Tests d'appartenance d'après un théorème de Kollàr

Tests d'appartenance d'après un théorème de J.Kollár

ERRATUM

Une erreur s'est glissée dans le lemme 1 de l'article "Tests d'appartenance d'après un théorème de J.Kollár" qui apparaît dans cet numéro de Problèmes Diophantiens. En effet, on ne peut pas toujours déduire l'egalité entre les idéaux ${}^h(J,\phi_1,\ldots,\phi_r)$ et $({}^hJ, {}^h\phi_1,\ldots, {}^h\phi_r)$. Par contre, il est possible de démontrer que les éléments homogènes de degré suffisamment élevé des deux idéaux sont les mêmes:

Lemme 1 bis

Soit $J \subset \mathbf{A}$ un idéal de codimension n et $\phi_1,\ldots,\phi_r$ des polynômes de degrés $\leq d$ tels que l'idéal $(J,\phi_1,\ldots,\phi_r)$ soit encore de codimension n. Alors

$$ {}^h(J,\phi_1,\ldots,\phi_r)_\nu = ({}^hJ, {}^h\phi_1,\ldots, {}^h\phi_r)_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg {}^hJ + d - 1 $$

Démonstration

Il suffit de démontrer ceci pour $r = 1$, car deg ${}^h(J,\phi_1,\ldots,\phi_i) \leq$ deg ${}^hJ$ pour $i = 0,\ldots,r$. Pour ce faire, on utilise un critère de stabilité de la fonction de Hilbert:

Sous-lemme ([P] lemme 3)

Soit $L \subset {}^h\mathbf{A}$ un idéal homogène pur de dimension zéro. Alors $\dim[{}^h\mathbf{A}/L]_\nu = \deg L$ *pour* $\nu \geq \deg L - 1$.

Maintenant, on sait d'après le corollaire de p.184 de [Z-S] que $({}^hJ, {}^h\phi_1) = {}^h(J,\phi_1) \cap Q$ où Q est $(x_0,\ldots,x_n)$-primaire. En utilisant le fait que les idéaux ${}^hJ$ et ${}^hJ\colon {}^h\phi_1$ sont purs de dimension zéro et de degré $\leq$ deg ${}^hJ$, on déduit de la suite exacte

$$ 0 \longrightarrow {}^h\mathbf{A}/({}^hJ\colon {}^h\phi_1) \overset{\times\, {}^h\phi_1}{\longrightarrow} {}^h\mathbf{A}/{}^hJ \longrightarrow {}^h\mathbf{A}/({}^hJ, {}^h\phi_1) \longrightarrow 0 $$

et du sous-lemme la ligne suivante:

$$ \begin{aligned} \dim[{}^h\mathbf{A}/({}^hJ, {}^h\phi_1)]_\nu &= \dim[{}^h\mathbf{A}/{}^hJ]_\nu - \dim[{}^h\mathbf{A}/({}^hJ\colon {}^h\phi_1)]_{\nu - d^\circ\phi_1} \\ &= \deg {}^hJ - \deg {}^hJ\colon {}^h\phi_1 \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg {}^hJ + d - 1. \end{aligned} $$

Par ailleurs, on déduit du même sous-lemme que $\dim[{}^h\mathbf{A}/{}^h(J,\phi_1)]_\nu = \deg {}^h(J,\phi_1)$ pour $\nu \geq \deg {}^hJ - 1$, donc $\dim[{}^h(J,\phi_1)/({}^hJ, {}^h\phi_1)]_\nu = 0$ pour $\nu \geq \deg {}^hJ - 1$, ce que nous voulions démontrer.

Le lemme 1 bis introduit un terme parasitaire dans le théorème 2 dont l'énoncé devient:

Soient $f_1,\ldots,f_m \in \mathbf{A}$ de degrés respectifs $d_1,\ldots,d_m$ avec $d_1 \leq d_m \leq d_{m-1} \leq \cdots \leq d_2$. On suppose que la variété $\mathbf{V}$ définie par $f_1,\ldots,f_m$ est discrète. Alors, si $f \in (f_1,\ldots,f_m)$, il existe $a_1,\ldots,a_m \in \mathbf{A}$ tels que $f = a_1f_1 + \cdots + a_mf_m$ et

$$ d^\circ(a_if_i) \leq \max(d^\circ f, d_2 - 1) + (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_\mu, \qquad i = 1,\ldots,m $$

où $\mu = \min(m,n)$ et χ est le nombre de d_i $(1 \leq i \leq \mu)$ égaux à 2. <u>En particulier</u>, on a $\phi_I(d) \leq \max(d,3)^n +$ $+d-1$ pour tous les idéaux de codimension n.

La démonstration est substantiellement la même: on construit une suite régulière $f_1, g_2,\ldots,g_n$ dans I engendrant un idéal $J \subset I$ de codimension n. Le théorème 5 montre que $x_0^{\gamma_1}\, {}^hJ \subset ({}^hf_1, {}^hg_2,\ldots, {}^hg_n)$ pour $\gamma_1 = (3/2)^\chi(d_1\cdots d_n - \deg {}^hJ)$ et le lemme 1 bis donne $x_0^{\gamma_2}\, {}^hf \in ({}^hJ, {}^hf_2,\ldots, {}^hf_m)$ avec $\gamma_2 = \max(0, \deg {}^hJ + d_2 - 1 - d^\circ f)$. Donc

$$ x_0^{\gamma_1+\gamma_2}\, {}^hf = A_1\, {}^hf_1 + \cdots A_m\, {}^hf_m + B_2\, {}^hg_2 + \cdots B_n\, {}^hg_n $$

où $A_i, B_J \in {}^h\mathbf{A}$ et

$$ d^\circ(A_i\, {}^hf_i), d^\circ(B_j\, {}^hg_j) \leq \gamma_1 + \gamma_2 + d^\circ f \leq (3/2)^\chi d_1\cdots d_n + \max(d^\circ f, d_2 - 1). $$

Pour déduire le théorème il suffit de poser $x_0 = 1$.

Tests d'appartenance d'après un Théorème de Kollár

Francesco Amoroso

Membership tests after Kollár's theorem

Abstract - In a recent paper J.Kollár has improved upon the degrees estimates in the Nullstellensatz obtainded by W.D. Brownawell. Here we use Kollár's method, in Patrice Philippon's version, to find bounds for the degrees when writing a polynomial on a system of generators of an ideal I, provided that I is a locally complete intersection.

§1 - Introduction et enoncés des résultats

Par des méthodes de géometrie algébrique, János Kollár ([K]) a récemment raffiné l'estimation des degrés dans le théorème des zéros de Hilbert, obtenue par W.D. Brownawell ([B]) en utilisant des résultats de théorie de la transcendance et aussi d'analyse complexe. Ce travail suggère la possibilité d'aborder par les même méthodes le problème d'estimation des degrés quand on écrit un polynôme comme combinaison polynômiale d'une base d'un idéal.

Si $\mathbf{K}$ est un corps et I un idéal dans $\mathbf{A} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_m]$, on définit $\phi_I(d)$ comme le plus petit entier D tel que pour tout système de générateurs $f_1, \ldots, f_m$ de I avec $d^\circ f_i \leq d$, $i = 1, \ldots, m$ (où $d^\circ P$ designe le degré total du polynôme P) et pour tout $f \in I$ il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{A}$ tels que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ et $d^\circ a_i f_i \leq D + d^\circ f$ pour $i = 1, \ldots, m$. Un résultat classique de Hermann ([H]) montre que

$$\phi_I(d) \leq 2(2d)^{2^{n-1}}. \tag{1}$$

D'un autre côté, Mayr et Meyer ([M-M]) ont construit un idéal I pour lequel on a

$$\phi_I(d) \geq (d-2)^{2^{n/10}}. \tag{2}$$

Et donc, pour avoir une majoration de $\phi_I(d)$ qui ne soit pas doublement exponentielle en d, on doit mettre des hypothèses sur l'idéal I. Récemment, Berenstein et Yger ([B-Y]) ont montré que, si le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle et si la variété engendrée par I dans l'espace affine $\mathbf{K}^n$ est discrète,

$$\phi_I(d) \leq d + 3(n+1)d^\mu \tag{3}$$

avec $\mu = min\{m, n\}$. Plus précisément ils démontrent:

Théorème 1

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{A}$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m$ avec $d_1 \leq d_m \leq \leq d_{m-1} \cdots \leq d_2$. On suppose que la variété engendrée par $f_1, \ldots, f_m$ est discrète. Alors, si $f \in (f_1, \ldots, f_m)$, il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{A}$ tels que

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

et

$$d^\circ a_i \leq d^\circ f + 3(n+1) d_1 \cdots d_\mu, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Dans cet article nous employons la méthode de Kollár, ou plus précisément sa relecture par P. Philippon ([P]) dans le contexte de l'algèbre commutative, pour obtenir un résultat essentiellement meilleur que (3) et valable en toute caractéristique:

Théorème 2

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{A}$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m$ avec $d_1 \leq d_m \leq \ldots \leq d_{m-1} \leq$

$\leq d_2$. On suppose que la variété $\mathbf{V}$ définie par $f_1, \ldots, f_m$ est discrète. Alors, si $f \in (f_1, \ldots, f_m)$, il exist $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{A}$ tels que

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

et

$$d^\circ(a_i f_i) \leq d^\circ f + (3/2)^\chi \cdot (d_1 \cdots d_\mu - \#\mathbf{V}) + \delta_{d_2,2} \cdot \delta_{\#\mathbf{V},0} \cdot (d_{\mu+1} - 1), \qquad i = 1, \ldots, m$$

où $\mu = \min(m, n)$, χ est le nombre de d_i $(1 \leq i \leq \mu)$ égaux à 2 et $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, on a

$$\phi_I(d) \leq \max(d, 3)^n$$

pour tous les idéaux de codimension n.

Pour les idéaux I purs de dimension strictement plus grand que zéro, la situation semble plus mauvaise et il faut ajouter quelque hypothèses supplémentaire. Nous ferons une des hypothèses suivantes:

- I localment intersection complète (LIC), i.e. le localisé $I_\wp$ intersection complète pour tous $\wp \in$Spec $(\mathbf{A})$;
- I localment intersection complète au sense faible (LICF), i.e. $I_\wp$ intersection complète pour tous $\wp$ associées au $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}/I$.

Nous démontrerons les resultats suivants:

Théorème 3

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{A}$ de degrés $\leq d$ avec $d \geq 3$. On suppose que l'idéal I engendré par $f_1, \ldots, f_m$ est pur de codimension k et LICF. Alors il existe un polynôme ϕ dans $\mathbf{A}$ non diviseur de zéro dans $\mathbf{A}/I$ et de degré $\leq d^k - \deg {}^h I$ tel que $f \in (f_1, \ldots, f_m)$ si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{A}$ satisfaisant $f\phi = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ avec les degrés des $a_i f_i$ majorés par $d^\circ f + d^k - deg\ {}^h I$.

Théorème 4

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{A}$ de degrés $\leq d$ avec $d \geq 3$. On suppose que l'idéal I engendré par $f_1, \ldots, f_m$ est pur de codimension k et LIC. Alors, si $f \in (f_1, \ldots, f_m)$, il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{A}$ tels que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ avec les degrés des $a_i f_i$ majorés par $d^\circ f + d^{k(n-k+1)} + d^k - 1$.

En particulier,

$$\phi_I(d) \leq \max(d, 3)^{k(n-k+1)} + \max(d, 3)^k - 1$$

pour tous les idéaux LIC purs de codimension k.

§3 - Notations, résultats auxiliaires et preuves des théorèmes

Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique quelconque, on note $\mathbf{A} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ et ${}^h\mathbf{A} = \mathbf{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Si f est un polynôme dans $\mathbf{A}$ (ou dans ${}^h\mathbf{A}$) on désigne son degré total par $d^\circ f$; si L est un idéal homogène de ${}^h\mathbf{A}$ on note deg L son degré (au sens de [Z-S], p.236). Pour $f \in \mathbf{A}$ on appelle homogénéisé de f le polynôme

$${}^h f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^{d^\circ f} f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0);$$

on définit l'homogénéisé d'un idéal I de $\mathbf{A}$ comme l'idéal ${}^h I \subset {}^h\mathbf{A}$ engendré par les polynômes ${}^h f$ lorsque f parcourt I. Si $I \subset \mathbf{A}$ est un idéal on appelle Ass$(\mathbf{A}/I)$ l'ensemble des idéaux premiers associés au $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}/I$. Pour $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbf{A}^m$ on note $\mathbf{W_f}$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_m$.

On dira qu'un idéal $I \subset \mathbf{A}$ est localement intersection complète (resp. localement intersection complète au sens faible), en abrégé LIC (resp. LICF), si et seulement si le localisé $I_\wp$ de I en $\wp$ est intersection complète pour tout $\wp \in$Spec$(\mathbf{A})$ (resp. pour tout $\wp \in$Ass$(\mathbf{A}/I)$). Remarquons que tous les idéaux premiers $\wp \in$Spec$(\mathbf{A})$ sont LICF, car $\mathbf{A}$ est régulier.

Remarque - Les coefficient des a_i étant solutions d'un système d'équations linéaires defini sur le corps de coefficients des f_i et f, on peut supposer et on supposera $\mathbf{K}$
algébriquement clos donc infini.

Le deus ex-machina de la preuve des théorèmes 2,3 et 4 est le résultat central de [K] que nous énonçons sous la forme raffinée suivante (voir [P2], lemme 2 et théorème 2):

Théorème 5

Soit $\phi_1, \ldots, \phi_k$ une suite régulière dans $\mathbf{A}$ avec $d^\circ\phi_i \leq d_i$, $d_i \geq 2$, et L l'idéal engendré par $\phi_1, \ldots, \phi_k$. Soit χ le nombre de d_i $(1 \leq i \leq k)$ égaux à 2. Alors il existe un entier γ avec

$$\gamma \leq \begin{cases} (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_k - \deg {}^hL, & \text{si } k \leq n, \\ (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_n + d_{n+1} - 1, & \text{si } k = n+1, \end{cases}$$

tel que l'idéal $(x_0^\gamma)\ {}^hL$ est contenu dans l'idéal engendré par ${}^h\phi_1, \ldots, {}^h\phi_k$.

Maintentant, nous allons montrer le théorème 2:

- Preuve du théorème 2

Si $I = \mathbf{A}$, on utilise le théorème des zéros effectif ([K], théorème 1 si tous les d_i sont différents de 2, [P2], théorème 2 si $d_i = 2$ pour au moins un i), donc il suffit de considérer le cas où I est un idéal de codimension n et $m \geq n$. En utilisant le lemme 2 de [M-W], on peut trouver des polynômes $g_2, \ldots, g_n$ dans I, avec g_i combinaison linéaire suffisamment générale de $f_i, \ldots, f_m$, tels que $f_1, g_2 \ldots, g_n$ soit une suite régulière; on a $d^\circ g_i \leq d_i$ $(2 \leq i \leq n)$. Soit $J = (f_1, g_2, \ldots, g_n)$, d'après le théorème 5, il existe un entier γ satisfaisant

$$\gamma \leq (3/2)^\chi \cdot (d_1 \cdots d_k - \deg {}^hJ) \leq (3/2)^\chi \cdot (d_1 \cdots d_k - \deg {}^h\sqrt{I}) = (3/2)^\chi \cdot (d_1 \cdots d_k - \#\mathbf{V})$$

tel que l'idéal $(x_0^\gamma)\ {}^hJ$ est contenu dans l'idéal engendré par ${}^hf_1, {}^hg_2, \ldots, {}^hg_n$. L'idéal J est de codimension n ([Z-S] lemme 5 p.401) et nous pouvons utiliser le lemme suivant:

Lemme 1

Soit $J \subset \mathbf{A}$ un idéal de codimension n et $\phi_1, \ldots, \phi_r$ des polynômes tels que l'idéal $(J, \phi_1, \ldots, \phi_r)$ soit encore de codimension n. Alors ${}^h(J, \phi_1, \ldots, \phi_r) = ({}^hJ, {}^h\phi_1, \ldots, {}^h\phi_r)$.

Démonstration

Il suffit de démontrer ceci pour $r = 1$. D'après le corollaire de p.184 de [Z-S], on sait que

$$L \cap {}^h(J, \phi_1,) = ({}^hJ, {}^h\phi_1)$$

où tous le premiers associés à L contenant x_0. Mais la variété engendrée par ${}^hJ$ est contenue dans l'ouvert affine $\{x_0 \neq 0\}$, donc $L = {}^h\mathbf{A}$.

En utilisant le lemme on trouve:

$${}^hf \in {}^hI = {}^h(J, f_2, \ldots, f_m) = ({}^hJ, {}^hf_2, \ldots, {}^hf_n),$$

donc le polynôme $x_0^\gamma \cdot {}^hf$ est contenu dans l'idéal engendré par ${}^hf_1, \ldots, {}^hf_m, {}^hg_2, \ldots, {}^hg_n$, d'où l'existence de polynômes homogènes $A_1, \ldots, A_m, B_2, \ldots, B_n$ tels que

$$x_0^\gamma \cdot {}^hf = A_1 \cdot {}^hf_1 + \cdots + A_m \cdot {}^hf_m + B_2 \cdot {}^hg_2 + \cdots + B_n \cdot {}^hg_n$$

avec les polynômes $A_i \cdot {}^hf_i$ et $B_j \cdot {}^hg_j$ de degrés égaux à $\gamma + d^\circ f$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 2, \ldots, n$. On en déduit le théorème en posant $x_0 = 1$ et en exprimant $g_2, \ldots, g_n$ en termes de $f_1, \ldots, f_m$.

Nous revenons à l'etude du case dans lequelle I est pur de codimension $k < n$. Tout d'abord, il faut remarquer que, si I est engendré par k polynômes $f_1, \ldots, f_k$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_k$ avec $d_1 \leq d_k \leq \ldots \leq d_{k-1} \leq d_2$, alors pour tous $f \in I$ il existe $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ avec

$$\max_i d^\circ a_i f_i \leq d^\circ f + (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_k \tag{4}$$

(où, comme d'habitude, χ est le nombre de d_i $(1 \leq i \leq k)$ égaux à 2) tels que

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m.$$

En effet, comme m'est été suggéré par A. Yger, en utilisant les lemmes 1 et 2 de [M-W], on peut trouver des polynômes $g_2, \ldots, g_n$ dans I, avec g_i combinaison linéaire suffisamment générale de $f_i, \ldots, f_k$, tels que $f_1, g_2 \ldots, g_k$ soit une suite régulière dans I et $I = (f_1, g_2, \ldots, g_k)$. En utilisant le théorème 5 on trouve un entier

$$\gamma \leq (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_k$$

et des polynômes $A_1, \ldots, A_k \in {}^h\mathbf{A}$ tels que

$$x_0^\gamma \cdot {}^h f = A_1 \cdot {}^h f_1 + A_2 \cdot {}^h g_2 + \cdots + A_k \cdot {}^h f_k$$

On en déduit (4) en posant $x_0 = 1$ et en exprimant $g_2, \ldots, g_k$ en termes de $f_1, \ldots, f_k$.

Maintenant, considerons les cas LIC et LICF. On utilisera le lemme suivante pour se ramener dans un certain sens au cas pour lequel il y a une suite régulière dans $\mathbf{W_f}$ qui engendre I:

Lemme 2

Soient $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbf{A}$ un idéal LICF (resp. LIC) pur de codimension k et Λ un sous-ensemble de $\mathrm{Ass}(\mathbf{A}/I)$ *(resp. un sous-ensemble fini de* $\mathrm{Spec}(\mathbf{A})$*). Alors il existe $g_1, \ldots, g_k$ dans $\mathbf{W_f}$ et un idéal $J_\Lambda \subset \mathbf{A}$ tels que:*

(i) $g_1, \ldots, g_k$ soit une suite régulière;

(ii) $(g_1, \ldots, g_k) = I \cap J_\Lambda$;

(iii) $J_\Lambda \not\subset \wp$ pour tout $\wp \in \Lambda$.

Démonstration

Il suffit de montrer que il existe des ouverts de Zariski non vide U et $U_\wp$ $(\wp \in \Lambda)$ de $\mathbf{K}^{mk}$ tels que:

A] pour $(\lambda_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}} \in U$,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{1,j} f_j \,,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^m \lambda_{k,j} f_j$$

est une suite régulière;

B] pour $(\lambda_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}} \in U_\wp$ $(\wp \in \Lambda)$ on a

$$(\sum_{j=1}^m \lambda_{1,j} f_j, \ldots, \sum_{j=1}^m \lambda_{k,j} f_j)\mathbf{A}_\wp = I_\wp.$$

On voit A] en utilisant les lemmes 1 et 2 de [M-W]. Montrons B]. Soit $\wp \in \Lambda$ et

$$L = (\sum_{j=1}^m \lambda_{1,j} f_j, \ldots, \sum_{j=1}^m \lambda_{k,j} f_j)$$

où $(\lambda_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}} \in \mathbf{W}_\mathbf{f}^{km}$. Identifions $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_k$ avec leurs images dans R et $\wp, I, L$ avec $\wp R, IR, LR$. Il suffit de démontrer que $I = L$. Soient $K(\wp) = R/\wp$, $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ les images de $f_1, \ldots, f_m$ dans le $K(\wp)$-espace vectoriel $V = I/\wp I$, $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k$ celles de $g_1, \ldots, g_k$. D'après le théorème 158 de [KA], on sait que

$\dim_{K(\wp)} V = k$ car I est intersection complète dans R. On en déduit du même théorème que, quitte à changer l'ordre de $f_1, \dots, f_m$, l'ensemble $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k\}$ est une base de V sur $K(\wp)$. Soit

$$\bar{f}_j = \sum_{t=1}^{k} a_{j,t} \bar{f}_t, \qquad j = k+1, \dots, m; \quad a_{j,t} \in K(\wp).$$

Donc

$$\bar{g}_i = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_{i,j} + \sum_{l=k+1}^{m} \lambda_{i,l} a_{l,j} \right) \bar{f}_j \qquad i = 1, \dots, k.$$

Soit D le déterminant de la matrice à coefficients dans $K(\wp)[\lambda_{i,j}]$

$$\left(\lambda_{i,j} + \sum_{l=k+1}^{m} \lambda_{i,l} a_{l,j} \right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}.$$

Le polynôme D est non nul, donc pour $\lambda_{i,j}$ dans un ouvert de Zariski non vide $U_\wp$ de $\mathbf{K}^{mk}$ on a $D \neq 0$, c'est-à-dire $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k$ engendrent V. D'après le théorème 158 de [KA] on a le fait que I lui-même est engendré par $g_1, \dots, g_k$, ce qui achève la démonstration du B].

On utilisera aussi le lemme suivant:

Lemme 3

Soient $L, \wp \subset {}^h\mathbf{A}$ respectivement un idéal homogène pur de codimension $k \leq n$ et un idéal homogène premier de codimension $\leq n$ tels que $L \not\subset \wp$. Alors il existe un polynôme homogène ψ de degré $\leq \deg L$ dans l'ensemble $L \backslash \wp$.

Démonstration

Tout d'abord, supposons L premier. Soit $\mathbf{V}$ la variété projective définie par L et notons p_π la projection canonique sur un sosus-espace générique π de $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ de dimension $n-k+1$. L'image $p_\pi(\mathbf{V})$ est une hypersurface dans π du même degré de $\mathbf{V}$ et donc

$$p_\pi^{-1}(p_\pi(\mathbf{V})) = \{f_\pi = 0\}$$

avec $f_\pi \in L$ et $d^\circ f = \deg L$. Mais

$$\bigcap_\pi p_\pi^{-1}(p_\pi(\mathbf{V})) = \mathbf{V}$$

et donc on peut trouver π tel que $\psi = f_\pi \in L \backslash \wp$.

Enfin, si L n'est pas premier, soit

$$L = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$$

une decomposition primaire normal de L et notons $\wp_i$ le radical de Q_i et l_i sa longueur. En utilisant la premier partie de la démonstration on trouve des polynômes $\psi_i \in \wp_i \backslash \wp$ de degrés $d^\circ \psi_i = \deg \wp_i$, donc

$$\psi = \prod_{i=1}^{t} \psi_i^{l_i} \in L \backslash \wp$$

et

$$d^\circ \psi = \sum_{i=1}^{t} l_i \cdot d^\circ \psi_i = \sum_{i=1}^{t} l_i \cdot \deg \wp_i = \deg L.$$

- Preuve du théorème 3

Soient $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f}$ et $J = J_\Lambda$ tels que les assertions du lemme 2 soient satisfaites avec Λ =Ass$(\mathbf{A}/I)$. Soit $\wp$ ∈Ass$(\mathbf{A}/I)$, on a ${}^hJ \not\subset {}^h\wp$, donc, en utilisant le lemme 3, on peut trouver un polynôme $\psi_\wp$, appartenant à ${}^hJ$ mais pas à ${}^h\wp$, de degré majoré par
deg ${}^hJ$. Soit ϕ une combinaison linéaire générale des $\psi'_\wp = \psi_\wp(1, x_1, \ldots, x_n)$: on a $\phi \in J \backslash \wp$ pour tout $\wp$ ∈Ass$(\mathbf{A}/I)$ et

$$d^\circ\phi \leq \deg {}^hJ \leq d^k - \deg {}^hI.$$

En utilisant le théorème 5 on trouve un entier γ borné par $d^k - \deg {}^hI - \deg {}^hJ$ tel que le polynôme ${}^hf\ {}^h\phi x_0^\gamma$ est dans l'idéal engendré par ${}^hg_1, \ldots, {}^hg_k$. Donc il existe k polynômes homogènes $A_1, \ldots, A_k$ satisfaisant

$$x_0^\gamma \cdot {}^hf \cdot {}^h\phi = A_1 \cdot {}^hg_1 + \cdots + A_k \cdot {}^hg_k$$

avec les $A_i \cdot {}^hg_i$ de degrés égaux à

$$\gamma + d^\circ f + d^\circ\phi \leq d^\circ f + d^k - \deg {}^hI$$

pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 2, \ldots, n$. On en déduit le théorème en posant $x_0 = 1$ et en exprimant $g_1, \ldots, g_k$ en termes de $f_1, \ldots, f_m$.

- Preuve du théorème 4

Soit $f \in I$. Nous allons montrer qu'il existe une suite régulière $g_1^0, \ldots, g_k^0$ dans $\mathbf{W_f}$ et des $\phi_1, \ldots, \phi_r \in \mathbf{A}$ de degrés assez petits tels que $\phi_i f$ soit dans un idéal engendré par une suite régulière de $\mathbf{W_f}$ pour $i = 1, \ldots, r$ et tels que $(g_1^0, \ldots, g_k^0, \phi_1, \ldots, \phi_r) = \mathbf{A}$. Pour celà, on utilisera la proposition suivante:

Proposition 1

Soit $I \subset \mathbf{A}$ un idéal LIC engendré par m polynômes $f_1, \ldots, f_m$ de degré total majoré par d. Alors il existe un entier $r \leq n+1-k$, des polynômes $g_1^i, \ldots, g_k^i$ $(i = 0, \ldots, r)$ dans $\mathbf{W_f}$, des idéaux $J_1, \ldots, J_r$ dans $\mathbf{A}$ et des polynômes $\phi_i \in J_i$ tels que:

(a) *pour $i = 1, \ldots, r$ les assertions du lemme 2 sont vraies avec* $\Lambda = \Lambda_i = \mathrm{Ass}(\mathbf{A}/(g_1^0, \ldots, g_k^0, \phi_1, \ldots, \phi_{i-1}))$, $J_\Lambda = J_i$ *et* $g_j = g_j^i$;

(b) $g_1^0, \ldots, g_k^0, \phi_1, \ldots, \phi_r$ *est une suite régulière et* $(g_1^0, \ldots, g_k^0, \phi_1, \ldots, \phi_r) = \mathbf{A}$;

(c) $d^\circ \phi_i \leq \deg {}^h J_i \leq d^k$ *pour* $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration

En utilisant le lemme 2 de [M-W], on peut trouver une suite régulière $g_1^0, \ldots, g_k^0$ dans $\mathbf{W_f}$; on construit les polynômes g_j^i, ϕ_i et les idéaux J_i $(i = 1, \ldots, r;\ j = 0, \ldots, k)$ par récurrence sur i.

$\underline{i = 1}$. On choisit $g_1^1, \ldots, g_k^1 \in \mathbf{W_f}$ et $J_1 = J_{\Lambda_1}$ tels que les assertions du lemme 2 soient vérifiées avec $\Lambda = \Lambda_1$. On majore $\deg {}^h J_1$ par d^k. Soit $\wp \in \Lambda_1$; d'après la (i) du lemme 2 on a $J_1 \not\subset \wp$, donc, en utilisant le lemme 3, on peut trouver un polynôme $\psi_\wp$ dans ${}^h J_1 \setminus {}^h\wp$ de degré $\leq \deg {}^h J_1$. Une combinaison linéaire ϕ_1 des $\psi'_\wp = \psi_\wp(1, x_1, \ldots, x_n)$ répond aux conditions imposées.

$\underline{i - 1 \Rightarrow i}$. Si $\Lambda_i = \mathbf{A}$ on choisit $r = i - 1$: on a $k + i - 1 \leq n + 1$ car $g_1^0, \ldots, g_k^0, \phi_1, \ldots, \phi_{i-1}$ est régulière, donc $r \leq n + 1 - k$. Sinon on choisit $g_1^i, \ldots, g_k^i$ et J_i tels que les assertions du lemme 1 soient vérifiées pour $\Lambda = \Lambda_i$. En utilisant les mêmes arguments que dans le cas $i = 1$ on peut trouver un polynôme $\phi_i \in J_i$ de degré $\leq \deg {}^h J_i \leq (n+1-k)d^k$ qui n'appartient à aucun des idéaux premiers de Λ_i.

Démonstration du théorème 4

Soient g_j^i, ϕ_i, J_i et r comme dans la proposition 1, notons $\delta = \min \deg {}^h J_i$. D'après (a), (b), (c) et le théorème 5 on sait qu'il existe deux entiers γ_1, γ_2 avec

$$\gamma_1 \leq d^k - \delta;$$
$$\gamma_2 \leq \delta d^{k(n-k+1)} + d^k - 1$$

tels que les polynômes $x_0^{\gamma_1} \cdot {}^h f \cdot {}^h \phi_i$ soient dans l'idéal engendré par ${}^h g_1^i, \ldots, {}^h g_k^i$ pour $i = 1, \ldots, r$ et le polynôme $x_0^{\gamma_2}$ soit dans l'idéal engendré par ${}^h g_1^0, \ldots, {}^h g_k^0, {}^h\phi_1, \ldots, {}^h\phi_r$. Donc

$$x_0^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot {}^h f \in ({}^h g_1^0, \ldots, {}^h g_k^0, x_0^{\gamma_1} \cdot {}^h f \cdot {}^h\phi_1, \ldots, x_0^{\gamma_1} \cdot {}^h f \cdot {}^h\phi_r) \subset ({}^h g_1^0, \ldots, {}^h g_k^r)$$

d'où l'existence des polynômes homogènes $A_1^0, \ldots, A_k^r$ tels que

$$x_0^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot {}^h f = A_1^0 \cdot {}^h g_1^0 + \cdots + A_k^r \cdot {}^h g_k^r$$

et

$$d^\circ(A_j^i \cdot {}^h g_j^i) = d^\circ f + \gamma_1 + \gamma_2 \leq d^\circ f + d^{k(n-k+1)} + d^k - 1$$

pour $i = 0, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k$. Le théorème 4 s'en déduit en posant $x_0 = 1$ et en exprimant les g_j^i comme combinaisons linéaires des $f_1, \ldots, f_m$.

REFERENCES

[B] W.D. BROWNAWELL, "Bounds for the degrees in the Nullstellensatz", Annals of Mathematics 126 (1987), 577-591;

[B-Y] C.A. BERENSTEIN et A. YGER, "Bounds for the degrees in the division problem", typographié;

[H] G. HERMANN, "Die Frage der endliche vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale", Math. Ann. 95 (1926), 736-788;

[K] J. KOLLÁR, "Sharp effective Nullstellensatz", Journal of the American Math. Soc. 1,n° 4 (1988), 963-975;

[KA] I. KAPLANSKY, Commutative rings, The University of Chicago Press, 1974;

[M-M] E. MAYR et A. MEYER, "The complexity of the word problem for commutative semigroup and polynomial ideals", Advances in Math. 46 (1982), 305-329;

[M-W] D.W. MASSER et G.WÜSTHOLZ, "Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions", Invent.Math. 72 (1983), 407-464;

[P1] P. PHILIPPON, "Critères pour l'indépendance algébrique", Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 64 (1986), 5-52;

[P2] P. PHILIPPON, "Théorème des zéros effectif, d'après J.Kollár", dans "Problèmes Diophantiens 1987/88", Publications de l'Université de Paris VI n° 88, 1988, n° 6;

[Z-S] O. ZARISKI et P. SAMUEL, Commutative Algebra Vol.2, Van Nostrand, Princeton 1960 = Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Francesco Amoroso,

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56100 PISA (ITALIA)

et

Université de Paris VI, U.R.A. 763 du CNRS "Problèmes diophantiens", Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05 (FRANCE).