DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 9 - 33, DOI: 10.33683/ddm.23.13.1

OPEN ACCESS

RIFLESSIONE E RICERCA

Dinamicità del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione

Backward reasoning dynamism in explanation processes

Marta Barbero
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera

✉ marta.barbero@supsi.ch

Sunto / Il contributo presenta i risultati relativi a uno studio di caso in cui tre studenti universitari del Master in Informatica interagiscono nella risoluzione di un problema. Attraverso lenti interpretative epistemiche e linguistiche (le dimensioni del ragionamento a ritroso e la prospettiva della Commognition), si mette in luce il ruolo del ragionamento a ritroso e le sue relazioni con quello in avanti nei processi di spiegazione condotti da una studentessa che si interfaccia con le difficoltà dei suoi compagni.

Parole chiave: ragionamento a ritroso; risoluzione di problemi; dimensioni cognitive; processi di spiegazione; Commognition.

Abstract / The paper presents the results of a case study in which three undergraduate students from the Master's programme in Computer Science interact in solving a problem. The role of backward reasoning and its relations to forward reasoning, in the explanation processes carried out by a student who interfaces with the difficulties of her peers, are highlighted through epistemic and linguistic interpretative lenses (the backward reasoning dimensions and the perspective of Commognition).

Keywords: backward reasoning; problem solving; cognitive dimensions; explanation processes; Commognition.

1 Introduzione

In matematica, il solo ragionamento in avanti (*forward reasoning*), ovvero quel tipo di ragionamento che parte dalle premesse per arrivare alle conclusioni, non è esaustivo per assolvere al compito di risolvere i problemi. Il modo naturale per affrontare un problema, infatti, richiede diversi tipi di ragionamento come quello deduttivo, quello induttivo, quello abduttivo, quello a ritroso ecc. (per approfondire i diversi tipi di ragionamento si vedano, ad esempio, Hintikka, 1999; Lakatos, 1976; Peirce, 1932), che corrispondono a diversi modi di ragionare e pensare da un punto di vista cognitivo (Holyoak & Morrison, 2015). L'intreccio tra i tipi di ragionamento viene evidenziato fin dall'antichità dai grandi matematici come Pappus, Descartes, Leibniz ecc. nelle loro dissertazioni su *analisi* e *sintesi*,[1] i due processi cardine nella risoluzione di problemi. Guardando al metodo dell'*analisi*, si possono infatti identificare diverse tipologie di passi logici: oltre a quelli in avanti, che permettono di individuare una conseguenza di "ciò che si cerca" (la fine del problema), sono inclusi nel processo tutti quei passi logici che permettono di avanzare nella risoluzione del problema in direzioni diverse, ad esempio, quelli all'indietro, verso l'ipotesi del problema (Beaney, 2018; Peckhaus, 2002).
Una delle modalità di pensiero coinvolta nel metodo dell'*analisi* è proprio il ragionamento a ritroso, conosciuto in letteratura con diverse denominazioni, quali ad esempio *backward reasoning*, ragionamento regressivo, analisi regressiva, soluzione a ritroso ecc. Esso viene utilizzato nelle fasi di scoperta del problem solving e ha un'importanza fondamentale anche nei metodi di programmazione (Hintikka & Remes, 1974; Mäenpää, 1998). Da un lato, lo studio del ragionamento a ritroso ha un grande potenziale nel campo dell'educazione matematica: lavorare su questo tipo di ragionamento può infatti aiutare gli studenti nello sviluppo dell'argomentazione matematica, dei processi di scoperta e dei processi di dimostrazione (Tall, 2002). Dall'altro lato, numerosi autori (Barbero, 2015; Byers, 2007; Corbalán, 1994; Hintikka & Remes, 1974) riscontrano nei diversi livelli scolastici difficoltà nell'utilizzo e nella comprensione del ragionamento a ritroso come procedura generale, sottolineando per esempio che è più difficile lavorare all'indietro che in avanti.
Si evidenza quindi la necessità di approfondire l'articolazione tra gli aspetti epistemologici e cognitivi del ragionamento a ritroso nella risoluzione di problemi per poter efficacemente integrare lo studio e l'applicazione di questo tipo di ragionamento nell'apprendimento della matematica. Questo è stato l'obiettivo di un lavoro di tesi di dottorato (Barbero, 2020) che si è innestato all'interno di un progetto di ricerca più ampio relativo all'innovazione della didattica della matematica a livello universitario sviluppato presso la Universidad Complutense de Madrid (Spagna) a partire dal 2013.
L'obiettivo del presente contributo, tratto dal lavoro di tesi, è di mettere in luce il ruolo del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione relativi alla risoluzione di un problema. A questo scopo viene presentato un episodio in cui tre studenti universitari del Master in Informatica interagiscono durante una lezione dedicata alla programmazione. L'episodio coinvolge una studentessa, Elodie,[2] con un background più avanzato rispetto ai compagni di corso e che ha già risolto in precedenza il problema proposto, e due suoi compagni che le chiedono aiuto nella risoluzione. L'analisi fine della trascrizione dell'episodio (disponibile nell'Allegato 1), che avviene attraverso due lenti interpretative (le dimensioni epistemiche del ragionamento a ritroso e la prospettiva della Commognition, che verranno approfondite nei par. 2 e 3), permette di identificare i momenti in cui si sviluppa il ragionamento a ritroso e i dispositivi discorsivi che

1. Per quanto riguarda la caratterizzazione di *analisi* e *sintesi* si riportano le parole di Pappus nella traduzione di Hintikka e Remes (1974): «Nell'analisi, partiamo da ciò che è richiesto, come se fosse ammesso; e ne traiamo corrispondenze logiche fino ad arrivare a qualcosa che possiamo usare come punto di partenza nella sintesi. […] Nella sintesi, invece, supponiamo che ciò che è stato raggiunto per ultimo nell'analisi sia già stato ottenuto, e disponendo nel loro ordine naturale, come conseguenze logiche, le corrispondenze ottenute in precedenza e collegandole le une con le altre, arriviamo alla fine alla costruzione della cosa cercata» (pp. 8-9, traduzione dell'autrice).
2. Per la tutela della privacy degli studenti coinvolti, i loro nomi sono stati cambiati.

vengono attivati. Grazie all'analisi, le relazioni tra ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti vengono messe in luce per identificare la struttura della spiegazione di Elodie e il suo legame con le difficoltà che vengono esplicitate dai suoi compagni.

2 Il ragionamento a ritroso

Il ragionamento a ritroso consiste nello sviluppare una serie di passi logici a partire dalla fine del problema (ovvero ciò che viene richiesto o si congettura di trovare, dimostrare, costruire) procedendo per corrispondenze logiche verso le sue premesse, fino ad ottenere qualcosa di noto, determinando quindi le condizioni per la sua soluzione (Hintikka & Remes, 1974). Utilizzato da solo non è sufficiente per risolvere un problema o per realizzare una dimostrazione, ma è la base fondamentale per sviluppare altri tipi di ragionamento, necessari per giungere alla soluzione, che vengono coinvolti nel processo di *sintesi*. Il ragionamento a ritroso ha una forte componente di creatività e scoperta caratterizzata dall'inserimento di nuovi elementi nella risoluzione; inoltre, diverse strategie e modi di procedere nella risoluzione dei problemi si sviluppano incardinandosi in esso (come la strategia del lavorare a ritroso, la strategia dell'assunzione del problema risolto, la Reductio ad Absurdum, la strategia del partire dalla fine del problema ecc.), presentandosi singolarmente o in combinazione tra loro a seconda del tipo di problema e del percorso di risoluzione o di costruzione scelto dal risolutore (Barbero & Gómez-Chacón, 2018).
Il ragionamento a ritroso quindi, come la sua controparte in avanti, è coinvolto negli aspetti pragmatici della risoluzione dei problemi, ma diversamente da quello in avanti necessita di un alto livello di astrazione per essere utilizzato; si basa infatti sul guardare le cose in modo nuovo e non routinario e ha un ruolo centrale nello sviluppo del pensiero matematico avanzato, dove i processi astratti sono predominanti. Infatti, mentre l'insegnamento del ragionamento in avanti e dei processi deduttivi è tipico del pensiero matematico in cui è necessario seguire le routine riproduttive, il ragionamento a ritroso diventa fondamentale quando sono coinvolti processi di dimostrazione più creativi (Tall, 2002).

2.1 Dimensioni epistemiche del ragionamento a ritroso

Per definire formalmente il concetto di ragionamento a ritroso, è stata condotta una ricerca storico-filosofica, studiando i lavori di matematici e filosofi, dall'Antica Grecia fino ai giorni nostri, relativi al tema dell'*analisi* (Beaney, 2018).[3] Questa revisione della letteratura ha permesso di osservare l'evoluzione del tema nel corso della storia e di individuare i tratti comuni che caratterizzano la sua componente di ragionamento a ritroso, identificando quattro dimensioni epistemiche: *ricerca di relazioni di causa-effetto, breakdown, trasformazione, introduzione di nuovi elementi*. Le quattro dimensioni epistemiche individuate permettono di definire il concetto di ragionamento a ritroso e risultano fondamentali per la sua identificazione, lettura e interpretazione nei processi di risoluzione.

Ricerca di relazioni di causa-effetto. Gli autori dell'Età antica (Aristotele, Platone, Pappus, Proclo ecc.) sottolineano soprattutto il carattere regressivo dell'*analisi*, identificandolo come un processo "in direzione contraria" che ha lo scopo di trovare i principi del problema. Nel corso del XVII e XVIII secolo, autori come Arnauld e Nicole propongono una interpretazione diversa di questa dimensione,

3. La sezione "Definitions and Descriptions of Analysis" della Stanford Encyclopedia of Philosophy (nella sua versione online) raccoglie frammenti di testi di 56 autori diversi per un totale di oltre 160 citazioni. Si tratta di una sezione supplementare alla voce "Analysis" (Beaney, 2018). Per ogni autore, vengono mostrati e ordinati in un elenco numerato diversi estratti delle loro opere, incentrati sul tema dell'*analisi* e della *sintesi*. La sezione è disponibile a questo link: https://plato.stanford.edu/entries/analysis/s1.html

connotandola come la ricerca di relazioni di causa-effetto tra le idee, che permettono di identificare connessioni tra le nozioni di base e il problema in oggetto; questa concezione verrà ripresa nell'Età contemporanea da autori come Husserl e Frege (Beaney, 2018; Peckhaus, 2002).

Breakdown.[4] Il termine *breakdown* è inteso come scomposizione di qualcosa in parti, in modo da poterlo analizzare dettagliatamente;[5] questa caratterizzazione è al centro delle ricerche condotte nell'Età moderna (da autori come Descartes, Hegel, Leibniz ecc.), dove viene messo in luce il processo in cui un concetto viene scomposto nei suoi elementi primari, rendendo evidente la sua struttura logica. Il ragionamento a ritroso, infatti, comporta azioni che permettono di ridurre il problema alle sue componenti di base, identificando le proprietà coinvolte e mostrando le relazioni tra gli oggetti più complessi e quelli più semplici; già Aristotele, ad esempio, sottolineava il fatto che «a volte, per risolvere un problema geometrico si può solo analizzare una figura», ovvero scomporla nei suoi elementi di base e capire le parti da cui è formata (Beaney, 2018).

Trasformazione. Gli autori dell'Età contemporanea (Frege, Russell, Moore, Wittgenstein ecc.) focalizzano la loro attenzione su quella che Beaney (2018) chiama «dimensione trasformativa e interpretativa dell'analisi», ovvero sugli enunciati e sulla loro traduzione in forma logica. Già nel Medioevo, infatti, con la nascita della geometria analitica, e successivamente con la filosofia analitica, viene studiato il ruolo di questo tipo di ragionamento nell'interpretazione dei concetti e nelle conversioni tra registri semiotici, come ad esempio nelle trasformazioni in linguaggio algebrico di entità geometriche (Beaney, 2018).

Introduzione di nuovi elementi. Dallo studio degli autori, si delinea chiaramente che l'introduzione di nuovi elementi all'interno della risoluzione di un problema è parte fondamentale del ragionamento a ritroso. Infatti, a differenza dei processi deduttivi e, in generale del ragionamento in avanti, dove si inizia con tutte le premesse e da queste vengono elaborate le conseguenze, nel ragionamento a ritroso le nozioni ausiliarie necessarie alla risoluzione vengono inserite e si sviluppano in base alle esigenze del risolutore (Beaney, 2018; Hintikka & Remes, 1974; Polya, 1945).

Le quattro dimensioni risultano essere facce diverse dello stesso costrutto; ragionare a ritroso nella risoluzione di un problema consiste, infatti, nell'interpretare un'entità, tradurla in linguaggio matematico, identificarne gli elementi rilevanti e trovarne i principi, inserendo dove necessario degli elementi ausiliari all'interno del processo. Questi processi portano a qualcosa di noto da cui successivamente si può procedere progressivamente. Consideriamo ad esempio la risoluzione di un problema in cui è presente una costruzione geometrica: la dimensione di *breakdown* si manifesta quando il risolutore analizza la costruzione geometrica e la scompone in elementi più semplici; quando egli, invece, cerca le premesse per la costruzione considerata concepiamo il ragionamento a ritroso come *ricerca di relazioni di causa-effetto*; mentre la dimensione di *trasformazione* emerge quando il risolutore trasforma il linguaggio geometrico in linguaggio algebrico. L'*introduzione di nuovi elementi* si può riscontrare quando vengono inseriti elementi ausiliari nel processo di risoluzione che possono essere delle costruzioni geometriche più complesse, ma anche teoremi ausiliari, possibili relazioni tra elementi ecc. Sono questi elementi aggiuntivi che, entrando in gioco durante il processo, permettono di arrivare ad un qualcosa di noto da cui poter partire con i processi di *sintesi*. La possibilità di risolvere il problema, però, è concessa solo se i passi all'indietro possono essere invertiti in qualche modo, ovvero solo quando le premesse possono essere collegate all'obiettivo con una serie di passaggi logici, cosa che si verifica solo se gli elementi ausiliari ipotizzati sono reversibili (Hintikka & Remes, 1974).

4. Nel contributo si è scelto di non tradurre il termine "breakdown" poiché si ritiene che racchiuda maggiore significato del semplice termine "scomposizione" con il quale viene tradotto in italiano.
5. Definizione di "breakdown" tratta dal Cambridge English Dictionary © Cambridge University Press.

2.2 Ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti

Come accennato in precedenza, il ragionamento a ritroso non esiste senza la sua controparte in avanti. I due ragionamenti coesistono e si intrecciano nelle fasi di scoperta della risoluzione contribuendo entrambi alla creazione dell'oggetto soluzione. La combinazione dei due ragionamenti è ben espressa nelle parole di Arnauld e Nicole (1662/1964):

> «Questo è il modo di capire la natura dell'analisi come usata dai geometri. Ecco in cosa consiste. Supponiamo che venga presentata loro una domanda, come ad esempio se è vero o falso che qualcosa è un teorema, o se un problema è possibile o impossibile; essi assumono ciò che è in questione ed esaminano ciò che segue da questa assunzione. Se in questo esame arrivano a una verità chiara da cui l'ipotesi segue necessariamente, concludono che l'ipotesi è vera. Poi, ripartendo dal punto di arrivo, lo dimostrano con l'altro metodo che si chiama composizione. Ma se cadono in qualche assurdità o impossibilità come conseguenza necessaria della loro ipotesi, ne concludono che l'ipotesi è falsa e impossibile».
>
> (Arnauld & Nicole,1662/1964, p. 238, traduzione dell'autrice)

Questi ragionamenti sono legati a due tipi di interrogativi che emergono durante la risoluzione di un problema (Ruesga Ramos et al., 2004): utilizzando il ragionamento in avanti la domanda che ci si pone è «Cosa posso ottenere quando ho ...?», mentre utilizzando il ragionamento a ritroso «Cosa devo considerare per ottenere ...?».
Ipotizziamo che si conosca A e si voglia dimostrare, o costruire, o ottenere, B. Si potrebbe procedere da A, qualcosa di noto, e realizzare una serie di passi logici deduttivi A_1, A_2, …, A_n, utilizzando quindi il ragionamento in avanti. Effettuando questo processo, ci si pone il primo tipo di domanda: «Cosa posso ottenere quando ho A?». Ottenendo A_1 come risposta si può quindi continuare con «Cosa posso ottenere quando ho A_1?», e così via.
Si utilizza un ragionamento a ritroso, invece, quando si parte da B e retrocedendo in una serie di passi logici si arriva a B_m, chiedendosi in questo caso «Cosa devo considerare per ottenere B?». Se le due affermazioni che si ottengono (A_n e B_m) sono in corrispondenza logica, in particolare B_m è conseguenza di A_n, ed è possibile invertire il processo della sequenza logica da B a B_m con una serie di ragionamenti in avanti, il problema «Conoscendo A, dimostra (o costruisci, o ottieni) B» è risolto.
Per comprendere meglio le sequenze logiche che mettono in relazione A e B, si considera il seguente problema discusso in Arzarello (2014), mostrandone un esempio di risoluzione.

> Sia $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
> Dimostrare che esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$.

Dato il problema, è possibile identificare l'anello iniziale (A) e l'anello finale (B) della catena di ragionamenti:

– A: $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
– B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$.

Considerando B, per esempio, possono emergere alcune domande: «Come si fa a dimostrare che esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$?»; oppure «Quali caratteristiche devo considerare per concludere che il punto c esiste?».
Considerando A, invece, si pongono altri tipi di domande: «Quali conseguenze posso trarre dal fatto che la funzione è continua?»; oppure «Cosa significa che la funzione tende a infinito?».
Un modo per risolvere questo problema è metterlo in relazione con il Teorema dei Valori Intermedi (TVI). Un ragionamento a ritroso può consistere nel partire dall'affermazione «esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$», e ragionare nel seguente modo: «esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$

tale che $f(c) = 0$», conclusione del teorema TVI. A questo punto si potrebbero considerare le ipotesi del problema e dedurre delle affermazioni per poter applicare il teorema TVI. Si può quindi risolvere il problema seguendo i seguenti ragionamenti:

- B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$;
- B_1: Esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
- B_2: B_1 è la conclusione del caso particolare del Teorema dei Valore Intermedi che afferma quanto segue: se f: $[x',x'']\rightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua con $f(x') < 0 < f(x'')$, allora esiste un valore c in $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
- A: $\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x) = +\infty$;
- A_1: Per ogni intero positivo M, esiste un valore N tale che per tutti gli $x > N$, $f(x) > M$;
- A_2: Esiste x'' tale che $f(x'') > M > 0$;
- A: $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x) = -\infty$;
- A_3: Per ogni intero negativo H, esiste un valore Q tale che per tutti gli $x < Q$, $f(x) < H$;
- A_4: Esiste x' tale che $f(x') < H < 0$;
- A_5: Considerando A_2 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
- A: f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- A_6: Se f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua allora f: $[x',x'']\rightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- A_7: Considerando A_5 e A_6 è possibile applicare il caso particolare del Teorema dei Valori Intermedi.

A questo punto B_2 è conseguenza di A_7. Poiché i passi B – B_1 – B_2 possono essere invertiti, allora il problema è risolto. Osservando questo piccolo esempio, si può notare che il ragionamento a ritroso non ha senso senza la sua controparte in avanti.
È possibile rappresentare il flusso di ragionamenti attraverso quella che Polya (1968) definisce la *rappresentazione geometrica* della soluzione, una raffigurazione schematica in cui in alto vengono rappresentate le premesse/ipotesi del problema, in basso la sua soluzione, e tutto lo spazio tra le premesse e la soluzione è riempito dalla catena, più o meno lineare, del ragionamento. Considerando questo tipo di rappresentazione e rappresentando con delle frecce il movimento tra i passi del ragionamento (verdi per quelli in avanti e rosse per quelli a ritroso), si può rappresentare l'albero della risoluzione del problema (**Figura 1**).

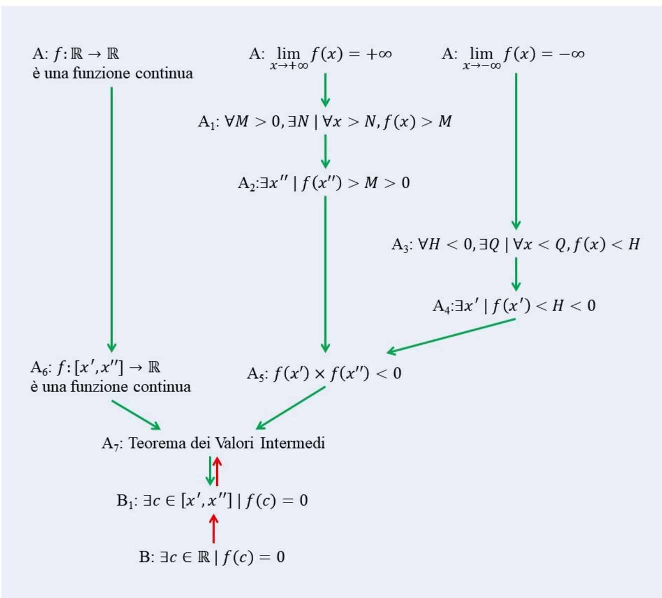


Figura 1. Rappresentazione geometrica della soluzione del problema.

Non ci si può aspettare, però, che un risolutore non esperto, che vede per la prima volta un problema di questo tipo, riesca a risolverlo in modo così lineare. Per esempio, ripercorrendo il protocollo di uno studente (analizzato in Arzarello, 2014) che riportiamo di seguito, si nota una maggiore alternanza di passi in avanti e passi a ritroso e un continuo ritornare su affermazioni già esplicitate in precedenza (indicate con A'_i o B'_j):

- B: Esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$;
- B_1: Sembra che sia possibile utilizzare il Teorema dei Valori Intermedi;
- A_1: La tesi del Teorema dei Valori Intermedi è che esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$;
- B_2: È necessario trovare $[x', x'']$;
- A: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- A_2: Per ogni intero positivo M, esiste un valore x_M tale che per tutti gli $x > x_M$, $f(x) > M$;
- B_3: Esiste M;
- A'_2: Per ogni intero positivo M, esiste un valore x_M tale che per tutti gli $x > x_M$, $f(x) > M$;
- B_4: $M > 0$;
- A_3: Esiste $x' > x_M$ tale che $f(x') > M > 0$;
- A: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
- A_4: Esiste $x'' < x_N$ in modo che $f(x'') < N < 0$;
- A_5: Considerando A_3 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
- B'_2: L'intervallo $[a, b]$ del Teorema dei Valori Intermedi è $[x', x'']$;
- A'_3: Esiste $x' > x_M$ tale che $f(x') > M > 0$;
- A'_5: Considerando A_3 e A_4: $f(x') \times f(x'') < 0$;
- A: $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- A_6: Se $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua allora $f: [x',x'']\to\mathbb{R}$ è una funzione continua;
- B'_1: Ora è possibile utilizzare il Teorema dei Valori Intermedi;
- A'_1: Esiste almeno un punto c in un intervallo $[x', x'']$ tale che $f(c) = 0$.

Visualizzando la risoluzione graficamente, l'albero (**Figura 2**) risulta essere più intricato di quello visto in precedenza (**Figura 1**) per la presenza di un maggior numero di passi in avanti e a ritroso.

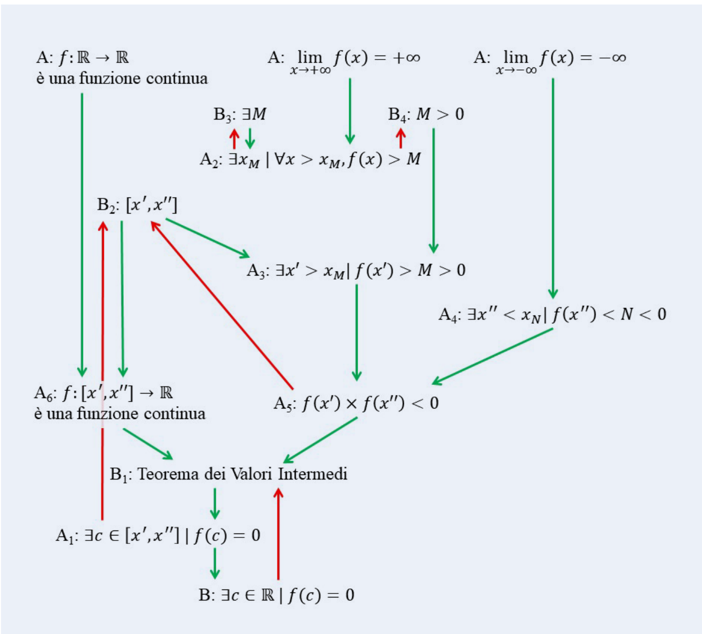


Figura 2. Rappresentazione geometrica della soluzione del problema da parte di un risolutore meno esperto.

Emerge dal confronto tra i due alberi di risoluzione che il processo di scoperta non è lineare, ma procede attraverso diverse ramificazioni. Nei risolutori meno esperti, inoltre, queste ramificazioni sono più complicate rispetto ai risolutori esperti: il ragionamento a ritroso e quello in avanti sono profondamente intrecciati.

3 La prospettiva della Commognition

Partendo dall'assunto che il pensiero umano è una forma di comunicazione, e riprendendo da Vygotskij l'idea dell'apprendimento come frutto delle interazioni sociali, è stata elaborata la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008) secondo la quale anche il pensiero si sviluppa attraverso interazioni sociali e in particolare attraverso la comunicazione interpersonale e intrapersonale. Quest'ultima è la forma di comunicazione che permette di definire il pensiero, non è necessario che sia visibile, ovvero che sia espressa a parole: si sviluppa con sé stessi. Il pensiero e la comunicazione, quindi, sono intese come due facce della stessa medaglia e la Commognition come «la nozione centrale dell'approccio all'apprendimento fondato sull'assunto che il pensiero può essere utilmente concettualizzato come comunicazione con sé stessi» (Sfard, 2018, p. 13).
Non tutti i tipi di comunicazione sono uguali: le varie tipologie si differenziano sia per le regole sia per gli oggetti a cui si riferiscono e, a seconda delle proprie conoscenze, sono accessibili a determinate persone e non ad altre. Il linguaggio nella comunicazione della conoscenza, infatti, comprende un insieme finito di simboli arbitrari la cui manipolazione è disciplinata da un insieme di regole; se questi simboli o regole non sono noti, è impossibile partecipare al discorso. Secondo Sfard (2009) ogni discorso, infatti, è caratterizzato da: parole chiave specifiche, utilizzate con determinate regole; mediatori visivi, che permettono di identificare gli oggetti della discussione e di coordinare la comunicazione; routine, schemi ripetitivi sviluppati da chi comunica; narrazioni, approvate e confermate come verità dalla comunità che partecipa al discorso. Pensare significa quindi partecipare allo sviluppo di un certo tipo di discorso che avviene durante un'interazione interpersonale o intrapersonale (per esempio, pensare in modo matematico equivale a partecipare allo sviluppo di un discorso storico-matematico). Il discorso matematico, come ogni altro, si basa su: parole chiave relative agli oggetti della matematica, come linea, punto, insieme, funzione ecc.; mediatori visivi, come rappresentazioni numeriche, grafici, simboli algebrici; routine caratteristiche del tema, come l'azione del definire, del dimostrare, o del dedurre; narrazioni, approvate dalla comunità dei matematici nel corso degli anni, come teoremi, definizioni, regole di calcolo (Sfard, 2018, p. 2). Il discorso matematico si discosta dagli altri tipi di discorso in quanto è un sistema autopoietico, ovvero è generato dai partecipanti al discorso, dai matematici, che sviluppano gli oggetti del discorso attraverso il discorso stesso; in questo senso, è diverso da qualsiasi altro discorso scientifico: per esempio, nell'ambito della fisica il discorso si sviluppa su oggetti esistenti e i loro nomi (come massa, forza ecc.) riguardano essi e le relazioni tra di essi.
L'introduzione di entità matematiche nel discorso è ciò che Sfard chiama *oggettivazione*. Il processo di oggettivazione può essere riconosciuto all'interno del discorso matematico perché corrisponde alla comparsa di almeno uno dei seguenti dispositivi discorsivi (Sfard, 2018):

- *Saming*: introduzione di un nome comune a oggetti che all'inizio non erano in relazione, ma che possono essere equivalenti in certi contesti (per esempio: funzione quadratica, x^2, e parabola).
- *Encapsulating*: sostituzione di un discorso su oggetti separati con uno relativo a un'unica entità (per esempio: funzione, insieme).
- *Reifying*: sostituzione di un discorso relativo a un processo con un discorso relativo a un oggetto (per esempio: da «quando addiziono 5 e 7, ottengo 12» a «la somma di 5 e 7 è 12»).

Una volta che l'oggetto è stato introdotto con uno o più dispositivi, inizia il processo di *alienazione*,

che porta all'uso dell'oggetto in modo impersonale garantendo la sua esistenza indipendentemente dal discorso stesso.
Dal punto di vista della Commognition (Sfard, 2008, 2009, 2018) è fondamentale considerare ciò che accade durante il processo di acquisizione della conoscenza. L'apprendimento, interpretato come un fenomeno collettivo, si sviluppa attraverso uno specifico tipo di comunicazione: un determinato discorso sviluppato con un determinato linguaggio. Una nozione è appresa quando il discente è in grado di produrre discussioni articolate utilizzando i nuovi costrutti in modo corretto e con il significato appropriato. Il passo cruciale del processo di apprendimento è il passaggio dalla comunicazione interpersonale a quella intrapersonale. Il soggetto elabora le discussioni sviluppate con gli altri e le trasforma in comunicazione intrapersonale: solo a questo punto può utilizzarle per interagire con il mondo esterno in modo attivo per soddisfare i propri bisogni. Pertanto, comprendere la matematica significa padroneggiare una nozione matematica, una parola chiave, una routine o una narrazione, in modo da poter gestire un discorso complesso con la comunità dei matematici. Una volta acquisita una nozione, il discorso cambia e ciò corrisponde all'apprendimento di quella nozione (Sfard, 2009); da ciò segue che, per valutare i risultati dell'apprendimento, è necessario esaminare questi cambiamenti.
Sfard (2008) distingue due livelli di apprendimento: il livello-oggetto e il livello-meta. L'apprendimento a livello-oggetto si verifica durante le attività in cui non interviene nessun esperto del discorso matematico. In questo tipo di apprendimento si costruiscono nuove narrazioni deducendole da quelle già approvate. L'apprendimento a livello-meta, invece, si sviluppa quando il discente interagisce con gli esperti e avviene quando chi apprende incontra un discorso incommensurabile con il suo. Questo provoca un conflitto commognitivo, una situazione in cui «la comunicazione avviene attraverso discorsi incommensurabili» (Sfard, 2008, p. 296, traduzione dell'autrice). Per superare questo conflitto, l'allievo inizia a imitare le prestazioni dell'esperto e, così facendo, sviluppa una certa routine. In questa fase, lo studente utilizza l'oggetto matematico e sviluppa un discorso, ma non può giudicare se la narrazione matematica prodotta sia approvata o meno. In seguito, il processo di apprendimento procede attraverso una de-ritualizzazione, in cui gradualmente l'allievo inizia a partecipare al discorso matematico in modo più consapevole, e trasforma le routine in esplorazioni. Esempi tipici di questa transizione si verificano quando gli studenti passano dall'aritmetica all'algebra; dai naturali agli interi, poi ai razionali e infine ai reali; dagli insiemi finiti a quelli infiniti ecc. Questa transizione avviene non solo su scala ontogenetica (per uno studente nella sua carriera scolastica), ma anche a livello filogenetico: tutte queste transizioni corrispondono a progressi rilevanti nella storia del pensiero matematico (Sfard, 2008).

3.1 Il conflitto commognitivo dei ragionamenti in avanti e a ritroso

Come osservato in Barbero (2020), le due forme di ragionamento (a ritroso e in avanti) costituiscono due forme discorsive contrastanti che esplicitano un conflitto commognitivo tra l'approccio in avanti e quello a ritroso: vengono utilizzate le stesse parole, ma all'interno di due strutture discorsive diverse, che dipendono dalle due modalità (*forward* o *backward*).
I ragionamenti in avanti e a ritroso, quando si presentano insieme, sono il segno di un conflitto commognitivo (generalmente intrapersonale) che è in via di soluzione. Come si è visto in precedenza, il ragionamento in avanti non è un'euristica sufficiente per produrre un risultato efficace, sia esso una nuova conoscenza (ad esempio, l'enunciato di un teorema) o una dimostrazione. È il processo di inversione possibile grazie al ragionamento a ritroso che permette di trovare la prova di un'affermazione, o addirittura un nuovo risultato: è una modalità che cambia le relazioni tra le componenti del discorso e rende accessibile una soluzione che a prima vista era inaccessibile. Il ragionamento a ritroso rende commensurabile la modalità del discorso in avanti, che altrimenti rimarrebbe solo a una forma ritualizzata di dimostrazione, producendo una transizione verso una modalità esplorativa (Sfard, 2008).
Anche la storia del ragionamento a ritroso mostra il lungo cammino necessario prima che i due

discorsi incommensurabili possano essere “addomesticati”: si pensi a Descartes, che riuscì a oggettivare i discorsi sintetici e analitici nel linguaggio dell’algebra (Beaney, 2018), o ai risultati di Hintikka, che riuscì a oggettivarli a livello logico mostrando la “dualità” della logica dell’indagine con la logica deduttiva standard (Hintikka, 1999); questi esempi illustrano i grandi sforzi storicamente necessari per arrivare a questo accordo di oggettivazione. A livello filogenetico, questa complessità è illustrata dall’enorme quantità di ricerche sulle difficoltà incontrate dagli studenti nell’affrontare la varietà di discorsi matematici incommensurabili che incontrano a scuola, in particolare quando imparano l’algebra o le dimostrazioni (Cai, 2017; van Lambalgen & Stenning, 2008). Naturalmente, questa transizione richiede generalmente il contributo di un esperto, che affianchi gli studenti in questo delicato compito (Sfard, 2008).

Rispetto a questo tema, va fatta un’ulteriore osservazione: è proprio la produzione di ragionamenti a ritroso che può aiutare a facilitare il superamento dell’incommensurabilità tra le fasi esplorative e le forme di ragionamento deduttivo, colmando il divario tra le due modalità. Secondo la prospettiva della Commognition, infatti, il passaggio tra due discorsi incommensurabili è segnato da un processo di oggettivazione che avviene attraverso i dispositivi discorsivi citati nel par. 3 (*saming*, *encapsulating*, *reifying*). Attraverso la loro identificazione, si riesce a dare una descrizione precisa di una struttura più fine del ragionamento a ritroso, che evolve nel tempo all’interno dei diversi contesti (Barbero, 2020).

4 Interrogativi e metodologia della ricerca

4.1 Domanda di ricerca

Per approfondire la comprensione del ruolo del ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione relativi alla risoluzione di problemi si è scelto di osservare l’interazione di un gruppo di pari (studenti universitari) in cui un partecipante del gruppo, più avanti negli studi accademici, funge da esperto. Si formula a questo proposito la seguente domanda di ricerca: *come si relaziona l’attivazione del ragionamento a ritroso nel processo di spiegazione portato avanti dallo studente esperto con le difficoltà messe in luce dai compagni?*

4.2 I giochi di strategia come contesto per esplorare il ruolo del ragionamento a ritroso

I contesti di gioco facilitano il superamento dell’incommensurabilità dei due discorsi, quello della logica esplorativa e quello della logica deduttiva, infatti, nei processi di risoluzione dei giochi la modalità esplorativa che è supportata dal ragionamento a ritroso è prodotta dal contesto stesso. Tra le diverse tipologie di giochi, quelli di strategia sono i più interessanti per quanto riguarda il tema del ragionamento a ritroso; in questo tipo di attività le scelte strategiche dei giocatori sono innescate da tipiche domande spesso implicite come «Cosa posso fare in questa situazione? Cosa è meglio fare?», per rispondere alle quali i risolutori riflettono sia sulle mosse già fatte sia su quelle possibili, attivando, in modo naturale, modi di pensare a ritroso (Barbero, 2015; Gómez-Chacón & Barbero, 2020).

Per approfondire il tema del ragionamento a ritroso si è quindi deciso di far riferimento a recenti ricerche relative all’uso dei giochi nella didattica della matematica (Barbero, 2015; Soldano & Arzarello, 2016) che sottolineano come i giochi di strategia siano un importante strumento metodologico per l’insegnamento della risoluzione di problemi: possono infatti essere utilizzati per facilitare l’apprendimento di diversi suoi aspetti come i processi, le fasi, le strategie ecc. (Gómez-Chacón, 1992; Koichu, 2010). La relazione tra giochi di strategia e problem solving è radicata nel fatto che le loro fasi di risoluzione sono strutturalmente simili (Gómez-Chacón, 1992) e che per risolverli è necessario seguire analoghi processi euristici e di ragionamento; ovvero anche affrontando i giochi di strategia si sollecitano i processi tipici del pensiero matematico. Alcune ricerche (Barbero, 2015; Soldano & Arzarello,

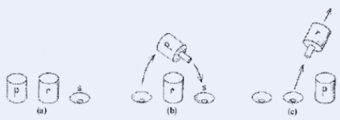
2016) hanno anche dimostrato come i processi coinvolti nelle situazioni di gioco matematico influenzino e guidino fortemente gli studenti durante le fasi di scoperta e giustificazione della risoluzione, stimolandoli positivamente.

4.3 Gruppo di studio e presentazione dell'attività

I dati riportati in questo contributo sono stati raccolti durante una sperimentazione che ha coinvolto i 23 studenti universitari, di età compresa tra i 22 e i 23 anni, del corso "Auditory and Quality Assurance" che rappresenta una parte dell'offerta formativa del Master in Informatica della Universidad Complutense de Madrid, a cui si può accedere possedendo una Laurea in Informatica. Le prestazioni degli studenti risultavano omogenee eccetto che per una studentessa, Elodie, che grazie a studi precedenti (doppia Laurea in Matematica e Informatica) aveva conseguito una formazione informatica approfondita, e durante le lezioni dedicate alla programmazione agiva con un ruolo di esperto. Alcune lezioni del corso, con obbligo di frequenza, consistono nell'implementazione di attività di programmazione di complessità crescente utilizzando il software Maude (Clavel et al., 2007). La proposta della terza lezione dedicata alla programmazione è consistita nell'implementazione del Triangular Peg Solitaire (Figura 3, Allegato 2) dove agli studenti era richiesto di attivare conoscenze euristiche, matematiche e computazionali. Durante queste lezioni di 2 ore, gli studenti sono generalmente liberi di scegliere se lavorare in coppia o individualmente. Si è scelto di non variare questa routine; dell'intero gruppo di 23 studenti 6 hanno scelto di lavorare in coppia.

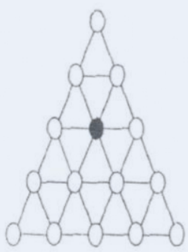
Triangular Peg Solitaire

Il Triangular Peg Solitaire è un solitario che può essere giocato su tavoli da gioco di diverse dimensioni. All'inizio del gioco tutte le posizioni tranne una contengono delle pedine, l'obiettivo è rimanere esattamente con una pedina sul tavolo da gioco. È concesso muovere una pedina facendola "saltare" oltre quella accanto purché dopo questa pedina sia disponibile una posizione vuota; la pedina che viene saltata viene "mangiata" ed eliminata dal tavolo da gioco, analogamente a cosa succede nel gioco della Dama.



(Berlekamp, Conway & Guy, 1982, p. 804)

Lavoreremo con un tavolo da gioco triangolare, come mostrato nella figura seguente.



Esercizio 1 Definire un tipo di dati in linguaggio Maude per rappresentare un Triangular Peg Solitaire. Siamo particolarmente interessati a supportare tavoli da gioco di diverse dimensioni.
Esercizio 2 Implementare il movimento delle pedine (i salti) utilizzando le regole di riscrittura.
Esercizio 3 Definire un tavolo da gioco iniziale e utilizzare il comando **search** per trovare: (a) una soluzione qualsiasi; (b) una soluzione "perfetta". Una soluzione perfetta consiste in un tavolo da gioco con una sola pedina nella posizione centrale, come mostrato nella figura precedente.

Figura 3. Testo dell'attività di programmazione relativa al Triangular Peg Solitaire (disponibile nell'Allegato 2).

Il gioco di strategia del Triangular Peg Solitaire è stato scelto in base ad alcune caratteristiche fondamentali per la ricerca: la possibilità di utilizzare il ragionamento a ritroso nella sua risoluzione e, in particolare, la necessità di utilizzare costruzioni ausiliarie o elementi di novità, la forte componente visiva nella sua comprensione e le proprietà geometriche del tavolo da gioco che influenzano i movimenti delle pedine. Per risolvere l'attività, gli studenti dovevano comprendere il funzionamento del gioco, così da poterlo prima interpretare a livello matematico e poi implementare nel linguaggio di programmazione; dopo l'implementazione, la soluzione del gioco diventa semplicemente la scrittura di una regola logica in linguaggio computazionale. Si tratta di un compito in cui la risoluzione del gioco e la soluzione del problema matematico sono intrecciate e in cui sono coinvolti tre contesti di risoluzione: contesto strategico (relativo al gioco), contesto matematico (relativo alle rappresentazioni puramente matematiche) e contesto computazionale (relativo alla codifica nel linguaggio di programmazione Maude). Secondo la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008), ognuno dei tre contesti è legato a un discorso specifico con diverse caratteristiche che possono aiutare a identificarlo: parole chiave, mediatori visivi, routine e narrazioni approvate. Ad esempio, quando gli studenti sono coinvolti nel contesto strategico parlano di pedine, tavolo da gioco, movimenti (o salti) delle pedine ecc.; quando sono nel contesto matematico parlano di numeri naturali, coppie di numeri, notazione cartesiana ecc.; quando invece sono nel contesto computazionale utilizzano la terminologia specifica del codice di programmazione Maude.

4.4 Raccolta e analisi dei dati

Per osservare e approfondire il fenomeno del ragionamento a ritroso sono stati raccolti i dati combinando diverse fonti: produzioni scritte (risoluzione delle attività e protocolli di risoluzione individuali), videoregistrazioni dalle sessioni e interviste individuali. Inizialmente, si sono identificate e categorizzate le difficoltà dei partecipanti; successivamente sono stati realizzati due studi di caso analizzando in profondità i protocolli di risoluzione e le videoregistrazioni di due coppie di studenti, esemplificative del gruppo classe, e di una studentessa, Elodie, che interagisce con i compagni. Viene presentato in questo contributo un estratto di uno dei due studi di caso: Elodie, interagisce con una coppia di studenti, Diego e Peter, contribuendo alla loro risoluzione dell'Esercizio 2. I simboli, i diagrammi e le parole usate dagli studenti sono enfatizzati per fornire prove del contesto in cui sono coinvolti nel loro ragionamento.
I ragionamenti che mettono in atto gli studenti durante la risoluzione di un problema non sono direttamente osservabili, ma possono essere identificati attraverso l'analisi delle frasi che pronunciano o delle azioni che compiono. A questo scopo, per descrivere operativamente le procedure, nel protocollo di risoluzione o nel testo della conversazione si possono individuare le azioni epistemiche: si possono cioè identificare i differenti processi mentali in cui la conoscenza viene utilizzata o costruita (Hershkowitz et al., 2001). In particolare, si possono distinguere le azioni in cui lo studente riconosce alcune conoscenze apprese in precedenza come rilevanti per la risoluzione del problema, oppure le azioni in cui combina delle conoscenze con l'obiettivo di implementare una strategia, o di giustificare una congettura, o di trovare una soluzione al problema, oppure ancora le azioni in cui assembla e integra le conoscenze precedenti con l'obiettivo di produrre un nuovo costrutto.
Le risoluzioni degli studenti sono, quindi, state analizzate suddividendole in azioni epistemiche, esplicitando i processi mentali in cui la conoscenza viene utilizzata o costruita, e classificando le linee della trascrizione della videoregistrazione utilizzando le dimensioni del ragionamento a ritroso: se lo studente opera una scomposizione del problema con l'intento di analizzarlo (*breakdown*), se *ricerca le relazioni di causa-effetto*, o se *introduce elementi ausiliari* (Barbero et al., 2020). Per l'analisi dettagliata della trascrizione si veda l'Allegato 1. In questo contributo, dopo aver illustrato il processo di risoluzione e la sua rappresentazione geometrica, si propone un breve commento in cui vengono giustificate le scelte fatte per la classificazione delle azioni epistemiche e in cui vengono evidenziati i dispositivi discorsivi utilizzati nei momenti in cui compare il ragionamento a ritroso (episodi di oggettivazione).

5 Analisi dell'intero gruppo di studio

Analizzando globalmente l'intero gruppo di 23 studenti, si può osservare che il movimento del ragionamento tra diversi contesti è essenziale per raggiungere la soluzione (Barbero, 2020). Il ragionamento a ritroso viene utilizzato nel suo carattere di *breakdown* per estrapolare tutti gli elementi della formulazione computazionale finale e ancorarli alla loro rappresentazione strategica e matematica, permettendo così di progredire verso la risoluzione computazionale. Tale ragionamento viene utilizzato in due momenti principali: quando gli studenti riescono a trovare gli elementi necessari per la costruzione/definizione dei comandi computazionali (per esempio, la configurazione del salto), e quando gli studenti pensano al comportamento finale del programma e introducono elementi specifici nell'implementazione (per esempio, il costruttore commutativo). Il primo momento è caratterizzato dalla comparsa di dispositivi di *saming* ed *encapsulating* che aiutano nella formulazione della soluzione, mentre il secondo momento è caratterizzato dal dispositivo discorsivo *reifying* usato per definire gli elementi necessari dopo un movimento avanti-indietro verso lo stato finale cercato. La creazione di elementi nel linguaggio di programmazione Maude avviene attraverso il passaggio tra i contesti: computazionale, matematico, strategico e di nuovo matematico e computazionale. Gli studenti si concentrano sull'obiettivo di creare l'elemento (ad esempio, una lista), cercando gli elementi necessari per la sua costruzione formale. Cominciano a guardare il contesto computazionale e poi vanno a ritroso attraverso quello matematico fino al contesto strategico. Dopo aver trovato gli elementi necessari nel contesto strategico, li traducono nel contesto matematico e poi li implementano in quello computazionale. Le transizioni tra i contesti non sono lineari, ma procedono con movimenti avanti e indietro, confermando studi precedenti (Gómez-Chacón et al., 2016).

5.1 Categorizzazione delle difficoltà del gruppo

Sulla base delle osservazioni in classe, delle interviste individuali e delle videoregistrazioni, sono state identificate due categorie principali in cui possono essere classificate le difficoltà degli studenti: difficoltà fattuali e difficoltà metodologiche. La prima categoria comprende sia le conoscenze errate, sia gli errori sperimentali; si tratta di azioni eseguite in modo scorretto che portano a soluzioni errate. Rientrano in questa tipologia, per esempio, le difficoltà nello specificare tutti i casi possibili. La seconda categoria è invece legata alle fasi di apprendimento. Ciò significa che le difficoltà vengono identificate riflettendo sull'intero processo: la stessa implementazione in linguaggio Maude può essere appropriata o meno a seconda della fase di apprendimento in cui si verifica. Le difficoltà metodologiche si identificano quando gli studenti mettono in atto comandi di base mentre possono utilizzare comandi più sofisticati che sono già stati appresi: per esempio, quando gli studenti usano i linguaggi standard per definire le strutture di dati, aumentando di molto il numero di regole da implementare, oppure quando non sono in grado di applicare concetti matematici durante la programmazione, come ad esempio assiomi equazionali quali la commutatività o l'associatività. Le difficoltà fattuali hanno un'influenza diretta sull'esecuzione dei programmi, rendendoli difettosi. Mentre le difficoltà metodologiche rendono il percorso di risoluzione più complesso e richiedono, molto spesso, più tentativi per ottenere la soluzione.
Nello studio di caso presentato in questo contributo sono stati evidenziati i momenti in cui compaiono questi due tipi di difficoltà da parte di Diego e Peter nel corso dell'intervento di spiegazione di Elodie. Si tratta, infatti, di una coppia emblematica: nel corso della loro risoluzione emergono diverse difficoltà tra quelle identificate con l'analisi dell'intero gruppo di studenti. Hanno risolto il compito parlando tra loro, il che ha permesso, tramite le videoregistrazioni, di analizzare i loro processi di pensiero che sono stati enfatizzati nel discorso; l'interazione con Elodie permette di approfondire l'uso del ragionamento a ritroso nei momenti di spiegazione.

6 Analisi della dinamicità del ragionamento di un esperto

L'analisi proposta in questo paragrafo si riferisce alla trascrizione di un estratto di 10 minuti della videoregistrazione, che è stata tradotta integralmente dallo spagnolo dall'autrice (Allegato 1). La trascrizione è suddivisa in azioni epistemiche (evidenziate dalle linee numerate); inoltre, quando il soggetto che parla si serve della scrittura viene presentata la scansione del foglio come figura. L'analisi fine della trascrizione (Allegato 1) permette di identificare i momenti in cui si sviluppa il ragionamento a ritroso e i dispositivi discorsivi che vengono attivati. Viene riportata in questo paragrafo un'analisi in cui si mettono in evidenza le relazioni tra ragionamento a ritroso e ragionamento in avanti analogamente a quanto proposto nel par. 2.2.

6.1 La risoluzione di Elodie

Dopo aver risolto il primo esercizio, Diego e Peter iniziano a risolvere l'Esercizio 2, che richiede di scrivere in linguaggio di programmazione il salto delle pedine. Dopo 30 minuti circa di riflessioni, vedendo che i due compagni non riescono a raggiungere la soluzione, Elodie offre loro il suo aiuto: ragionando con loro ad alta voce, la studentessa spiega come si può rappresentare il salto delle pedine in linguaggio computazionale, starà a Diego e Peter completare l'esercizio implementando il codice in linguaggio Maude. In questo estratto il discorso principale è sviluppato da Elodie, i compagni intervengono puntualmente mettendo in evidenza le proprie difficoltà.
Elodie riassume inizialmente i ragionamenti sviluppati per risolvere l'Esercizio 1 e disegna un tavolo da gioco triangolare sul foglio, evidenziando le tre posizioni che considererà per esemplificare la risoluzione dell'Esercizio 2 (Figura 4). Utilizzando la notazione esemplificata nel par. 2.2, il problema che la studentessa si ritrova a risolvere è:

> Si consideri il tavolo da gioco rappresentato in figura [si veda la Figura 3 nel par. 4.3 o l'Allegato 2] e definito [risultato dell'Esercizio 1] in linguaggio computazionale come lista di coppie (*a*, *b*), dove *a* e *b* sono numeri naturali con *a* indicante il numero di riga e *b* la posizione della casella all'interno della riga. Rappresentare in linguaggio computazionale il movimento delle pedine, come rappresentato in Figura 4 (tenendo conto che la rappresentazione deve poter essere generalizzata a qualsiasi movimento delle pedine).

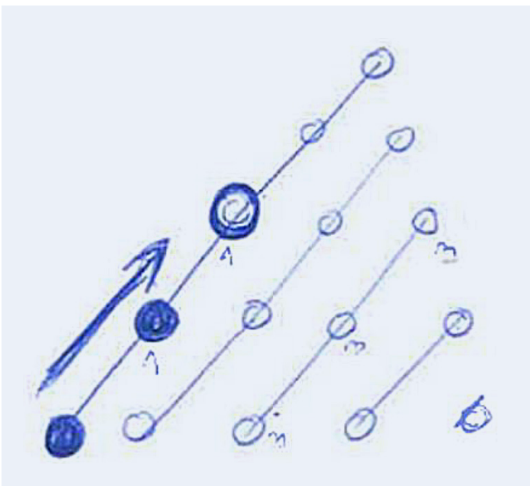


Figura 4. Tavolo da gioco con evidenziate le tre posizioni utilizzate per esemplificare il salto delle pedine.

Si utilizza la notazione A_i e B_j (analogamente a quanto fatto nel par. 2.2) per rappresentare il ragionamento della studentessa. Esso risulta intervallato dalle domande dei suoi due compagni che permettono di far emergere le loro difficoltà fattuali e metodologiche. Ogni volta che Elodie esplicita il linguaggio computazionale da utilizzare questo viene indicato tra parentesi quadre, per esempio [**rl diagonal**] quando propone di implementare la regola che definisce il salto lungo la diagonale.

- A: Si ha un tavolo da gioco come in Figura 3;
- A_1: La posizione di ogni casella può essere rappresentata con una terna di valori (*a*, *b*, *c*) dove a e *b* sono due numeri naturali, *a* indica il numero di riga e *b* indica la posizione della casella all'interno della riga, e dove il terzo valore, *c*, è un valore booleano che indica se la casella contiene una pedina (valore booleano "true") oppure è una casella vuota (valore booleano "false");
- B: Si vuole rappresentare il movimento della pedina mostrato in Figura 4;
- B_1: È necessario rappresentare le tre posizioni coinvolte nel movimento tramite terne;
- B_2: È necessario rappresentare una terna per ognuna delle posizioni, esse devono essere in relazione tra loro;
- A: Il tavolo da gioco è definito come lista di coppie (rappresentanti ognuna una casella);
- B_3: Si vuole avere una formula generica che consideri tutti i casi possibili;
- B_4: Siccome si vuole poter scambiare la posizione delle coppie all'interno della lista al fine di considerare tutti i casi possibili, è necessario definire il costruttore commutativo [**ctor comm**].[6]

A questo punto Diego e Peter cominciano a esprimere dei dubbi riguardanti la necessità di inserire il costruttore commutativo all'interno del codice. Emerge da queste linee di dialogo una difficoltà di tipo metodologico: gli studenti, infatti, risolvendo l'Esercizio 1, hanno costruito il tavolo da gioco come lista di posizioni, usando un linguaggio standard per definire la struttura di dati, mentre sarebbe stato più opportuno usare una struttura insiemistica. Elodie, per far sì che questa rappresentazione della struttura di dati non comprometta il funzionamento del programma, propone di utilizzare il costruttore commutativo e giustifica la scelta ai due compagni.

- B_5: È necessario avere la proprietà di commutatività poiché si è definita la struttura di dati come lista.

Emerge nuovamente una difficoltà metodologica da parte di Peter, che afferma che la struttura di dati non è associativa, evidenziando una difficoltà ad applicare il concetto matematico al linguaggio di programmazione. Elodie, rendendosene conto, approfondisce la sua spiegazione.

- A_2: Si possono rappresentare tre posizioni vicine con tre valori numerici consecutivi: N, $s(N)$, $s(s(N))$;[7]
- B_6: Il "salto" si può applicare solamente a tre posizioni consecutive sul tavolo da gioco;
- A_3: Non è detto che tre posizioni consecutive sul tavolo da gioco siano anche consecutive all'interno della lista che definisce il tavolo da gioco;
- B_7: Le tre posizioni consecutive le posso rappresentare indicando come prima componente delle tre terne considerate (*a*) tre numeri consecutivi;
- A_4: Siccome A_1, allora la seconda componente delle tre terne considerate (*b*) sarà rappresentata dallo stesso valore numerico.

Diego chiede di specificare meglio le relazioni tra le tre terne rispetto al secondo valore (*b*).

6. Tramite questo operatore è possibile dichiarare informazioni aggiuntive rispetto alla struttura di dati, in questo caso l'attributo equazionale di commutatività.
7. N indica un generico "numero naturale" mentre $s(\ )$ l'operatore "successore"; l'espressione $s(N)$ indica il successore di N, ovvero $N + 1$.

– B_8: Il movimento considerato passa attraverso tre righe ma la posizione nella riga [prima posizione] rimane sempre la stessa;
– A_5: Riferendosi al movimento contrario, le tre terne da considerare saranno le stesse.

A questo punto, Diego chiede spiegazioni su come si dovrebbero rappresentare le terne di valori se si considerasse il movimento in **Figura 5**.

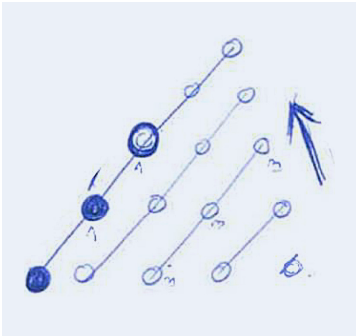


Figura 5. Movimento delle pedine (rappresentato dalla freccia) a cui si riferisce Diego.

– B_9: Se si vuole rappresentare il movimento in **Figura 5**, per riuscire a considerare tre posizioni consecutive, devo dare come condizione che la prima componente delle tre terne considerate (*a*) siano tre numeri consecutivi e che, per tutte le terne, la somma (o la differenza, a seconda di come numero le posizioni sul tavolo da gioco) tra la prima (*a*) e la seconda (*b*) componente sia costante;
– A_6: Bisogna implementare questi sei movimenti rappresentati in **Figura 6**.

Figura 6. I sei movimenti che è necessario implementare per risolvere l'Esercizio 2.

A questo punto emerge una difficoltà fattuale: Diego e Peter non avevano preso in considerazione tutti i possibili movimenti sul tavolo da gioco ma solamente il movimento rappresentato in **Figura 4**; questo viene bene espresso dall'esclamazione di Diego, dopo che Elodie disegna i sei movimenti (**Figura 6**): «Pensavamo che definire un solo movimento bastasse!».

– B_{10}: La terza componente delle tre terne considerate (*c*), deve avere valore booleano "true" per due posizioni consecutive e un valore booleano "false" per la terza posizione;
– B_{11}: Ad ogni casella del tavolo da gioco si associano due valori naturali (*a* e *b*) tali per cui considerando due posizioni vicine lungo la riga (o lungo la "colonna"), i valori della prima componente (*a*) (o i valori della seconda componente (*b*)) risultano essere uno il successore dell'altro [si possono indicare genericamente *N* o *s*(*N*)]. Numero le righe a partire dal vertice in alto.

Emerge in questo momento una difficoltà metodologica da parte dei compagni che si chiedono se *N* debba essere dichiarato come costante invece che come variabile. Si osserva come in questo caso gli studenti facciano riferimento a strutture a loro note dei linguaggi standard: se definissero *N* come costante, si renderebbero complicate le successive implementazioni in linguaggio Maude.

- B_{12}: *N* è dichiarato come variabile [**var**];
- B_{13}: La parte booleana delle tre posizioni deve essere, "true", "true", "false";
- B_{14}: Per generalizzare i valori delle prime due componenti si utilizza la funzione successore.

A questo punto si osserva una difficoltà relativa alla definizione matematica di numero naturale da parte dei compagni che esplicitano di non sapere come indicare il successore di un numero, operazione di base dei numeri naturali.

- B_{15}: Per indicare il successore di un numero *N* si usa *s*(*N*) ovvero *N* + 1;
- B_{16}: Per determinare il movimento del salto [**rl diagonal**] devo dichiarare *F* e *N* come variabili appartenenti a ℕ [**var F N nat**], *F* viene utilizzata per i valori delle righe e *N* per i valori delle posizioni nella riga (le "colonne");
- A: Si considera il tavolo da gioco [**solitario**] così come è stato definito nell'Esercizio 1;
- B_{17}: Si lavora con i moduli funzionali, essi considerano triple di dati all'interno della lista.

Diego esplicita che nella soluzione all'Esercizio 1 non sono state inserite le parentesi, all'interno del codice, per separare le diverse coppie che rappresentano le posizioni delle caselle sul tavolo da gioco. Emerge in questo caso una difficoltà fattuale: il codice deve poter manipolare la struttura di dati, e non inserendo le parentesi si creerebbero dei bug.

- B_{18}: Si inseriscono le parentesi nel codice (nella definizione della posizione delle pedine);
- A_7: È sufficiente definire la regola tenendo conto solo delle posizioni coinvolte nel salto, si dichiara lo stato iniziale [**{F, N, false}, {s(F), N, true}, {s(s(F)), N, true}**];
- A_8: E di conseguenza lo stato finale [**{F, N, true}, {s(F), N, false}, {s(s(F)), N, false}**].

In questo estratto, il ragionamento a ritroso viene utilizzato principalmente nei suoi caratteri di *ricerca di relazioni causa-effetto* (B_1, B_2, B_3, B_5, B_6, B_{12}, B_{15}, B_{17}, B_{18}): ad esempio quando Elodie, tenendo conto della struttura dei dati a disposizione, cerca gli elementi necessari per l'implementazione del suo obiettivo; di *breakdown* (B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{13}, B_{14}, B_{16}) quando la studentessa analizza le rappresentazioni del salto delle pedine e del tavolo da gioco per identificare gli elementi di base che le caratterizzano; mentre si ha un solo momento in cui viene introdotto un elemento ausiliario, il costruttore commutativo (B_4), elemento computazionale necessario alla risoluzione. Fin dai primi momenti di risoluzione, quando Elodie definisce la rappresentazione statica del problema e poi evidenzia l'obiettivo dell'esercizio, vengono attivati i discorsi sui tre contesti di risoluzione: strategico, matematico e computazionale. Appare subito evidente come essi siano intrecciati e necessari per sviluppare la spiegazione, in particolare per poter giustificare le scelte effettuate e costruire la soluzione in linguaggio computazionale.
In generale, i discorsi sviluppati durante la risoluzione di giochi sono diversi da quelli sviluppati nella risoluzione di problemi matematici e ancora distinti dalla risoluzione di un problema computazionale: le narrazioni e le routine correlate non sono le stesse. In questo tipo di richiesta, invece, i discorsi risultano intrecciati e strettamente interconnessi e le caratteristiche discorsive evidenziate da Sfard (2008) (parole chiave, mediatori visivi, routine e narrazioni approvate) appaiono mescolate all'interno delle frasi della studentessa (per esempio quando definisce le relazioni tra le posizioni sul tavolo da gioco, utilizzando le regole dell'addizione per rappresentare in modo generale tre numeri consecutivi). Tutti e tre i dispositivi discorsivi emergono durante la risoluzione (si veda l'Allegato 1 per ulteriori dettagli). Il

dispositivo di *saming* viene utilizzato per rappresentare in notazione matematica le posizioni del tavolo da gioco, seguendo le proprietà geometriche delle caselle. Il dispositivo *encapsulating* appare quando tutti i diversi salti sul tavolo da gioco vengono raggruppati secondo le loro proprietà geometriche in sei movimenti principali che vengono successivamente rappresentati in modo generale. Il dispositivo *reifying* si osserva quando il soggetto del discorso non sono più le parti di codice che vengono analizzate ma è il codice stesso che considera determinati dati, opera e restituisce una certa soluzione.

Come mostrato nel quadro teorico, il ragionamento della studentessa può essere descritto attraverso una rappresentazione grafica della risoluzione (**Figura 7**). Si osserva come il processo risulti fortemente intrecciato e il passaggio tra i tre contesti avvenga con un complesso processo di ragionamenti in avanti e a ritroso, di cui la maggior parte a ritroso, in cui i diversi contesti sono ripetutamente attivati. Questo è dovuto al fatto che la spiegazione di Elodie viene interrotta dall'emergere delle difficoltà dei compagni che la spingono a ritornare sui passi del ragionamento per esplicitare elementi non ancora chiari, in particolare le proprietà della struttura di dati con la quale stanno lavorando. Alcuni passi del ragionamento non sono chiaramente sviluppati in un determinato contesto discorsivo ma risultano a metà tra due contesti, per esempio quando la studentessa parla di posizioni sul tavolo da gioco (contesto strategico) per poi riferirsi alla loro rappresentazione matematica tramite terne (contesto matematico).

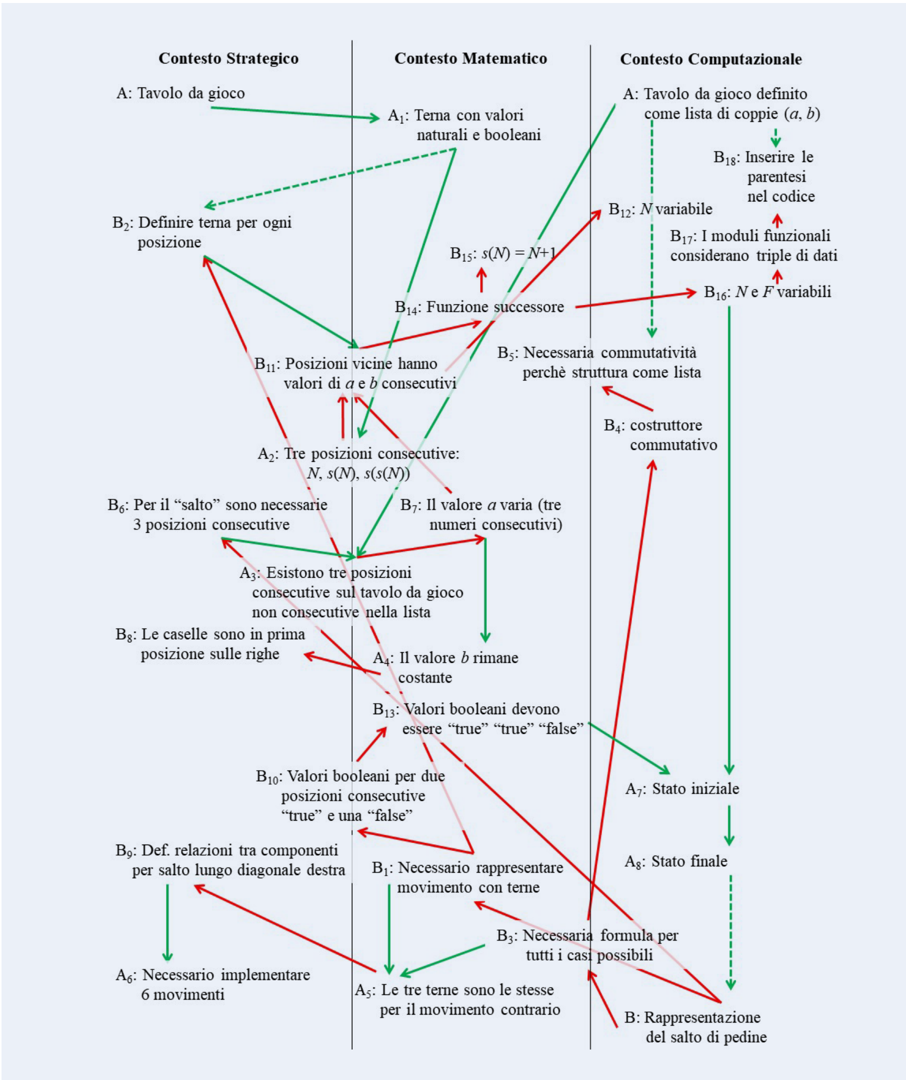


Figura 7. Rappresentazione geometrica del processo di ragionamento di Elodie per arrivare alla soluzione.

Per comprendere l'evoluzione del discorso all'interno dei tre contesti si propone una schematizzazione della risoluzione in cui vengono presi in considerazione i contesti di risoluzione nel tempo (Barbero et al., 2020) e in cui vengono "condensati" i passi della risoluzione (Figura 8). Se si osserva l'intero processo lungo i minuti dedicati alla spiegazione del processo risolutivo, si può notare come Elodie abbia attraversato i diversi contesti per arrivare alla formulazione generale che servirà per implementare l'esercizio in linguaggio computazionale. Ha iniziato a lavorare nel contesto relativo al gioco (quello strategico), per poi passare a un contesto matematico e identificare il suo obiettivo. Ha proseguito verso il contesto computazionale andando ad anticipare le possibili difficoltà di implementazione del programma generate dalla definizione della struttura di dati (la lista) in linguaggio computazionale standard. Successivamente è tornata al contesto matematico e a quello strategico per analizzare e descrivere i tipi di movimenti delle pedine. A questo punto ha evidenziato prima per un caso particolare, poi per una posizione generica, la formulazione matematica del movimento delle pedine. Infine, ha definito quello che risulta essere la rappresentazione computazionale del movimento.

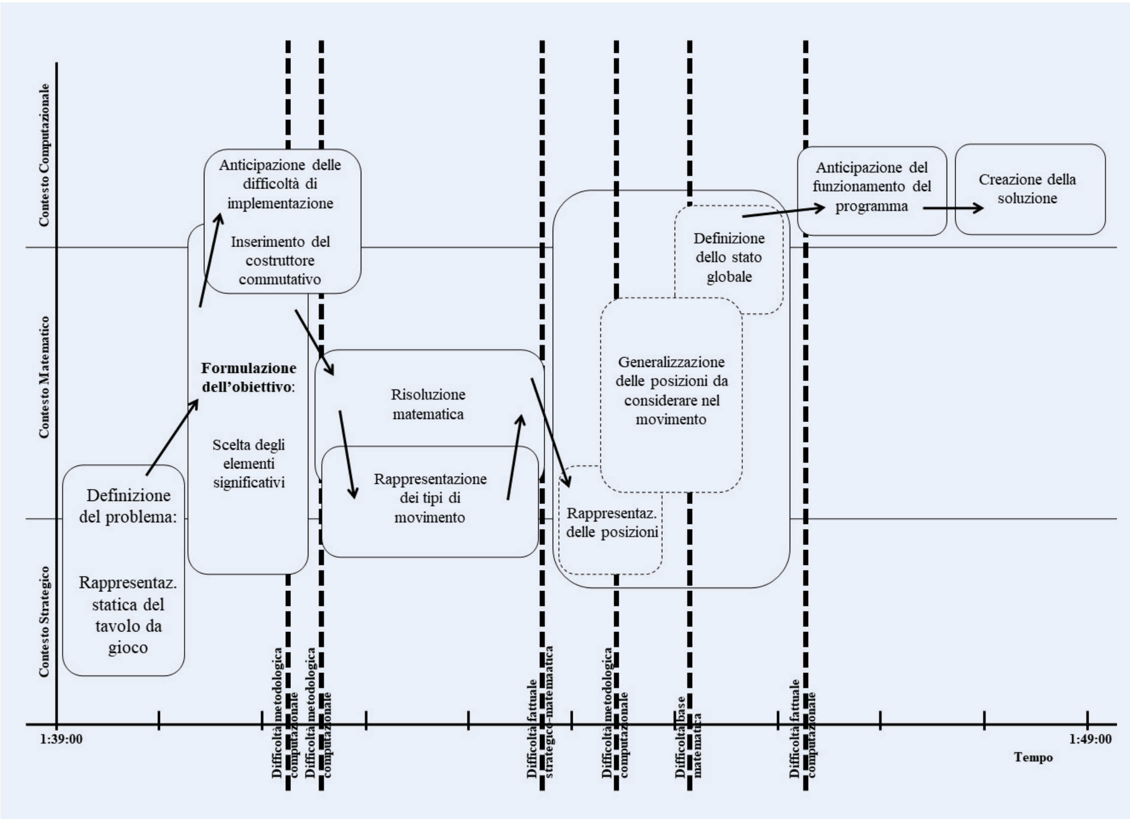


Figura 8. Evoluzione nel tempo del discorso di Elodie.

Emergono in questo estratto due strutture linguistiche ricorrenti nei momenti di ragionamento a ritroso nei processi risolutivi e di spiegazione degli studenti (Barbero, 2020).

La prima struttura linguistica si trova in tutte quelle situazioni di ragionamento a ritroso in cui il risolutore suppone il problema risolto e cerca di concretizzare la soluzione cercata. Si riscontra quando gli studenti anticipano il comportamento finale del software, e prestano attenzione a utilizzare un elemento strutturale specifico durante l'implementazione (il costruttore commutativo oppure le parentesi all'interno del codice) per evitare risultati errati o bug. In questi momenti gli studenti applicano un «processo inverso di oggettivazione» (Barbero, 2020, p. 388), partendo dalla fine. Il processo inizia esplicitando l'oggetto che deve essere costruito, successivamente si sviluppa un discorso intor-

no all'oggetto identificato, o a elementi ad esso strettamente correlati, fino all'oggettivazione finale che avviene generalmente attraverso un dispositivo discorsivo *reifying*. In questo tipo di struttura cognitiva il pensiero viene spinto verso la soluzione finale del problema da cui successivamente parte il discorso che si sviluppa seguendo i consueti processi di oggettivazione.
La seconda struttura individuata è ricorrente nei momenti di ragionamento a ritroso, dove le caratteristiche di *breakdown* sono predominanti, ovvero quando il risolutore parte dalla fine del problema e analizza la situazione scomponendola in parti. Questo tipo di struttura linguistica emerge quando gli studenti cercano gli elementi di base necessari per implementare un salto. La struttura del ragionamento è caratterizzata da un processo di oggettivazione in cui compare il dispositivo discorsivo *encapsulating*. Il discorso si sviluppa intorno alla configurazione finale del problema che è composta da diversi oggetti che, generalmente, vengono prima messi in relazione attraverso un dispositivo *saming* e poi vengono *incapsulati* in un'unica entità.

7 Il ragionamento a ritroso nelle spiegazioni

Analizzando il processo di spiegazione portato avanti da Elodie, è possibile riscontrare caratteristiche simili a quelle descritte per il gruppo di studio. Considerando l'analisi fine dell'estratto (si veda l'Allegato 1) si può notare che la maggior parte dei passi a ritroso sono proprio caratterizzati dalla *ricerca di relazioni di causa-effetto* o dal *breakdown* (scomposizione e analisi) delle configurazioni considerate. Inoltre, l'analisi dei dispositivi discorsivi permette di distinguere i due seguenti casi.
- Quando il ragionamento a ritroso si sviluppa in situazioni in cui Elodie si riferisce al funzionamento del programma, compare un dispositivo *reifying*. In queste situazioni, la studentessa tiene conto del funzionamento del programma e spiega gli elementi necessari per ottenere il comportamento desiderato. Prima si spinge verso lo stato finale che vuole raggiungere, poi torna indietro e, successivamente, in avanti, definendo gli elementi necessari alla sua realizzazione.
- Quando il ragionamento a ritroso si sviluppa in momenti in cui Elodie fa riferimento al salto delle pedine, compaiono i dispositivi di *saming* ed *encapsulating*. La studentessa associa i diversi movimenti delle pedine, a seconda delle loro caratteristiche geometriche, e li considera come entità che possono essere definite formalmente in linguaggio matematico e computazionale.

Una spiegazione portata avanti da un esperto, però, si sviluppa generalmente in modo lineare (Tall, 2002), solitamente in termini deduttivi: l'esperto cita le premesse, applica alcune regole di deduzione (ad esempio il *modus ponens*) e giunge a una conclusione; il processo di scoperta della soluzione, con i caratteristici movimenti avanti e indietro, non viene esplicitato. Se si osserva globalmente il processo di spiegazione di Elodie (Figura 8) si può notare come parta dal contesto strategico, poi passi attraverso il contesto matematico, fino a raggiungere quello computazionale: il ragionamento non è lineare, analogamente a quello dei suoi compagni segue il loro processo di scoperta. Si discuterà il processo di spiegazione non lineare di Elodie nel prossimo paragrafo.

7.1 Affrontare le difficoltà dei non esperti

L'analisi dell'episodio ha messo in evidenza il fatto che nei processi di spiegazione, se questi vengono sviluppati considerando le possibili (o effettive) difficoltà dei non esperti a cui sono rivolti, l'esperto è portato ad includere/considerare nel discorso anche i processi di scoperta da lui stesso sviluppati nella creazione della conoscenza tema della spiegazione. Considerando l'esempio fornito, di fronte alle difficoltà dei suoi compagni di classe, Elodie, in quanto mediatore di conoscenza, tiene conto della natura del suo ragionamento di scoperta per arricchire la sua spiegazione e provare a risolvere i dubbi di Diego e Peter, allontanandosi dalla pura deduzione. Per farlo, utilizza il ragionamento a ritroso a livello metodologico come se fosse un "dispositivo di ordinamento" (Peckhaus, 2002), ovvero lo utilizza per ripercorrere il processo di risoluzione a ritroso, ordinare un determinato insieme di affermazioni e ricostruire razionalmente il processo. Elodie, infatti, attiva il ragionamento a ritroso tornando al contesto strategico e spiegando i processi sviluppatisi durante la sua personale risoluzione. Il ragionamento a ritroso, in questo caso, sembra che la aiuti a collegare gli aspetti più intuitivi con quelli matematici e computazionali, costruendo percorsi produttivi per la spiegazione dei concetti e per la transizione tra i contesti, dove si concentrano le difficoltà dei suoi compagni. Le difficoltà espresse da Diego e Peter, sia metodologiche che fattuali, indicate in **Figura 8**, come nella **Figura 9** seguente, con linee nere tratteggiate, infatti, non sono focalizzate su un singolo contesto, anche se sono più ricorrenti in quello computazionale. Come anticipato, le maggiori difficoltà si osservano nel passaggio da un contesto all'altro, in particolare tra quello matematico e quello computazionale relativamente ai momenti in cui è presente un'evoluzione delle proprietà e dei concetti matematici alla base dello sviluppo del programma e della necessaria semiotica (segni e registri di rappresentazione) tipica del linguaggio di programmazione Maude. Le modalità relative al movimento nei tre contesti sono indicative del ragionamento di risoluzione di Elodie, e della sua volontà, in quanto esperta, di interfacciarsi con le difficoltà dei suoi compagni costringendosi a tornare indietro nel suo ragionamento per evidenziare le basi e le premesse di ciò che sta spiegando, siano queste strategiche, matematiche o computazionali.

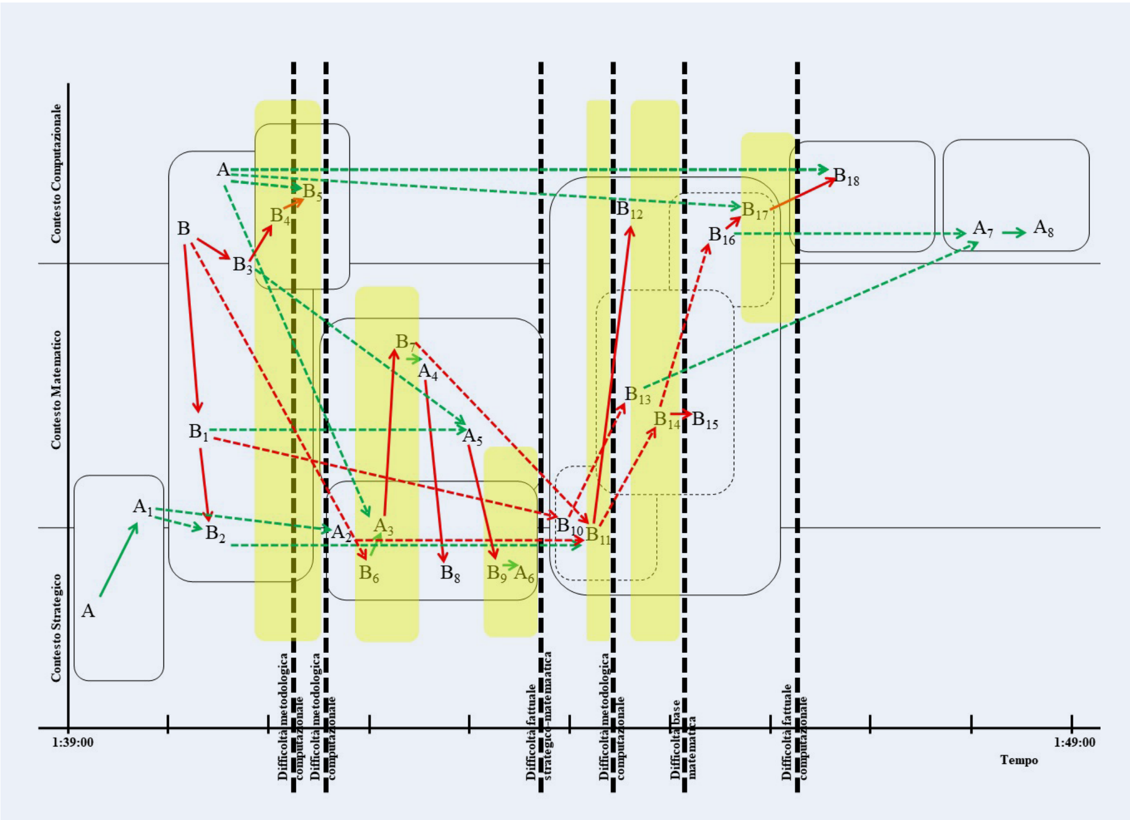


Figura 9. Evoluzione nel tempo del discorso di Elodie (con esplicitazione dei ragionamenti a ritroso e in avanti e dei momenti evidenziati in giallo in cui vengono attivati i dispositivi discorsivi di oggettivazione).

Il ragionamento a ritroso (indicato in **Figura 9** da frecce rosse, come nelle rappresentazioni grafiche precedenti) si sviluppa maggiormente nella transizione tra i contesti ed è usato da Elodie per recuperare la successione delle fasi della sua risoluzione. Da questo punto di vista, l'analisi linguistica basata sul quadro della Commognition, e in particolare sui suoi dispositivi discorsivi (*saming*, *encapsulating* e *reifying*) che caratterizzano i processi di oggettivazione, permette di interpretare meglio il ragionamento a ritroso a livello cognitivo, individuando i momenti di oggettivazione nel discorso della studentessa (evidenziati dai riquadri gialli in Figura 9). Si può notare che le difficoltà dei compagni emergono subito dopo questi processi di oggettivazione, esplicitando un conflitto commognitivo in atto. Affinché i compagni comprendano la risoluzione del compito, Elodie media tra la sua conoscenza e il suo processo di risoluzione, e utilizza il ragionamento a ritroso come strumento comunicativo per interpretare come avviene la comprensione di un concetto nel pensiero dei compagni e superare l'incommensurabilità del discorso.

8 Conclusioni

Dall'analisi dell'episodio proposto si sviluppano diversi risultati interessanti per quanto riguarda un primo approccio per una comprensione cognitiva dei processi di spiegazione in cui uno studente esperto si interfaccia con uno o più compagni con competenze differenti. Tali elementi permettono di dare una prima risposta all'interrogativo di ricerca di questo articolo, ovvero di indagare come si relaziona l'attivazione del ragionamento a ritroso nel processo di spiegazione portato avanti dallo studente esperto con le difficoltà messe in luce dai compagni.
Si è osservato e discusso (par. 7.1) come l'attivazione del ragionamento a ritroso nel discorso dello studente esperto sia in stretta relazione con le difficoltà messe in luce dai compagni e come il ragionamento entri in gioco nel momento in cui lo studente esperto considera nel suo discorso anche i processi di scoperta da lui stesso seguiti in fase di risoluzione. Le difficoltà dei meno esperti, concentrate principalmente nella transizione tra i contesti, emergono durante (o subito dopo) l'attivazione di dispositivi discorsivi di oggettivazione, evidenziando un conflitto commognitivo in atto. Il ragionamento a ritroso è coinvolto nel processo di spiegazione come dispositivo che permette di ordinare i passi della risoluzione (svolta precedentemente dall'esperto) e di aiutare a superare il conflitto commognitivo. Ciò conferma quanto già affermato da Peckhaus (2002): il ragionamento a ritroso è «l'arte di organizzare una serie di pensieri, cioè un dispositivo di ordinamento, e l'ordinamento è la caratteristica fondamentale sia della scoperta che della presentazione» (p. 8).
I movimenti tra i contesti da parte dell'esperta permettono ai compagni la comprensione del processo di risoluzione. Il passaggio attraverso il contesto matematico, che facilita la transizione tra quello strategico e quello computazionale, serve infatti a Elodie, in primo luogo, per sviluppare un sistema di segni e in secondo luogo per far comprendere a Diego e Peter l'interazione tra i diversi elementi coinvolti: la sua conoscenza matematica, ed in particolare l'uso di proprietà algebriche e logiche, le permette di "tradurre" le proprietà del gioco in elementi computazionali. Da questo punto di vista, il ragionamento a ritroso, che emerge nel momento in cui c'è un ritorno del ragionamento al contesto strategico, aiuta a collegare gli aspetti più intuitivi con il contesto matematico e computazionale.
L'attenzione ai processi di ragionamento a ritroso nei processi di spiegazione mette l'accento sulle possibili difficoltà degli studenti nell'affrontare una spiegazione lineare, dalle premesse alle conclusioni, e di conseguenza sull'eventuale necessità di ripercorre le tappe del processo di scoperta per una piena comprensione del concetto tematizzato.
Dal punto di vista del docente, l'utilità di prestare attenzione al ragionamento a ritroso risiede in due motivi. Da un lato, l'insegnante può comprendere meglio i processi di risoluzione e riorganizzarli in un discorso pensato per gli studenti. Dall'altro lato, la consapevolezza che il processo naturale per ottenere il risultato non è lineare e si compone non solo di ragionamenti in avanti, permette di prestare maggiore attenzione alle possibili difficoltà degli studenti nella comprensione dei diversi passaggi, rendendo più facile la rielaborazione della spiegazione dopo che vengono evidenziate le difficoltà o addirittura anticipandole nel discorso.
Anche quanto discusso precedentemente sui processi di oggettivazione può avere importanti implica-

zioni didattiche. Infatti, secondo la prospettiva della Commognition (Sfard, 2008), quando lo studente interagisce con una persona già esperta nel nuovo discorso, e incontra un discorso incommensurabile con il proprio, viene coinvolto in una situazione di meta-apprendimento che può causare un conflitto commognitivo. In queste situazioni, il ragionamento a ritroso permette all'insegnante di andare avanti e indietro nel discorso, rendendo possibile allo studente di superare il conflitto commognitivo rivelando il discorso precedentemente incommensurabile. Il primo passo di questo tipo di apprendimento sono i rituali di imitazione: a poco a poco, lo studente si appropria delle routine fino a diventare consapevole delle proprie conoscenze per poterle utilizzare autonomamente nel discorso matematico. In questa prospettiva, il ragionamento a ritroso, come un dispositivo di ordinamento, media i processi di de-ritualizzazione che avvengono quando le routine utilizzate nelle modalità a ritroso iniziano a relazionarsi tra loro e si fondono in un discorso consolidato.

Si osserva inoltre che, anche se l'identificazione delle azioni epistemiche (par. 4.4) ha facilitato il compito di analisi del ragionamento, le produzioni scritte e le videoregistrazioni della risoluzione del compito, ovvero le manifestazioni attraverso cui è possibile osservarlo, non possono mai rappresentarlo pienamente. Inoltre, il ragionamento, essendo personale, dipende fortemente sia dalla persona coinvolta sia dal compito e dalle modalità con cui viene proposto. Queste constatazioni sottolineano quanto i risultati presentati in questo contributo, nonostante siano limitati dallo studio del fenomeno relativamente a elementi specifici, possano essere dei significativi punti di partenza per futuri studi relativamente alle interazioni tra pari, studi in cui sarebbe però opportuno coinvolgere studenti con background e livelli diversi (per esempio includendo anche studenti di altri ordini scolastici) proponendo attività variate relative a diversi contenuti matematici (e non) e che eventualmente coinvolgano anche l'ambiente digitale. Da questo punto di vista, gli studi relativi allo sviluppo del ragionamento a ritroso, che focalizzano l'attenzione sulla risoluzione di problemi matematici, di attività di programmazione e di giochi di strategia (Barbero, 2020; Barbero et al., 2020), risultano promettenti per una possibile estensione dei risultati della ricerca ad argomenti matematici diversi da quello affrontato in questo contributo. Dal punto di vista didattico, inoltre, sarebbe molto interessante continuare ad approfondire come il ragionamento a ritroso entra in gioco nei processi di pensiero dell'insegnante e come influenza le spiegazioni e le interazioni con gli studenti, in particolare nel momento in cui manifestano delle difficoltà.

Bibliografia

Arnauld, A., & Nicole, P. (1964). *The Art of Thinking.* Bobbs-Merrill. (Titolo originale: *La Logique ou l'art de penser* pubblicato nel 1662).

Arzarello, F. (2014, 21 novembre). *A new structural approach to argumentation in mathematics: from Toulmin model to Hintikka Logic of Inquiry* [Conference session]. Mathematics education as a transversal discipline. Università degli Studi di Torino, Italia.

Barbero, M. (2015). *Giochi di strategia e risoluzione dei problemi: l'uso della strategia del ragionamento regressivo.* Tesi di Laurea Magistrale in Matematica. Università degli Studi di Torino.

Barbero, M. (2020). *Backward Reasoning in problem-solving situations: a multidimensional model.* Tesi di Dottorato. Università degli Studi di Torino & Universidad Complutense de Madrid.

Barbero, M., & Gómez-Chacón, I. M. (2018). Analyzing Regressive reasoning at university level. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. Mhogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 204–213). University of Agder and INDRUM.

Barbero, M., Gómez-Chacón, I. M., & Arzarello, F. (2020). Backward reasoning and epistemic actions in discovery processes of strategic games problems. *Mathematics*, *8*(6), 989. https://doi.org/10.3390/math8060989

Beaney, M. (2018). Analysis. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/entries/analysis/s1.html

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., & Guy, R. K. (1982). *Winning Ways: for your mathematical plays* (Vol. 4). Academic Press Inc.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton University Press.

Cai, J. (Ed.) (2017). *Compendium for Research in Mathematics Education*. NCTM.

Clavel, M., Durán, F., Eker, S., Lincoln, P., Martí-Oliet, N., Meseguer, J., & Talcott, C. (2007). *All about Maude: a high-performance logical framework*. Springer.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Síntesis.

Gómez-Chacón, I. M. (1992). Los juegos de estrategias en el curriculum de matemáticas. *Colleción Apuntes IEPS*, *55*. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M., & Barbero, M. (2020). ¿Es la confusión beneficiosa en matemáticas? Emociones epistémicas y razonamiento regresivo en Secundaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, Monográfico Emociones en Matemáticas*, *88*, 7–16.

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I. M., & Garcia, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(6), 909–924.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195–222. https://doi.org/10.2307/749673

Hintikka, J. (1999). *Inquiry as inquiry: A logic of scientific discovery.* Springer Science+Business Media.

Hintikka, J., & Remes, U. (1974). *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Reidel.

Holyoak, K., & Morrison, R. (Eds.) (2015). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. Cambridge University Press.

Koichu, B. (2010). On the relationships between (relatively) advanced mathematical knowledge and (relatively) advanced problem-solving behaviours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 257–275.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press.

Mäenpää, P. (1998). Analytic Program Derivation in Type Theory. In G. Sambin & J. M. Smith (Eds.), *Twenty-five Years of Constructive Type Theory* (pp. 113–126). Oxford University Press.

Peckhaus, V. (2002). Regressive Analysis. *Logical Analysis and History of Philosophy*, *5*, 97–110.

Peirce, C. S. (1932). Elements of logic. In C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 2). Harvard University Press.

Polya, G. (1945). *How to solve it? A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference* (Vol. 2). Princeton University Press.

Ruesga Ramos, P., Jímenez Rodríguez, J., & Orozco Hormaza, M. (2004). Matemática relacional y procesos directo e inverso. *Revista De La Sociedad Argentina De Educación*, *9*(35), 3–17.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Sfard, A. (2009). Commentary on the chapters by Baker and Asterhan and Schwarz through the lens of commognition. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 173–183). Routledge.

Sfard, A. (2018). Commognition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 9–30.

Tall, D. (Ed.) (2002). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (Vol. 11). Springer.

van Lambalgen, M., & Stenning, K. (2008). *Human reasoning and cognitive science.* MIT Press.