

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

## Multiplicité et formes éliminantes

### **This is the author's manuscript**

*Original Citation:*

*Availability:*

This version is available <http://hdl.handle.net/2318/1944839> since 2023-11-28T13:31:03Z

*Terms of use:*

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

## Multiplicité et formes éliminantes

Francesco Amoroso

### Abstract.

We study the relations between a homogenous prime ideal  $\wp \subset \mathbf{K}[x_0, \dots, x_n]$  ( $\mathbf{K}$  field of characteristic 0) and the ideal  $\wp_1^\#$  obtained from its Chow form. Assuming the local ring  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  at a point  $\alpha$  is a Cohen-Maculay ring, we prove that if  $\wp = \wp_1^\#$  locally, then the  $\wp$  is a principal ideal or  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  is regular. We also find an explicit bound for the minimum integer  $N \geq 1$  for which  $\wp^N \subset \wp_1^\#$ .

### Résumé.

Nous étudions les relations entre un idéal homogène premier  $\wp \subset \mathbf{K}[x_0, \dots, x_n]$  ( $\mathbf{K}$  corps de caractéristique 0) et l'idéal  $\wp_1^\#$  obtenu par sa forme de Chow. En supposant que l'anneau local  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  en  $\alpha$  soit de Cohen-Maculay, nous démontrons que si  $\wp = \wp_1^\#$  localement, alors  $\wp$  est un idéal principal ou  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  est régulier. Nous arrivons aussi à déterminer une borne explicite pour le plus petit entier  $N \geq 1$  tel que  $\wp^N \subset \wp_1^\#$ .

## Multiplicité et formes éliminantes.

Francesco Amoroso

### §1 Introduction.

Soit  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique zéro et soit  $\mathbf{V} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n$  une variété projective de dimension  $r - 1$  définie par un idéal homogène premier  $\wp \subset \mathbf{A} = \mathbf{K}[x_0, \dots, x_n]$ . La projection sur  $(\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n)' \times \dots \times (\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n)'$  de l'ensemble

$$\{(x, H_1, \dots, H_r) \in \mathbf{V} \times (\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n)' \times \dots \times (\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n)'; \quad x \in H_j, j = 1, \dots, r\}$$

définit une hypersurface irréductible et donc une forme multi-homogène  $f = f_{\wp}$  en les coordonnées  $u_j^i, i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, n$  des hyperplans  $H_i$ . On appelle  $f$  forme de Chow ou, en suivant les notations de Patrice Philippon, forme éliminante de l'idéal  $\wp$ . Cette forme qui constitue un outil désormais classique en géométrie algébrique, récemment a été redécouverte par Ju V. Nesterenko et P. Philippon qui l'ont utilisée en théorie de la transcendance.

On sait que  $f$  permet de reconstruire la variété du départ; en effet

$$\mathbf{V} = \{x \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n; \quad \sum_{j=0}^n u_j^i x_j = 0 \quad \forall u \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n \times \dots \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n \quad \text{tel que } f(u) = 0\}.$$

Les coordonnées de l'hyperplan générique passant par le point  $x$  sont données par  $Sx$  où  $S = (s_{ij})$  est une matrice antisymétrique générique. Donc l'idéal  $\wp_1^{\#}$  engendré par les coefficients de  $f(S^1 x, \dots, S^r x)$  (vu comme polynôme à coefficients dans  $\mathbf{A}$  en les variables  $s_{ij}^h$ ) définit  $\mathbf{V}$  comme ensemble. De plus, on peut montrer que  $\wp$  est la seule composante isolée de  $\wp_1^{\#}$  ([N1] lemme 1). Nous nous sommes intéressés aux composantes immergées de  $\wp_1^{\#}$ . Cet idéal a généralement une composante  $(x_0, \dots, x_n)$ -primaire non-significative: donc il semble naturel de considérer l'idéal  $\wp_1$  saturé de  $\wp_1^{\#}$  par rapport à  $(x_0, \dots, x_n)$ , c'est-à-dire

$$\wp_1 = \bigcup_{k \geq 0} (\wp_1^{\#} :_{\mathbf{A}} (x_0, \dots, x_n)^k).$$

Le lien entre les singularités de la variété  $\mathbf{V}$  et les composantes immergées de  $\wp_1$  a été observé depuis longtemps. Weil, par exemple, remarque (cf. [W] p.325-326) que  $\wp = \wp_1$  lorsque  $\mathbf{V}$  est lisse. En utilisant une notion de multiplicité introduite dans [A1] et développée par Philippon dans [P2], nous démontrerons le résultat suivant:

#### **Théorème A.**

*Soit  $\alpha \in \mathbf{V}$  et supposons que l'anneau local  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  de  $\mathbf{V}$  en  $\alpha$  soit de Cohen-Macaulay. Alors si  $\wp \mathcal{O}_{\wp, \alpha} = \wp_1 \mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  et  $\dim \mathbf{V} < n - 1$ , la variété  $\mathbf{V}$  est lisse en  $\alpha$ .*

L'idéal  $\wp$  étant la seule composante isolée de  $\wp$ , on peut se poser le problème de déterminer pour chaque  $\alpha \in \mathbf{V}$  le plus petit entier positif  $N = N(\alpha)$  tel que  $\wp^N \subset \wp_1$

dans l'anneau local  $\bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha}$ ,  $M_\alpha$  étant l'idéal de définition de  $\alpha$  dans  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{K}}[x_0, \dots, x_n]$ . On arrive à démontrer le théorème suivant:

**Théorème B.**

Pour tout  $\alpha \in \mathbf{V}$  on a

$$\wp^{nm_\alpha(\wp)} \subset \wp_1 \bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbf{A}$$

où  $m_\alpha(\wp)$  désigne la multiplicité de  $\mathbf{V}$  en  $\alpha$ .

L'exposant ci-dessus est "presque" optimal, comme le montre l'exemple suivant. Considérons l'idéal  $\wp = (x_1^d - x_2^m x_0^{d-m}, x_3)$  dans  $\mathbf{A} = \mathbf{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , où  $d, m$  sont des paramètres entiers satisfaisants  $d > m \geq 2$ . L'idéal  $\wp$  définit une courbe plane ayant un seul point singulier,  $\alpha = (1, 0, 0, 0)$  pour lequel  $m_\alpha(\wp) = m$ . A l'aide d'un programme d'interpolation algébrique<sup>†</sup> on montre que l'idéal  $\wp_1$  est engendré par les polynômes

$$x_1^d - x_2^m x_0^{d-m}, \quad x_2^a x_3^b \ (a + b = m, b \geq 1), \quad x_1^A x_3^B \ (A + B = d, m > B \geq 1)$$

et donc  $\wp_1 \bar{\mathbf{A}}_{M_\beta} = \wp \bar{\mathbf{A}}_{M_\beta}$  si et seulement si  $\beta \neq \alpha$ , en accord avec le théorème A. De plus,

$$\wp^e \bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbf{A} \subset \wp$$

si et seulement si  $e \geq m$ , ce qui montre que l'estimation du théorème B est presque optimale.

J'ai commencé à rédiger ce texte pendant mon séjour au sein de l'équipe "Problèmes diophantiens" de l'Institut Henri Poincaré à Paris. Je voudrais remercier ici Roberto Dvornichich pour m'avoir donné la possibilité de faire ce séjour et tous les membres de l'équipe pour leur chaleureux accueil et leurs précieux conseils, en particulier Michel Waldschmidt. Les idées contenues dans ce texte proviennent de nombreuses et intéressantes conversations avec Patrice Philippon que je remercie vivement.

**§2 Rappels sur les formes éliminantes.**

Nous rappelons ici la terminologie développée dans [P1]. Il s'agit de généraliser la notion de la forme de Chow en considérant des hypersurfaces génériques à la place des hyperplans.

Soit  $\mathbf{K}$  un corps de caractéristique zéro,  $\bar{\mathbf{K}}$  sa clôture algébrique et  $\mathbf{A} = \mathbf{K}[x_0, \dots, x_n]$  (resp.  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{K}}[x_0, \dots, x_n]$ ) l'anneau des polynômes en les variables  $x_0, \dots, x_n$ . Etant donné un entier  $d \geq 1$ , on identifie la forme homogène de degré  $d$

$$\sum_{|\lambda|=d} u_\lambda x^\lambda$$

---

<sup>†</sup> Nous remercions ici P. Gianni pour nous avoir aidé à utiliser Scratchpad II.

avec le vecteur  $(u_\lambda)_{|\lambda|=d} \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d)}$  (où  $\nu(n,d) = \binom{n+d}{n}$ ). Soit maintenant  $\wp \subset \mathbf{A}$  un idéal homogène premier définissant une variété projective  $\mathbf{V}$  de dimension  $r-1$  et fixons un multi-indice  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$ . On note  $\mathcal{U}_{\mathbf{d}}$  l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\mathbf{d}} = \{u_\lambda^i; \quad |\lambda| = d_i; \quad i = 1, \dots, r\}$$

et on considère les anneaux  $\mathbf{K}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}]$  et  $\mathbf{A}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{A}$  respectivement en les variables  $u_\lambda^i \in \mathcal{U}_{\mathbf{d}}$ . La projection sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_1)} \times \dots \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_r)}$  de l'ensemble

$$\{(x, u^1, \dots, u^r) \in \mathbf{V} \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_1)} \times \dots \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_r)}; \quad u^i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, r\}$$

définit une hypersurface irréductible (voir [P1] proposition 1.5) et donc une forme multi-homogène  $f_{\mathbf{d}} = f_{\mathbf{d},\wp} \in \mathbf{K}[u]$ . On l'appelle forme éliminante d'indice  $\mathbf{d}$  de l'idéal  $\wp$ .

**Remarque 1.**

1) Comme dans le cas classique,

$$\mathbf{V} = \{x \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n; \quad u^i(x) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_1)} \times \dots \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^{\nu(n,d_r)} \quad \text{tel que } f_{\mathbf{d}}(u) = 0\}$$

(théorème de l'élimination, voir [P1] proposition 1.4).

2) Utilisant le théorème de Bezout, on voit que le degré total de  $f_{\mathbf{d},\wp}$  par rapport aux variables  $u^i$  est  $(\prod_{j \neq i} d_j) \deg \wp$ .

Soit maintenant  $\mathbf{K}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$  (resp.  $\mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$ ) l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  (resp.  $\mathbf{A}$ ) en les nouvelles variables

$$\mathcal{S}_{\mathbf{d}} = \{s_{\lambda,\mu}^i \quad |\lambda| = |\mu| = d_i; \quad i = 1, \dots, r\}$$

liées algébriquement par les seules relations

$$s_{\lambda,\mu}^i + s_{\mu,\lambda}^i = 0.$$

On considère l'homomorphisme

$$\theta_{\mathbf{d}}: \mathbf{A}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}] \rightarrow \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$$

définie par

$$\theta_{\mathbf{d}} u_\lambda^i = \sum_{|\mu|=d_i} s_{\lambda,\mu}^i x^\mu.$$

Soit  $\wp$  un idéal homogène premier et  $f$  une forme éliminante d'indice  $\mathbf{d}$  de  $\wp$ . On pose  $\wp_{0,\mathbf{d}}^\# = (0)$  et, pour  $l \in \mathbf{N}$ , on définit  $\wp_{l,\mathbf{d}}^\#$  comme l'idéal engendré dans  $\mathbf{A}$  par les coefficients des formes

$$\theta_{\mathbf{d}} \frac{\partial^{l-1} f}{\partial u^\tau}, \quad \tau \in \mathbf{N}^{\sum_{i=1}^r \nu(n,d_i)}, \quad |\tau| = l-1.$$

On appelle ensuite  $\wp_{l,\mathbf{d}}$  le saturé de  $\wp_{l,\mathbf{d}}^\#$ . Remarquons que pour tout  $l \geq 2$  l'idéal  $\wp_{l,\mathbf{d}}$  est égal au saturé de l'idéal engendré par les polynômes

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad 0 \leq i \leq n, P \in \wp_{l-1,\mathbf{d}}^\#$$

([P2] proposition 1 pour le cas  $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ ).

### §3 Variété lisses et idéal $\wp_1$ .

Dans ce qui suit on fixe  $\alpha \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n$  et on suppose  $\mathbf{d} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ . On oubliera d'écrire l'indice  $\mathbf{1}$  dans  $\wp_{l,\mathbf{1}}$ ,  $\mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\theta_1$ . Soient  $M_\alpha$  l'idéal de définition de  $\alpha$  dans  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{K}}[x]$  et  $f$  la forme éliminante d'un idéal homogène premier  $\wp$  de codimension  $n + 1 - r$ . Pour tout  $l \in \mathbf{N}$  les affirmations suivantes sont équivalentes (voir [P2] corollaire de p.148 et [A2] prop. 2):

- i)  $\wp_l \subset M_\alpha$ ;
- ii)  $\wp_1 \subset M_\alpha^l$ ;
- iii)  $\theta \frac{\partial^{l-1} f}{\partial (u_j^r)^{l-1}} \in M_\alpha[\mathcal{S}]$  pour  $j = 0, \dots, n$ .

On appelle  $i_\alpha(\wp)$  le plus grand entier  $l$  pour lequel elles sont satisfaites.

Soit  $R$  un anneau local noethérien et  $\mathcal{M}$  son idéal maximal. Pour tout idéal  $\mathcal{M}$ -primaire  $Q$  de  $R$  et pour tout  $n$  assez grand la longueur  $l(E_n)$  du  $R$ -module  $E_n = R/Q^n$  est un polynôme en  $n$  de degré  $d = \dim R$  et de coefficient directeur  $e_R(Q)/d!$  avec  $e_R(Q) \in \mathbf{N}$  ([ZS], Ch.VIII §8 Th.19). On appelle multiplicité de l'anneau local l'entier  $e_R(\mathcal{M})$ . Soit maintenant  $\wp \subset M_\alpha$  un idéal homogène. On note  $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$  l'anneau local  $\bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha}/\wp\bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha}$  et on appelle multiplicité de  $\wp$  en  $\alpha$  l'entier

$$m_\alpha(\wp) = e_{\mathcal{O}_{\wp,\alpha}}(M\bar{\mathbf{A}}_M/\wp\bar{\mathbf{A}}_M).$$

### Théorème 1 (Philippon [P2]).

$$i_\alpha(\wp) = m_\alpha(\wp).$$

Pour démontrer le théorème A nous avons besoin du lemme suivant.

#### Lemme 1.

Soit  $\wp \subset M_\alpha$  un idéal homogène de codimension  $k > 1$  et supposons que  $m_\alpha(\wp) > 1$ . Alors, si l'anneau local  $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$  est Cohen-Maculay,  $\wp \not\subset M_\alpha^{m_\alpha(\wp)}$ .

**Démonstration.**

Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1} \in M$  des éléments génériques; l'anneau  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  étant Cohen-Maculay, on déduit des théorèmes 22, §10, p.294 et 3, appendice 6, p.400 de [ZS] que  $m = m_\alpha(\wp)$  est égal à la longueur de l'idéal  $M$ -primaire  $J = (\wp, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$  dans l'anneau  $\mathbf{A}_M$ . Supposons  $\wp \subset M^m$ ; alors on a

$$J \subset M^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}) = (\gamma_r, \dots, \gamma_n)^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})$$

où  $\gamma_r, \dots, \gamma_n \in M$  sont des éléments convenables. La longueur de l'idéal  $(\gamma_r, \dots, \gamma_n)^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})$  est

$$\binom{n-r+1+m-1}{m-1} \geq \binom{m+1}{m-1} = \frac{m(m+1)}{2},$$

donc

$$m \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

c'est-à-dire  $m \leq 1$ .

**Remarque 2.**

L'hypothèse sur  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  est nécessaire: en effet l'idéal premier

$$\wp = (x_1^3 - x_2^2, x_1x_3 - x_2x_4, x_3^2 - x_1x_4^2, x_2x_3 - x_1^2x_4) \subset (x_1, x_2, x_3, x_4)^2$$

a codimension 2 et multiplicité 2 en  $(0, 0, 0, 0)$  (cf [HIO] (7.7) pp.39-40).

**Démonstration du théorème A.**

Soit  $\wp$  un idéal homogène premier de codimension  $> 1$ . Pour le théorème 1 on a  $\wp_1 \mathbf{A}_M \subset M^{m_\alpha(\wp)} \mathbf{A}_M$  et, si  $m_\alpha(\wp) > 1$ , on a aussi  $\wp_1 \mathbf{A}_M \not\subset M^{m_\alpha(\wp)} \mathbf{A}_M$  pour le lemme précédent. Ceci montre que  $m_\alpha(\wp) = 1$  et donc ([F] proposition 7.2)  $\mathcal{O}_{\wp, \alpha}$  est régulier.

La proposition suivante montre une première relation entre les idéaux  $\wp_l$ .

**Proposition 1.**

Si  $\wp$  est engendré par des polynômes homogènes de degrés  $\leq d$ , on a

$$\wp \cdot (\wp^2)^d \subset \wp_1.$$

**Démonstration.**

Soit  $f$  une forme éliminante de  $\wp$  et notons  $u^i$  la forme linéaire  $u^i = \sum_{j=0}^n u_j^i x_j$ . Pour tout  $h \in \{0, \dots, n\}$  il existe un entier  $M$  tel que

$$x_h^M f = p_h + q_{1,h} u^1 + \dots + q_{r,h} u^r$$

avec  $p_h \in \wp \mathbf{A}[\mathcal{U}]$  et  $q_{1,h}, \dots, q_{r,h} \in \mathbf{A}[\mathcal{U}]$ . Donc pour  $j, h = 0, \dots, n$  on a

$$x_h^M \frac{\partial f}{\partial u_j^r} \equiv q_{r,h} x_j \pmod{(\wp, u^1, \dots, u^r) \mathbf{A}[\mathcal{U}]}.$$

Soit  $P(x) = \sum_{|\lambda|=d} p_\lambda x^\lambda \in \wp$  et notons

$$g = \sum_{|\lambda|=d} p_\lambda \left( \frac{\partial f}{\partial u_0^r} \right)^{\lambda_0} \cdots \left( \frac{\partial f}{\partial u_n^r} \right)^{\lambda_n} \in \mathbf{K}[\mathcal{U}].$$

En utilisant les congruences ci-dessus, on trouve  $x_h^{dM} g(\wp, u^1, \dots, u^r)$  et donc  $g$  est un multiple de  $f$  et  $\theta g \in \wp_1^\# \mathbf{A}[\mathcal{S}]$ . D'autre part, pour  $i = 0, \dots, n$  on a

$$x_i \theta \frac{\partial f}{\partial u_j^r} - x_j \theta \frac{\partial f}{\partial u_i^r} = \frac{\partial \theta f}{\partial s_{ij}} \in \wp_1^\# \mathbf{A}[\mathcal{S}] \quad (1)$$

ce qui entraîne

$$P(x) \left( \frac{\partial \theta f}{\partial u_j^r} \right)^d \equiv x_j^d g \equiv 0 \pmod{\wp_1^\# \mathbf{A}[\mathcal{S}]}.$$

On constate d'après (1) que l'idéal  $(\wp_2)^d$  est engendré par les coefficients des formes

$$\left( \frac{\partial \theta f}{\partial u_j^r} \right)^d, \quad j = 0, \dots, n.$$

Donc on en déduit

$$\wp \cdot (\wp_2)^d \subset \wp_1.$$

### Remarque 3.

En utilisant cette proposition on retrouve le résultat de Weil cité dans l'introduction: en effet si  $m_\alpha(\wp) = 1$  on a  $\wp_2 \not\subset M_\alpha$ .

#### §4 Étude des idéaux $\wp_{l,\mathbf{d}}$ .

Retournons maintenant au cas général,  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$ . L'objet des propositions suivantes est l'étude de la variation en fonction de l'indice  $\mathbf{d}$  des idéaux  $\wp_{l,\mathbf{d}}$ .

Soient  $\mathbf{d}^1 = (d_1, \dots, d_{r-1}, d_r^1)$  et  $\mathbf{d}^2 = (d_1, \dots, d_{r-1}, d_r^2)$  deux multi-indices avec  $d_r^1 \leq d_r^2$ . Etant donné un polynôme

$$Q = \sum_{|\lambda|=d_r^2-d_r^1} q_\lambda x^\lambda \in \mathbf{A} \setminus \wp$$



de degré  $d_r^2 - d_r^1$ , on considère l'homomorphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbre

$$\phi = \phi_Q: \mathbf{K}[u_\lambda^r]_{|\lambda|=d_r^2} \rightarrow \mathbf{K}[u_\mu^r]_{|\mu|=d_r^1}$$

défini par

$$\phi(u_\lambda^r) = \sum_{\tau+\mu=\lambda} q_\tau u_\mu^r$$

c'est-à-dire  $\phi(u^r)(x) = Q(x)u^r(x)$ .

**Lemme 2.**

Soient  $f_{\mathbf{d}^1}, f_{\mathbf{d}^2}$  deux formes éliminantes de  $\wp$  d'indice  $\mathbf{d}^1$  et  $\mathbf{d}^2$  respectivement. Alors on a

$$\phi f_{\mathbf{d}^2} = h_1^{e_1} \cdots h_s^{e_s} f_{\mathbf{d}^1}$$

où  $h_1, \dots, h_s$  sont des formes éliminantes d'indice  $(d_1, \dots, d_{r-1}) \in \mathbf{N}^{r-1}$  des idéaux premiers minimaux associés à  $(\wp, Q)$ .

**Démonstration.**

Soit  $g = \phi f_{\mathbf{d}^2} = f_{\mathbf{d}^2}(u^1, \dots, u^{r-1}, \phi(u^r))$ ; alors  $g(u) = 0$  si et seulement si ou  $f_{\mathbf{d}^1}(u) = 0$  ou bien  $(u^1, \dots, u^{r-1})$  est un zéro d'une des formes éliminantes  $h_1, \dots, h_s$ . En effet, par la remarque 1-1) (théorème de l'élimination),  $g(u) = 0$  équivaut à l'existence d'un zéro  $x \in \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n$  de  $\wp$  tel que  $u^i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, r-1$ ) et  $Q(x)u^r(x) = 0$ . Si  $u^r(x) = 0$ , alors  $f_{\mathbf{d}^1}(u) = 0$ ; sinon  $x$  est un zéro de l'idéal  $(\wp, Q(x))$  et donc  $(u^1, \dots, u^{r-1})$  est un zéro d'une des formes  $h_1, \dots, h_s$ . En utilisant le fait que les  $h_1, \dots, h_s, f_{\mathbf{d}^1}$  sont irréductibles, on en déduit (quitte à multiplier  $h_1$  par une constante) la factorisation  $g = h_1^{e_1} \cdots h_s^{e_s} f_{\mathbf{d}^1}^e$ . Mais  $\deg_{u^r} g = \deg_{u^r} f_{\mathbf{d}^2}$  car  $\phi$  est linéaire et  $\deg_{u^r} f_{\mathbf{d}^1} = d_1^1 \cdots d_{r-1}^1 = d_1^2 \cdots d_{r-1}^2 = \deg_{u^r} f_{\mathbf{d}^2}$  par la remarque 1-2); donc  $e = 1$ .

Soient  $R$  un anneau commutatif et  $T$  un anneau de polynômes à coefficients dans  $R$ . Etant donné deux multi-indices  $\lambda, \mu \in \mathbf{N}^m$  nous dirons que  $\lambda \leq \mu$  si  $\lambda_i \leq \mu_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Un monôme  $x^\lambda$  dans  $P \in T$  serait dit extrémal pour  $P$  si tous les coefficients des monômes  $x^\mu$  de  $P$  avec  $\mu > \lambda$  (resp.  $\mu < \lambda$ ) sont nuls.

**Remarque 4.**

Soit  $\psi: \rightarrow T$  un homomorphisme donné par la spécialisation à zéro de certaines variables. Alors, si  $P \in T$ , tout monôme extrémal pour  $\psi P$  est extrémal pour  $P$ .

On aura aussi besoin du lemme facile suivant:

**Lemme 3.**

Soient  $P, Q \in T$  et considérons les idéaux  $I$  et  $J$  engendrés dans  $R$  par les coefficients de  $Q$  et  $PQ$  respectivement. Soit encore  $p$  le coefficient dans  $P$  d'un monôme extrémal pour  $P$ . Alors il existe un entier positif  $N$  tel que dans  $R$  on ait  $p^N I \subset J$ .

**Proposition 2.**

Soient  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{N}^r$  avec  $d_j^1 \leq d_j^2$  pour  $j = 1, \dots, r$ . Alors, pour tout  $l \in \mathbf{N}$  on a  $\wp_{l, \mathbf{d}^1} \subset \wp_{l, \mathbf{d}^2}$ .

**Démonstration.**

Par récurrence on est amené au cas  $d_j^1 = d_j^2 = d_j$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ) et  $l = 1$ . Il suffit de démontrer que dans  $\mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$  on a

$$x_{j_0}^N \wp_{1, \mathbf{d}^2}^\# \subset \wp_{1, \mathbf{d}^1}^\#$$

pour  $j = 0, \dots, n$ . On peut supposer  $j_0 = 0$ ; si  $x_0 \in \wp$ , il existe un entier positif  $N$  tel que  $x_0^N \in \wp_{1, \mathbf{d}^1}$  (car les idéaux  $\wp$  et  $\wp_{1, \mathbf{d}^1}$  ont le même radical) et donc  $x_0^N \wp_{1, \mathbf{d}^2}^\# \subset \wp_{1, \mathbf{d}^1}^\#$ .

Supposons maintenant  $x_0 \notin \wp$  et utilisons le lemme 2 avec  $Q = x_0^{d_r^2 - d_r^1}$ . Donc

$$\theta_{\mathbf{d}_1}(h)\theta_{\mathbf{d}_1}(f_{\mathbf{d}_1}) = (\theta_{\mathbf{d}_1} \circ \phi)(f_{\mathbf{d}_2})$$

où  $h$  est un produit de formes éliminantes d'indice  $(d_1, \dots, d_{r-1})$  d'idéaux premiers  $\wp^{(1)}, \dots, \wp^{(s)}$  de codimension  $n + 2 - r$  contenant  $x_0$  et

$$\phi(u_\lambda^r) = \begin{cases} u_\mu^r, & \text{si } \lambda = \mu + (d_r^2 - d_r^1, 0, \dots, 0); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\rho: \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}^1}] \rightarrow \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}^1}]$  définie par

$$\rho(s_{\lambda, \lambda'}^i) = \begin{cases} s_{\lambda, \lambda'}^i, & \text{si } \lambda = (d_i, 0, \dots, 0) \text{ et } \lambda' = (d_i, 0, \dots, 0); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $(\rho \circ \theta_{\mathbf{d}_1})(h) = x_0^e a$  où  $e = \sum_{i=1}^{r-1} d_i \deg_{u^i} h$  et  $a \in \mathbf{K}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$ . En utilisant le théorème

d'élimination (remarque 1-1)) et la fait que  $x_0 \in \wp^{(1)}, \dots, \wp^{(s)}$  on voit que  $(\rho \circ \theta_{\mathbf{d}_1})(h) \neq 0$ ; soit donc  $\mathcal{M}$  un monôme extrémal pour  $(\rho \circ \theta_{\mathbf{d}_1})(h)$ ; pour la remarque 4,  $\mathcal{M}$  est extrémal pour  $\theta_{\mathbf{d}_1}(h)$  et donc le lemme 3 donne un entier  $N$  tel que  $x_0^{eN} \wp_{1, \mathbf{d}^1}^\#$  est dans l'idéal  $J$  engendré par les coefficients de  $(\theta_{\mathbf{d}_1} \circ \phi)(f_{\mathbf{d}_1})$ . Enfin soit  $\psi: \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}^2}] \rightarrow \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}^2}]$  donné par

$$\psi(s_{\lambda, \lambda'}^r) = \begin{cases} s_{\mu, \mu'}^r, & \text{si } \lambda = \mu + (d_r^2 - d_r^1, 0, \dots, 0) \text{ et } \lambda' = \mu' + (d_r^2 - d_r^1, 0, \dots, 0); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$x_0^{d_r^2 - d_r^1} (\theta_{\mathbf{d}^1} \circ \phi) = \psi \circ \theta_{\mathbf{d}^2}$$

ce qui montre que  $x_0^{d_r^2 - d_r^1} J \subset \wp_{1, \mathbf{d}^2}^\#$  et donc  $x_0^{eN + d_r^2 - d_r^1} \wp_{l, \mathbf{d}^1} \subset \wp_{l, \mathbf{d}^2}$ .

On peut se demander si on a toujours l'égalité entre les idéaux  $\wp_l$  et  $\wp_{l, \mathbf{d}}$ . Nous arrivons à démontrer la proposition suivante:

**Proposition 3.**

Pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$  l'idéal  $\wp_{1,\mathbf{d}}$  est entier sur  $\wp_1$  (i.e. pour tout  $p \in \wp$  on a une relation de la forme  $p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k = 0$  avec  $a_i \in (\wp_1)^i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ).

**Démonstration.**

Soient  $\mathbf{d}^1 = (d_1, \dots, d_{r-1}, 1)$ ,  $\mathbf{d}^2 = (d_1, \dots, d_{r-1}, d_r) \in \mathbf{N}^r$ ; il suffit de démontrer que  $\wp_{\mathbf{d}^2}$  est entier sur  $\wp_{\mathbf{d}^1}$ . Pour ce faire, on va démontrer qu'il existe un entier positif  $M$  tel que pour tout  $j = 0, \dots, n$  on ait  $x_j^M \wp_{1,\mathbf{d}^2}^\# \subset \overline{\wp_{1,\mathbf{d}^2}^\#}$  où nous avons noté  $\bar{I}$  la clôture intégrale de l'idéal  $I$ . On peut supposer  $j = 0$  et  $x_0 \notin \wp$  (car sinon l'inclusion précédente est évidente). Soit  $f_{\mathbf{d}^1}$  une forme éliminante d'indice  $\mathbf{d}^1$  de  $\wp$ ; le même argument que celui du lemme 2 de [N1] montre alors qu'il existe  $a \in \mathbf{K}[\mathcal{U}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}]$  et des éléments  $\alpha_j^h$ ,  $h = 1, \dots, \delta = \deg_{\mathbf{u}^r} f$ ;  $j = 0, \dots, n$ , avec  $\alpha_1^h = 1$ , entiers sur  $\mathbf{K}[\mathcal{U}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}, a^{-1}]$  tels que

$$f_{\mathbf{d}^1} = a \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{j=0}^n u_j^r \alpha_j^h.$$

En regardant les degrés on voit que le polynôme

$$f_{\mathbf{d}^2} = a^{d_r} \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{|\lambda|=d_r} u_\lambda^r (\alpha^h)^\lambda$$

est une forme éliminante d'indice  $\mathbf{d}^2$  de  $\wp$ . Soit  $\nu: \mathbf{B} = \mathbf{K}[u^1, \dots, u^{r-1}, x] \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  une valuation discrète; tout d'abord, on peut étendre  $\nu$  au corps  $\mathbf{L} = \mathbf{K}(u^1, \dots, u^{r-1}, x, \alpha_j^h)$ , car  $\mathbf{L}$  est une extension algébrique du corps des fractions de  $\mathbf{B}$ ; ensuite, on étend  $\nu$  à l'anneau  $\mathbf{L}[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{d_r}]$  de façon canonique. Pour  $\lambda, \mu \in \mathbf{N}^{n+1}$  et pour  $i, j = 0, \dots, n$  notons

$$\Lambda_{\lambda, \mu}(x, y) = x^\lambda y^\mu - y^\lambda x^\mu$$

et

$$\Lambda_{i,j}(x, y) = x_i y_j - y_i x_j$$

où  $x = (x_0, \dots, x_n)$  et  $y = (y_0, \dots, y_n)$ . Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbf{N}^{n+1}$  avec  $|\lambda| = n\mu = d_r$  on a

$$\Lambda_{\lambda, \mu}(x, y) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} P_{i,j}(x, y) \Lambda_{i,j}(x, y)$$

où les  $P_{i,j}$  sont des polynômes bi-homogènes de bi-degrés  $(d_r - 1, d_r - 1)$ . Les  $a\alpha_j^h$  étant entiers sur  $B$ , on en déduit que les  $a^{d_r-1} \Lambda_{\lambda, \mu}(x, \alpha^h)$  ( $|\lambda| = n\mu = d_r$ ) sont des combinaisons linéaires des  $\Lambda_{i,j}(x, \alpha^h)$  ( $0 \leq i < j \leq n$ ) à coefficients entiers sur  $\mathbf{B}$ , et donc

$$\min_{\lambda \neq \mu} \Lambda_{\lambda, \mu}(x, \alpha^h) \leq \min_{0 \leq i < j \leq n} \nu(\Lambda_{i,j}(x, \alpha^h)). \quad (2)$$

Par ailleurs,

$$\theta_{d_r} f_{\mathbf{d}^2} = a^{d_r} \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{(\lambda, \mu) \in \Gamma} s_{\lambda, \mu}^r \Lambda_{\lambda, \mu}(x, \alpha^h);$$

$$\theta_1 f_{\mathbf{d}^1} = a \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{0 \leq i < j \leq n} s_{i, j}^r \Lambda_{i, j}(x, \alpha^h),$$

où  $\Gamma$  contient un seul des couples  $(\lambda, \mu)$ ,  $(\mu, \lambda)$  pour chaque  $\lambda \neq \mu$  avec  $|\lambda| = |\mu| = d_r$  et  $\theta_1$  (resp.  $\theta_{d_r}$ ) est l'analogie de l'opérateur  $\theta_{\mathbf{d}^1}$  (resp.  $\theta_{\mathbf{d}^2}$ ) n'agissant que sur les variables  $u^r$ . En utilisant (2), on en déduit

$$\nu(a^{(d_r-1)(\delta-1)} \theta_{d_r} f_{\mathbf{d}^2}) \geq \nu(\theta_1 f_{\mathbf{d}^1}).$$

Le critère valuatif d'intégralité ([ZS], théorème 3, p.353-354) montre alors que l'idéal  $a^{(d_r-1)(\delta-1)} J_{\mathbf{d}}$  est entier sur  $J$ , où nous avons noté  $J_{\mathbf{d}} \subset \mathbf{B}$  (resp.  $J \subset \mathbf{B}$ ) l'idéal engendré par les coefficients de  $\theta_{d_r} f_{\mathbf{d}^2}$  (resp.  $\theta_1 f_{\mathbf{d}^1}$ ). Donc, pour tout  $g \in J_{\mathbf{d}}$ , les coefficients dans  $\mathbf{A}$  du polynôme  $\theta_{\mathbf{d}^2}(a^{(d_r-1)(\delta-1)} f_{\mathbf{d}^2})$  sont entiers sur  $\varphi_{1, \mathbf{d}^1}^{\#}$  dans l'anneau  $\mathcal{S}\mathbf{A}$ . Maintenant le lemme 3 donne un entier  $M$  tel que  $x_0^M \varphi_{1, \mathbf{d}^2}^{\#} \subset \overline{\varphi_{1, \mathbf{d}^1}^{\#}}$ .

En utilisant le théorème 2.1 de [LT] (via le §4 de [LT]) on trouve le corollaire quantitatif suivant:

**Corollaire 1.**

Pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$  on a  $(\varphi_{1, \mathbf{d}})^n \subset \varphi_1$ .

**Démonstration.**

Soit  $\varphi'$  un idéal premier associé à  $\varphi_{1, \mathbf{d}}$ ; l'anneau local  $R = \mathbf{A}_{\varphi'}$  est de dimension  $\leq n$  et l'idéal  $\varphi_{1, \mathbf{d}} R$  est entier sur  $\varphi_1 R$ . Le théorème cité montre alors que  $(\varphi_{1, \mathbf{d}} R)^n \subset \varphi_1 R$ .

Le théorème suivant montre la relation principale entre les idéaux  $\varphi_{l, \mathbf{d}}$ .

**Théorème 2.**

Soit  $\varphi$  un idéal premier de codimension  $n+1-r$  engendré par des polynômes homogènes de degrés  $\leq d$  et soit  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r) \in \mathbf{N}^r$  avec  $d_i \geq d$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Alors pour tout  $l, m \in \mathbf{N}$  on a

$$\varphi^m \varphi_{m+l, \mathbf{d}} \subset \varphi_{l, \mathbf{d}}.$$

**Démonstration.**

On peut se ramener de façon évidente au cas  $m = 1$ . Par ailleurs, si  $\wp\wp_{l+1,\mathbf{d}} \subset \wp_{l,\mathbf{d}}$ , on obtient  $\wp \frac{\partial P}{\partial x_j} \in \wp_{l+1,\mathbf{d}}^\#$  ( $j = 0, \dots, n$ ) pour tout  $P \in \wp_{l+1,\mathbf{d}}^\#$  et donc  $\wp\wp_{l+2,\mathbf{d}} \subset \wp_{l+1,\mathbf{d}}$ . On en déduit qu'on peut se borner à montrer le théorème pour  $m = l = 1$ . Soit maintenant  $f$  une forme éliminante d'indice  $\mathbf{d}$  de  $\wp$  et notons, pour  $i = 0, \dots, n$ ,  $u^i$  la forme homogène  $u^i = \sum_{|\lambda|=d_i} u_\lambda^i x^\lambda$ . Pour tout  $h \in \{0, \dots, n\}$  il existe un entier  $M$  tel que

$$x_h^M f = p_h + q_{1,h}u_1 + \dots + q_{r,h}u_r$$

avec  $p_h \in \wp\mathbf{A}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}]$  et  $q_{1,h}, \dots, q_{r,h} \in \mathbf{A}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}]$ . Donc pour  $j, h = 0, \dots, n$  on a

$$x_h^M \frac{\partial f}{\partial u_\lambda^r} \equiv q_{r,h}x^\lambda \pmod{(\wp, u^1, \dots, u^r)}.$$

Soit  $P(x) = \sum_{|\lambda|=d_r} p_\lambda x^\lambda \in \wp$  et notons

$$g = \sum_{|\lambda|=d_r} p_\lambda \frac{\partial f}{\partial u_\lambda^r} \in \mathbf{K}[\mathcal{U}_{\mathbf{d}}].$$

En utilisant les congruences ci-dessus, on trouve  $g \in (\wp, u^1, \dots, u^r)$  et donc  $g$  est un multiple de  $f$ ; mais  $\deg_{\mathbf{u}} g < \deg_{\mathbf{u}} f$  et donc  $g = 0$ . Utilisant

$$x_\lambda \theta_{\mathbf{d}} \frac{\partial f}{\partial u_\mu^r} - x_\mu \theta_{\mathbf{d}} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda^r} = \frac{\partial \theta f}{\partial s_{\lambda\mu}} \in \wp_1^\# \mathbf{A}[\mathcal{S}_{\mathbf{d}}]$$

on en déduit

$$P(x) \theta_{\mathbf{d}} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda^r} \in \wp_{1,\mathbf{d}}$$

pour tout  $|\lambda| = d_r$ . Donc  $\wp\wp_{2,\mathbf{d}} \subset \wp_{1,\mathbf{d}}$ .

**Corollaire 2.**

*Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\wp^{m_\alpha(\wp)} \subset \wp_{1,\mathbf{d}} \bar{\mathbf{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbf{A}.$$

**Démonstration.**

Le théorème 1 et la proposition 2 montrent que  $\wp_{m_\alpha(\wp),\mathbf{d}} \not\subset M_\alpha$ ; il suffit donc de choisir  $m = m_\alpha(\wp)$  et  $l = 1$  dans le théorème précédent.

Le corollaire précédent joint au corollaire 1 donne le théorème B.

**Addendum.**

Tout récemment F. Catanese a démontré dans [C] le théorème A sans aucune hypothèse sur l'anneau  $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ .

## REFERENCES

- [A1] F. AMOROSO, “Some remarks about algebraic independence measures in high dimension”, Bull. Soc. math. France, 117, 1989, p. 285-295;
- [A2] F. AMOROSO, “Polynomial with high multiplicity”, Acta Arithmetica, LVI, 1990, p. 345-364;
- [C] F. CATANESE, “Chow varieties, Hilbert schemes and Moduli spaces of surfaces of general type”, J. Alg. Geom. 1 (1992), 561-595;
- [F] W. FULTON, “Intersection Theory”, Springer-Verlag, New York 1980;
- [HIO] M. HERMANN, S. IKEDA, U. ORBANZ, “Equimultiplicity and Blowing up”, Springer-Verlag, New York 1988;
- [LT] J. LIPMAN et B. TEISSIER, “Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals”, Michigan Math. J., 28, 1981, p. 97-116;
- [N1] Ju.V. NESTERENKO, “Estimates for the characteristic function of a prime ideal”, Mat. Sbornik 123 (165), 1984, p. 11-34 = Math. USSR Sbornik 51, 1985, p. 9-32;
- [N2] Ju.V. NESTERENKO, “On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers”, Mat. Sbornik 123. No.4, 1984, p. 435-459 = Math. USSR Sbornik 51, 1985, p. 429-453;
- [P1] P. PHILIPPON, “Critères pour l’indépendance algébrique”. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 64, 1986, p. 5-52;
- [P2] P. PHILIPPON, “Théorème des zéros effectif et élimination”, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1, 1989, p. 137-155;
- [W] A. WEIL, “Foundations of Algebraic Geometry”, AMS, 2nd Edition, 1962;
- [ZS] O. ZARISKI et P. SAMUEL, “Commutative Algebra”, Vol.2, Van Nostrand, Princeton 1960 = Springer-Verlag, New York 1968.

Francesco Amoroso  
Dipartimento di Matematica  
Via Buonarroti 2  
56127 PISA (ITALY)