THE RAMANUJAN JOURNAL, 5, 237–246, 2001

Densité des Points à Coordonnées Multiplicativement Indépendantes

FRANCESCO AMOROSO amoroso@math.unicaen.fr
U. P. R. E. S. A. 6081 (C. N. R. S.), Structures Discrètes & Analyse Diophantienne, Département de Mathématiques, Université de CAEN, CAMPUS II, BP 5186. F-14032 CAEN CÉDEX, France

SINNOU DAVID david@math.jussieu.fr
U. M. R. 7586 (C. N. R. S.)-U. F. R. 921, Théorie des nombres, Institut de mathématiques de JUSSIEU, Université Pierre et Marie CURIE, 4, Place JUSSIEU, F-75005 PARIS, FRANCE

Received April 20, 2000; Accepted May 14, 2001

Résumé. Nous montrons que pour toute sous-variété algébrique d'un tore multiplicatif (non contenue dans un sous-groupe algébrique propre), on peut choisir un ensemble Zariski dense de points algébriques de hauteur contrôlée, dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes. Cet énoncé précise et généralise un théorème de S. Zhang qui lie la hauteur projective d'une varété au *minimum essentiel* de la hauteur des points algébriques de celle-ci. En tenant compte d'un résultat précédent des auteurs sur le problème de Lehmer généralisé à un tore, nous en déduisons une minoration pour la hauteur normalisée d'une sous-variété d'un tore. Cette dernière est optimale à un «ε-prés» en le degré géométrique de la variété étudiée (*confer* une conjecture du second auteur avec P. Philippon).

Abstract. In this article, we prove that on any subvariety of a multiplicative torus which is not contained in a proper algebraic subgroup, one can find a Zariski dense set of algebraic points of small height whose coordinates are multiplicatively independent. This statement generalizes an earlier result of S. Zhang which links the projective height of a variety with the *essential minimum* of its algebraic points. Taking into account an earlier result of the authors on the Lehmer problem generalized to a multiplicative torus, one deduces a lower bound for the normalized height of subvarieties of multiplicative groups. This lower bound is optimal up to an "ε" in the geometric degree of the variety studied (*confer* a conjecture by the second author and P. Philippon).

Key words: normalized heights, multiplicative groups, linear relations, Lehmer problem, Bogomolov problem, density properties, essential minimum

2000 Mathematics Subject Classification: Primary—11G10, 11J81, 14G40

1. Introduction

Dans [9], P. Philippon a introduit une notion de hauteur pour les variétés projectives définies sur un corps de nombres, et en a déduit dans [6], en collaboration avec le deuxième auteur, une hauteur normalisée $\hat{h}(\cdot)$ pour les sous-variétés d'une puissance du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$ (que nous considérons plongé dans $\mathbb{P}^n$ de façon naturelle). Dans le formalisme de l'intersection arithmétique (suivant notamment Bost, Gillet, Soulé, Szpiro), Zhang (voir [11–13]) a également construit des hauteurs normalisées ; les propriétés d'unicité de la hauteur normalisée assurent que ces deux notions coïncident une fois fixée une compactification équivariante du tore.

Cette hauteur a la propriété remarquable suivante. Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur un corps $\mathbb{K} \subset \bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible ; alors $\hat{h}(V) = 0$ si et seulement si V est une réunion de sous-variétés de torsion (*i. e.* de translatés de sous-groupes de $\mathbb{G}_m^n$ par des points de torsion).

Ce résultat a tout d'abord été obtenu par Lawton (voir [8]) pour les hypersurfaces définies sur $\mathbb{Q}$ (dont la hauteur normalisée pour la compactification choisie n'est rien d'autre que la mesure de Mahler d'une équation à coefficients entiers et de contenu 1), le cas général ayant été obtenu plus tard par Zhang (voir [11, 12]).

Soient V une sous-variété algébrique stricte de $\mathbb{G}_m^n$ et θ un nombre réel ; on désigne par $V(\theta)$ l'ensemble des $\boldsymbol{\alpha} \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur de Weil $h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \theta$. On définit ensuite le *minimum essentiel* de V comme la borne inférieure des nombres réels $\theta > 0$ tels que $V(\theta)$ est Zariski dense dans V. Le minimum essentiel et la hauteur sont très liés. En effet, on dispose de la relation suivante, montrée dans [12], théorème 5.2 et [13], théorème 1.10 qui est valable pour toute variété V définie sur un corps $\mathbb{K} \subset \bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible :

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V)+1)\deg(V)} \leqslant \mu^{\mathrm{ess}}(V) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)}, \tag{1}$$

On pourra également se reporter à [5] §. 3, corollaire 3.2, pour une preuve plus élémentaire de ces inégalités, écrite dans le cadre des variétés abéliennes mais qui s'adapte immédiatement au cas multiplicatif.

Une question naturelle est alors la suivante : peux-t-on obtenir des inégalités similaires en ajoutant des conditions naturelles supplémentaires au point $\boldsymbol{\alpha}$? Dans [3], nous avons montré qu'en fait on pouvait exhiber un ensemble Zariski dense de points de petite hauteur dans une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ par spécialisation de $n-1$ coordonnées en des racines de l'unité ; en d'autres termes, le minimum essentiel sur les points dont les coordonnées satisfont beaucoup de relations de dépendance multiplicative est également petit.

Inversement, on peut se poser la même question si l'on impose à $\boldsymbol{\alpha}$ d'avoir toutes ses coordonnées multiplicativement indépendantes. C'est à cette question que nous donnons une réponse dans ce texte.

En fait, on peut voir de notre preuve que l'on dispose d'une grande souplesse dans la construction de petits points ; de nombreuses variantes sont donc possibles suivant les applications souhaitées.

Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur un corps $\mathbb{K} \subset \bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n$. Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points $\boldsymbol{\alpha} \in V$ dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes et dont la hauteur satisfait* :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon$$

est Zariski dense dans V.

Une première application de cet énoncé est de montrer le lien entre le problème de Lehmer en dimension supérieure et le problème de Bogomolov. Plus précisément, en utilisant le théorème 1.5 de [1] et l'inégalité (1), on déduit du théorème 1.1 des minorations pour la hauteur normalisée et pour le minimum essentiel des sous variétés de $\mathbb{G}_m^n$ qui ne sont pas réunion de variétés de torsion.

Corollaire 1.2. *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n$. Notons δ le plus petit degré d'une hypersurface définie sur $\mathbb{Q}$ et contenant V. Alors l'ensemble :*

$$\left\{\alpha \in V(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h(\alpha) \leqslant c(n)\delta^{-1}\log(3\delta)^{-\kappa(n)}\right\}$$

n'est pas Zariski dense dans V. Ici $\kappa(n)$ sont deux nombres réels et $c(n) > 0$ (effectivement calculables) ne dépendant que de n.

En utilisant un argument de projection, on en déduit :

Corollaire 1.3. *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible qui n'est pas réunion de variétés de torsion. Soit s la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V (par hypothèse, on a $s > \dim(V)$). Alors :*

$$\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant c'(n)\deg(V)^{\frac{-1}{s-\dim(V)}}\log(3\deg(V))^{-\kappa(s)},$$

et

$$\hat{h}(V) \leqslant c'(n)\deg(V)^{\frac{s-\dim(V)-1}{s-\dim(V)}}\log(3\deg(V))^{-\kappa(s)},$$

où $c'(n)$ est un nombre réel > 0 (effectivement calculable) ne dépendant que de n.

Remarquons que la dépendance en le degré (géométrique) de ce corollaire est pour sa part essentiellement optimale, et se rapproche, en tout état de cause, de celle conjecturée dans la version optimiste de la conjecture 1.1 de [6].

Rappelons que si V est une sous-variété de dimension d définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, qui n'est pas de torsion, on ne peut conjecturer mieux (à moins de remplacer le degré par géométrique de V par un invariant plus fin) que :

$$\hat{h}(V) \geqslant c''(n)\deg(V)^{\frac{s-d-1}{s-d}},$$

où s désigne cette fois la dimension du plus petit translaté d'un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V, et où $c''(n)$ est un nombre réel > 0 ne dépendant que de n.

Rappellons enfin que le corollaire 1.3 a été annoncé dans l'article [2].

2. Lemmes préliminaires

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété algébrique, de dimension d. Par degré de X (noté $\deg(X)$), nous entendrons le degré de l'adhérence de Zariski de X dans $\mathbb{P}^n$. Dans toute la suite de ce texte, nous noterons $c_1, c_2, \cdots$ des nombres réels > 0 qui ne dépendent que de la dimension n du projectif ambiant. La notion de hauteur projective que nous utilisons est celle introduite dans [9]-III. Plus précisément, si $\mathfrak{I}_X$ est l'idéal homogène de définition de X, on fixe une forme éliminante f_X d'indice $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{d+1}$ de $\mathfrak{I}_X$, et $h(X)$ est la hauteur de f_X définie par la formule $\sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log(M_v(f_X))$, où K est un corps de définition de $\mathfrak{I}_X$ et M_v désigne la norme de GAUSS aux places ultramétriques et la mesure suivante aux places archimédiennes :

$$\log(M_v(f_X)) := \int_{S_{n+1}^{d+1}} \log|f_X(\boldsymbol{b})| \cdot \sigma_{n+1}^{d+1}(\boldsymbol{b}) + (d+1)\deg(X) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m}.$$

Ci-dessus, S_m désigne la sphère unité de $\mathbb{C}^m$ et σ_m désigne la mesure invariante de masse totale 1 sur S_m.

Soit maintenant V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ (plongé dans $\mathbb{P}^n$ de façon naturelle) ; sa hauteur normalisée, notée $\hat{h}(V)$ est définie par la formule :

$$\hat{h}(V) := \lim_{m\to\infty} \frac{\deg(V)h([m]V)}{m\deg([m]V)},$$

où $[m]$ désigne la multiplication par m. On pourra se reporter à [9]-III et [6], §. 2 pour plus de détails.

On sait que l'on peut trouver dans toute variété $X \subset \mathbb{P}^n$ des points de hauteur petite, qui évitent un diviseur Z de X donné (*confer* par exemple [5], théorème 3.1, ou [13]). Nous quantifions cet énoncé dans la proposition ci-dessous, en montrant que ces points peuvent de plus être choisis définis sur un corps de nombres de degré contrôlé en fonction du « terme d'erreur » toléré pour la hauteur. De plus, la contrainte à imposer sur le degré du diviseur Z pour cette quantification est très souple.

Proposition 2.1. *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible, de dimension d. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, X) > 0$ ayant les propriétés suivantes. Soit δ un entier $\geqslant \delta_0$ et soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ qui ne contient pas X. Supposons*

$$\log\,\deg(Y) \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{4d}.$$

Il existe alors un point $\mathbf{y} \in (X\backslash Y)(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que :

$$h_{L_2}(\mathbf{y}) \leqslant \frac{h(X)}{\deg(X)} + \varepsilon \quad \text{et} \quad [\mathbb{Q}(\mathbf{y}) : \mathbb{Q}] \leqslant \deg(X)\delta^d$$

(*où l'on note h_{L_2} la hauteur de Weil sur $\mathbb{P}^n$ logarithmique et absolue, normalisée par la métrique L_2 aux places archimédiennes*).

Démonstration : il suffit de suivre la preuve du point (ii) du théorème 3.1 de [5], avec $Z = X \cap Y$. Dans cette preuve, les auteurs montrent qu'il existe des formes $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Z}[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogène de degré δ telles que $X \cap \mathcal{Z}(q_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(q_d)$ ait dimension zéro et n'intersecte pas Z. De plus, si l'on note $q_{j,\alpha}$ les coefficients de la forme q_j, on peut assurer que :

$$|q_j| := \left(\sum_{|\alpha|=\delta} |q_{j,\alpha}|^2 \Big/ \binom{\delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (d+1)(\deg(X) + \deg(Z))^2.(\delta+1)^{n+2d}$$

$$\leqslant (d+1)(\deg(X)+1)^2 \deg(Y)^2.(\delta+1)^{n+2d}$$

et donc, graçe à l'hypothèse sur $\deg(Y)$,

$$\frac{\log|q_j|}{\delta} \leqslant c_1 \frac{\log(\delta+1)}{\delta} + \frac{\delta\varepsilon}{2d} \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{d}. \tag{2}$$

Soit Z' le cycle intersection $Z' = X \cdot \mathcal{Z}(q_1) \cdots \mathcal{Z}(q_d)$ (supporté par $\mathrm{Supp}(Z') = X \cap \mathcal{Z}(q_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(q_d)$) ; le théorème de Bézout arithmétique (confer [9]-III, proposition 4) nous assure que Z' est de hauteur :

$$\frac{h(Z')}{\deg(Z')} \leqslant \frac{h(X)}{\deg(X)} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\log|q_j|}{\delta}.$$

En effet, il suffit d'appliquer la proposition 4 de *loc. cit.* récursivement à $X \cdot \mathcal{Z}(q_1)$, puis à $(X \cdot \mathcal{Z}(q_1)) \cdot \mathcal{Z}(q_2), \ldots, (X \cdot \mathcal{Z}(q_1) \cdots \mathcal{Z}(q_{d-1})) \cdot \mathcal{Z}(q_d)$, de remarquer que la contribution aux places finies de la *hauteur relative* suivant la terminologie de *loc. cit.* est toujours négative ou nulle (puisque les formes q_i sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$) ; enfin on vérifie en tenant compte de la définition de la hauteur relative que la contribution aux places archimédiennes est bien majorée par $\log|q_i|$.

Grâce à (2) on a donc :

$$\frac{h(Z')}{\deg(Z')} \leqslant \frac{h(X)}{\deg(X)} + \varepsilon$$

pour $\delta \geqslant \delta_0(\varepsilon, X)$. Comme le support de Z' est de dimension 0, et comme le quotient $\frac{h(Z')}{\deg(Z')}$ est la moyenne pondérée (par les multiplicités) des hauteurs des points du support de Z', il existe donc un point $\mathbf{y} \in \mathrm{Supp}(Z')$ tel que $h_{L_2}(\mathbf{y}) \leqslant \frac{h(X)}{\deg(X)} + \varepsilon$ (rappelons que $h_{L_2}(\cdot)$ coïncide avec la hauteur projective de la variété ponctuelle définie par le point considéré). Ainsi $\mathbf{y} \in X$, mais comme $\mathrm{Supp}(Z') \cap Z = \emptyset$ on a aussi $\mathbf{y} \notin Z$. Enfin, le théorème de Bézout (géométrique) nous assure que (car Z' est définie sur $\mathbb{Q}$; tous les conjuguées de y appartiennent donc à Z') :

$$[\mathbb{Q}(\mathbf{y}) : \mathbb{Q}] \leqslant \deg(V)\delta^d.$$

La proposition 2.1 est démontrée.

En utilisant un procédé limite, on en déduit :

Corollaire 2.2. *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible de dimension d. Pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1, V) > 0$ ayant les propriétés suivantes. Soit δ un entier $\geqslant \delta_1$ et soit Z une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ qui ne contient pas V. Supposons*

$$\log\,\deg(Z) \leqslant \frac{\delta}{4d}.$$

Il existe alors un point $\boldsymbol{\alpha} \in (V\backslash Z)(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leqslant c_2 \frac{\deg(V)\delta^d}{\varepsilon_1^d},$$

où $c_2 = c_2(n) > 0$.

Démonstration : il suffit de passer à la limite *via* le plongement étiré comme dans [6]. Plus précisément, considérons le plongement

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbb{G}_m^n & \hookrightarrow & \left(\mathbb{G}_m^n\right)^2 \hookrightarrow (\mathbb{P}_n)^2 \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_{n^2+2n} \\ x & \to & (x, x^m) \end{array}$$

où m est un entier strictement positif. Rappelons qu'il existe une constante c_3 (*confer* propositions 2.6 et 2.8 de [6] telle que pour toute variété $V \subset G_m^n$ de dimension d, on a

$$\deg(\phi(V)) = (m+1)^d \deg(V)$$

et

$$\left| \frac{h(\phi(V))}{\deg(\phi(V))} - \frac{(m+1)\hat{h}(V)}{\deg(V)} \right| \leqslant c_3.$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$ et fixons $m = [(2c_3+1)\varepsilon_1^{-1}]$. Appliquons la proposition 2.1 avec $\varepsilon = 1$, $X = \phi(V)$ et $Y = \phi(Z)$. Posons $\delta_1(\varepsilon_1, V) := \max\{4d(n-1)\log(m+1)\,;\,\delta_0(1, V)\}$, choisissons ensuite un entier $\delta \geqslant \delta_1(\varepsilon_1, V)$ et supposons $\log\deg(Z) \leqslant \frac{\delta}{4d}$; on a alors :

$$\log\,\deg(\phi(Z)) = (n-1)\log(m+1) + \log\deg(Z) \leqslant \frac{\delta}{2d}.$$

La proposition 2.1 nous assure donc l'existence d'un point $\mathbf{y} \in (\phi(V)\backslash\phi(Z))(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que :

$$h_{L_2}(\mathbf{y}) \leqslant \frac{h(\phi(V))}{\deg(\phi(V))} + 1 \leqslant \frac{(m+1)\hat{h}(V)}{\deg(V)} + c_3 + 1$$

et

$$[\mathbb{Q}(\mathbf{y}) : \mathbb{Q}] \leqslant \deg(\phi(V))\delta^d \leqslant (m+1)^d \deg(V)\delta^d = c_2.\frac{\deg(V)\delta^d}{\varepsilon_1^d}.$$

On a $\mathbf{y} = \phi(\boldsymbol{\alpha})$ pour un certain $\boldsymbol{\alpha} \in V \backslash Z$; rappelons que la hauteur h_{L_2} d'un point projectif $\boldsymbol{x}$ coïncide avec la hauteur projective de la variété $\{\boldsymbol{x}\}$ (*confer* par exemple [6], §. 2.1) ; de même, la hauteur de Weil de $\boldsymbol{x}$ coïncide avec la hauteur normalisée de la variété $\{\boldsymbol{x}\}$ (*loc. cit.*, proposition 2.1, point *vi*) et donc

$$\left| h_{L_2}(\mathbf{y}) - (m+1)h(\boldsymbol{\alpha}) \right| \leqslant c_3.$$

On a donc, en tenant compte de la majoration obtenue pour $h_{L_2}(\mathbf{y})$:

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \frac{2c_3+1}{m+1} \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon_1$$

et

$$[\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\mathbf{y}) : \mathbb{Q}].$$

Le corollaire 2.2 est démontré.

On utilisera aussi le lemme suivant qui se déduit immédiatement du lemme 4.1 de [10].

Lemme 2.3. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ et supposons que ses coordonnées soient de rang multiplicatif $< n$. Il existe alors des entiers rationnels $\nu_1, \ldots, \nu_n$ non tous nuls, tels que $\alpha_1^{\nu_1}, \ldots, \alpha_n^{\nu_n} = 1$ et*

$$\max_k |\nu_k| \leqslant c_4 [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}]^{2n} h(\boldsymbol{\alpha})^{n-1},$$

où $c_4 = c_4(n) > 0$.

Démonstration : on se reporte à la preuve du lemme 4.1 de [10]. Si $n = 1$, alors $\alpha_1^M = 1$ et $[\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] = \phi(M)$: il suffit donc d'utiliser la majoration $M \leqslant 2\phi(M)^2$. Supposons maintenant $n \geqslant 2$; quitte à remplacer n par un entier plus petit, on peut aussi supposer que le rang multiplicatif des coordonnées du point $\boldsymbol{\alpha}$ soit exactement $n-1$. Soit donc

$$\alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n} = 1$$

une relation de dépendance multiplicative avec des entiers $l_1, \ldots, l_n$. Fixons un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$ et soit $c > 1$. Le théorème des formes linéaires de Minkowski nous assure qu'il existe des entiers $\rho_1, \ldots, \rho_n$ non tous nuls et tels que

$$\left| \rho_j - \rho_k \frac{l_j}{l_k} \right| < \frac{1}{c}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq k), \quad \text{et} \quad |\rho_k| \leqslant c^{n-1}.$$

Posons $\zeta = \prod_{j=1}^n \alpha_j^{\rho_j}$. On a donc

$$\zeta^{l_k} = \prod_{j=1}^n \alpha_j^{\rho_j l_k} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_j^{\rho_j l_k - \rho_k l_j},$$

et

$$|l_k|h(\zeta) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq k} |\rho_j l_k - \rho_k l_j| h(\alpha_j).$$

Donc

$$h(\zeta) < c^{-1} n h(\boldsymbol{\alpha}).$$

Si ζ n'est pas une racine de l'unité, une version faible du théorème de Dobrowolski (*confer* [7]) nous donne la minoration : $h(\zeta) \geqslant c_5^{-1} D^{-2}$, où $D = [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}]$ et c_5 est une constante absolue > 1. Donc si on choisit

$$c = c_5 n D^2 (1 + h(\boldsymbol{\alpha})),$$

alors ζ est une racine primitive M-ième de l'unité pour un certain entier M. On a aussi $M \leqslant 2\phi(M)^2 \leqslant 2D^2$, car $\zeta \in \mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha})$. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, posons $\nu_j = M.\rho_j$; on a ' donc :

$$\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_n^{\nu_n} = 1$$

et

$$|\nu_j| \leqslant c^{n-1} M \leqslant c_6 D^{2n} (1 + h(\boldsymbol{\alpha}))^{n-1}$$

Le lemme 2.3 est donc établi.

3. Démonstration du Théorème 1.1

Quitte à remplacer V par la réunion des $\sigma(V)$ ($\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$), on peut supposer que V est définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible. Soit $\varepsilon > 0$ et soit, par l'absurde, Z une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ qui ne contient pas V et qui contient tous les points de V à coordonnées multiplicativement indépendantes et dont la hauteur satisfait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon.$$

Soit δ un entier $\geqslant 1$. On considère l'hypersurface Y_δ de $\mathbb{G}_m^n$ définie par l'équation :

$$\prod \left(x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} - 1\right) = 1,$$

où le produit est fait sur les entiers rationnels $\nu_1, \dots, \nu_n$ non tous nuls, tels que

$$\max_k |\nu_k| \leqslant c_4 \left(c_2 \frac{\deg(V)\delta^d}{\varepsilon^d}\right)^{2n} \left(\frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon\right)^{n-1}.$$

Par hypothèse, V n'est pas contenu dans un sous-groupe algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n$, et donc $V \not\subset Y_\delta$; notons d la dimension de V ; on dispose de l'inégalité

$$\log \deg(Y_\delta \cup Z) \leqslant \frac{\delta}{4d}$$

si $\delta \geqslant \delta_1(\varepsilon, V)$ est assez grand. Le corollaire 2.2 appliqué avec $Y_\delta \cup Z$ nous fournit donc un élément $\boldsymbol{\alpha} \in V \backslash (Y \cup Z)$ tel que

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon \quad \text{et} \quad [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leqslant c_2 \frac{\deg(V)\delta^d}{\varepsilon^d}.$$

Le lemme 2.3 montre alors que les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$ sont multiplicativement indépendantes (sinon $\boldsymbol{\alpha} \in Y$), ce qui contredit la choix de Z. Le Théorème 1.1 est ainsi démontré.

4. Démonstrations des corollaires

Commençons par établir le corollaire 1.2. Soit $\varepsilon > 0$; le théorème 1.1 nous assure que l'ensemble des points $\boldsymbol{\alpha}$ de $V(\bar{\mathbb{Q}})$ dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes et de hauteur au plus $\frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} + \varepsilon$ est Zariski dense dans V. En tenant compte de l'inégalité de gauche des relations (1), on en déduit que l'ensemble des points $\boldsymbol{\alpha}$ de $V(\bar{\mathbb{Q}})$ dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes et de hauteur au plus $(\dim(V) + 1)\mu^{\mathrm{ess}}(V) + \varepsilon$ est aussi Zariski dense dans V, et en particulier non vide. Soit donc $\boldsymbol{\alpha}$ dans ce dernier ensemble.

Rappelons que le théorème 1.5 de [1] assure qu'il existe des nombres réels strictement positifs $c(n)$ et $\kappa(n)$ tels que si $\boldsymbol{\alpha}$ est un point de $\mathbb{G}_m^n$, dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes, et si δ' désigne le degré d'une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$ contenant $\boldsymbol{\alpha}$, alors,

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \frac{c(n)}{\delta'} \log(3\delta')^{-\kappa(n)}.$$

Nous pouvons donc appliquer ce résultat au point $\boldsymbol{\alpha}$ que nous venons d'exhiber, avec $\delta' = \delta$ (puisqu'une hypersurface définie sur $\mathbb{Q}$ contenant V contient $\boldsymbol{\alpha}$). On en tire :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \frac{c(n)}{\delta} \log(3\delta)^{-\kappa(n)}.$$

En particulier, on a donc :

$$(\dim(V) + 1)\mu^{\mathrm{ess}}(V) + \varepsilon \geqslant \frac{c(n)}{\delta} \log(3\delta)^{-\kappa(n)}.$$

En faisant tendre ε vers zéro on obtient le résultat annoncé.

Passons maintenant au corollaire 1.3 et notons G_0 le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V (et s sa dimension). Quitte à faire une projection linéaire sur s facteurs convenablement choisis de $\mathbb{G}_m^n$, on peut supposer pour démontrer ce corollaire que $s = n$

(puisque le minimum essentiel ainsi que le degré décroît par projection linéaire). Il suffit alors d'utiliser le corollaire 1.2 et la majoration :

$$\delta \leqslant n \deg(V)^{1/(n-d)}$$

(*confer* [4], corollaire 2, chapitre 1, page 8 et exemple 1, page 9) pour obtenir la première des deux inégalités annoncées, la deuxième se déduit de la première en tenant compte des relations (1).

Références

1. F. Amoroso et S. David, "Le problème de Lehmer en dimension supérieure," *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998) 1163–1166.
2. F. Amoroso et S. David, "Le problème de Lehmer en dimension supérieure," *J. Reine Angew. Math.* **513** (1999) 145–179.
3. F. Amoroso et S. David, "Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces," *Acta Arithmetica.* **92** (2000) 340–366.
4. M. Chardin, "Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique," *Bulletin de la Société Mathématique de France* **117** (1988) 305–318. *Voir* aussi *Contributions à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, *1990*.
5. S. David et P. Philippon, "Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes," *in Number theory (Tiruchirapalli, 1996)* (V. K. Murty et M. Waldschmidt éditeurs), Contemporary Math. **210** (1998) 333–364.
6. S. David et P. Philippon, "Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores," *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **XXVIII** (1999) 489–543 ; «Errata», *ibidem* **XXIX** (3) (2000) 729–731.
7. E. Dobrowolski, "On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial," *Acta Arith.* **34** (1979) 391–401.
8. W. Lawton, "A generalization of a theorem of Kronecker," *J. Science Faculty of Chiangmai University (Thaïlande)* **4** (1977) 15–23.
9. P. Philippon, "Sur des hauteurs alternatives I, II et III," *Math. Ann.* **289** (1991) 255–283 ; *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44**(4) (1994) 1043–1065, *J. Math. Pures Appl.* **74**(4) (1995) 345–365.
10. M. Waldschmidt, "A lower bound for linear forms in logarithms," *Acta Arith.* **37** (1980) 257–283.
11. S. Zhang, "Positive line bundles on arithmetic surfaces," *Ann. of Math.* **136** (1992) 569–587.
12. S. Zhang, "Positive line bundles on arithmetic varieties," *J. Amer. Math. Soc.* **8**(1) (1995) 187–221.
13. S. Zhang, "Small points and adelic metrics," *J. Algebraic Geom.* **4** (1995) 281–300.