Titre: Membership problem.

Titre courant: Membership problem

Nom de l'auteur: Francesco Amoroso

Adresse:

Università degli studi di Padova

Dipartimento di matematica pura ed applicata

Via Belzoni, 7

I-35131 PADOVA (ITALIA)

et

Université de Paris VI, U.R.A. 763 du CNRS

"Problèmes diophantiens"

Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie

F-75231 Paris Cedex 05 (FRANCE).

Abstract

Let $\mathbf{K}$ be a field of arbitrary characteristic and let I be an ideal in the ring $\mathcal{R} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ generated by polynomials $f_1, \ldots, f_m$ of total degree $\leq d$. This paper deals with the following conjecture:

"there exists a small positive integer e, independent of d, such that for any $f \in I$ of total degree d_f we can find an expression of the type

$$f^e = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

where the total degrees of the a_i's are bounded by $e \cdot d_f + d^n + O(d)$".

We give a positive answer if the rank k of I is n or $n-1$: in the first case we can take $e = 1$, in the second one $e = n$. Other weaker results are given if $k \leq n-2$.

§1 - Introduction et énoncés des résultats

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $\mathcal{R} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ son anneau des polynômes en n variables. Etant donné un idéal $I \subset \mathcal{R}$ engendré par des polynômes de degré $\leq d_0$ et deux entiers $d \geq d_0$ et $e \geq 1$, on note $\phi_I(e, d)$ le plus petit entier D tel que pour tout système de générateurs $f_1, \ldots, f_m$ de I avec $\max \deg f_i \leq d$ et pour tout $f \in I$ on ait

$$f^e = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

avec $a_i \in \mathcal{R}$ et $\max \deg a_i \leq e \cdot \deg f + D$. La suite $\{\phi_I(e, d)\}_{e \in \mathbf{N}}$ est décroissante et on note $\phi_I(d) = \phi_I(1, d)$ son maximum. La croissance de la fonction $\phi_I(d)$ est très liée à la géométrie de l'idéal I: par exemple, si I est intersection complète ou bien de dimension zéro, on peut majorer $\phi_I(d)$ par un polynôme $P(d)$ de degré égal à la codimension $\mathrm{ht}(I) = n - \dim \mathcal{R}/I$ de I (voir [BY] théorèmes 1 et 2 et [A] théorème 1). Par contre, E. Mayr et A. Meyer (cf [MM]) ont construit une famille d'idéaux pour lesquels $\phi_I(d)$ a une croissance doublement-exponentielle en d (i.e. $\log \log \phi_I(d) \gg n + \log \log d$): et donc le résultat classique $\phi_I(d) \leq 2(2d)^{2^{n-1}}$ de G. Hermann (cf [H]) n'est pas améliorable dans le cas général. Par ailleurs, les résultats sur le Nullstellensatz effectif (cf [B] et [K]) impliquent la majoration

$$\phi_I(e, d) \leq d^n \quad \text{pour} \quad d \geq 3 \quad \text{et} \quad e \geq d^n.$$

De plus, on arrive à "bien écrire" sur un système de générateurs de degrés $\leq d$ de I toute puissance f^{d^n} d'un polynôme $f \in \sqrt{I}$. Et on peut conjecturer que la fonction $d \mapsto \phi_I(e, d)$ soit de l'ordre de d^n pour $e \geq e_0$ où e_0 ne dépend que de n.

Nous arrivons à montrer le résultat suivant:

Théorème 1

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}$ de degrés respectifs $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m \geq 3$ et supposons que l'idéal I engendré par $f_1, \ldots, f_m$ soit propre et de codimension $n - D$. Posons ensuite

$$N_D(d_1, \ldots, d_{n-D}) = \begin{cases} d_1 \cdots d_n + d_1 - 1, & \text{si } D = 0; \\ d_1(d_1 \cdots d_{n-1}) + d_1 - 1, & \text{si } D = 1; \\ P_D(d_1 \cdots d_{n-D}), & \text{si } D \geq 2, \end{cases}$$

où $P_D(t)$ est le polynôme de degré $3 \cdot 2^{D-2}$ définie par

$$\begin{cases} P_2(t) = t^3 + 2t - 1; \\ P_D(t) = P_{D-1}(t^2) + t \qquad (D \geq 3). \end{cases}$$

Notons encore e l'entier $1 + D[n - (D+1)/2]$. Alors, si $f \in (f_1, \dots, f_m)$, il existe des polynômes $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{R}$ tels que

$$f^e = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

avec

$$\deg(a_i f_i) \leq e \cdot \deg f + N_D(d_1, \dots, d_{n-D}).$$

<u>En particulier</u>, on a

$$\phi_I(e, d) \leq \begin{cases} d^n + d - 1, & \textit{si } D \leq 1; \\ d^{3(n-D)2^{D-2}} + O(d^{(n-D)2^{D-2}}), & \textit{si } D \geq 2. \end{cases}$$

pour

$$e \geq 1 + D(n - \frac{D+1}{2}) \qquad \text{et} \quad d \geq 3.$$

Nous utiliserons pour cette démonstration un théorème de J. Kollár autour du Nullstellensatz effectif (cf [K]), la théorie de la réduction des idéaux développée par D.G. Nortchott et D. Rees (cf [NR]) et enfin un théorème de J. Lipman et B. Tessier sur la clôture intégrale d'un idéal dans un anneau local régulier (cf [LT]).

Remarque - Les coefficients des polynômes a_i étant solutions d'un système d'équations linéaires défini sur le corps de coefficients des f_i et f, on peut supposer $\mathbf{K}$ algébriquement clos donc infini. De plus, on peut supposer $n \geq 2$, car le cas $n = 1$ est banal.

Dans le §6 nous démontrerons notre résultat principal par récurrence sur la dimension $D = n - k$ de I. Le premier pas est constitué par l'étude des idéaux zéro-dimensionels. Nous avons déjà démontré un test d'appartenance pour ces idéaux (cf [A] théorème 2); malheureusement, dans cette démonstration il y a quelques inexactitudes.

Pour une meilleure compréhension de l'ensemble de la théorie, nous donnerons dans le §4 une nouvelle démonstration de ce théorème. Le cas d'une courbe sera aussi traité à part dans le §5 où nous utiliserons un résultat de régularité pour la fonction de Hilbert d'un idéal homogène réduit de dimension 1 (voir [GPL]).

§2 - Notations et rappels

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, on note $\mathcal{R} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathcal{A} = \mathbf{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Si f est un polynôme dans $\mathcal{R}$ (ou dans $\mathcal{A}$) on désigne son degré total par $\deg f$; si L est un idéal homogène de $\mathcal{A}$, on note $\deg L$ son degré (au sens de [ZS], p.236). Pour $f \in \mathcal{R}$ on appelle homogénéisé de f le polynôme

$$ {}^h f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^{\deg f} f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0); $$

on définit l'homogénéisé d'un idéal I de $\mathcal{R}$ comme l'idéal ${}^h I \subset \mathcal{A}$ engendré par les polynômes ${}^h f$ lorsque f parcourt I.

Pour un idéal L contenu dans un anneau R, on note $\overline{L}$ la fermeture intégrale de L dans R, i.e. l'ensemble des éléments $f \in R$ vérifiant une relation de la forme

$$ f^t + a_1 f^{t-1} + \cdots + a_t = 0 $$

avec $a_i \in L^i$ pour $i = 1, \ldots, t$. On sait que $\overline{L}$ est un idéal de R et que $L \subset \overline{L}$. Si l'anneau R est "pseudo-rationnel" de dimension de Krull k, il résulte du paragraphe 4 de [LT] que $\overline{L}^k \subset L$.

Si I est un idéal contenu dans un anneau local (R, M) de corps résiduel $\mathbf{k}$, on sait (cf [NR] §3 théorème 1, p.148) que, pour s assez grand, $\dim_{\mathbf{k}} I^s/MI^s$ est un polynôme en s de degré δ: on appelle "analytic spread" et on note $l(I)$ l'entier $\delta + 1$. On connaît l'encadrement suivant:

$$ \mathrm{ht}(I) \leq l(I) \leq \dim_{\mathbf{k}} I/IM $$

(loc. cit. §4 lemme 4, p.151) et on sait que $l(I)$ éléments "suffisamment génériques" de I engendrent un idéal $J \subset I$ tel que $\overline{I} = \overline{J}$ (loc. cit. §7, corollaire de p.155).

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}$; nous dirons qu'une certaine propriété $P = P(g_1, \ldots, g_k)$ est satisfaite par des combinaisons génériques $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f} = \mathbf{K}f_1 + \cdots + \mathbf{K}f_m$ s'il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset \mathbf{K}^{mk}$ tel que pour tout $(\lambda_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}} \in U$ la propriété P soit satisfaite par les polynômes $g_i = \lambda_{i,1} f_1 + \cdots + \lambda_{i,m} f_m$ $(i = 1, \ldots, k)$. On dira aussi dans ce cas que P est une condition ouverte.

Pour la preuve du théorème 1, nous utilisons le résultat central de [K] que nous énonçons sous la forme raffinée suivante (voir [Ph], lemme 2 et théorème 2):

Théorème K

Soit $g_1, \ldots, g_k$ $(k \leq n)$ une suite régulière dans $\mathcal{R}$ avec $\deg \mathsf{c}_i \leq d_i$, $d_i \geq 2$, et L l'idéal engendré par $g_1, \ldots, g_k$. Soit χ le nombre de d_i $(1 \leq i \leq k)$ égaux à 2. Alors il existe un entier γ avec

$$\gamma \leq (3/2)^{\chi} \cdot d_1 \cdots d_k - \deg {}^{h}L$$

tel que l'idéal $(x_0^{\gamma})\ {}^{h}L$ est contenu dans l'idéal engendré par ${}^{h}g_1, \ldots, {}^{h}g_k$.

§3 - Résultats auxiliaires

Nous avons besoin de la proposition suivante:

Proposition 1

Soit $I \subset \mathcal{R}$ un idéal de codimension k engendré par des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ de degrés respectifs $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$. Pour $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f}$, écrivons

$$(g_1, \ldots, g_k) = I^* \cap J$$

où I^* est l'intersection de toutes les composantes primaires de $(g_1, \ldots, g_k)$ contenant I et J est l'intersection des autres. Alors on peut choisir $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f}$ de telle sorte que les assertions suivantes soient satisfaites:

a) *$g_1, \ldots, g_k$ est une suite régulière;*

b) *J est réduit (i.e. $\sqrt{J} = J$);*

c) *pour tout $\wp \in \operatorname{Ass}(\mathcal{R}/I^*)$ on a $I^*\mathcal{R}_\wp \subset I\mathcal{R}_\wp \subset \overline{I^*\mathcal{R}_\wp}$;*

d) $\deg g_i \leq d_i$ *pour* $i = 1, \ldots, k$.

Démonstration

Montrons que les conditions a, b et c, sont ouverts.

a) voir les lemmes 1 et 2 pp 438-439 de [MW].

b) A l'aide d'un théorème de Bertini (voir pour exemple [J] corollaire 6.7 avec $X = \operatorname{Spec} S_i^{-1}\mathcal{R}$ et $f\colon X \mapsto \mathrm{Aff}_K^{m-1}$ définie par $f = (f_1 f_i^{-1}, \ldots, f_{i-1} f_i^{-1}, f_{i+1} f_i^{-1}, f_m f_i^{-1})$), on montre sans difficulté que $S_i^{-1}(g_1, \ldots, g_k) \subset S_i^{-1}\mathcal{R}$ est réduit pour $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f}$ suffisamment génériques. Soit J l'intersection de toutes les composantes primaires de $(g_1, \ldots, g_k)$ ne contenant pas I et montrons que J est réduit. Si $g \in \sqrt{J}$ alors

$$\frac{g}{1} \in S_i^{-1}\sqrt{J} = S_i^{-1}\sqrt{(g_1, \ldots, g_k)} = S_i^{-1}(g_1, \ldots, g_k), \qquad i = 1, \ldots, m;$$

on en déduit qu'il existe un entier l_i tel que $g \cdot f_i^{l_i} \in (g_1, \ldots, g_k) \subset J$. Pour tout premier $\wp$ associé à J, il existe un indice i tel que $f_i \notin \wp$, et donc on déduit de la dernier inclusion que $g \in J$.

c) Etant l'idéal I^* génériquement pur de codimension k (cf a), il suffit de montrer que la condition

$$\exists g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f} \qquad \text{tels que} \qquad (g_1, \ldots, g_k)\mathcal{R}_\wp \subset I\mathcal{R}_\wp \subset \overline{(g_1, \ldots, g_k)\mathcal{R}_\wp}$$

est ouverte pour tout premier $\wp \in \mathrm{Ass}(\mathcal{R}/I)$ de codimension k. Tout d'abord, si $\wp$ est un idéal premier associé à I de codimension k, l'idéal $I\mathcal{R}_\wp$ est $\wp\mathcal{R}_\wp$-primaire, donc ([NR], §6 théorème 1, p.154) on a $l(I\mathcal{R}_\wp) = ht(I\mathcal{R}_\wp) = k$. On déduit alors du théorème 1 du §5 du même texte que l'idéal engendré par k combinaisons génériques $g_1, \ldots, g_k \in \mathbf{W_f}$ est une réduction de I dans $\mathcal{R}_\wp$. Le corollaire de p.155 (loc. cit.) entraîne alors $(g_1, \ldots, g_k)\mathcal{R}_\wp \subset I\mathcal{R}_\wp \subset \overline{(g_1, \ldots, g_k)\mathcal{R}_\wp}$, ce qui montre c.

Enfin, quitte à remplaçer g_i ($i \geq 2$) par une combinaison linéaire de $g_1, \ldots, g_{i-1}$, on peut supposer que g_i est une combinaison linéaire de $f_i, \ldots, f_m$ pour $i = 1, \ldots, k$; donc $\deg g_i \leq d_i$. La proposition est prouvée.

On utilisera aussi le lemme suivant:

Lemme 1

Soient $L, \wp \subset \mathcal{A}$ respectivement un idéal homogène pur de codimension $k \leq n$ et un idéal homogène premier de codimension $\leq n$ tels que $L \not\subset \wp$. Alors, il existe un polynôme homogène ψ de degré $\leq \deg L$ dans l'ensemble $L \backslash \wp$.

Démonstration

Soit V la variété projective définie par L. C'est bien connue que V peut être définie par des polynômes homogènes de degré $\leq \deg L$ (voir pour exemple [F] proposition 2.1). Et donc, si L est premier, on peut trouver $\psi \in L \backslash \wp$ avec $\deg \psi \leq \deg L$. Enfin, si L n'est pas premier, soit $L = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ une décomposition primaire normal de L et notons $\wp_i$ le radical de Q_i et l_i sa longueur. En utilisant la premier partie de la démonstration, on trouve des polynômes $\psi_i \in \wp_i \backslash \wp$ de degrés $\deg \psi_i \leq \deg \wp_i$; donc

$$\psi = \prod_{i=1}^{t} \psi_i^{l_i} \in L \backslash \wp \qquad \text{et} \quad \deg \psi = \sum_{i=1}^{t} l_i \cdot \deg \psi_i \leq \sum_{i=1}^{t} l_i \cdot \deg \wp_i = \deg L.$$

§4 - Le cas discret

Lemme 2

Soit $L \subset \mathcal{A}$ un idéal homogène pur de dimension zéro. Alors

$$\dim [\mathcal{A}/L]_\nu = \deg L$$

pour tout entier $\nu \geq \deg L - 1$.

Démonstration (voir aussi [Ph] lemme 3)

L'idéal L étant pur de dimension zéro, il existe une forme linéaire $l \in \mathcal{A}$ non diviseur de zéro dans $\mathcal{A}/L$. On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow [\mathcal{A}/L]_{\nu-1} \xrightarrow{\times\, l} [\mathcal{A}/L]_\nu \longrightarrow [\mathcal{A}/(L, l)]_\nu \longrightarrow 0$$

que

$$\dim [\mathcal{A}/L]_\nu > \dim [\mathcal{A}/L]_{\nu-1}$$

si et seulement si $\dim [\mathcal{A}/(L,l)]_\nu \neq 0$. Mais
$\dim [\mathcal{A}/(L,l)]_\nu = 0$ implique $\dim [\mathcal{A}/(L,l)]_{\nu+1} = 0$ et donc la suite $\{\dim [\mathcal{A}/L]_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante avant de devenir stationnaire égale à $\deg L$. En utilisant $\dim [\mathcal{A}/L]_1 \geq 1$, on en déduit:

$$\dim [\mathcal{A}/L]_\nu = \deg L$$

pour $\nu \geq \deg L - 1$.

Lemme 3

Soit $J \subset \mathcal{R}$ un idéal définissant une variété discrète et soit $\phi \in \mathcal{R}$ un polynôme de degré total d. Alors, on a $\deg\ {}^h(J,\phi) \leq \deg\ {}^hJ$ *et*

$$({}^hJ,\ {}^h\phi)_\nu = {}^h(J,\phi)_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg\ {}^hJ + d - 1.$$

Démonstration

Si $J = \mathcal{R}$ on n'a rien à prouver. Supposons J de dimension 0 et notons $L = {}^hJ$, $\psi = {}^h\phi$ et $L_1 = {}^h(J,\phi)$. Alors

$$(L,\psi) = L_1 \cap Q \tag{1}$$

où Q est un idéal homogène $(x_0,\ldots,x_n)$-primaire ([ZS] corollaire de p.184). Donc il existe $\nu_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\dim [L_1/(L,\psi)]_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad \nu \geq \nu_0;$$

notre but est de majorer ν_0. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow [\mathcal{A}/L:\psi]_{\nu-d} \xrightarrow{\times\ \psi} [\mathcal{A}/L]_\nu \longrightarrow [\mathcal{A}/(L,\psi)]_\nu \longrightarrow 0$$

on déduit

$$\dim\,[\mathcal{A}/(L,\psi)]_\nu = \dim\,[\mathcal{A}/L]_\nu - \dim\,[\mathcal{A}/L:\psi]_{\nu-d}. \tag{2}$$

Les idéaux L et $L:\psi$ sont purs de dimension zéro, car Ass $(\mathcal{A}/(L:\psi)) \subset$Ass $(\mathcal{A}/L)$, et $\deg\,(L:\psi) \leq \deg L$. Au moyen de ces assertions et de la ligne (2), on déduit du lemme 2:

$$\dim\,[\mathcal{A}/(L,\psi)]_\nu = \deg\,(L,\psi) \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg L + d - 1. \tag{3}$$

De plus on déduit des lignes (1) et (2) la relation suivante:

$$\deg L_1 = \deg\,(L,\psi) \leq \deg L.$$

Donc le lemme 1 donne encore

$$\dim\,[\mathcal{A}/L_1]_\nu = \deg\,(L,\psi) \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg L - 1.$$

En utilisant la ligne ci-dessus, la (3) et la suite exacte

$$0 \longrightarrow [L_1/(L,\psi)]_\nu \longrightarrow [\mathcal{A}/(L,\psi)]_\nu \longrightarrow [\mathcal{A}/L_1]_\nu \longrightarrow 0,$$

nous trouvons la relation

$$\dim\,[L_1/(L,\psi)]_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg L + d - 1$$

que nous voulions démontrer.

Lemme 4

Soit $J \subset \mathcal{R}$ un idéal définissant une variété discrète et soient $f_1,\ldots,f_m \in \mathcal{R}$ des polynômes de degrés majorés par d. Alors, on a $\deg\ {}^h(J,f_1,\ldots,f_m) \leq \deg\ {}^hJ$ *et*

$$({}^hJ,\ {}^hf_1,\ldots,\ {}^hf_m)_\nu = {}^h(J,f_1,\ldots,f_m)_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg\ {}^hJ + d - 1.$$

Démonstration

Pour $m = 1$ on applique le lemme 3. Supposons l'énoncé vrai pour $m-1$: l'idéal $\tilde{J} = (J, f_1, \ldots, f_{m-1})$ est de dimension zéro, deg ${}^h\tilde{J} \leq$ deg ${}^hJ$ et

$$({}^h\tilde{J})_\nu = {}^h(J, f_1, \ldots, f_{m-1})_\nu$$

pour $\nu \geq \deg\ {}^hJ + d - 1$. Le lemme 3 donne

$$({}^h\tilde{J},\ {}^hf_m)_\nu = {}^h(\tilde{J}, f_m)_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg\ {}^hJ + d - 1$$

et

$$\deg\ {}^h(\tilde{J}, f_m) \leq \deg\ {}^hJ.$$

Donc

$$({}^hJ,\ {}^hf_1, \ldots,\ {}^hf_m)_\nu = {}^h(J, f_1, \ldots, f_m)_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \geq \deg\ {}^hJ + d - 1.$$

Théorème 2

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m$ avec $d_1 \leq d_m \leq d_{m-1} \ldots \leq$ $\leq d_2$. On suppose que la variété $\mathbf{V}$ définie par $f_1, \ldots, f_m$ est discrète. Alors, si $f \in (f_1, \ldots, f_m)$, il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R}$ tels que

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

et

$$\deg(a_i f_i) \leq \max(\deg f, d_2 - 1) + (3/2)^\chi \cdot d_1 \cdots d_\mu, \qquad i = 1, \ldots, m$$

où $\mu = \min(m, n)$ et χ est le nombre de d_i $(1 \leq i \leq \mu)$ égaux à 2.
<u>En particulier</u>, pour $d \geq 3$, on a

$$\phi_I(d) \leq d^n + d - 1$$

pour tous les idéaux de codimension n.

Démonstration

En utilisant le lemme 2 de [MW], on peut trouver des polynômes $g_2, \ldots, g_n$ dans I, avec g_i combinaison linéaire suffisamment générale de $f_i, \ldots, f_m$, tels que $f_1, g_2 \ldots, g_n$ soit une suite régulière; on a $\deg g_i \leq d_i$ $(2 \leq i \leq n)$. Soit J l'idéal engendré par $f_1, g_2, \ldots, g_n$; d'après le théorème K, il existe un entier γ_0 satisfaisant

$$\gamma_0 \leq (3/2)^{\chi} \cdot (d_1 \cdots d_n - \deg {}^hJ)$$

tel que l'idéal $(x_0^{\gamma_0})\ {}^hJ$ est contenu dans l'idéal engendré par ${}^hf_1,\ {}^hg_2, \ldots,\ {}^hg_n$. En utilisant le lemme 4 on trouve:

$$x_0^{\max(0, \deg\ {}^hJ + d_2 - 1 - \deg f)}\ {}^hf \in\ (\ {}^hJ,\ {}^hf_2, \ldots,\ {}^hf_n).$$

Posons

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 + \max(0, \deg\ {}^hJ + d_2 - 1 - \deg f) + \deg f \\ &\leq (3/2)^{\chi} \cdot d_1 \cdots d_n + \max(\deg f, (1 - (3/2)^{\chi}) \cdot \deg\ {}^hJ + d_2 - 1) \\ &\leq (3/2)^{\chi} \cdot d_1 \cdots d_n + \max(\deg f, d_2 - 1).\end{aligned}$$

Le polynôme $x_0^{\gamma - \deg f} \cdot {}^hf$ est contenu dans l'idéal homogène engendré par ${}^hf_1, \ldots, {}^hf_m$, ${}^hg_2, \ldots, {}^hg_n$, d'où l'existence de polynômes homogènes $A_1, \ldots, A_m, B_2, \ldots, B_n$ tels que

$$x_0^{\gamma - \deg f} \cdot\ {}^hf = A_1 \cdot\ {}^hf_1 + \cdots + A_m \cdot\ {}^hf_m + B_2 \cdot\ {}^hg_2 + \cdots + B_n \cdot\ {}^hg_n$$

avec les polynômes $A_i \cdot\ {}^hf_i$ et $B_j \cdot\ {}^hg_j$ de degrés égaux à γ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 2, \ldots, n$. On en déduit le théorème en posant $x_0 = 1$ et en exprimant $g_2, \ldots, g_n$ comme combinaisons linéaires des $f_1, \ldots, f_m$.

§5 - Le cas d'une courbe

Lemme 5

Soit $J \subset \mathcal{R}$ un idéal réduit de codimension $n-1$ et posons $\delta = \deg\ {}^hJ$. Alors, pour tout polynôme g de degré $d \geq 1$ non diviseur de zéro sur $\mathcal{R}/J$, on a

$$x_0^{\gamma_1}\ {}^h(J, g)_\nu \subset (\ {}^hJ,\ {}^hg) \quad \text{pour} \quad \nu \geq \nu_1$$

avec $\gamma_1 = d\delta - \deg\ {}^h(J,g)$ *et* $\nu_1 = \deg\ {}^h(J,g) + 1$.

Démonstration

Posons $I_0 = {}^hJ$ et $G = {}^hg$. L'idéal I_0 étant réduit de codimension $n-1$ et degré δ, la remarque 1, p.497, de [GPL] entraîne que I_0 est δ-régulier (voir la définition de p.494, loc. cit.). En utilisant le théorème 1.2 de [G], p.62, (I_0 est engendré en degré $\geq \delta$ par ses éléments homogènes de degré δ: cf [GPL] p.494), on en déduit que la fonction de Hilbert $H_{I_0}(\nu)$ coïncide avec le polynôme de Hilbert pour $\nu \geq \delta$. Donc

$$H_{(I_0,G)}(\nu) = H_{I_0}(\nu) - H_{I_0}(\nu - d) = \deg(I_0, G) = d\delta \quad \text{pour} \quad \nu \geq d + \delta. \tag{4}$$

En suivant les notations dans [Ph] p.5, écrivons

$$(I_0, G) = I \cap K \cap L$$

où $I = {}^h(J,g)$ est l'intersection de toutes les composantes primaires isolées de (I_0, G) ne contenant pas x_0, K est l'intersection des composantes isolées contenant x_0 et L est l'intersection des composantes immergées. Notons que L est $(x_0, \ldots, x_n)$-primaire. On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \cap K/(I_0, G) \longrightarrow \mathcal{A}/(I_0, G) \longrightarrow \mathcal{A}/I \cap K \longrightarrow 0$$

que

$$\dim \Big[I \cap K/(I_0, G) \Big]_\nu = H_{(I_0,G)}(\nu) - H_{I \cap K}(\nu).$$

D'après (4) et le lemme 2 (avec L remplaçé par $I \cap K$) on en déduit:

$$\dim \Big[I \cap K/(I_0, G) \Big]_\nu = \deg(I_0, G) - \deg I \cap K = 0 \quad \text{pour} \quad \nu \geq \nu_*$$

avec $\nu_* = \max(d\delta - 1, d + \delta) \leq d\delta + 1$. Par ailleurs, on déduit du théorème de Bezout que $x_0^{d\delta - \deg I} \in K$ et donc

$$x_0^{d\delta - \deg I} I_\nu \subset (I \cap K)_{\nu + d\delta - \deg I} \subset (I_0, G)$$

pour $\nu \geq \deg I + 1$.

Théorème 3

Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}$ de degrés respectifs $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_m \geq 3$. On suppose que l'idéal engendré par les polynômes $f_1, \ldots, f_m$ est de dimension 1. Alors, si $f \in (f_1, \ldots, f_m)$, il existe des polynômes $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R}$ tels que

$$f^n = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

et

$$\deg(a_i f_i) \leq (n-1)\deg f + \max(\deg f, d_1 - 1) + d_1(d_1 \cdots d_{n-1}).$$

Démonstration

Soient $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathbf{W_f}$ satisfaisant les conditions de la proposition 1 et notons I^* et J les idéaux y définies. Soit $f_0 \in \mathbf{W_f}$ non diviseur de zéro sur $\mathcal{R}/J$ et posons $\delta = \deg\ {}^hJ \leq d_1 \cdots d_{n-1}$. On déduit du lemme 5 que

$$x_0^{\gamma_1}(\ {}^h(J, f_0),\ {}^hf_1, \ldots,\ {}^hf_m)_\nu \subset (\ {}^hJ,\ {}^hf_0,\ {}^hf_1, \ldots,\ {}^hf_m)$$

pour $\gamma_1 = d_1\delta - \deg\ {}^h(J, f_0)$ et $\nu \geq \nu_1 = \deg\ {}^h(J, f_0)$. Le lemme 4 donne

$$(\ {}^h(J, f_0),\ {}^hf_1, \ldots,\ {}^hf_m)_\nu =\ {}^h(J, f_1, \ldots, f_m)_\nu$$

pour $\nu \geq \nu_2 = \deg\ {}^h(J, f_0) + d_1 - 1$. Donc

$$x_0^{\gamma_1}\ {}^h(J, f_1, \ldots, f_m)_\nu \subset (\ {}^hJ,\ {}^hf_0,\ {}^hf_1, \ldots,\ {}^hf_m)$$

pour $\nu \geq \max(\nu_1, \nu_2) = \nu_2$. En particulier

$$x_0^{\gamma}\ {}^hf \in (\ {}^hJ,\ {}^hf_0,\ {}^hf_2, \ldots,\ {}^hf_m)$$

pour $\gamma = \gamma_1 + \max(\nu_2 - \deg f, 0) \leq d_1\delta + \max(d_1 - 1 - \deg f, 0)$, d'où l'existence de polynômes $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{R}$ et $\phi \in J$ tels que

$$f = \phi + b_1 f_1 + \cdots + b_m f_m$$

$$\deg\phi, \deg(b_i f_i) \leq \max(\deg f, d_1 - 1) + d_1\delta. \tag{5}$$

Par ailleurs, l'assertion c de la proposition 1 et le théorème 2.1 de [LT] montrent que $f^{n-1} \in I^*\mathcal{R}_\wp$ pour tout premier $\wp \in \mathrm{Ass}(A/I^*)$, et donc, en utilisant le fait que ${}^h(I^* \cap J) = {}^hI^* \cap {}^hJ$ (cf [ZS] théorème 17 p 180),

$${}^hf^{n-1}\,{}^h\phi \in {}^h(g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

On en déduit, à l'aide du théorème K, l'existence de polynômes $c_1, \ldots, c_{n-1}$ tels que

$$f^{n-1}\phi = c_1 g_1 + \cdots + c_{n-1} g_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \deg(c_i g_i) &\leq (n-1)\deg f + \deg\phi + d_1 \cdots d_{n-1} - \deg\,{}^h(I^* \cap J) \\ &\leq (n-1)\deg f + \max(\deg f, d_1 - 1) + (d_1 - 1)\delta + d_1 \cdots d_{n-1} \\ &\leq (n-1)\deg f + \max(\deg f, d_1 - 1) + d_1(d_1 \cdots d_{n-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant (5) et (6) on trouve

$$\begin{aligned} f^n &= f^{n-1}\phi + (f^{n-1}b_1)f_1 + \cdots (f^{n-1}b_m)f_m \\ &= c_1 g_1 + \cdots c_{n-1}g_{n-1} + (f^{n-1}b_1)f_1 + \cdots (f^{n-1}b_m)f_m \\ &= a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \deg(a_i f_i) &= \max(\deg(c_j g_j), \deg(f^{n-1}b_i f_i)) \\ &\leq (n-1)\deg f + \max(\deg f, d_1 - 1) + d_1(d_1 \cdots d_{n-1}), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

§6 - Démonstration du théorème 1

Soit D la dimension de la variété $\mathbf{V}$ définie par $f_1, \ldots, f_m$ et posons $k = n - D$. Si $D = 0$ ou $D = 1$, on utilise les théorèmes 2 et 3 respectivement. Supposons donc $D \geq 2$ et le théorème vrai en $D - 1$. En utilisant la proposition 1 on trouve une suite régulière $g_1, \ldots, g_k$ dans $\mathbf{W_f}$ avec $\deg g_i \leq d_i$, telles que les assertions $\mathtt{b}, \mathtt{c}$ de cette proposition soient satisfaites. Pour tout idéal premier $\wp$ de codimension k associé à I, on a $J \not\subset \wp$, donc on peut trouver, en utilisant le lemme 1, un polynôme $\phi \in J$ de degré majoré par $d_1 \cdots d_{n-D}$, tel que la variété $\mathbf{V}'$ définie par $\phi, f_1, \ldots, f_m$ soit de dimension $D - 1$. Par l'hypothèse inductive, avec

$$f'_i = \begin{cases} \phi, & \text{si } i = 1; \\ f_{i-1}, & \text{si } i = 2, \ldots, m+1, \end{cases} \qquad d'_i = \begin{cases} d_1 \cdots d_{n-D}, & \text{si } i = 1; \\ d_{i-1}, & \text{si } i = 2, \ldots, m+1, \end{cases}$$

pour tout $f \in (f_1, \ldots, f_m)$ on a $f^e = a_1 f_1 + \cdots a_m f_m + a\phi$ où $e = 1 + (D-1)(n - D/2)$ et

$$\deg(a_i f_i), \deg(a\phi) \leq e \cdot \deg f + N_{D-1}(d_1 \cdots d_{n-D}, d_1, \ldots, d_{n_D}).$$

Par ailleurs, le théorème de [LT] déjà cité montre que $f^{n-D} \in I^* \mathcal{R}_\wp$ pour tout $\wp \in \mathrm{Ass}(\mathcal{R}/I^*)$ et donc

$$^h f^{n-D}\ ^h\phi \in\ ^h(g_1, \ldots, g_k).$$

Maintenant, on déduit du théorème K l'existence de polynômes $b_1, \ldots, b_k$ tels que

$$f^{n-D}\phi = b_1 g_1 + \cdots b_k g_k$$

avec

$$\deg(b_j g_j) \leq (n-D)\deg f + \deg\phi + d_1 \cdots d_{n-D}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f^{e'} &= (a_1 f^{n-D}) f_1 + \cdots + (a_m f^{n-D}) f_m + (ab_1) g_1 + \cdots (ab_k) g_k \\ &= a'_1 f_1 + \cdots + a'_m f_m \end{aligned}$$

avec

$$e' = e + n - D = 1 + (D-1)(n - \frac{D}{2}) + n - D = 1 + D(n - \frac{D+1}{2})$$

et

$$\deg(a_i' f_i) \leq (e+n-D)\deg f + N_{D-1}(d_1 \cdots d_{n-D}, d_1, \ldots, d_{n-D}) + d_1 \cdots d_{n-D}$$
$$= e' \cdot \deg f + N_D(d_1, \ldots d_{n-D}).$$

REFERENCES

[A] F. AMOROSO, "Tests d'appartenance d'après un théorème de J. Kollár". C.R. Acad. Sc. Paris, t.309, Série I, p.691-694, (1989);

[B] W.D. BROWNAWELL, "Bounds for the degrees in the Nullstellensatz", Annals of Mathematics 126, 577-591 (1987);

[BY] C.A. BERENSTEIN et A. YGER, "Bounds for the degrees in the division problem", Mich. Math. J. 37, No.1, 25-43 (1990);

[F] C. FALTINGS, "Diophantine approximation on abelian varieties", to appear in Annals of Math. 133, No.2 (1991);

[G] G. GOTZMANN, "Eine bedingung für die flacheit und da Hilbertpolynom eines graduierten ringes", Math. Z. 158, 61-70 (1978);

[GPL] L. GRUSON, R. LAZARSFELD et C. PESKINE, "On a theorem of Castelnuovo and the equations defining space curves", Inv. Math. 72, 491-506 (1983);

[H] G. HERMANN, "Die frage der endliche vielen schritte in der theorie der polynomideale", Math. Ann. 95, 736-788 (1926);

[J] J. -P. JOUANOLOU, "Théorèmes de Bertini et applications", Progress in Math., Birkhaüser, Boston, 1983;

[K] J. KOLLÁR, "Sharp effective Nullstellensatz", Journal of the American Math. Soc. 1, No.4, 963-975 (1988);

[LT] J. LIPMAN et B. TEISSIER, "Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals", Michigan Math. J., 28, 97-116 (1981);

[MM] E. MAYR et A. MEYER, "The complexity of the word problem for commutative semigroup and polynomial ideals", Advances in Math. 46, 305-329 (1982);

[MW] D.W. MASSER et G.WÜSTHOLZ, "Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions", Invent.Math. 72, 407-464 (1983);

[NR] D.G. NORTHCOTT et D. REES, "Reduction of ideals in local rings", Proc. Camb. Phil. Soc., 145-158 (1954);

[Ph] P. PHILIPPON, "Théorème des zéros effectif, d'après J.Kollár", dans "Problèmes Diophantiens 1987/88", Publications de l'Université de Paris VI No.88 (1988)

[ZS] O. ZARISKI et P. SAMUEL, "Commutative Algebra", Vol.2, Van Nostrand, Princeton 1960 = Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1986.