del I Congresso dell'UMI tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 aprile 1937*, Bologna, Zanichelli, pp. 245-250.

FANO GINO 1938b, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno*, «Mem. Soc. it.» (3) 24, pp. 41-66.

FANO GINO 1938c, *Geometrie non euclidee e non archimedee*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Hoepli, Milano, pp. 435-511.

FANO GINO 1942a, *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche*, «Comm. Math. Helv.» 14, pp. 193-201.

FANO GINO 1942b, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche*, «Comm. Math. Helv.» 14, pp. 202-211.

FANO GINO 1944, *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno*, «Revista MFT» 4, pp. 69-79.

FANO GINO 1946, *Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni*, «Rend. ANL» 8 (1), pp. 463-466.

FANO GINO 1947a, *Le trasformazioni di contatto birazionali del piano*, «Comm. Math. Helv.» 20, pp. 181-215.
FANO GINO 1947b, *Su alcuni lavori di W.L. Edge*, «Rend. ANL» 8 (3), pp. 179-185.
FANO GINO 1947c, *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Comm. Acc. Pontificia» 11, pp. 635-720.
FANO GINO 1949, *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, «Rend. ANL» 8 (6), pp. 151-156.
FANO GINO 1950, *Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 9, pp. 21-45.
FANO GINO/ ANDREOTTI ALDO (ed.) 1953, *Les surfaces du quatriéme ordre*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 12, pp. 301-313.
FANO ROBERT 2004, *In Loving Memory of my Father Gino Fano*, in A. COLLINO, A. CONTE, M. MARCHISIO (eds.), *The Fano Conference. Torino 29 September-5 October 2002*, Torino, Dip. di Matematica, pp. 1-4.
FANO UGO 2000, *The memories of an Atomic Physicist for my Children and Grandchildren*, «Physics Essays» (2) 13, pp. 177-197.
FONTANARI CLAUDIO – GATTEI STEFANO 2023, *Francesco Severi's Mathematical Library*, INDAM series (in corso di stampa).
FOX ROBERT 2016, *Science without Frontiers: Cosmopolitanism and National Interests in the World of Learning. 1870–1940*, Corvallis, Oregon State University Press.
FUBINI GUIDO / LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA – TERRACINI LEA (eds.) 2020, *Lezioni di teoria dei numeri 1916-17*, Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese n. 4, Torino, CSSUT.
FUJITA TAKAO 1990, *Classification theories of polarized varieties*, LMS *Lecture Note Series* 155, Cambridge, CUP.
GARFIELD EUGENE 1979, *Is citation analysis a legitimate evaluation tool?*, «Scientometrics» 1, pp. 359-375.
GARIO PAOLA (ed.) 2010, *Lettere e Quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo: corrispondenza con Gino Fano*: http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/lettere_fano.htm
GARIO PAOLA 1989, *Su alcune carte di Corrado Segre recentemente rinvenute*, «Atti Acc. Sci. Torino» 123, pp. 187-198.
GARIO PAOLA 2016, *Guido Castelnuovo: l'uomo e lo scienziato*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 147-183.
GEFEN ALEXANDRE 2015, *Les enjeux épistémologiques des humanités numériques*, «Socio: La nouvelle revue des sciences sociales» 4, pp.61-74.
GENNA CATERINA 2021, *Federigo Enriques matematico e filosofo*, Milano, Angeli.
GHERARDELLI FRANCESCO 1981, *Aldo Andreotti*, «Boll. UMI» (5) 18, pp. 337-345.
GIACARDI LIVIA – LUCIANO ERIKA – PIZZARELLI CHIARA – ROERO CLARA SILVIA 2015, *Gli Archivi di Corrado Segre presso l'Università di Torino,* «RSUT» 4.2, pp. 49-57.
GIACARDI LIVIA – LUCIANO ERIKA – PIZZARELLI CHIARA – ROERO CLARA SILVIA 2016, *Corrado Segre's Archives at the University of Turin*, in G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry*, Basel, Birkhäuser, pp. 717-730.
GIACARDI LIVIA – RINALDELLI LUCIA 2000, *I fondi Fano e Terracini della Biblioteca Speciale di Matematica "G. Peano" di Torino*, «QSUT» 5.4, pp. 381-413.
GIACARDI LIVIA – ROERO CLARA SILVIA 1999, *Biblioteca Speciale di Matematica "Giuseppe Peano"*, in C.S. ROERO (ed.), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, vol. 1, *Ricerca, Insegnamento, Collezioni scientifiche*, Torino, DSSP, pp. 437-458.
GIACARDI LIVIA – VARETTO TIZIANA 1996, *Il Fondo Corrado Segre della Biblioteca G. Peano di Torino*, «QSUT» 1, pp. 337-370.

GIACARDI LIVIA – LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2023, *Gino Fano (1871-1952). The scientific trajectory of an Italian geometer between internationalism and persecution*, INDAM series (in corso di stampa).

GIACARDI LIVIA (ed.) 2013-23, *Corrado Segre e la Scuola Italiana di Geometria Algebrica*: http://www.corradosegre.unito.it/.

GIACARDI LIVIA 1987, *Gino Fano*, in L. GIACARDI – C.S. ROERO (eds.), *Bibliotheca Mathematica*, Torino, Allemandi, pp. 173-176.

GIACARDI LIVIA 2001, *Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica*, «Annali di Storia delle Università italiane», pp. 137-160.

GIACARDI LIVIA 2003, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, «Boll. UMI» (8) 6-A, pp. 141-164.

GIACARDI LIVIA 2004, *Il magistero di Corrado Segre a Torino. I quaderni manoscritti delle lezioni universitarie (1888-1924)*, in B. CASTRILLO, Á. MANUEL (eds.) *Manuales y textos de enseñanza en la universidad liberal: VII congreso internacional sobre la historia de las universidades hispánicas*, Madrid, Biblioteca del Instituto Antonio de Nebrija de estudios sobre la universidad, pp. 449-476.

GIACARDI LIVIA 2006, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*, in *Da Casati a Gentile*, in L. GIACARDI (ed.), *Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Lumières Internationales, pp. 1-63.

GIACARDI LIVIA 2010, *The Italian School of Algebraic Geometry and Mathematics Teaching in Secondary Schools. Methodological Approaches, Institutional and Publishing Initiatives*, «International Journal for the History of Mathematics Education» (5) 1, pp. 1-19.

GIACARDI LIVIA 2011, *Testimonianze sulla Scuola italiana di geometria algebrica nei fondi manoscritti della Biblioteca "Giuseppe Peano" di Torino*, in S. MONTALDO, P. NOVARIA (eds.), *Gli archivi della scienza: l'Università di Torino e altri casi italiani*, Milano, Angeli, pp. 105-119.

GIACARDI LIVIA 2013, *The Italian School of Algebraic Geometry and the Teaching of Mathematics in secondary schools: motivations, assumptions and strategies*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 71, pp. 421-461.

GIACARDI LIVIA 2020, *La formazione scientifica di Alessandro Terracini e i successi prima delle leggi razziali* in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 13-38.

GINGRAS YVES 2010, *Mapping the structure of the intellectual field using citation and co-citation analysis of correspondences*, «History of European Ideas» 36(3), pp. 330-339.

GIRALDO LUIS – LOPEZ ANGELO FELICE – MUÑOZ ROBERTO 2004, *On the existence of Enriques-Fano threefolds of index greater than one*, «Journal of algebraic geometry» (1) 13, pp. 143-166.

GISPERT HELENE – NABONNAND PHILIPPE – PEIFFER JEANNE (eds.) 2015, *Circulation et échanges mathématiques. Études de cas*, n° spécial de «Philosophia Scientiæ» 19.2.

GMÜR MARKUS 2003, *Co-citation analysis and the search for invisible colleges: A methodological evaluation*, «Scientometrics» 57, pp. 27-57.

GODEAUX JEAN – GODEAUX PAUL 1995, *Lucien Godeaux (1887-1975). Sa vie–Son ouvre*, «Bull. Soc. Liège» 64, pp. 1-77.

GODEAUX JEAN 1975, *Lucien Godeaux*, «Gazette des Mathématiciens» 4, pp. 101-105.

GODEAUX LUCIEN 1926a, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. I*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 12, pp. 726-741.

GODEAUX LUCIEN 1926b, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. II*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 12, pp. 892-904.

GODEAUX LUCIEN 1927, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. III*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 13, pp. 114-133.

GODEAUX LUCIEN 1930, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» (5)16, pp. 907-922.

GODEAUX LUCIEN 1933, *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» (5) 19, pp. 134-140.

GODEAUX LUCIEN 1962a, *Une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un*, «Bull. Soc. Liège» 31, pp. 751-756.

GODEAUX LUCIEN 1962b, *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un*, «Bull. Ac. Belgique» 48, pp. 1251-1257.

GODEAUX LUCIEN 1970, *Une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un*, «Bull. Soc. Liège» 39, pp. 439-441.

GUERRAGGIO ANGELO – NASTASI PIETRO 2005, *Italian Mathematics Between the Two World Wars*, Basel, Birkhäuser.

GUILLOPE LAURENT 2006, *Patrimoine scientifique: droits d'auteur et du lecteur*, in *La propriété intellectuelle en question(s), regards croisés européens*, Paris, Litec, pp. 65-71.

HARTSHORNE ROBIN 1977, *Algebraic geometry*, New York, Springer.

HAWKINS THOMAS W. 2000, *Emergence of the Theory of Lie Groups*, New York, Springer.

HENDERSON ARCHIBALD 1911, *The twenty-seven lines upon the cubic surface*, Cambridge, CUP.

HOYLE JEREMY 1997, *Home is where the wind blows*, Oxford, OUP.

IRIYE AKIRA – SAUNIER PIERRE (eds.) 2016, *The Palgrave Dictionary of Transnational History: From the mid-19th century to the present day*, Basel, Springer.

ISKOVSKIKH VASILIĬ A. – MANIN YURIĬ I. 1971, *Three -dimensional quartics and counterexamples to the Lueroth problem*, «Sbornik: Mathematics» 86.128, pp. 140-166.

ISKOVSKIKH VASILIĬ A. 1977, *Fano 3-folds. I*, «Math. URSS Izv.» 11, pp. 485-527.

ISKOVSKIKH VASILIĬ A. 1978, *Fano 3-folds. II*, «Math. URSS Izv.» 12, pp. 469-506.

ISRAEL GIORGIO (ed.) 2017-19, *Correspondence of Luigi Cremona (1830-1903)*, 2 vols., Turnhout, Brepolis.

ISRAEL GIORGIO 1998, *Vito Volterra e la riforma scolastica Gentile*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (8) 1-A, pp. 269-287.

JADÉ MARIANNICK 2004, *Le patrimoine immatériel. Nouveaux paradigmes, nouveaux enjeux*, «La Lettre de l'OCIM» 93, pp. 27-37.

JANOVITZ ALESSANDRO – MERCANTI FABIO 2008, *Gino Fano, in Sull'apporto evolutivo dei matematici ebrei mantovani nella nascente nazione italiana*, Monografie di EIRIS, Milano, EIRIS, pp. 43-61, https://diazilla.com/doc/811027/sull–apporto–evolutivo–dei–matematici–ebrei–mantovani–nella.

JOVANOVIC FRANCK – REBOLLEDO-DHUIN VIERA – VERDIER NORBERT (eds.) 2018, *Science(s) et édition(s), des années 1780 à l'entre-deux-guerres*, n° spécial de «Philosophia Scientiæ» 22.1.

JUŃSKI STANISŁAW 1913, *Ein Beitrag zur Theorie des F^2-Büschels und F^2-Bündels mit gemeinsamem Polartetraeder*, «Sitz. Wien Ak. Wiss.» 122, pp. 1659-1681.

KARZHEMANOV ILYA 2011, *On some Fano-Enriques threefolds*, «Advances in Geometry» (1) 11, pp. 117-129.

KLEIN FELIX 1902, *Anwendung der differential und integralrechnung auf geometrie, eine revisionder prinzipien: vorlesung gehalten wahrend des sommersemesters 1901*, Leipzig, Teubner.

KLEIN FELIX/ FANO GINO (trad.) 1890, *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*, «Ann. Mat.» 17, pp. 307-343.

KLEIN FELIX/ ROSEMANN WALTHER (ed.) 1928, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlino, Springer.

KOBAYASHI SHOSHICHI – OCHIAI TAKUSHIRO 1973, *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, «Journal of Mathematics of Kyoto University» 13, pp. 31-47.

KOLLÁR JÁNOS – MIYAOKA YOICHI – MORI SHIGEFUMI 1992, *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, «Journal of Differential Geometry» 36, pp. 765-769.

KNUTSEN ANDREAS LEOPOLD – LOPEZ ANGELO FELICE – MUÑOZ ROBERTO 2011, *On the Extendability of Projective Surfaces and a Genus Bound for Enriques-Fano Threefolds*, «Journal of Differential Geometry» 88, pp. 483-518.

LEFSCHETZ SOLOMON 1924, *L'Analysis situs et la Geométrie Algébrique*, Paris, Gauthier-Villars.

LEFSCHETZ SOLOMON 1968, *A page of mathematical autobiography*, «Bull. AMS» 74, pp. 854-879.

LEME DA SILVA ALINE – ALVIM MÁRCIA HELENA 2019, *Achille Bassi e os Elementos Contribuintes à Institucionalização da Matemática no Ensino Superior Brasileiro*, «Revista Brasileira de História da Matemática» 18, pp. 55-72.

LERDA FRANCESCO 1994, *Fano Gino*, DBI, vol. 44, pp. 596-597, https://www.treccani.it/enciclopedia/gino-fano_%28Dizionario-Biografico%29/

LOREY WILHELM 1926, *Zur Schulreform*, «Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften: Organ des Bereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts» 32.1, p. 22-25.

LORIA GINO 1931, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia*, Padova, Cedam, 4 ed.

LUCIANO ERIKA – ROERO CLARA SILVIA 2010, *La Scuola di Giuseppe Peano*, Torino, DSSP, pp. 77-92.

LUCIANO ERIKA – ROERO CLARA SILVIA 2012, *From Turin to Göttingen: dialogues and correspondence (1879-1923)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 32, pp. 7-232

LUCIANO ERIKA – ROERO CLARA SILVIA 2016, *Corrado Segre and his disciples: the construction of an international identity for the Italian School of algebraic geometry*, in G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry. Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Basel, Birkhäuser, pp. 93-241.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2020a, *Insegnare la geologia con l'alpinismo e l'idrodinamica con il canottaggio. Gli insegnanti di matematica torinesi di fronte agli abbinamenti gentiliani*, in R. BONINO, D. MAROCCHI, M. RINAUDO, M. SERIO (eds.), *Atti del IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica Di.Fi.Ma. 2019*, Torino, Università degli Studi, 2020, pp. 269-274.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2020b, *Sul ruolo euristico dei patrimoni matematici: il case-study delle collezioni di A. Terracini*, «RSUT» 9.2, pp. 273-332.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA – TERRACINI LEA 2020c, *Le Lezioni di Teoria dei numeri di Guido Fubini (1916-1917)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 40.2, 2020, pp. 367-394.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2021, *On Gino Fano's patrimony: Library and Miscellany,* «RSUT» 10.1, pp. 45-73.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2022a, *Il dovere e il piacere di insegnare: l'impegno di Gino Fano nell'educazione matematica*, «Studi Piemontesi» 51.1, pp. 93-105.

LUCIANO ERIKA – SCALAMBRO ELENA 2022b, *Gino Fano's late investigations on Fano-Enriques threefolds*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 80.2, pp. 23-48.

LUCIANO ERIKA 2017, *Scienza in esilio. Gustavo Colonnetti e i campi universitari in Svizzera (1943-1945)*, «Pristem Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura» 41-42, Milano, Egea.

LUCIANO ERIKA 2018, *Constructing an International Library: The Collections of Journals in Turin's Special Mathematics Library*, «Historia Mathematica» 45 pp. 433-449.

LUCIANO ERIKA 2019, *La miscellanea Artom*, «RSUT» 8.2, pp. 293-326.

LUCIANO ERIKA 2019, *Terracini Alessandro*, DBI, vol. 95, https://www.treccani.it/enciclopedia/alessandro-terracini_%28Dizionario-Biografico%29/

LUCIANO ERIKA 2020a, *'Alla ricerca di uno spazio di sopravvivenza intellettuale': A. Terracini, le leggi razziali e il soggiorno a Tucumán (1938-1948)*, in A. CONTE, L. GIACARDI (ed.), *Alessandro Terracini (1889-1968). Da Torino a Torino*, «Quaderni dell'Accademia delle Scienze di Torino» 26, pp. 39-62.

LUCIANO ERIKA 2020b, *Jewish intellectual diaspora and the circulation of mathematics. The case of Alessandro Terracini*, in M.T. BORGATO, C. PHILI (eds.), *In Foreign Lands: The Migration of Scientists for Political or Economic Reasons*, Basel, Springer, pp. 1-19.

LUCIANO ERIKA 2021, *On Francesco G. Tricomi's heritage: archive and miscellany,* «Historia Mathematica» 55, pp. 73-84.

LUCIANO ERIKA 2022a, *Looking for a Space of Intellectual Survival. The Jewish Mathematical Emigration from Fascist Italy*, Series Science Networks. Historical Studies, Basel, Springer.

LUCIANO ERIKA 2022b, *Gino Fano in Svizzera (1939-1945)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» 31, pp. 1-30.

LUCIANO ERIKA 2022c, *Turin, 1916, G. Fubini: une expérience de patrimonialisation en théorie des nombres*, Cahier thématique de «Philosophia Scientiæ» 26.2, pp. 123-144.

LUCIANO ERIKA 2023a, *Storie di mondi di carta: la Biblioteca di G. Peano*, in P.-E. BOUR – M. REBUSCHI – L. ROLLET (eds.), *Sciences, Circulations, Révolutions*, Nancy (in corso di stampa).

LUCIANO ERIKA 2023b, *A permanent construction site: from Segre's mind palace to his libraries*, «Nuncius» 38, 14 pp. (in corso di stampa).

MAJORANA QUIRINO 1934, *Sull'insegnamento della fisica in Italia*, «Nuovo Cimento» 11.6, pp. 410-414.

MAJORANA QUIRINO 1940, *L'insegnamento della Fisica*, «Nuovo Cimento» 17.1, pp. 26-33.

MANARA CARLO FELICE 1957, *Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica*, «Period. Mat.» (5) 35, pp. 1-13.

MANTOVANI WALTER 2005, *Gino Fano (1871-1952). Un mantovano fra i più illustri matematici del suo tempo*, «Atti e Mem. Acc. Virgil.» 73, pp. 195-206.

MARCOLONGO ROBERTO 1933, *Le Scienze Fisiche e Biologiche in Roma e nel Lazio*, Roma, Istituto di Studi Romani.

MASSARINI IGINIA 1899, *Intorno alle coniche rispetto alle quali due altre sono tra loro polari reciproche*, «Giorn. di Mat.» 37, pp. 23-40.

MCCLEARY JOHN 2004, *La topologia algebrica all'inizio del XX secolo*, in *Storia della Scienza. La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica*, Roma, Treccani, https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-la-topologia-algebrica-all-inizio-del-xx-secolo_%28Storia-della-Scienza%29/

MENGHINI MARTA 1986, *Sul ruolo di C. Segre nello sviluppo della geometria algebrica italiana*, «Rivista di Storia della Scienza» 3, pp. 303-322.

MENGHINI MARTA 2016, *Guido Castelnuovo e l'insegnamento della matematica*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 185-197.

MEYER FRANZ 1928, *Flächen dritter Ordnung*, in EMW 3-2-2a, Leipzig, Teubner, pp. 1437-1531.

MEYER FRANZ 1930, *Flächen vierter und höherer Ordnung*, in EMW 3-2-2a, Leipzig, Teubner, pp. 1533-1779.

MILETTO ENRICO – NOVARINO MARCO 2011, *«… Senza distinzione politica e religiosa». Repertorio bibliografico e archivistico sull'associazionismo laico a Torino e provincia 1848-1925*, Torino, Centro Studi Piero Calamandrei.

MONK DAVID 1998, *Obituary: Professor W. L. Edge: 1904–1997*, «Proc. Edinburgh Math. Soc.» (2) 41.3, pp. 631-641.

MORI SHIGEFUMI – MUKAI SHIGERU 1981, *Classication of Fano 3-folds with* $B_2 \geq 2$, «Manuscripta Mathematica» 36.2, pp. 147-162. Erratum 2003, *ibid.* 110.3, p. 407.

MORNATI STEFANIA 2002, *L'edificio della Scuola di Matematica di Gio Ponti alla Città universitaria di Roma*, «Boll. UMI» (8) 5-A, pp. 43-71.

MOUTARD THEODORE 1864, *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre*, «Nouv. Ann.» (2) 3, pp. 536-539.

MUKAI SHIGERU 1989, *Biregular classication of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3,* «Proc. Nat. Acad. USA» 86, pp. 3000-3002.

MURRE JACOB 1982, *Classification of Fano threefolds according to Fano and Iskovskikh,* in A. CONTE (ed.), *Algebraic threefolds: proceedings of the 2nd 1981 session of the Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.), held at Varenna, Italy, June 15-23, 1981,* Berlin, Springer, LNM 947, pp. 35-92.

MURRE JACOB 1994, *On the work of Gino Fano on three-dimensional algebraic varieties*, in A. BRIGAGLIA, C. CILIBERTO, E. SERNESI (eds.), *Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Supplemento «Rend. Circ. Mat. Palermo» (2) 36, pp. 219-229.

NASTASI PIETRO – ROGORA ENRICO 2020, *From internationalization to autarky: Mathematics in Rome between the two world wars,* «Rend. Mat. e Appl.» 41, pp. 1-50.

NASTASI PIETRO 1998, *La matematica italiana dal manifesto degli intellettuali fascisti alle leggi razziali*, «Boll. UMI» (8) 1-A, pp. 317-345.

NASTASI PIETRO 2002, *La Mathesis e il problema della formazione degli insegnanti*, in G. BOLONDI (ed.) *La Mathesis. La prima metà del Novecento nella Società italiana di Scienze matematiche e fisiche*, Pristem/Storia Note di Matematica, Storia, Cultura, vol. 5, Milano, Eleusi, pp. 59-119.

PALLADINO FRANCO – PALLADINO NICLA 2006, *Dalla moderna geometria alla nuova geometria italiana: viaggiando per Napoli, Torino e dintorni: lettere di Sannia, Segre, Peano, Castelnuovo, D'Ovidio, Del Pezzo, Pascal e altri a Federico Amodeo*, Firenze, Olschki.

PANNELLI MARINO 1906a, *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni*, «Rend. ANL» (5) 15, pp. 483-489.

PANNELLI MARINO 1906b, *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, «Rend. ANL» (5) 15, pp. 619-629.

PAOLONI GIOVANNI (ed.) 1991, *Il Fondo "Enrico Bompiani"*, Milano, Università Bocconi.

PATRIZIO GIORGIO 2005, *Intervista a Guido Zappa*, «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (8) 8-A, pp. 241-260.

PICCO BOTTA LUCIANA – VERRA ALESSANDRO 1983, *The non rationality of the generic Enriques' threefold*, «Compositio Mathematica» 48, pp. 167-184.

PICCOLOMO ADELAIDE – VESPUCCI LUCILLA 1993, *La biblioteca del Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"*, in F. CONTI, E. GIUSTI (eds.), *Oltre il compasso. La geometria delle curve*, Roma, Edizioni Carte Segrete, pp. 76-88.

PIZZOCCHERO LIVIO 1998, *Geometria differenziale,* in S. DI SIENO, A. GUERRAGGIO, P. NASTASI (eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, pp. 321-379.

POINCARE HENRI 1899, *La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*, «Ens. Math.» 1, pp. 157-162.

POMPEO FARACOVI ORNELLA 2006, *Enriques, Gentile e la matematica*, in L. GIACARDI (ed.), *Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Lumières Internationales, pp. 305-321.

PONTRJAGIN LEON 1937, *Sur les transformations des sphères en sphères*, in *Comptes Rendus du Congrès International des Mathematiciens. Oslo 1936*, vol. 2, Olso, Brøggers, p. 140.

PROKHOROV YURI 2007, *On Fano-Enriques threefolds*, «Sbornik: Mathematics» 198, pp. 559-574.

PUCCIANTI LUIGI 1926, *Considerazioni didattiche comunicate al congresso di Roma–Dicembre 1925*, «Nuovo Cimento» 3, pp. XLII-XLIV.

PUCCIANTI LUIGI 1934, *Per l'insegnamento elementare della fisica*, «Nuovo Cimento» 11.4, pp. 255-261.

RAUTENBERG MICHEL 2003, *Comment s'inventent de nouveaux patrimoines: usages sociaux, pratiques institutionnelles et politiques publiques en Savoie*, «Culture & Musées» 1, pp. 19-40.

ROGORA ENRICO 2016, *Guido Castelnuovo e la matematica a Roma tra Risorgimento e Belle Époque*, «Rend. Mat. e Appl.» (7) 37, pp. 219-233.

ROLLET LAURENT – NABONNAND PHILIPPE 2002, *Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*, «Gazette des Mathématiciens» 92, pp.11-25.

ROLLET LAURENT 2017, *La correspondance de jeunesse d'Henri Poincaré: les années de formation, de l'École polytechnique à l'École des mines (1873-1878)*, Basel, Birkhäuser.

ROSENBLATT ALFRED 1931, *Varietà algebriche a tre e più dimensioni*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 93-113.

ROTH LEONARD 1955, *Algebraic threefolds. With special regard to problems of rationality*, Berlin, Springer.

SALMON PAOLO 1990, *Le origini dell'algebra commutativa in Italia*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 48, pp. 431-438.

SALMON PAOLO 1996, *Un sodalizio torinese degli anni '50*, in E. GALLO, L. GIACARDI, C.S. ROERO (eds.), *Conferenze e Seminari 1994-1995*, Torino, Ass. Subalpina Mathesis e Seminario St. Mat. «Tullio Viola», pp. 224-243.

SANINI ARISTIDE 1999, *Rileggendo i Rendiconti*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 57, pp. 1-10.

SANO TAKAMICHI 1995, *On classification of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Fano index 1*, «Journal of the Mathematical Society of Japan» 47, pp. 369-380.

SCHLÄFLI LUDWIG 1858, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface*, «Quart. Journ.» 2, pp. 55-65, 110-121.

SEGRE BENIAMINO 1932, *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri. Prolusione al Corso di Geometria Superiore, tenuta in Bologna il 13 gennaio 1932*, «Ann. Mat.» (4) 11, pp. 1-16.

SEGRE BENIAMINO 1952, *Gino Fano. Necrologio*, «Archimede» 4, pp. 262-263.

SEGRE BENIAMINO 1963, *The rise of algebra and the creation of algebraic geometry*, «Cahier d'histoire mondiale» 7, pp. 383-406.

SEGRE BENIAMINO 1975, *Lucien Godeaux*, «Boll. UMI» (4) 11, pp. 639-644.

SEGRE BENIAMINO 1976, *Leonard Roth*, «Bull. LMS» 8, pp. 194-202.

SEGRE CORRADO / CONTE ALBERTO – GIACARDI LIVIA – RASPANTI MARIA ANNA (eds.) 2020, *Lezioni inedite di due corsi universitari*, Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese n. 5, Torino, CSSUT.

SEGRE CORRADO 1883, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 36, pp. 3-86.

SEGRE CORRADO 1888, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (2) 38, pp. 1-48.

SEGRE CORRADO 1891, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 5, pp. 192-204.

SEGRE CORRADO 1892, *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve*, «Bibl. Math.» 6, pp. 33-47.

SEGRE CORRADO 1894, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, «Ann. Mat.» (2) 22, pp. 41-142.

SEGRE CORRADO 1903, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie*, «Atti. R. Acc. Sci. Torino» 38, pp. 764-766.

SEGRE CORRADO 1910, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 30, pp. 87-121, 346-348.

SEIFERT HERBERT – THRELFALL WILLIAM 1934, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, Teubner.

SERRE JEAN-PIERRE 1959, *On the Fundamental Group of a Unirational Variety*, «Jour. LMS» (1) 34, pp. 481-484.
SEVERI FRANCESCO / SEGRE BENIAMINO (ed.) 1930, *Conferenze di Geometria Algebrica*, Roma, Genio Civile.
SEVERI FRANCESCO 1906, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, «Atti R. Ist. Veneto» 65, pp. 625-643.
SEVERI FRANCESCO 1907, *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, «Rend. ANL» (5) 16, pp. 337-344.
SEVERI FRANCESCO 1909, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, «Atti R. Ist. Veneto» 68, pp. 249-260.
SEVERI FRANCESCO 1910, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» 30, pp. 265-288.
SEVERI FRANCESCO 1926, *Trattato di Geometria Algebrica*, vol. 1, Bologna, Zanichelli.
SEVERI FRANCESCO 1931, *Topologia*, Buenos Aires, Imprenta de la Universidad.
SEVERI FRANCESCO 1932, *Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques*, in *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932*, vol. 1, Zürich, Füssli, pp. 209-220.
SEVERI FRANCESCO 1933, *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*, «Mem. R. Acc. d'Italia» 4, pp. 71-129.
SHOKUROV VYACHESLAV V. 1980a, *Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold*, «Math. URSS Izv.» 14, pp. 395-405.
SHOKUROV VYACHESLAV V. 1980b, *The existence of a straight line on Fano 3-folds*, «Math. URSS Izv.» 15, pp. 173-209.
SIEGMUND-SCHULTZE REINHARD 2001, *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, Series Science Networks. Historical Studies, Basel, Springer.
SINESTRARI EUGENIO 1979-80, *La Biblioteca dell'Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"*, «Bollettino della Facoltà di Scienze MFN» 3, pp. 55-58.
SMALL HENRY G. 1977, *Co-citation model of a scientific speciality. Longitudinal study of collagen research*, «Social Studies of Science» 7.2, pp. 139-166.
SOULU FRÉDÉRIC – SCHIAVON MARTINA 2022, *Tracer le parcours d'un objet scientifique avec les procès-verbaux et les bases instruments du Bureau des longitudes*, «Artefact» 17, pp. 177-216.
STRUIK DIRK J. 1971, *Fano Gino*, DSB, vol. 4, pp. 522-523.
TERRACINI ALESSANDRO 1931, *Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna, Zanichelli, pp. 301-304.
TERRACINI ALESSANDRO 1952, *Gino Fano*, «Boll. UMI» (3) 7, pp. 485-490.
TERRACINI ALESSANDRO 1953, *Commemorazione del Socio Gino Fano*, «Rend. ANL» (8) 14, pp. 702-715.
TERRACINI ALESSANDRO 1968, *Ricordi di un matematico. Un sessantennio di vita universitaria*, Roma, Cremonese.
TERRACINI BENVENUTO 1932, *Il centenario della Pia Società israelitica di Torino: 1832-1932*, «La rassegna mensile di Israel» (2) 6.3, pp. 93-109.
TOGLIATTI EUGENIO 1970, *Leonard Roth*, «Boll. UMI» (3) 4, pp. 326-332.
TRICOMI FRANCESCO 1967, *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori (Bibliografia commentata 1916-1967)*, Padova, Cedam.
TRICOMI FRANCESCO 1962, *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, «Mem. R. Acc. Sci. Torino» (4) 1, pp. 1-120.
TYRRELL JOHN A. 1961, *The Enriques threefold*, «Mathematical Proc. Cambridge» 57, pp. 897-898.

VERRA ALESSANDRO 2005, *Problemi di razionalità ed unirazionalità in geometria algebrica*, «Boll. UMI» (8) 8-B, n. 1, pp. 77-102.

VISCONTI FRANCESCA 2016, *Guido Ascoli: ricerca, insegnamento e attività istituzionale*. Tesi di Laurea magistrale, Università di Torino, Dip. di Matematica "G. Peano", rel. Prof.ssa E. Luciano, a.a. 2015-16.

WEIL ANDRÉ 1935, *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques*, ASI 206, pp. 1-16.

ZAPPA GUIDO 1952, *La matematica, oggi*, Roma, Studium.

ZARISKI OSCAR 1935, *Algebraic surfaces*, Berlin, Springer.

ZEULI MODESTINO 1971, *Indice dei Rendiconti del Seminario Matematico. Anni Accademici 1929-30 – 1970-71*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino» 30, pp. I-VI, 1-109.

ZUCCHERI LUCIANA – ZUDINI VERENA 2007a, *Animi divisi. Vicende dell'insegnamento della matematica nella Venezia Giulia dal 1918 al 1923*, Trieste, EUT.

ZUCCHERI LUCIANA – ZUDINI VERENA 2007b, *Identity and culture in didactic choices made by mathematics teachers of the Trieste Section of 'Mathesis' from 1918 to 1923*, «The International Journal for the History of Mathematics Education» 2.2, pp. 39-65.

ZUCCHERI LUCIANA – ZUDINI VERENA 2012, *Didattica della matematica nell'Impero asburgico e nel Regno d'Italia all'inizio del XX secolo:un confronto*, «QuaderniCIRD» 4, pp. 6-19.

Fonti iconografiche

Indice dei nomi

Ringraziamenti

Al termine di questo percorso desidero rivolgere un sentito ringraziamento alla prof.ssa Erika Luciano che ha seguito con infinita pazienza questa tesi nelle fasi di progettazione, ricerca, elaborazione e stesura, fornendomi preziosi suggerimenti, spunti e riflessioni e incoraggiandomi a muovere i miei primi passi nel mondo della ricerca in Storia delle Matematiche.

Un sincero grazie alla prof.ssa Silvia Roero per tutti i consigli che mi ha fornito e per l'enorme disponibilità mostrata nella supervisione all'edizione critica delle carte di Fano.

Un immenso ringraziamento va anche alla prof.ssa Livia Giacardi per diverse ragioni: il suo costante supporto, umano e professionale; la condivisione di informazioni e documenti archivistici sulla Scuola geometrica italiana; l'opportunità di pubblicare parte del mio lavoro d'archivio all'interno del sito *Corrado Segre e la Scuola italiana di geometria algebrica* da lei curato; la disponibilità mostrata nell'accettare l'impegnativo incarico di valutatore.

Ringrazio altresì il prof. Marco Andreatta per l'ampio e dettagliato report di questa tesi, che mi è stato di grande aiuto per giungere alla versione definitiva, e per le interessanti notizie sulle attuali ricerche di geometria algebrica legate al nome di Fano.

Un ulteriore ringraziamento va al prof. Alberto Conte per le proficue e interminabili chiacchierate su Fano e dintorni all'Accademia delle Scienze.

Desidero ringraziare i membri della Società Italiana di Storia delle Matematiche (SISM) con cui ho condiviso la passione per questa materia e la partecipazione a convegni ricchi di spunti e di scambi di idee davvero stimolanti. In particolare, desidero ringraziare di cuore le 'giovani' storiche della matematica che hanno contribuito a farmi sentire 'meno sola' in questi anni: Maria Giulia Lugaresi, Rachele Rivis e Maria Anna Raspanti, con cui ho condiviso l'agitazione prima delle comunicazioni ai congressi, ma anche momenti indimenticabili come la gita sull'Etna, le passeggiate per le vie di Salerno e le corse sotto la pioggia a Pisa.

Un sentito ringraziamento va a tutto il personale della Biblioteca Speciale di Matematica "G. Peano" – Giuseppe Semeraro, Laura Garbolino, Giulia Scarcia, Antonella Taragna, Maria Fernandez e Valentina Rossi – che mi ha coadiuvata nel lavoro di ricerca e consultazione delle fonti e dei documenti storici e che mi ha fatta sentire 'a casa' nei lunghi pomeriggi trascorsi al tavolo dei *Rari*.

Un profondo grazie a Carlo Incorvaia e Marco Pavia del centro stampa di Palazzo Campana per la loro efficienza, pazienza e immensa disponibilità nel fotocopiare, stampare e scansionare documenti di ogni sorta ma, soprattutto, per le loro parole gentili e di incoraggiamento.

Altrettanta gratitudine va a tutti coloro che hanno messo a disposizione per le mie ricerche diversi materiali archivistici: il prof. Enrico Giusti per l'Archivio del "Giardino di Archimede" (Firenze); il prof. Aldo Brigaglia per i corsi tenuti a Palermo da De Franchis; Teresa Anna Viola e Maria Rosaria Del Ciello della Biblioteca dell'Istituto Matematico "G. Castelnuovo" di Roma; Antonella Grandolini dell'Archivio dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL; Andrea Dibitonto dell'Archivio Storico dell'Accademia Nazionale dei Lincei; Remigio Pegoraro e Marco De Poli dell'Archivio Storico dell'Università di Padova; Daniele Ronco dell'Archivio Storico dell'Università di Pisa; Paola Novaria e Giuliana Borghino Sinleber dell'Archivio Storico dell'Università di Torino; Daniela Bellettati dell'Archivio dell'Unione Femminile Nazionale (Milano); Regina C. Vidal Medeiros della Biblioteca "A. Bassi" dell'Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação dell'Universidade de São Paulo; Alessandra Barbierato e Micaela Sandri della Biblioteca del Dipartimento di Matematica "T. Levi-Civita" di Padova; Laura Bitossi, Gianni Galeota e Fabrizio Nunnari della Biblioteca dell'Istituto Matematico "U. Dini" di Firenze; Sacha Auderset della Bibliothèque de l'Universitè de Lausanne; Marina Contarini della Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara.

Ringrazio di cuore i miei colleghi di dottorato, che negli anni sono diventati amici, per il costante supporto e la condivisione di momenti indimenticabili: in rigoroso ordine alfabetico, Andrea (per le mille colazioni in torteria), Carola e Claudio (con cui – tra l'altro – ho sciato per la prima volta), Fabio e Francesca (ora divenuti elargitori di meravigliosi aneddoti sulla scuola), Irene (l'altra me, visto che siamo interscambiabili), Saverio (eccellente geometra algebrico che ha condiviso con me un rapporto di amore-odio per le Fano threefolds) e altri ancora.

Grande riconoscenza devo a tutti i miei amici che, volenti o nolenti, hanno partecipato alle gioie e alle fatiche del dottorato.

Grazie quindi agli amici di sempre con cui sono cresciuta e a coloro con cui ho iniziato a fare animazione e che sono rimasti, nonostante ciascuno abbia preso vie diverse nella propria vita. Grazie a Martina, che mi capisce costantemente, e a Ilaria, futura testimone, che nel frattempo è diventata una splendida mamma.

Grazie alle amiche conosciute durante gli anni dell'università con cui, nonostante la distanza geografica, è sempre bello ritrovarsi ed è come se il tempo non fosse passato.

Grazie agli amici ed ex-colleghi del *Xkè?* per tutti i momenti di leggerezza e di svago che mi avete regalato.

Grazie a quei nuovi colleghi dell'IPSSEOA "G. Colombatto" di Torino che, negli ultimi mesi, mi hanno accolta con gentilezza e mi sono stati accanto in un nuovo mondo, quello dell'insegnamento. Grazie ai colleghi e agli studenti dell'Enaip di Rivoli che – purtroppo o per fortuna a seconda dei momenti – sono stati una costante in questi anni di dottorato, facendomi sentire utile, apprezzata e 'più vicina' al mondo reale.

Grazie ai fanciulli e alle fanciulle del gruppo giovani GBP per avermi trasmesso entusiasmo e spensieratezza, anche nelle giornate più storte.

Senza di voi sarebbe stato tutto più difficile: grazie per avermi dato la forza per andare avanti e per essere sempre riusciti a strapparmi un sorriso.

Ho tenuto per ultimi i ringraziamenti più intimi, quelli per la mia famiglia. Ringrazio in primis i miei genitori per amarmi così come sono e per avermi sostenuta e sopportata durante questo lungo percorso di dottorato, accettando – tra le altre cose – il disordine della mia scrivania sommersa da libri, articoli e documenti storici.

Grazie mamma per avermi trasmesso il valore dell'impegno, della dedizione e del sacrificio e per avermi sempre ascoltata con infinita pazienza e amore.

Grazie papà per avermi insegnato l'importanza di amare ciò che si fa, per il tuo senso pratico nel risolvere i problemi e per le pause caffè condivise durante lo smart working.

Grazie anche a mio fratello Andrea che, intraprendendo la strada del dottorato, si è ritrovato a condividere con me – nel bene e nel male – molti aspetti di questo percorso, aiutandomi a capire l'importanza di fare un bel respiro ogni tanto.

Grazie a nonna Rita e a nonna Ana per l'infinita fiducia nelle mie capacità e per avermi sempre stimolata a inseguire i miei sogni.

Grazie anche ai nonni Luigi e Renato che, pur non essendoci più, sono sempre accanto a me.

Grazie a Vittorio e Teresa, gli zii adottivi, per aver continuato a scommettere su di me.

Desidero ancora ringraziare coloro che in questi anni sono diventati la mia seconda famiglia: un sincero ringraziamento va dunque a Elisabetta e Willy per essersi sempre interessati e preoccupati per me, e a Noemi per la stima e il profondo affetto che ci uniscono.

Un ultimo ringraziamento dal profondo del cuore va a Diego, che mi è stato accanto in tutti questi anni e a cui toccherà questo impegnativo compito anche per il resto della vita. Grazie per aver spesso risolto i problemi tecnici e informatici del mio lavoro di ricerca e per aver messo a disposizione il tuo computer per 'far girare' i database di questa tesi. Grazie per avermi instancabilmente sostenuta, per aver gioito con me per le piccole scoperte di questo lavoro (talvolta di difficile comprensione, me ne rendo conto!) e per avermi incoraggiata e rincuorata nei momenti di maggiore difficoltà. Grazie per aver compreso le esigenze di questo percorso di dottorato senza farmele pesare e per essermi stato accanto nell'affrontare le sfide cui mi sono trovata davanti di giorno in giorno. Grazie per avermi ogni tanto 'costretta' a staccare la spina e ad assaporare la bellezza del mondo che ci circonda, camminando mano nella mano.