NUMERALI E ALGORITMI CON LE BACCHETTE DELL'ANTICA CINA: UN'ESPERIENZA DI TRASPOSIZIONE CULTURALE

Raffaele Casi[1 2], Chiara Pizzarelli[3]
[1] Università di Torino; [2] I.C. Andezeno; [2] I.C. Alberti-Salgari
raffaele.casi@unito.it

Abstract
Si intende analizzare sotto la lente teorica della trasposizione culturale (Bartolini, Xuhua, Ramploud, 2013; Mellone, Ramploud, 2015; Mellone et al., 2018) un percorso didattico sperimentato in una classe prima di Scuola Secondaria di primo grado, incentrato sulla scoperta dei numerali dell'antica Cina e degli algoritmi dell'addizione e sottrazione con le bacchette da calcolo cinesi. Il percorso – oggetto del workshop che ha visto i partecipanti lavorare attivamente sulle schede studente – mira a sviluppare processi di scoperta e *problem solving* in un contesto laboratoriale. L'obiettivo matematico è di aumentare la consapevolezza sul nostro sistema di numerazione posizionale e decimale, e sull'addizione e sottrazione, nello specifico sui meccanismi del riporto e del prestito.
L'ampio uso di artefatti (e.g. immagini tratte da testi antichi, bacchette cinesi e supporti audio-video) consente di analizzare l'esperienza anche sotto la lente teorica dell'analisi semiotica (Rabardel, 1999; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005): si mostreranno così le potenzialità di un uso formativo di antichi strumenti e tecniche di calcolo, provenienti da un contesto culturale, storico e geografico differente.

Parole-chiave
Trasposizione culturale; Storia della matematica cinese; Artefatti; Algoritmi; Fangcheng.

QUADRO TEORICO DI RIFERIMENTO

In una scuola multietnica e alla continua ricerca di strumenti inclusivi, l'approccio interculturale si può rivelare assai produttivo didatticamente. L'ispirazione per questo percorso storico, che gli autori hanno analizzato in un precedente lavoro (Casi, Pizzarelli, 2020), viene da una ricerca di Bagni (2006 e 2009, pp. 157-162), che ha svolto un'analisi semiotica dell'artefatto che le bacchette da calcolo cinesi offrono. L'intento è di ampliare tale ricerca, analizzando la sperimentazione sotto la lente teorica della trasposizione culturale (Bartolini, Xuhua, Ramploud, 2013; Mellone, Ramploud, 2015; Mellone et al., 2018). Si tratta di un costrutto teorico che definisce una "condizione di decentramento dalla pratica didattica del proprio contesto culturale, passando attraverso il contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali" (Mellone, Ramploud, Di Paola e Martignone, 2018).
L'obiettivo nel nostro caso specifico è di affrontare con gli studenti una riflessione sul sistema di rappresentazione dei numerali dell'antica Cina, al fine di aumentare la consapevolezza sul sistema di numerazione posizionale decimale indo-arabico. Allo stesso modo si intende mostrare gli algoritmi dell'addizione e della sottrazione nell'ottica di un confronto con le operazioni usuali, al fine di vederne il funzionamento in un'ottica più matura e consapevole. Tale lente teorica consente *in primis* un avvicinamento tra due culture, ma anche una vera e propria interazione, capace di mettere in risalto differenze e potenzialità.
Nel nostro percorso abbiamo scelto di applicare l'approccio teorico della trasposizione culturale ad un contesto culturale diverso dal nostro sia geograficamente, sia storicamente. L'ormai ampia letteratura attuale ha rilevato l'importanza dell'utilizzo della Storia delle matematiche nell'insegnamento (Furinghetti, F. & Radford, L. 2002; Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. 2000; Radford, L. 2003).
Ci sembra che l'unione di questi due importanti quadri teorici – la trasposizione culturale e la storia delle matematiche in classe – possa essere didatticamente efficace, non solamente per veicolare concetti

matematici in sé, ma anche e soprattutto in ottica di un insegnamento di cittadinanza attiva nella cultura e società attuale.
All'interno del percorso alcuni spunti mirano a riflettere sul fatto che non esiste un'unica storia della matematica, ovvero quella eurocentrica. La nostra cultura occidentale pervade la didattica della matematica: gli autori che usualmente si citano in classe sono tutti occidentali – Pitagora, Eratostene, Fibonacci, Tartaglia – con un minimo spostamento verso l'oriente con Al-Khwaritzmi. Una visione più globale si rivela necessaria per operare un importante cambiamento di prospettiva, non solo nella visione che un insegnante vuole dare della matematica, ma più in generale sulla cultura.

LA MATEMATICA CINESE

Viene da chiedersi allora perché abbiamo scelto proprio la matematica cinese. Le ragioni risiedono in primo luogo sul fatto che la scrittura dei numerali cinesi era piuttosto intuitiva ed esplicita, in grado di mettere bene in evidenza il sistema decimale e posizionale.
Per rappresentare i numeri si utilizzavano bacchette da calcolo di bambù o avorio e una tavola di calcolo strutturata come una griglia. Probabilmente è proprio l'utilizzo di quest'ultima che ha influenzato la scrittura posizionale, come si può vedere in Figura 1.

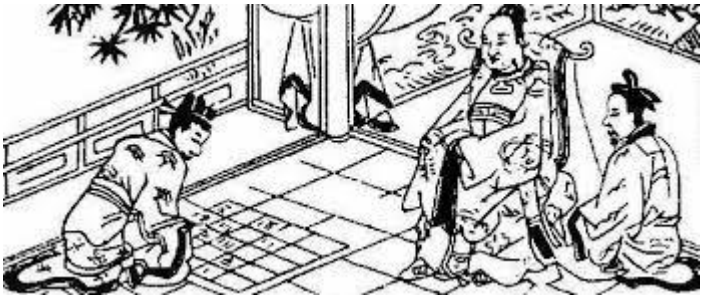

Figura 1. Utilizzo della tavola da calcolo nell'antica Cina.1

I numeri fino al 5, così come le dita della mano, si rappresentano affiancando la corrispondente quantità di bacchette verticali; dal 6 al 9 ci si vale di una bacchetta orizzontale per indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante ne servono per completare il numero. Per le decine i simboli sono analoghi, ma la disposizione è orizzontale. Per gli ordini di grandezza successivi si continua ad alternare la disposizione verticale (*Tsung*) – valida quindi per unità, centinaia, decine di migliaia, etc. – con quella orizzontale (*Heng*) – per decine, migliaia, centinaia di migliaia, etc. Il sistema è a base 10 e posizionale, ovvero il valore della cifra dipende dalla sua posizione nel numero; posizione che è ben definita grazie alla tavola da calcolo che inquadra i numerali dentro a delle celle.

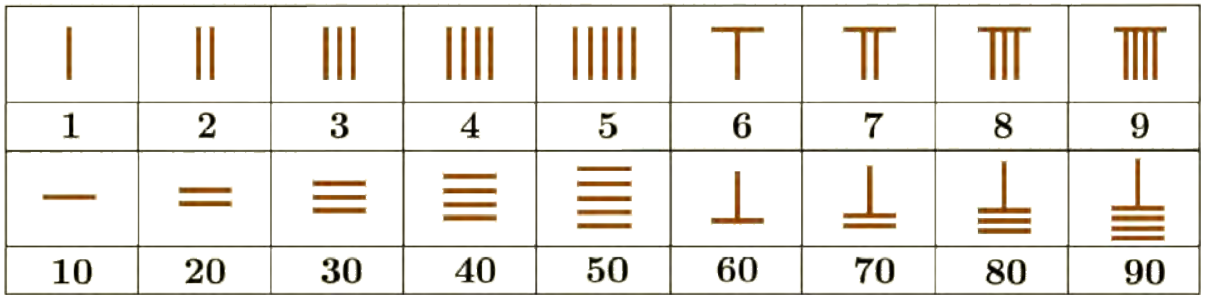

Figura 2. Rappresentazione dei numerali nell'antica Cina.

Per quanto riguarda il simbolo dello zero, almeno fino al VIII secolo d.C. non esistevano simboli, semplicemente sulla tavola si lasciava la cella vuota o, nello scritto, uno spazio (Figura 3). Successivamente è stato introdotto il simbolo di un pallino vuoto.

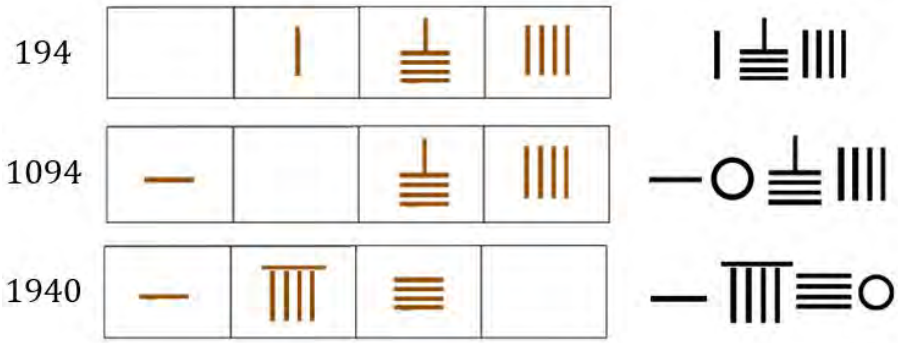

Figura 3. Rappresentazione di alcuni numeri: a sinistra in cifre indo-arabiche, al centro con bacchette sulla tavola da calcolo, a destra rappresentazione scritta cinese antica.

Il sistema di scrittura è di tipo *operatorio*: la forma di rappresentazione del numero conserva la somma dei simboli che lo compongono; ma è anche *immanente*: il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta. I numerali rappresentano concretamente il valore del numero, lo stesso accade per gli ideogrammi delle parole cinesi: ad esempio, la parola cavallo è una stilizzazione del disegno di un cavallo. Diversamente, la notazione occidentale si è sviluppata nei secoli seguendo processi di astrazione: i simboli non hanno nessun legame con il valore numerico che rappresentano.
Un altro fattore che ci ha indotti a scegliere proprio la matematica cinese è la disponibilità di fonti originali, che possono essere utilizzate in classe sia in lingua sia in traduzione, e che sono in grado di aumentare il coinvolgimento e la curiosità degli studenti stessi. I due testi di cui ci siamo valsi sono i *I Nove Capitoli sui procedimenti matematici* (I a.C.-d.C., anonimo), il più antico testo matematico cinese ad oggi noto, la cui influenza sulla matematica cinese è paragonabile a quella degli *Elementi* di Euclide in Occidente; e il *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* (1303), che rappresenta il punto più alto raggiunto dall'algebra nell'antica Cina. Proprio da quest'ultimo testo abbiamo tratto l'immagine che dà l'avvio al nostro percorso didattico e al workshop qui proposto.

IL WORKSHOP

La situazione stimolo di partenza è la seguente: due storici occidentali hanno trovato un libro antico, ma – essendo in cinese – non sono riusciti a decifrarlo. Hanno solo capito che forse parla di matematica. Si è quindi chiesto ai partecipanti di aiutare i due storici a trovare ciò che c'è di matematico in questa immagine (Figura 4) e riscriverlo con i caratteri occidentali, argomentando.
Per questa fase dei lavori a gruppi ci siamo serviti delle potenzialità offerte dall'applicazione Google Jamboard, grazie alla quale i partecipanti hanno potuto interagire a piccoli gruppi per affrontare il compito assegnato.
Nella discussione successiva è emerso che il triangolo è proprio il triangolo dei coefficienti binomiali, da noi oggi attribuito a Tartaglia (1500) o Pascal (metà 1600), ma che si scopre così essere ben più antico. Nel *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* l'autore Zhu Shije la chiama la *Tavola dell'antico metodo per elevare all'ottava potenza*, già descritta intorno all'anno 1000, ma nota ancor prima. Ecco che appare evidente un primo cambiamento di prospettiva: è il triangolo di Tartaglia per noi, ma non per i cinesi.
Nella fase successiva del workshop si è proseguito nell'esplorazione del laboratorio proposto agli studenti, ai quali è stato chiesto di comprendere come funzionavano gli algoritmi di addizione e sottrazione nell'antica Cina. Il problema stimolo dato ai partecipanti è banale, ma è stato ugualmente apprezzato: abbiamo ricevuto due video di matematici cinesi che mostrano gli algoritmi, ma senza audio. Si chiede di interpretare i video per comprendere il funzionamento degli algoritmi (cfr. bit.ly/addizioni; bit.ly/sottrazioni).

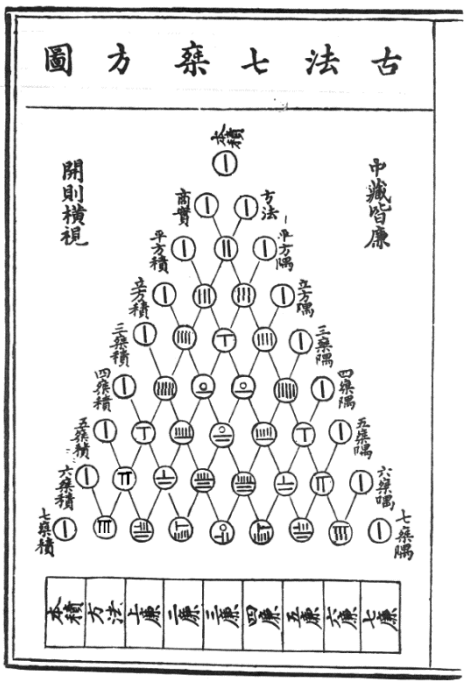

Figura 4. Attività 1: Tavola dell'antico metodo per elevare all'ottava potenza

Si scopre così che per eseguire l'addizione fra due numeri si rappresentano sulla tavola da calcolo gli addendi su due righe separate da una riga vuota. In tale riga si fanno slittare tutte le bacchette degli addendi colonna per colonna. Dopo opportuni aggiustamenti ed eventuali riporti, si legge la somma. Come possiamo vedere nell'esempio di Figura 5, le bacchette cinesi mostrano la presenza di una grandezza superiore a 9 nelle unità, dobbiamo quindi riportare fisicamente due volte cinque nell'ordine di grandezza superiore.

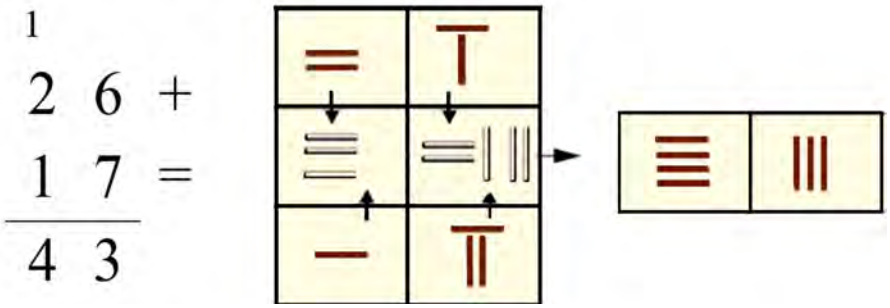

Figura 5. Confronto fra l'algoritmo dell'addizione con cifre indo-arabiche e numerali cinesi.

Dal confronto con "il nostro" usuale algoritmo di addizione in colonna, si vede che in quest'ultimo compare un 1 come riporto, e meccanicamente diciamo "6+7 è 13, scrivo 3 riporto 1". Non è quindi evidente che quell'1 riportato sia in realtà un 10. Ciò non accade con l'algoritmo cinese, dove si apprezza a colpo d'occhio la quantità superiore a 10 e si rende necessario spostare "fisicamente" due volte 5 nell'ordine di grandezza superiore.

Anche l'algoritmo della sottrazione si rivela particolarmente intuitivo. Se nell'addizione si mettono insieme le bacchette, nella sottrazione si tolgono, in una prospettiva più chiara secondo la quale all'operazione (addizionare o sottrarre) corrisponde l'azione (aggiungere o togliere). Si dispone il minuendo nella riga in alto della tavola e poi si rappresenta il sottraendo nella riga sottostante, prendendo le bacchette che servono direttamente dal minuendo. Il metodo è particolarmente efficiente in caso di differenze senza cambio, mentre in caso di cambio l'algoritmo porta a ragionare sui "valori che formano il cambio". Nell'esecuzione del "nostro" usuale algoritmo di sottrazione è piuttosto meccanico dire: "2-

7 non si può fare, prendo il prestito dal 3 che diventa 2 e il 2 diventa 12". Con le bacchette da calcolo invece è necessario spostare la decina nella casella adiacente, trasformandola in 5+5, in modo da avere sufficienti bacchette da cui prelevare il sottraendo. Si veda a tal proposito l'esempio fornito in Figura 6.

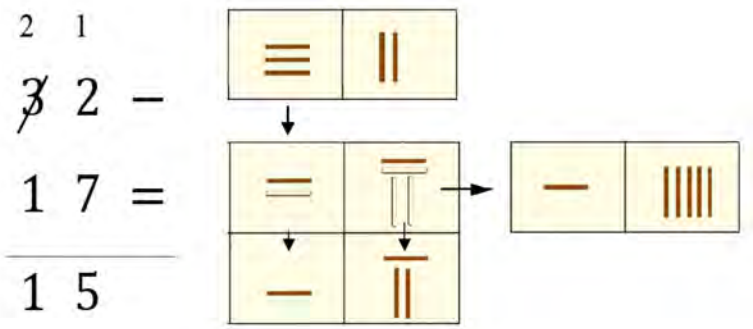

Figura 6. Confronto fra l'algoritmo della sottrazione con cifre indo-arabiche e numerali cinesi.

Il metodo del Fangcheng

Oltre alla riflessione sul senso dell'algoritmo della sottrazione, l'operazione risulta essere alla base del metodo del Fangcheng: l'approfondimento finale del nostro percorso. Si tratta di una procedura usata nell'antica Cina per risolvere sistemi di equazioni di 1° grado, basata su sottrazioni successive. Il metodo è descritto nel testo *I nove capitoli sui procedimenti matematici*, in cui sono proposti diversi altri problemi. Eccone qui un esempio:

> *5 casse uguali di grano aggiunte a 3 sacchi uguali di grano pesano 19 kg.*
> *3 casse di grano e 2 sacchi di grano pesano 12 kg.*
> *Quanti kg pesa 1 cassa e quanti kg pesa 1 sacco?*

Il problema è risolubile in modo empirico per tentativi già a livello di scuola primaria, e negli ordini di scuola successivi anche impostando un sistema di equazioni e applicando metodi algebrici. Il Fangcheng si può considerare come l'analogo del metodo di eliminazione oggi attribuito a Gauss: si basa su un'impostazione matriciale, in cui ogni colonna contiene i coefficienti numerici di una stessa incognita – sacchi e casse – e l'ultima colonna i termini noti. La differenza sta nel fatto che si tratta di un metodo pre-algebrico, ossia non fa un uso esplicito di incognite e sfrutta le potenzialità dell'artefatto delle bacchette e della tavola da calcolo.

Durante il workshop abbiamo spiegato come è stata condotta la sperimentazione in classe: è stato mostrato agli studenti il funzionamento del metodo tramite un video nel quale le procedure di soluzione del sistema di equazioni vengono messe in analogia con azioni fisicamente svolte con due bilance a due piatti. Il video proposto, di cui si possono vedere i passaggi salienti in Figura 7, si trova al seguente link: bit.ly/fangcheng.

Le due bilance a piatti in equilibrio aiutano a capire il senso del metodo: per mantenere l'equilibrio occorre togliere la stessa quantità dai due piatti. Quindi sottraggo dalla riga più "pesante" le quantità indicate nell'altra riga: "so che 3 casse più 2 sacchi sono 12 kg, allora tolgo 3 casse, 2 sacchi e 12 kg nella prima riga". L'obiettivo è continuare a togliere quantità, mantenendo l'equilibrio delle bilance, finché in una bilancia non rimane un sacco e nell'altra una cassa.

Per l'esempio presentato nel video è stata sufficiente la sottrazione successiva di righe termine a termine, in altri casi può servire prima moltiplicare e poi sottrarre. Il metodo, basato sulla scrittura posizionale, è il primo esempio noto di un metodo matriciale, analogo a quello di Gauss, che però risale a circa 18 secoli dopo.

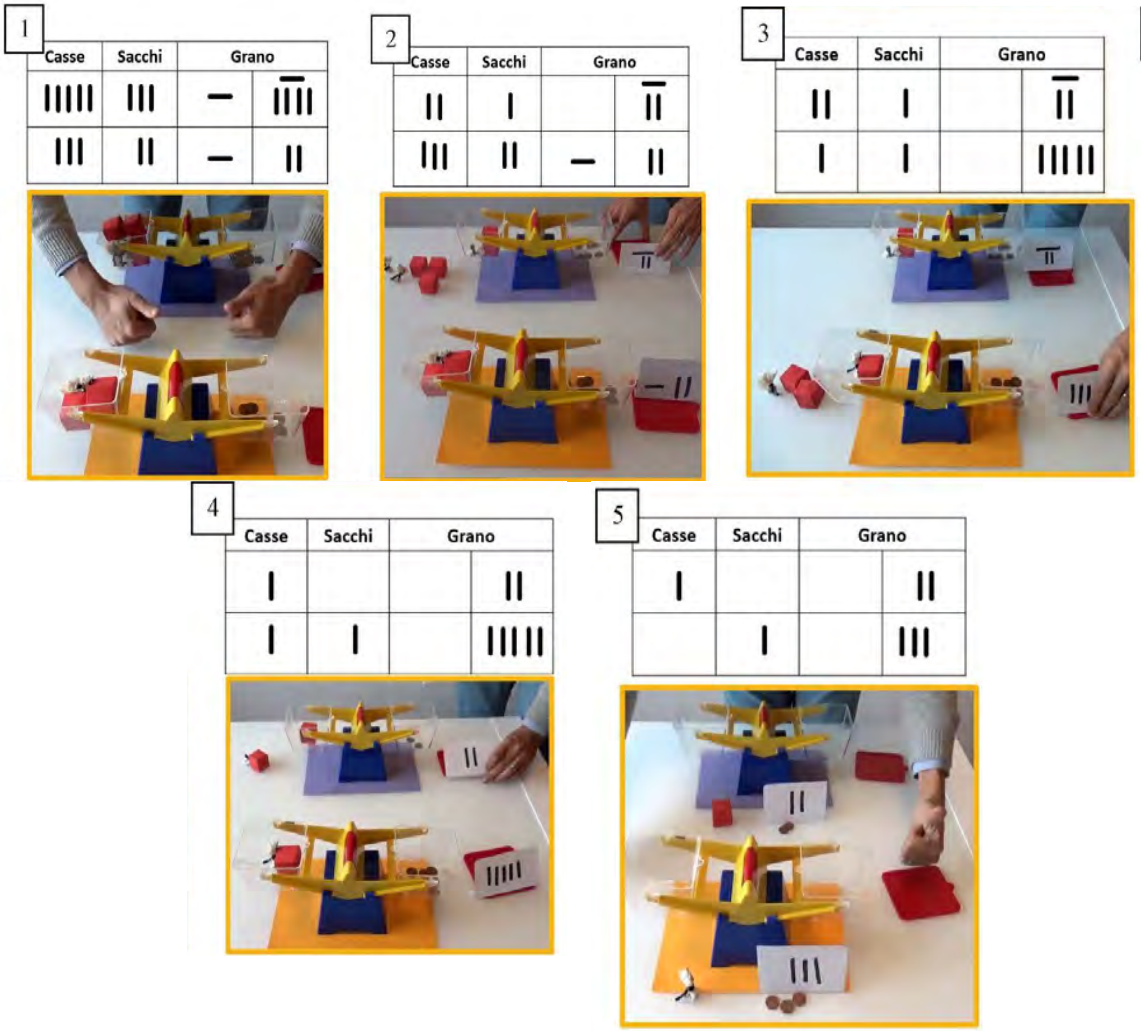

Figura 7. Fasi della procedura del Fangcheng sulla tavola da calcolo, interpretate con la doppia bilancia a piatti.

La scelta di utilizzare la metafora concettuale delle due bilance a piatti anziché fornire la regola della sottrazione ripetuta in modo procedurale, ha permesso agli studenti di costruire il senso delle operazioni svolte: l'intento delle azioni sulla bilancia è quello di far sparire da uno dei due piatti un tipo di merce, togliendo quantità equivalenti per rispettare le leggi di equilibrio. Nel Fangcheng, in modo analogo, la strategia è di sottrarre i numeri (qui fisicamente, proprio grazie all'artefatto delle bacchette di calcolo) al fine di eliminare un'incognita, rispettando i principi di equivalenza delle equazioni.
Nella sperimentazione in classe, dopo aver percorso la via delle strategie empiriche degli studenti, si è fatto loro interpretare il metodo per poi concludere con la sua applicazione in altri problemi, tutti tratti dal testo de *I Nove capitoli sui procedimenti matematici*.
Al termine del workshop, abbiamo chiesto ai partecipanti – nuovamente attraverso lo strumento di Google Jamboard – quali ritenevano fossero i possibili pro e contro nell'utilizzare questi algoritmi di calcolo nella scuola secondaria di I grado. Dalla discussione è emerso quanto riportato in Figura 8.

CONCLUSIONI

I risultati della sperimentazione hanno mostrato come l'esperienza di trasposizione culturale sia stata utile: da un lato per stimolare l'interesse e il coinvolgimento degli studenti, che hanno apprezzato l'idea di analizzare e scoprire da un testo storico originale; dall'altro lato l'esperienza ha aiutato a rinforzare negli studenti la comprensione del funzionamento del nostro sistema di numerazione indo-arabico, quando paragonato con quello cinese. Per quanto riguarda il Fangcheng pare che il metodo si presti ad attività di Early Algebra, nelle quali gli studenti apprendono in maniera relazionale e non procedurale, agendo strategicamente anche grazie all'aiuto della presenza fisica delle bacchette.
Le basi concettuali gettate con l'uso degli artefatti delle bacchette e bilance possono così essere richiamate nel momento dello studio delle equazioni di I grado e dei principi di equivalenza, e saranno importanti semi gettati per quando gli studenti affronteranno i sistemi di equazioni.

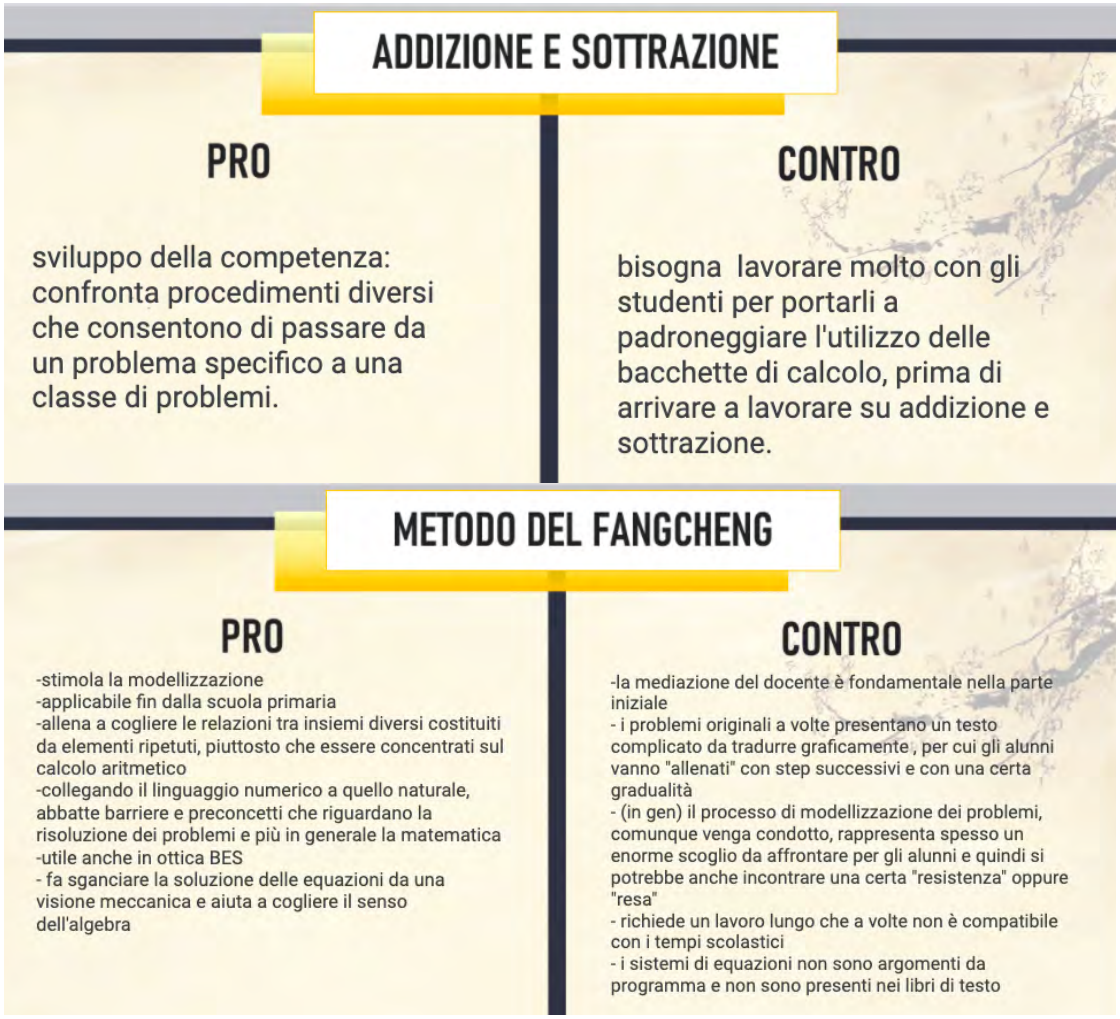

Figura 8. Risultati della discussione con i partecipanti al workshop.

BIBLIOGRAFIA

Bagni G.T. (2006). Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni. In L. Giacardi, M. Mosca & O. Robutti (eds.), *Associazione Subalpina Mathesis. Conferenze e seminari 2005-2006* (pp. 53-62). Torino: Kim Williams Books.

Bagni, G.T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica.* Bologna: Pitagora.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic Mediation in The Primary School: Dûrer's Glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)* (pp. 77-90). New York, USA: Springer.

Bartolini, M. G., Xuhua, S., & Ramploud, A. (2013). A dialogue between cultures about task design for primary school. In Margolinas C. & al. (Eds.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 551-560). Oxford: U.K.

Casi, R., Pizzarelli, C. (2020). Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo del Fangcheng. Un percorso di trasposizione culturale nella Scuola Secondaria di I grado, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* **7**, 76-101.

Chemla, K., & Shuchun, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Paris: Dunod.

Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162-167). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

Di Paola, B., & Spagnolo, F. (2009). I sistemi indeterminati nei "Nove Capitoli" di Liu Hui. Il ruolo del "contesto" per determinare l'"algoritmo fondamentale" come strumento argomentativo. *Quaderni di ricerca in didattica della matematica* **19**, 101-171.

Di Paola, B., Martignone, F., Mellone, M., & Ramploud, A. (2018). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM-Mathematics Education* **51**(1), 199-212.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654), Hillsdale: Erlbaum.

Mellone, M. & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. In Sun X., Kaur B. & Novotná N. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 23*, 567-574. China, Macau: University of Macau.

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques*, 203-213. Caen: ARDM.

Radford, L. (2003). *On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek thematics Education*. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.