Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia

PUBBLICAZIONI DEL
CENTRO STUDI ENRIQUES

6.

DA CASATI A GENTILE

MOMENTI DI STORIA DELL'INSEGNAMENTO SECONDARIO DELLA MATEMATICA IN ITALIA

a cura di

LIVIA GIACARDI

AGORÀ PUBLISHING

Volume pubblicato con un contributo di

Ministero per i Beni e le Attività Culturali
MIUR, Progetto "Storia delle scienze matematiche", Unità di Torino
MIUR, Progetto "Storia delle scienze matematiche", Unità di Ferrara

e in collaborazione con la Provincia di Livorno

Lugano

E-mail: lumieresinternationales@yahoo.it

Impaginazione e progetto grafico a cura di Agorà Publishing

Copertina a cura di Milena Bobba

ISBN 88-6067-008-X

SOMMARIO

Prefazione IX

Livia Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo* 1

Luigi Pepe, *Insegnamenti matematici e libri elementari nella prima metà dell'Ottocento. Modelli francesi ed esperienze italiane* 65

Simonetta Di Sieno, *Luigi Cremona e la formazione tecnica pre-universitaria nella seconda metà dell'Ottocento* 99

Maria Teresa Borgato, *Il fusionismo e i fondamenti della geometria* 125

Aldo Brigaglia, *Da Cremona a Castelnuovo. Continuità e discontinuità nella visione della scuola* 159

Fulvia Furinghetti, *Due giornali ponte tra ricerca e scuola: la Rivista di Peano e il Bollettino di Loria* 181

Paola Gario, *I corsi di Guido Castelnuovo per la formazione degli insegnanti* 239

Erika Luciano, *Aritmetica e storia nei libri di testo della Scuola di Peano* 269

Ornella Pompeo Faracovi, *Enriques, Gentile e la matematica* 305

Appendice 1 – *Provvedimenti legislativi* 323
1. Estratto dal Decreto Coppino (10.10.1867).
2. Estratto da Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio, *Ordinamento degli Istituti tecnici, Ottobre 1871.*
3. Estratto da *Commissione Reale per l'Ordinamento degli Studi Secondari in Italia. Relazione.*
4. Estratto dal R.D. del 28 settembre 1913, n.1213, *Ginnasio - Liceo Moderno. Orario - Istruzioni – Programmi.*
5. - Estratto dal R. D. del 14 ottobre 1923, n. 2345, *Orari e programmi per le Regie Scuole medie.*

Appendice 2 – *Orari e materie* 371
1. Tabella comparativa degli orari e dei programmi nelle scuole secondarie classiche italiane ed europee, 1887.
2. Progetto di riforma della Commissione Reale, 1909. Materie e orari di insegnamento.
3. Materie e orari del Liceo Moderno.
4. Riforma Gentile, 1923. Materie e orari di insegnamento del Ginnasio-Liceo.

Appendice 3 – *Tavole relative all'organizzazione scolastica* 381
1. Dalla legge Casati (1859) al 1877.
2. Dal 1877 al 1923.
3. Dal 1923 al 1945.

Bibliografia 387

Gli Autori 401

Indice dei nomi 403

PREFAZIONE

L'idea di questo volume è nata da due seminari organizzati presso la Domus Galilaeana di Pisa[1] dedicati alla storia dell'insegnamento della matematica, settore di ricerca rilevante sia per gli storici delle matematiche, sia per chi si occupa di didattica, e tuttavia ancora marginale nella letteratura internazionale.

L'ampiezza di indagine richiesta dal tema esige, infatti, un approccio interdisciplinare che deve tenere conto degli aspetti culturali, legislativi, politici e sociali, insieme a quelli più direttamente attinenti alla disciplina. I filoni di indagine che occorre seguire sono molteplici e fino ad ora poco esplorati: l'evoluzione dei programmi, i libri di testo, le riviste di didattica della matematica, le iniziative editoriali, il ruolo dei matematici impegnati nella ricerca avanzata e quello degli insegnanti medi e delle loro associazioni, i congressi del settore, i dibattiti sul metodo, le influenze internazionali e la formazione degli insegnanti.

Questo volume si propone di approfondire alcuni aspetti significativi e poco noti della storia dell'insegna-

[1] Pisa, 2 Aprile 2004 - *L'insegnamento della matematica in Italia dalla legge Casati alla legge Gentile. Problemi, metodi, dibattiti e provvedimenti legislativi*, a cura di L. Giacardi. Pisa, 15 Aprile 2005 - *La matematica nella scuola italiana da metà '800 a fine '900 Problemi, metodi, libri di testo e riforme*, a cura di L. Giacardi.

mento della matematica nella scuola secondaria italiana dalla legge Casati (1859) alla riforma Gentile (1923) e di porre così le basi per la realizzazione di una storia completa ed esaustiva del periodo considerato.

Il saggio iniziale ha lo scopo di offrire una cornice in cui inquadrare quelli che seguono. Livia Giacardi tratteggia un affresco del periodo preso in esame soffermandosi sui momenti e sui fatti più significativi cercando di evidenziare le conseguenze che essi hanno prodotto, i dibattiti che hanno stimolato, l'operato e le convinzioni metodologiche dei matematici che ne sono stati i protagonisti. Un affresco destinato sicuramente a diventare più dettagliato e preciso e forse anche a modificarsi col proseguire della ricerca.

Luigi Pepe affronta un tema assai poco studiato, quello dell'insegnamento della matematica negli Stati italiani pre-unitari, e si sofferma ad esaminare alcuni dei manuali più diffusi in Italia nel primo Ottocento, mettendo in rilievo le somiglianze, ma anche le differenze, con i modelli francesi dell'epoca.

Ai contributi di Luigi Cremona all'istruzione tecnica pre-universitaria è dedicato il saggio di Simonetta di Sieno che ne affronta l'esame mettendo in luce non solo quegli aspetti più direttamente riconducibili ai suoi interventi diretti alla formazione degli ingegneri (dall'Istituto Tecnico Superiore di Milano alla Scuola per gli ingegneri di Roma), ma collocandoli all'interno della riflessione didattica contenuta in tutti i suoi scritti, anche in quelli iniziali e in quelli non destinati alla pubblicazione.

Nel suo saggio sul fusionismo Maria Teresa Borgato analizza le motivazioni didattiche e teoriche che portarono in auge questo particolare orientamento nell'insegnamento elementare della geometria che influenzò la produzione di testi scolastici in Europa a partire dagli anni '40 dell'Ottocento, e in Italia tra il 1884 e i primi anni del Novecento. Mostra inoltre come, nella sua base teorica, il fusionismo si ricolleghi alle ricerche sui fondamenti della geometria.

Aldo Brigaglia mette in luce il legame profondo che collega le concezioni didattiche di Guido Castelnuovo alla tradizione italiana inaugurata da Cremona appena dopo l'unità nazionale. Se è vero che Cremona mirava soprattutto alla formazione di una classe dirigente al centro della quale fosse l'ingegnere politecnico, mentre Castelnuovo guardava principalmente ai «giovani che aspirano alle libere professioni», tuttavia un filo rosso di continuità unisce le due diverse posizioni: la centralità della fantasia, dell'intuizione, dell'immaginazione nella formazione matematica dei giovani.

Paola Gario focalizza la sua attenzione sull'impegno di Guido Castelnuovo nella formazione degli insegnanti di matematica illustrando i suoi interventi come presidente della Mathesis e prendendo in esame i *Quaderni* inediti delle sue lezioni per il corso di Geometria superiore, lezioni che rivelano un progetto articolato e profondo indirizzato alla formazione disciplinare dei futuri insegnanti.

Nel suo saggio Fulvia Furinghetti illustra i caratteri e le vicende di due giornali matematici fondati a fine Ottocento in Italia, la *Rivista di Matematica* diretta da Giuseppe Peano e il *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche* di Gino Loria, evidenziando, da un lato, la loro collocazione nel giornalismo dedicato alla didattica della matematica e, dall'altro, il ruolo dei loro direttori nella storia dell'istruzione secondaria.

Le proposte di rinnovamento dell'insegnamento della matematica, formulate da Peano e dagli allievi della sua scuola, sono invece il tema centrale del saggio di Erika Luciano che illustra gli assunti epistemologici da cui queste proposte traggono origine e i risultati ottenuti. Attraverso l'esame dei numerosi manuali di aritmetica, redatti nell'ambito di questa scuola, sono evidenziate l'esigenza di rigore nelle esposizioni, le riflessioni sul linguaggio, le osservazioni sul valore didattico della storia della scienza e l'attenzione verso le applicazioni concrete della matematica in vari ambiti culturali.

Il saggio finale di Ornella Pompeo Faracovi mira a spiegare l'atteggiamento di Federigo Enriques nei confronti della riforma Gentile, atteggiamento critico, ma non polemico. La moderazione enriquesiana non era solo tattica, né riducibile alla renitenza a schierarsi apertamente contro la politica del fascismo, piuttosto nasceva da una convergenza di pensiero su alcuni temi della riforma: la valenza formativa, e non solo informativa, dell'educazione, l'impostazione sintetica dei programmi e il taglio attivistico del rapporto maestro-scolaro.

A integrazione dei saggi presentati si sono aggiunte alcune appendici a carattere documentario sui programmi di matematica, sugli orari, sulla distribuzione delle materie e sull'ordinamento scolastico nel periodo considerato. Una bibliografia secondaria, dedicata alla storia dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie nell'arco temporale preso in esame o a temi ad esso connessi, completa il volume.

Al termine di questo lavoro desidero esprimere viva riconoscenza alla Domus Galilaeana che ha generosamente ospitato i nostri incontri di studio a Pisa e a Paolo Freguglia che ci ha sostenuto *nella loro organizzazione. Un ringraziamento particolare a Luigi Pepe che mi ha spinta e incoraggiata a realizzare questo volume e a Ornella Pompeo Faracovi direttrice del Centro Studi Enriques che lo ha accolto nella collana del Centro. Il mio grazie più sentito va ai colleghi e amici che hanno collaborato al volume e a tutti quelli che hanno partecipato agli incontri pisani. Desidero anche ringraziare di cuore coloro che in vario modo mi hanno aiutata nelle mie ricerche, Ferdinando Arzarello, Sandro Caparrini, Emma Castelnuovo, Mario Cecchetto, Lucia Ciarrapico, Enrico Giusti, Jens Høyrup, Giacomo Michelacci, Consolato Pellegrino, Marta Menghini, Mauro Moretti, Carmelo Mammana, Silvio Maracchia, Silvia Marsico, Pietro Nastasi, Franco Parlamento, Silvia Roero, Gert Schubring, Rossana Tazzioli, Luciana Zuccheri. La mia più viva riconoscenza va inoltre a tutto il personale della Biblioteca Matematica Giuseppe Peano del Dipartimento di Matematica di Torino e, in modo particolare, a Laura Garbolino e a Franco Bessone per l'interesse e l'efficienza con cui hanno seguito le mie ricerche bibliografiche.*

Livia Giacardi

LIVIA GIACARDI

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN ITALIA DALL'UNITÀ ALL'AVVENTO DEL FASCISMO

1. *L. Cremona e gli "Elementi" di Euclide: la matematica come "ginnastica del pensiero"*

La prima legge che diede un assetto globale alla scuola italiana – dalla primaria all'università – e al Ministero della pubblica istruzione è la legge Casati, dal nome del ministro Gabrio Casati che la elaborò. Promulgata dal re Vittorio Emanuele II il 13.11.1859 per riorganizzare l'istruzione pubblica in Piemonte e in Lombardia, e gradualmente estesa alle altre regioni, la legge Casati costituisce il fondamento di tutta la legislazione scolastica italiana fino a quando nel 1923 la riforma proposta e attuata dal filosofo neo-idealista Giovanni Gentile, ne modificò l'assetto istituzionale pur conservandone alcuni tratti fondamentali. È, per usare un'immagine di Giuseppe Ricuperati, «l'ossatura di uno scheletro dalla sopravvivenza sorprendente».[1] Il ruolo dominante del-

[1] G. Ricuperati, *Per una storia dell'università italiana da Gentile a Bottai: appunti e discussioni*, in I. Porciani (a cura di), *L'Università tra Otto e Novecento: i modelli europei e il caso italiano*, Napoli, Jovene, 1994, pp. 311-377, cit. a p. 313.

l'università sullo schema complessivo, l'accentramento burocratico e la preoccupazione di formare una classe dirigente ancorata ai valori della cultura umanistica, ne sono i caratteri distintivi.[2] L'articolo 188 recita: «L'Istruzione secondaria ha per fine di ammaestrare i giovani in quegli studi mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi speciali che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle Università dello Stato».[3]

Conformemente a questa finalità la legge Casati scindeva l'istruzione secondaria in due rami, quello classico (ginnasio e liceo), che apriva le porte all'università e aveva lo scopo di formare la futura classe dirigente, e quello tecnico (scuola tecnica e istituto tecnico) destinato all'istruzione professionale e senza sbocchi universitari. Era pertanto il ginnasio-liceo a costituire l'asse portante di tutta la scuola secondaria italiana. Solamente la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico[4], creata nel 1860, consentiva l'accesso alle facoltà scientifiche. Con alti e bassi, questa sezione per un sessantennio rappre-

[2] Si vedano, in proposito, per esempio G. Talamo, *La scuola dalla Legge Casati alla inchiesta del 1864*, Milano, Giuffré, 1960 e G. Canestri, G. Ricuperati, *La scuola in Italia dalla Legge Casati a oggi*, Torino, Loescher, 1976, Cap. I.1.

[3] Cfr. Canestri, Ricuperati, *La scuola in Italia dalla Legge Casati a oggi* …, cit. p. 36.

[4] Il Regolamento del 19 settembre 1860 organizzò infatti l'istituto tecnico in quattro sezioni: commerciale-amministativa, agronomica, chimica e fisico-matematica. Il numero delle sezioni crebbe poi a dismisura fino a che nel 1871 furono portate definitivamente a cinque: agronomica, fisico-matematica, commerciale, industriale e quella di ragioneria, cfr. Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio, *Ordinamento degli Istituti tecnici, Ottobre 1871*, Firenze, Tip. Claudiana, p. XXIII.

sentò il ramo di scuola secondaria in cui la matematica aveva il posto di maggiore rilievo, ed ebbe il merito di formare, tra l'altro, matematici di alto profilo scientifico quali Vito Volterra, Corrado Segre e Francesco Severi.[5]

Per quanto riguarda in particolare l'insegnamento della matematica fu però il decreto sui programmi, emanato dal ministro Michele Coppino nel 1867, a segnare una vera svolta. Ispiratore dei programmi di matematica e delle relative indicazioni metodologiche era il geometra Luigi Cremona che ripristinò come manuale di geometria nei ginnasi e nei licei gli *Elementi* di Euclide. Infatti a suo avviso:

> La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da risguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.

Di conseguenza: «Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa [...] basta applicare alle nostre l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli *elementi di Euclide*, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico»[6].

[5] Cfr. E. Ulivi, *Sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria dalla legge Casati alla riforma Gentile: la sezione fisico- matematica*, «Archimede», 4, 1978, pp. 166-182.

[6] Cfr. *Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei*, in *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze 24 ottobre 1867*, cfr. Appendice 1.1.

Nel decreto Coppino il programma viene delineato a grandi linee ed è ripartito tra la V ginnasiale e la I e II liceale, insistendo soprattutto sul metodo:

> Insegnata col metodo degli antichi – scrive Cremona – la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri. [...] Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete [...] le loro misure.[7]

Parallelamente, l'insegnamento dell'aritmetica dovrà effettuarsi in modo deduttivo e dimostrativo. In generale, ciò che conta non è che «ciascuna parte del programma sia svolta con grande estensione, e condotta a minuti particolari; possono invece bastare le proposizioni fondamentali e più generali; ma è necessario che si vada innanzi senza salti, che tutto sia coscienziosamente dimostrato colla più severa esattezza, e che nessuno dei punti toccati rimanga oscuro o dubbioso». Lo scopo dell'insegnamento, infatti, non è quello di fornire un gran numero di conoscenze, ma piuttosto quello di dare un metodo e l'attitudine ad affrontare i problemi, qualità indispensabili per gli allievi

[7] Ibidem, *Geometria.* Per una trattazione più ampia sul decreto Coppino e sul dibattito che seguì, cfr., per esempio, L. Giacardi, *Gli "Elementi" di Euclide come libro di testo. Il dibattito di metà Ottocento in Italia,* in *Conferenze e seminari, 1994-1995,* Torino, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, 1995, pp. 175-188 e G. Schubring, *Analysis of historical textbooks in mathematics*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 1997, pp. 81-90.

destinati ad affrontare gli studi universitari e a costituire un giorno la classe dirigente della nazione.

Se l'aspetto che colpisce maggiormente in questi programmi - e che è stato a ragione più volte sottolineato - è il ritorno al metodo euclideo nell'insegnamento della geometria, tuttavia non bisogna dimenticare il fatto che, nella presentazione del programma di algebra, Cremona invita i docenti a instradare gli allievi al fecondo metodo dei limiti a partire dal concetto di «numero incommensurabile» e anche al concetto di funzione.[8] Il ritorno ad Euclide, infatti, non fu altro che una soluzione di compromesso che aveva lo scopo di risollevare l'insegnamento della matematica in Italia. In realtà Cremona auspicava un rinnovamento più profondo come appare per esempio dalla sua corrispondenza[9] e da un articolo del 1860[10] in cui espone alcune sue considerazioni sull'insegnamento della geometria elementare accennando, fra l'altro, ad un 'insegnamento dinamico' basato sul concetto di trasformazione.[11] Ma alle sue aspirazioni si opponevano una qualità e un livello dell'insegnamento secondario all'epoca assai scadenti: basti pensare, ad esempio,

[8] Cfr. *Aritmetica ragionata e algebra* in *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze 24 ottobre 1867…*, cit. qui in Appendice 1.1.

[9] Cfr. R. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, a cura di M. Menghini, Quaderni PRISTEM 9, 1996, pp. 7-90, vedi per esempio le pp. 52-53.

[10] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze*, «Il Politecnico», 9, 1860, pp. 286-323 (*Opere matematiche*, Milano, Hoepli. v. I, 1914, pp. 176-207). Cfr. in questo volume il saggio di A. Brigaglia.

[11] Ed è pure Cremona che scrive gli *Elementi di geometria projettiva ad uso degli istituti tecnici* (1873) dopo che nel 1871 la geometria proiettiva fu inserita nei programmi della sezione fisico-matematica, cfr. in questo volume il saggio di S. Di Sieno e l'Appendice 1.2.

che non tutti gli insegnanti avevano conseguito la laurea e, in molti casi, la loro preparazione era del tutto inadeguata. Ripristinando l'uso degli *Elementi* come testo scolastico e pubblicandone la traduzione italiana *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi* (1868),[12] Cremona si proponeva pertanto di «sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo»[13] e di favorire la pubblicazione di buoni manuali italiani. Inoltre intendeva combattere l'impostazione metodologica degli *Éléments de géométrie* (1794) di Adrien Marie Legendre e, in particolare, l'uso dichiarato che egli fa dell'aritmetica e dell'algebra nella trattazione geometrica, aspetto questo che viene esasperato da Marie A. Blanchet nella sua edizione ampliata degli *Éléments* e dai vari traduttori e imitatori italiani.[14]

Il *Betti-Brioschi* riproponeva, in traduzione italiana, gli *Elementi* di Euclide senza alcuna opera di mediazione di-

[12] Per quanto fra i curatori non figurasse Cremona, è lui il vero artefice dell'opera, coadiuvato da un professore di Pavia, Giacomo Platner, come risulta dalla ricca corrispondenza con Betti che costituisce un documento prezioso per ricostruire la genesi di quest'opera e il ruolo preminente giocatovi da Cremona, cfr. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona …*, cit.

[13] F. Brioschi, L. Cremona, *Al signor Direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, Napoli*, «Giornale di Matematiche», 7, 1869, pp. 51-54, p. 53. Un estratto di questa lettera fu tradotto in francese da J. Hoüel e pubblicato sulle «Nouvelles Annales de Mathématiques», s. 2, 8, 1869, pp. 278-283.

[14] Cfr. G. Schubring, *Neues über Legendre in Italien*, «Algorismus» 44, 2004, pp. 256-274.

dattica, né dal punto di vista del linguaggio, né da quello del contenuto.[15] È abbastanza naturale quindi che questo manuale scolastico al suo apparire abbia provocato molte reazioni: non piaceva né agli insegnanti che ne sottolineavano soprattutto le carenze dal punto di vista didattico, né ai matematici che lo percepivano come un ritorno al passato e dunque una chiusura verso le nuove scoperte nel campo della geometria.

Il dibattito diventò più ampio e aperto quando Giuseppe Battaglini, uno dei principali promotori della diffusione delle geometrie non euclidee in Italia, pubblicò sulla sua rivista, il *Giornale di matematiche*, la traduzione di un articolo dell'inglese J. M. Wilson.[16] Contrariamente alla posizione dominante in Inghilterra, Wilson criticava aspramente gli *Elementi* di Euclide come libro di testo sia dal punto di vista scientifico, sia da quello didattico[17] e concludeva in modo perentorio: «Euclide è *antiquato, artifizioso, illogico e inadatto* come libro d'istituzione».

[15] Cfr. Giacardi, *Gli "Elementi" di Euclide come libro di testo …*, cit., pp. 177-182.

[16] J. M Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, «Educational Times», 1868, pp. 125-128, tradotto da R. Rubini con il titolo *Euclide come testo di geometria elementare*, «Giornale di matematiche», 6, 1868, pp. 361-368.

[17] Le critiche di Wilson di tipo scientifico non presentano sostanziale originalità o novità e sono le seguenti: Euclide rifiuta le «costruzioni ipotetiche», trascura l'uso del movimento e separa la geometria dall'aritmetica, inoltre, la teoria delle parallele è difettosa e quella delle proporzioni è cosa «morta». Dal punto di vista didattico egli osserva che il linguaggio è oscuro e complicato, che la trattazione non favorisce la scoperta, che escludere ogni applicazione aritmetica è un grave limite e, soprattutto, che «un libro d'istituzione scritto tanto tempo addietro» non può essere «un'introduzione atta alla scienza pel tempo nostro», cfr. Wilson, *Euclide come testo di geometria elementare…*, cit.

La replica di Cremona e Brioschi fu immediata, ma i due autori, alla fine, furono costretti ad ammettere «che in varii punti è desiderabile che [gli *Elementi*] siano emendati e semplificati», purché non travisati e «purché si faccia della geometria vera, non già dell'aritmetica».[18] Altri interventi a favore o contro gli *Elementi* di Euclide come libro di testo apparvero nei numeri successivi del *Giornale di matematiche* e il dibattito continuò a interessare per alcuni anni tanto il mondo accademico, quanto quello degli insegnanti. Per rendersene conto basta scorrere le corrispondenze edite e inedite dei matematici italiani dell'epoca[19] (Battaglini, Beltrami, Cremona, Forti, Genocchi, Bellavitis, ecc.) come pure le prefazioni ai trattati di geometria elementare che escono numerosi nella seconda metà dell'Ottocento.

[18] Brioschi, Cremona, *Al signor Direttore* …, cit., p. 54.

[19] Cfr. per esempio le lettere di Hoüel a Genocchi in appendice a L. Fenoglio, L. Giacardi, *La polemica Genocchi-Beltrami sulle superficie pseudosferiche: una tappa nella storia del concetto di superficie,* in *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario* (a cura di A. Conte e L. Giacardi), Deputazione subalpina di storia patria, Torino, 1991, pp. 155-209; L. Giacardi, *La corrispondenza fra Jules Hoüel e Luigi Cremona (1867-1878*), in AA.VV., *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903*), vol. I, Quaderno della Rivista di Storia della Scienza, n°24, Università di Roma "La Sapienza", 1992, pp. 77-88; P. Calleri, L. Giacardi, *Le lettere di Giuseppe Battaglini a Jules Hoüel (1867-1878). La diffusione delle geometrie non euclidee in Italia,* in «Rivista di Storia della Scienza», s. 2, 3.1, 1995, pp. 127-209; L. Giacardi, *Scientific research and teaching problems in Beltrami's letters to Hoüel,* in *Using History to teach Mathematics: an International Perspective (*a cura di V. Katz), The Mathematical Association of America, Washington, 2000, pp. 213-223 e le lettere di G. Bellavitis e di A. Forti a J. Hoüel, Paris, Archives de l'Académie des Sciences, *Correspondance adressée à J. Hoüel.*

2. *Il fiorire della manualistica per la scuola secondaria*

L'*operazione Euclide* e il vivace dibattito che seguì svolsero una funzione catalizzatrice per sbloccare la situazione di ristagno in cui versava l'insegnamento della matematica in Italia. Come scrissero Enrico D'Ovidio e A. Sannia «fu come un'operazione chirurgica, fece gridare, ma giovò».[20]

Da un lato contribuì a focalizzare alcune importanti questioni nell'insegnamento della geometria: l'esigenza di una approfondita analisi dei fondamenti, il ruolo che devono avere i movimenti nello studio dei problemi geometrici, l'indipendenza o meno della trattazione geometrica da una precedente teoria dei numeri reali e, infine, il rapporto fra rigore e intuizione. Dall'altro, favorì lo svilupparsi di una stampa specializzata: furono, infatti, create le prime riviste dedicate ai problemi dell'insegnamento della matematica, alcune delle quali sopravviveranno fino a oggi come il *Periodico di Matematica* (1886).[21] Soprattutto, nel quarantennio successivo vennero pubblicati, come auspicava Cremona, un gran numero di manuali di geometria di alto livello ad opera di alcuni dei maggiori matematici italiani dell'epoca (Betti e Brioschi, Sannia e D'Ovidio, Faifofer, De Paolis, Veronese, De Franchis, Enriques e Amaldi, ...) che, mettendo a confronto impostazioni metodologiche diverse, stimolarono il dibattito sull'insegnamento della matematica.[22]

[20] A. Sannia, E. D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli, Pellerano, 1895 (IX ed.), p. V.

[21] Cfr. per esempio F. Furinghetti., A. Somaglia, *Giornalismo matematico "a carattere elementare" nella seconda metà dell'Ottocento*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 15, 1992, pp. 816-852, e in questo volume il saggio di F. Furinghetti.

[22] Cfr. in proposito M. Menghini, *Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria*, «L'educazione matematica», 3, 1992, pp. 161-181; C.

Nel manuale di Achille Sannia e Enrico D'Ovidio (1868-1869)[23] la trattazione segue il metodo euclideo, ma è migliorata nei punti dove è più debole ed è arricchita da complementi e da digressioni che introducono l'allievo a parti più avanzate della geometria.[24] Gli *Elementi di geometria ad uso dei licei,* (1880) di Aureliano Faifofer si distinguono per il modo di affrontare la teoria dell'equivalenza dei poligoni che viene trattata sviluppando le indicazioni date da Duhamel.[25]

Con il manuale di Riccardo De Paolis *Elementi di geometria* (1884)[26] prende l'avvio in Italia il fusionismo che

Mammana, *I "Grundlagen der Geometrie" e i libri di testo di geometria in Italia,* «Le Matematiche», Supplemento 1, 55, 2000, pp. 225-251; C. Mammana, R. Tazzioli, *The Mathematical School in Catania at the beginning of the 20.th Century and its Influence on Didactics,* in *Proceedings. Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* Louvain, Univérsité Catholique, 2001, pp. 223-232; L. Giacardi, *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento,* in G. Chiosso (a cura di), *TESEO, Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento,* Milano, Editrice Bibliografica, 2003, pp. XCVII-CXXIII.

[23] A. Sannia, E. D'Ovidio, *Elementi di Geometria,* Napoli, Stab. Tip. delle Belle Arti, 1868-69, II ed. 1871, III 1876, IX 1895, cfr. la recensione di J. Hoüel, *Revue bibliographique,* in «Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques», 1, 1870, pp. 329-330.

[24] Nell'edizione del 1876, per esempio, si trovano: la presentazione dei metodi analitico e sintetico (pp. 105-108), quattro metodi per il calcolo di ϖ con un excursus storico (pp. 312-322), i sistemi armonici di punti e di rette, … (Libro III, cap. V), i poligoni sferici (pp. 423-430), i sistemi armonici di piani, … (Libro VII, cap. II), ecc.

[25] J.-M.-C. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement,* Paris, Gauthier-Villars, II ed., 1878, II, *Note sur l'équivalence,* pp. 445-450.

[26] R. De Paolis, *Elementi di geometria,* Torino, Loescher 1884, cfr. G. Candido, *Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie dans l'enseignement de la géométrie éléméntaire en Italie,* in «L'Enseignement mathématique», a. I, 1899, pp. 204-215, pp. 204-215, in particolare, p. 206.

denota un metodo didattico che prevede lo studio simultaneo degli argomenti affini di geometria piana e solida e l'applicazione delle proprietà della seconda per lo studio della prima al fine di trarne il maggiore vantaggio possibile.[27] Il manuale di Giuseppe Veronese (1909)[28] e quello di Michele De Franchis (1909)[29] - che si distingue soprattutto per il modo rigoroso con cui viene affrontata la teoria dell'uguaglianza introducendo considerazioni sul gruppo dei movimenti - riflettono apertamente l'influenza di quegli studi sui fondamenti della geometria che, attraverso l'opera di Pasch, Peano, Pieri, Enriques e di Veronese stesso, erano culminati nell'opera *Grundlagen der Geometrie* (1899) di David Hilbert.

Fra i numerosi manuali di geometria apparsi in quegli anni quello che tiene maggior conto delle esigenze didattiche è sicuramente quello scritto a due mani da Federigo Enriques, illustre rappresentante della scuola italiana di geometria algebrica, e da Ugo Amaldi, gli *Elementi di geometria, ad uso delle scuole secondarie superiori*.[30] La base scientifica e metodologica per questo celebre manuale di geometria sono, come afferma Enriques stesso, le *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1900), raccolta di studi monografici su problemi di matematica elementare da un punto di vista superiore che Enriques realizzò,

[27] Cfr. in questo volume il saggio di M. T. Borgato.

[28] G. Veronese, P. Gazzaniga, *Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei e istituti tecnici*, Padova, Fratelli Drucker, 1909.

[29] M. De Franchis, *Geometria elementare ad uso dei Licei e dei Ginnasi superiori*, Milano-Palermo-Napoli, Remo Sandron, 1909.

[30] F. Enriques, U. Amaldi, *Elementi di geometria, ad uso delle scuole secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903; *Elementi di geometria elementare ad uso dei ginnasi superiori*, id. 1904, manuali più volte riediti e ristampati.

con la collaborazione di amici e discepoli, influenzato anche da Felix Klein e dalle molteplici iniziative che egli portava avanti a Göttingen a favore della riforma dell'insegnamento e della formazione degli insegnanti.[31] Negli *Elementi* la materia è affrontata con il metodo razionale induttivo cercando di superare il difetto tipico della trattazione euclidea che «presentando coordinati in un sistema deduttivo dei risultati lungamente analizzati nei loro rapporti, nasconde sotto la forma dommatica il cammino della scoperta».[32] Pertanto la trattazione progredisce seguendo la seguente struttura: a partire da una serie di osservazioni si enunciano certi postulati, da cui si ricavano con il ragionamento logico i teoremi che da essi dipendono e, di continuo, si ritorna ad osservazioni o spiegazioni di carattere intuitivo.

Furono soprattutto i manuali di geometria a influenzare il dibattito sul metodo perché, meglio di ogni altro

[31] Enriques stesso nella prefazione scrive: «Tali questioni sono state svolte recentemente in una serie di conferenze del signor Klein, alla quale dobbiamo in parte l'idea di questa raccolta», cfr. F. Enriques, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, Zanichelli, 1900, p. VII. Egli inoltre era in corrispondenza epistolare con Klein ed ebbe modo di incontrarlo in Italia nel marzo 1899 e poi ancora quando si recò in Germania nell'autunno del 1903, cfr. *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini, A. Conte, P. Gario, Torino, Bollati Boringhieri, 1996, p. 404 e 536. Cfr. anche la lettera di Enriques a Klein, Bologna 10.1.1905 (Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek, *F. Klein* 34) in cui scrive: «Le invio una copia della 2ª ediz.ᵉ dei miei Elementi di geometria. Nell'avviamento ad un metodo che, pur essendo razionale, accentua il carattere induttivo, Ella potrà riconoscere una influenza delle sue idee e delle conversazioni di Gottinga».

[32] F. Enriques, *Sull'insegnamento della geometria razionale*, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, pp. 19-35, cit. p. 24.

settore della matematica, la geometria permette di focalizzare i problemi di metodo insiti nell'insegnamento della matematica e di chiarire il rapporto delicato fra *formazione* e *informazione*. Tuttavia meritano un cenno due manuali di algebra di diversa impostazione metodologica che influenzarono la trattatistica successiva, quello di Cesare Arzelà e quello di Giuseppe Peano. Fra l'altro è nei trattati di algebra scritti per la sezione fisico-matematica degli istituti tecnici che si introdussero per la prima volta il concetto di funzione e i primi elementi di calcolo infinitesimale,[33] come pure il calcolo delle probabilità che con i Programmi Castagnola del 1871 era stato inserito nel curricolo di algebra della sezione fisico-matematica.[34]

Il *Trattato di algebra elementare* (1880)[35] di Arzelà, professore di analisi all'Università di Bologna, fu uno dei manuali più adottati nelle scuole secondarie. Scritto per i licei e la sezione fisico-matematica degli istituti tecnici, è caratterizzato da un approccio metodologico diverso da quello di Joseph Bertrand il cui testo, tradotto da Enrico Betti (1859) era all'epoca assai diffuso in Italia; infatti il concetto attorno a cui si svolge tutta la trattazione non

[33] Cfr. per esempio G. Scorza, *L'insegnamento della matematica nelle Scuole e negli Istituti tecnici*, «Bollettino della Mathesis», a. III, 1911, pp. 49-80, a p. 69.

[34] Cfr. Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio, *Ordinamento degli Istituti Tecnici, Ottobre 1871…*, cit., p. 54, qui in Appendice 1.2. Il calcolo delle probabilità viene perlopiù trattato nei Complementi di algebra, anche se non mancano dei manuali specifici (cfr. G. Fenaroli, *Libri di testo di calcolo delle probabilità tra '800 e primo '900*, in *Conferenze e seminari 2000-2001*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 2001, pp. 179-197).

[35] C. Arzelà, *Trattato di algebra elementare*, Firenze, Successori Le Monnier, 1880.

è più quello di equazione, ma quello di funzione.[36] L'attenzione all'aspetto didattico si vede per esempio nella trattazione dei numeri irrazionali che vengono introdotti come limite comune di una coppia di successioni convergenti, modo questo collegato con la misura delle grandezze mediante procedimenti di approssimazione per difetto e per eccesso.

L'*Aritmetica generale e algebra elementare* (1902)[37] di Peano riprende intere parti del *Formulaire Mathématique* ed è caratterizzata dall'uso sistematico dei simboli logici che «apportano non solo brevità, ma specialmente precisione e chiarezza» (p. III). Per quanto questo manuale abbia avuto da parte degli insegnanti un'accoglienza piuttosto tiepida,[38] tuttavia presenta aspetti interessanti: le numerose note storico-critiche,[39] un'appendice sul calcolo per approssimazione, argomento prediletto da Peano e cenni alle applicazioni alla meccanica e alla fisica.

3. *Aspetti contraddittori nell'insegnamento elementare della matematica a fine Ottocento*

Gli anni che vanno dall'Unità d'Italia ai primi del Novecento costituirono sicuramente un periodo di

[36] Cfr. V. Gavagna, *Cesare Arzelà e l'insegnamento della matematica*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XII.2, 1992, pp. 251-277.

[37] G. Peano, *Aritmetica generale e algebra elementare*, Torino, Paravia, 1902.

[38] Cfr. per esempio E. Nannei, *Studiare le cause del poco profitto, che fanno, nello studio della matematica, i giovani delle nostre scuole medie, e proporre i mezzi per ovviarvi* in *Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle scuole medie italiane, Napoli 14-17.9.1903*, Torino, Artigianelli, 1904, pp. 9-26, a p. 24.

[39] Cfr. in questo volume il saggio di E. Luciano.

grande fermento politico e sociale cui si accompagnò un importante sviluppo della ricerca scientifica che conquistava posizioni di primo livello con i successi della scuola italiana di geometria algebrica e gli studi di logica matematica di Peano. Il fronte comune fra matematica elementare e ricerca avanzata, che si venne a creare a fine Ottocento attraverso gli studi sui fondamenti, portava in modo naturale alcuni dei matematici più attivi nella ricerca pura ad impegnarsi in prima persona non solo nella preparazione dei manuali per la scuola, ma anche nella politica culturale, nell'elaborazione di una legislazione scolastica più adeguata ai tempi e nella formazione degli insegnanti. Si assiste inoltre a un fecondo interscambio fra università e scuola secondaria: spesso i docenti universitari iniziavano la loro carriera come professori di scuola media (per es. Cremona, Betti, D'Ovidio, De Paolis) e viceversa i migliori docenti di scuola secondaria svolgevano corsi all'università (per es. Lazzeri, Faifofer, Bettazzi, Vailati) portando, così nel loro lavoro quotidiano di insegnamento l'esperienza acquisita nei due differenti livelli.

Il fiorire di una stampa prettamente italiana dedicata all'insegnamento non è che una delle manifestazioni di questo clima di rinnovamento. Furono create le Scuole di Magistero (1875) per la formazione del corpo docente e fecero la loro comparsa le prime associazioni di insegnanti. Nel 1895-96 Rodolfo Bettazzi fondò a Torino l'*Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie* con lo scopo preciso di realizzare «il miglioramento della scuola ed il perfezionamento degli insegnanti sotto il punto di vista scientifico e didattico». Attraverso i suoi presidenti, fra cui Bettazzi stesso, Severi, Castelnuovo, Enriques,[40] la Mathesis farà più volte sentire la propria voce in merito ai vari provvedimenti legislativi sulla scuola secondaria.[41] Nel giro di pochi anni sorsero in tutta Italia altre associazioni di insegnanti medi e nel 1901 fu creata la *Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media*[42] allo scopo di tutelare i diritti economici e giuridici degli insegnanti e di promuovere il miglioramento delle scuole secondarie; scopi, dunque, dichiaratamente politici che si orientavano verso un indirizzo democrati-

[40] Rodolfo Bettazzi fu presidente della Mathesis dal 1896 al 1900 e dal 1902 al 1904, Francesco Severi dal 1909 al 1910, Guido Castelnuovo dal 1911 al 1914, Federigo Enriques dal 1919 al 1932.

[41] Per la storia della Mathesis si vedano: *Numero speciale dedicato al "Periodico di Matematiche" 1886-1995*, «Periodico di matematiche, Organo della Mathesis», s.VII, 2, 2/3, 1995; L. Giacardi, C.S. Roero, *La nascita della Mathesis (1895-1907)* in *Dal compasso al computer*, Torino, Associazione Subalpina Mathesis, 1996, pp. 7-49; *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis Centenario 1895-1995". Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Roma, Fratelli Palombi, 1996; G. Bolondi (a cura di), *La* Mathesis. *La prima metà del Novecento nella "Società Italiana di Scienze matematiche e fisiche"*, PRISTEM/STORIA 5, Milano, Springer-Verlag Italia, 2002; P. Gario, *Quali corsi per la formazione del docente di matematica? I congressi dei professori di matematica*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII (in stampa). In L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Anzio Nettuno, 18-21 novembre 2004, Roma, 2005, pp. 303-344, si trova in appendice un resoconto dei temi dibattuti e degli ordini del giorno approvati nei congressi della Mathesis dal 1898 al 1923; cfr. anche il sito www.dm.unito.it/mathesis/documenti.html.

[42] Per la storia della Federazione si veda L. Ambrosoli, *La Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media dalle origini al 1925*, Firenze, La Nuova Italia, 1965. Si veda anche il fondo *Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media*, di circa 50 mazzi, conservato nella Biblioteca comunale dell'Archiginnasio, Bologna.

co[43] anche se la Federazione, per mantenere la coesione interna, non aderì mai ad un partito politico. Fin dagli inizi lo storico Gaetano Salvemini ne fu un animatore instancabile.

È abbastanza singolare che questo impegno da parte degli insegnanti, e dei matematici in particolare, non corrispondesse, nell'ultimo ventennio del XIX secolo, a un miglioramento significativo della qualità dell'insegnamento. Per quanto concerne la matematica basta considerare la serie di provvedimenti legislativi emanati fra il 1881 e il 1904 per rendersi conto della progressiva svalutazione dell'importanza di questa disciplina, sia per quanto riguarda i contenuti dei programmi, sia per il numero di ore ad essa riservate. Le relazioni ufficiali sugli esami di licenza liceale degli anni ottanta mostrano che l'insegnamento della matematica, ma anche quello di altre materie, era ritenuto in molti casi inadeguato[44] e l'esame comparativo dei programmi e degli orari nelle scuole secondarie classiche italiane ed europee,[45] promosso nel gennaio del 1887 dal Ministero della pubblica istruzione, metteva chiaramente in evidenza i vari difetti del liceo-ginnasio italiano soprattutto in confronto con le scuole germaniche. Innanzitutto rilevava un numero eccessivo di ore dedicato alla lingua patria e la mancan-

[43] Cfr. Ambrosoli, *La Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media* …, cit., cap. 7.

[44] Cfr. Ministero della Pubblica Istruzione, «Bollettino Ufficiale», VIII (Maggio 1882) pp. 375-398 e IX (Aprile 1883) pp. 264-284.

[45] Cfr. *Esame comparativo dei programmi nelle scuole secondarie classiche,* «Bollettino Ufficiale dell'Istruzione», Ottobre 1887, XIII, pp. 193-241. Era presidente della commissione il matematico Valentino Cerruti, professore di meccanica razionale all'Università di Roma.

za dell'insegnamento delle lingue straniere[46] e poi, per quanto riguarda la matematica, l'assenza di alcuni temi quali la geometria analitica e il calcolo differenziale (che in Prussia erano previsti come argomenti complementari fin dal 1882), lo scarso coordinamento fra l'insegnamento della matematica e quello della fisica e, infine, l'adozione di un metodo didattico esclusivamente razionale con poco spazio alle applicazioni.

Per ridare vita a un sistema scolastico non più rispondente ormai alle esigenze della società, il ministro Orlando nel 1904 non trovò di meglio che emanare un decreto che concedeva agli studenti del secondo anno di liceo la facoltà di scegliere fra il greco e la matematica «liberando solo dall'inutile peso gl'incapaci per predestinazione»[47] in una di queste due discipline. Il decreto verrà abolito solo nel 1911 nonostante avesse suscitato, come è naturale, la corale protesta sia degli insegnanti di scuola secondaria, sia dei professori universitari, fra cui matematici ben noti quali Giuseppe Veronese Ernesto Pascal, Valentino Cerruti, Salvatore Pincherle e Cesare Arzelà.[48]

Agli inizi del Novecento, a quarant'anni dall'Unità d'Italia, vari fattori, indicavano in modo palese l'urgenza di una riforma. I congressi della Mathesis di inizio secolo - Torino 1898, Livorno 1901, Napoli 1903, Milano 1905 - non solo mostravano chiaramente come, rispetto a qua-

[46] Cfr. Appendice 2, Tavola 1.

[47] *R. Decreto che approva gli orari e i programmi per l'insegnamento del greco e della matematica nel ginnasio e nel liceo*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», XXXI, II.52, Roma 29 dicembre 1904, p. 2851 e art. 3 a p. 2856.

[48] Cfr. «Bollettino della Mathesis», IX, 5-6, 1905, pp. 37-91.

rant'anni prima, la partecipazione degli insegnanti alla politica scolastica fosse molto più attiva, ma mettevano anche in evidenza quante e quali fossero le carenze della scuola secondaria. Inoltre, il mutato contesto storico e sociale – che aveva prodotto, fra l'altro, un notevole incremento degli iscritti[49] – e l'influenza dei movimenti di riforma nei vari paesi europei – in particolare quello promosso in Germania da Klein e in Francia da G. Darboux[50] – rendevano manifesto che la scuola non aveva saputo stare al passo con i tempi.

4. *Felix Klein e l'insegnamento della matematica: assunti epistemologici e influenza sui matematici italiani*

L'interesse di Klein per la scuola e i suoi problemi organizzativi e didattici si può far risalire al 1872 anno in cui pubblicò, come è ben noto, il cosiddetto *Programma di Erlangen*, tradotto poi in italiano da Gino Fano,[51] giovane rappresentante della scuola italiana di geometria algebrica. Infatti, nel 1872, durante la cerimonia per la sua nomina a professore ordinario dell'Università di Erlangen, egli pronunciò un discorso inaugurale, *Antrittsrede*, in cui illustrava i principi su cui fondare l'insegna-

[49] Gli iscritti alla scuola secondaria nel periodo dal 1861 al 1901 erano passati da 18231 a 94572.

[50] Cfr. B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin, *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Vuibert, Paris, 1996, in particolare gli articoli di B. Belhoste, M. Artigue e G. Schubring.

[51] F. Klein, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, «Annali di matematica pura ed applicata», s. 2, 17, 1889, pp. 307-343.

mento della matematica e il suo modo di concepirne la funzione e i rapporti con le altre discipline, tracciando un quadro destinato a maturare e a evolversi negli anni fra il 1872 e il 1900.[52]

A partire dalla metà degli anni novanta egli cominciò a interessarsi al problema della formazione degli insegnanti organizzando seminari rivolti espressamente ad essi nella speranza di invertire la tendenza, allora prevalente, verso approcci alla matematica troppo formali e astratti, promuovendo i collegamenti con le altre discipline scientifiche e lo sviluppo dell'intuizione spaziale.[53]

> Mi pareva – egli scrive – che l'insegnamento di tipo matematico scientifico fosse troppo grettamente legato alle competenze specifiche dei vari docenti. Mi pareva che esso andasse modificato: anzitutto bisognava, ancor più che in passato, porre in primo piano il legame fra tutte le discipline scientifiche e contrastare un'eccessiva specializzazione, priva

[52] Cfr. in proposito G. Schubring, *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein*, in D. Rowe, J. McCleary (editors), *The History of Modern Mathematics*, London, Academic Press, 1989, vol. II, pp. 170-220 e D. Rowe, *Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede". A trascription with English Translation and Commentary*, «Historia Mathematica», 12, 1985, pp. 123-141. A proposito di Klein e l'insegnamento della matematica si vedano anche P. Nastasi (a cura di), *Le "Conferenze Americane" di Kelix Klein*, Pristem Storia, 3-4, 2000 e P. Gario, *Quali corsi per il futuro insegnante? L'opera di Klein e la sua influenza in Italia*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A., s. VIII, 2006, IX-A, pp. 131-141.

[53] Si veda in proposito il resoconto entusiastico di Gino Fano che ebbe modo di perfezionarsi a Göttingen sotto la guida di Klein: G. Fano, *Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga*, «Rivista di matematica», 4, 1894, pp. 170-187.

> d'idee guida generali; in secondo luogo, si doveva includere la Matematica applicata nell'insegnamento delle discipline per cui essa è rilevante, come la Tecnica, l'Astronomia, la Geodesia, le Assicurazioni; infine bisognava organizzare, come un tutto organico, l'intero settore dell'apprendimento matematico dai primi inizi, nella scuola elementare, fino alla più alta ricerca scientifica. Mi era sempre più chiaro che, trascurando questa visione generale, ne avrebbe sofferto anche la ricerca scientifica pura che, allontanandosi dallo sviluppo culturale generale così vario e vitale, si condannava all'inaridimento come una pianta in una cantina senza sole.[54]

Un memorandum (*Gutachten*)[55] del maggio 1900 illustra l'evoluzione del pensiero di Klein sull'organizzazione scolastica e contiene in sintesi i punti cardine del famoso programma di riforma in matematica, che troverà la sua prima espressione pubblica cinque anni dopo in un congresso tenuto a Merano.[56] Klein affermava che i tre tipi paralleli di scuola secondaria (*Gymnasium* con il greco e il latino, *Realgymnasium* con il latino, *Realschule* senza lingue antiche) avrebbero dovuto essere considerati come equivalenti, ciascuno con programmi di matematica ridefiniti in modo da rendere possibile il passaggio da una qualunque delle scuole secondarie ai due tipi di istru-

[54] F. Klein, *La mia vita*, in P. Nastasi (a cura di), *Le "Conferenze Americane" di Kelix Klein*, Pristem Storia, 3-4, 2000, pp. 157-177, cit. a p. 167.

[55] Il documento è trascritto in Schubring, *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany* …, cit., Appendix II.

[56] A. Gutzmer, *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht», 36, 1905, pp. 533-580.

zione superiore, quella universitaria e quella politecnica. Una riforma di questo tipo per essere efficace richiedeva però cambiamenti che andavano aldilà del piano istituzionale. Si rendevano necessari sia un nuovo approccio alla formazione degli insegnanti, sia modifiche nei programmi di matematica delle scuole secondarie.

In particolare Klein proponeva di trasferire nell'insegnamento medio, anche in quello delle scuole classiche, la geometria analitica e, soprattutto, il calcolo differenziale e integrale in modo da offrire allo studente una base matematica sicura per gli studi superiori: il concetto di funzione avrebbe dovuto pervadere tutto il curriculum di matematica. Dopo aver cercato, senza riuscirvi, di ottenere questi cambiamenti di programmi 'dall'alto', cioè per decreto, coinvolgendo il ministro dell'istruzione, egli si impegnò in varie attività volte a ottenere l'appoggio degli insegnanti e a far nascere così tali cambiamenti 'dal basso'. Il *pensiero funzionale* divenne lo slogan di questo suo movimento di riforma e alcune scuole pilota cominciarono a sperimentare i nuovi programmi.

Gli assunti metodologici su cui si basa la visione di Klein dell'insegnamento della matematica, quale emerge dai suoi scritti e dalla sua attività di presidente della Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica, sono sostanzialmente i seguenti: colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario; valorizzare le applicazioni della matematica a tutte le scienze naturali; introdurre precocemente i concetti di funzione e di trasformazione; avvalersi dell'aspetto storico della disciplina; catturare l'interesse dell'allievo presentandogli la materia in modo intuitivo; dare maggiore spazio alla 'matematica approssimata' (*Approximationsmathematik*), cioè 'la matematica esatta delle relazioni approssimate' e, infine, dare risalto nella formazione degli insegnanti alle matematiche elementari considerate da un punto di vista superiore

Proprio da questa visione della didattica della matematica nasce l'opera *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*[57] nella quale Klein dedica anche un'ampia appendice a illustrare i caratteri dell'insegnamento della geometria nei vari paesi europei. Per quanto concerne l'Italia,[58] egli sottolinea soprattutto due aspetti: l'imponente fioritura di manuali di alto valore scientifico dopo il 1867 e l'attenzione eccessiva al rigore logico,[59] ma rileva anche la presenza di un movimento di riforma – e cita esplicitamente l'Associazione Mathesis – volto a modernizzare l'insegnamento della geometria, e della matematica in generale, seguendo le tendenze tedesche e francesi.

Infatti molti dei matematici italiani attivi nella ricerca avanzata che a vario titolo si interessavano dei problemi della scuola, avevano all'epoca come meta privilegiata per il perfezionamento post lauream, o per i loro viaggi

[57] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I *Arithmetik, Algebra, Analysis*, II *Geometrie*, III *Präzisions-und Approximationsmathematik*, Berlin, Springer, 1925-1933. La prima edizione dell'opera risale al 1908-1909.

[58] Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* ..., cit., II *Der Unterricht in Italien*, pp. 245-250.

[59] Per descrivere i rischi di un insegnamento che dia un eccessivo rilievo al rigore logico Klein introduce una suggestiva metafora: «Quando dalla valle si sale su una montagna molti percepiscono come gradevole l'aria sempre più pura e rarefatta; però non è affatto vero che l'ulteriore rarefarsi dell'aria aumenti sempre più la sensazione di benessere fisico, anzi c'è un limite oltre il quale, l'esistenza non è più possibile. Così io penso che l'entusiasmo dei logici per l'eliminazione di ogni intuizione sia alquanto avventato», Ibidem, pp. 248-249.

di studio, le università germaniche, in particolare quelle di Leipzig e di Göttingen dove insegnò Klein. Fra questi vale la pena di ricordare Corrado Segre,[60] fondatore della scuola italiana di geometria algebrica, Gino Fano, Giuseppe Veronese e Federigo Enriques, che da questi viaggi trassero impulsi non solo per la scelta dei metodi e dei filoni di ricerca, ma anche per il modo di concepire l'insegnamento della matematica.[61] Oltre al *Programma di Erlangen*, furono tradotti in italiano alcuni scritti di Klein più strettamente inerenti la didattica prima ancora che nascesse la Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica, di cui egli fu il primo presidente e che, naturalmente, favorì la diffusione del suo pensiero in tutto il mondo. Tra essi ricordiamo le *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*,[62] tradotte da Francesco Giudice e la conferenza *Sullo spirito aritmetico nella matematica* apparsa sui Rendiconti del Circolo matematico di Palermo nella traduzione di Salvatore

[60] Infatti Segre non solo promosse la traduzione in italiano del *Programma di Erlangen*, da parte dell'allievo Fano, come si è già detto, ma nelle lezioni di tipo didattico e metodologico che per 19 anni tenne ai futuri insegnanti presso la Scuola di Magistero dell'Università di Torino, fece propri gli assunti pedagogici di Klein, cfr. L. Giacardi, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, VI-A, 2003, pp. 141-164.

[61] Si veda anche la ricca corrispondenza conservata a Göttingen nella Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek, faldone *F. Klein*, in particolare le lettere di C. Segre, G. Fano, G. Loria, F. Enriques e G. Castelnuovo.

[62] F. Klein, *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Torino, Rosenberg & Sellier, 1896. Fu G. Loria a promuoverne la traduzione, cfr. la lettera di Loria a Klein, Genova 22.7.1895, Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek, *F. Klein* 10.

Pincherle. Questa si chiudeva con alcune considerazioni sull'importanza dell'intuizione sia nell'insegnamento elementare della matematica, sia in quello per i naturalisti e gli ingegneri, considerazioni suggellate da una delle metafore care a Klein:

> Io paragono la scienza matematica ad un albero, che sprofonda le sue radici ognora più nel terreno, mentre erge liberamente sempre più in alto i suoi rami ombrosi. Dobbiamo noi considerare come parti essenziali di esso i rami o le radici? C'insegnano i botanici che la domanda è male posta: che la vita dell'organismo sta piuttosto nel ricambio organico fra le sue varie parti.[63]

Ad apprezzare la visione didattica e metodologica di Klein in Italia furono soprattutto i matematici della scuola italiana di geometria algebrica, Segre, Fano, Gino Loria[64], Francesco Severi, Enriques[65] e, in modo particolare come vedremo, Guido Castelnuovo. Fu sicuramente la grande affinità nel concepire la ricerca scientifica a favorire questa consonanza di pensiero.

Ma anche illustri membri della scuola di logica matematica di Peano risentirono dell'influenza di Klein. Innanzitutto Bettazzi, il fondatore della Associazione Mathesis, che fa esplicitamente riferimento alla visione didattica di Klein nell'articolo *La pratica nell'insegnamento della matematica,*[66] in cui espone gli assunti metodologici

[63] F. Klein, *Sullo spirito aritmetico nella matematica*, «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», 10, 1896, pp. 107-117, cit. a p. 117.

[64] Si veda in questo volume il saggio di F. Furinghetti.

[65] Cfr. nota 31.

[66] R. Bettazzi, *La pratica nell'insegnamento della matematica*, «Atti R. Accademia Lucchese S. L. A.», 30, 1900, pp. 503-528.

e pedagogici che guidano tutta la sua attività nella scuola. Se, da un lato, come Peano, egli è un sostenitore del rigore logico, indispensabile per ottenere chiarezza e semplicità di esposizione, dall'altro, come Klein, ritiene «necessario talora, sempre utile nell'insegnamento» l'uso dell'intuizione e della pratica. Bettazzi sottolinea inoltre l'importanza delle applicazioni, che «sono il mezzo migliore per vincere la tradizionale ripugnanza alla matematica, e magari a destarne il gusto»,[67] l'utilità di evidenziare il legame che sussiste fra la matematica e le varie scienze (fisica, cristallografia, topografia, geodesia, …) e fra la matematica e la realtà,[68] e, infine, la necessità dello studio dell'approssimazione perché nessun argomento meglio di questo serve «a fare apprezzare la vera natura della ricerca matematica paragonata alla realtà, e il valore di quella nelle applicazioni».[69]

Della scuola di Peano è però soprattutto Giovanni Vailati che cercò di mettere in opera alcuni degli insegnamenti di Klein in un concreto progetto di riforma dei programmi scolastici.

5. *La Commissione reale per la riforma della scuola secondaria*

5.1 *La scuola media unica*

Nel 1905 il ministro Leonardo Bianchi, sollecitato dai vari segnali che indicavano la necessità di un rinnovamento della scuola, nominò una commissione per la riforma

[67] Ibidem, p. 511.

[68] Cfr. anche Bettazzi, *Le applicazioni della matematica*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», VIII.3, 1903-04, pp. 40-44.

[69] Cfr. Bettazzi, *La pratica nell'insegnamento* …, cit., p. 25.

della scuola secondaria allo scopo di promuovere un'inchiesta ad ampio spettro sulle scuole di secondo grado e di suggerire le innovazioni più urgenti e opportune. Presieduta da Paolo Boselli, ex ministro della pubblica istruzione, la commissione era composta da insegnanti di scuola media, ispettori ministeriali e professori universitari, fra cui lo storico Gaetano Salvemini e il matematico Giovanni Vailati.

Nel discorso di apertura dei lavori il ministro definiva quali dovevano essere le basi della riforma: per evitare la scelta prematura dell'indirizzo di studi egli proponeva una scuola media inferiore unica triennale e senza latino e auspicava una maggiore apertura alle lingue moderne e alle scienze di cui riconosceva apertamente il valore formativo. A questo ciclo inferiore unico dovevano seguire tre rami della scuola media superiore ciascuno con caratteri ben distinti.[70]

La proposta della scuola media inferiore unica, con o senza latino, non era una novità; vari ministri se ne

[70] Cfr. *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia*, 2 voll., Roma, Tip. Cecchini, 1909, II *Risposte al questionario diffuso con circolare 27 marzo 1906*, pp. 9-11.

[71] Nel lontano 1865 Giovanni Maria Bertini aveva presentato al ministro, a nome del Consiglio superiore dell'istruzione pubblica, un'ampia e motivata relazione il cui tema principale era la proposta di una scuola triennale unica preparatoria tanto all'istruzione classica, quanto a quella tecnica (la Commissione reale si rifà esplicitamente alle proposte di Bertini, cfr. *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia* …, cit., I *Relazione*, p. 48 e 55). Due anni dopo il ministro Michele Coppino aveva proposto un disegno di legge per la realizzazione della media unica, ma questo non fu approvato dalla Camera dei deputati. Lo stesso Paolo Boselli, fautore della media inferiore unica, diventato ministro della pubblica istruzione, nel 1888 aveva emanato alcuni decreti volti a spianare il cammino verso la sua

erano fatti promotori senza riuscire ad attuarla.[71] Tutte le precedenti proposte furono esaminate e vagliate attentamente dalla Commissione reale,[72] evidenziando pregi e difetti per trarne indicazioni e al fine di evitare gli errori del passato. Inoltre venne svolta un'ampia inchiesta non solo presso gli insegnanti di tutte le scuole medie italiane, ma anche presso le facoltà universitarie e gli altri istituti superiori, le società scientifiche pedagogiche, le associazioni professionali e gli studiosi di questioni didattiche. A tal scopo la Commissione preparò un questionario suddiviso in varie sezioni: ad una serie di domande relative ai criteri base della riforma, seguivano alcuni quesiti volti a conoscere dalle varie categorie professionali se la preparazione ricevuta nelle scuole secondarie fosse stata soddisfacente; un ulteriore gruppo di domande aveva un carattere didattico e mirava a evidenziare quali miglioramenti di contenuto e di metodo fosse opportuno introdurre nell'insegnamento delle varie materie; l'ultimo gruppo di quesiti riguardava lo stato della scuola relativamente alle strutture e agli aspetti amministrativi.[73]

Questa indagine diede vita a un dibattito molto vivace cui contribuirono in modo significativo soprattutto le

realizzazione, decreti in parte abrogati dal suo successore Pasquale Villari. Un disegno di legge che riprendeva le proposte di Bertini e di Coppino fu presentato dall'onorevole Ferdinando Martini nel 1893, ma non andò in porto. Andarono incontro al medesimo destino altre proposte analoghe successive.

[72] Cfr. *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia* …, cit., I *Relazione*, pp. 22-152.

[73] Le risposte confluirono poi nel volume II dell'opera *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia* …, cit. Il questionario si può leggere anche sul sito http://www.dm.unito.it/mathesis/documenti.html.

associazioni di insegnanti, in particolare la Mathesis e la Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media.

La Mathesis contribuì a diffondere attraverso il suo Bollettino il questionario relativo alla matematica[74] e pubblicò anche un ampio documento che conteneva le linee di un progetto di riforma dell'insegnamento secondario e una sintesi delle risposte ai quesiti inerenti la fisica e la matematica.[75] In particolare, si dimostrava favorevole alla media inferiore unica con accesso a tre rami di scuola superiore: classico, tecnico o moderno e professionale, i primi due rami con pari possibilità di proseguire gli studi all'università (con la sola eccezione per la *Facoltà di Filologia classica*). Inoltre sottolineava il valore formativo delle scienze, l'utilità di introdurre nei programmi elementi di geometria analitica e di calcolo infinitesimale e l'importanza di impartire un insegnamento 'espositivo' della matematica nella media inferiore e 'deduttivo' in quella superiore.

La Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media discusse ampiamente i criteri della riforma della scuola secondaria durante il suo Quarto Congresso nazionale (Milano, 25-28 settembre 1905) e il dibattito si orientò ben presto sul tema della scuola media unica con o senza latino. Dopo una lunga serie di modifiche, correzioni e aggiunte si pervenne all'approvazione di un ordine del giorno che, partendo dalla premessa che la scuola debba «preparare l'uomo e il cittadino», proponeva la sperimentazione di una scuola media unica nel grado inferiore, che desse accesso tanto alle scuole professionali

[74] Cfr. «Bollettino della Associazione Mathesis», X.3-4, 1905-06, pp. 49-60.

[75] Cfr. «Bollettino della Associazione Mathesis», XII.1-2-3, 1907-08, pp. 1-21.

superiori, quanto a due istituti paralleli, uno prevalentemente letterario-classico, l'altro scientifico-moderno.[76] Il tema fu ripreso durante il Settimo Congresso nazionale (Firenze, 25-27 settembre 1909) e a prevalere fu la posizione di Galletti e Salvemini che respingevano assolutamente la scuola media unica e affermavano la necessità che la scuola classica e quella moderna fossero separate fin dall'inizio. Si fecero due votazioni distinte, una prima per la scuola media unica senza latino, che fu bocciata con 80 voti contrari e 26 favorevoli, e una seconda per la scuola media unica con il latino che pure fu respinta con 84 voti contrari e 20 favorevoli.[77]

Proprio i contrasti circa l'unificazione delle scuole medie inferiori, la convinzione che il latino non potesse essere proposto alle masse, né rinviato al quinquennio delle superiori e anche la difficoltà ad accettare una *humanitas* scientifica, fin dal 1906 avevano creato all'interno della Commissione reale opposizioni che avevano portato alle dimissioni di alcuni membri fra i quali Salvemini stesso. Egli avversava la scuola media unica per due ragioni principali. Innanzitutto una siffatta scuola, che egli chiama «scuola minestrone»,[78] avrebbe due anime che mal si conciliano perché dovrebbe accogliere insieme sia coloro che intendono lasciare gli studi per avviarsi a una professione, sia quelli che intendono proseguire verso le medie

[76] Cfr. *Quarto congresso nazionale degli insegnanti delle scuole medie. Milano, 25-28 settembre 1905*, Pistoia, Tip. Sinibuldiana G. Flori e C, 1905, pp. 380-382.

[77] Cfr. *Settimo congresso nazionale degli insegnanti delle scuole medie. Firenze, 25-27 settembre 1909*, Assisi, Tip. Metastasio, 1910, pp. 308.

[78] Cfr. A. Galletti, G. Salvemini, *La riforma della scuola media. Notizie, osservazioni e proposte*, Milano, Remo Sandron, 1908, a p. 66.

superiori e poi verso l'università. In secondo luogo, la scuola media unica posticiperebbe l'insegnamento del latino indebolendo ulteriormente la scuola classica che ha l'importante ruolo di formare coloro che assumeranno posizioni direttive nello stato e nella società. Salvemini era inoltre persuaso che una riforma di tale portata non potesse essere avviata senza una precedente sperimentazione e senza una adeguata formazione degli insegnanti. Piuttosto sarebbe stato preferibile riformare l'istruzione professionale e potenziare la scuola elementare.

Nonostante le difficoltà e i contrasti interni, la Commissione reale presentò nel febbraio 1908 un disegno di legge[79] che proponeva, da un lato, una scuola tecnica professionale di tre anni con accesso all'istituto tecnico e, dall'altro, una scuola media triennale unica, senza latino, con accesso ai tre rami del liceo: classico (con latino e greco), scientifico (con due lingue moderne e potenziamento della sezione scientifica), e moderno[80] (con latino e due lingue straniere).

5.2 *Giovanni Vailati e la* humanitas *scientifica*

I programmi di matematica[81] e le relative indicazioni metodologiche furono redatti con originalità e larghezza di vedute da Vailati, membro della scuola di Peano

[79] Cfr. *Schema di disegno di legge per la riforma della scuola media*, in *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia …*, cit., I *Relazione*, pp. 588-672.

[80] Già nel 1898 il ministro Guido Baccelli aveva approvato, in quelle città che avevano più di un liceo, la sperimentazione di un liceo moderno o riformato dove fossero insegnate due lingue straniere e fosse alleggerito il programma di matematica e di filosofia, ma dopo appena un anno il ministro Nicolò Gallo aveva posto fine alla sperimentazione.

[81] Cfr. Appendice 1.3.

e assiduo frequentatore delle adunanze della Mathesis. Matematico e curioso esploratore di vari rami del sapere, fra cui la storia della scienza, la filosofia e la psicologia, egli vi infuse la sua profonda visione di una *humanitas* scientifica in cui istanze positivistiche, gli assunti epistemologici della scuola di Peano, l'esigenza di democratizzazione della cultura, si uniscono armonicamente al pragmatismo, alla convinzione profonda dell'unità del sapere e del valore formativo della matematica.[82]

Le proposte di Vailati nascevano da un lucido esame dei difetti della scuola secondaria italiana: innanzitutto un insegnamento basato sull'apprendimento passivo che rende la scuola *una palestra mnemonica*, dove l'allievo è occupato ad apprendere (*accipere*) e troppo poco a comprendere (*concipere*);[83] la scarsa interazione fra cultura umanistica e cultura scientifica; l'esorbitante numero di ore dedicato all'insegnamento della lingua e della letteratura italiana; la carenza di strutture a supporto dell'attività didattica, quali biblioteche e laboratori; la mancanza di buoni libri (dizionari, enciclopedie, edizioni dei classici, ecc.), e infine l'eccessivo affollamento delle classi.

Quella che Vailati proponeva è una scuola laboratorio, non nel senso riduttivo di laboratorio per esperienze scientifiche ma «luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a

[82] Per un esame più approfondito cfr. L. Giacardi, *Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, II-A, 1999, pp. 317-352.

[83] G. Vailati, Recensione di *C. Laisant, La Mathématique: philosophie, enseignement*, (1899), in *Giovanni Vailati, Scritti*, a cura di M. Quaranta, Bologna, Forni, 1987, 3 voll., III, p. 261.

sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a *misurarsi* e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa».[84]

L'insegnamento della matematica in particolare, deve seguire un'impostazione sperimentale e operativa e, poiché il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto, gli allievi non devono essere costretti a «imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono», ma devono dimostrare di *saper fare,* non solo di *saper dire.* Il tipo di lezione più adeguato a raggiungere questo scopo è la lezione maieutica che meglio consente all'insegnante di guidare l'allievo a scoprire da solo le verità matematiche e che, pertanto, stimola interrogativi e riflessioni. In una scuola laboratorio occorre, inoltre, valorizzare nel processo dell'apprendimento sia il momento ludico, sia il lavoro manuale che costituisce un ottimo antidoto contro l'illusione diffusa di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole.[85]

L'utilità di un percorso didattico che proceda dal concreto all'astratto si percepisce particolarmente nell'insegnamento della geometria. Alla denominazione di *metodo intuitivo,* comunemente usata per indicare il metodo da seguire nella prima fase dell'insegnamento, Vailati preferisce quella di *geometria sperimentale o operativa* perché più atta a esprimere la differenza con la geometria razionale che deve essere sviluppata nel ciclo superiore di studi: il disegno, semplici strumenti matematici, picco-

[84] G. Vailati, *Idee pedagogiche di H. G. Wells* (1906), *Scritti* cit., III, p. 292.

[85] Cfr. G. Vailati, Recensione di *Maria Begey, Del lavoro manuale educativo,* (1901), *Scritti* cit., III, p. 265.

li esperimenti permettono di scoprire alcune proprietà delle figure geometriche e fanno nascere il desiderio di capire perché sussistano, rendendo più interessante l'apprendimento.

La deduzione, inoltre, afferma Vailati, deve essere usata «non già a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti … ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano».[86] In questo modo la deduzione si presenterà loro anche come un mezzo di scoperta.

Fra gli altri aspetti metodologici sottolineati da Vailati vi sono: l'importanza di mostrare il più presto possibile le applicazioni dell'algebra alla geometria, e viceversa,[87] allo scopo di far percepire subito agli allievi l'unità profonda delle matematiche e di abituarli ad affrontare uno stesso problema con vari metodi e a scegliere, di volta in volta, quello più conveniente; l'importanza di bilanciare rigore e intuizione nell'insegnamento; l'uso della storia della matematica al triplice fine di favorire il dialogo fra cultura scientifica e cultura umanistica, di «rendere l'insegnamento più proficuo … più efficace e insieme più attraente»[88] e di evitare ogni forma di dogmatismo.

Inoltre, richiamandosi espressamente a Klein,[89] Vailati

[86] G. Vailati, *Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane,* Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici, 6-11 aprile 1908, Tip. Accademia dei Lincei, Roma, 1909, p. 485.

[87] G. Vailati, *L'insegnamento della Matematica nel nuovo ginnasio riformato e nei tre tipi di licei,* «Il Bollettino di matematica», Anno IX, 1910, pp. 56-57.

[88] G. Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze,* (1897), *Scritti* cit., II, p. 10.

[89] Cfr. Vailati, *L'insegnamento della Matematica nel nuovo ginnasio riformato e nei tre tipi di licei* … cit., p. 52.

osserva che la distinzione fra matematiche elementari e superiori è spesso dovuta a ragioni di indole storica e non corrisponde ad alcun criterio di convenienza didattica. Pertanto, per la grande importanza che rivestono nelle applicazioni alle altre scienze, introduce in tutti i tre tipi di liceo i concetti di funzione e di derivata e, nel liceo scientifico, anche quello di integrale. Nel liceo moderno, rivolto ai giovani avviati ad attività o a studi economico-sociali, inserisce il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni; nel liceo classico, invece, privilegia lo studio della geometria euclidea, accompagnandolo con letture di passi delle opere dei grandi geometri antichi, allo scopo di offrire un quadro più completo della civiltà classica, non limitato alla letteratura e all'arte.

I programmi di matematica elaborati da Vailati, non furono esenti da critiche.[90] In particolare l'articolo del 1907,[91] dove egli proponeva un insegnamento sperimentale e operativo della geometria, diede origine a un interessante dibattito di tipo metodologico con Giuseppe Veronese e con Beppo Levi che sostenevano invece che l'insegnamento della geometria nella scuola media inferiore dovesse essere essenzialmente intuitivo. Le proposte di Vailati, inoltre, furono uno dei principali argomenti di discussione proposti dalla Mathesis durante il congresso tenutosi a Firenze dal 16 al 23 ottobre 1908. La relazione sul tema, preparata da una commissione ap-

[90] Si veda L. Giacardi, *Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati. Le reazioni dei matematici,* in (a cura di E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti) *Conferenze e seminari, 2001-2002,* Torino, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, 2002, pp. 233-255, in particolare il paragrafo 5.

[91] G. Vailati, *L'insegnamento della Matematica nel primo triennio della Scuola secondaria,* (1907), *Scritti* cit., III, pp. 302-306.

posita costituita dai matematici Luigi Berzolari (Università di Pavia), Ettore Bortolotti (Università di Modena), Roberto Bonola (Scuola normale di Pavia) ed Emilio Veneroni (Istituto tecnico di Pavia), proponeva alcune critiche puntuali dettate soprattutto dalla convinzione che «inquadrare … le cognizioni, le notizie ed i mezzi che si danno agli allievi in un sistema razionale, … sembra altrettanto necessario che dare lo scheletro ad un organismo».[92] La commissione, infatti, pur concordando con Vailati sulla giusta esigenza di continui riferimenti ad applicazioni e a problemi pratici, non riteneva opportuno «sacrificarle l'altra esigenza, non meno importante, dell'unità e della concatenazione logica delle teorie, che … è la molla precipua dell'apprendere e, soprattutto, del ritenere».[93]

Le principali critiche avanzate dalla commissione erano la mancanza di una trattazione della teoria delle proporzioni, l'assenza di una sistemazione razionale dell'aritmetica, l'eccessivo sminuzzamento di alcune parti del programma e l'abolizione della geometria descrittiva. Per quanto riguarda invece l'introduzione dei concetti di derivata e di integrale la commissione concordava pienamente con Vailati ritenendoli fecondi di applicazioni interessanti alle altre scienze e condivideva anche la diversa impostazione metodologica da lui data ai programmi dei tre tipi di liceo.

Durante il congresso della Mathesis, tenutosi l'anno

[92] L. Berzolari, E. Bortolotti, R. Bonola, E. Veneroni, *Relazione sul tema II: I programmi di matematica per la Scuola Media riformata*, Atti del I Congresso della "Mathesis" Società italiana di matematica, Firenze 16-23 Ottobre 1908, Padova, Premiata Società Cooperativa Tipografica, 1908, pp. 26-33, cit. p. 27.

[93] Ibidem, p. 32.

successivo a Padova dal 20 al 23 settembre 1909, a pochi mesi dalla scomparsa di Vailati, l'illustre geometra Guido Castelnuovo nella sua relazione sui lavori della Commissione Internazionale appena creata per effettuare un esame comparato dei metodi e dei programmi di insegnamento della scuola secondaria, ebbe invece parole di elogio per le proposte di riforma elaborate dalla «mente vasta e spregiudicata» di Vailati e, «data la lentezza con cui le riforme si compiono in Italia», propose agli insegnanti di attuarne da subito nelle loro classi le linee generali.[94]

Le discussioni delle varie sezioni della Mathesis mostrano che non tutti condividevano le opinioni di Castelnuovo: nella sezione di Napoli per esempio, mentre R. Marcolongo era entusiasta, G. Gallucci, pur condividendone le linee generali, riteneva che i programmi fossero da rifare perché poco organici, troppo ampi in rapporto all'orario e con lacune ingiustificate (teoria dei numeri reali, …).[95] La sezione torinese presieduta da Bettazzi, si dichiarava contraria alle sperimentazioni parziali e A. Padoa, afferente alla sezione ligure, proponeva una nuova articolazione dei programmi di matematica a partire dalle elementari; essa prevedeva una scuola media ripartita in tre corsi successivi: preparatorio, deduttivo e complementare, i primi due triennali e comuni e il terzo articolato in tre rami, classico, moderno e scientifico. An-

94 G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge*, Atti del II Congresso della "Mathesis" Società italiana di matematica, Padova, 20-23 Settembre 1909, Padova, Premiata Società Cooperativa Tipografica, 1909, Allegato F, pp. 1-4, cit. p. 3.

95 *Verbali delle adunanze delle sezioni*, «Bollettino della Mathesis», II, 1910, pp. 67-81.

che l'impostazione metodologica si discostava da quella di Vailati, soprattutto per quanto riguarda l'insegnamento della geometria.[96]

Queste discussioni si collegano in larga misura all'ampio dibattito internazionale sul ruolo dell'esperienza e dell'intuizione nell'insegnamento secondario,[97] che in Italia trovò espressione nelle due opposte scuole di pensiero, quella di geometria algebrica di Segre e quella di logica matematica di Peano e affonda le sue radici in due diversi modi di concepire la ricerca matematica.[98]

Comunque la riforma proposta dalla Commissione reale non fu varata. Rimandata agli anni venti, la riorganizzazione della scuola media si attuerà in altri termini; la cultura positivistica e liberal-democratica sarà sconfitta dalle nuove correnti politiche e dall'idealismo trionfante.

6. *Guido Castelnuovo e il liceo moderno: "Abbattere il muro che separa la scuola dal mondo esterno"*

Durante il Congresso internazionale dei matematici che

[96] A. Padoa, *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, «Bollettino di Matematica», IX, 1910, pp. 73-94.

[97] Si veda per esempio l'ampio resoconto di D. E. Smith, *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools,* «L'Enseignement mathématique», 14, 1912, pp. 507-534, tradotto in parte da G. Castelnuovo sul «Bollettino della Mathesis», 1912, pp. 134-139.

[98] Non è un caso che *L'Enseignement Mathématique* proponga nel 1902 (4, pp. 208-211) un'inchiesta sul metodo di lavoro dei matematici i cui risultati vengono pubblicati nei tomi 7 (1905), 8 (1906), 9 (1907) e 10 (1908) e che offre lo spunto per articoli e discussioni sull'invenzione matematica e sull'intuizione.

si tenne a Roma dal 6 all'11 aprile 1908 un'ampia sezione dei lavori fu dedicata all'esame dei programmi e dei metodi dell'insegnamento della matematica nelle varie nazioni[99] e, su suggerimento di David Eugene Smith,[100] si decise di creare un comitato permanente per lo studio delle questioni riguardanti la didattica della matematica nelle scuole secondarie. Nasceva così la Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica (CIEM) che ebbe come primo presidente Klein e come delegati per l'Italia Castelnuovo, Enriques e Vailati, sostituito, dopo la sua scomparsa nel maggio 1909, da Gaetano Scorza.

Come delegato italiano (poi membro del Comité Central) della CIEM Castelnuovo instaurò importanti contatti internazionali e promosse una maggiore informazione sui movimenti di riforma europei, in particolare su quello di Klein, di cui egli condivideva in pieno gli assunti metodologici. Quando poi assunse nel 1911 la presidenza della Mathesis fece del Bollettino dell'associazione il portavoce dei lavori della CIEM e della sottocommissione italiana, ospitando resoconti delle adunanze, traduzioni di articoli e relazioni su vari temi: la formazione degli insegnanti e le Scuole di Magistero; l'ordinamento degli studi matematici nel I biennio uni-

[99] Vi furono interventi di D. E. Smith, R. Suppantschitsch, G. Vailati, H. Fehr, A. Conti, Z.G. De Galdeano, E. Beke, A. Gutzmer, C. Godfrey, F. S. Archenhold, J. Andrade, e parteciparono alla discussione fra gli altri E. Borel, M. Simon, G. Peano, H. G. Zeuthen e F. Enriques, cfr. *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici* (Roma 6-11 aprile 1908), Roma, Tip. della R. Accademia dei Lincei, 1909; 3 voll., I, pp. 45-46 e *Sezione IV*, III, pp. 371 segg.

[100] Cfr *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici* …, cit., I, p. 45-46 e 50-51, e III, p. 465.

versitario; l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, classiche, tecniche e normali; l'insegnamento nelle scuole "infantili e elementari"; i libri di testo. Durante il suo mandato presidenziale, inoltre, Castelnuovo si impegnò in prima persona nella politica scolastica dedicandosi nel 1912-13 alla stesura dei programmi e delle istruzioni del Liceo moderno, attuando così, in parte, le proposte di Vailati e della Commissione reale.

Il suo interesse per la scuola nasceva da ragioni sociali come del resto ricorda la figlia Emma:[101]

> Nous demandons parfois - egli scrive - si le temps que nous consacrons aux questions d'enseignement n'aurait pas été mieux employé dans la recherche scientifique. Eh bien, nous répondons que s'est un devoir social qui nous force à traiter ces problèmes [...] Ne devons-nous pas faciliter à nos semblables l'acquisition du savoir, qui est à la fois une puissance et un bonnheur?.[102]

Anche Castelnuovo, come Vailati, arriva ad elaborare la sua visione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria partendo dalle critiche al sistema scolastico italiano, che egli vede caratterizzato da un insegnamento troppo astratto e teorico che disdegna ogni riferimento alla pratica e alle applicazioni, e irrigidito da un'eccessiva specializzazione con un'esasperata divisione del lavoro che porta a una visione distorta della cultura.[103]

[101] Cfr. E. Castelnuovo, *Guido Castelnuovo: Scuola e Società*. Ringrazio Emma per avermi inviato il testo del suo articolo in corso di stampa.

[102] G. Castelnuovo, *Discours de M. G. Castelnuovo*, in *Compte Rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique, Paris, 1-4 avril 1914*, «L'Enseignement mathématique», 16, 1914, p. 191.

[103] «Nello stesso interesse della nostra scienza – scrive Castelnuovo – dobbiamo combattere quella tendenza ristretta dello spirito

Le domande che egli si pone per cercare di capire che cosa la scuola secondaria debba offrire ai giovani sono sostanzialmente tre: a chi deve rivolgersi l'insegnamento medio, quale scopo deve proporsi, quali sono le qualità che tale insegnamento deve sviluppare. Sono soprattutto considerazioni di tipo sociale quelle che gli suggeriscono le risposte. La scuola, secondo Castelnuovo deve principalmente guardare ai giovani che aspirano alle libere professioni «sia perché costituiscono la grande maggioranza delle nostre scolaresche, sia perché su di essi principalmente deve fare assegnamento il paese nel suo progressivo sviluppo».[104] Lo scopo primario deve essere quello di «formare l'uomo civile»[105] perché «la scuola non è veramente efficace se essa non si dirige alle intelligenze medie, se non riesce a formare quella democrazia colta, che è pur la base di ogni Nazione moderna».[106] Le qualità che un insegnante deve saper

che, col creare barriere troppo rigide fra la matematica e le scienze d'osservazione, finisce per inaridire le fonti dei futuri progressi di quella», e ancora «la cultura generale che esso (l'insegnamento medio) si propone di fornire non deve assomigliare ad un territorio selvaggio e montuoso, le cui vette illuminate dal sole sono separate da abissi profondi e inesplorati. Deve esser piuttosto un dominio già civilizzato, le cui provincie siano collegate da ponti e strade», cfr. G. Castelnuovo, *La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla Scienza moderna*, Atti III Congresso della Mathesis, Genova, 21-24 ottobre 1912, Roma, Tip. Manuzio, 1913, pp. 19-20 e 16-17.

[104] Ibidem, pp. 18-19.

[105] Cfr. *Ginnasio - Liceo Moderno. Orario - Istruzioni - Programmi*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», XL, 45, 30 ottobre 1913, p. 2761. Cfr. anche in questo volume l'articolo di A. Brigaglia.

[106] G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge. Relazione del prof. G. Castelnuovo della R. Università di Roma*, Atti del II Congresso della Mathesis Società italiana di

sviluppare in modo armonico e coltivare nei suoi allievi sono la fantasia creatrice, lo spirito di osservazione e le facoltà logiche, evitando «gli acrobatismi intellettuali» e un eccessivo rigore:

> la scuola media deve dare non la sapienza, ma il desiderio, il bisogno della sapienza; non la cultura enciclopedica, ma un'idea chiara, per quanto necessariamente molto limitata, delle principali questioni che i vari rami di conoscenza prendono in esame, e di qualcuno dei metodi che furono impiegati per trattarle. Non si tema di sacrificare la profondità alla larghezza di idee [...] Certo, un insegnamento così inteso non potrà fornire al licenziato la preparazione specifica per l'una o per l'altra Facoltà universitaria. Ma non deve esser questo il compito delle scuole medie. Esse devono dare solo l'attitudine a seguire studi più elevati.[107]

Nell'articolo *Il valore didattico della matematica e della fisica*,[108] che costituisce quasi un manifesto del pensiero didattico di Castelnuovo, l'accostamento della matematica alla fisica non è casuale. Infatti egli sostiene l'importanza dell'osservazione e delle attività sperimentali, l'utilità del continuo confronto fra astrazione e realtà e l'importanza delle applicazioni «per mettere in luce il valore della scienza». Egli ritiene inoltre che si debbano valorizzare i procedimenti euristici per due ragioni «la prima, e più elevata, è che quel

matematica, Premiata Società Cooperativa Tipografica, Padova, 1909, Allegato F, pp. 1-4, a p. 4.

[107] G. Castelnuovo, *La scuola media e le attitudini che essa deve svegliare nei giovani*, Federazione Nazionale Insegnanti Medi, 1910, pp. 33-47. Ringrazio Paola Gario per avermi procurato questo articolo.

[108] G. Castelnuovo, *Il valore didattico della matematica e della fisica*, «Rivista di Scienza», 1, 1907, pp. 329-337.

tipo di ragionamento costituisce il più efficace mezzo per giungere alla verità, non solo nelle scienze sperimentali, ma nella stessa matematica» e la seconda è che proprio quella è «l'unica forma di procedimento logico, che sia applicabile nella vita quotidiana ed in tutte le conoscenze che con questa hanno rapporti».[109] A conclusione del suo articolo Castelnuovo raccomanda all'insegnante di attingere alla storia della scienza per far comprendere ai giovani «il carattere relativo e provvisorio e di ogni teoria».[110]

Per rendere più incisivo il suo punto di vista spesso Castelnuovo inserisce nei suoi articoli e nei suoi interventi dei veri e propri slogan: «Riabilitare i sensi», «Abbattere il muro che separa la scuola dal mondo esterno», «Accostare l'insegnamento alla natura e alla vita».

Nel 1911 il ministro Luigi Credaro istituì un liceo moderno che si differenziava dal classico a partire dalla II liceo. Nei programmi del nuovo corso di studi, al greco veniva sostituita una lingua moderna (tedesco o inglese), si dava più ampio sviluppo alle materie scientifiche e si aggiungevano elementi di scienze economiche e giuridiche e, per quanto riguarda la matematica, si dava maggiore rilievo alle approssimazioni numeriche, si introducevano la nozione di funzione e i concetti di derivata e di integrale.

Castelnuovo che, insieme all'ispettore ministeriale Mineo Chini, fu l'estensore dei programmi,[111] nelle istruzioni metodologiche ad essi allegate ribadisce i capisaldi

[109] Ibidem, p. 336.

[110] Ibidem, p. 336.

[111] Cfr. *Ginnasio - Liceo Moderno. Orario - Istruzioni - Programmi,* «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», XL, 45, 30 ottobre 1913, pp. 2791-2795, in Appendice 1.4.

del suo pensiero didattico: l'importanza di coordinare l'insegnamento della matematica con quello della fisica, di evitare le sottigliezze della critica moderna pur guardandosi da un empirismo grossolano, di tener conto del processo storico che ha condotto ai problemi e alla loro risoluzione e, soprattutto, di interessare la scolaresca facendo comprendere il ruolo importante della matematica nella società moderna.

> Ma se si vuole - egli scrive - che l'allievo delle scuole medie senta di questa matematica moderna il soffio ispiratore ed intravveda la grandezza dell'edifizio, occorre parlargli del concetto di funzione ed indicargli, sia pure sommariamente, le due operazioni che costituiscono il fondamento del Calcolo infinitesimale. Così egli se avrà spirito scientifico, acquisterà un'idea più corretta ed equilibrata dell'organismo odierno delle scienze esatte [...]. Se poi la mente dell'allievo sarà portata verso altre discipline, egli almeno troverà nella matematica, anziché un esercizio logico a lui penoso, una raccolta di metodi e risultati che hanno facili applicazioni in problemi concreti.[112]

I programmi del liceo moderno cominciarono ad essere attuati dal 1914-15 pur con qualche difficoltà dovuta alla mancanza di docenti preparati, all'ostilità degli insegnanti del liceo classico, che dirottavano al liceo moderno gli alunni meno bravi, e alla carenza di fondi che ostacolavano la realizzazione dei laboratori scientifici.[113]

[112] G. Castelnuovo, *La riforma dell'insegnamento matematico secondario nei riguardi dell'Italia*, «Bollettino della Mathesis», XI, 1919, pp. 1-5, a p. 5.

[113] Queste difficoltà venivano evidenziate da Bettazzi e da L. Brusotti in un'inchiesta promossa dalla Mathesis, «Bollettino della Mathesis», 1916, 3, pp. 94-96.

Attento ai contatti internazionali Castelnuovo presentò i nuovi programmi alla Conférence internationale de l'enseignement mathématique che si tenne a Parigi nel 1914. Fra le reazioni dei matematici colpisce quella di E. Beke che, come molti stranieri, mostra l'apprezzamento per la manualistica italiana, ma sottolinea anche l'approccio rigorista dell'insegnamento in Italia:

> Nous attendons avec un vif intérêt comment, dans le pays de la critique mathématique où Dini, Genocchi et Peano ont traité des principes du Calcul infinitésimal d'une façon modèle, comment, dans ce pays, on présentera ces principes aux élèves. Nous pouvons être sûr que si ce travail est fait par les mêmes hommes qui, dans leurs manuels de géométrie, si intéressants, mais si difficiles à suivre dans d'autres pays, ont cherché avec virtuosité à concilier une exposition scientifique rigoureuse avec le but que se propose l'enseignement secondaire, notre mouvement réformiste sera infiniment redevable à nos compagnons de lutte italiens.[114]

Fra i manuali scritti per il nuovo tipo di scuola sono da segnalare quello di Enriques e Amaldi, *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni* (1914) e quello di Sebastiano Catania, *Corso di algebra elementare per i licei classici e moderni secondo i nuovi programmi* (1914) che, pur cercando entrambi di adeguarsi alle istruzioni di Castelnuovo,

[114] E. Beke, *Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et integral dans les classes supérieures des établissements secondaires. Rapport général*, «L'Enseignement mathématique», 16, 1914, pp. 245-284 (cit. a p. 255), e *Discussion*, pp. 293-306. I programmi e le istruzioni metodologiche furono anche tradotti in francese: cfr. G. Loria, *Les Gymnases-lycées "modernes" en Italie*, «Zeitschrift für math. und natur. Unterricht aller Schulgattungen», 1914, pp. 188-193.

sono caratterizzati da approcci metodologici diversi che mettono a confronto le due scuole di pensiero dei loro autori, la scuola di geometria algebrica e quella di logica matematica di Peano[115].

In quegli stessi anni la Mathesis invocava anche una riforma dei programmi di matematica degli istituti tecnici, «programmi invecchiati e difettosi, sia per le lacune che presenta[va]no, sia per la pletora di argomenti di scarso valore educativo e scientifico»[116]. In particolare proponeva di introdurre, così come si era fatto nel liceo moderno, le nozioni di derivata e di integrale definito, auspicando che nell'ultimo anno si stabilisse il legame fra i due concetti e si esponesse il concetto di integrale indefinito. Chiedeva inoltre che il programma di matematica della sezione fisico-matematica si differenziasse da quello delle altre sezioni a partire dal secondo anno di corso.[117] I suggerimenti della Mathesis furono in gran parte recepiti nei programmi per la scuola secondaria elaborati nel 1817.[118] Nelle istruzioni annesse si sottolineava, infatti, che l'insegnamento della matematica

[115] Castelnuovo si era scontrato con Catania sui manuali di algebra per la scuola secondaria improntati ai principi della logica matematica: cfr. G. Castelnuovo, *Risposta ad un'osservazione del Prof. Catania,* «Bollettino della Mathesis», 1913, pp. 119-120, S. Catania, *Sui metodi di insegnamento della matematica nelle Scuole medie,* «Bollettino della Mathesis», 1913, pp. 142-143, G. Castelnuovo, *Osservazioni all'articolo precedente*, Ibidem, pp. 143-145.

[116] Cfr. *Proposta di programmi di matematica per gli Istituti Tecnici*, «Bollettino della Mathesis», VI, 1914, pp. 178-181.

[117] Cfr. *Sulle modificazioni degli orari e dei programmi di Matematica nelle Scuole medie*, «Bollettino della Mathesis», VII, 1915, p. 20.

[118] Cfr. *I nuovi programmi proposti per l'insegnamento della Matematica nelle Scuole Medie*, «Il Bollettino di matematica», XV, 1917-1918, pp. 199-206.

nella sezione fisico-matematica «ha di mira non solo di apprestare agli alunni un istrumento prezioso per gli studi collaterali, per gli studi superiori e per la vita, ma ancora, e maggiormente, di educarli … alla severità del raziocinio».[119] Inoltre si consigliava di non affaticare l'allievo con «preoccupazioni di soverchio rigore» e di dare importanza alle applicazioni fisiche e si suggeriva di introdurre i concetti di limite, derivata e integrale seguendo il processo storico. Questi nuovi programmi, tuttavia, non entrarono mai in vigore anche per il particolare momento storico che l'Italia stava attraversando.

7. *I programmi per l'insegnamento della matematica nelle 'province redente'*

Conclusasi la prima guerra mondiale la discussione sulla riforma della scuola secondaria riprese in modo vivace e, fra i vari problemi che si dovettero affrontare, era particolarmente urgente quello di unificare i programmi delle province Trento e Trieste, appena annesse all'Italia, con quelli delle scuole del Regno. Nel 1919 la Mathesis organizzò a Trieste un convegno[120] per discutere i problemi di metodo e di contenuti che sorgevano dal confronto fra i programmi di matematica italiani e quelli delle 'province redente', conformi a quelli austriaci ispirati alle vedute di Klein fin dal 1908-09.[121]

[119] Cfr. *Riforma dei programmi delle Scuole Medie*, «Il Bollettino di matematica», XVI, 1919, pp. 76-88, a p. 84.

[120] Gli Atti di questo Congresso sono pubblicati sul «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp. 1-62, cfr. anche «Il Bollettino di matematica», XVI, 1919, pp. 109-140.

[121] Cfr. E. Beke, *Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et integral …*, cit., p. 255.

Era allora presidente della Mathesis Federigo Enriques,[122] che da subito svolse un'ampia opera di espansione della società (che in poco tempo triplicò i suoi membri) al fine di incidere maggiormente sul governo. Il suo scopo era quello di veder assegnato un posto adeguato alla formazione scientifica dei giovani non solo per il progresso della ricerca, ma anche per il miglioramento della società.[123] La figura di Enriques, pensatore di acuta intelligenza e di profondi interessi storici, filosofici e interdisciplinari, è così complessa, ricca e a volte contraddittoria, che è impossibile delineare in pochi tratti la visione epistemologica che sta alla base della sua produzione scientifica. Mi limito pertanto ad accennare ad alcuni aspetti che ispirano e muovono il suo impegno nella scuola quali emergono dall'articolo *Insegnamento dinamico* che compare nel 1921 in apertura della quarta serie del Periodico di matematiche, di cui Enriques era diventato direttore. I punti principali attorno ai quali ruota il suo programma sono i seguenti: l'insegnamento deve essere attivo ed educare alla scoperta; gettare un

[122] Su Enriques e la scuola si vedano: L. Campedelli, *Un cinquantenario. Federigo Enriques nell'insegnamento*, in *Atti del Convegno internazionale sul tema: Storia, Pedagogia e Filosofia della Scienza a celebrazione del centenario della nascita di Federigo Enriques*, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973, pp. 75-90; F. T. Tomasi, *La questione educativa nell'opera di Enriques*, in *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, a cura di O. Pompeo Faracovi, Livorno, Belforte Editore, 1982, pp. 223-250; M. Moretti, *Insegnamento dinamico. Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923)*, in *Federigo Enriques, Insegnamento dinamico. Con scritti di Franco Ghione e Mauro Moretti*, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 2, La Spezia, Agorà 2003, pp. 15-91.

[123] F. Enriques, *Ai Lettori*, «Periodico di matematiche», s. 4, 1, 1921, pp. 1-5.

ponte fra la matematica e altre branche del sapere, quali la fisica, la biologia, la psicologia, la fisiologia, la filosofia e la storia, favorisce una visione unitaria della cultura; logica e intuizione sono due aspetti inscindibili di un medesimo processo, pertanto nell'insegnamento occorre trovare un giusto equilibrio fra le due, procedendo per gradi dal concreto all'astratto; le matematiche superiori, considerate nel loro sviluppo storico, consentono di comprendere meglio certi aspetti delle matematiche elementari e pertanto rivestono un ruolo importante nella formazione dell'insegnante.

> L'insegnamento – egli scrive – non può essere un regalo che il maestro faccia a qualcuno che viene ad ascoltare le sue ben tornite lezioni [...] ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé e però sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o come un prodotto del suo spirito. [...] Non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi profondano le loro radici. Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire non un qualsiasi assetto statico [...]. Quale modo più largo di comprensione didattica, che l'annodarsi dei problemi e l'urtarsi delle difficoltà entro lo spirito di tutti gli studenti che hanno faticato prima di noi, nella scuola del mondo?[124]

[124] F. Enriques, *Insegnamento dinamico,* «Periodico di matematiche», s. IV, I, 1921, pp. 6-16, a p. 6 e p. 16.

È l'influenza di Klein, qui evidente,[125] insieme al desiderio di offrire agli insegnanti un utile strumento di lavoro che aveva spinto Enriques a pubblicare, con la collaborazione di amici e discepoli, una serie di studi monografici su problemi di matematica elementare da un punto di vista superiore, le *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1900), ampliate poi nelle edizioni successive con il titolo *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (1912).

Come presidente della Mathesis Enriques pronunciò il discorso inaugurale del Congresso di Trieste e illustrò il problema dell'unificazione dei programmi di matematica delle 'province redente' con quelli delle scuole italiane. Se, da un lato, sottolineò l'importanza di tener presente lo sviluppo tecnico e industriale della società moderna e di rendere l'insegnamento della matematica più pratico e accessibile, dall'altro egli affermò con passione non solo il valore formativo delle matematiche, ma anche il loro «valore artistico e filosofico, riattaccandolo all'antica tradizione della filosofia italica».[126] Più operativo fu l'intervento di Castelnuovo che, dopo aver ripercorso le tappe principali della storia dell'insegnamento della matematica in Italia, mise in evidenza soprattutto le affinità di metodo e di contenuti fra il liceo moderno italiano e il liceo delle province redente esprimendo il parere che, accogliendo alcune tendenze dei programmi di queste ultime, sarebbe stato possibile pervenire più facilmente all'assimilazione del nostro liceo moderno e del ginnasio superiore classico o reale delle nuove pro-

[125] Cfr. nota 31.

[126] F. Enriques, *Il valore delle Matematiche nella Filosofia italica*, «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp. 4-7.

vince. In particolare, egli riteneva che si dovesse introdurre il concetto di funzione fin dalle classi del ginnasio e approfondire maggiormente i concetti di derivata e di integrale con riferimento alle applicazioni, mentre non giudicava conveniente inserire nei programmi delle scuole secondarie la geometria analitica come invece avveniva nelle scuole di Trento e Trieste.[127]

Il congresso si concluse con l'approvazione di una mozione proposta da Fano, in cui si chiedeva che il Ministero, prima di deliberare, sentisse il parere di una rappresentanza degli insegnanti delle province ex-austriache e si formulavano le seguenti proposte tenendo conto della maggiore estensione e articolazione dei programmi austriaci e dell'orario più ampio:

> 1) Che nell'insegnamento della Geometria sperimentale nella Scuola media inferiore sieno avvicinate le costruzioni e le misurazioni delle figure alla descrizione delle loro proprietà, secondo le proposte dell'Ispettorato centrale pubblicate dal Ministero della P. I. nel 1918, e che i programmi del liceo classico sieno avvicinati a quelli del Liceo moderno.
> 2) Che l'insegnamento dell'Algebra elementare cominci nella IV del ginnasio, assorbendo la teoria delle operazioni e dando maggiore importanza agli esercizi ed alla pratica del calcolo numerico e letterale, e che lo stesso criterio venga applicato al 1° anno dell'Istituto tecnico.

[127] G. Castelnuovo, *Sull'insegnamento medio delle matematiche in Italia dal 1867 ad oggi*, «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp.17-21. Sulla storia dell'istruzione nel Friuli-Venezia Giulia si vedano: A. Andri, G. Mellinato, *Scuola e confine. Le istituzioni educative della Venezia Giulia 1915-1945*, Trieste, Istituto Regionale per la Storia del Movimento di Liberazione nel Friuli-Venezia Giulia, 1994; AA.VV., *La lavagna nera. Le fonti per la storia dell'istruzione nel Friuli-Venezia Giulia*, Atti del Convegno, Trieste-Udine, 24-25 novembre 1995.

> 3) Che in ogni classe del ginnasio sieno destinate tre anziché due ore settimanali all'insegnamento della matematica.
> 4) Che l'avviamento alle nozioni funzionali e alla rappresentazione grafica sia iniziato dal ginnasio.
> 5) Che nella distribuzione della materia nei singoli anni si tenga sempre maggior conto delle esigenze delle materie affini.
> 6) Che sia conservata in via d'esperimento la geometria analitica del piano nell'ultimo anno delle scuole medie delle nuove province.[128]

Le diversità di metodo e di contenuti evidenziate nel corso dei numerosi incontri nelle varie sezioni della Mathesis erano sostanzialmente le seguenti: mentre nelle scuole italiane, pur avvantaggiate da una manualistica di alto livello, predominava una tendenza alla teoria e all'astrazione, nelle scuole delle province ex-austriache si teneva maggiormente conto dello sviluppo mentale dell'allievo, delle esigenze didattiche e delle applicazioni alle altre scienze. Pertanto vi era una maggior distinzione fra il primo grado scolastico dove l'insegnamento era essenzialmente sperimentale, e il secondo dove il metodo razionale era affiancato da molteplici problemi e applicazioni delle teorie studiate. Inoltre veniva attribuito un ruolo centrale al concetto di funzione che era introdotto fin dai primi anni di scuola media. Un insegnamento siffatto consentiva all'allievo di intravedere lo scopo e l'importanza degli argomenti studiati in relazione ai moderni sviluppi della scienza e lo abituava a lavorare in modo indipendente.[129]

[128] «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp. 55-56.

[129] Cfr. per esempio G. Furlani, *Relazione sull'insegnamento della matematica del prof Giacomo Furlani alla Sezione romana della Mathesis*, «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp. 176-182; A. Verson, *Rappor-*

I suggerimenti emersi dai vari incontri della Mathesis circa l'unificazione dei programmi di matematica delle 'province redente' con quelli delle scuole italiane furono, in certa misura, accolti dal Ministero.[130] Una commissione composta da insegnanti delle province ex austriache e da un ispettore centrale del Ministero della pubblica Istruzione trasmise il 13.6.1921 all'Ufficio Centrale per le Nuove Province una proposta di orari e programmi per i vari tipi di scuole secondarie elaborata tenendo conto di quanto era emerso nel congresso di Trieste del 1919. L'Ufficio Centrale per le Nuove Province segnalò al Ministero (26.7.1921) alcuni problemi che emergevano dai programmi proposti, in particolare l'assenza dell'insegnamento religioso,[131] la differenza di programmi fra le scuole di lingua tedesca e quelle di lingua italiana e considerevoli aumenti di orario. Nella tarda primavera del 1922 il Ministero aveva ormai pronta una bozza di decreto, ma nell'autunno successivo, in seguito alla marcia su Roma, Mussolini diventava capo del governo e dava l'avvio alla dittatura fascista. Giovanni Gentile, ministro della pubblica istruzione, seppe approfittare della legge del 3.12.1922, che concedeva pieni poteri al primo governo Mussolini, e attuò in un solo anno

to. Viaggio di studio compiuto a Bologna, per assistere a lezioni di matematica e fisica presso alcune Scuole Secondarie, «Periodico di matematiche», s.4, 1, 1921, pp. 222-229; G. Voghera, *Intorno ad un metodo di insegnamento della matematica in uso nelle scuole delle terre redente,* «Periodico di matematiche», s. 4, 2, 1922, pp. 475-478.

[130] Archivio Centrale dello Stato, Roma, *Presidenza del Consiglio dei Ministri,* buste 161-162.

[131] È interessante osservare che l'insegnamento religioso era presente nei curricola tedeschi e austriaci, ma non in quelli italiani, vedi Appendice 2.1.

una completa e organica riforma del sistema scolastico italiano secondo le linee pedagogiche e filosofiche da lui elaborate a partire dai primi anni del Novecento.[132]

8. *La Riforma Gentile e il prevalere della cultura umanistica*

Agli inizi del febbraio 1923 Enriques, che da tempo era interlocutore di Gentile,[133] appena ebbe notizia dell'imminenza della riforma della scuola secondaria e delle linee generali tendenti ad rafforzare la cultura umanistica a scapito di quella scientifica, indisse una seduta straordinaria del Consiglio direttivo della Mathesis ai fini di presentare al ministro una proposta che tenesse conto delle esperienze passate. Nel corso della riunione Castelnuovo pronunciò un discorso appassionato in cui, dopo aver menzionato le grandi riforme introdotte in Germania e in Francia ricordava sia le proposte della Commissione

[132] La basi della riforma sono costituite dai regi decreti n. 1679 del 31.12.1922 e n. 1753 del 16.7.1923 (riforma dell'amministrazione scolastica), n. 1054 del 6.5.1923 (riforma della scuola media), n. 2102 del 30.9.1923 (riforma universitaria), n. 2185 del 1.10.1923 (riforma della scuola elementare), seguiti da altri decreti integrativi. Qui si intende solo illustrare alcuni aspetti della Riforma Gentile relativi all'insegnamento della matematica e non certo offrire una valutazione complessiva sulla riforma stessa per la quale si rimanda, per esempio a J. Charnitzki, *Fascismo e scuola. La politica scolastica del regime (1922-1943)*, La Nuova Italia, Firenze 1996. Per la ricca documentazione si veda anche Commissione Alleata in Italia (Sotto-Commissione dell'Educazione), *La politica e la legislazione scolastica in Italia dal 1922 al 1943 con cenni introduttivi sui periodi precedenti e una parte conclusiva sul periodo postfascista*, Milano, Garzanti 1947.

[133] Cfr. A. Guerraggio, P. Nastasi, *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1943*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993, pp. 142-167.

reale, lungamente meditate e mai attuate, sia la recente esperienza del liceo moderno, augurandosi che la futura riforma non svalutasse il valore formativo delle scienze. Egli auspicava inoltre che fossero istituiti tre tipi di scuole preparatorie all'università: «un Liceo classico in cui il greco assuma maggiore importanza, un Liceo moderno col latino e senza greco, in cui si coltivino in ispecie gli studi economici, giuridici e sociali, ed infine un Ginnasio-Liceo scientifico, senza latino … in cui si intensifichi la preparazione scientifica … in ambedue questi Licei moderni, coltivando lo studio delle lingue vive».[134] Il fatto però che molti dei presenti tra cui matematici autorevoli come il geometra Francesco Severi e sostanzialmente lo stesso Enriques riconoscessero «la grande superiorità formativa» del ginnasio-liceo classico,[135] fece sì che l'assemblea non accogliesse senza indugi la proposta avanzata da Castelnuovo, ma decidesse di consultare prima le varie sezioni locali.

Vi è infatti un accordo di fondo fra Enriques e Gentile nel concepire la scuola media come formativa e selettiva e il sapere come conquista personale; vi è accordo anche nel combattere l'enciclopedismo e nel considerare l'educazione come libero sviluppo di energie interiori favorito da un rapporto docente-allievo in cui «qualcosa di vivo che è in noi [insegnanti] passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco».[136] Profondamente diverso è però il modo di vedere il ruolo delle matematiche di cui Enriques riconosce l'alto valore

[134] Cfr. *Riunione straordinaria promossa dal Consiglio direttivo. Roma, 11 febbraio 1923*, «Periodico di matematiche», s. IV, 3, 1923, p. 156.

[135] Ibidem, p. 156 e p. 158.

[136] Enriques, *Insegnamento dinamico …*, cit. p. 15.

formativo,[137] mentre per Gentile la verità matematica è «morta, infeconda, arida come un sasso»:

> Tutta quanta la matematica – egli afferma – si fonda su quel principio logico per cui ogni cosa è uguale a se stessa: principio che vale appunto per le cose, non per lo spirito. Il quale invece ha la legge opposta, che cioè esso non sia mai pari a se stesso, cangiandosi, eterno Proteo, in mille guise, nella vita autocreativa in cui esso propriamente consiste.[138]

Diverso è anche il modo di intendere la formazione degli insegnanti e il contrasto con Gentile era emerso fin dal 1906 dopo che, nel V Congresso della Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media svoltosi a Bologna, Enriques tenne una relazione sulla preparazione degli insegnanti di scienze. Egli proponeva di articolare i corsi universitari scientifici in due bienni, distinguendo la laurea *scientifica* da quella *pedagogica*, essendo quest'ultima strutturata in un primo biennio dedicato ad acquisire le conoscenze basilari della disciplina, e un secondo, da effettuarsi nella Scuola di Magistero, con «1) corsi su quelle parti della Scienza che si riattaccano ad una più profonda visione degli Elementi, 2) … sulle questioni di Pedagogia concreta che interessano i varii rami d'insegnamento, particolarmente in rapporto colla critica dei testi, 3) esercitazioni comprendenti il tirocinio parte nell'Università e parte in una scuola secondaria, il disegno

[137] Cfr. per esempio Enriques, *Il valore delle Matematiche nella Filosofia italica…*, cit.

[138] G. Gentile, *Sommario di pedagogia come scienza filosofica*, II *Didattica*, Firenze, Sansoni, (V ed.) 1955, p. 183.

e la tecnica sperimentale».[139] Invece per Gentile, come è noto, la formazione dell'insegnante consiste nella sua «vera, profonda e sincera preparazione scientifica».[140]

Il decreto relativo alla scuola secondaria fu emanato il 6 maggio 1923. Gentile respingeva l'istanza democratica della scuola media inferiore unica, separava l'istruzione secondaria in due percorsi di cui quello classico-umanistico destinato alla formazione della classe dirigente e assolutamente preponderante su quello tecnico-scientifico. L'insegnamento del latino fu introdotto in tutti i corsi inferiori della scuola media. Il liceo moderno e la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico furono soppressi e sostituiti con un liceo scientifico debole, perché privo di un corso inferiore propedeutico e con sbocchi universitari limitati. In più, l'insegnamento della matematica veniva accorpato con quello della fisica con un orario talvolta inferiore a quello precedentemente destinato alla sola matematica. Ai licei predetti veniva affiancato un *liceo femminile*, corso di studi che non offriva un diploma utile dal punto di vista professionale,

[139] F. Enriques, *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, in *Quinto congresso nazionale degli insegnanti delle scuole medie. Bologna 25-28 settembre 1906*, Pistoia, Ed. Sinibuldiana, 1907, pp. 69-78, a p. 78.

[140] A proposito di Enriques e la Riforma Gentile si vedano: Tomasi, *La questione educativa nell'opera di Enriques* …, cit.; F. La Teana, *F. Enriques e la riforma Gentile*, in AaVv, *La ristrutturazione delle scienze tra le due guerre mondiali. I. L'Europa*, Roma, La Goliardica, 1984, pp. 303-314; Moretti, *Insegnamento dinamico. Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923)* …, cit. e l'articolo di O. Pompeo Faracovi in questo volume. Si rimanda inoltre a quanto scrive Enriques stesso in *La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella Scuola media*, «Periodico di matematiche», s. 4, 8, 1928, pp. 68-73 e nel resoconto sulla Riforma Gentile, «L'Enseignement mathématique», XXVIII, 1929, pp. 13-18.

né la possibilità di accedere agli studi universitari ed era totalmente privo degli insegnamenti scientifici. Inoltre la riforma prevedeva un esame di stato al termine di ogni ciclo di studi, mettendo in questo modo sullo stesso piano scuole pubbliche e private. L'esame di maturità classica acquistava il carattere di vero e proprio esame di ammissione all'università e doveva attestare il possesso di un'ampia e profonda cultura umanistica.

La reazione della Mathesis fu immediata. Nello stesso mese di maggio Enriques, a nome di tutto il Direttivo, inviò al ministro un dettagliato *Pro-memoria del Consiglio direttivo* dove si sottolineava «l'impressione generale di una minor valutazione dell'insegnamento scientifico nell'intero disegno della legge»[141] e, in particolare, si invitava il ministro a tenere conto nella stesura dei programmi e degli orari dei seguenti punti: l'abbinamento della matematica e della fisica non doveva tradursi in una diminuzione complessiva delle ore dedicate a queste materie; anche prescindendo dal valore formativo della matematica, occorreva tener presente le esigenze di quelli che, dopo aver frequentato il liceo classico si iscrivevano alle facoltà scientifiche; il programma di matematica e di fisica nel liceo scientifico non poteva essere ridotto rispetto a quelli del liceo moderno e della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico. Infine si deplorava che nel liceo femminile non vi fosse traccia di insegnamenti di matematica, di fisica e di scienze naturali. Il promemoria si concludeva con un accorato appello al ministro:

Uomini che si sono consacrati alla scienza che è per essi

[141] F. Enriques, *Pro-memoria del Consiglio direttivo*, «Periodico di matematiche», s. IV, 3, 1923, pp. 339-341, a p. 340.

> sostanza d'ideali e ragione di vita, sono gravemente turbati e commossi dalla minaccia di provvedimenti che [...] – mettendo l'Italia in una condizione d'inferiorità rispetto a tutti gli stati civili – contengono i germi d'una rovina nazionale, che forse non è dato oggi di misurare.[142]

Le risposte di Gentile furono però poco confortanti. Castelnuovo pertanto rifiutò di collaborare alla preparazione dei programmi e degli orari e, nel mese di settembre, la Mathesis organizzò un congresso a Livorno per discutere sulla riforma.[143] Al termine del congresso fu elaborato un documento in cui si chiedeva al ministro che il liceo scientifico consentisse l'accesso ad altre facoltà oltre che a Scienze e a Medicina, che nel liceo classico la fisica fosse abbinata alla chimica e non alla matematica, che venisse aumentato il monte orario per la matematica e che fosse incrementato il numero degli istituti tecnici inferiori che nel 1923 erano 460 contro i 2140 ginnasi.

Il 14 ottobre 1923 furono approvati gli orari e i programmi per le scuole medie e nessuna delle richieste fu accolta.

La base fortemente umanistista della riforma emerge chiaramente dall'incipit delle *Avvertenze* che precedono i programmi del ginnasio-liceo:

> Il Liceo-Ginnasio dev'essere un istituto di cultura umanistico storica: prepara agli alti uffici della vita civile, alle professioni libere, alla vita politica, prepara da lontano, preparan-

[142] Ibidem, p. 341.

[143] Cfr. *Relazione del Congresso di Livorno, 25-27 Settembre 1923,* «Periodico di matematiche», s. IV, 3, 1923, pp. 454- 478, in particolare si vedano le relazioni sulla riforma di C. Rosati e di G. Sansone.

> do l'uomo: l'uomo morale, che è a suo posto nella Storia, e perciò, sa il travaglio faticoso dell'umanità dalla spelonca in cui visse selvaggio a quella civiltà che non consiste nei perfezionamenti tecnici così appariscenti nella nostra vita moderna, fino al punto da apparire fini e non mezzi, ma consiste nella più profonda comunione di animi, nel più profondo senso della libertà e del dovere umano, nella più profonda coscienza della propria personalità.[144]

A coadiuvare il ministro nella preparazione dei programmi di matematica fu Gaetano Scorza, membro attivo della Mathesis e uno dei referenti italiani nella Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica.[145] Solo due anni prima, nella conferenza tenuta per l'inaugurazione del Circolo matematico di Catania, Scorza esprimeva le sue perplessità sul movimento filosofico idealista, dietro il quale gli pareva di «intravedere un poco seducente nullismo»[146] e difendeva appassionatamente il valore formativo, etico ed estetico della matematica. Riprendendo il medesimo tema nel 1923, egli affermava esplicitamente che «il filosofo che non abbia avuta una buona educazione matematica sconta amaramente il suo difetto» e sosteneva l'importanza di un insegnamento della matematica che non sia

[144] *Orari e programmi per le regie scuole medie*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'istruzione pubblica», 17 Novembre 1923, 50, II, pp. 4413-4510, a p. 4435.

[145] A lui si devono per esempio un'indagine sull'insegnamento della matematica negli istituti tecnici ed un'altra sui libri di testo: Scorza, *L'insegnamento della matematica nelle Scuole e negli Istituti tecnici…*, cit. e G. Scorza, *Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori*, «Bollettino della Mathesis», a. IV, 1912, pp. 235-247.

[146] G. Scorza, *Essenza e valore della matematica*, in *Opere scelte*, III, Roma, Cremonese, pp. 1-23, a p. 19.

«passivo o dogmatico», ma che si avvalga di un «metodo attivo od euristico», sviluppando sia la fantasia creatrice, sia un acuto senso critico.[147]

Nella stesura dei nuovi programmi di matematica egli era però fortemente condizionato dal quadro generale della riforma. Essi si inserivano, infatti, in un contesto epistemologico in cui le scienze potevano trovare senso e valore educativo solo all'interno della grande tradizione filosofica italiana e, in secondo luogo, ai vecchi programmi, che davano all'insegnante la scansione della materia e opportune istruzioni metodologiche, si sostituivano dei programmi d'esame che indicavano la meta, ma non la via per raggiungerla. La riforma presupponeva perciò che l'insegnante da solo fosse in grado di elaborare un piano didattico, ma non si preoccupava della sua formazione. Le scuole di Magistero, come si è detto, erano state soppresse da Croce nel 1920. Con un decreto del marzo 1923 Gentile equiparò gli Istituti Superiori di Magistero femminili esistenti agli Istituti universitari e decretò che vi fossero ammessi anche i maschi. Questi istituti si limitavano però a preparare all'insegnamento della filosofia e della pedagogia o alla carica di Direttore didattico o di Ispettore scolastico, mentre non era prevista la preparazione dei futuri insegnanti di materie scientifiche.[148]

Le critiche della Mathesis alla riforma non furono isolate; da subito si unirono alla protesta varie associazioni

[147] G. Scorza, *Il valore educativo della matematica*, Ibidem, pp. 77-97, alle pp. 83 e 97.

[148] Per la storia delle scuole di Magistero si vedano per esempio: G. Di Bello, A. Mannucci, A. Santoni Rugiu, *Documenti e ricerche per la storia del Magistero*, Firenze, Manzuoli, 1980, P. Gario, *Quali corsi per il futuro insegnante? I congressi dei professori di matematica …*, cit. e il sito

scientifiche e le Facoltà di scienze di alcune Università.[149] Anche la Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media cercò di far sentire la propria voce, ma, per la sua connotazione eminentemente 'politica' figlia dello Stato liberale, fu costretta, sia per dissidi interni, sia per gli attacchi fascisti a deliberare lo scioglimento il 22 novembre 1925.[150]

L'Accademia dei Lincei, massima espressione della scienza italiana, si schierò contro la riforma con la relazione *Sopra i problemi dell'insegnamento superiore e medio a proposito delle attuali riforme*, frutto dei lavori di una commissione presieduta da Vito Volterra e di cui faceva parte anche Castelnuovo. La relazione redatta da Castelnuovo, è articolata in due parti la prima delle quali si riferisce agli studi universitari e la seconda alla scuola media. Castelnuovo, oltre a ribadire i punti già evidenziati nella seduta straordinaria della Mathesis, esprimeva il dissenso della commissione nei confronti della prevalenza accordata nei due licei all'insegnamento filosofico:

> La nostra Commissione – scrive Castelnuovo – teme che una parte esuberante data alla filosofia nei programmi dei licei possa favorire il risorgimento delle tendenze eccessivamente aprioristiche e delle argomentazioni meramente verbali, contro le quali i maggiori spiriti del Rinascimento hanno so-

www.scienzeformazione.unipa.it/cire/materiali/matesto/matesto1/ipotesi/index.htm

[149] Sulle tendenze avverse alla Riforma Gentile che allignavano anche dove meno ci si attenderebbe di trovarle cfr. per esempio AA.VV., *Opposizioni alla Riforma Gentile*, Quaderni del centro Studi "C. Trabucco", 7, 1985.

[150] Cfr. Ambrosoli, *La Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media dalle origini al 1925*…cit., Cap. 24.

> stenuto tante lotte, che parevano chiuse, grazie alla vittoria del nostro sommo Galileo.[151]

Egli si pronunciava inoltre contro l'abbinamento di insegnamenti disparati - quali storia e filosofia, matematica e fisica, scienze naturali, chimica e geografia - che poteva avere come conseguenza non solo quella di abbassare il livello dell'insegnamento, ma anche quella di appiattire il dialogo fra diverse tendenze scientifiche. Il suo giudizio era critico anche nei confronti del pur valido principio degli esami di stato che presentava il rischio di ridurre la funzione della scuola alla preparazione degli esami e i manuali scolastici a libri di «pratiche ricette per ottenere la promozione».

A questa si aggiunsero ben presto le critiche di altri illustri scienziati dietro le quali si avvertono anche preoccupazioni di ordine politico nei confronti del fascismo, ma lo squilibrio fra l'istruzione classica e quella scientifica, instaurato nel lontano 1859 da Casati e consolidato dalla riforma Gentile, era destinato a perdurare fino alla fine del secolo.

[151] G. Castelnuovo (relatore), *Sopra i problemi dell'insegnamento superiore e medio a proposito delle attuali riforme*, Roma, Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1923, p. 10. Sulla posizione di Volterra cfr. G. Israel, *Vito Volterra e la riforma scolastica Gentile*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, I-A, pp. 268-287.

LUIGI PEPE

INSEGNAMENTI MATEMATICI E LIBRI ELEMENTARI NELLA PRIMA METÀ DELL'OTTOCENTO MODELLI FRANCESI ED ESPERIENZE ITALIANE

L'unità d'Italia ha segnato un momento di discontinuità sia sul piano dell'ordinamento scolastico, sia su quello dei programmi, in particolare per la matematica. I protagonisti (Betti, Brioschi, Cremona) hanno tuttavia accentuato questa discontinuità, come pure l'originalità del modello italiano, che subì invece molte influenze dalla Francia, dalla Germania e dall'Inghilterra. D'altra parte Mossotti, Matteucci, Mazzini, Garibaldi, Cavour avevano una grande esperienza internazionale e con loro Gioberti, Mamiani, De Sanctis, Cannizzaro e Piria. Betti, Brioschi, Casorati compirono nel 1858 un viaggio in Europa per mettere a punto i loro programmi di ricerca.[1]

[1] La storia degli insegnamenti matematici ha precedenti illustri in Italia in lavori di Pietro Riccardi, Antonio Favaro, Gino Loria, Ettore Bortolotti, Federigo Enriques, Amedeo Agostini. Molti dei lavori più recenti riguardano gli insegnamenti matematici dopo l'Unità d'Italia; si veda ad esempio L. Giacardi, *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento*, in G. Chiosso (a cura di), *TESEO, Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento*, Milano, Editrice Bibliografica, 2003, pp. XCVII-CXXIII. Per i periodi precedenti,

L'Europa dei Venticinque somiglia molto, come confini, ai territori dell'Impero francese e dei suoi alleati nel 1812: essi si estendevano dalla Spagna alla Polonia, dall'Italia alla Germania, con parti della Scandinavia e della Penisola balcanica fino ad alcune isole greche. L'Italia continentale era divisa allora in tre grandi aggregazioni: l'Impero francese che comprendeva il Piemonte, la Toscana, la Liguria, il Lazio e l'Umbria, il Regno d'Italia con Lombardia, le Venezie, Emilia Romagna, Marche; il Regno di Napoli con Campania, Lucania, Abruzzo, Molise, Puglie, Calabria. Napoleone, come imperatore, governava i dipartimenti dell'Impero, come re, con il viceré Eugenio Beauharnais, figlio di Giuseppina, era alla guida del Regno d'Italia, Gioacchino Murat, valente generale e marito di una sorella di Napoleone, era re di Napoli. La Sicilia era in mano ai Borboni, la Sardegna ai Savoia: le navi inglesi nel Mediterraneo vigilavano sulla loro esclusione dal sistema napoleonico.

Per quanto riguarda l'istruzione, gli stati napoleonici si comportarono con notevole autonomia. I dipartimenti annessi seguivano le leggi francesi e i libri elementari erano quasi tutte traduzioni di opere francesi. Il Regno d'Italia aveva avuto una sua legge per la pubblica istruzione nel 1802, all'epoca della Repubblica Italiana, che restava valida nelle grandi linee. Erano state mantenute le

per un primo orientamento, si possono vedere M. T. Borgato, *Alcune note storiche sugli Elementi di Euclide nell'insegnamento della matematica in Italia,* «Archimede», 1981, pp. 185-193. L. Pepe, *Per una storia degli insegnamenti matematici in Italia*, in *Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della matematica in ricordo di Giovanni Torelli,* a cura di S. Invernizzi, Trieste, Università degli Studi, 1996, pp. 101-116. L. Pepe, *Matematica e fisica nei collegi del Settecento*, «Studi Settecenteschi», 18, 1998, pp. 407-420.

Università e creati i Licei e i Ginnasi. Questi si distinguevano tra loro solo per il numero delle cattedre. All'inizio i Licei avevano avuto alcuni insegnamenti in comune con le Università, ma con la legge Scopoli l'insegnamento liceale era stato scorporato da quello universitario. Per quanto riguardava la matematica, l'insegnamento di geometria e algebra era stato attribuito ai Licei.

L'insegnamento liceale era impartito in lingua italiana, al contrario degli antichi collegi nei quali si insegnava in latino, e le materie principali di studio erano il latino e la matematica, uno spazio era dato anche alle altre scienze (fisica, chimica, mineralogia) e all'eloquenza italiana. Ogni dipartimento per legge doveva avere un Liceo. Sorsero così licei non solo nelle antiche sedi universitarie (Bologna, Padova, Ferrara, ecc.) ma anche in diverse città italiane come Belluno, Vicenza. Questi licei napoleonici sono spesso alla base di attuali prestigiosi licei, non solo scientifici, ma anche classici. I Licei nascevano, in imitazione della legge Chaptal della Repubblica Francese (1802) che trasformava le Scuole Centrali nate dalla Rivoluzione. Essi sorsero quindi anche nei dipartimenti annessi e nel Regno di Napoli.[2]

L'esperienza delle istituzioni educative e culturali napoleoniche (Istituti, Atenei, Accademie) si protrasse ben oltre la Restaurazione che riportò il papa e gli antichi sovrani nei loro piccoli stati e stabilì l'egemonia austria-

[2] Manca ancora un quadro di riferimento internazionale per la storia degli insegnamenti matematici preuniversitari. Per il livello universitario una sintesi dovuta a vari studiosi (per l'Italia a U. Bottazzini) è costituita dal capitolo: *Higher Education and Institutions*, in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, edited by I. Grattan-Guinness, London, Routledge, vol. II, pp. 1425-1539.

ca sulla penisola. Molte novità del periodo napoleonico sopravvissero per decenni fino al 1848, in certi casi fino all'unità d'Italia. Per questo centreremo l'attenzione sui primi due decenni dell'Ottocento e distingueremo l'indagine, tra dipartimenti italiani dell'Impero, il Regno d'Italia e il Regno di Napoli.[3]

1. *I Dipartimenti italiani dell'Impero*

La Rivoluzione francese era stata portatrice di grandi novità in campo scolastico e culturale. Soppressi gli antichi collegi e le Università, erano state create le *Grandes Ecoles*: l'*Ecole normale*, destinata alla formazione degli insegnanti, e l'*Ecole polytechnique*, per gli ingegneri, produssero notevoli cambiamenti negli insegnamenti matematici e stimolarono una schiera di nuovi studiosi a cimentarsi nella pubblicazione di libri elementari innovativi.[4]

Per l'insegnamento delle matematiche nelle Scuole Centrali Sylvestre François Lacroix (1765-1843), un allievo di Monge e di Condorcet che diede prove valide di trattatista di calcolo differenziale e integrale e di geometria descrittiva, compose un corso completo di mate-

[3] Per la matematica nel periodo repubblicano del 1796-1799: L. Pepe, *L'istruzione pubblica nel triennio repubblicano (1796-1799)*, in *Il sogno di libertà e di progresso in Emilia negli anni 1796-97. Il primo tricolore e i presupposti dell'unità nazionale*, a cura di S. Lenzi, Modena, Lions Distretto 108Tb, 2003, pp. 103-111.

[4] J. Langins, *La République avait besoin de savants*, Paris, Belin, 1987; A. Fourcy, *Histoire de l'Ecole polytechnique*, introduction par J Dhombres, Paris, Belin, 1987; *L'Ecole Normale de l'an III. Leçons de mathématiques: Laplace, Lagrange, Monge*, sous la direction de J. Dhombres, Paris, Dunod, 1992.

matica in sette volumi, che fu successivamente adottato per l'insegnamento in Francia nei licei e nelle scuole secondarie e poi largamente tradotto in italiano. Esso si divideva in:

- Traité élémentaire d'Arithmetique
- Eléments d'Algèbre
- Eléments de Géometrie
- Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'Algèbre à la Géometrie
- Complément des Eléments d'algèbre
- Complément des Eléments de Géometrie ou Eléments de Géometrie descriptive
- Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral.

L'insegnamento dell'aritmetica acquistò in questo periodo un ruolo particolarmente importante, dato che si trattava di diffondere l'uso del sistema metrico decimale, introdotto dalla Rivoluzione Francese. Per tale insegnamento, uno dei primi allievi scelti dell'Ecole polytechnique, Jean Baptiste Biot, scrisse un manuale che fu tradotto in italiano: *Trattato elementare di aritmetica del sig. Biot, tradotto da un professore dell'Accademia di Pisa con appunti* (terza edizione, Pisa, Capurro, 1813).

Si deve a Lacroix anche la prima monografia metodologica sull'insegnamento della matematica: *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* (Paris, Courcier, 1805).

Diversi manuali di Lacroix furono tradotti in italiano ed ebbero un ruolo importante nell'insegnamento della matematica nei primi tre decenni del secolo XIX. L'opera didattica che però ebbe maggiore e più duratura influenza (fu ristampata anche dopo l'unità d'Italia) furono gli *Elementi di geometria di Adriano M. Legendre*, tradotti per la prima volta in Italiano, forse da un esule napoletano a Parigi, Filippo Maria Guidi (Pisa, Tipografia della Società Letteraria, 1802).

Gli *Elementi* di Legendre furono poi accusati, dai puristi della seconda metà del secolo XIX, di aver abbandonato il rigore espositivo degli *Elementi* di Euclide e di aver contaminato la geometria pura con concetti di altre discipline: in particolare si rimproverava a Legendre la definizione variazionale della retta come il cammino più breve tra due punti. Il manuale invece, pubblicato nel 1794, si inscrive in un ritorno ai metodi geometrici, dai quali la matematica nel Settecento si era progressivamente allontanata nella convinzione che i metodi analitici fossero non solo più efficaci e generali, ma consentissero un'unificazione di tutto il sapere matematico. Questa era alla fine del secolo XVIII la convinzione di Lagrange che pubblicò i suoi trattati senza far ricorso ad alcuna figura geometrica (teoria delle funzioni, meccanica analitica, equazioni numeriche), non solo, ma volle affrontare problemi squisitamente geometrici, come lo studio delle piramidi, con metodi analitici.

La geometria pura prese la sua rivincita con l'insegnamento rivoluzionario della Ecole Normale dell'anno 3 (1794) della geometria descrittiva di Monge e con la pubblicazione nello stesso anno degli *Elemens de géometrie* di Legendre. A differenza di Lacroix, Adrien Marie Legendre (1752-1833) non fu solo un trattatista, ma si era occupato con successo di calcolo delle variazioni ("condizione di Legendre", 1786), scrisse un monumentale trattato di teoria degli integrali ellittici e lasciò risultati fondamentali di teoria dei numeri. Senza arrivare mai alla notorietà di Lagrange, Monge e Laplace, suoi colleghi all'Institut, Legendre svolse una rilevantissima attività scientifica nei primi due decenni del secolo XIX, promovendo anche la ricerca di studiosi stranieri come Jacobi e Dirichlet.[5]

A quelli di Monge e di Legendre in questa rinascita della geometria si deve affiancare il nome di Lazare Carnot (1753-1823) che cercò di portare nella geometria pura un grado di generalità paragonabile a quello dei metodi analitici. Egli stampò due opere in tal senso *De la correlation des figures de géométrie* (1801) e *Géométrie de position* (1803). Carnot fu uno degli scienziati più impegnati durante la Rivoluzione francese (con Monge, Vandermonde, Hachette, ecc.). Dopo la caduta di Robespierre, fu membro del Direttorio esecutivo e quindi uno dei principali interlocutori di Bonaparte durante la campagna d'Italia nel 1796-1797. Fu estromesso dal Direttorio nel 1797 con l'accusa di voler favorire la restaurazione realista e costretto all'esilio. Con il Consolato poté ritornare in Francia, dove fu anche ministro durante i Cento giorni del ritorno di Napoleone dall'Elba (1814). Fu poi nuovamente esiliato come regicida, con il ritorno dei Borboni.

Gli *Elementi di geometria* di Legendre sono divisi in otto libri:

[5] Insieme a Dirichlet, Legendre dimostrò nel 1825 l'impossibilità dell'esistenza di soluzioni intere non banali dell'equazione $x^5+y^5=z^5$ (teorema di Fermat con n = 5). Nel 1827 Jacobi comunicò a Legendre le sue scoperte sulle funzioni ellittiche e Legendre fu il primo a lodarle nei suoi scritti. Fu anche attratto dai primi lavori di Abel, dei quali comprese l'importanza. Sull'opera matematica di Legendre manca uno studio sistematico anche se riferimenti si possono trovare in ogni storia dell'analisi matematica, della geometria, della teoria dei numeri.

Lib. I - I Principi
Lib. II - Seguito de' Principi
Lib. III - Le Proporzioni delle Figure
Lib. IV - I poligoni regolari, e la misura del Circolo
- Appendice al libro IV
Lib. V - I Piani, e gli Angoli solidi
Lib. VI - I Poliedri
Lib. VII - La Sfera
- Appendice ai libri VI, VII
Lib. VIII - I corpi tondi

Un modo per comprendere i vari testi di geometria elementare consiste nel prendere in esame quelle parti del testo euclideo che più hanno suscitato critiche e commenti: le definizioni e i postulati (in particolare la forma e il luogo in cui è dato il postulato delle parallele) la maniera di stabilire l'uguaglianza dei triangoli, la teoria delle proporzioni, la teoria della misura, la trattazione e l'estensione della geometria solida. La traduzione italiana degli *Elementi di geometria* (Pisa, 1802) di Legendre inizia con queste definizioni:

1. La geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell'estensione. L'estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza e altezza.
2. La *linea* è una lunghezza senza larghezza. Le estremità d'una linea si chiamano punti: il punto non ha dunque alcuna estensione.
3. La *linea retta* è il più corto cammino da un punto a un altro.
4. Ogni linea che non è retta, né composta di linee rette è una *linea curva.* (p. 1)

Come nella tradizione settecentesca gli *Elementi* di Legendre non danno esplicitamente il quinto postulato e svolgono una teoria delle parallele che implicitamente lo ammette (proposizioni XIX-XXV del libro I).[6] L'uso dell'algebra, che non è escluso dall'opera, rende molte dimostrazioni più spedite, la teoria delle proporzioni molto più semplice e permette l'estensione degli argomenti trattati. Ad esempio, in appendice al libro quarto sono trattati i poligoni isoperimetrici e si conclude (proposizione X) che «Il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro». Il libro VII, dedicato alla sfera, contiene un'estesa trattazione dei poligoni sferici. L'appendice ai libri VI e VII riprende i poliedri regolari: «Non possono esservi che cinque poliedri regolari» (proposizione I). L'ultimo libro (VIII) presenta in modo moderno i teoremi di Archimede sull'area e il volume della sfera e del cilindro circoscritto e dà la misura dei segmenti sferici. Le edizioni degli *Elementi* di Legendre, con aggiunta e complementi si susseguiranno in tutta Europa per quasi un secolo (Parigi, 1837, dodicesima edizione).

Gli *Elementi di Geometria* di Legendre con varie aggiunte furono ristampati a Napoli ancora nel 1864 (Tipografia Simoniana), e nel 1871 (Editrice Di Duse) e a Firenze nel 1870 (presso Stefano Jouharid).[7]

È importante notare come la geografia delle edizioni dei libri elementari di matematica segua i confini tra i dipartimenti annessi all'Impero e quelli del Regno d'Italia. Come per il Legendre e il Biot, molte prime edizioni ita-

[6] Anche Lagrange incorse in un errore sulla teoria delle parallele: M. T. Borgato, L. Pepe, *Una memoria inedita di Lagrange sulla teoria delle parallele*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 8, 1988, n. 2, pp. 307-335.

[7] Sulla diffusione in Italia degli *Elementi* di Legendre si veda: G. Schubring, *Neues über Legendre in Italien*, «Algorismus», 44, 2004, pp. 256-274.

liane di traduzioni di manuali francesi furono pubblicate nei dipartimenti annessi. È questo il caso anche degli *Elementi d'algebra del signore S.F. Lacroix*, tradotti sull'edizione VIII francese del MDCCCX insieme col complemento pubblicato dal medesimo autore (due volumi, Firenze, Piatti, 1809).

Questi volumi non contengono solo la teoria delle espressioni algebriche (monomi, polinomi) e delle equazioni algebriche fino al quarto grado, con estese trattazioni riguardanti le radici negative ed immaginarie, ma si estendono alla soluzione approssimata delle equazioni (metodo di Lagrange) allo studio delle funzioni simmetriche delle radici, alla risoluzione generale delle equazioni, ai metodi per abbassare di grado le equazioni, allo studio delle proporzioni e delle progressioni, alla teoria delle quantità esponenziali e logaritmiche, allo studio delle frazioni continue.

Anche gli *Elementi di geometria* ad uso della scuola centrale delle Quattro Nazioni di S. F. Lacroix furono tradotti in italiano negli anni dell'Impero (Firenze, Piatti, 1813). 146 pagine sono dedicate alla geometria piana e 96 alla geometria solida. Si fa uso di notazioni algebriche e nella trattazione, più che nel Legendre, ci si discosta dal modello euclideo. Gli *Elementi* di Lacroix riprendono gli elementi di geometria del secolo XVIII (Bossut, ecc.), più di quanto lascino intravedere le nuove esigenze critiche del secolo XIX.

2. *Il Regno d'Italia*

Le repubbliche sorelle create da Napoleone e dai francesi tra il 1796 e il 1799 (Cisalpina, Ligure, Romana, Napoletana) diedero grande spazio all'istruzione, anche come strumento di direzione della pubblica opinione. Dopo la reazione austro-russa e la vittoria di Marengo (1800), Bonaparte ristabilì la Repubblica Cisalpina, trasformata in Repubblica Italiana nel 1802 e in Regno d'Italia nel 1805 (ad esso furono annessi il Veneto nel 1806 e le Marche nel 1808).

Come libro di testo per l'insegnamento della matematica nel Regno d'Italia venne prima usato il *Corso di matematica del signor abate Bossut tradotto dal francese ed accresciuto di aggiunte dal P. D. Andrea Mozzoni* in due volumi (Venezia, Andreola, 1808). In seguito furono adottati gli *Elementi di algebra e geometria ricavati dai maggiori scrittori di matematica* di Vincenzo Brunacci (1768-1818) (Milano, Stamperia Reale, 1808), professore nell'Università di Pavia e celebre autore di un *Corso di matematica sublime* in quattro volumi (Firenze, Allegrini, 1804-1808) e di un *Compendio* per l'insegnamento universitario del calcolo differenziale e integrale (2 volumi, Milano, Stamperia Reale, 1811). Gli *Elementi* di Brunacci, che ebbe svariate edizioni fino agli anni trenta, sono divisi in due volumi: il primo contiene l'algebra e il secondo la geometria.

Presentiamo questo diffusissimo manuale in una delle prime edizioni: *Gli elementi di algebra e geometria ricavati dai migliori scrittori di matematica*, per opera del cav. Brunacci, terza edizione riveduta ed illustrata ad uso de' licei e delle università del Regno d'Italia, Milano, MDCCCXI, Dalla Stamperia Reale. L'opera viene introdotta con parole modeste:

> Un libro che in picciol volume contenesse soltanto tutte quelle elementari dottrine di Algebra e di Geometria che debbono dettarsi nel breve periodo di un anno scolastico:

> un libro che, senza essere soverchiamente conciso, desse campo allo studente di meditare, ed al maestro d'aggiungere: un libro in fine adattato a formare l'insegnamento degli agrimensori, ad esser base di quello degl'ingegneri e della gioventù che si dedica allo studio delle scienze fisiche e morali, era generalmente desiderato. (p. 3)

La fonte indicata per l'aritmetica e l'algebra è il manuale settecentesco francese dell'astronomo Nicolas Louis Lacaille (1713-1762), poi rielaborato dall'abate Marie (che aveva curato insieme a Legendre la stampa della prima edizione della *Mechanique analitique* di Lagrange). Il manuale di Marie era stato tradotto in italiano, con aggiunte di Stanislao Canovai e Gaetano del Ricco.[8] Brunacci introduceva anche altre trattazioni: «la dottrina delle funzioni continue, la dottrina degli esponenti e delle potenze, quella dei logaritmi, quelle dei problemi indeterminati di primo grado e la risoluzione dell'equazioni letterali e numeriche del terzo e quarto grado». Per questi argomenti attingeva alle opere elementari di Eulero, Bézout, Bossut, Clairaut, Vincenzo Riccati, Saladini, Paoli e Ruffini, «e di altri molti».

Per la geometria Brunacci prese come riferimento gli *Elementi di Euclide* nella versione di Guido Grandi (1671-1742): la teoria delle proporzioni era svolta secondo le indicazioni di Galileo. Non si faceva uso in geometria delle formule e delle operazioni dell'algebra per renderla indipendente da questa. Alla geometria di Euclide venivano aggiunti i teoremi di Archimede sul cilindro e sulla sfera.

La terza e ultima parte dell'opera era costituita dalla trigonometria, ricavata dal Cagnoli, modificando però la

[8] *Lezioni elementari di matematiche* del sig. abate Marie, quarta edizione, Firenze, Allegrini, 1796.

parte sulla risoluzione dei triangoli, arricchita con esempi. Il riferimento più immediato del Brunacci è quindi il *Corso di matematiche* per la Scuola Militare di Modena, dove si trovava la *Geometria* del Grandi e la *Trigonometria* del Cagnoli.

L'algebra contiene anche un capitolo sui problemi indeterminati di primo grado e uno, l'ultimo, sulla risoluzione delle equazioni numeriche. Nella geometria, Brunacci non cadde nell'ingenuità di molti testi settecenteschi di presentare in modo equivalente e non esplicitamente il postulato delle parallele. Si rese conto che esso è necessario per invertire il teorema XXVII che assicura il parallelismo di due rette se, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali. Il "quinto postulato" è enunciato nel modo di Euclide: «Se due linee rette siano segate da una terza in maniera che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall'altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere».

Nell'errore di poter dimostrare il quinto postulato cadde invece un tardo editore del manuale di Brunacci: il bolognese Camillo Minarelli, che aggiunge agli *Elementi di algebra e geometria* (due volumi, Bologna, Nobili, 1830) una sua "dimostrazione" in cui assume che il luogo dei punti equidistanti da una retta in un piano è una retta (implicitamente il V postulato).

Nella trattazione della teoria delle proporzioni (V libro di Euclide) Brunacci si discosta invece dal modello euclideo. Egli si rifà alla sua esposizione, nell'*Algebra,* delle progressioni geometriche (in cui il prodotto degli estremi uguaglia quello dei medi). Introducendo il concetto di rapporto q di due termini, tali progressioni si possono scrivere nella forma a, aq, aq^2…

Brunacci commentava:

> È vero che le quantità che ivi paragonammo tra loro erano numeri e che nella geometria queste esser debbano o linee o superficie o solidi, ma se rifletteremo che, stabilita una certa misura per unità, tali quantità potranno allora essere rappresentate da numeri che dicono a quante di quelle unità, la quantità equivaleva, svanirà allora ogni dubbio sopra l'applicazione alle quantità geometriche di quelle regole da noi date pei numeri.[9]

Si procede, quindi, come aveva suggerito Galileo, dalla definizione di rapporto:

> *Rapporto* o ragion geometrica di due quantità (siano esse numeri, linee, superficie, ecc) è il confronto che si fa tra di loro per sapere quante volte una contiene o è contenuta dall'altra.

In questo modo, il quinto libro di Euclide si riduce a poche pagine.

La geometria solida comprende anche i risultati di Archimede sulla sfera e il cilindro, non nella complessa esposizione del geometra siracusano, ma secondo una più rapida esposizione scolastica, che era nata già con Pappo. Diamo l'indice degli *Elementi* di Brunacci:

> Elementi d'aritmetica
> Cap. I - Degl'interi
> Cap. II - Dei rotti
>
> Elementi d'algebra
> Cap. III - Prime nozioni e regole. Usi della divisione algebrica

[9] Brunacci, *Elementi* … cit., pp. 226-227.

Cap. IV - Risoluzione dei problemi di primo grado. Problemi a più incognite
Cap. V - Delle potenze e delle radici dei monomi
Cap. VI - Delle potenze dei polinomi
Cap. VII - Delle radici dei polinomi e delle radici dei numeri. Metodo d'estrarre per approssimazione le radici di qualunque grado
Cap. VIII - Risoluzione dei problemi del secondo grado. Problemi a più incognite
Cap. IX - Dei logaritmi
Cap. X - Delle ragioni e delle proporzioni. Delle proporzioni aritmetiche
Cap. XI - Delle proporzioni geometriche
Cap. XII - Della regola del tre e di alcune altre che ne dipendono
Cap. XIII - Risoluzione dell'equazioni di terzo grado
Cap. XIV - Risoluzione dell'equazioni di quarto grado
Cap. XV - Risoluzione dei problemi indeterminati di primo grado
Cap. XVI - Risoluzione dell'equazioni numeriche. Trovar le radici per approssimazione

Elementi di geometria
Cap. I - Delle proprietà dei triangoli e dei parallelogrammi
Cap. II - Dei quadrati, dei rettangoli e delle linee
Cap. III - Della proprietà del cerchio
Cap. IV - Delle figure inscritte e circoscritte al cerchio
Cap. V - Delle proporzioni e loro applicazione nelle figure piane
Cap. VI - Dei solidi e delle proprietà dei parallelepipedi
Cap. VII - Delle piramidi, dei coni, dei cilindri e della sfera
Cap. VIII - Dei principali teoremi d'Archimede sul cilindro e sulla sfera
Cap. IX - Della misurazione delle quantità geometriche. Elementi di Trigonometria piana.

Abbiamo visto come tra le fonti degli *Elementi* di Brunacci vi fosse il *Corso* della scuola militare di Modena: la maggiore opera didattica collettiva per la matematica del periodo napoleonico in Italia.

Il *Corso di matematiche ad uso degli aspiranti alla scuola d'Artiglieria e Genio di Modena* consta di cinque volumi (Modena, Società Tipografica, 1805-1808). Alla scuola di Modena si accedeva dopo gli studi liceali, ma come dimostra questo corso, le conoscenze matematiche richieste agli aspiranti erano ben più vaste di quelle prescritte nei licei napoleonici che si ritrovano nei già citati manuali di Bossut e di Brunacci.

Il primo volume del *Corso di matematiche* si apre con la dedica del direttore della Scuola Antonio Cagnoli al generale di divisione Domenico Pino, ministro della guerra del Regno d'Italia e comprende la traduzione italiana dell'*Aritmetica* (prima edizione 1743) di Paolino Chelucci (1682-1754) (Paolino da San Giuseppe) a cura di Ottavio Cagnoli. Il volume contiene anche un *Breve trattato delle misure e principalmente di quelle del Regno d'Italia* di Paolo Cassiani (1743-1806) e una *Tavola dei numeri primi*. Il secondo volume è formato dalla geometria euclidea di Guido Grandi,[10] un'altra opera settecentesca, con in appendice un *Saggio Elementare sul metodo dei limiti* di Giuseppe Tramontini. Il saggio era stato predisposto da Cassiani che però non era riuscito a completare l'opera. Esso contiene un'esposizione moderna dei risultati di Archimede sulla misura del cerchio, una trattazione

[10] Gli *Elementi geometrici piani e solidi di Euclide posti brevemente in volgare* da Guido Grandi ha avuto varie edizioni, la prima nel 1731. Abbiamo presente la seconda edizione a cura di Carlo Andreini (Firenze, Cambiagi, 1782).

della misura di cilindri e coni, la misura della sfera e del cilindro (ancora un risultato di Archimede). Il volume terzo è opera originale di Paolo Ruffini (1765-1822) e contiene l’algebra elementare. Datato 1807 è dedicato a Eugenio Beauharnais viceré d’Italia. Anche questo volume era stato originariamente assegnato a Cassiani. Come dice nel titolo l’aggettivo “elementare” siamo di fronte ad un’opera di minore ampiezza di quella con titolo simile di Lacroix. Essa contiene le operazioni sui polinomi comprese le estrazioni delle radici. Il quarto volume contiene gli *Elementi di Trigonometria* di Antonio Cagnoli, che già aveva pubblicato a Parigi nel 1786 una fortunata opera sull’argomento. Il volume è quasi completamente occupato dalle *Tavole trigonometriche e logaritmiche*. Il quinto e ultimo volume consiste per la maggior parte in un’*Appendice all’Algebra* di Paolo Ruffini, ma contiene anche un’introduzione all’uso delle coordinate in tre dimensioni di Giuseppe Tramontini, e gli elementi di geografia e di trigonometria sferica di Carlo Benfereri, professore di fisica nella Scuola.

L’*Appendice all’Algebra* di Ruffini è la parte più avanzata del *Corso*. Esso contiene nella prima parte l’applicazione dell’algebra alla geometria fino alla costruzione delle radici delle equazioni di terzo e quarto grado di tipo particolare con l’intersezione di rette e di circonferenze. Una seconda parte riguarda la teoria delle serie, gli ultimi due capitoli trattano dei numeri figurati (triangolari, quadrati, pentagoni) e dei logaritmi. Le parti trattate da Ruffini presentano una notevole complessità e hanno in definitiva un’estensione limitata rispetto agli elementi di algebra e complementi di Lacroix. Tuttavia essi costituiscono il contributo più originale dato alla sistemazione di questi argomenti dei matematici italiani nei primi anni del secolo XIX. Tutto il corso, se il paragone è con le opere didattiche degli allievi e docenti dell'Ecole polytechnique appare molto ancorata ai metodi settecenteschi, quando non si ripropongono opere come quelle di Paolino e di Grandi, concepite nella prima metà del secolo XVIII.

Con la pace di Campoformio (1797) tra la Repubblica francese e l'Impero, i territori dell'antica Repubblica di Venezia venivano divisi tra la Repubblica Cisalpina (Bergamo, Brescia, parte di Verona) e l'Impero (Venezia, Padova, parte di Verona ecc.); i territori austriaci furono poi annessi al Regno d'Italia nel 1806. Venezia con Napoli era stata nel Settecento il principale centro di produzione libraria per i libri elementari. A Venezia questa si inquadrava in una grande tradizione editoriale iniziata nel secolo XV, in armonia con il carattere mercantile della città. Nei primi decenni dell'Ottocento, Venezia perse gran parte di questo suo primato. Tra gli ultimi libri elementari di matematica ivi stampati figurano gli *Elementi di geometria teorico-pratica* (Venezia, Fenzo, 1800) e gli *Elementi d'aritmetica* (Venezia, Santini, voll. 2, 1801) di Francesco Soave (1743-1806), somasco, che fu professore a Milano (Brera) e nelle Università di Parma e Pavia, nonché membro dell'Istituto Nazionale napoleonico. Soave fu autore di libri elementari di logica e filosofia (*Istituzioni di logica, metafisica ed etica,* voll. 5, Venezia, Cardella, 1820). La geometria di Soave (I edizione, Milano, 1790) è un agile volumetto senza pretese di completezza che espone la geometria elementare senza seguire Euclide. Sono date diverse applicazioni di risultati geometrici (il cap. V è tutto dedicato alla costruzione delle mappe). Gli ultimi tre capitoli riguardano la geometria solida, terminando con le misure di capacità e il volume della sfera. L'aritmetica è diretta anche a chi voleva imparare la materia «senza la voce del maestro»; è più estesa della geometria e, nella seconda parte, oltre al calcolo delle frazioni e alle regole delle proporzioni, contiene una sezione di matematica finanziaria (Dei conti di annualità e d'interessi, Dei Conti mercantili, Dei conti di società e di riparti).

3. *Il Regno di Napoli*

Il maggior risultato raggiunto nel Regno di Napoli in merito alla pubblicazione di libri elementari di matematica fu il *Saggio di un Corso di matematica per uso della Reale Scuola Politecnica Militare*, pubblicato in dodici tomi tra il 1813 e il 1815 nella Stamperia Sangiacomo della stessa scuola.

Il tomo I *Aritmetica* e il tomo II *Algebra* sono dovuti a Giovanni Rodriguez, professore primario ed esaminatore della scuola. Il tomo III *Planimetria* (geometria piana) e il VI *Planimetria* (trigonometria piana) sono opere di Ferdinando De Luca (insieme al tomo V che contiene la geometria analitica del piano). I tomi VII e VIII, che riguardano la geometria analitica in tre dimensioni e il calcolo differenziale e integrale, sono dovuti a Ottavio Colecchi. Il tomo IV (stereometria o geometria solida) e il tomo IX (geometria descrittiva) sono opere di Gaetano Alfaro; il X (meccanica) e l'XI (Idrodinamica) sono di Nicola Massa. Infine, il XII e il XIII (trigonometria sferica, astronomia, geografia matematica) sono di Tommaso Farias.[11]

[11] Per l'attribuzione dei tomi, che a volte compaiono anonimi, si veda F. Amodeo, *Vita matematica napoletana*, Napoli, Tipografia dell'Accademia Pontaniana, 1924, p. 172.

L'*Aritmetica* (Rodriguez) tratta le operazioni tra numeri interi, le frazioni, le frazioni decimali, i numeri complessi ossia le grandezze non decimali (come i gradi, le misure del tempo, la monetazione non decimale), la regola del tre, i sistemi di misura.

L'esposizione della geometria piana (De Luca) non segue il modello euclideo e nemmeno procede con un ordine rigoroso come il Legendre. Si ha piuttosto un'esposizione per problemi come il settecentesco manuale di Clairaut. Il capitolo II è dedicato all'incontro di tre rette "ossia de' triangoli rettilinei" il capitolo III agli incontri di più rette, cioè ai poligoni e in particolare ai parallelogrammi. Il capitolo IV tratta dei cerchi, delle tangenti ad essi, dei poligoni regolari iscritti. Il capitolo V verte sulla teoria delle proporzioni. Uno degli ultimi teoremi stabilisce che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi (similitudine). Il volume che riguarda l'algebra (Rodriguez) contiene un'esposizione assai più estesa di quella dell'aritmetica e della geometria: operazioni su monomi, polinomi, equazioni algebriche in una indeterminata, sistemi di equazioni lineari, radici reali di un'equazione comprese tra due numeri dati, serie, serie ricorrenti.

Napoli, che restava la più grande città d'Italia, continuò ad essere una delle sedi maggiori dell'editoria scolastica. Diversi libri di matematica vi furono pubblicati nel primo Ottocento.[12]

Tra questi: *Istituzioni di Aritmetica e Algebra* (Napoli, 1811) di Domenico Angeloni, *Elementi dell'Agrimensura* (Napoli, 1802) di Giuseppe Rosati, *Elementi di Aritmeti-*

[12] Amodeo, *Vita matematica napoletana* …cit., pp. 358-359 e altrove. A. Di Biasio, *Carlo Alfan De Rivera e il Corpo dei ponti e strade*, Latina, Caramanica, 1993. F. Palladino, *Metodi matematici e ordine politico, Napoli,* Jovene, 1999.

ca (Napoli, 1813) di Giovanni Gaeta, *Trattato di numeri e corso elementare di Aritmetica e Algebra* (Napoli, 1814) di Antonio Benci, *Elementi di matematica* (Napoli, 1816) di Anselmo di Ciò.

Un altro trattatista fu Carlo d'Andrea, professore di algebra superiore al Collegio Militare, che tradusse anche il *Riassunto delle lezioni date alle Scuole di Ponti e Strade su l'applicazione della Meccanica di Navier* (Napoli, 1836). D'Andrea pubblicò diverse opere didattiche tra le quali gli *Elementi d'Algebra* (Napoli, Reale Tipografia Militare, 1848), dove svolse un'estesa trattazione dei numeri complessi. Sempre un professore del Collegio, Tommaso Mandoi, aveva tradotto gli *Elementi di trigonometria piana e sferica* di Legendre (Napoli, 1831).

Napoli ospitò anche una ben nota scuola matematica di geometria sintetica, il cui capofila nell'Ottocento fu un allievo di Nicola Fergola: Vincenzo Flauti. Nel 1810 Flauti pubblicò in due volumi il *Corso di Geometria elementare* costituito per il primo volume dai libri I-VI degli *Elementi di Euclide* e per il secondo dai libri XI e XII degli *Elementi*, dal primo libro di Archimede sulla sfera e il cilindro e dall'altro sulla misura del cerchio. L'*Euclide* del Flauti, molto curato nella redazione, fu introdotto come libro di testo nei Licei del Regno di Napoli ed ebbe numerose edizioni (nel 1832 si stampava la ventunesima). In tal modo, nel Regno di Napoli, si precedette il ritorno ad Euclide di Betti e Brioschi. Se non che l'insegnamento pubblico nel Regno era solo una parte (e non sempre la maggiore dell'insegnamento). Fiorivano molte scuole private e in esse si usavano il Legendre e gli altri più moderni testi. Per l'algebra, che non compariva in Euclide e per l'aritmetica, che era cosa molto diversa dai libri aritmetici euclidei, si ricorreva ad altre opere.

Un testo interessante da esaminare sono le *Istituzioni di matematiche pure* di Michele Gagliani (due volumi, Napoli, Sangiacomo, 1818). L'autore era professore di analisi sublime e fisica matematica nel Liceo del Salvatore a Napoli, uno storico collegio nel quale nel secolo precedente aveva insegnato anche Nicola Fergola. I due volumi riguardano l'algebra ed erano preceduti da un trattato di Aritmetica dello stesso autore. Questi prende le norme da manuali della fine del Settecento (Bossut e Marie), dagli *Elementi d'Algebra* di Pietro Paoli (un'opera tutt'altro che elementare) e dai libri elementari di Lacroix.

«L'algebra è la scienza che tratta del calcolo, e dei rapporti delle quantità per mezzo di caratteri generali» è la definizione da cui parte. In nota commenta «L'algebra è un'aritmetica di segni, per cui viene chiamata aritmetica speciosa o universale». L'opera contiene il calcolo algebrico, la teoria delle equazioni algebriche (con la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado), la risoluzione approssimata delle equazioni, elementi di teoria algebrica dei numeri, proporzioni, serie, logaritmi, frazioni continue, applicazioni dell'algebra alla geometria: argomenti che si ritrovano nei corsi universitari di introduzione al calcolo sublime. L'autore spesso introduce note storiche che consentono l'individuazione delle fonti: oltre ai trattati citati, opere di Euler, Lagrange, Newton, Clairaut, l'Hospital. Il riferimento principale è probabilmente costituito dai complementi d'algebra di Lacroix.

Se è già difficile seguire le scuole pubbliche lo è ancora di più esaminare gli insegnamenti matematici nelle scuole private che dopo la parentesi "statalista" dei governi napoleonici rinacquero a Napoli fiorenti in quasi tutte le discipline. Un'opera predisposta «da un professore di matematica e di filosofia per uso della sua scuola privata» sono *Gli Elementi di Geometria piana composti da Vito Caravelli*, edizione seconda, Napoli, Sangiacomo, 1815. Il professore privato voleva evitare agli allievi i difficili volumi del Flauti e voleva stare sul sicuro: di qui il riferimento ad uno dei maggiori trattatisti napoletani di fine Settecento. Se non che ormai gli *Elementi* di Caravelli.[13] mostravano tutti i difetti: esposizione acritica degli assiomi, scarsa precisione. L'operazione astuta di recupero proponeva di fatto agli allievi un'opera superata.

Durante la permanenza dei Borboni in Sicilia i libri elementari di matematica (pochi) sembrano ancorati a modelli tardo settecenteschi. Si veda ad esempio *Raccolta di teorie diverse esposte sotto l'enunciazione di quei problemi che sono dati a risolvere nelle lezioni di Matematiche dell'ab. Marie*, del cav. Sammartino, tomi I-II, Catania, Bisogni, 1808.

4. *I libri elementari nell'età della Restaurazione*

Il Congresso di Vienna riportava l'Italia allo spezzettamento del 1796: risultavano rafforzati il Regno di Sardegna, al quale veniva annessa la Repubblica di Genova, e l'Impero austriaco che si impadroniva dei territori della Repubblica di Venezia. Gli antichi sovrani, ritornati tutti con l'amarezza dell'esilio e la sete di vendetta verso i sudditi, che avevano accettato di diventare cittadini, si comportarono in modo differenziato: la Restaurazione fu più morbida in Lombardia dove il luogotenente Enrico di Bellegarde mantenne molte istituzioni napoleoniche e negli Stati pontifici grazie alla moderazione

[13] Vito Caravelli (1724-1800).

del card. Ercole Consalvi, segretario di Stato. Fu molto più dura in Toscana, in Piemonte, nel Napoletano. Ma poi le cose cambiarono con i moti del 1821. In Toscana e nell'autonomo ducato di Lucca (Maria Luisa di Borbone), grazie anche a funzionari illuminati come Vittorio Fossombroni e Gaetano Giorgini, e poi al nuovo granduca Leopoldo II, la Restaurazione fu più sopportabile.

Il principale artefice della Restaurazione Klemens Metternich (1773-1859) era culturalmente abbastanza aperto, come gli uomini che si erano formati nell'età dei Lumi, ma aveva maturato nei confronti dei professori e degli intellettuali, che in gran numero si erano impegnati in politica e nell'amministrazione pubblica durante i governi napoleonici, un disprezzo profondo.[14] Li temeva come possibili formatori della pubblica opinione, e li detestava: per lui essi erano per la maggior parte dei pusillanimi che tendevano a far applicare le loro idee liberali ai loro studenti. Li accusava di sconvolgimento dell'ordine e di rovesciamento dei valori e per questo raccomandò un rigido controllo poliziesco sulle università italiane e tedesche. I sovrani restaurati condividevano queste idee, accettarono quindi volentieri i controlli di polizia e misero alla guida degli Atenei uomini di loro fiducia (a Modena, rettore fu Paolo Ruffini, che collaborava con la polizia estense). Si ridussero i finanziamenti per le università e l'istruzione pubblica, diminuirono le cattedre delle materie scientifiche. Non si rimpiazzarono i membri dell'Istituto Nazionale che cessavano di vivere. Non si sostituirono i professori scomparsi. Quando si verificava

[14] F. Herre, *Metternich*, Milano, RCS Libri, 2001 (ed. originale 1983), pp. 221-222.

qualche tentativo di ribellione, le Università venivano chiuse, gli insegnamenti smembrati in varie sedi.

In questo clima di repressione le Università e le scuole italiane trascorsero venticinque anni della loro storia, accumulando in quasi tutti i settori enormi ritardi rispetto ai centri più avanzati della cultura europea: ritardi che finalmente erano stati quasi completamente colmati del periodo napoleonico.

Nell'età della Restaurazione scarse sono le opere originali, anche tra i libri elementari di matematica: si traducevano libri francesi, dove si poteva, specialmente in Toscana e a Napoli. Uno dei maggiori autori di libri elementari di matematica nella prima età della Restaurazione fu Pietro Franchini. Nato a Portigliano presso Lucca nel 1768 studiò matematica a Pisa con Pietro Paoli. Avviato alla carriera ecclesiastica, insegnò umanità nel Seminario vescovile di Veroli. Qui compose la sua prima opera a stampa *Teoria dell'analisi da servire d'introduzione al metodo diretto e inverso dei limiti* (Roma, Canneti, 1792) che gli valse una certa notorietà e la nomina a membro corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino. Da Veroli, passò ad insegnare retorica a Frosinone, dove fu scoperto da Gaspard Monge, commissario presso la Repubblica Romana, che lo volle membro dell'Istituto Nazionale della Repubblica. Fu anche inviato a Parigi nella commissione per il varo definitivo del sistema metrico (1798). Qui conobbe Lagrange, Bossut, Mascheroni e gli altri commissari. Nello stesso anno pubblicò un *Mémoire sur l'intérpretation des équations differentielles*. Ritornato in Italia, dopo un soggiorno a Venezia, si trasferì a Lucca nel 1802 dove si dedicò all'insegnamento della matematica al Liceo e all'Università. Durante il periodo napoleonico ebbe importanti cariche pubbliche e fu anche nominato senatore. Morì a Lucca nel 1837. Numerose sono le sue opere didattiche:

- *Trattato di aritmetica*, Lucca, Marescandoli, 1804
- *Trattato analitico di trigonometria e poligonometria rettilinea e sferica*, Lucca, Bertini, 1805
- *La Scienza nel Calcolo* (4 volumi), Livorno, Barboni (voll. I-II), La Fenice (III-IV), 1816-1820
- *Elementi di algebra* ad uso del Real Liceo, Lucca, Bertini, 1819
- *Trattato algebrico di massimi e di minimi*, Lucca, Bertini, 1823
- *La Scienza del Calcolo sublime*, Lucca, Bertini, 1826

Pubblicò anche diverse memorie (poligonometria, ecc.) sugli Atti della R. Accademia Lucchese di scienze, lettere e arti a partire dal tomo I (1821). Franchini ebbe un posto di rispetto anche nella storiografia delle matematiche come autore di un *Saggio sulla storia delle matematiche*, Lucca, Bertini, 1821 e *La storia dell'Algebra*, Lucca, Bertini, 1827.[15]

Per le scuole dell'Accademia militare di Torino vennero pubblicati intorno agli anni venti dell'Ottocento alcuni volumi di *Lezioni matematiche*. L'*Aritmetica* fu stampata dal professore Sebastiano Vassalli (primo volume, Torino, Pomba, 1824). La numerazione decimale è alla base della trattazione (operazioni sui numeri interi, sulle

[15] Il *Saggio* non era concepito come opera a sé ma come parte del trattato di matematica che comprendeva la *Scienza del calcolo*, gli *Elementi d'algebra* e doveva terminare con la *Scienza del Calcolo Sublime*. Franchini vedeva quindi la storia delle matematiche come parte integrante e autonoma di un corso di matematica, cfr. M. T. Rivolo, *Contributi di Pietro Franchini alla storia delle matematiche*, in *Pietro Riccardi e la storiografia delle matematiche in Italia*, a cura di F. Barbieri e F. Cattelani Degani, Modena, Università degli Studi, 1989, pp. 231-238.

frazioni, ecc.). Gli esempi sono numerosi e tratti dalla pratica militare. Sono poi trattate le operazioni con numeri non decimali ("complessi"). Viene data una tavola di ragguaglio tra le antiche misure piemontesi (rubo, trabucco, brenta, ecc.) e le misure del sistema metrico decimale. Completa il volume la regola del tre, con diversi esempi ricavati dalla pratica militare, e l'estrazione della radice quadrata.

Alla trattazione degli argomenti dei libri V-VIII di Legendre sono dedicati gli *Elementi di geometria solida* di Filippo Maria Guidi, "professore di matematica nella Reale Università degli Studi di Napoli" (Napoli, Raffaello di Napoli, 1829).[16] L'esposizione di Guidi segue essenzialmente, ma non pedissequamente, quella di Legendre ed è ordinata in sedici brevi capitoli. Nel 1843-44 venne pubblicata la seconda edizione napoletana del *Corso completo di matematiche pure* di Louis Benjamin Francoeur (due volumi, Napoli o Firenze, Batelli). Era opera di uno dei primi studenti dell'Ecole polytechnique, destinata «agli allievi della scuola normale e politecnica ed ai candidati che si preparano ad esservi ammessi». La prima edizione era stata stampata a Parigi nel 1809. Il volume primo comprende l'aritmetica, l'algebra elementare, gli elementi di geometria e la geometria analitica. Il volume secondo l'algebra superiore (teoria delle equazioni algebriche), la trigonometria sferica, lo studio delle superficie, delle curve sghembe, il calcolo differenziale ed integrale, il metodo delle differenze finite. Con lo stesso

[16] Louis B. Francoeur ((1773-1849) aveva fatto parte della prima promozione della scuola, fu poi assistente di Prony. Per la sua produzione scientifica e per gran parte dei matematici francesi di questo periodo il primo riferimento è I. Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840,* voll. 3, Basel, Birkhäuser, 1990.

titolo: *Corso completo di matematiche pure*, e con contenuti molto simili, uscirono a Napoli anche i tre volumi del gesuita G.B. De Sinno (Stamperia del Fibreno, 1850).

Negli Stati Pontifici si tornò al latino nelle scuole e nelle università e il gesuita Andrea Carafa compose gli ultimi elementi di matematica pubblicati in Italia in lingua latina. I primi due volumi dei suoi *Elementa matheseos* (Roma, Ferretti, 1835), riprendono rispettivamente l'aritmetica, l'algebra e la geometria. Essi sono scritti sostanzialmente ricalcando la manualistica francese del primo Ottocento, ma non senza elementi di originalità di trattazione. L'Aritmetica piuttosto breve arriva all'estrazione delle radici; l'algebra contiene come solito le operazioni con i segni e le lettere, lo studio delle equazioni algebriche, progressioni e proporzioni, logaritmi, serie. La geometria è trattata per lo più con metodi analitici e prepara all'uso del calcolo differenziale e integrale. Negli anni trenta non era più tempo, nemmeno a Roma, per manuali di matematica in latino e infatti l'opera del Carafa fu tradotta in italiano da Paolo Volpicelli e stampata in tre volumi: *Elementi di matematica* (Roma, Ferretti, 1836-1843).[17]

A Bologna, in una città che soffrì molto culturalmente nell'età della Restaurazione, con un'Accademia delle scienze sospesa fino al 1829 e un'Università ai minimi termini, sono da segnalare solo qualche traduzione, qualche riedizione e i modesti *Elementi di algebra, geometria e trigonometria piana* che Giambattista Bontà pubblicò per uso del Seminario (Bologna, Tipi governativi alla Volpe, 1851). La geometria euclidea è trattata in modo sommario (la teoria delle parallele non esplicita il V po-

[17] Paolo Volpicelli (1804-1879) romano, fu professore di fisica matematica nell'Università e segretario dei Lincei.

stulato ecc.). Alla fine sono dati dei cenni sulla parabola, l'ellisse e la cicloide per il loro «uso speciale in fisica».

Nel Regno Lombardo Veneto, ridottasi drasticamente l'attività editoriale a Venezia, Milano era diventato un centro notevole di attività editoriale.[18] I nomi di Giovanni Silvestri, Anton Fortunato Stella, Antonio Vallardi e dei fratelli Sonzogno riportano ad una felice stagione di editoria, in buona parte economica, a cui collaborarono intellettuali non allineati con i governi della Restaurazione come Melchiorre Gioia, Giuseppe Compagnoni, Giandomenico Romagnosi. Uscirono anche un certo numero di opere scientifiche e tecniche (per lo più ristampe) come l'*Idraulica fisica e sperimentale* di Francesco Mengotti (due volumi, Milano, Silvestri, 1828), i *Problemi di geometria* di Lorenzo Mascheroni (Milano, Silvestri, 1832), le *Nuove Ricerche sull'equilibrio delle volte* dello stesso (Milano, Silvestri, 1829).

La ristretta produzione di opere elementari di matematica rimaneva tuttavia in ambiente accademico. Antonio Bordoni, professore a Pavia, fu un buon trattatista. All'Università di Pavia era anche collegato Giovanni Gorini, autore di un diffuso *Elementi di matematica pura* (due volumi, Pavia, Bizzoni, 1824). La divisione dell'opera è quella ormai consueta: l'algebra nel primo volume, la geometria con la trigonometria e anche le sezioni coniche nel secondo. I testi di riferimento rimangono i soliti. Gli elementi di Euclide e le opere di Eulero, Paoli, Ruffini, Bossut, Lacroix, Legendre.

L'algebra oltre che delle equazioni si occupa anche dei logaritmi e delle progressioni, e del loro uso per il

[18] M. Berengo, *Intellettuali e librai nella Milano della Restaurazione*, Torino, Einaudi, 1980.

calcolo degli interessi semplici e composti. La geometria non segue l'esposizione euclidea, il postulato delle parallele viene però enunciato correttamente (p. 26). La teoria euclidea delle proporzioni è come in Brunacci basata sulla definizione di rapporto «il numero delle volte che una data quantità contiene o è contenuto in un'altra della medesima specie». Nella geometria solida si fa ricorso ad espressioni algebriche. Le coniche sono studiate con metodi geometrici (senza ricorrere alla geometria cartesiana).

In Toscana, grazie anche ai rapporti personali di Gaetano Giorgini e di Vittorio Fossombroni, stabiliti durante i loro soggiorni in Francia ai tempi dell'Impero, i libri elementari francesi continuarono ad avere fortuna. Nel 1829 venne pubblicata a Firenze (Piatti) in due volumi la versione italiana della *Geometria e meccanica delle arti, dei mestieri e delle belle arti* di Charles Dupin, uno dei migliori allievi di Monge all'Ecole polytechnique. Le prime nove lezioni riguardano la geometria euclidea piana e solida, la decima le superfici sviluppabili, l'undicesima le superfici di rivoluzione, la dodicesima le superfici a spirale, la tredicesima le intersezioni tra superfici, la quattordicesima tangenti e piani tangenti, la quindicesima la curvatura delle linee e delle superfici. Il secondo volume riguarda la meccanica. A Firenze (Batelli) vennero anche pubblicati tra il 1838 e il 1849 gli otto volumi di testo, più le tavole, del *Dizionario delle scienze matematiche pure e applicate compilato da una società di antichi allievi della Scuola Politecnica di Parigi* sotto la direzione di A. S. De Montferrier, tradotto in italiano da Giuseppe Gasbarri e Giuseppe François.

Uno dei più noti professori dell'Università di Pisa, Filippo Corridi pubblicò nel 1836 degli *Elementi di geometria*

(Firenze, Piatti). La geometria sintetica era ridiventata con Monge un campo attuale e vasto di ricerca e con Poncelet, Steiner, Möbius si era ulteriormente affermata. Si sentiva il bisogno di opere che non solo presentassero in una maniera conforme alla critica moderna i contenuti della geometria euclidea e archimedea, ma che facessero da tramite anche rispetto ai moderni metodi della geometria sintetica che si presentavano con pretese di generalità. L'opera del Corridi cercava di rispondere a queste esigenze. Egli curò anche una nuova edizione del *Trattato elementare di applicazione dell'algebra alla geometria* di Lacroix (Firenze, Piatti, 1834). Corridi nei suoi *Elementi* si allontanava da Legendre «solo per servire al desiderio di educare gli studiosi a più facili speculazioni, nonché a più accurato rigore di ragionamento». La geometria di Corridi non migliora tuttavia rispetto a Legendre per quanto riguarda la teoria delle parallele, che continua ad essere svolta ammettendo implicitamente il quinto postulato. La teoria delle proporzioni viene trattata a partire dalla definizione di rapporto: «quoziente dei numeri dai quali queste quantità vengono rappresentate». Il volume termina con elementi di geometria descrittiva e con un'ampia appendice (poligoni regolari, problemi isoperimetrici, triangoli sferici).

Il programma di adeguare i libri elementari di matematica ai progressi delle discipline matematiche attraverso la traduzione di nuove opere venne compiuto da un benemerito editore fiorentino Le Monnier negli ultimi anni del governo granducale. Nel 1856 usciva il *Trattato di aritmetica di Giuseppe Bertrand*, tradotto da Giovanni Novi; poco dopo il *Trattato d'algebra elementare* dello stesso Bertrand, tradotto da Enrico Betti e il *Trattato di trigonometria di Alfredo Serret*, tradotto da Antonio Ferrucci. Un anno dopo furono pubblicati gli *Elementi d'aritmetica* del Novi, come introduzione al *Trattato* di Bertrand. Nel 1858 usciva infine il *Trattato di geometria elementare di A. Amiot prima traduzione italiana con note ed aggiunte* di Giovanni Novi «professore di meccanica nell'I. e R. Liceo militare di Firenze» (Firenze, Felice, Le Monnier, 1858). Di quest'opera, Luigi Cremona fece un'ampia recensione su *Il Politecnico* (volume IX, 1860, pp. 286-323) che può essere considerato il primo passo verso quel ritorno ad Euclide che caratterizzò l'insegnamento della geometria nelle scuole italiane dopo l'unità e che ebbe nell'edizione di *Gli Elementi d'Euclide*, per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi, (Firenze, Successori Le Monnier, 1867-1868) il suo primo manuale.[19]

L'opera dell'Amiot era stata edita per la prima volta a Parigi con il titolo di *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire* nel 1850. La geometria piana è divisa in quattro libri. Il primo intitolato *La linea retta e la linea spezzata* si compone di sei capitoli:

- Della comune misura di due linee e del loro rapporto
- Angoli

[19] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geometria pubblicato a Firenze*, in *Opere matematiche* di Luigi Cremona, tomo I, Milano, Hoepli, 1914, pp. 176-207. Cremona, essendo membro della Commissione che nel 1867 introdusse nei programmi dei licei italiani l'insegnamento di Euclide, non comparve tra gli autori degli *Elementi* insieme a Betti e Brioschi, ma a lui si devono la prefazione dell'opera, e la stesura di alcuni capitoli, la correzione di altri, la scelta di collaboratori e l'indicazione delle fonti di riferimento. Si vedano per questo le *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, a cura di R. Gatto, in *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, volume III, a cura di M. Menghini, Quaderni Pristem, n. 9, Palermo, 1996. pp. 36-43.

- Della perpendicolare e delle oblique
- Delle rette parallele
- Triangoli
- Poligoni.

Il *Trattato* dell'Amiot appartiene quindi alla classe di quei libri che trattano la geometria euclidea senza seguire l'ordine degli *Elementi.* La sua idea era quella di portare i lettori a conoscere i nuovi traguardi della geometria pura aperti dalle ricerche di Carnot, Poncelet, Gergonne, Steiner, Chasles e Möbius. Cremona lodava in generale la precisione delle dimostrazioni dell'Amiot, ma osservava anche che aver abbandonato il modello euclideo portava nel testo delle incompletezze, come quando si parlava della bisettrice di un angolo senza aver prima dimostrato che un angolo si può dividere in due parti uguali (p. 14). In questo modo, alcune proposizioni si potevano dimostrare in modo assai semplice come il teorema «Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali e gli angoli compresi fra questi lati disuguali, il lato opposto al maggiore de' due angoli è maggiore di quello che è opposto all'altro angolo» (p. 24).

Cremona portava avanti le sue *Considerazioni* ripercorrendo tutti e quattro i libri di geometria piana e indicandone con cura le fonti storiche, in modo da fornire una vera e propria guida ai risultati più importanti della geometria piana (che sarà poi realizzata con ampiezza da *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, a cura di Federigo Enriques, Roma-Bologna, 1927-36.). La nota finale del lavoro di Cremona è tutto un programma:

> Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di Moznik, Toffoli ecc., che per più anni hanno inondate le nostre scuole, [...] sarebbe omai

> tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica […]. (p. 207)

Ma la polemica non era qui diretta contro il glorioso manuale di Legendre e nemmeno contro i trattati di Amiot e Bertrand, tendeva piuttosto a creare nuovi spazi e nuove situazioni per la scuola italiana, troppo a lungo ancorata a quei modelli tardo politecnici, che avevano fatto il loro tempo. Essa inoltre voleva esplicitamente allontanare dalla scuola i libri che presentavano troppe imperfezioni dal punto di vista dell'ordine logico delle proposizioni. Uno di questi era probabilmente il *Compendio di geometria piana e solida e di trigonometria rettilinea e sferica per le scuole liceali e tecniche* di Giovanni Luvini (terza edizione, Torino, Dalmazzo, 1860).

SIMONETTA DI SIENO

LUIGI CREMONA E LA FORMAZIONE TECNICA PRE-UNIVERSITARIA NELLA SECONDA METÀ DELL'OTTOCENTO

Ci sono alcuni contributi di Luigi Cremona (1830-1903) alla costruzione del sistema scolastico italiano sui quali si sono andate via via facendo sempre più ricca la documentazione e sempre più attenta la disanima storica.

Penso in particolare ai suoi interventi diretti nella formazione[1] degli ingegneri (dall'Istituto Tecnico Superiore di Milano alla Scuola per gli ingegneri di Roma) segnati dalla speranza di costruire una generazione di intellettuali scientifici in grado di partecipare direttamente, insieme alla tradizionale classe dirigente di formazione umanistica, alla gestione della cosa pubblica. Ma penso anche alle sue battaglie parlamentari per la creazione delle Facoltà politecniche che avevano lo scopo di "procacciare o di conservare alla scuola degli ingegneri quella benefica influenza dell'università scientifica, che è necessaria onde l'istruzione tecnica non degeneri in

[1] Su questi temi si veda per tutti C.G. Lacaita, *Istruzione e sviluppo industriale in Italia 1859-1914,* Firenze, Giunti-Barbera, 1973.

routine di arte e mestiere".[2] Perché «non è punto giustificata la presente reclusione degli studi di ingegneria dall'università. Sono studi che, avendo a fondamento le scienze matematiche e naturali, costituiscono oggi un organismo che ha dignità pari agli altri; sono scienze che, sebbene ultime nate, hanno già acquistato un'importanza tale che [...] non possono più essere condannate all'isolamento. Giacché questo isolamento [...] nuoce essenzialmente ad esse, epperò alla coltura e al benessere della nazione di cui sono tanta parte».[3] E quindi:

> Già questa assoluta separazione dell'elemento scientifico dall'elemento professionale non c'è e non ci deve essere; anzi noi dobbiamo lottare continuamente perché non ci sia, o almeno perché vada sempre più diminuendo.[4]

Ora, l'importanza di tali azioni ha fatto sì che spesso anche gli interventi di Cremona a proposito dell'istruzione tecnica pre-universitaria siano stati letti come se ne fossero un naturale complemento e quindi ha fatto sì che ne siano stati messi in luce quasi esclusivamente gli aspetti che a quei progetti erano contigui o che comunque ad essi erano riconducibili.

Qui mi propongo invece di esplorare (più correttamente, di cominciare a esplorare) tali suoi interventi collocandoli all'interno della riflessione didattica contenuta nei suoi scritti, anche in quelli iniziali come le

[2] Si veda L. Cremona, *Modificazioni alla Legge sull'istruzione superiore. Discorsi pronunziati in Senato nelle tornate del 30 novembre 1886, 14-15-16-17-18 dicembre 1886, 20-21-22-24 25 gennaio 1887*, Roma, Forzani e C., 1887, p. 11.

[3] Ibidem, p. 97.

[4] Ibidem, p. 11.

recensioni[5] della fine degli anni Cinquanta e in quelli non destinati alla pubblicazione come gli appunti presi – in tempi «in cui non potendo comprare libri me ne facevo estratti manoscritti»[6] – mentre andava studiando le opere dei matematici stranieri (da Chasles a Jacobi a Grassmann a Cayley) che, in modi diversi, sarebbero stati punti di riferimento della sua attività di ricerca.

E mi propongo di cercare se c'è un nesso con quanto Cremona mette in campo, da un punto di vista che chiameremo didattico per distinguerlo da quello istituzionale, quando interviene su fronti che pure sembrano lontani dalla scuola pre-universitaria. Per esempio, quando si batte per la ripresa degli studi (e della loro serietà) in un Paese che ha appena vissuto l'esperienza della «ritrovata» Unità (come accade nella famosa *Prolusione*[7] del '60 quando dice: « [...] negli studi severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù e alla luce della scienza imparate ad essere degni di libertà. [...] se le armi posano, tornate agli studi perocché anche con questi servite e glorificate l'Italia. [...] ella non

[5] Per esempio, la recensione della prima traduzione italiana del *Trattato di Geometria elementare* di A. Amiot che, pubblicata ne *Il Politecnico* (vol. IX, 1860, pp. 286-323) con il titolo importante *Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze*, appare come un chiaro manifesto della filosofia didattica di Cremona.

[6] È quanto si trova scritto nella dedica alla "dilettissima" Annuccia di un fascicolo che, contenendo riassunti e commenti ad alcune *Memorie* di Chasles, è conservato presso la Biblioteca "Bonetta" di Pavia insieme a lettere e documenti di vario genere. Il regesto di questo materiale è oggetto di un lavoro in corso di stampa a cura di Irene Rubini.

[7] L. Cremona, *Prolusione ad un corso di geometria superiore letta nell'Università di Bologna. Novembre 1860,* Il Politecnico, 10, 1861, pp. 22-42, ora in *Opere Matematiche,* v I, Milano, Hoepli, 1914, pp. 237-253 (La citazione è tratta da p. 253).

durerebbe felice e signora di sé ove non la rendesse onoranda e temuta il senno de' suoi cittadini.») oppure quando si impegna nella costruzione di condizioni strutturali favorevoli allo sviluppo della ricerca matematica (compresa la fondazione e gestione di buoni strumenti di comunicazione e di confronto fra ricercatori come gli *Annali*[8] e la personale, diretta opera di *patronage* nei confronti di giovani studiosi, italiani ma non solo, finalizzata anche a garantire una indispensabile circolazione di metodi e risultati).

In questi interventi l'attività di ricerca o, meglio, un legame stretto con tale attività, appare come la base fondante di un buon insegnamento a qualunque livello scolastico ci si ponga. Nella costruzione del progetto di formazione universitaria del nuovo ingegnere ciò è evidente ed è già stato studiato a lungo,[9] ma risulta chiaro anche su questioni meno importanti come quella, per esempio, del pareggiamento delle università di Genova, Catania e Messina nel 1885 di fronte alla quale l'opposizione di Cremona trova uno dei suoi motivi forti nell'impossibilità per il Paese di «produrre un numero indefinito di uomini capaci di promuovere l'alta scienza»[10] e quindi di produrre insegnanti di buon livello.[11]

[8] Si tratta della seconda serie degli «Annali di matematica pura e applicata», oggetto di una appassionata opera di direzione, a partire dal 1865, da parte di Francesco Brioschi e dello stesso Cremona.

[9] Si veda, per esempio, A. Brigaglia, *Brioschi, Cremona e l'insegnamento della Geometria nel Politecnico*, in *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897). I saggi*, a cura di C.G. Lacaita, A. Silvestri, Milano, Franco Angeli, 2000, pp. 403-418.

[10] Si veda *Atti parlamentari. Senato del Regno. Discussioni. Tornate del 3, 5, 7, 9, 11 dicembre 1885*, p. 4350.

[11] Per una disanima di tale episodio, si veda E. Fraccaro, *Su alcuni contributi di Luigi Cremona alla costruzione della scuola pubblica italiana,*

E dunque naturalmente una prima domanda è se analogo ruolo gioca il legame con la ricerca quando si tratta della scuola pre-universitaria destinata all'istruzione tecnica.[12]

La risposta che spero emerga chiara da ciò che segue è che tale legame è così significativo da permetterci di prenderlo come una delle chiavi di interpretazione delle scelte compiute da Cremona nei suoi interventi in questo settore. Entriamo dunque nel vivo della questione.

1. La struttura e l'impianto della formazione tecnica post-elementare in Italia incominciano[13] a realizzarsi – come

Tesi di laurea, Università degli Studi di Milano, a.a. 2002-2003, pp. 85-94.

[12] Analizzare questo contributo di Cremona mi sembra ci permetta di rispondere anche ad alcune domande simili a quella che è implicita nell'osservazione di Romano Gatto (espressa in R. Gatto, *Il carteggio Betti - Cremona presso la Scuola Normale di Pisa*, in F. Palladino (ed.), *La corrispondenza epistolare tra matematici italiani dall'Unità d'Italia al Novecento*, Napoli, Vivarium, 2004, p. 76) secondo la quale: «Cremona [...] non appariva pregiudizialmente chiuso a un rinnovamento dell'insegnamento medio della matematica che recepisse i nuovi capitoli e i metodi della geometria che allora si stavano affermando. E se è vero che, come sosteneva, causa del mancato rinnovamento degli indirizzi scientifici dell'insegnamento della Matematica era da attribuire innanzitutto all'assenza di testi adatti a tale scopo, è anche vero che lui stesso Betti e Brioschi avrebbero potuto spendere lo stesso tempo e le loro competenze alla compilazione di siffatti testi al posto dell'Euclide».

[13] Per la successione dei provvedimenti che costruiscono e regolamentano il sistema scolastico in Italia dopo l'Unità, si veda per esempio G. Canestri, G. Ricuperati, *La scuola in Italia dalla legge Casati a oggi*, Torino, Loescher, 1976. Più in particolare, per l'istruzione tecnica, si veda A. Tonelli, *L'istruzione tecnica e professionale di stato nelle strutture e nei programmi da Casati ai giorni nostri*, Milano, Giuffré, 1964,

del resto accade per gran parte dell'istruzione dopo l'Unità – con i regolamenti attuativi che, nel 1860, danno seguito alla Legge Casati sull'ordinamento della Pubblica Istruzione. Tale legge, promulgata il 13 novembre dell'anno precedente, prevedeva fra l'altro un segmento a caratterizzazione tecnica articolato nelle Scuole tecniche e nei successivi Istituti tecnici della durata triennale, la cui gestione era affidata quasi esclusivamente alle Province e ai Comuni sia pure con il concorso economico dello Stato. Essi avrebbero potuto essere aperti «a misura che il bisogno se ne farà sentire, nelle città che sono centro di un più notevole movimento industriale e commerciale» (art. 283). Tali regolamenti fissano in quattro le sezioni dell'Istituto tecnico – tre biennali (commerciale, chimica e agronomia) e una fisico-matematica di tre anni – e ne ribadiscono il sostanziale affidamento alle istituzioni locali.

Quest'ultima indicazione trova ulteriore conferma nel 1861, quando gli Istituti tecnici passano alle dipendenze del Ministero dell'agricoltura, industria e commercio (con il caldo sostegno di personaggi del calibro di Quintino Sella per il quale «gli istituti vanno considerati come scuole speciali, per non esservi vere scuole pratiche in cui s'insegna il mestiere», e «la pratica ha anch'essa la sua teoria, ed è questa che s'insegna nelle scuole speciali d'istruzione tecnica»[14]) per salvaguardare la possibilità di una loro maggiore aderenza alle realtà produttive e sociali della comunità che le esprime (il che fra l'altro

e per l'insegnamento della matematica, V. Vita, *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'Unità d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica*, Bologna, Pitagora, 1986.

[14] In Tonelli, *L'istruzione…*, cit. p. 23.

conduce a una crescita smisurata del numero delle sezioni previste), ma con l'ovvia conseguenza che le indicazioni dei programmi nazionali di insegnamento non li avrebbero affatto riguardati. Nel 1865 un'indagine ministeriale.[15] *Sulle condizioni della pubblica istruzione in Italia* descrive in modo pesante la situazione dei rami d'istruzione classica, scrivendo per esempio, a proposito dei libri di testo:

> Le difficoltà inerenti alla questione dei libri di testo per le scuole sono note al Consiglio per una lunga esperienza, come è noto a tutti quanto anormale sia il presente stato di cose, a questo riguardo. L'articolo 10 della legge 13 novembre 1859 giace da lungo tempo come lettera morta. Libri non approvati da verun Consiglio superiore si usano nelle scuole [...].[16]

e suggerisce di conseguenza (è la 17ª Proposta):

> Sarà formata una commissione in cui ciascuna delle principali discipline che s'insegnano nelle scuole secondarie sia rappresentata da almeno due membri. Il suo mandato sarà di esaminare e scegliere i libri di testo, di procurare la correzione di quelli che siano facilmente emendabili, e la formazione di nuovi libri, quando fra gli esistenti non se ne trovi alcuno che meriti l'approvazione [...].[17]

Possiamo cominciare ad arguire quale sia la situazione di sofferenza dell'istruzione tecnica dal fatto che il ministro

[15] Si veda G. Talamo, *La scuola dalla legge Casati alla inchiesta del 1864*, Milano, Giuffré, 1960, pp. 264-267.

[16] Si veda Canestri, Ricuperati, *La scuola ...*, cit., p. 59.

[17] Si veda Canestri, Ricuperati, *La scuola ...*, cit., p. 61.

Torelli si preoccupa di ridurre il numero delle sezioni, eliminando la sezione fisico-matematica e fondando la nuova sezione di costruzione e meccanica, e di cambiare il nome “Istituti tecnici” in quello di “Istituti industriali e professionali”, quasi a sottolineare ulteriormente la dimensione “operativa” delle scuole in questione e comunque a segnalarne la natura diversa rispetto alle scuole dipendenti dalla Pubblica istruzione.

Due anni dopo Cremona viene chiamato a partecipare in modo ufficiale alla Commissione per la stesura dei nuovi programmi della scuola (già da molti anni, in realtà, egli sta esercitando un ruolo importante di consulente-ispiratore come ben si evince dalla corrispondenza che egli intrattiene con alcune delle figure di rilievo della matematica del periodo e in particolare con Angelo Genocchi[18]). È la Commissione che emana i programmi che impongono quel ritorno agli *Elementi* di Euclide come testo base dello studio della geometria nell’istruzione classica che da una parte provoca una lunga opposizione[19] fra i docenti di diversi ordini di scuola e che dall’altra sembra in contraddizione con l’impegno, che abbiamo appena ipotizzato, a una forte difesa dell’opera di indirizzo che la ricerca può esercitare sull’in-

[18] Si vedano *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall’epistolario*, a cura di A. Conte - L. Giacardi, Torino, Deputazione subalpina di storia patria, 1991 e *L’Epistolario Cremona - Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell’Italia unificata*, a cura di L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, Firenze, Olschki, 2001.

[19] Si veda, per avere anche una aggiornata bibliografia su questo episodio, L. Giacardi, *I manuali per l’insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento*, in *TESEO, Tipografi e editori scolastico-educativi dell’Ottocento*, a cura di G. Chiosso, Milano, Editrice Bibliografica, 2003, pp. XCVII-CXXIII.

segnamento. Lo stesso Cremona avrebbe scritto nel 1869 «Io sono convinto che i metodi moderni, specialmente di Steiner e Staudt, sono destinati a rinnovare tutto lo scibile geometrico, sin dagli elementi; con quei metodi, anche le cose più elementari possono essere trattate in modo più semplice, più originale, più fecondo»[20]. Allora perché far studiare l'opera di Euclide e non qualche *topos* geometrico altrettanto significativo, ma più utile per avvicinare gli studenti ai risultati e ai metodi della ricerca matematica coeva? Perché, per esempio, non quella geometria proiettiva che Cremona stesso aveva posto a culmine dell'evoluzione della geometria nelle sue *Considerazioni* del 1860? Credo che si tratti non tanto di una scelta "nuova" e contraria rispetto alle indicazioni precedenti (per esempio rispetto a quelle che lo avevano portato nelle stesse *Considerazioni* a sostenere che un buon libro di geometria debba rendere gli studenti «partecip[i] anche degli straordinari progressi dovuti al nostro secolo»[21]) quanto piuttosto del prodotto di una mediazione con la realtà scolastica, con le carenze nella formazione del personale docente e con la necessità di ottenere il più rapidamente possibile il risultato che ancora nel '73 avrebbe chiamato «il sommo beneficio» recato da tale scelta, cioè quello di «toglier via certi pessimi libri da molti licei del regno».[22]

[20] Nella lettera a E. Betti dell'8 settembre 1869 riprodotta in R. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti* (1860-190), in *La corrispondenza di Luigi Cremona*, a cura di M. Menghini, Quaderni P.RI.ST.EM. n. 9, 1996, pp. 52-53.

[21] Si veda Cremona, *Considerazioni*…, ora in *Opere matematiche*…, I, cit. p. 178.

[22] In *Elementi di geometria projettiva per gli istituti tecnici,* Paravia, Torino, 1873, p. V.

A conferma che il "tradimento" consumato non impedisce altri tentativi, sta quanto succede poco dopo: nel 1871 si ha, per l'istruzione tecnica, uno scossone analogo a quello che i programmi del '67 hanno indotto nell'istruzione classica. È il famoso *Ordinamento degli istituti tecnici* emanato appunto nell'ottobre 1871 dal Ministero di agricoltura, industria e commercio e trasformato in legge nel marzo dell'anno successivo. In esso si ritorna al nome "Istituti tecnici", viene ricostituita la sezione fisico - matematica separandola da una sezione "industriale", si provvede a potenziare[23] le materie di cultura generale «perché l'insegnamento professionale non può veramente fiorire se non è nutrito da una larga cultura letteraria e scientifica»[24].

Quanto agli intenti che esso assegna alla nuova sezione industriale, ne possiamo leggere una parafrasi a posteriori nella *Relazione per il Ministero dell'agricoltura, industria e commercio su "L'istruzione tecnica in Italia"* del 1875: «Questa

[23] Ancora nel 1909 nel *Questionario* predisposto dalla Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia si potrà leggere che tale sezione era stata costituita al fine di dare «educazione mentale e cultura generale sufficienti come preparazione agli studi universitari della Facoltà di matematiche e di scienze naturali, ed anche a quelli di scuole superiori civili e militari, per i quali la licenza da essa sezione è richiesta» (in *Relazione della Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia*, Roma, Cecchini, 1909, p. 22) e ci si domanderà addirittura: «Nelle Facoltà di matematiche e di scienze naturali e nelle altre scuole superiori civili e militari riescono meglio, in complesso, a parità di attitudine e buona volontà, i giovani che vengono dal ginnasio-liceo o quelli che vengono dalle scuole tecniche e dall'Istituto tecnico? E posto che differenze vi siano, a quali cause sono da attribuirsi? » (Ibidem, p. 23)

[24] Citato in Vita, *I programmi …*, cit., p. 33, dalla Premessa ai programmi del 1871

nuova sezione era destinata a formare una classe di tecnici intermedia fra gli ingegneri usciti dalle Scuole superiori e di applicazione e i maestri operai, quali si educano nelle Scuole d'arti e mestieri»[25] inserendosi in questo modo nella costruzione di Istituti tecnici che non fossero «umili centri di scuole applicate, ma istituti che racchiudono un periodo di preparazione consacrato all'acquisto di una cultura generale sufficientemente rigorosa».[26] Anche per i suoi studenti è ritenuto indispensabile, dopo il biennio comune, lo studio della geometria descrittiva e del disegno, sia pure con maggior attenzione alle applicazioni pratiche rispetto alla sezione fisico-matematica.

Quanto invece ai risultati che se ne ottengono, la stessa relazione rileva, a distanza di quattro anni dalla promulgazione, grandi differenze fra istituto e istituto e fra zone diverse del Paese, anche se propone di aspettare le prove condotte negli undici istituti sperimentatori[27] prima di esprimere un giudizio definitivo.

Comunque è proprio l'*Ordinamento* del 1871 che dà origine all'intervento più diretto di Cremona sull'istruzione tecnica. Infatti i programmi che ad esso si ispirano (i programmi Castagnola), quanto alla matematica prevedono:

[25] Si veda la *Relazione per il Ministero dell'agricoltura, industria e commercio su "L'istruzione tecnica in Italia,* p. 37 (cfr. Canestri, Ricuperati, *La scuola…*, cit., p. 80). Cfr anche Appendice 1.2.

[26] Ibidem, p. 20.

[27] Ai quali si affianca la Società d'Incoraggiamento per le arti e i mestieri di Milano che ha uno scopo non dissimile e alla quale è in gran parte dovuto il notevole progresso che parecchie industrie hanno fatto in quella provincia negli ultimi vent'anni (cfr. Canestri, Ricuperati, *La scuola …*, cit., p. 83).

- che non si lavori sulla falsariga degli *Elementi* di Euclide, ma ci si riferisca «alla nuova dottrina della proiettività»;
- che, dopo i primi due anni comuni, al terz'anno si svolga un «vero» corso di geometria proiettiva;
- che durante il quart'anno si presenti la teoria proiettiva di coniche e quadriche

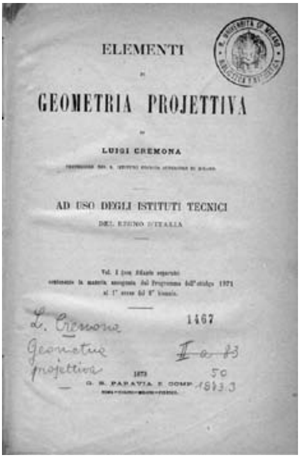
e infine che si introduca un corso di geometria descrittiva.

Si tratta di indicazioni così fortemente condivise (e volute) da Cremona che due anni dopo l'editore Paravia di Torino può pubblicare un suo libro di testo dal titolo *Elementi di geometria projettiva per gli istituti tecnici*, un libro di cui non si sa dire se è più significativo[28] per i contenuti che presenta o per la maniera con cui li argomenta.

Usiamo direttamente l'*Introduzione* per entrare nelle pieghe di questo libro.

2. Il libro si propone di insegnare agli studenti come applicare le conoscenze teoriche della geometria proiettiva al disegno, senza però pretendere che essi conoscano altro se non i principi fondamentali della geometria classica. Quindi, innanzi tutto, Cremona sente l'esigenza di convincere i loro docenti sia della necessità teorica sia della possibilità pratica di un'operazione di tal genere. Secondo una tecnica espositiva che gli è consueta, co-

[28] Fu un testo di grande fortuna anche all'estero. Nel 1875 fu tradotto da E. Dewulf e pubblicato a Parigi da Gauthiers - Villars con il titolo *Éléments de Géométrie projective*; nel 1882 fu tradotto da R. Trautvetter e pubblicato a Stoccarda da J.G. Cotta con il titolo *Elemente der projectivischen Geometrie*; nel 1885 fu tradotto da C. Leudesdorf e pubblicato ad Oxford dalla Clarendon Press con il titolo *Elements of projective geometry*.


ELEMENTI

GEOMETRIA PROJETTIVA

LUIGI CREMONA

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

1467

L. Cremona

Geometria projettiva

G. B. PARAVIA E COMP.

mincia mostrando che in Italia essa si inserisce in una buona anche se recente tradizione. L'inizio viene fatto risalire al *Saggio di geometria derivata* di G. Bellavitis del 1838, ma poi Cremona non si perita di citare se stesso come protagonista, fra gli altri, con le scelte operate sia a Bologna, dove ne aveva fatto argomento delle sue lezioni di Geometria superiore, sia a Milano, ove aveva fatto precedere il suo corso di Statica grafica proprio da un nutrito gruppo di lezioni di geometria proiettiva. Così, grazie all'opera di molti ricercatori e di una politica universitaria accorta, è ormai un dato di fatto che «ogni anno una grossa schiera di giovani [sia] addestrata ai metodi moderni e ne [abbia appreso] l'uso nelle varie parti del disegno tecnico».

Ma ciò non basta. La geometria proiettiva ben si adatta ad essere insegnata anche nelle scuole pre-universitarie:

> Tanta è la semplicità di questi metodi che, mentre hanno in sé una grandissima fecondità di risultati e di applicazioni, nessuna parte delle matematiche offre maggiore agevolezza ad essere appresa [...]. E forse accadrà che di qui balzi fuori in un giorno non lontano la soluzione del problema dell'insegnamento elementare della geometria. (p. V).

Ma anche senza sperare in tale compimento, possiamo prevedere che «La vigorosa e nutritiva educazione geometrica che i giovanetti riceveranno per tal modo ne-gl'istituti tecnici, centuplicherà l'efficacia delle discipline applicative». Tuttavia non si può sperare di seguire i dettami del nuovo *Ordinamento* senza un'adeguata formazione dei docenti: «Indiscreta pretesa sarebbe stata quella di voler rimandare tutt'i professori degl'istituti tecnici, specialmente coloro cui mancò sin qui l'occasione d'erudirsi in coteste materie, alle fonti straniere» (p. VII).

D'altra parte «Fare un libro elementare, un libro che schiettamente si adatti alle scuole, è cosa difficilissima» e Cremona, che non è uso dare direttive acute ed aspettarsi che altri le eseguano,[29] si è impegnato in prima persona in questa impresa che per chi vive di scienza è piena di dubbi e di sacrifici: «per mesi e mesi, ed anche per anni, dovrete lasciar da canto i più cari studi, chiudere negli scaffali e nascondere a voi stesso i libri più nuovi e più curiosi, mettervi a litigare coll'abbicì della scienza". Così "quel libro che sopra ho dimostrato esser necessario perché si possano attuare i nuovi programmi, pensai che toccasse a me farlo; a me che di questi studi sempre feci l'occupazione mia prediletta» (pp. VII-VIII).

Ma il cammino introduttivo non è ancora finito: Cremona si sofferma a spiegare il perché della scelta del nome "geometria proiettiva" dato alla disciplina che si propone di illustrare:

[29] Anche quando si era trattato di apprestare un testo "euclideo" per i licei dopo le indicazioni della Commissione per l'elaborazione dei programmi per la scuola secondaria del 1867, Cremona si era fatto carico in prima persona della questione, curando l'edizione del celebre manuale di geometria elementare noto poi come Betti-Brioschi, che pure, probabilmente per ovvie questioni di opportunità, comparve nel 1868 senza il suo nome fra i curatori (cfr. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti…*, cit.).

> Diversi nomi erano stati dati a quell'insieme di dottrine geometriche di cui qui si pongono i primi fondamenti. Non mi piacque accogliere quello di geometria superiore (*Géométrie supérieure, höhere Geometrie*), perché in sostanza ciò che una volta poté parere elevato, ora è divenuto elementarissimo; né quello di geometria moderna (*neuere Geometrie, modern Geometry*), che esprime del pari un concetto puramente relativo; e d'altronde la materia è in gran parte vecchia, sebbene i metodi si possano considerare come recenti. Anche il titolo di geometria di posizione (*Geometrie der Lage*) nel senso di Staudt non mi parve meglio conveniente, per ciò che esso esclude la considerazione delle proprietà metriche delle figure. Ho invece preferito quello di geometria projettiva, col quale vocabolo si enuncia la vera natura dei metodi che essenzialmente si fondavano sulla proiezione centrale o prospettiva. (pp. VIII-IX).[30]

Poi dà conto della struttura del testo, pensato in modo tale che ciascun insegnante possa adattarlo ai propri usi, tralasciando proposizioni che non ritiene necessarie, approfondendo quelle che reputa più stimolanti per gli studenti o modificando l'ordine degli argomenti trattati per ottenere «che ogni giorno gli scolari facciano deduzioni e soluzioni da sé; non si costringano alla sola parte passiva dell'ascoltare e ripetere le cose dette dal maestro, ma si facciano concorrere attivamente allo sviluppo di cose nuove; in questo modo e non altrimenti si riuscirà ad accendere in essi l'amore allo studio ed a renderli padroni dei fecondissimi metodi della geometria projettiva» (p. XII).

Per chiudere, Cremona sceglie di esplicitare le fonti da cui ha tratto il materiale che costituisce il libro: non si

[30] E forse in tal modo si mette anche l'accento sulle trasformazioni come elemento caratteristico del quadro di insegnamento della geometria, ben diverso da quello della geometria euclidea.

è rivolto a un solo autore, ma ha tratto da molti quanto più si adattava al suo scopo. Tuttavia nell'opera ci sono soltanto le citazioni che possono «acquietare le paure di coloro ai quali il solo nome di geometria proiettiva metteva i brividi addosso, come se si trattasse di novità escogitate da cervelli balzani» dimostrando che gli argomenti esposti hanno origini antiche e ben consolidate.

L'elenco dei debiti intellettuali contratti con questo lavoro gli offre anche l'occasione per fare una rassegna dei contributi e quindi dei risultati o dei metodi più importanti della geometria proiettiva.[31]

Perché il libro possa avere la migliore fruizione possibile da parte degli studenti, grande cura viene posta all'aspetto grafico: ad accompagnare il testo, c'è un atlante di 44 tavole che contiene tutte le figure necessarie alla sua comprensione.

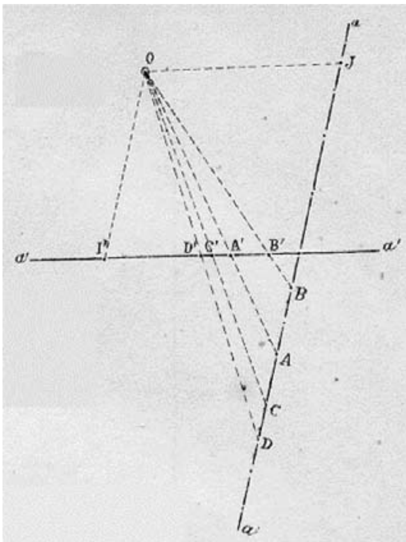
L'importanza di tali figure è evidente fin dai primi paragrafi del libro in cui, dopo aver definito le operazioni di «proiezione da un punto o da una retta» e aver stabilito il significato di «segare» con piani o rette, Cremona descrive in particolare le proprietà della proiezione centrale, deducendone fra l'altro il concetto di «elementi a distanza infinita».

Questa maniera di introdurre i punti all'infinito prepara in modo molto naturale all'introduzione della retta proiettiva come estensione dello spazio affine monodimensionale che continua ad essere la maniera più

[31] Osserviamo soltanto che vi compare anche il nome di Poncelet, la cui assenza nella *Prolusione* del 1860 era stata considerata da alcuni stupefacente (Per esempio, da Orly Terquem nella lettera del 22 luglio 1967 pubblicata in *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, a cura di M. Menghini, Quaderni della «Rivista di Storia della Scienza» n. 3, Roma, 1994, pp. 49-50).

gradita agli studenti che per la prima volta si avvicinano agli spazi proiettivi (e la più efficace). Vediamola con qualche dettaglio.

Consideriamo due rette complanari *a, a'* e la proiezione di centro *O* da *a* ad *a'*. Ogni raggio condotto per *O* incontra *a* e *a'* in due punti corrispondenti *A* e *A'*. Se il raggio per *O* ruota nel piano, i punti *A* e *A'* «si muovono simultaneamente». In particolare, se il raggio per *O* si avvicina al raggio parallelo ad *a*, allora il punto *A'* si avvicina al punto *I'* in figura[32] mentre il punto *A* si allontana sempre di più.



Ma per garantire che la proiezione sia una corrispondenza biunivoca e sia verificata la condizione che ad ogni punto di *a'* corrisponda un punto di *a*, «noi diremo che la retta *a* ha un punto *I* all'infinito nel quale viene a cadere *A* quando *A'* cade in *I'*, cioè quando il raggio mobile intorno ad *O* diviene parallelo ad *a*» (p. 3).

Dal momento che esiste un solo raggio per *O* parallelo ad *a*, è unico il punto all'infinito di *a*. Da qui si deduce

[32] Questa figura, come le successive, è riproduzione della figure originali ospitate nell'Atlante allegato al testo nella sua edizione del 1873.

che tutte le rette parallele ad una medesima hanno lo stesso punto all'infinito e si hanno quindi gli strumenti «visivi» che renderanno più semplice la successiva definizione di «forma di prima specie» attraverso l'osservazione che il fascio di rette di centro O e la retta a' sono proiettivi.

Dopo aver descritto l'omologia piana e le figure omologiche «a tre dimensioni», Cremona, utilizzando il metodo che aveva già adottato nel Corso di Statica grafica del 1867-'68, introduce subito la legge di dualità, come se fosse «un fatto logico che scaturisce immediato e spontaneo dalla possibilità di costruire lo spazio (a tre dimensioni) coll'elemento punto o coll'elemento piano».[33] Ma ciò richiede che venga chiarito il concetto di geometria. Cremona detta una bella descrizione "dinamica" di questa scienza intesa come lo studio della genesi e delle proprietà delle figure contenute nello spazio a tre dimensioni, in un piano o in una stella ove «ciascuna figura non è altro che un complesso di elementi, o ciò che torna lo stesso, il complesso delle posizioni assunte da un elemento mobile o variabile».[34] Tale elemento, generatore di figure, può essere, nello spazio a tre dimensioni, il punto o il piano, nel piano, il punto o la retta, e nella stella, il piano o la retta. E dunque, in maniera naturale, si è portati a riconoscere che vi sono «due maniere correlative o reciproche di generare figure e svolgerne proprietà», esprimendo in tal modo l'essenza della dualità geometrica.

Come era stato annunciato nell'Introduzione, il principio di dualità viene subito usato per far fare «esperienza

[33] Si veda Cremona, *Elementi di…*, cit., p. XI.
[34] Si veda. Cremona, *Elementi di…*, cit., p. 15.

di matematica» agli allievi, lasciando che essi traducano da sé per dualità alcune affermazioni sia nel piano che nello spazio:

> Non vi è nulla in geometria […] che così accenda i principianti e li stimoli a fare da sé come il principio di dualità; quindi importa sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile, e di abituarli ad usarne con sicurezza.[35]

Come si vede già da queste prime indicazioni, non c'è in questo libro una divisione netta fra questioni relative alla geometria sul piano e questioni relative allo spazio. L'attenzione non è posta sulle specificità quanto piuttosto sull'analogia dei metodi che vengono usati e sulla generalità delle affermazioni:

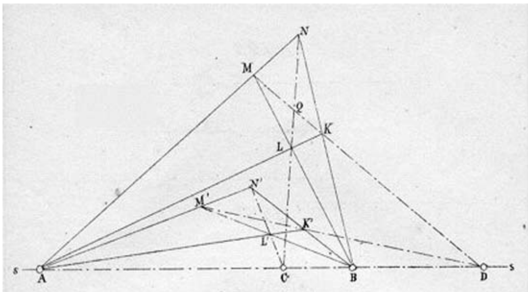
> […] giacché l'esperienza m'ha insegnato […] che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e ajutano lo svolgimento di quella imaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere.[36]

Ciò sembra ottenersi meglio dando rilievo più alle proprietà grafiche che a quelle metriche.

Particolarmente interessante in questo senso è l'individuazione delle quaterne armoniche di punti condotta a partire dall'esistenza di un opportuno quadrangolo completo: quattro punti *ABCD* di una retta, considerati

[35] Si veda Cremona, *Elementi di …*, cit., p. XI
[36] Ibidem.

nell'ordine in cui sono enunciati, si dicono armonici se è possibile costruire un quadrangolo completo (*KLMN* nella figura) i cui lati passino, due opposti per *A*, altri due opposti per *B*, il quinto per *C* e il sesto per *D*.



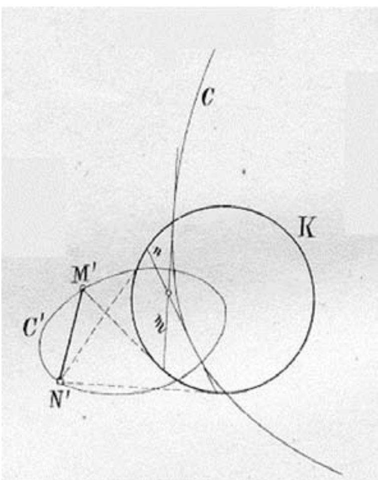
Considerazioni metriche intervengono invece quando si tratta di definire il birapporto (per Cremona, il rapporto anarmonico) di quattro elementi di una forma di prima specie, cioè lo strumento attraverso il quale vengono stabilite proprio alcune proprietà metriche particolarmente significative in questo contesto proiettivo.

L'analisi puntuale di questo testo potrebbe continuare ancora a lungo sulla falsariga di quanto abbiamo scritto sin qui. Potremmo occuparci, per esempio, della presentazione delle coniche come curve omologiche alla circonferenza e delle conseguenti dimostrazioni di teoremi classici come quelli di Pascal, di Brianchon o di Desargues, e probabilmente chiunque si sia mai posto il problema di insegnare un po' di geometria ai suoi studenti (e si badi bene, non solo geometria proiettiva) vi troverebbe molte occasioni sia per ripensare le proprie valutazioni di maggior o minore centralità degli argomenti proposti sia, sorprendentemente, per rivedere le proprie scelte pedagogiche e di comunicazione.

Tuttavia, forse, la caratteristica che lo rende soprattutto interessante (almeno rispetto alla chiave di lettura che ho suggerito inizialmente) è la maniera con cui viene avviato lo studio delle figure reciproche per polarità.

Un primo passo è quello di estendere il concetto di polare di un punto rispetto a una conica (intesa come il luogo dei quarti armonici dopo le due intersezioni di una retta per il punto con la conica e il punto stesso) al concetto di polare di una curva qualsiasi *C* data:

> Considero ora come polari tutte le tangenti di una data curva *C*; ossia imagino che la retta polare si muova inviluppando la curva data. Il polo si moverà descrivendo un’altra linea, che s’indicherà con *C’*. I punti di *C’* sono adunque i poli delle tangenti di *C*. Viceversa, dico che i punti di *C* sono i poli delle tangenti di *C’*. [...] Le due curve *C*, *C’* [...] diconsi polari reciproche.[37]



Si può osservare che due coniche reciproche sono figure correlative secondo la dualità per la geometria piana; tuttavia due figure reciproche sono soggette a più vincoli rispetto alle figure correlative e quindi la teoria delle prime può essere intesa come particolarizzazione della teoria delle seconde.

E comunque le questioni geometriche che si

[37] Ibidem, p. 150.

aprono a partire da questa definizione sembrano ricche di conseguenze più per coloro che vogliano cimentarsi nel libero lavoro astratto del ricercatore che non per coloro i quali, studenti del primo corso del secondo biennio degli Istituti tecnici, debbano acquisire le tecniche del disegno. Allora, perché qui?

3. Il tentativo di dare risposta a questa domanda ci permette di accennare a una seconda chiave di interpretazione del desiderio evidente di Cremona di portare gli allievi degli Istituti tecnici sempre più vicini al mondo fresco, netto e emozionante del libero immaginare. Abbiamo già accennato al fatto che la prima si appoggia alla forte convinzione che solo il contatto con le acquisizioni della ricerca, anche la più recente, può spingere gli studenti ad essere protagonisti consapevoli del loro studiare. Ora, questa seconda si richiama a quell'aspetto del sentire di Cremona che probabilmente è stato messo troppo in ombra da una sua presunta totalizzante adesione ai progetti politici del re sabaudo o di Garibaldi e che invece ci porta a ritenere che la rottura dei suoi rapporti con il progetto politico e il modello sociale proposti da Mazzini non sia così netta come appare dalle dichiarazioni ufficiali.

Il lavoro di Erika Fraccaro e Irene Rubini sui rapporti di Cremona con l'*entourage* genovese di Mazzini sembra segnalare una persistenza e una consonanza di speranze che non mi erano sembrate evidenti all'inizio, come se ci fosse una forte continuità fra il ragazzino che corre in difesa di Venezia e il professore del Regio Istituto Tecnico superiore di Milano che si espone in prima persona lavorando attorno alla matematica da insegnare negli Istituti tecnici. In quegli Istituti, cioè, su cui ricade sia la responsabilità di fornire delle necessarie competenze tecniche ai loro studenti, compresi i futuri ingegneri, sia quella di dotarli di strumenti culturali che li mettano in grado di confrontarsi – con una propria specificità – con i problemi di una società "nuova", come si avvia ad essere quella italiana.

Il Cremona che abbiamo in mente è quello che nel 1848 raggiunge il battaglione "Italia libera", va a combattere a fianco della Lombardia insorta e nel 1849 viene mandato dal Governo provvisorio, con altri studenti pavesi, a difendere Venezia.

I soldati con i quali condivide le fatiche, le ansie e la delusione finale hanno speranze politiche (non osiamo dire progetti politici) ben diverse fra loro: Cremona, per esempio, si unisce a loro sulla spinta dell'educazione civile che ha avuto in casa di Adelaide Cairoli, cioè nella casa di una delle madri di quella che sarà l'Italia unita. Orfano a undici anni, era stato preso sotto l'ala protettiva di una sorella e aveva stretto amicizia con i ragazzi Cairoli, crescendo insofferente della dominazione austriaca e desideroso di rivedere unito il Paese sotto il regno del liberale Piemonte. Ma altri vengono dall'essere mazziniani, quindi repubblicani, quindi niente affatto teneri con il re sabaudo e con il suo progetto d'unità.

Ora, la difesa di Venezia catapulta Cremona proprio in mezzo a questi ultimi e gli fa stringere legami forti con qualcuno di loro. Così forti che per capire quello che succede dopo val la pena di dedicare loro un po' d'attenzione.

Alla ricerca del giovane Cremona, scappato da casa senza dare notizie di sé, sull'onda delle preoccupazioni dei suoi familiari, si erano mossi in molti; anche Nicola Ferrari aveva ricevuto istruzioni perché cercasse di incontrarlo e di vedere come stava e quindi rassicurasse casa. Ma chi è Nicola Ferrari?

È il "roseo" Nicola di cui parla Mazzini nelle sue lettere,[38] ma è anche uno dei mazziniani duri di Genova, che insieme allo zio Napoleone (il medico esecutore testamentario di Maria Mazzini Drago) nasconderà le lettere di Mazzini alla madre quando, alla morte di questa, i preti vorranno farle sparire.

Ora i due si trovano e Nicola il 15 marzo 1849 manda un messaggio a casa: "Eureka, Eureka" per un Luigi Cremona ormai sergente di una compagnia. E a casa c'è una madre, ma soprattutto c'è una sorella, Elisa (1826 - 1882) che di Cremona diverrà la sposa.

Alla sua morte nel 1882 Cremona ne farà un elogio molto classico[39] sul modello "moglie e madre esemplare" sia pure con qualche accenno meno formale del consueto:

> A lei debbo infinitamente più che d'ordinario un marito alla moglie giacché le debbo i miei studi dal 1856 in poi e, per conseguenza, la mia carriera, qualunque essa sia stata, in quanto Ella, prendendo su di sé le cure della casa e dell'educazione dei figli, mi procurò quiete e serenità d'animo, senza della quale gli studi sono assai impossibili o assai malagevoli.

[38] Si veda, per esempio, I. Cozzolino Cremona, *Maria Mazzini ed il suo ultimo carteggio. Con 79 lettere di G. Mazzini*, Genova, Stab. Tip. G.B. Marsano S.A.E., MCMXXXI.

[39] Ma ne avrebbe dettato anche un ricordo più pregnante: «Nata in Genova dalla patriottica famiglia Ferrari, già di Portomaurizio, sposata in Pavia a Luigi Cremona professore di matematica, già soldato di Venezia contro lo straniero, più tardi Senatore del Regno d'Italia. Ingegno colto, tempra d'acciaio, ottima moglie, ottima madre, visse vita esemplare, tutta per i suoi cari, nulla per sé, idolatra di Roma […] paga di morire in quest'alma città ch'era stata il sogno suo e de' suoi fratelli morti per la patria […]».

In realtà Elisa ha poco della classica figura lì descritta: fa parte in prima persona dell'*entourage* di Mazzini, è una delle sue corrispondenti quando il politico è costretto all'esilio ed è repubblicana nel profondo. Ancora nel 1869 Napoleone Ferrari discuterà con lei la situazione del movimento repubblicano, i dissapori e la delusione per la corruzione dilagante che sembra sostituire la tensione ideale del periodo precedente.

Anche professionalmente non è affatto banale: il 26 maggio 1850 aveva conseguito presso la Regia Università di Genova la Patente d'Idoneità per «esercitare l'Uffizio d'Istitutrice o Maestra» e nel 1854, quando va sposa a Luigi Cremona, è la dirigente di un Asilo Infantile, quello di Santa Sofia a Genova.

Allora forse il rapporto fra i due è un po' diverso da quello che potevamo immaginare inizialmente e illumina un Cremona più vicino alle istanze libertarie di quanto ci aspettiamo. Quale influenza ha avuto sull'attività di Cremona la presenza di una compagna che si era formata in maniera così strettamente dipendente dal pensiero mazziniano? Si può dire che Cremona ha mantenuto in tutta la sua vita la necessità di confrontare la sua attività politica, di uomo delle istituzioni fortemente impegnato su più fronti (diventò Senatore nel 1879) con le aspirazioni dell'anima risorgimentale nella sua versione più autenticamente ribelle?

Per la famiglia Cremona non si è certo trattato soltanto di un'adesione "giovanile": il rispetto e l'attenzione verso il pensiero mazziniano sono caratteristiche che durano nel tempo. Non è certamente un caso il fatto che la figlia Itala abbia pubblicato a Genova nel 1931 un libro[40]

[40] I. Cozzolino Cremona, *Maria Mazzini ed il suo ultimo carteggio…*, cit.

sulla madre di Mazzini e il suo ultimo carteggio con il figlio, grondante ammirazione per la figura femminile e per l'interpretazione del concetto di patria di cui essa era portatrice. Pur pagando un prezzo non trascurabile alla retorica del periodo, il libro propone accenti di adesione non formale, evidentemente retaggio di un'educazione attenta a questa dimensione, con informazioni interessanti anche sull'impegno "politico" di Elisa Ferrari Cremona.

E non bisogna neppure dimenticare che il fratello Tranquillo è uomo della Scapigliatura milanese, che Luigi lo segue e lo protegge a lungo rimanendo in contatto con un mondo "altro" rispetto a quello accademico.

Allora mi sembra interessante cercare di scoprire se questi legami hanno qualche influenza sull'attività politica, compresa quella istituzionale, di Cremona. Anche perché la storia del sistema scolastico italiano vedrà dopo il 1876, cioè dopo l'avvento della Sinistra al governo, una maggior attenzione verso la dimensione sociale dell'istruzione, attenzione che raggiunge il suo apice il 15 luglio 1877 con la promulgazione della Legge Coppino sull'istruzione obbligatoria. E sarà proprio Benedetto Cairoli, l'amico solidale della giovinezza di Cremona, il ministro che il 7 ottobre 1879 emanerà una circolare per l'istituzione di quelle scuole serali e domenicali d'arti e mestieri[41] che segneranno tanto fortemente i modi e i tempi dell'istruzione in Italia.

[41] E passeranno solo tre mesi prima che il successo di queste scuole trovi conferma nella circolare del 28 gennaio 1880 del ministro Micheli che assegna contributi statali alle scuole professionali che risponderanno alle opportune caratteristiche.

MARIA TERESA BORGATO

IL FUSIONISMO E I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

Col termine *fusionismo* si intende un orientamento nell'insegnamento della geometria elementare, che si sviluppò in Europa a partire dagli anni '40 dell'Ottocento, e in Italia tra il 1884 e il 1910 circa, secondo il quale vengono trattati contemporaneamente argomenti affini di geometria piana e geometria dello spazio e si utilizza quest'ultima anche per dimostrazioni di geometria piana. Non si trattò esclusivamente di una moda didattica, ma anche di una risposta alle ricerche sui fondamenti della geometria, che nella seconda metà dell'Ottocento furono tra i temi di attualità della comunità matematica e influenzarono la produzione di una grande varietà di testi scolastici.

1. *Origini del fusionismo*

L'utilità di considerazioni di geometria dello spazio nelle dimostrazioni di proposizioni di geometria piana, era stata riconosciuta nell'ambito della geometria proiettiva da Monge, Brianchon e Poncelet. Così Michel Chasles esordiva per illustrare le grandi potenzialità del 'metodo di Monge':

> Monge nous donna, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, les premiers exemples de l'utilité de l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes…. Les procédés par lesquels Monge transforma les figures de l'espace en figures planes, par des projections orthogonales sur deux planes rectangulaires qu'il suppose abattus l'un sur l'autre, offrent en particulier un moyen de découvrir une foule de propositions de Géométrie plane sur les figures que résultent de l'ensemble de ces deux projections. [1]

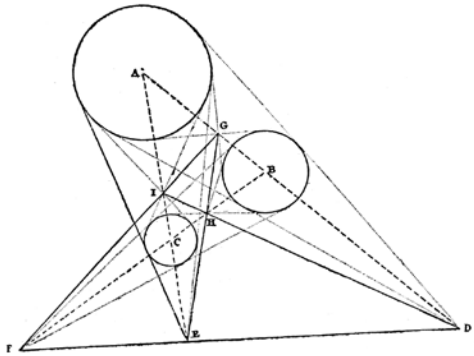
Un esempio eclatante è fornito dalla proposizione sui centri di similitudine esterna di tre cerchi del piano presi a due a due:[2]

> Tre cerchi qualunque del piano considerati a due a due hanno le tangenti comuni che si incontrano in tre punti allineati.

Questa proposizione è dimostrata da Monge con grande semplicità immaginando i cerchi dati come sezioni centrali di tre sfere e quindi considerando i tre coni inviluppati dai piani che ne toccano esternamente due qualunque. Si consideri il piano tangente esternamente a tutte e tre le sfere: questo piano sarà tangente esternamente anche ai tre coni circoscritti alle sfere considerate a due a due, e passerà per i loro vertici *D*, *E*, *F*. Ma questi tre vertici sono pure nel piano dei tre centri, dunque si trovano all'intersezione di due piani diversi, e per conseguenza sono in linea retta.

[1] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, Bruxelles, Hayez, 1837, cfr. pp. 191-194.

[2] G. Monge, *Géométrie descriptive, leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République*, Paris, Baudouin, an VII (3ª ed. Paris, Gauthier-Villars, 1922, t. I, pp. 77, 81).



La direzione indicata da Monge fu poi seguita da altri matematici, in particolare da Brianchon e Poncelet che erano stati suoi allievi all'Ecole polytechnique.

Risultati come questi avevano suggerito l'opportunità di applicare un metodo simile anche nella trattazione della geometria elementare, ma a questo si opponeva la tradizionale concezione di planimetria e stereometria come discipline separate, per cui le proprietà dello spazio venivano esposte solo dopo aver esaurito quelle delle figure piane.

Così affermava Gergonne sulle Annales de Mathématiques Pures et Appliquées:

> Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace* est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader [...].[3]

[3] J. D. Gergonne, *Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*, «Annales des Mathématiques Pures et Appliquées», XVI, 1826, n. 6, pp. 209-212.

In Francia e in Germania comparvero contemporaneamente due monografie di geometria elementare basate sul metodo della fusione: nel 1844 venivano pubblicate di A. Mahistre le *Analogies de la Géométrie elementaire*,[4] in cui nella prima parte sono trattate la geometria piana e le sue analogie con quella dello spazio, mentre nella seconda la geometria dello spazio è presentata in modo indipendente.

Lo stesso anno veniva pubblicato il trattato di Anton Bretschneider: *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht ab Gymnasien und höheren Realschulen*,[5] in cui è cancellata ogni linea di demarcazione esistente tra la geometria piana e quella dello spazio.

La geometria sintetica è divisa in tre parti: *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione); *Geometrie der Gestalt* (Geometria di forma); *Geometrie des Maßes* (Geometria della misura). Vi è sostenuta l'utilità della fusione, in quanto il trattenere a lungo un giovane sulla geometria piana ne ridurrebbe l'intuizione e secondo l'esperienza il metodo tradizionale non darebbe risultati migliori, tuttavia gli argomenti sono organizzati in modo da poter essere trattati anche secondo una linea separatista.

In seguito, nel 1858, Adolph Steen, seguendo le tracce di Bretschneider, pubblicò il trattato: *Oversigt over Hoverdformerne i Rummet som Inledning til Geometrien*,[6] che

[4] In due edizioni: Paris, Garnier Libraire, 1844, e Paris, Hachette, 1844: *Les Analogies de la géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la géométrie plane, Ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de lui-même, s'élever immédiatement, et presque sans efforts, à tous les cas semblables de la Géométrie dans l'espace.*

[5] C. A. Bretschneider, *Lehrgebäude der niederen Geometrie. Für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen*, Jena, Fr. Frommann, 1844.

[6] Adolph Steen (1816-1886).

venne adottato nelle scuole danesi, in cui già dal 1844 la separazione tra geometria piana e geometria solida era stata soppressa.

Successiva in ordine di tempo è l'opera di Charles Méray, i *Nouveaux éléments de géométrie*, pubblicata in Francia nel 1874, in cui la fusione della geometria piana con la solida è completa:[7]

> J'ai abandonné la distinction d'usage entre la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace. Outre qu'elle n'est pas dans la réalité des choses, puisque la nature ne nous offre que des figures dans l'espace, elle met un long intervalle entre la théorie de la ligne droite et celle du plan, dont chacune cependant est nécessaire à la parfaite intelligence de l'autre; elle nécessite même une interruption dans l'étude de la ligne droite. Enfin, elle est encore plus nuisible dans l'enseignement professionnel, car la pratique des Arts réclame bien plus la connaissance approfondie des principales combinaisons de droites et de plans, que celle de propositions théoriques comme les propriétés des sécantes du cercle. Ces inconvénients m'ont paru surpasser de beaucoup les avantages que cette méthode peut avoir comme artifice didactique; si elle divise et aplanit un peu les premières difficultés de la Géométrie, on ne peut nier qu'elle soit pour beaucoup dans la lenteur que mettent les élèves à acquérir la faculté de *lire dans l'espace*.

Méray abbandona l'usuale divisione in libri adottandone una nuova in ventisette capitoli e raggruppando diversamente gli argomenti: tratta innanzi tutto generalità relative a rette e piani, poi il parallelismo, l'intersezione di rette e piani, la perpendicolarità. Segue il confronto

[7] C. Méray, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, F. Savy, 1874, p. XI-XII.

fra segmenti rettilinei, e poi tra angoli piani e fra diedri. Solo successivamente tratta le proprietà dei triangoli, le distanze di punti rette e piani, e così via.

L'opera di Méray, che non ebbe inizialmente grande successo, venne poi ripresa in considerazione un quarto di secolo dopo. Il libro di Méray fu infatti adottato in alcune scuole francesi: una sperimentazione fu portata avanti da Chanchenotte, docente della Scuola Primaria Superiore di Digione nei tre anni consecutivi dal 1876 al 1879. La sperimentazione tuttavia non proseguì, interrotta dalle autorità scolastiche.

Il fusionismo ebbe poi in Francia un ritorno di interesse a fine secolo, in seguito alle ricerche portate avanti in Italia e principalmente alla pubblicazione del volume di Lazzeri e Bassani. Il libro di Méray venne adottato da Billiet, insegnante alla Scuola Normale degli Istitutori di Auxerre, nei due anni scolastici consecutivi dal 1898 al 1900, con risultati estremamente soddisfacenti. Nel 1897 alla quarantaquattresima riunione dei filologi e professori tedeschi, a Dresda (Rapporto Rhon) fu riproposta e dibattuta la questione della fusione delle due geometrie piana, e solida.

Nel 1898 Laisant trattò la questione della fusione in Francia nel libro: *Mathématiques, Philosophie, Enseignement*[8] e nel 1899, sulla rivista *L'Enseignement mathématique* da lui diretta, apparvero una recensione del volume di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani[9] e un articolo di Giacomo Candido[10] sulla storia del metodo della fusione della

[8] Paris, Carré et Naud.

[9] L. Ripert, *G. Lazzeri e A Bassani,* Elementi di Geometria*, seconde édition améliorée,* «L'Enseignement mathématique», I, 1899, pp. 62-65.

[10] G. Candido, *Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie dans l'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie,* «L'Enseignement

geometria elementare in Italia. Altri interventi a favore della fusione furono quelli di Laisant e di Chailan nel 1901.[11] Venne allora rivalutato il libro di Méray, e quindi ristampato nel 1903: l'anno successivo era insegnato in una trentina di scuole francesi.[12]

2. *Il fusionismo in Italia*

L'origine in Italia del fenomeno del fusionismo è più tarda, e risale alla pubblicazione nel 1884 del trattato di Riccardo de Paolis, *Elementi di geometria*. Sembra che la nascita del fusionismo in Italia sia dovuta più al clima culturale di quegli anni, che all'influenza diretta dei testi francesi o tedeschi, che non avevano avuto grande diffusione ed erano ormai caduti in disuso e quindi erano difficilmente reperibili all'estero.

Nella scuola di stato edificata dopo l'unità nazionale sulla base della legge Casati, il ruolo della matematica era rilevante, e alla geometria euclidea impostata secondo il modello ipotetico-deduttivo veniva attribuita una funzione formativa centrale, specialmente per le scuole classiche, che avviavano agli studi universitari ed erano quindi

mathématique», I, 1899, pp. 204-215; E. Ulivi, *Una moda didattica in matematica, il fusionismo*, «Archimede», 29, 1977, pp. 212-216.

[11] C.-A. Laisant, *Une exhumation géométrique*, «L'Enseignement mathématique», III, 1901, n. 2, pp. 98-105; E. Chailan, *Un progrès mathématique à réaliser*, «Enseignement Chrétien», 1901, 1 marzo; cfr. anche *La fusione della planimetria e della stereometria in Francia*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. V, 1901, n. 1, pp. 42-48.

[12] C. Méray, *Justification des procédés et de l'ordonnance des* Nouveaux éléments de géométrie, «L'Enseignement mathématique», VI, 1904, n. 2, pp. 89-123.

destinate alla formazione delle classi dirigenti. Ma anche negli istituti tecnici, in cui la sezione fisico-matematica aveva un ruolo preminente e permetteva l'accesso alle facoltà scientifiche, la geometria sintetica tradizionale era uno dei pilastri della preparazione matematica.

Il successo dei metodi sintetici nella geometria, riportati nelle ricerche di Carnot, Poncelet, Steiner, avevano sospinto questo rinnovamento che vide l'Italia in una posizione di primo piano. L'unità nazionale aveva segnato infatti il rilancio della ricerca scientifica, con il collegamento ai settori più vivaci della ricerca europea, e stimolato anche una riflessione sulla propria tradizione culturale, legata più che altrove alla geometria classica.

Nella prima metà dell'Ottocento il panorama italiano dei testi di geometria elementare era stato dominato dalle traduzioni del trattato di Legendre, gli *Élémens de géométrie,* in cui il ricorso all'algebra aveva permesso di eliminare alcune delle teorie più astratte contenute negli *Elementi* di Euclide come la teoria delle proporzioni, talvolta anche a scapito del rigore.[13] Nel periodo immediatamente precedente e subito dopo l'Unità comparvero traduzioni in italiano di testi di geometria più moderni: di Amiot, a cura di Giovanni Novi, e di Richard Baltzer, a cura di Luigi Cremona,[14] in cui la geometria era insegna-

[13] Come ammetteva lo stesso autore: «J'ai aimé mieux, pour ne pas rendre trop difficile l'entrée de la Géométrie, sacrifier quelque chose de l'exactitude a laquelle j'aspirois» (3ª ed. p. 11).

[14] A. Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire,* 1ª ed. Paris, Dezobry, 1850; G. Novi, *Trattato di geometria elementare di A. Amiot. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte*, Firenze, Le Monnier, 1858; R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik,* 1ª ed. Leipzig, Hirzel, 1853; L. Cremona, *Elementi di matematica*, Genova, Tip. R. I. Sordo-Muti, 1865, in sei volumi corrispondenti alle sei parti del trattato di Baltzer che

ta senza alcuna contaminazione di tipo algebrico e in cui trovavano posto anche risultati e concetti nuovi tratti dalla geometria proiettiva. Nelle zone di influenza austriaca buon successo avevano le traduzioni del testo di Franz Močnik, di impostazione tradizionale, con l'aggiunta della trigonometria e della geometria analitica piana.[15]

La forza della tradizione ebbe tuttavia il sopravvento nei programmi ministeriali del 1867 redatti da Betti e Brioschi, che rendevamo obbligatorio il testo degli *Elementi* di Euclide per l'insegnamento della geometria nei ginnasi e nei licei. Betti e Brioschi firmarono anche l'edizione degli *Elementi* che uscì l'anno seguente, sulla base di una traduzione seicentesca di Vincenzo Viviani (1690) con le note di Luigi Cremona, e un'appendice coi risultati archimedei su cilindro, cono e sfera.[16]

Al tentativo di riproporre direttamente il testo euclideo nelle scuole secondarie superiori fecero seguito nuove esposizioni della geometria elementare, sempre di indirizzo purista, curate da alcuni dei maggiori matematici della fine dell'Ottocento.[17] Questi testi, più che da finalità didattiche, erano guidati dalla preoccupazione di mantenere il massimo rigore, poiché gli studi sui fonda-

si estende a tutte le matematiche elementari, con molte note storico-critiche.

[15] F. Močnik, *Corso di geometria ad uso dei ginnasi superiori*, traduzione fatta sulla seconda edizione, Vienna, s,n.t., 1857.

[16] E. Betti, F. Brioschi, *Elementi d'Euclide*, 1ª ed., Firenze, Le Monnier, 1868.

[17] G. Loria, *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare*, «Periodico di Matematica», VIII, 1893, pp. 81-113; M. T. Borgato, *Alcune note storiche sugli «Elementi» di Euclide nell'insegnamento della matematica in Italia*, «Archimede», 4, 1981, pp. 185-193.

menti della geometria avevano messo in rilievo l'incompletezza del sistema di assiomi euclideo.

Il primo di questi trattati fu quello di Achille Sannia ed Enrico d'Ovidio, fedele ai modelli classici, con una netta separazione fra planimetria e stereometria, e tra il metodo puramente geometrico e le applicazioni dell'algebra alla geometria, ma con le estensioni di un moderno trattato di geometria elementare.[18] Ebbe moltissime edizioni. Un altro testo di larga diffusione, con varie edizioni e versioni, per diversi tipi di scuole, fu scritto da Aureliano Faifofer.[19]

Il libro di De Paolis,[20] allora docente di geometria superiore all'università di Pisa, era piuttosto un trattato scientifico sulla fusione che un testo facilmente adottabile nelle scuole secondarie. Esso conteneva molti elementi di novità. Gli assiomi su cui De Paolis fondava la sua teoria erano divisi in undici gruppi. In particolare sui postulati di movimento si sviluppava la teoria dell'uguaglianza dei triangoli e dei poligoni. Bisogna ricordare comunque che in quei postulati la nozione di movimento non è compiutamente analizzata, e solo successivamente si arrivò alla formulazione di postulati di uguaglianza o di movimento soddisfacenti (Peano, Veronese, De Franchis).

Il trattato è diviso in sei libri: I. Verità fondamentali. II. Le figure fondamentali della geometria. III. Cerchio,

[18] A. Sannia, E. d'Ovidio, *Elementi di Geometria,* 1ª ed. Napoli, Tip. Belle Arti, 1869 (2ª ed. Napoli, Trani, 1871).

[19] A. Faifofer, *Elementi di geometria,* 1ª ed. Venezia, Tip. Emiliana, 1878; *Elementi di geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici*, Venezia, Tip. Emiliana, 1883.

[20] R. De Paolis, *Elementi di geometria,* Torino, Loescher, 1884.

cono, cilindro, sfera. IV. Teoria dell'eguaglianza. V. Teoria della proporzionalità. VI. Teoria della misura. Un ruolo fondamentale nel libro di De Paolis gioca il teorema sui triangoli omotetici (p. 91):

> Quando i vertici e i lati di due triangoli si corrispondono, in modo che le rette determinate dalle tre coppie di vertici corrispondenti passino per uno stesso punto, e che siano paralleli i lati corrispondenti di due coppie, anche quelli della terza coppia sono paralleli.

che viene dimostrato facilmente con considerazioni stereometriche, senza l'uso della teoria delle proporzioni.

La teoria dell'equivalenza è poi svolta da De Paolis secondo le nuove vedute di Duhamel, Faifofer e De Zolt, cui segue l'applicazione all'equivalenza dei poligoni, dei prismi e dei poligoni sferici.

Il teorema sui triangoli omotetici consente anche la dimostrazione di un teorema base della teoria della similitudine dei triangoli, che corrisponde alla proposizione VI, 4 di Euclide (p. 303):

> Dati due triangoli, se ciascun angolo di uno è uguale ad un angolo corrispondente dell'altro, il rettangolo di un lato di uno e di un lato non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti,

(in termini di proporzioni: in due triangoli con gli angoli uguali i lati sono in proporzione), rendendolo dunque indipendente, insieme a tutti quelli che ne discendono, dalla teoria delle proporzioni.

De Paolis poi sviluppa la teoria della misura sulla base dei «limiti delle grandezze variabili», ispirandosi alle nuove teorie dei numeri irrazionali secondo le impostazioni di Lipschitz e Arzelà.

L'originalità dell'opera venne sottolineata dalla recensione di Giovanni Frattini («Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise»).[21]

Il testo di De Paolis era diretto alle scuole secondarie superiori, ma pur nel rispetto del rigore e della completezza, era di difficile comprensione per gli studenti (e forse troppo innovativo per alcuni insegnanti), e anche se venne adottato in qualche liceo, ebbe scarsa diffusione.

Di ispirazione fusionista uscirono poco dopo di Angelo Andriani, gli *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*,[22] in cui però la scelta dei postulati fu giudicata insoddisfacente.

Maggior fortuna ebbero invece gli *Elementi di geometria* di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani, pubblicati per la prima volta nel 1891 e poi nel 1898.[23] Lazzeri era stato allievo di De Paolis ed aveva appreso da quest'ultimo il metodo fusionista. Divenuto professore di matematica alla Regia Accademia Navale di Livorno nel 1886, seguì tale metodo nell'insegnamento della geometria, e successivamente compose, assieme a Bassani che era insegnante di matematica nella stessa scuola, un libro che meglio si adattava alle esigenze degli studenti, essendo il risultato di sperimentazioni dirette, e che fu utilizzato come libro di testo in molti licei.

La struttura del libro è la stessa di quello di De Paolis, con alcune varianti. I postulati sono divisi in dodici grup-

[21] «Periodico di Matematica», I, 1886, pp. 20-31.

[22] Napoli, Pellerano, 1887 (2ª ed. 1894).

[23] G. Lazzeri, A. Bassani, *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno, Giusti, 1891 (2ª ed 1898).

pi, in particolare è aggiunto un gruppo di postulati riguardanti il punto, la linea e la superficie. È diviso in cinque libri: I. Retta e piano. Segmenti, angoli e diedri. Prime nozioni sul circolo e sulla sfera. Rette parallele, rette e piani paralleli. II. Poligoni, angoloidi, poliedri. Distanze. III. Relazioni fra rette, piani e sfere. Relazioni di poligoni con un circolo e di poliedri con una sfera, Superfici e solidi di rotazione. IV. Teoria generale dell'equivalenza. Equivalenza di poligoni e superfici poliedriche; di poligoni sferici e di piramidi sferiche; dei prismi. Grandezze limite. Equivalenza dei poliedri: Equivalenza del circolo e dei corpi rotondi. V. Teoria delle proporzioni. Figure simili. Misure. Applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Originale è l'introduzione della teoria degli assi e dei piani radicali, e della teoria delle figure omotetiche, svincolate dalle teorie dell'equivalenza e delle proporzioni (influenza della geometria delle trasformazioni di Klein, della geometria dei cerchi e delle rette di Gaultier, della geometria delle inversioni o affinità circolari di Möbius). La teoria delle figure simili discende quindi da quella dell'omotetia, ed è quindi resa indipendente da quella delle proporzioni, che nel volume di Lazzeri e Bassani è invece fondata sulla teoria delle proporzioni numeriche.

Il libro ebbe recensioni favorevoli di Rodolfo Bettazzi[24] e di Francesco Giudice,[25] anche per la scelta dei postulati, più precisi e completi che altrove, non essendo stato ancora esplicitato un sistema completo di assiomi per la geometria elementare.

Nella nuova edizione del 1898 purtroppo fu soppressa la teoria degli assi e piani radicali e dei centri di similitu-

[24] «Periodico di Matematica», VI, 1891, pp. 155-163.

[25] «Rivista di Matematica», 1, 1891, pp. 160-162.

dine, che costituiva una delle più riuscite applicazioni del metodo fusionista ma che non rientrava nei programmi di insegnamento. Notiamo l'estensione 'fusionista' dell'assioma di Archimede: se su un segmento (o angolo, o diedro) si portano successivamente dei segmenti (o angoli, o diedri) uguali, di modo che ciascuno di essi sia adiacente al precedente e che il primo abbia un estremo (o un lato, o una faccia) in comune con quello assegnato, si arriverà a trovare un punto (o un lato o una faccia) che cade fuori del segmento (o angolo, o diedro) assegnato.

Una recensione di Léon Ripert riportò anche in Francia l'attenzione sulla fusione «intime et systématique» di geometria piana e geometria dello spazio.[26]

I testi di De Paolis e di Lazzeri e Bassani influenzarono anche altri testi destinati alle scuole secondarie superiori: i *Complementi di geometria* di Giuseppe Zaccaria Reggio del 1898 e gli *Elementi di geometria* di Giuseppe Ingrami del 1899. Oltre a questi testi ne furono pubblicati molti di indirizzo separatista: celebre fra tutti gli *Elementi di geometria* di Federigo Enriques e Ugo Amaldi del 1903, di chiara impostazione hilbertiana. Inoltre furono elaborati testi scolastici che rappresentavano una via intermedia tra il metodo fusionista e quello separatista, consentendo di alternare gli argomenti, come gli *Elementi di geometria* di Sannia e D'Ovidio del 1888, gli *Elementi di geometria* di Giuseppe Veronese del 1897 e la *Geometria elementare* di Michele De Franchis del 1909. Così scriveva Luigi Cremona nella prefazione del suo libro per gli istituti tecnici:

> Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacché l'esperienza

[26] «L'Enseignement mathématique», I, 1899, n. 1, pp. 62-65.

> m'ha insegnato, e altri (Bellavitis, Chasles) lo aveva già osservato, che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione; di più, esse acuiscono l'intelletto e aiutano lo svolgimento di quella immaginativa geometrica che è qualità essenziale dell'ingegnere, perché si possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello.[27]

Altri argomenti a favore della alternanza di geometria piana e solida troviamo nell'introduzione del libro di Giuseppe Veronese:

> Ciò che … riesce senza dubbio utile anche didatticamente è la trattazione simultanea delle teorie speciali, dopo aver premesse le proprietà generali della retta, del piano, dello spazio, cioè le teorie della congruenza e simmetria, della equivalenza, delle proporzioni delle figure simili e della misura; raccogliendo così in un solo capitolo le proprietà della retta, del piano e dello spazio che dipendono dagli stessi principi. In tal modo non solo si consegue nell'insegnamento un notevole risparmio di tempo, ma ciò che più importa, lo scolaro comprende meglio le relazioni che sussistono tra le figure piane e solide raccolte nello stesso capitolo e s'accorge di leggervi che molte dimostrazioni date per le seconde sono una facile estensione di quelle date per le prime. Con ciò è possibile ovviare all'inconveniente da molti lamentato, e cioè, al contrario di quanto avviene nell'Istituto Tecnico, nel Liceo non si svolgono che alla fine della classe I o in principio della II le proprietà delle figure solide utili ad alcune parti della Fisica e della Cristallografia.[28]

[27] L. Cremona, *Elementi di geometria projettiva*, Torino, Paravia, 1873.

[28] G. Veronese, *Elementi di geometria*, Padova, Drucker, 1897, p. XV.

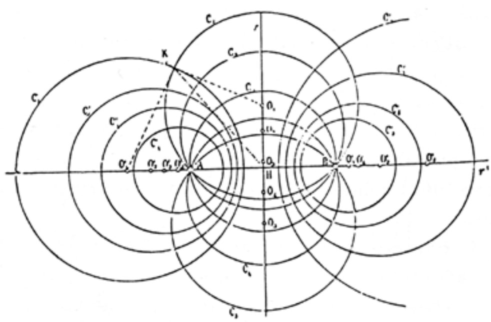
Abbiamo testimonianza di alcune sperimentazioni del metodo fusionista: nel 1886-87 Francesco Giudice, al Regio Liceo Vittorio Emanuele II di Palermo, adottò il testo di De Paolis; nel 1892-95 e nel 1900-03, Vittorio Murer, in una stessa classe del Liceo di Alessandria, seguì per un triennio il testo di Lazzeri e Bassani (I e II edizione); nel 1896-98, Giuseppe Sforza, in prima e seconda classe del biennio dell'Istituto Tecnico di Reggio Emilia, utilizzò il testo di Faifofer, con un approccio di tipo misto, passando al testo più propriamente fusionista di Lazzeri e Bassani nel biennio successivo.

3. La teoria degli assi radicali

Le proprietà elementari del cerchio e della sfera sono contenute negli *Elementi* di Euclide e nelle opere di Archimede, ma la cosiddetta *geometria dei cerchi e delle sfere* che studia insiemi infiniti di tali enti, ed in particolare i sistemi lineari (fasci) ebbe origine soltanto nei primi decenni dell'Ottocento, in connessione coi nuovi metodi sintetici ed analitici che portarono al rinnovamento della geometria, avvalendosi dei contributi di Monge, Gaultier, Gergonne, Poncelet, Steiner, Dupin, Chasles. La fondazione della relativa teoria delle inversioni circolari si deve a Möbius, Plücker, Thomson, Liouville, Reye.

Un riflesso di questi risultati si ritrova nei trattati di geometria di Lazzeri e Bassani. L'impostazione fusionista consente agli autori di sviluppare con semplicità la teoria degli assi e dei piani radicali svincolandola dalla teoria dell'equivalenza e dalla teoria delle proporzioni. I teoremi sui cerchi, come ad esempio i seguenti:

> Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due circoli, non concentrici, siano uguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due circoli, esterna ai circoli dati.
> Dati due circoli in un piano non concentrici:
> 1) Esistono infiniti circoli che, presi a due a due, hanno per asse radicale la retta dei centri dei due circoli dati; il luogo dei loro centri è l'asse radicale dei due circoli dati.
> 2) Esistono infiniti circoli che, presi a due a due, hanno per asse radicale quello dei due circoli dati; il luogo dei loro centri è la retta dei centri dei cerchi dati.[29]

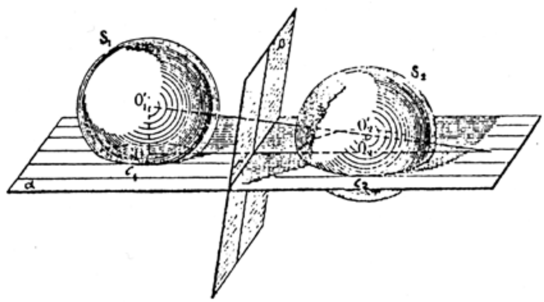


sono fatti seguire, o messi in parallelo, coi rispettivi teoremi sulle sfere:

> Il luogo dei punti tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere uguali siano uguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo.
> Date due superfici sferiche non concentriche:

[29] Lazzeri e Bassani, *Elementi* …, 1ª ed., pp. 187-196 . Una prima osservazione sulla dimostrazione di questo teorema per via stereometrica si deve ancora a De Paolis, per testimonianza di Giovanni Frattini, *Una bella osservazione del De Paolis,* «Periodico di Matematica», XI, 1896, n.3, p. 105.

1) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a tre a tre, hanno per asse radicale la retta dei centri delle due sfere date; il luogo dei loro centri fa parte del piano radicale delle due superfici sferiche date.
2) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a due a due, hanno per piano radicale quello delle due superfici sferiche date; il luogo dei loro centri fa parte della retta dei centri delle due sfere date.

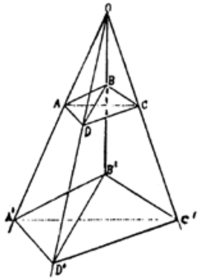


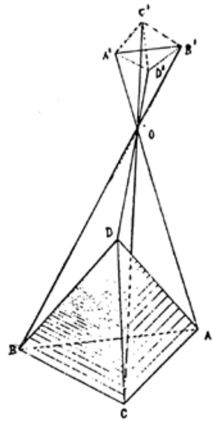
4. La teoria delle figure omotetiche

È un'altra teoria che arricchisce la geometria elementare di nuovi risultati. La fusione di geometria piana e solida consente anche in questo caso di svincolare la trattazione di questa teoria da ogni considerazione di proporzioni fra grandezze. Nel trattato di Lazzeri e Bassani, si parte dal teorema fondamentale:

> Se due triangoli si corrispondono, in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli.[30]

[30] Lazzeri e Bassani, *Elementi* …, cit., p. 197. Cfr. De Paolis, *Elementi*…, cit., p. 91.

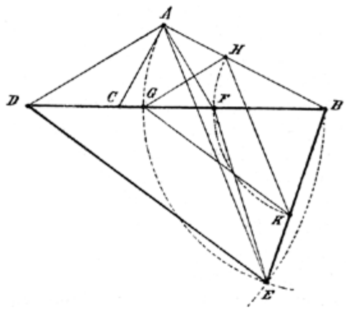




Segue quindi la definizione di figure omotetiche, direttamente o inversamente e le proprietà delle figure omotetiche, della relazione di omotetia e delle possibili omotetie di due figure. Dalla teoria delle figure omotetiche si costruisce una teoria della similitudine, indipendente dalla teoria delle proporzioni (che nel trattato di Lazzeri e Bassani è fondata sulle proporzioni tra numeri).

Questo teorema è pure alla base della teoria dei poligoni regolari. La costruzione infatti dei poligoni regolari di 5, 10, 20,… lati, e quindi anche di 15, 30, 60, … lati, si basa, come in Euclide (IV, 10-12), sulla costruzione di un triangolo isoscele in cui gli angoli uguali sono doppi del terzo angolo. Mentre però Euclide utilizza la sezione aurea, De Paolis fornisce una elegante costruzione basandosi sul precedente teorema dei triangoli omotetici,[31] svincolata dalla teoria delle proporzioni ed anche dalla teoria dell'equivalenza (come ad esempio nel libro di Sannia e D'Ovidio).

[31] De Paolis, *Elementi* …, cit., capitolo III libro II, p. 92.



Dato il segmento AB, si costruisce il triangolo rettangolo ABC, con il cateto AB doppio del cateto AC. Si prende poi sul prolungamento di BC un segmento $DC = CA$ e si costruisce il triangolo isoscele DBE in cui $DE = DB$ e $BE = BA$. Il triangolo DBE è il triangolo cercato. Infatti, detto F il punto dell'ipotenusa BC tale che $CF=CD=CA$, essendo isosceli i triangoli ACF, ACD, risulta:[32] $F.AC = A.CF$, $D.AC = A.CD$, quindi l'angolo $A.DF = F.AC + D.AC$ risulta uguale alla metà della somma degli angoli del triangolo ADF, e quindi è retto. Ne segue che gli angoli $A.FB$ e $D.CA$ sono uguali, in quanto complementari dello stesso angolo $A.CF$. Inoltre, prendendo sopra BD, BA rispettivamente i punti G, H in modo che $BG = BA$, $BH = BF$, risultano uguali (congruenti) i triangoli ABF, GBH, dunque $G.HB = D.AB$, e le rette AD, GH sono parallele.

Preso quindi sopra BE il punto K in modo che sia $BK = BH$, i triangoli ABE, HBK sono isosceli ed hanno in comune l'angolo $B.AE$, dunque $A.BE = H.BK$, e le rette AE, HK sono parallele. Considerando i due triangoli ADE, HGK, dal teorema precedente risultano parallele anche le rette DE, GK, per cui $G.BK = D.BE$; ma i triangoli BGK,

[32] Usiamo la notazione di De Paolis che dell'angolo mette innanzi tutto in evidenza il vertice: F.AC indica l'angolo convesso di vertice F e lati AF, CF.

BFE sono uguali, dunque è anche: *E.BF* = *G.BH* = *D.BE*. Risulta poi, per il teorema dell'angolo esterno, *F.BE* = *E.BF* + *E.FD* = *E.BD* = *B.DE* poiché *BDE* è isoscele, dunque è isoscele anche *BEF*, per cui *BE* = *FE*. Poiché per costruzione è *BE* = *BA* = 2 *AC* = *DF*, si deduce che *DEF* è isoscele, e perciò *B.DE* = *F.BE* = 2 *D.BE* e dunque *BDE* è il triangolo cercato.

La costruzione precedente consente di determinare un angolo che è un quinto di quattro angoli retti, e quindi, assumendo tale angolo come angolo al centro di un cerchio si può costruire il pentagono regolare inscritto.

5. Fusionisti e separatisti: il dibattito in seno alla Mathesis

Nel 1896 (1° luglio) sorse in Italia tra gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie l'associazione Mathesis, che aveva come scopo il miglioramento della scuola e il perfezionamento degli insegnanti, attraverso la promozione della ricerca scientifica e didattica in relazione all'insegnamento della matematica.[33] Tra i soci fondatori vi erano Rodolfo Bettazzi, che fu il presidente della associazione nel primo biennio 1896-98, Giovanni Frattini che ne fu il vice-presidente, Francesco Giudice (segretario-economo), Paolo Gazzaniga, Enrico De Amicis, Antonio De Zolt, Giuseppe Sforza, Giulio Lazzeri che furono membri del Comitato Direttivo lo stesso biennio, ed inoltre Antonio Maria Bustelli, Francesco Palatini, Gaetano Riboni, Angelo Andriani,

[33] Sul primo periodo della Mathesis cfr. L. Giacardi, C. S. Roero, *La nascita della Mathesis (1895-1907)*, in *Dal compasso al computer*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, pp. 7- 49.

Aurelio Lugli. L'associazione Mathesis, tramite il suo presidente ed il Comitato direttivo, operava proponendo varie questioni riguardanti la didattica della matematica ed anche il suo ordinamento, in particolare le materie ed i programmi di insegnamento relativi ai vari ordini di scuole secondarie. Queste venivano discusse dai soci in adunanze e congressi ed erano oggetto di interventi pubblicati sul Bollettino della Associazione Mathesis o sul Periodico di Matematica. In particolare molto spazio ebbe il dibattito sull'insegnamento della geometria nell'ambito di una radicale riforma dei programmi governativi proposta negli anni 1897-98, che prefigurava la costituzione di una scuola secondaria inferiore unica, attraverso la fusione delle scuole ginnasiali, delle scuole tecniche e delle complementari, che erano le scuole preparatorie alle scuole normali. Tra le questioni che nei primi numeri del Bollettino venivano sottoposte ai soci, e più generalmente alla comunità degli insegnanti di matematica, ricordiamo le seguenti, due delle quali erano dedicate esplicitamente al metodo della fusione:

> II. Quali modificazioni si possono suggerire nei vigenti programmi per l'insegnamento scientifico delle scuole medie, affinché quello della matematica riesca maggiormente coordinato con quello delle scienze affini;
> IV. Esame della importante questione della fusione delle scuole tecniche con le ginnasiali, specialmente in riguardo alla matematica;
> V. Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento;
> VII. Del miglior modo di trattare in iscuola la teoria dell'equivalenza;
> X. Dato che debba lasciarsi agli insegnanti libera scelta tra il

metodo della fusione e quello della separazione della geometria piana e solida, formulare programmi secondo i quali tale scelta sia possibile. [34]

Tra il 1897 e il 1898 dunque il tema della fusione fu uno dei più dibattuti nelle adunanze della Associazione Mathesis, di cui resta testimonianza nei resoconti pubblicati sul Bollettino della associazione.

Nel 1897 si tennero diverse adunanze parziali: a Torino (28 febbraio e 1 marzo), a Palermo (14, 17, 21 e 26 febbraio), a Firenze (5 maggio), i cui risultati vennero riassunti e coordinati nel Primo Congresso generale di Torino (9-14 settembre 1898). Rodolfo Bettazzi redasse a nome dell'Associazione un memoriale per il Ministro della Pubblica Istruzione (13 Maggio).[35] Pur con diverse posizioni, apparve comunque generalmente condivisa l'opinione che si dovesse lasciare la possibilità di sperimentare un insegnamento contemporaneo di planimetria e stereometria, e dunque come prima questione da affrontare in un dibattito più approfondito nell'anno 1898, il Comitato direttivo della Mathesis ripropose la possibilità di scelta tra fusione e separazione e la conseguente formulazione di programmi adeguati.

Questa questione fu quindi dibattuta nella adunanze parziali di Torino (21 e 22 febbraio), Sondrio (14 marzo), Milano (3 aprile), Bologna (3 aprile), Sassari (7 aprile), Recanati (28 e 29 giugno). Una presentazione fu

[34] «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. I, 1896-97, n. 1, pp. 9-10; a. II, 1897-98, n.1, p. 8.

[35] «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. I, 1896-97, n. 4, pp. 11-16.

stesa da Francesco Giudice,[36] una relazione sulla discussione si trova nell'articolo di Giulio Lazzeri.[37]

Nel congresso generale all'unanimità fu proclamata la necessità di modificare i programmi per consentire la libertà di scelta. Fu anche precisato ciò che si intendeva per fusionismo: non semplicemente la presentazione alternata, ma la trattazione simultanea di argomenti affini di geometria piana e solida. Fu proposta quindi la seguente distribuzione della materia, che permetteva la libera scelta fra i due metodi: nei licei al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza, al secondo le teorie dell'equivalenza e della similitudine, al terzo la teoria della misura e la trigonometria piana; negli istituti tecnici al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza (ossia le proprietà *affini* e la teoria della congruenza), al secondo le teorie dell'equivalenza, della similitudine e della misura, al terzo la trigonometria e le questioni complementari.

In realtà la proposta non fu votata e fu rimandata ad un esame globale della più generale proposta di riforma dei programmi portata avanti da Antonio Maria Bustelli.[38]

[36] F. Giudice, *Relazione sulla prima quistione proposta dal Comitato dell'Associazione Mathesis: Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione*, «Periodico di Matematica», XIV, 1899, pp. 34-36.

[37] G. Lazzeri, *Note alla discussione della prima quistione trattata dal Congresso*, «Periodico di Matematica», XIV, 1899, pp. 117-124.

[38] A. M. Bustelli, *Relazione sulla quarta questione proposta dal Comitato dell'Associazione Mathesis: Ripartizione dell'insegnamento della matematica elementare tra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie*, «Periodico di matematica», XIV, 1899, pp. 58-99; cfr. p. 77: «[…] le ragioni di opportunità didattica che consigliano la fusione, consistente soprattutto nello studio simultaneo degli argomenti affini di planimetria e stereometria con indirizzo al fecondo principio di dualità».

Molte delle proposte nate nell'ambito della Mathesis furono recepite dal decreto del ministro Gallo del 24 ottobre 1900, ed in particolare quella di programmi di geometria che permettessero di scegliere tra il metodo fusionista e quello separatista.

Quattro anni dopo, una valutazione della sperimentazione del metodo fusionista fu avviata da Bettazzi i cui risultati furono pubblicati sul Bollettino[39] e a proposito della quale Giulio Lazzeri intervenne nuovamente sul Periodico di Matematica.[40] Il 2 gennaio 1904 venne inviata una circolare a tutti i professori di liceo del Regno con la domanda se la fusione della geometria piana colla solida fosse utile nell'insegnamento. Risposero 66 professori, di cui 28 si dichiaravano favorevoli, e 33 contrari.

I principali argomenti a sostegno della fusione erano: il risparmio di tempo che si realizzava trattando simultaneamente argomenti affini di geometria piana e solida, la semplificazione di alcune teorie di geometria piana se trattate con considerazioni stereometriche, il miglior coordinamento dello studio della matematica con quello delle altre discipline scientifiche come la fisica e la cristallografia, insegnate nei licei e istituti tecnici.

Nelle risposte ai questionari, come pure nei resoconti delle adunanze, si discussero soprattutto la prima e la terza di queste argomentazioni, più legate alla organizzazione della didattica, mentre il dibattito sui fondamenti si sviluppò principalmente in interventi pubblicati sulle riviste.

[39] *Inchiesta sulla utilità della fusione della geometria piana colla solida nell'insegnamento secondario*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. IX, 1903-04, n. 4, pp. 46-52.

[40] G. Lazzeri, *A proposito dell'inchiesta fatta dall'associazione Mathesis sulla fusione della geometria piana colla solida*, «Periodico di matematica», IX, 1903-04, pp. 233-240

Le obiezioni alla fusione riguardarono essenzialmente gli inconvenienti didattici derivanti dalla difficoltà dei giovani studenti nel concepire una intuizione spaziale, anche per la mancanza di modelli adeguati (così si pronunciava ad esempio Sforza), la mancata gradualità nel passare da argomenti più semplici a più complessi, il ritardo nella esposizione di teorie, come quella della misura, necessaria per le applicazioni dell'algebra alla geometria. Tra i critici citiamo anche Virginio Retali («con la fusione non si fa che della confusione»), Murer che era riuscito a far approvare dal Ministero un programma ad hoc ed aveva sperimentato, con esito deludente, il testo di Lazzeri e Bassani nel 1892-95 e, di nuovo, nel 1900-03, dopo la riforma dei programmi, Francesco Palatini che polemizzò direttamente con De Amicis,[41] Francesco Angeleri che presentò una comunicazione al Congresso Mathesis di Napoli (14-17 settembre 1903), Federigo Enriques che si pronunciò sfavorevolmente in una adunanza Mathesis del 1903.

A queste obiezioni i sostenitori del fusionismo opponevano considerazioni ugualmente opinabili, come l'immediatezza e la naturalezza della visione spaziale, la riduzione della fatica dello studio per l'eliminazione di ripetizioni di teoremi analoghi per il piano e lo spazio, la breve sperimentazione del metodo fusionista a fronte dei duemila anni di studi ed esperienze in ambito separatista, e così via.

Ma l'ambizione che realmente sottendeva la scelta fusionista era quella di rendere più semplice e rigorosa l'esposizione della geometria elementare, rendendo esplicita la dipendenza dagli assiomi delle diverse teorie

[41] F. Palatini, *Una conversazione coi fusionisti*, «Periodico di Matematica», XV, 1900, pp. 205-208; *Osservazioni sulla nota "Pro fusione" del Prof. De Amicis*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. II, 1897-98, n. 5, pp. 120-124.

che alla geometria appartengono, e di attualizzare l'insegnamento secondario introducendo nuovi concetti e risultati della ricerca geometrica recente.

Tra i principali sostenitori del fusionismo ricordiamo, oltre a Rodolfo Bettazzi,[42] Enrico de Amicis,[43] Francesco Giudice[44], Giovanni Frattini, Giacomo Candido, Gino Loria.[45]

Per meglio comprendere questo punto esaminiamo in particolare alcune argomentazioni di De Amicis, il quale affermava:

> È certamente ottimo principio (possibilmente seguito non solo dai fusionisti in geometria, ma da chiunque si occupi di scienze di natura specialmente deduttiva), che ogni proposizione sia dimostrata senza ricorrere a teorie dalle quali essa non dipende necessariamente; consideriamo anche come progresso logico e scientifico non indifferente lo svincolare la dimostrazione sia pure di un solo teorema da teorie alle quali esso non appartiene. (p. 90)

[42] R. Bettazzi, *Sull'insegnamento della geometria nei licei*, «Periodico di Matematica», VI, 1891, pp. 113-116, pp. 155-163.

[43] E. De Amicis, *Pro fusione: relazione alla questione V proposta nel N. 1 (anno I) del Bollettino dell'Associazione Mathesis. "Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento"*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. II, 1897-98, n. 4, pp. 73-96. [14 novembre 1897]; «Periodico di Matematica», XIII, 1898, pp. 49-72.

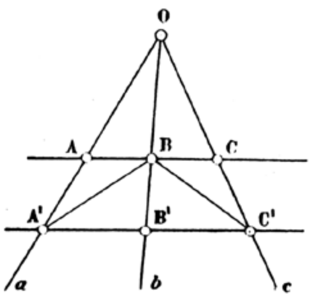
[44] F. Giudice, *G. Lazzeri, A. Bassani, Elementi di geometria* (recensione), «Rivista di Matematica», 8-9, 1891, pp. 160-162. Giudice, autore di un testo in cui la fusione non viene attuata (*Geometria piana*, Palermo, 1980), si dichiara tuttavia a favore, sia per «far rilevare subito un gran numero di proposizioni correlative per indirizzare di buon'ora al fecondo importantissimo principio di dualità», sia per poter «sviluppare meglio alcune teorie» come la similitudine.

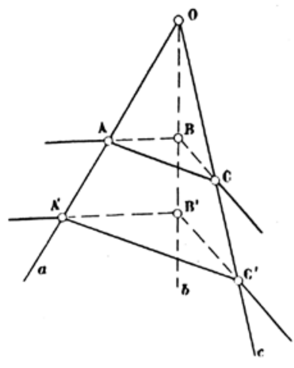
[45] G. Loria, *La fusione della planimetria con la stereometria, una pagina di storia contemporanea*, «Periodico di Matematica», XIV, 1899-1900, pp. 1-7.

Questa impostazione rispondeva ad un'esigenza di rigore generale nella ricerca sui fondamenti, che trovava appoggio anche in alcuni indirizzi pedagogici, secondo i quali una dimostrazione, che attinga a concetti estranei, anche se elegante, è didatticamente un male.[46] Così anche Aurelio Lugli, a proposito delle condizioni cui deve soddisfare un libro di aritmetica richiedeva che: «ciascuna teoria per essere stabilita senza eccezione non dovrebbe valersi di enti estranei alla propria natura».[47]

De Amicis metteva a confronto le diverse dimostrazioni della seguente proposizione:

> Se *a*, *b*, *c* sono tre semirette complanari uscenti da uno stesso punto *O* ed incontranti rispettivamente due rette parallele nei punti *A* e *A'*, *B* e *B'*, *C* e *C'* in modo che *AB* = *BC*, dimostrare che *A'B'* = *B'C'*





Questa proposizione, che contiene concetti delle teorie del parallelismo e della congruenza, si può dimostrare

[46] J. F. Herbart, *Pädagogische Schriften*, 1, Langenfalze, 1896; *Allgemeine Pädagogik*, 1806.

[47] «Periodico di Matematica», VIII, 1893, p. 199.

sia ricorrendo alla teoria delle proporzioni, che a quella dell'equivalenza, che a considerazioni stereometriche.

Basandosi sulla teoria delle proporzioni si ha infatti subito: $A'B' : AB = OB' : OB = B'C' : BC$ da cui $A'B' : AB = B'C' : BC$ e, da $AB = BC$, segue $BC = B'C'$.

Ma si può prescindere dalla teoria delle proporzioni, facendo ricorso a quella dell'equivalenza: dalla equivalenza dei triangoli *OAB* e *OBC* (che hanno le basi *AB, AC* uguali e uguale altezza) e dalla equivalenza dei triangoli *A'AB* e *C'CB* si può dedurre l'equivalenza dei triangoli *OBA'* e *OBC'*. Avendo questi la medesima base *OB*, sono uguali le rispettive altezze, che sono anche altezze dei triangoli *BB'A'* e *BB'C'*, i quali sono pure equivalenti avendo la medesima base *BB'*. Ma essi possono anche considerarsi aventi le basi *A'B'* e *B'C'* e corrispondentemente la medesima altezza, per cui queste basi devono essere uguali ossia A'B' = B'C'.

Oppure, infine, facendo ruotare il semipiano *OBC* attorno alla retta *OB* di un angolo minore di 180°, e congiungendo A con C e A' con C', essendo *BA* parallela a *B'A'* e *BC* parallela a *B'C'*, il piano *ABC* è parallelo al piano *A'B'C'* e perciò sono parallele le loro intersezioni *AC* e *A'C'* col piano delle semirette *a* e *c*. Pertanto $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$ e $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ ma $AB = BC$ e perciò $B\hat{A}C = A\hat{C}B$, da cui $B'\hat{A}'B' = A'\hat{B}'C'$ e infine quindi $A'B' = B'C'$. In questo ultimo caso non intervengono nella dimostrazione se non considerazioni relative al parallelismo e alla congruenza.

6. *Il ruolo del teorema di Desargues*

È interessante notare, come tutte le questioni e le teorie, in cui il metodo fusionista era più diretto, permettendo di dimostrare teoremi e proprietà proiettive senza fare uso delle proprietà metriche o collegate alla congruenza, potessero ricondursi al *teorema di Desargues sui triangoli omologici*:

> Se in due triangoli *ABC* e *A'B'C'*, i vertici omologhi concorrono in un punto O (proprio o all'infinito) le rette dei lati omologhi si incontrano in punti allineati, e viceversa.

Una spiegazione parziale si può rintracciare nella celebre memoria *Sui fondamenti della geometria*[48], dove Peano costruisce la geometria di posizione (come allora si chiamava quella parte della geometria elementare che riguarda esclusivamente le relazioni di associazione e ordinamento) sui concetti primitivi di punto e segmento e dimostra in particolare che il teorema dei triangoli omologici nel piano è conseguenza del postulato spaziale: "Dato un piano, si può segnare un punto fuori di esso", ed anche che questo è necessario per dimostrare il teorema di Desargues.

Un chiarimento ulteriore della questione si trova nei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert.[49]

Dopo aver posto gli assiomi della geometria elementare su tre concetti primitivi (punto retta, piano) e secondo cinque gruppi, I di appartenenza, II ordine, III congruenza, IV delle parallele, V continuità, Hilbert dimostrava che:

> C'è una geometria piana nella quale sono soddisfatti tutti

[48] «Rivista di Matematica», 4, 1894, pp. 51-90, cfr. p. 73. *Opere scelte*, vol. III, Roma, Cremonese, 1959, pp. 115-157 (cfr. p. 139).

[49] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1a ed. 1899, traduzione italiana *Fondamenti della geometria*, Milano, Feltrinelli, 1970, cap. V, pp. 85-104.

> gli assiomi lineari e piani, ad eccezione dell'assioma III.5 (quinto assioma di congruenza), mentre non vale il teorema di Desargues.
> *In una geometria piana in cui siano soddisfatti gli assiomi dei gruppi I, II e IV** (ossia l'assioma delle parallele nella forma forte: per un punto esterno esiste una ed una sola parallela ad una retta data)*, la validità del teorema di Desargues è condizione necessaria e sufficiente affinché questa geometria possa venire considerata come una parte di una geometria dello spazio in cui siano soddisfatti tutti gli assiomi I, II, IV*.*"

In altri termini: il teorema di Desargues nel piano, pur coinvolgendo proprietà solo affini, non legate alla congruenza, non può essere dedotto senza gli assiomi citati, ossia per la sua dimostrazione occorrono necessariamente o gli assiomi dello spazio o l'assioma della congruenza dei triangoli.

Il teorema di Desargues si caratterizza per la geometria piana come il risultato della eliminazione degli assiomi dello spazio.

7. Conclusioni

Le successive vicende della questione fusionista si stemperano dopo il 1904 nelle più gravi e generali questioni che agitarono la comunità degli insegnanti di matematica. Una nuova riforma dei programmi dell'istruzione classica avvenuta col Decreto Orlando (11 novembre 1904), consentiva agli studenti che avessero ottenuto la promozione nella seconda classe liceale di optare nei corsi successivi tra l'insegnamento del greco e quello della matematica. I programmi permettevano ancora di scegliere tra i due metodi di insegnamento della geometria. Le proteste e le reazioni furono vivaci nell'ambito della Mathesis.[50]

In previsione di una riforma generale dell'insegnamento della scuola media (divisa in due quadrienni: primario e secondario) nel 1906 la Commissione Reale, di cui facevano parte Pietro Blaserna e Giovanni Vailati, sottoponeva un *Questionario* a tutto il corpo insegnante, alle facoltà universitarie, alle associazioni e ai corpi scientifici e letterari. Per quanto riguarda la matematica, troviamo ancora al punto ottavo la richiesta di dare una opinione sulla opportunità della fusione della geometria piana con la solida. Gli insegnanti espressero opinione favorevole all'impiego della fusione per la trattazione della geometria razionale, insegnata nel secondo quadriennio, e comunque la convinzione generale che l'insegnante dovesse essere lasciato libero di seguire il metodo tradizionale o quello fusionista. Assieme alle risposte ai quesiti, il Comitato Direttivo dell'Associazione Mathesis tramite il suo presidente De Amicis presentò una sua proposta di riforma.[51]

Ancora negli anni 1910-11 Alessandro Padoa, allievo di Peano, presentava un progetto di riforma della scuola media, in cui l'insegnamento della matematica doveva svolgersi in tre corsi successivi, detti preparatorio, deduttivo e complementare, di cui i primi due, di tre anni ciascuno, comuni a tutti gli indirizzi di scuole. Per l'insegnamento della geometria nel corso deduttivo, Padoa

[50] *Pro-Memoria sulla riforma Orlando per l'opzione tra il Greco e la Matematica nei Licei*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», 1909, n. 1, pp. 3-9; A. Padoa, *Relazione sul Decreto Orlando*, Ibidem, pp. 43-45.

[51] «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. X, 1905-06, nn. 3-4, p. 49; Ibidem, 1907-08, nn. 1-2-3, pp. 1-20.

proponeva un metodo fusionista nell'ambito delle sue ricerche sui fondamenti della geometria e in particolare di una nuova teoria della congruenza basata su gruppi finiti di punti.[52]

La polemica sul fusionismo si esauriva dopo i primi decenni del nuovo secolo con il tacito ritorno alla separazione tra la geometria piana e quella solida.

Concludendo, possiamo dire che il dibattito sul fusionismo contribuì alla chiarificazione dei legami esistenti tra i postulati e le teorie facenti parte della geometria elementare. La questione del fusionismo inoltre costituisce una prova evidente degli stretti legami tra gli indirizzi della didattica della matematica e gli sviluppi della ricerca: quando la geometria descrittiva smise di interessare i geometri e le ricerche sui fondamenti della geometria elementare poterono considerarsi conclusi, finirono anche le discussioni sul fusionismo.

[52] A. Padoa, *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria euclidea*, «Periodico di Matematica», (3) I, an. XIX, 1904, pp. 74-80; *Alcune considerazioni di geometria elementare*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. II, 1910, nn. 4-6, pp. 38-44; *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, Ibidem, 1912, pp. 215-234.

ALDO BRIGAGLIA

DA CREMONA A CASTELNUOVO: CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ NELLA VISIONE DELLA SCUOLA

In queste brevi note vorrei mostrare come le concezioni didattiche di Castelnuovo (e si potrebbe anche dire di Enriques) siano profondamente legate alla tradizione italiana inaugurata da Luigi Cremona sin dai primi albori della raggiunta unità nazionale.

Una piccola premessa: sia per quanto riguarda la geometria algebrica, che per quanto riguarda i problemi relativi all'insegnamento, la generazione di Segre e poi di Castelnuovo, Enriques e Severi rappresenta certo un elemento di discontinuità nei confronti di Cremona. Ma tale discontinuità è molto più da intendere come un'*evoluzione* piuttosto che una *rottura*.

Non voglio certo iniziare una disquisizione teorica sulle differenze, talvolta sottili, tra *evoluzione* e *rottura*; si tratta spesso prevalentemente di semplici atteggiamenti psicologici da parte dei protagonisti. Qui mi limiterò a tentare di rintracciare alcuni elementi essenziali che possano fare riflettere su un filo di continuità che lega due dei principali protagonisti della vicenda culturale.

È proprio l'esistenza di questo filo (e non l'apparente continuità di metodi) che permette di parlare di una *scuola* in senso non (almeno non principalmente) accademico.

1. *La concezione didattica di Cremona*

L'opera di Cremona nel campo della didattica della matematica inizia con la sua nomina, nel 1857, a insegnante nel liceo di Cremona e termina soltanto con la sua morte nel 1903, anno della pubblicazione della prima edizione del 'mitico' *Enriques - Amaldi.*

Di questa opera costante, quella più studiata riguarda la scelta (operata in collaborazione con Betti e Brioschi) del testo di Euclide come testo base per l'insegnamento della geometria nei licei e le relative polemiche, ma molti altri aspetti restano pressoché inesplorati.

Il problema centrale che si doveva affrontare era quello dei libri di testo. Cremona sente «l'assoluta necessità di trasformare i vecchi libri destinati all'istruzione della gioventù per rendere questa partecipe anche degli straordinari progressi dovuti al nostro secolo».[1]

Ci sono accenti anche più forti, si sente la foga dei ventotto anni e delle battaglie risorgimentali nelle parole impiegate dal nostro:

> Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di Moznik, Toffoli, ecc., che per più anni hanno inondate le nostre scuole, e le avrebbero del tutto imbarbarite se tutt'i maestri fossero stati docili a servire gl'interessi della ditta Gerold – ora sarebbe omai tempo

[1] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze*, «Il Politecnico», 9,

> di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica che tuttora si adoperano in qualche nostro liceo e che fanno un terribile atto d'accusa contro chi li ha adottati. Diciamolo francamente: *noi* non abbiamo buoni libri elementari che siano originali italiani e giungano al livello de' progressi odierni della scienza. Forse ne hanno i Napoletani che furono sempre e sono egregi cultori delle matematiche; ma come può aversene certa notizia se quel paese è più diviso da noi che se fosse la China? I migliori libri, anzi gli unici veramente buoni che un coscienzioso maestro di matematica elementare possa adottare nel suo insegnamento, sono i trattati di Bertrand, Amiot e Serret, così bene tradotti e ampliati da quei valenti toscani. I miei amici si ricorderanno che io non ho cominciato oggi ad inculcare l'uso di quelle eccellenti opere.[2]

L'opera che Cremona ha intrapreso si collega quindi con il cammino intrapreso in Toscana da Enrico Betti e (non dovrebbe mai dimenticarsi il ruolo di questo matematico morto troppo giovane nella formazione della scuola pisana) da Giovanni Novi. Un'opera fatta di traduzioni e integrazioni di testi scolastici stranieri e di paziente diffusione delle idee in essi contenuti. Un'opera che viene giustamente vista dai suoi protagonisti come parte integrante di quella, politica e militare, del risorgimento nazionale.

Non è quindi da stupirsi che Cremona abbia colto al volo l'occasione presentatasi con la traduzione (da parte di Novi) del testo di Geometria elementare dell'Amiot per esporre le sue idee sulla didattica in un lavoro dal ti-

1860, pp. 286-323, in *Opere matematiche*, Milano, Hoepli. v. I, 1914, pp. 176-207, p. 178.

[2] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria* ... cit., p. 207.

tolo *Considerazioni di storia della geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze.* L'idea di scrivere qualcosa sui libri di testo era da tempo presente nel giovane pavese, ma era rimasta a lungo nel cassetto, forse anche sulla base dei prudenti consigli di Brioschi che gli aveva consigliato di non andar contro le idee del ministro sui libri di testo che «non sono quistioni di scienza, ma di borsa».[3]

Il lavoro, terminato infine il 28 marzo 1859 e rivisto nel maggio dello stesso anno in una Milano ormai liberata, vedrà finalmente la luce l'anno successivo nel Politecnico ancora diretto da Cattaneo, il cui programma veniva enunciato nel primo numero della nuova serie con parole che tanto profondamente colpirono Cremona da spingerlo a sceglierle come epigrafe della sua famosa *Prolusione*, pronunciata nel novembre 1860 a Bologna:

> La nuova poesia della scienza, esposta in semplice prosa, senza favole, senza persone ideali, senza iperboli, senza canto, invaghisce l'animo e lo sublima ben più che la poesia dei popoli fanciulli […] O giovani poeti, non eleggete la vostra dimora nei sepolcri; lasciate al passato le sue leggende; date una melodiosa parola alla semplice e pura verità; perrocchè questa è la gloria del vostro secolo; e voi non dovreste mostrarvi ingrati, torcendo li occhi dal sole nuovo della scienza a voi concesso, per tenerli confitti nei sogni della notte che si dilegua.[4]

D'altro canto, nello stesso numero del Politecnico in cui Cremona esponeva le sue idee Cattaneo tornava sui

[3] F. Brioschi a L. Cremona,16 maggio 1858, in AA.VV., *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897)*, II, *Inventari*, Milano, Franco Angeli, 2000, p. 342.

[4] L. Cremona, *Prolusione ad un corso di geometria superiore letta nell'Università di Bologna, Novembre 1860*, in *Opere …*, cit., pp. 237-253, a p. 237.

problemi dell'insegnamento dicendo: «L'estremo grado d'avvilimento, a cui possa calare una nazione, è la servitù dell'insegnamento».[5] Un punto di vista etico del tutto condiviso dal nostro, in piena consonanza con gli ideali mazziniani della moglie, Elisa Ferrari la destinataria della *Lettera sull'immortalità dell'anima* del patriota genovese.

Quindi, è un quadro complesso di scelte di vita quello in cui si inserisce il lavoro in questione. Ma è ora tempo di ritornare ad esso.

Il programma delineato in quest'opera resterà a mio avviso immutato o quasi per tutto il corso della vita del nostro e invero una delle sue principali preoccupazioni, e quindi penso si debba esaminare con qualche attenzione.

Una prima considerazione riguarda il rapporto con il testo euclideo, guardato sempre come modello assoluto di rigore. Sarà un tema su cui Cremona tornerà con molta più ampiezza qualche anno più tardi e che è stato ampiamente studiato: quindi qui posso limitarmi ad osservare che il rigore di cui si parla è quello che precede le riflessioni sui fondamenti che avranno inizio di lì a poco. Ancora non è arrivata l'onda della rivoluzione non euclidea: in Italia bisognerà aspettare gli studi di Beltrami sull'argomento. Il problema del quinto postulato è sfiorato appena: «invece del postulato di Euclide può assumersi alcun'altra delle proposizioni di detta teorica e quindi dimostrar tutte le altre. Molti autori si sono sforzati, ma inutilmente, di dimostrar tutte quelle proposizioni senza ammettere alcun postulato».[6]

Certo colpisce che in un lavoro ricchissimo di testi e di spunti storici, così come trasudante di modernità, i

[5] C. Cattaneo, *Prefazione al volume IX del Politecnico*, in C. Cattaneo, *Storia universale e ideologia delle genti*, Torino, Einaudi, 1972, p. 222.

[6] Cremona, *Considerazioni di storia della geometria...*, cit., p. 180.

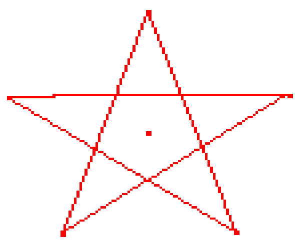
nomi di Nicolaj Lobačevskij e di Janos Bolyai siano del tutto assenti, così come assente è ancora il grande protagonista del prossimo decennio matematico, Bernhard Riemann.

Il bisogno di rigore non copre l'essenza del pensiero di Cremona, la sua ricerca di una immaginazione senza limiti. La lettura del testo, austero e privo di figure, non tragga in inganno: la didattica verso cui spinge l'autore è una didattica fatta soprattutto di immagini esteticamente potenti e di problemi affascinanti. Do qui soltanto qualche esempio, che per altro mi ha sorpreso profondamente.

Tra i fatti geometrici che Cremona indica ve ne sono di ben poco usuali nelle scuole. Prendiamo i poligoni stellati, cui il nostro dedica una mirabile paginetta.

Come è noto essi sono costituiti dai poligoni ottenuti da un poligono regolare di n vertici, congiungendo i vertici «di 2 in 2, di 3 in 3, ed in genere di h in h, … quando i numeri n ed h siano primi tra di loro. Il numero h costituisce la specie del poligono». [7]

Un esempio è naturalmente il pentagramma, per il quale $n = 5$ e $h = 2$.



[7] Ibidem, p. 182.

Il lettore interessato potrà seguire Cremona (ed Amiot) nel ricavare dei bei teoremi:

«Vi ha tanti poligoni regolari di n lati quante unità vi sono nella metà del numero che esprime quanti numeri interi vi sono inferiori ad n e primi con esso». Quest'ultimo numero come è noto esprime la funzione di Eulero $\phi(n)$. Nel caso $n = 5$, $\phi(5) = 4$, e il numero di poligoni regolari, stellati e no, di cinque lati è due (il pentagono convesso e il pentagramma).

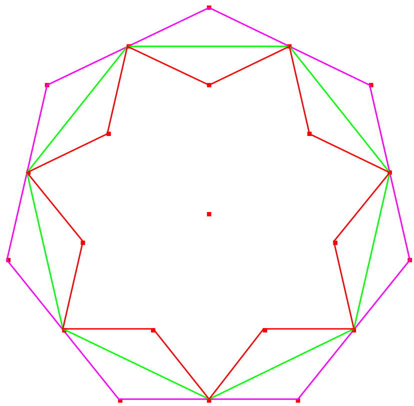
«La somma degli angoli interni formati dai lati successivi di un poligono regolare di n lati, è uguale a $2(n\text{-}2h)$ retti».[8] Ad esempio nel pentagramma tale somma è:
$2(5 - 4) = 2$ retti. Quindi ciascuno di essi misura, come è ben noto, 36°.

Dopo un vasto excursus storico su questo dimenticato ramo della geometria elementare, Cremona cita Keplero come colui che per primo ha dato il nome di Stellati a questi poligoni.

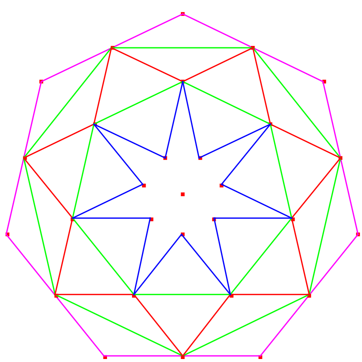
Cremona ha letto con passione anche autori minori su questo argomento: prendiamo l'esempio di un tale Broscio e seguiamo passo passo la descrizione di Cremona, che ho integrato con figure:

> Prendiamo [...] un ettagono regolare ordinario e dividiamone per metà tutti i lati. Intorno a ciascuna retta congiungente due punti medi consecutivi si faccia ruotare il piccolo triangolo che questa retta stacca dall'ettagono, finché questo triangolo cada all'interno della figura. Si otterrà così un poligono di quattordici lati ad angoli salienti e rientranti alternativamente, il quale ha lo stesso perimetro dell'ettagono proposto.

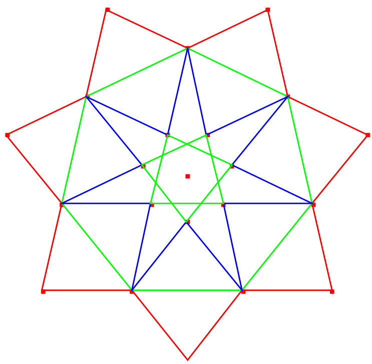
[8] Ibidem, p. 182.



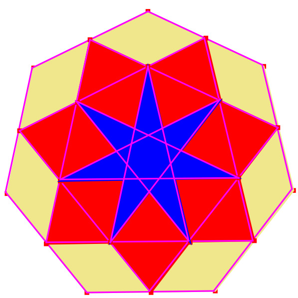
Ora intorno a ciascuna retta congiungente due vertici di angoli rientranti successivi del poligono di quattordici lati, si faccia rotare il piccolo triangolo da essa distaccato, finché cada entro alla figura; risulterà un altro poligono di quattordici lati ad angoli alternativamente salienti e rientranti, isoperimetro ai due precedenti.



Questi tre poligoni, isoperimetri tra loro, hanno però aree diverse, poiché il secondo è compreso dentro il primo e il terzo dentro il secondo. Le due figure così generate non sono altro che ettagoni di seconda e terza specie, nei quali siano stati levate le porzioni interne dei lati.[9]



Nella figura le parti levate dei poligoni stellati sono disegnate con un tratto più chiaro. Segue una rappresentazione pittorica della configurazione dei tre poligoni.

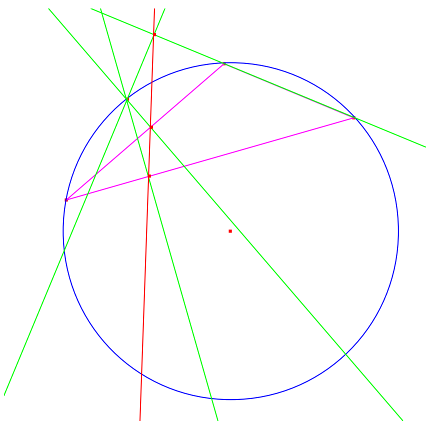


[9] Ibidem, p. 183.

A quale geometria pensassero Betti, Novi e Cremona si vede anche dai molti problemi posti nel libro e scelti dal nostro.

Quello di Vitelo (Vitellione): «se da due punti dati si conducono due rette ad uno stesso punto di una retta o di una circonferenza la loro somma sarà minima quando siano egualmente inclinate alla linea medesima».[10] Un ben noto teorema di minimo molto amato nella didattica contemporanea.

Ovvero quello di Servois: «se si conducono da un punto qualsiasi di una circonferenza circoscritta a un dato triangolo le perpendicolari sui lati, i piedi di queste perpendicolari sono in linea retta».



Anche se a mio avviso affascinanti queste metodologie geometriche dinamiche non hanno molto a che fare con quell'iniezione di modernità, che attraverso il testo di Amiot, Cremona voleva inserire nell'istruzione liceale

[10] Ibidem, p. 184.

italiana. Questo fine emerge nelle pagine veramente notevoli (e che vanno ben al di là dell'Amiot) dedicate al calcolo dei vettori, nelle quali pagine Cremona mostra di avere profondamente assimilato l'itinerario che da Möbius porta a Bellavitis, Hamilton, e soprattutto Grassmann la cui citazione in un contesto elementare (in anni in cui era totalmente dimenticato) costituisce veramente un unicum.

La teoria dei rapporti armonici, delle polari, del birapporto, delle involuzioni costituiscono il quadro della modernità nel trattato. Ma notevolissimo ci sembra il riferimento alle trasformazioni: esso ci mostra lo stretto collegamento tra il ricercatore proteso in un programma che darà presto frutti copiosi e il didatta, ansioso di formare nuove generazioni.

> Immaginiamo che in un piano vi sia un punto che movendosi in modo affatto arbitrario descriva una certa figura. Nello stesso piano o in un altro immaginiamo un secondo punto mobile, il cui movimento sia collegato dietro una legge individuata al movimento del primo punto; nella qual legge entri la condizione che a ciascuna posizione di uno dei punti mobili corrisponda un'unica posizione dell'altro mobile, e reciprocamente. Il secondo mobile avrà così descritto una seconda figura, la quale del resto può, prescindendo da idee di movimento, anche desumersi dalla prima, supposta data, mediante un metodo di deformazione che tenga luogo di quella legge determinata che legava i due movimenti.[11]

Si tratta, come si vede, di un programma ampio, basato su un'idea di trasformazione generalissima. Un programma che gli permetterà presto di pervenire all'idea

[11] Ibidem, p. 193.

di dualità, di trasformazioni per polari reciproche, di trasformazione birazionale.

Nel testo viene passata in rassegna la serie di trasformazioni note, prospettività, omologie, fino alle omografie generali e alle proiezioni, tra cui in particolare quella stereografica.

Il programma sarà ribadito ed esplicitato anche per la geometria superiore nella citata *Prolusione* del 1860:

> La teoria delle figure correlative contiene in se un principio generale di *trasformazione* delle figure – il *principio di dualità* – principio che è un vero stromento di ricerche, potentemente efficace in tutta l'estensione dello scibile geometrico. Dato un teorema risguardante un certo sistema di enti geometrici, applicategli un metodo di trasformazione e voi n'avrete un altro teorema, in generale non meno importante. In questo modo dalle proprietà dei sistemi di punti voi potrete dedurre quelle de' sistemi di rette o di piani; dalla teoria delle curve e delle superficie, considerate come luoghi di punti, si ricava la dottrina delle curve e delle superficie risguardate come inviluppi di rette o di piani; e i teoremi concernenti le linee a doppia curvatura somministrano teoremi relativi alle superficie sviluppabili; e reciprocamente.[12]

Non vogliamo qui continuare ad addentrarci sulle *Considerazioni* del giovane matematico pavese. Comunque sono quattro i pilastri sui quali egli fonda la sua visione riguardo all'insegnamento della geometria. Innanzitutto l'aspetto relativo al *rigore* che lo porta a tener sempre presente lo schema euclideo; inoltre i già visti aspetti *dinamici* (basati sull'idea di trasformazione) e *creativi* (ba-

[12] Cremona, *Prolusione* …, cit., p. 251.

sati su una continua moltiplicazione delle facoltà relative all'immaginazione, anche di carattere estetico).

A questi aspetti vanno aggiunti l'aspetto *storico* che permea l'intera trattazione. Una predilezione per la storia che appare dettata da un'inesauribile curiosità intellettuale, ma anche dalla convinzione di trovarvi molti stimoli per la ricerca attiva, un punto di vista che egli trasmetterà in misura più o meno profonda, anche ai suoi allievi.

Infine basta dare un'occhiata alle date scritte ad epigrafe. Cremona, 28 marzo 1859. Ancora meno di un mese e la II guerra di indipendenza sarebbe iniziata; la nota aggiunta indica, Milano 9 maggio 1860. Garibaldi era già salpato, due giorni dopo sarebbe sbarcato a Marsala, gli amici Enrico e Benedetto Cairoli facevano parte della spedizione: non soltanto alla matematica si rivolgeva il pensiero di Luigi, non era un caso, ripeto, che avesse affidato le sue *Considerazioni* al Politecnico di Cattaneo.

Il ruolo di Cremona come maestro per l'insegnamento della matematica in Italia non si esaurisce qui. Ancor prima di divenire professore universitario era stato coinvolto da Genocchi nell'elaborazione dei programmi di matematica per i licei adottati nel novembre 1860 che, a quanto gli scrive lo stesso Genocchi, «sono i vostri né più né meno».

Contribuirà poi, come già detto più volte, all'adozione degli *Elementi* di Euclide nei licei Italiani in collaborazione con Betti e Brioschi. Si dedicherà in seguito all'insegnamento tecnico-scientifico scrivendo un famoso testo di geometria proiettiva; infine nel lungo periodo di permanenza al Senato contribuirà in modo decisivo alla formulazione di progetti che, seppure non giungeranno a essere adottati, costituiranno un primo banco di prova delle idee confluite poi, soprattutto a opera di Vailati e Castelnuovo nel liceo moderno.

2. La concezione didattica di Castelnuovo

Castelnuovo esordì nella problematica dell'insegnamento della matematica nel 1907, quattro anni dopo la morte di Cremona e quasi cinquanta dopo l'apparizione del primo intervento del suo maestro.

A differenza di Cremona, Castelnuovo è allora già un matematico affermato, anzi sulle soglie di abbandonare la geometria algebrica, materia che aveva assorbito fino ad allora tutte le sue energie intellettuali.

Come per Cremona d'altra parte, questo lavoro costituisce un momento programmatico importante. Il lavoro, *Il valore didattico della matematica e della fisica*, apparve infatti nel primo numero di Rivista di Scienza, la rivista diretta dal cognato Federigo Enriques, anello fondamentale di un ambizioso progetto culturale.

Come il Politecnico di più di quaranta anni prima, Rivista di Scienza, aveva l'ambizione di disegnare una nuova cultura per una nuova società, una cultura nazionale in cui le scienze e in particolare la matematica diano il loro contributo alla crescita civile.

> La scuola – scrive Castelnuovo nel 1909 – non è veramente efficace se essa non si dirige alle intelligenze medie, se non riesce a formare quella democrazia colta, che è pur la base di ogni Nazione moderna. Studiare i mezzi che valgano a diffondere la cultura, sia pure con qualche sacrificio della profondità; questo è il problema che tutti noi siamo chiamati a risolvere![13]

[13] G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge. Relazione del prof. G. Castelnuovo della R. Università di Roma,* Atti del II Congresso della *Mathesis,* Società italiana di matematica, Società Cooperativa Tipografica, Padova, 1909, Allegato F, p. 4.

Rivista di Scienza si rivolge quindi alle classi colte del paese e vuole contribuire a formare un cittadino moderno, aperto alle scienze e sensibile alle sue esigenze. La differenza principale tra le due impostazioni (e anche tra quella di Castelnuovo e quella di Cremona) sta nel fatto che mentre nel 1860 le speranze si riponevano nella formazione di una classe dirigente al centro della quale fosse l'ingegnere formato nella nuova scuola politecnica, all'inizio del nuovo secolo si hanno soprattutto «di mira gli interessi dei giovani che aspirano alle libere professioni. Di questi soprattutto dobbiamo tener conto, sia perché costituiscono la grande maggioranza delle nostre scolaresche, sia perché su di essi principalmente deve fare assegnamento il paese nel suo progressivo sviluppo».[14]

Non voglio qui indagare sui motivi di questo cambiamento di prospettiva, se cioè legati allo sviluppo della società nel suo complesso o a uno sviluppo peculiarmente italiano, ma è una differenza di prospettiva importante che stabilisce in che senso si può parlare di un'evoluzione nei punti di vista della scuola italiana.

Castelnuovo punta quindi, come Cremona, nel mantenere i contatti tra la nuova matematica che emerge e che ha stabilito nuovi fecondi contatti con le applicazioni e con la società civile. Mentre ai tempi di Cremona sembrava che il cuore della prospettiva sociale delle matematiche fosse nella geometria 'moderna' e nelle sue molteplici connessioni con la Statica grafica e più in generale con la formazione degli ingegneri (*le latin des*

[14] G. Castelnuovo, *La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla Scienza moderna,* Atti III Congresso della Mathesis, Genova, 21-24 ottobre 1912, Roma, Tip. Manuzio, 1913, pp. 18-19.

ingénieurs) oggi le nuove frontiere sono date dalla teoria delle funzioni, dal calcolo delle probabilità, dai legami concettuali con la fisica.

Questa tendenza verrà esplicitata da Castelnuovo nel citato articolo apparso nel 1907. Mi limiterò a qualche citazione:

> È opinione diffusa, fin dai tempi più remoti, che la matematica fornisca alla mente la disciplina e l'equilibrio, che essa, meglio di ogni altra scienza, insegni l'arte di ragionare.[...] [Ma] il ragionamento formalmente perfetto non è né l'unico, né, molte volte, il migliore modo per giungere alla verità. È ben spesso preferibile ricorrere ad un ragionamento approssimato, i cui passi successivi vengano sottoposti al riscontro dei fatti, per sceverare via, via il vero dal falso, piuttosto che affidarsi ad una logica impeccabile, chiudendo gli occhi al mondo esterno. Ora la matematica (come oggi si insegna nelle scuole di cultura generale) disprezza a torto quel primo tipo di procedimento logico, e condanna in tal modo l'unica forma di ragionamento che sia concessa alla maggioranza degli uomini![15]

Stabilito così che il ragionamento deduttivo non è l'unica forma di ragionamento con cui debba misurarsi la matematica, Castelnuovo passa all'insegnamento della geometria. Se si tratta di una scienza empirica, anche i suoi metodi didattici devono conformarsi a questa concezione. Non si tratta quindi di applicare direttamente il metodo deduttivo, ma di conquistarlo, in un certo senso si tratta di 'matematizzare' la geometria. È questo processo che interessa di più:

[15] G. Castelnuovo, *Il valore didattico della matematica e della fisica*, «Rivista di Scienza», 1, 1907, pp. 329-337, cit. a p. 329 e 331.

> Nel trattare una questione concreta con la geometria occorre percorrere tre stadi. Nel primo stadio si sostituiscono ai punti, alle linee, alle superfici materiali della figura considerata certi simboli astratti, cui si applicano in forma precisa (sotto il nome di postulati) le relazioni approssimate che sussistono nella realtà. Nel secondo stadio si opera su questi simboli mediante i procedimenti logici, per dedurre dai postulati nuove proposizioni più riposte. Nel terzo stadio si traducono le proposizioni astratte in risultati reali, pratici, e si esamina con quale grado di approssimazione la previsione teorica risulti verificata. Ora di questi tre stadi l'insegnamento geometrico, come oggi vien dato, mette in luce soltanto il secondo e lascia in ombra il primo ed il terzo che hanno un valore didattico più elevato. [...] Per far rilevare come avvenga il passaggio dalla realtà allo schema simbolico, conviene ricorrere all'esperienza e all'intuizione [...] molto più spesso di quello che oggi si faccia. [...] Si ha un bel dire che l'intuizione può condurre all'errore; sarà; ma l'intuizione fornisce pure la principale, se non l'unica, guida alla scoperta della verità. Dovremo forse rinunziare alla verità per paura dell'errore? [...] Dedotta una verità dall'esperienza [...] l'insegnante farà notare come il fatto sperimentale possa tradursi in una proposizione simbolica precisa, cui sia applicabile il ragionamento rigoroso per dedurre nuovi risultati. E questi gioverà porre a riscontro coi fatti, sia ricorrendo a vere esperienze scolastiche, quando sia possibile, sia citando le indirette conferme che seguono dalle applicazioni della matematica (geodesia, astronomia,...). Chi ritiene superflue tali verifiche è vittima di un'illusione.[16]

Ricondotto così il metodo geometrico a quello fisico di esperienza – legge – deduzione – conferma sperimenta-

[16] Ibidem, pp. 331-332.

le, Castelnuovo passa all'esame della didattica della fisica, oramai vista come integrantesi con la geometria:

> I precetti e i metodi che la geometria, considerata come scienza sperimentale, avrà insegnato ai giovani, troveranno una brillante conferma nei dettami di un'altra scienza, che, non inferiore a quella per valore educativo, più di quella risente il soffio dello spirito moderno. Alludo alla fisica, di cui ritengo grandissima l'efficacia didattica, purché l'insegnante si proponga, non già di fornire agli allievi una serie di notizie enciclopediche presto dimenticate, ma di mettere in luce i mezzi che l'uomo impiega per penetrare i misteri della natura.[17]

Ancora l'accento è posto sulla *conquista* dei mezzi, che non sono più *strumenti* passivi, ma l'oggetto stesso dell'insegnamento. In questo caso Castelnuovo sottolinea come la situazione sia in qualche modo simmetrica rispetto all'insegnamento della matematica. In questo caso se è vero che «sul valore didattico delle esperienze nella fisica non occorre insistere» si ha che «lo spirito critico, di cui si è tanto abusato nell'insegnamento della matematica, sembra far difetto in molti corsi di fisica». A questo difetto, simmetrico rispetto alla matematica, si può ovviare con lo sviluppo di metodi deduttivi anche in fisica, dove il ragionamento prevalente sarà non quello puramente logico, ma piuttosto quello euristico che fra i molti suoi meriti ha quello di essere «applicabile alla vita quotidiana ed in tutte le conoscenze che con questa hanno rapporti».

Una volta divenuto presidente della Mathesis, Castelnuovo rese più frequenti i suoi interventi su questioni

[17] Ibidem, p. 334.

didattiche. Mi pare importante l'intervento compiuto in collegamento con i risultati della commissione internazionale dell'insegnamento matematico sull'introduzione del Calcolo differenziale nella media superiore. Nel dichiararsi favorevole (con misura) a tale proposta e nel caldeggiarla per il neo istituito Liceo moderno Castelnuovo in pratica suggerisce, coerentemente con la sua visione di insieme, di porre il concetto di *funzione* al centro dell'insegnamento secondario. Mi sembra un punto di vista la cui rilevanza per i rapporti con la fisica è indiscutibile:

> Le nozioni di funzione, di rappresentazione grafica, di derivata [...] appartengono oggi alla cultura generale, con maggior diritto che certe proposizioni riposte della geometria elementare o dell'aritmetica ragionata. Giovani usciti dalle scuole medie e diretti alla facoltà giuridica o medica incontreranno quei concetti nei loro studi statistici, economici o biologici. Non avranno essi il diritto di lagnarsi che, nei corsi secondari di matematica da loro seguiti, siano stati proprio dimenticati quegl'insegnamenti di cui più sentono il bisogno per approfondire i loro studi superiori?[18]

Mi sembra interessante che qui venga ancora accentuata l'ultima affermazione dello stesso Castelnuovo dell'articolo del 1907 riguardante la necessità che l'insegnamento delle materie scientifiche si rivolgesse all''uomo colto' in generale.

Il problema si pone quindi in termini diversi da quelli elaborati da Cremona. Si tratta di inserire la cultura scientifica quale parte essenziale della cultura umanisti-

[18] G. Castelnuovo, *I programmi di matematica proposti per il liceo moderno,* «Bollettino della Mathesis», IV, 1912, p. 121.

ca. Quale matematica e quale fisica per «gli interessi dei giovani aspiranti alle libere professioni ... [che] costituiscono la grande maggioranza delle nostre scolaresche ... [e su cui] principalmente deve fare assegnamento il nostro paese nel suo progressivo sviluppo»? Questa è una domanda, forse *la* domanda a cui Enriques e Castelnuovo cercano di rispondere attraverso i loro progetti didattici.

Nei confronti della riforma Gentile essi condividono quindi la centralità della cultura umanistica, ma è la loro concezione della parola "umanistica" a essere profondamente diversa da quella del filosofo siciliano. Per essi la cultura scientifica è parte essenziale di una cultura umanistica rettamente intesa, per l'altro essa è di importanza marginale.

Ma un filo rosso di continuità percorre le diverse posizioni. Al centro della formazione matematica stanno sempre non lo sviluppo delle capacità di calcolo ma della fantasia, dell'intuizione, dell'immaginazione:

> Lo scopo precipuo che l'insegnante deve proporsi non è quello di dare ai giovani una indigesta ed effimera erudizione, bensì di educare armonicamente tutte le varie attitudini dell'intelligenza, risvegliando le assopite, e disciplinando le esuberanti. Le maggiori cure egli dovrà poi dedicare alla facoltà più nobile, la fantasia creatrice, che risulta da un felice accordo dell'intuizione con lo spirito di osservazione.[19]

Vorrei ora concludere con le parole di un grande matematico scomparso da non molto, che forse possono mostrare come questo filo rosso si estenda ben oltre l'inizio

[19] Castelnuovo, *Il valore didattico della matematica e della fisica* ..., cit., p. 337.

del secolo scorso e costituisca un testimone passato da una generazione all'altra di matematici italiani, un patrimonio da non disperdere:

> forse occorrerebbe ripetere più spesso che la prima dote del matematico è la *immaginazione*. (Ennio De Giorgi).

FULVIA FURINGHETTI

DUE GIORNALI PONTE TRA RICERCA E SCUOLA: LA *RIVISTA* DI PEANO E IL *BOLLETTINO* DI LORIA

1. *Giornalismo matematico italiano nella seconda metà dell'Ottocento*

Nella seconda metà del XIX secolo la comunità matematica italiana vive un momento di gran fermento di idee e vivacità creativa, propiziato dall'assetto che il sistema di istruzione (incluse le università) va assumendo nel nuovo contesto sociale. L'atmosfera di quel momento è suggestivamente descritta da Vito Volterra al quarto Congresso Internazionale dei Matematici svoltosi a Roma nel 1908:

> I professori, nel pieno vigore della loro produzione intellettuale e del loro entusiasmo per la ricerca scientifica, erano chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano; gli allievi dovevano assistere alla creazione della scienza con tutte le sue lotte, le sue difficoltà, i suoi pentimenti, le sue crisi, le sue dolci vittorie, e dovevano essi stessi, alla loro volta, lavorare accanto ed insieme agli uomini di genio che li avevano iniziati. [1]

[1] V. Volterra, *Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX*, in G. Castelnuovo (a cura di), Atti del IV Congresso Internazionale

Cambiamenti radicali stavano avvenendo in tutto il mondo scientifico; in particolare, la comunicazione tra scienziati diventava un elemento fondamentale nella ricerca e si basava su nuovi mezzi e comportamenti.[2] Enrico Betti, Francesco Brioschi, Angelo Genocchi e Barnaba Tortolini scrivono nel brano "Avviso dei compilatori" del tomo I degli *Annali di Matematica pura ed applicata* del 1858 (p. n. n.):

> Il rapido e continuo incremento delle Scienze Matematiche in questi ultimi tempi, è dovuto principalmente alla facilità con cui le molte e varie ricerche appena intraprese, le nuove verità appena scoperte possono subito estendersi e fecondarsi da molti geometri contemporaneamente in varie parti d'Europa. Quindi per tutte le nazioni, che vogliono cooperare a questo progresso, la necessità di periodici che diffondano con prestezza e regolarità i nuovi trovati dei loro dotti, e che agevolino il modo di seguire il generale avanzamento della Scienza.

Proprio in quel periodo in Italia, accanto ai tradizionali canali di diffusione della cultura, quali corrispondenza privata, memorie e atti delle accademie, nascono giornali dedicati specificamente alla ricerca matematica (cfr. Appendice 1).

dei Matematici, Roma, Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1909, I, pp. 55-65. La citazione è a p. 58.

[2] Cfr. K.H. Parshall, A.C. Rice (editors), *Mathematics unbound: the evolution of an international mathematical community 1800-1945*, HMATH, Providence, American Mathematical Society; London, London Mathematical Society, 2002. Il problema di informare e comunicare è discusso in G. Loria, *Intorno allo stato presente ed alla sorte futura di una Bibliografia matematica del secolo XIX*, «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche», XIV, 1912, pp. 1-6.

I giornali dedicati alla didattica della matematica[3] nacquero dopo i giornali di ricerca; ciò si spiega con il fatto che essi erano collegati allo sviluppo degli stati in senso moderno e alla costruzione dei sistemi nazionali di istruzione pubblica. All'interno di questi sistemi si delineava la figura professionale dell'insegnante (incluso l'insegnante di matematica), emergevano i problemi dell'insegnamento ed erano fondate associazioni di insegnanti di matematica. Queste talvolta diedero vita a giornali rivolti alla didattica della matematica. Viceversa, in altri casi furono fondati giornali dedicati alla didattica della matematica, i quali furono l'ambito dove l'idea di un'associazione di insegnanti prese corpo.

In Italia nel decennio dell'unificazione alcuni contributi concernenti a vario titolo la didattica della matematica erano stati pubblicati nei giornali matematici,[4]

[3] Uso la locuzione "didattica della matematica" in senso ampio intendendo con essa formazione degli insegnanti, programmi, matematica elementare e, in generale, tutti i vari problemi connessi all'insegnamento e all'apprendimento della matematica. Questa locuzione è vicina a quella usata negli atti dei Congressi Internazionali dei Matematici per indicare la sezione dedicata ai problemi dell'insegnamento matematico (ai tempi si diceva spesso "pedagogia della matematica"). In altri miei lavori ho usato per questi giornali la locuzione "giornali dedicati all'insegnamento" o "giornali di matematica elementare". Come dice Vincenzo Cavallaro, all'epoca la denominazione prevalente per i giornali che stiamo considerando in Italia era "giornali matematici a carattere elementare", cfr. V.G. Cavallaro, *Storia del giornalismo matematico italiano,* «Il Bollettino di Matematica», n. s., IX, 1930, pp. XLIX-LIX.

[4] La presenza della didattica nei giornali italiani di matematica dell'Ottocento è discussa in F. Furinghetti, A. Somaglia, *Emergenza della didattica della matematica nei primi giornali matematici italiani,* in D. Moreira, J.M. Matos (organização de), *História do ensino da Matemática*

ma già nel decennio successivo uscirono le prime riviste consacrate in modo specifico alla didattica della matematica.[5]

Negli “Annunzi di recenti pubblicazioni” del *Bullettino* di Boncompagni (anni 1873, 1874, 1875) e in alcune note del *Giornale di Matematiche*[6] si trova notizia di un *Periodico di Scienze Matematiche e Naturali per l'Insegnamento Secondario* di cui sono usciti 12 fascicoli a partire dal giugno 1873, pubblicato «per cura dei signori A. Armenante, E. Bertini, D. Besso, Enrico De Montel, L. Pinto, F. Rodriguez, L. De Sanctis».[7] Giacomo Candido,[8] su informazione avuta da Loria, menziona una *Rivista di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali* fondata a Roma nel 1873, «che pare si sia arrestata al primo volume» Dopo questo tentativo uscì a Alba (Cn) nel 1874 la *Rivista di Matematica Elementare,* il cui primo direttore fu Giovanni Massa. Fu pubblicata fino al 1885. Uno dei collaboratori di questa rivista, Alberto Cavezzali, fondò a Novara nel

em Portugal, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005, pp. 59-78.

[5] Per ulteriori notizie su questi giornali cfr. F. Furinghetti, A. Somaglia, *Giornalismo matematico 'a carattere elementare' nella seconda metà dell'Ottocento,* «L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate», 15, 1992, pp. 815-852.

[6] Y., *Bibliografia,* «Giornale di Matematiche», XI, 1873, pp. 305-306; G.J. Hoüel, *Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie,* «Giornale di Matematiche», XIII, 1875, pp. 72-79.

[7] Questa precisazione è a p. 269 dell'annata 1873.

[8] Cfr. G. Candido, *Il giornalismo matematico in Italia,* in *Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle Scuole Medie italiane promosso dall'Associazione "Mathesis",* Torino, Tipografia degli Artigianelli, 1904, pp. 85-93. La citazione è a p. 86. L'articolo è pubblicato anche in *Scritti matematici* (raccolti da E. Bortolotti e E. Nannei), Marzocco, Firenze, 1948, pp. 598-606.

1883 *Il Piccolo Pitagora*, pubblicato fino al 1884. Nel 1886 a Roma uscì il *Periodico di Matematica* diretto da Davide Besso. Nel 1902 a Bologna Alberto Conti fondò *Il Bollettino di Matematica*, che nel 1949 si trasformerà in *Archimede* (cfr. Appendice 2). Negli anni il *Periodico* e *Il Bollettino* furono affiancati da giornali con vita più o meno effimera pubblicati in varie città; essi erano diretti a vari livelli scolari, alcuni trattavano anche scienze, in particolare fisica; talvolta compariva nel titolo la distinzione tra matematiche pure e applicate. L'Appendice 2 contiene un elenco di giornali di didattica della matematica usciti in Italia nella seconda metà dell'Ottocento.

In generale si può osservare che, sia in Italia sia all'estero, la tipologia dei giornali di didattica della matematica era varia: alcuni erano indirizzati agli insegnanti o ai cultori di matematica, altri erano indirizzati a studenti dei vari livelli scolari e, soprattutto all'estero, ai candidati alle scuole speciali. In realtà, classificare un articolo o un giornale nella categoria didattica della matematica ha un forte grado di arbitrarietà, è legato al periodo e a varie circostanze.[9] Non aiuta il fatto che la classificazione adottata nel primo numero del *Fortschritte* (*Jahrbuch*, 1871), che riguarda l'anno 1868 e si conserva con qualche modifica nelle annate successive, non comprenda nessuna voce collegabile esplicitamente alla didattica della matematica. Occorre inoltre notare che i giornali dedicati all'insegnamento spesso non erano gestiti da insegnanti di scuola elementare o secondaria (cioè gli utenti cui erano destinati), ma da universitari e, quindi, poteva accadere che riflettessero una visione della scuola lontana dalla realtà.

[9] Il problema della classificazione degli articoli è già stato segnalato in Furinghetti, Somaglia 1992 cit.

Due pubblicazioni che esemplificano bene l'ambiguità del rapporto tra giornali matematici e insegnamento della matematica sono la *Rivista di Matematica* di Giuseppe Peano (1858-1932) e il *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche* di Gino Loria (1862-1954). Il primo ha, nelle intenzioni del fondatore, «scopo essenzialmente didattico», ma, in pratica, si configura come uno strumento per diffondere le idee del suo direttore, le quali riguardano soprattutto la ricerca matematica. Il secondo, orientato alla ricerca storica e alla comunicazione nel mondo universitario, fu per lungo tempo la sezione autonoma di un giornale per insegnanti di matematica diretto da un insegnante.

In questa nota presento alcune caratteristiche di questi due giornali allo scopo di delineare il loro ruolo nel giornalismo di didattica della matematica e, in seconda istanza, il ruolo dei loro direttori nella storia dell'istruzione matematica. Anche se questi ruoli sono molto diversi, alcuni elementi accomunano i due personaggi. In primo luogo Loria e Peano avevano entrambi studiato a Torino. Anche dopo la chiamata di Loria a Genova conservarono rapporti cordiali, come testimoniato dalla dedica autografa «Al carissimo amico Prof. G. Loria. Ricordo dell'A.» sulla copertina del libro di Peano *Aritmetica generale e algebra elementare* (Torino, Paravia, 1902). Oltre a questo libro nel lascito di Loria ci sono altre opere di Peano; in particolare, egli è uno degli autori più presenti nella collezione di opuscoli di Loria. Una comune caratteristica del loro coinvolgimento nella didattica è l'impegno a tenere i contatti con gli insegnanti. Ciò avvenne, in particolare, attraverso l'attività delle rispettive sezioni locali della *Mathesis*, di cui entrambi furono animatori infaticabili. Tra i matematici del periodo furono tra quelli più coinvolti in questa attività locale, che era la spina dorsale dell'Associazione. Nel 1915 Peano istituì le "Conferenze matematiche torinesi" finalizzate alla discussione di questioni riguardanti le matematiche elementari e ne fu il principale organizzatore fino al 1924. Loria da Genova interagì maggiormente con il comitato centrale, anche nelle discussioni sulla politica scolastica (riforme, formazione insegnanti). Alcuni docenti che gravitavano intorno a entrambi sono figure di rilievo nel mondo scolastico dell'epoca. Insieme a quella di Roma le sezioni di Genova e Torino furono pioniere nel discutere il problema della presenza delle donne come insegnanti.[10] Ciò non sorprende data la relativamente alta presenza di donne in queste sezioni, specialmente a Torino dove molti dei laureati di Peano erano donne.[11]

2. *La «Rivista di Matematica» di Giuseppe Peano e l'insegnamento della matematica*

Il primo volume della *Rivista di Matematica* esce a Torino nel 1891, Peano ne è il direttore fino al 1906, anno di cessazione della pubblicazione. Nell'ultima pagina (non

[10] Cfr. F. Furinghetti, *Il Bollettino della Mathesis dal 1909 al 1920: pulsioni tra temi didattici internazionali e nazionali*, PRISTEM/Storia. Note di matematica, Storia, Cultura, 5, 2002, pp. 31-58. Nel «Bollettino della Mathesis» (VI, 1914, pp. 151-152) si legge che nella prima metà di luglio il Presidente della Mathesis ha presentato al Ministero il voto delle sezioni di Genova, Roma, Torino favorevole all'ammissione delle donne alle cattedre di matematica delle classi inferiori delle scuole medie.

[11] Cfr. C. S. Roero, *Peano e l'altra metà del cielo*, in *Giuseppe Peano. Matematica, cultura e società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001, pp. 60-77.

numerata) del primo volume si dice che essa è pubblicata a spese di Peano, di Francesco Porta, di Filiberto Castellano e di Francesco Porro[12] e, inoltre, che uscirà in fascicoli di almeno 16 pagine con scadenza mensile. La *Rivista* è stampata dalla tipografia dei fratelli Bocca di Torino.[13] Escono in tutto otto volumi: ognuno dei primi cinque contiene i fascicoli usciti in un anno, il sesto comprende i fascicoli degli anni 1896-1899, il settimo degli anni 1900-1901, l'ottavo degli anni 1902-1906.

Come si è detto precedentemente, la ricerca e la didattica della matematica avevano già i loro giornali: tra questi la *Rivista* di Peano ha un ruolo particolare. Quando essa è fondata Peano ha già scritto importanti lavori matematici. Nel 1889 aveva pubblicato la monografia *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Torino, Bocca), nella quale è presentata la sua nota assiomatizzazione dell'aritmetica e viene introdotto il simbolismo logico.[14] Come dice l'autore nel suo celebre libro di testo di aritmetica[15] questo opuscolo «contiene la prima teoria ridotta in simboli»: è iniziato il suo programma che sfocerà nel *Formulario.* In quegli anni cominciava a configurarsi la

[12] Altri matematici condivisero a vario titolo l'impresa peaniana. Per esempio, nel necrologio di Enrico Novarese (La Redazione, II, 1892, p. 35) si dice che questo insegnante piemontese «fu uno dei fondatori della nostra R*ivista di Matematica*».

[13] Il *Formulaire des Mathématiques* inserito nel volume V del 1895 è pubblicato anche da Ch. Clausen di Torino.

[14] Cfr. per esempio I. Grattan-Guinness, *From Weierstrass to Russell: a Peano medley,* in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte,* Torino, 1986, pp. 17-31; M. Segre, *Peano's axioms in their historical context,* «Archive for History of Exact Sciences», 48, 1994, pp. 201-342.

[15] G. Peano, *Aritmetica generale e algebra elementare,* Torino - Roma - Firenze - Milano - Napoli, Paravia, 1902. La citazione è a p. IV.

scuola di ricercatori che gravitarono intorno a Peano. Pur tenendo conto di questi fatti, mi sembra che non si debba vedere la fondazione della *Rivista di Matematica* finalizzata solo alla pubblicazione «of their [mathematicians and logicians around him] research papers».[16] Peano ha in mente non solo la ricerca, ma anche la didattica della matematica. In un mio precedente lavoro[17] sui giornali di didattica della matematica ho incluso la *Rivista* tra essi. Questa inclusione è giustificata in primo luogo dal direttore stesso che scrive nella nota ai lettori (seconda pagina di copertina del primo anno):

> La Rivista di Matematica ha scopo essenzialmente didattico, occupandosi specialmente di perfezionare i metodi di insegnamento. Essa conterrà pure articoli e discussioni riferentisi ai principii fondamentali della scienza, e alla storia delle matematiche; vi avrà parte importante la recensione dei trattati, e di tutte le pubblicazioni che riguardano l'insegnamento.

Ma anche il contenuto del giornale giustifica questa inclusione. In primo luogo nella *Rivista di Matematica* la parola insegnamento è intesa anche come insegnamento universitario[18] ed è ovvio che molti argomenti vicini alla ricerca possono essere ascritti all'ambito dell'insegnamento universitario.

[16] Cfr. Grattan-Guinness 1986 cit. La citazione è a p. 23.

[17] Cfr. Furinghetti, Somaglia 1992 cit.

[18] Invero alcuni articoli trattano specificamente l'insegnamento universitario: E. Pascal, *Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle Università italiane*, «Rivista di Matematica», III, 1893, pp. 170-179; G. Fano, *Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga*, «Rivista di Matematica», IV, 1894, pp. 170-188.

In realtà, la parola è da intendersi anche nella sua accezione generale riguardante tutti i livelli scolari. Peano ha un progetto didattico, che comincia a delinearsi alla fine degli anni 1880, di cui la *Rivista* è già un'emanazione. Questo progetto didattico si intreccia con il suo progetto di ricerca matematica alla luce della convinzione sulla necessità di un rigoroso metodo, attuato mediante l'uso di simboli che precisano la struttura logica delle teorie matematiche[19]. Il progetto didattico peaniano è descritto da Mario Pieri nella recensione del citato trattato di aritmetica del 1902:

> Semplificare e chiarire al possibile tutti i concetti matematici, spogliandoli d'ogni superfluo; organizzare i principî della scienza; colmar lacune di metodo e sanar magagne deduttive inveterate nelle scuole e nei libri; educare negli studiosi l'abito di bene argomentare, promovendo l'uso sistematico di una scrittura ideografica regolata da norme precise e invariabili: questo è, si può dire, lo scopo a cui mira quasi tutta l'opera scientifica di Giuseppe Peano.
> […] Esso [il libro] ha intenti apertamente didattici: la Logica deduttiva, l'Aritmetica generale e l'Algebra elementare vi son fuse in un sol corpo di scienza, mirabilmente organizzato nei rispetti deduttivi, e da potersi con sicurezza additare agli insegnanti ed ai giovani come modello di edifizio speculativo.
> Il maggior contrassegno di originalità vuol essere al certo l'uso costante dell'algoritmo logico-matematico invece del discorso ordinario. Non c'è troppo da illudersi sull'acco-

[19] Per ulteriori considerazioni cfr. P. Freguglia, *Giuseppe Peano e la didattica della matematica*, in W. Di Palma, T. Bovi, S. Maracchia (a cura di), *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis Centenario 1895-1995". Una presenza nella cultura e nell'insegnamento,* Roma, Fratelli Palombi, 1996, pp. 153-155.

> glienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico: ché son troppo noti i motivi, tutti umanissimi e spiegabilissimi, i quali hanno fatto in ogni tempo e faranno sempre ostacolo a certe novità, che toccano la più gelosa delle nostre proprietà intellettuali.[20]

Il trasferimento nella pratica scolastica delle intenzioni peaniane insite in questo trattato di aritmetica presenta difficoltà nell'accettazione da parte dell'insegnante medio, anche se nel 1901 era già uscita la quarta edizione del libro di aritmetica «tutto in simboli, senza parole»[21] di Francesco Gerbaldi. Questo autore era stato incaricato da Valentino Cerruti di scrivere dei libri di testo per le scuole di Roma, poi ufficialmente adottati. Peano stesso si rende conto di queste difficoltà, ma è convinto che conoscere le «questioni filosofico-didattiche» giovi all'insegnamento, anche se non sempre esse possono essere trattate a scuola. Inoltre invita a non temere il rigore. Per Peano «il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili». [22]

L'impegno di Peano riguardo ai libri di testo si collega a questo tipo di rigore, che prevede definizioni giuste e dimostrazioni corrette e non significa che si debba necessariamente introdurre la logica nella scuola secon-

[20] M. Pieri, *Bibliografia*, «Periodico di Matematica», s. II, V, 1903, pp. 293-295. La citazione è a p. 293.

[21] G. Peano, *Sui libri di testo per l'aritmetica nelle scuole elementari*, «Periodico di Matematiche», 1924a, s. IV, IV, pp. 237-242. La citazione è a p. 238.

[22] G. Peano, *Sui fondamenti dell'analisi*, «Bollettino della Mathesis», II, 1910, pp. 31-37. Le citazioni sono a p. 32.

daria, se non nel caso di argomenti specifici.[23] Allo scopo di chiarire la natura degli oggetti matematici anche la storia e l'analisi dell'etimologia delle parole sono presenti negli scritti di Peano.

Ludovico Geymonat,[24] nel discutere il legame tra matematica e filosofia in Italia, delinea il carattere dell'approccio di Peano alla matematica, contrapponendolo a quello di Federigo Enriques:

> Enriques era soprattutto interessato alla dinamica della matematica (alla sua storia, alla psicologia dei suoi protagonisti, ai rapporti fra matematica, pittura e musica, ecc.), e riteneva come tanti altri che lo sforzo compiuto da Peano di precisare con i suoi simboli la struttura logica più profonda delle teorie matematiche finisse soltanto per occultarne l'autentica natura.
> L'incomprensione fra i due era il frutto del carattere antitetico fra le loro posizioni: logico-formalistica quella di Peano, e intuitivo-psicologistica quella di Enriques.

Mi sembra che l'atteggiamento di Peano verso l'insegnamento della matematica si esprima soprattutto nella profonda esigenza di democratizzazione del sapere condivisa anche dai suoi allievi, in particolare da Giovanni

[23] Cfr. G. Peano, *Sulla definizione di limite*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, XLVIII, 1912-1913, pp. 510-532 (numerazione nel lato interno delle pagine: pp. 750-772). L'opportunità di introdurre la logica nella scuola secondaria fu discussa esplicitamente nella riunione della sezione piemontese della Mathesis (13 aprile 1913), cfr. «Bollettino della Mathesis», V, 1913, pp. 49-50.

[24] L. Geymonat, *L'opera di Peano di fronte alla cultura italiana*, in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte*, Torino, 1986, pp. 7-15. La citazione è a p. 13.

Vailati.[25] Questa esigenza era particolarmente sentita nell'ambiente della didattica matematica e proprio la parola democratizzare è usata da Loria[26] a proposito della geometria analitica, che, secondo lui dovrebbe essere messa a disposizione di tutti. Come si vede, due figure di rilievo del periodo recepiscono nel loro ambito di lavoro e cercano di attuare con i mezzi a loro disposizione le istanze sociali del momento storico in cui vivono. Del resto, sono anche i movimenti di pensiero sociale dell'epoca che influenzano la fondazione del *L'Enseignement Mathématique*[27]. La solidarietà di Peano verso la scuola (nelle sue componenti essenziali: chi deve apprendere e chi deve insegnare) si esprime con alcune frasi scritte per inciso nelle sue opere didattiche; in esse si coglie un sottile umorismo che vuol colpire certe pratiche scolastiche:

> Or sono cinquant'anni si insegnava l'aritmetica sotto forma di catechismo. Il maestro domanda «che cosa è il numero?» cui risponde quale eco la voce dolente dell'allievo: «il numero è la riunione di più unità» [...].

[25] Cfr. F. Arzarello, *La scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica*, in A. Guerraggio (a cura di), *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Bologna, Pitagora, 1987, pp. 25-41.

[26] Cfr. G. Loria, *Sur l'enseignement des mathématiques en Italie*, in A. Krazer (herausgegeben vom), *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses*, B.G. Teubner, Leipzig, 1905, pp. 594-602. Successivamente pubblicato con il titolo *Sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie*, «L'Enseignement Mathématique», VII, 1905, pp. 11-20.

[27] F. Furinghetti, *Mathematical instruction in an international perspective: the contribution of the journal L'Enseignement Mathématique*, in D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B.R. Hodgson, G. Schubring (editors), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie n. 39 de «L'Enseignement Mathématique», 2003, pp. 19-46.

> Il problema più comune è «una buona donna spese in zucchero lire tante, e in caffè lire tante. Quanto spese in tutto? […]» Ma questi problemi ripetuti per decine e centinaia di volte, come fanno alcuni testi, finiscono per annoiare, perché non conosciamo quella buona donna.[28]

Peano voleva e sapeva parlare specialmente ai bambini e cercava mezzi idonei ad avvicinarli alla matematica. Da qui la sua fiducia nei giochi, nei problemi presi dalla vita degli studenti, nelle operazioni curiose e 'magiche' con i numeri. Si noti con quanto garbo il prozio Peano spiega con razionalità matematica alla nipotina Lalla Romano (*Una giovinezza inventata*) come si sceglie la castagna da mangiare in un piatto di castagne[29]. Uguale garbo Peano usa nel trattare il celebre problema dell'età del capitano nel suo libretto di giochi matematici (p. 60). Egli mette in risalto che questo famoso problema, considerato dal filosofo-matematico Richard un esempio di problema insolubile, ha, in realtà, le caratteristiche della maggior parte dei problemi che si presentano nella vita quotidiana.

Il manifesto dell'atteggiamento solidale e costruttivo di Peano verso la scuola (qui, in particolare, gli insegnanti) è il celebre brano che conclude il libretto sui giochi:

> L'insegnante di buona volontà potrà combinare problemi simili e migliori dei precedenti, onde rendere attraente lo studio.
> La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta

[28] Cfr. Peano 1924a cit. Le citazioni sono a pp. 237-238, a. p. 239.

[29] Secondo Peano si deve sempre scegliere la castagna più bella, così fino all'ultima castagna del piatto si avrà la castagna migliore tra quelle a disposizione.

> solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal pianga se stesso. Così disse Giove, e lo riferisce Omero, *Odissea* I, 34. Con questi principi, caro lettore e collega, vivrai felice.[30]

La solidarietà di Peano verso gli insegnanti si espresse anche nel fare il lavoro utilitaristico di preparare coloro che seguivano il suo corso di Matematiche Complementari alle prove di concorso. Aldo Ghizzetti dice che presentava il fatto agli studenti dicendo che avrebbe insegnato loro «a trasformare la matematica in pane».[31]

Una testimonianza di prima mano del legame partecipativo di Peano con il mondo della scuola è nella nota che Alberto Conti aggiunse al necrologio scritto da Alpinolo Natucci.[32] Conti dice di averlo conosciuto nel 1901

[30] G. Peano, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Torino-Milano-Firenze-Roma-Napoli-Palermo, G.B. Paravia & c., 1924b. Le citazioni sono a p. 60 e p. 63 (la conclusione).

[31] A. Ghizzetti, *I contributi di Peano all'analisi matematica*, in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte*, Torino, 1986, pp. 45-59. La citazione è a p. 45.

[32] A. Natucci, I*n memoria di Giuseppe Peano*, «Il Bollettino di Matematica», n. s., XI, 1932, pp. 52-56. La citazione è a p. 52. Natucci si definisce «l'ultimo dei suoi discepoli» (p. 54).

al II Congresso promosso dall'antica *Mathesis* a Livorno. Lo trovò sensibile e affabile e «dava un forte incoraggiamento a chi si occupava di modeste questioni scientifico-didattiche». Peano appoggiò Conti nell'impresa di gestire *Il Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali* (per studenti delle scuole normali e maestri) e poi *Il Bollettino di Matematica.* Contribuì al primo di questi giornali e, per quanto riguarda il secondo, come riconosce Conti stesso, collaborò fino alla sua morte in vario modo, specialmente con lettere, commenti e segnalazioni. Peano scrisse anche su altri giornali di didattica della matematica.

3. *Temi sviluppati nella «Rivista di Matematica» di Giuseppe Peano*

Nella *Rivista di matematica* sono pubblicati articoli (originali o traduzioni), recensioni, questioni proposte (di cui sono pubblicate poche risposte), lettere alla redazione, rapporti sull'insegnamento della matematica nelle università, notizie di varia natura (inclusi necrologi) concernenti per lo più il mondo della ricerca matematica.[33] Il tono della *Rivista* cambia dopo i primi anni: scompaiono le questioni, i necrologi, scompaiono le recensioni dei trattati, la rosa degli autori si va restringendo quasi esclusivamente agli adepti della scuola di Peano. A grandi linee si può dire che il volume di svolta è il 1896-1899 (tome VI): il titolo diventa *Revue de mathématiques* e la lingua del frontespizio è il francese,

[33] Per ulteriori informazioni si veda Furinghetti, Somaglia 1992 cit.

sebbene ci siano ancora articoli di autori italiani scritti in italiano. Questa svolta è segnata anche dal fatto che nel volume precedente (V, 1895) è pubblicato l'indice dei primi cinque volumi. Nel volume VIII (1902-1906) la copertina e la maggior parte degli articoli sono nella lingua internazionale di Peano[34], alla quale egli dedica due contributi in questo volume.

Tra gli autori troviamo Gustaf Eneström (per le addizioni al *Formulario*), Bertrand Russell (per la teoria delle serie ben ordinate secondo la notazione di Peano), Georg Cantor, Gottlob Frege, Philip Jourdain, Rudolf Mehmke, Otto Stolz. Tra gli italiani i collaboratori più assidui sono Peano, Cesare Burali-Forti, Giovanni Vailati, Giulio Vivanti. Troviamo inoltre Alessandro Padoa, Giovanni Vacca, Francesco Giudice (già autore di contributi anche nella *Rivista di Matematica Elementare*), Rodolfo Bettazzi e Giulio Lazzeri (protagonisti importanti nella vita del *Periodico di Matematica*), nonché personaggi di rilievo nella matematica dell'epoca quali Federico Amodeo, Giulio Ascoli, Giuseppe Bagnera, Eugenio Bertini, Alfredo Capelli, Ernesto Cesaro, Gino Fano, Antonio Favaro, Giacinto Morera, Ernesto Pascal, Pieri, Salvatore Pincherle, Corrado Segre, Filippo Sibirani, Volterra.

Gli articoli si collocano nelle varie branche della matematica. È preponderante il ruolo della logica e di temi legati ai fondamenti. In effetti, come dice Geymonat[35] «le indagini di Peano, anche quelle di carattere prettamente matematico, vertevano sempre su questioni di principio (per così dire filosofiche)». Nel primo

[34] C.S. Roero, *I matematici e la lingua internazionale*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, 1999, II-A, pp. 159-182.

[35] Cfr. Geymonat 1986 cit. La citazione è a p. 12.

volume a conclusione del suo articolo *Sul concetto di numero*[36] Peano lancia l'idea di «raccogliere tutte le proposizioni note, che si riferiscono a certi punti della matematica, e pubblicare queste raccolte. Limitandoci a quelle dell'aritmetica, non credo si possa trovare difficoltà ad esprimerle in simboli logici». A partire dal secondo volume[37] (1892) comincia la pubblicazione di «una raccolta di formule» separata dalla rivista (numerazione a parte), ma distribuita gratuitamente agli abbonati. La Redazione scrive[38] che usando le formule si faciliterà la ricerca e il confronto di teoremi. Si fa anche un appello ai lettori perché inviino aggiunte, osservazioni e correzioni. In questo volume si parla della raccolta anche alle pagine 76-77 e 112. Nel volume terzo compaiono varie note sulla raccolta e, infine, un annesso di 56 pagine contenenti i primi quattro capitoli del *Formulario*[39]. Nei volumi successivi prosegue la pubblicazione di questi annessi e le aggiunte e i commenti al *Formulario* scritti da membri della scuola di Peano e da altri matematici.

[36] «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 256-267. La citazione è a pp. 266-267.

[37] Già nel volume primo Peano aveva scritto su "Formole di Logica Matematica" (1891, pp. 24-31).

[38] A p. 1 della raccolta di formule annessa al volume II, 1892, numero di marzo.

[39] Questo formulario ebbe varie edizioni in italiano, francese e nella lingua internazionale di Peano. Cfr. U. Cassina, *Storia ed analisi del «Formulario completo» di Peano*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», s. III, X, 1955, pp. 244-265; pp. 544-574; U. Cassina, *Sul «Formulario mathematico» di Peano*, in U. Cassina, *Critica dei principî della matematica e questioni di logica*, Roma, Edizioni Cremonese, 1961, pp. 371-401.

Nel quinto volume del 1895 ci sono testimonianze del contatto con Cantor in quell'anno;[40] sono anche pubblicati un ampio stralcio della lettera di Cantor a Vivanti, la lettera a Peano di commento al libro di Giuseppe Veronese sui fondamenti della geometria da poco tradotto in tedesco (Lipsia, B.G. Teubner, 1894),[41] la traduzione di Gerbaldi dell'articolo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (apparso quello stesso anno nei *Mathematische Annalen* XLVI, pp. 481-512).[42] L'Autore stesso aveva chiesto che fosse pubblicato da Peano in una lettera a lui indirizzata il 27 luglio 1895[43].

Nella *Rivista* c'è anche traccia di contatti tra Peano e Frege.[44] Nel volume quinto è pubblicata la recensione[45] fatta da Peano del libro di Frege *Grundgesetze der Arithmetik.* Peano è interessato al confronto tra la notazione fregiana e quella del suo *Formulario.* Sono pubblicate

[40] Lo scambio di messaggi tra Cantor, Vivanti e Peano, è descritto in H.C. Kennedy, *Peano, life and works of Giuseppe Peano,* Dordrecht-Boston-London, Reidel, 1980, pp. 61-63. (in italiano: *Peano, storia di un matematico,* Torino, P. Boringhieri, 1983).

[41] Cfr. «Rivista di Matematica», V, 1895: lettera a Vivanti pp. 104-108; lettera a Peano pp. 108-109. Sul libro di Veronese *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (Padova, Tipografia del Seminario, 1891) Peano aveva scritto una lettera polemica all'autore nella «Rivista di Matematica» (I, 1891, pp. 267-269) e la recensione del libro (II, 1892, pp. 143-144).

[42] G. Cantor, *Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti,* «Rivista di Matematica», V, 1895, pp. 129-162.

[43] Notizia in Kennedy 1980 cit., p. 62.

[44] Per una descrizione più completa del contatto Frege-Peano cfr. Kennedy 1980 cit., pp. 72-77.

[45] Cfr. G. Peano, *D r G. Frege - Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Erste Band, Jena, 1893, pag. XXXII+254,* «Rivista di Matematica», V, 1895, pp. 122-128.

sia la reazione di Frege alla recensione, sia la risposta di Peano.[46] L'oggetto di questi scritti sono le notazioni. Kennedy[47] sottolinea che «Frege rightly concluded in his 1896 letter that their aims in creating an ideography were distinct. Frege's goal was an investigation into the foundations of mathematics. Peano wished to create a symbolism that would be adequate for expressing mathematical theories».[48]

Per quanto riguarda gli altri argomenti trattati nella *Rivista di Matematica*, negli articoli si osserva una lieve prevalenza della geometria, trattata quasi esclusivamente dal punto di vista del problema dei fondamenti. Rispetto al contemporaneo *Periodico di Matematica*, nella *Rivista* di Peano si percepisce un maggior contatto con la ricerca matematica (specialmente quella vicina agli interessi del suo direttore) e ciò permette di focalizzare l'attenzione su argomenti come l'analisi infinitesimale, di cui ancora nel 1905 Loria lamenta l'assenza nella scuola.[49] Per esempio, segnalo nel volume IV del 1894 le recensioni del libro di analisi di Cesaro fatta da Giudice e di quello sul concetto di infinitesimo di Vivanti fatta da Loria, che non sono recensiti nel *Periodico*. L'algebra, in particolare la teoria delle equazioni algebriche, è trattata in alcuni contributi interessanti, non a livello elementare. Nel secondo volume Capelli pubblica un articolo sui sistemi di

[46] G. Frege, *Lettera del sig. G. Frege all'editore*, «Rivista di Matematica», VI, 1896-1899, pp. 53-59.

G. Peano, *Risposta*, «Rivista di Matematica», VI, 1896-1899, pp. 60-61.

[47] Cfr. Kennedy 1980 cit. La citazione è a p. 77.

[48] Cfr. anche G. Peano, *Formules de logique mathématique*, «Rivista di Matematica», VII, 1900-1901, pp. 1-41.

[49] Cfr. Loria 1905 cit.

equazioni di primo grado a più incognite. La storia della matematica compare abbastanza costantemente, seppur in porzione limitata, nella *Rivista*. Loria vi pubblicò il suo ampio lavoro storico-critico sul teorema fondamentale dell'algebra,[50] sviluppato a partire da quello che può esser considerato il suo primo lavoro storico.[51]

La *Rivista* è un giornale interattivo. A parte la corrispondenza tra vari autori, le recensioni (sempre curate nella scelta del testo da recensire e nello svolgimento della recensione) furono talvolta l'occasione per instaurare un dialogo a distanza tra i matematici interessati a un dato argomento. Questo dialogo è talvolta condotto con correttezza, seppure nella fermezza delle proprie opinioni, come nel caso della discussione sul concetto di infinitesimo attuale che vede come interlocutori Vivanti e Bettazzi.[52] Con garbo è condotto da Loria lo scambio di vedute sulla scuola napoletana. Egli replica alle critiche mosse da Pascal al suo lavoro *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*, pubblicato negli Atti della R. Università di Genova dell'anno 1892, difendendo non solo il saggio in questione, ma anche la specificità del suo

[50] G. Loria, *Il teorema fondamentale della Teoria delle equazioni algebriche*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 185-248. Aggiunte a questo articolo sono nei volumi II (1892, pp. 37-38) e III (1893, pp. 105-108).

[51] G. Loria, *Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques*, «Acta Mathematica», 9, 1887, pp. 71-72. Scritto a Mantova con data 15 luglio 1886.

[52] G. Vivanti, *Sull'infinitesimo attuale*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 135-153; R. Bettazzi, *Osservazioni sopra l'articolo del Dr G. Vivanti Sull'infinitesimo attuale*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 174-182; G. Vivanti, *Ancora sull'infinitesimo attuale*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 248-255; R. Bettazzi, *Sull'infinitesimo attuale*, «Rivista di Matematica», II, 1892, pp. 38-41.

lavoro di storico. Nel fare questo esplicita la sua visione dell'investigazione storica:

> io ritengo come una delle regole fondamentali di ogni ricerca destinata a determinare l'influenza di un uomo, quella di studiare anzitutto lo stato delle cognizioni prima della sua comparsa per poi dedurre come e quanto egli modificò il suo ambiente. […] mi sembra che l'egregio mio contraddittore ne abbia adottata una diametralmente opposta, quella cioè di paragonare le azioni di uno scienziato all'opera di quelli che vennero dopo di lui o di coloro che in altri luoghi e sotto l'impero di altre circostanze fecero più e meglio di lui.[53]

È decisamente acido e sarcastico invece lo scambio di opinioni tra Lazzeri e Michele Gremigni a proposito degli *Elementi* curati da quest'ultimo[54]. L'edizione in questione appare un quarto di secolo dopo gli *Elementi* curati da Betti e Brioschi che «hanno continuato a dominare invariati nelle nostre scuole con gli stessi difetti, con le

[53] E. Pascal, *A proposito di un libro del prof. Gino Loria sulla Scuola Napoletana di Matematica nella prima metà del secolo*, «Rivista di Matematica», II, 1892, pp. 179-186; G. Loria, *Pro veritate. Risposta alle «Osservazioni» del prof. E. Pascal*, «Rivista di Matematica,» III, 1893, pp. 6-15. La citazione è a p. 8.

[54] G. Lazzeri, *Gli Elementi di Euclide. – Nuova edizione modificata ed accresciuta dal Dott. Michele Gremigni. Libro I. - Firenze, Successori Le Monnier, 1893* (sic), «Rivista di Matematica», II, 1892, pp. 188-191. La citazione è a p. 189; M. Gremigni, *A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche*, «Rivista di Matematica», III, 1893, pp. 64-73; G. Lazzeri, *Sulla seconda edizione degli «Elementi di Euclide»*, «Rivista di Matematica», III, 1893, pp. 121-127; M. Gremigni, *A difesa della seconda edizione degli «Elementi di Euclide». Altra risposta al Prof. Lazzeri*, «Rivista di Matematica», IV, 1894, pp. 17-21.

stesse figure brutte e spesso sbagliate, senza migliorarsi mai, non tenendo alcun conto dei progressi fatti in questo tempo negli studi geometrici elementari». L'autore, dice Lazzeri a conclusione della recensione, è un «minor geometra italiano»; il recensore è il futuro direttore del *Periodico di Matematica* e autore con Anselmo Bassani dell'apprezzato libro di geometria fusionista *Elementi di geometria* (Livorno, Giusti, 1891). Forse il motivo soggiacente la controversia è proprio la critica alla fusione della geometria piana e solida, fatta nel libro di Gremigni. Questa critica, fondata o non fondata, non poteva non indispettire Lazzeri.

Gli articoli propriamente di didattica sono pochi relativamente all'intento espresso nella presentazione della *Rivista* che ho riportato precedentemente. Anche autori come Vailati, che altrove hanno pubblicato scritti importanti in questo campo,[55] si occupano prevalentemente di argomenti di ricerca. In alcuni articoli e recensioni si trovano, però, significative considerazioni su temi didattici da parte del direttore e di altri autori, da cui si percepiscono le idee sull'insegnamento della matematica di Peano e della sua scuola.[56]

La *Rivista* è un'emanazione diretta della personalità del direttore e col passare degli anni diventa sempre più destinata a diffonderne le teorie. In particolare, come si è detto, nella *Rivista* si ritrova la concezione peaniana della matematica centrata sul rigore. Questa concezione, a cui egli informa la sua ricerca, è alla base del *Formulario*

[55] Cfr. L. Giacardi, *Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, II-A, 1999, pp. 317–352.

[56] Cfr. Arzarello 1987 cit.

ed è trasferita nel campo della didattica. Emerge dagli articoli della *Rivista* l'idea che perfezionare i metodi di insegnamento per Peano voglia dire chiarire definizioni e assiomi, utilizzare un linguaggio matematico ripulito dalle ambiguità del linguaggio ordinario.

Nella letteratura matematica di quegli anni era particolarmente vivo il dibattito sul tema della contrapposizione tra intuizione e rigore, tema che era anche alla base di accese polemiche personali. Nel campo della ricerca un esempio di questa polemica è il noto articolo di Segre sul suo metodo di indagine matematica, cui Peano risponde con le sue osservazioni.[57]

La critica riguardo al rigore investì altri matematici del tempo; per esempio, nel necrologio di Battaglini scritto da Gabriele Torelli si legge:

> Non taccio che i procedimenti, di cui in detti trattati [di Battaglini] si fa uso, han suscitato qualche censura per difetto di rigore. Ma il Battaglini s'accostava all'opinione di quelli, che ritengono essere utilissimo fornire anche ai giovani dei metodi di ricerca potenti quantunque non del tutto rigorosi. […] per tale via assicureremo spesso la conquista più prontamente che se fin dal principio avessimo proceduto coi piedi di piombo dell'assoluto rigore.[58]

Questo dibattito si collega all'interesse dei matematici di fine dell'Ottocento e oltre intorno alla natura dell'inve-

[57] G. Peano, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 66-69; C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 42-66.

[58] G. Torelli, *Giuseppe Battaglini*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», VIII, parte I, 1894, pp. 180-186. La citazione è a pp. 185-186.

stigazione matematica. Sono noti i contributi su questo tema di Henri Poincaré e di Felix Klein. Di quest'ultimo riporto alcuni passi che possono essere riferiti anche all'insegnamento ed hanno il pregio di essere esenti dai riferimenti personali che caratterizzano certi contributi italiani:[59]

> D'altra parte, debbo pure accentuare nel modo più esplicito […] che la matematica non è per nulla esauribile colla deduzione logica, bensì che accanto ad essa l'intuizione conserva ancora oggidì la sua piena e specifica efficacia.
> […] Or bene, io dico che l'intuizione matematica [...] precede sempre, nella sua sfera, la deduzione logica e che in ogni momento essa abbraccia un campo più vasto di questa.
> […] In tutti questi casi [casi storici di ricerche matematiche affrontate inizialmente per via intuitiva] si tratta, se vogliamo esprimere la cosa con il linguaggio dell'analisi, di una specie di interpolazione, in cui è dato minore peso alla precisione dei risultati che alla considerazione delle condizioni generali della questione. Tengo anzi a far notare espressamente che quando noi stabiliamo le nostre leggi naturali, od in generale quando ci sforziamo di formulare matematicamente qualunque fatto esterno, facciamo uso di una simile sorta di interpolazione, che ha per effetto di porre in evidenza, fra la moltitudine delle perturbazioni accidentali, le relazioni più semplici fra le quantità essenziali. Ciò non è altro, in conclusione, che quanto ho indicato più sopra come processo di idealizzazione. La riflessione logica

[59] F. Klein, *Sullo spirito aritmetico nella matematica*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», X, parte I, 1896, pp. 107-117, dalle *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mittheilungen*, 1895, Heft 2; traduzione di Salvatore Pincherle. Le citazioni sono a p. 109, a p. 113, a pp. 114-115, a p. 115.

riprende i suoi diritti solo quando questa idealizzazione è stata compiuta dalla intuizione.

Klein si rende conto che l'idea dell'intuizione alla base delle ricerche matematiche serve «descrivere quanto avviene in realtà» piuttosto che «a spiegare» ed infatti aggiunge che «forse che un giorno otterremo, coi progressi della fisiologia e della psicologia sperimentale, nozioni più esatte sull'intima natura dei procedimenti che conducono dalla intuizione alla facoltà di connetterla logicamente».

Osservo che quando la contrapposizione tra intuizione e rigore riguarda la scuola ci sono due possibili posizioni: mettere la purezza matematica al centro del processo didattico e chiedere all'alunno di adattarsi ad essa oppure mettere l'alunno al centro del processo ed esplorare le possibili mediazioni del sapere matematico. Nella seconda metà dell'Ottocento alcuni matematici (per esempio, Luigi Cremona), per varie ragioni, avevano scelto la prima strada, non senza suscitare critiche nel mondo della scuola. Peano e i suoi allievi cercano di avvicinarsi alla seconda posizione:[60] riconoscono che si

[60] Si noti che, come osserva Charles Godfrey nel suo resoconto dell'importante convegno C.I.E.M. di Milano del 1911, in Italia il concetto di rigore era cambiato dai tempi dell'edizione degli *Elementi* del 1868. Secondo lui per gli italiani rigore non significava Euclide, ma Peano e Hilbert, mentre in Germania si faceva un ampio uso dell'intuizione e la matematica rigorosa era relegata all'Università. Su questo punto si veda: C. Godfrey, *On the work of the International Commission on Mathematical Teaching*, «The Mathematical Gazette», VI, 97, 1912, pp. 243-246; cfr. anche A.G. Howson, *A history of mathematics education in England*, Cambridge - London - New York - New Rochelle - Melbourne - Sydney, Cambridge University Press, 1982.

debbono fare concessioni all'opportunità didattica, pur senza abdicare alle loro idee di fondo. Si può riassumere questa posizione con le parole di Burali-Forti[61] che, commentando una recensione a un libro di aritmetica fatta da Giovanni Frattini nel *Periodico di Matematica,* intravede un possibile dubbio suscitato nel lettore:

> se queste savie concessioni debbano essere *limitate* ad accettare dall'intuizione più di quello che ad essa scientificamente possa domandarsi, o se possano *estendersi* alle definizioni o anche *a quegli schiarimenti che prendono forma di definizione.* Nel primo caso sono vere e proprie concessioni che la scienza non può esimersi dal fare alla didattica; nel secondo caso però sono inesattezze molto dannose in un libro elementare [...].

Come impressione generale mi sembra che l'interesse della *Rivista* di Peano nel campo dell'insegnamento preuniversitario sia da ricercarsi da un lato nell'impegno a chiarire alcune nozioni di base alla luce di un approccio rigoroso, dall'altro nella consapevolezza della necessità di mediare le proprie esigenze di ricercatore con le esigenze dell'alunno. Indubbiamente il primo aspetto è prevalente nei vari contributi pubblicati nel giornale e ciò poteva risultare sconcertante per un'insegnante medio (pur ricordando che talvolta gli insegnanti di quel tempo avevano una notevole preparazione matematica). Comunque, anche se la *Rivista* non risulta del tutto rispondente allo scopo che il direttore si era prefisso, essa offre al lettore attuale un interessante esempio di come il problema dell'insegnamento fu interpretato da un ma-

[61] C. Burali-Forti, *Sopra una recensione agli «Elementi di Aritmetica del Prof. S. Pincherle»*, «Rivista di Matematica», I, 1891, pp. 120-121. La citazione è a p. 120.

tematico di rilievo e dalla sua scuola. La *Rivista* è un'ulteriore testimonianza del filo conduttore[62] nell'opera di Peano «costituito dalla strenua e costante difesa della funzione e del potere della ragione, contro tutte le forme di irrazionalismo, anche le più subdole».

Percepiamo qualcosa di utopico[63] nell'atteggiamento di Peano verso la didattica, di cui egli è prigioniero e che gli diede problemi nel suo insegnamento universitario. C'è una sorta di scollamento fra la percezione chiara che egli ha di alcuni problemi dell'insegnamento della matematica e la realtà della scuola e dell'università. I ricordi del suo allievo Cassina[64] ci fanno intuire le difficoltà che le idee liberali di Peano riguardo agli esami di profitto incontrarono nell'applicazione pratica al suo corso. Ma percepiamo in Peano, al di là di certi eccessi del suo progetto logico-fondazionale, vicinanza e solidarietà nei confronti dei problemi degli insegnanti. Per questo aspetto, oltre che per la cambiata concezione di rigore, il suo atteggiamento didattico appare diverso da quello di alcuni famosi matematici della seconda metà dell'Ottocento.

4. *La nascita del «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche»*

Alla fine del XIX secolo la storia della matematica stava acquistando una sua autonomia come branca della mate-

[62] Cfr. Geymonat 1986 cit. La citazione è a p. 15.

[63] Intriso di utopia fu anche il suo progetto di internazionalismo linguistico.

[64] U. Cassina, *Su l'opera filosofica e didattica di G. Peano*, in U. Cassina, *Critica dei principî della matematica e questioni di logica*, Roma, Edizioni Cremonese, 1961, pp. 343-357.

matica, seppure con qualche difficoltà di identità.[65] Essa compare nella classificazione del *Fortschritte* (associata alla filosofia), erano già stati pubblicati o erano in fase di elaborazione importanti trattati di storia, corsi di storia della matematica erano tenuti in varie università. Nel 1884 era stato fondato da Eneström il giornale *Bibliotheca Mathematica*. Inizialmente esso conteneva liste bibliografiche di scritti recenti sulla matematica e, inoltre, note e articoli riguardanti la storia della matematica. Poiché la parte storica risultava sacrificata, nel 1887 Eneström aveva varato la nuova serie dedicata esclusivamente alla storia.

In Italia esisteva un'importante tradizione di studi storici,[66] alla cui affermazione aveva contribuito il *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, pubblicato a Roma dal 1868 al 1887 (20 volumi) a cura del principe Baldassarre Boncompagni. Dal 1878 Favaro[67] aveva iniziato a tenere corsi liberi di storia nell'Uni-

[65] Favaro aveva criticato la classificazione delle matematiche per il periodo dal 1800 al 1889 adottata dalla Commissione permanente istituita dal Congresso Internazionale di Bibliografia delle Scienze Matematiche tenutosi a Parigi nel 1889. La storia e la bibliografia, infatti, erano state poste tra le matematiche applicate. Cfr. F. Barbieri, *Il contributo di Pietro Riccardi alla storiografia matematica*, in F. Barbieri, F. Cattelani Degani (a cura di), *Atti del convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia"*, Modena, Università degli Studi di Modena, 1989, pp. 47-66.

[66] Cfr. F. Barbieri, F. Cattelani Degani (a cura di), *Atti del convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia"*, Bologna, Pitagora, 1989; A. Favaro, *Studi italiani di storia della matematica*, «Bibliotheca Mathematica», n. s., 6, 1892, pp. 67-84.

[67] A. Favaro, *Otto anni d'insegnamento di Storia delle Matematiche nella R. Università di Padova*, «Bibliotheca Mathematica», n. s., 1, 1887, pp. 49-54.

versità di Padova e dal 1890 si occupava dell'edizione dell'opera di Galileo.

Anche nel mondo della scuola c'era un notevole interesse per la storia. Il giornale per studenti *Il Pitagora*, pubblicato dal 1895, è fortemente intriso di aspetti divulgativi e didattici della storia. In una circolare spedita a colleghi e studiosi nel novembre 1894 Gaetano Fazzari aveva delineato la linea editoriale del giornale ed elencato tra i contenuti previsti (p. 2): «qualche pagina dei sommi matematici antichi». Il ruolo di rilievo della storia è sottolineato nel seguente passaggio della presentazione de *Il Pitagora*:

> Convinto poi che di non poco vantaggio può tornare ai giovani la conoscenza della storia delle matematiche, il *Pitagora* cercherà di esporre loro le ricerche e gli studi, cui da ogni parte da non molto in qua vanno tendendo gli sforzi dei cultori di tale scienza. E chi non vede quanto ciò giovi non solo dal lato pedagogico, ma e soprattutto da quello scientifico e storico? Difatti, nessuno può mettere in dubbio che ogni erudizione, secondo il processo conoscitivo, dev'essere una storia prima di diventare una scienza. Così l'erudizione, centro che unisce la critica all'ermeneutica, è il primo istrumento per la intelligenza dei classici greci e latini. L'erudizione, insomma, è senza dubbio per l'umano sapere della più alta importanza, come quella che ci rende presenti i secoli e ci associa alle generazioni passate. Inoltre nessun giovane che esce dai nostri istituti d'istruzione media dovrebbe ignorare quale posto occupano nella storia delle civiltà Talete, Pitagora, Euclide, Archimede, ecc. e specialmente i matematici italiani che dal XIII al XVI secolo furono i continuatori della scienza greca, accrescendola non solo in modo meraviglioso, ma divulgandola per l'intera Europa.[68]

[68] «Il Pitagora», I, n. 1, 1895, p. 1. Un'altra testimonianza dell'interesse didattico della storia è proprio nel *Bollettino* di Loria, dove è

In quel periodo era anche notevole l'interesse per la storia da parte di alcuni matematici. Come è rilevato anche da Eneström,[69] nell'Ottocento si svilupparono studi sull'evoluzione della matematica di quel secolo, sullo stato dell'arte della ricerca e su biografie scientifiche. Alcuni di questi lavori erano ispirati solo parzialmente da un interesse storico, piuttosto essi erano funzionali a creare un efficiente contesto per la ricerca matematica: infatti, informando sulle tappe significative dello sviluppo di una teoria contribuivano a delineare possibili temi di ricerca. Spesso gli autori di queste panoramiche erano famosi matematici e l'occasione per scriverle era fornita da celebrazioni o necrologi. Eneström (1887) ne cita alcune come esemplari, tra queste la commemorazione scritta da Clebsch per Plücker, tradotta in italiano da Eugenio Beltrami.[70] Si tratta, nelle parole del traduttore, «di una coscienziosa biografia [...], la quale è al tempo stesso un bel lavoro di critica scientifica» meritevole «d'esser fatta conoscere ai giovani lettori». Nell'introduzione Beltrami scrive:

> Veggano soprattutto i giovani quanto studio abbia dovuto spendere sulle opere di Plücker quell'eminente geometra che fu il Clebsch, e imparino da lui ad educarsi di buon'ora sui capolavori dei grandi maestri, anziché isterilire l'ingegno in perpetue esercitazioni da scuola che a nulla appro-

pubblicata (1897, p. 12) la recensione di un libro di storia dell'algebra (autore M. Sasso) diretto agli studenti.

[69] Cfr. G. Eneström, *Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques*, «Bibliotheca Mathematica», n. s., 1, 1887, pp. 3-7.

[70] A. Clebsch, *Commemorazione di Giulio Plücker*, «Giornale di Matematiche», XI, 1873, pp. 153-179 (con introduzione e traduzione di E. Beltrami).

dano, fuorché a creare una nuova Arcadia, ove l'indolenza è velata sotto le forme dell'operosità: vecchio difetto italiano, già deplorato dal Paoli. Coi forti studii sui grandi modelli si son fatti in ogni tempo i valenti; e con essi dee farsi la nostra nuova generazione scientifica, se vuol esser degna dei tempi a cui nacque e delle lotte a cui è destinata.[71]

Prima della nascita del *Bollettino* di Loria l'interesse di alcuni matematici italiani per la storia è testimoniato anche dal fatto che nei giornali non di storia elencati nell'Appendice 1 si trovano, accanto alle panoramiche storiche che potevano essere funzionali alla ricerca matematica, contributi che erano il frutto di una vera e propria ricerca storica.

Nel *Giornale di Matematiche*, che aveva la finalità esplicitamente dichiarata di avviare agli studi avanzati in matematica, gli scritti storici pubblicati sono da ascriversi soprattutto al filone delle panoramiche, funzionali a perseguire la finalità del giornale.[72] Gli *Annali di Matematica Pura ed Applicata* pubblicarono commemorazioni e necrologi, ma anche veri e propri articoli storici di autori italiani e stranieri.[73] I *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* pubblicarono più che altro commemorazioni e necrologi, in genere traduzioni di testi pubblicati altrove.

Come si vede, il contesto (nazionale e internazionale) era favorevole alla nascita di un giornale di storia che

[71] Clebsch 1873 cit.. La citazione è a p. 153.

[72] Un'eccezione a questa regola è l'articolo storico di Loria *Studi intorno alla logistica greco-egiziana* (s. II, I, 1894, pp. 28-57).

[73] Cfr. L. Martini, *The politics of unification: Barnaba Tortolini and the publication of research mathematics in Italy, 1850-1865*, in R. Franci, P. Pagli, A. Simi (a cura di), *Il sogno di Galois*, Siena, Centro Studi della Matematica Medioevale, 2003, pp. 171-198.

continuasse la tradizione di Boncompagni e rispondesse a esigenze culturali serpeggianti nella comunità matematica. Non sorprende che questa nascita sia dovuta a Loria.[74] A Torino, dove aveva studiato e iniziato la carriera, c'erano Genocchi e Enrico D'Ovidio, che amavano inserire nei loro lavori cenni di storia. Genocchi era autore di note storiche pubblicate negli *Annali*. Peano aveva considerato la storia tra i temi che interessavano la sua *Rivista*.

Alla fine del secolo Loria aveva già scritto alcune opere orientate alla storia[75] pubblicate in Italia e all'estero. Inoltre, come si vede dalla conferenza tenuta nel 1898 al primo congresso della *Mathesis* di Torino, egli attribuiva alla storia un ruolo specifico nell'insegnamento

[74] Per notizie sulla vita di Loria si vedano: A. Natucci, *In memoria di Gino Loria*, «Archimede», VI, 1954, pp. 81-84; A. Terracini, *Commemorazione del socio Gino Loria*, «Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali», s. VIII, XVII, 2° sem., 1954, pp. 402-421; E.G. Togliatti, *Necrologio. Gino Loria*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», s. III, IX, 1954, pp. 115-118; L. Giacardi, *Gino Loria*, in C. S. Roero (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, Deputazione subalpina di storia patria, Torino, 1999, vol. II, pp. 520-525.

[75] Nell'*Introduzione* del suo libro *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (Milano, Hoepli, 1914) Loria racconta che nel 1889 un suggerimento di Beltrami aveva incoraggiato la sua vocazione di storico. Su Loria storico si veda: L. Pepe, *Gino Loria e i suoi 'assidui studi' di storia delle matematiche*, in F. Mercanti, L. Tallini (a cura di), *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica*, Mantova, Consorzio Universitario Mantovano, 2001, pp. 227-234; S. Di Sieno, M. Galuzzi, *La storia delle matematiche in Italia fra le due guerre mondiali e il 'Periodico di Matematiche'*, in L. Carbone, A. Guerraggio (a cura di), *Aspetti della matematica italiana del Novecento*, Napoli, La città del sole, 1995, pp. 25-68.

della matematica.[76] Per Loria la storia è l'anello di congiunzione tra la matematica appresa all'Università e la matematica che l'insegnante deve insegnare. Le sue idee sono in linea con quelle espresse da Klein, Florian Cajori e altri sulla relazione tra la storia e la formazione degli insegnanti: essa può servire a far riflettere sugli aspetti avanzati dei concetti elementari. Nello stesso tempo il trattato di Loria sulla storia delle teorie geometriche è un tentativo di fare della storia l'anello di congiunzione tra la matematica appresa all'Università e la ricerca.

Ma non è solo la dimensione storica che caratterizza il ruolo di Loria nella comunità matematica dell'epoca e che segna, in parte, lo stile del giornale. Loria ha un posto di rilievo nella comunità internazionale anche per il suo impegno nello sviluppo dell'istruzione matematica. Questo impegno si realizza nei vari aspetti che riguardano la didattica della matematica.

Sui contenuti egli è aperto all'innovazione e recepisce il messaggio del Programma di Merano di Klein per quello che riguarda l'introduzione della funzione, l'uso dei grafici, la geometria analitica nell'insegnamento secondario italiano. Nella sua conferenza al convegno mondiale dei matematici a Heidelberg,[77] Loria ci ha lasciato un quadro della situazione scolastica della matematica (programmi, libri di testo,...) all'inizio del secolo. Egli dichiara di limitarsi a «faire un revue rapide des problèmes pédagogiques relatifs aux sciences exactes, qui ont été discutés ou résolus de nos jours dans mon

[76] Cfr. G. Loria, *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario,* «Periodico di Matematica», s. II, I, 1899, pp. 19-33.

[77] Cfr. Loria 1905 cit. La citazione è a p. 595.

pays», avendo preso atto che i più significativi problemi dell'insegnamento della matematica del momento sono già stati trattati nel congresso da due importanti didatti della matematica (Klein e John Perry).

Per quello che riguarda la geometria Loria si era inserito nella polemica su Euclide che aveva percorso la seconda metà del XIX in Gran Bretagna e aveva avuto risonanza nel *Giornale di Battaglini.* Il suo tono è lieve, come è nella natura del personaggio, ma l'intervento è incisivo, tanto che le sue note sono pubblicate anche in Gran Bretagna[78] e Richards (1988) riconosce che «Loria's ideas might have achieved the goal from one perspective: their more formal view of the subject at least carried the seeds for the growth of more constructive discussions with objective rather than subjective criteria».[79] Egli dà priorità a stabilire la natura di «a strict treatment of geometry, the attainment of which is one of the noblest aims of modern studies».[80]

Nell'approccio alla didattica della matematica di Loria si percepisce l'importanza attribuita alla figura dell'insegnante. Sul campo egli è l'anima della *Mathesis Ligure* e riesce a coinvolgere colleghi matematici che insegnano a Genova e insegnanti di valore della scuola secondaria. Nelle riunioni è curata sia la parte riguardante la diffusione della cultura matematica, sia

[78] Cfr. Furinghetti, Somaglia 2005 cit.

[79] J.L. Richards, *Mathematical visions. The pursuit of geometry in Victorian England,* Academic Press, Boston etc., 1988. La citazione è a p. 195.

[80] G. Loria, *A few remarks on the "Syllabus of modern plane geometry", issued by the A.I.G.T., Association for the Improvement of Geometrical Teaching, Nineteenth General Report,* January, 1893, pp. 49-53. La citazione è a p. 53.

la partecipazione attiva alla vita politica della comunità degli insegnanti di matematica.[81] Loria si impegna molto nel dibattito sulla preparazione universitaria degli insegnanti, anche riprendendo idee di Klein per quello che riguarda la doppia discontinuità tra insegnamento secondario e superiore. Riconosce inoltre che la formazione degli insegnanti non può consistere solo di una parte teorica sulla disciplina, ma anche di una parte collegata ai problemi pedagogici e di una parte di tirocinio.[82] L'attenzione a temi che non sono pura conoscenza della disciplina, ma riguardano aspetti che con termine moderno chiameremmo metacognitivi, è in linea con le idee di matematici della prima metà del secolo (Poincaré, Hadamard,...), che avevano sentito l'esigenza di riflettere sulla loro professione e sulla natura della creatività matematica.[83] Loria ascrive anche importanza ai problemi collegati al sistema di

[81] Cfr. Furinghetti 2002 cit.

[82] Si tenne a Padova dal 20 al 23 settembre 1909 il secondo congresso della *Società Italiana di Matematica "Mathesis„*. A conclusione della discussione sul tema *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie* i relatori Loria e Padoa auspicarono, in accordo con i voti del precedente congresso, che si istituissero cattedre di Metodologia della matematica e fosse reso obbligatorio il tirocinio presso una scuola media disciplinato da norme precise per gli aspiranti al Diploma di Magistero in matematica. Cfr. *II Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis„*, «Periodico di Matematica», s. III, VII, 1910, pp. 74-79.

[83] Loria è uno dei matematici che rispondono al questionario sul modo di lavorare dei matematici pubblicato su «L'Enseignement Mathématique» a cura del matematico Henri Fehr e degli psicologi dell'Università di Ginevra Edouard Claparède e Théodore Flournoy. Nel 1906 («L'Enseignement Mathématique», VIII, pp. 383-385) egli pubblicò un commento a due domande del questionario.

reclutamento e di formazione in servizio (aggiornamento, riconoscimenti e incentivazioni).[84] Quando nel 1915 *L'Enseignement Mathématique* pubblica il testo di un questionario sulla «preparazione teorica e pratica degli insegnanti di matematica»[85] che deve servire come base per uno studio da effettuarsi su scala mondiale, proprio a Loria è affidato l'incarico di relatore di questo studio. I tempi non erano adatti a questa e ad altre imprese simili, che richiedevano cooperazione e unità di intenti fra stati; successivamente, il tormentato primo dopoguerra ne rese la realizzazione problematica. Ma il tema era troppo importante per essere lasciato cadere e, quando la situazione internazionale della comunità dei matematici si fu assestata, lo studio fu portato a termine. I risultati furono presentati al congresso mondiale dei matematici di Zurigo del 1932 e *L'Enseignement Mathématique* pubblicò il rapporto di Loria (1933).[86]

[84] Sulla preparazione degli insegnanti si vedano: G. Loria, *La preparazione degli insegnanti medi di matematica*, «Periodico di matematiche», s. IV, I, 1921, pp. 149-164; P. Nastasi, *La Mathesis e il problema della formazione degli insegnanti*, PRISTEM/Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura, 5, 2002, pp. 59-119.

[85] «L'Enseignement Mathématique», XVII, 1915, in francese pp. 60-65, in tedesco pp. 129-134, in inglese pp. 135-139, in italiano pp. 140-145.

[86] G. Loria, *La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Rapport général*, in W. Saxer (herausgegeben vom), Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, O. Füssli, Zürich - Leipzig, 1932, II, p. 362; G. Loria, *Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. I. Rapport général*, «L'Enseignement Mathématique», XXXII, 1933, pp. 5-20.

Come si è detto, Loria recepì lo spirito dei tempi per quanto riguarda le riforme dei programmi.[87] Klein[88] stesso gli riconosce meriti in questo campo. Come membro (dal 1904, dopo la morte di Cremona) del "Comité de Patronage" del giornale *L'Enseignement Mathématique* condivideva le idee di comunicazione, solidarietà e internazionalismo che erano state alla base della fondazione del giornale. Partecipò con David Eugene Smith e altri matematici alla discussione lanciata dalla Redazione del giornale nella *Note de la Rédaction sur les réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques*.[89] Questa discussione fece emergere l'opportunità di una commissione internazionale che si occupasse dei problemi dell'istruzione matematica. Nel 1908 al convegno mondiale dei matematici di Roma questa idea si realizzerà con la fondazione della C.I.E.M. (*Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*) ora usualmente indicata come I.C.M.I. (*International Commission on Mathematical Instruction*).[90] A riconoscimento del suo operato nella

[87] Cfr. G. Loria, *Programmi del passato e programmi per l'avvenire*, in *Scritti conferenze e discorsi sulla storia delle matematiche*, Padova, C.E.D.A.M., 1936, pp. 49-62. Testo del discorso tenuto il 22 aprile 1905 al convegno regionale dei membri della *Mathesis*. Cfr. anche Il Bollettino di Matematica, IV, 1905, pp. 135-144 (contiene una parte di questo articolo). Nel 1906 fu pubblicata una traduzione in tedesco di 22 pagine fatta dal Prof. H. Wieleitner col titolo *Vergangene und künftige Lehrpläne*, Leipzig).

[88] Cfr. F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil II (*Geometrie*), B.G. Teubner, Leipzig, 1909, Anhang: *Vom Unterricht in der Geometrie nach seiner Entwicklung in der verschiedenen Ländern*.

[89] L'Enseignent Mathématique, VII, 1905, pp. 382–383.

[90] Per notizie su nascita e sviluppo di I.C.M.I. si veda A.G. Howson, *Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction*, «Educational Studies in Mathematics», 15, 1984, pp. 75-93.

C.I.E.M. gli fu conferito il titolo “Membro onorario della Commissione” insieme ad altri otto colleghi (tra i quali Enriques e Guido Castelnuovo) al convegno mondiale dei matematici di Oslo nel 1936.[91]

I caratteri della personalità di Loria come matematico, storico e membro attivo della comunità internazionale si ritrovano nel giornale da lui fondato.

Nel 1897 (volume IV della seconda serie) il *Giornale di Matematiche di Battaglini*[92], allora diretto da Capelli, pubblica un supplemento di 24 pagine “per cura del prof. Gino Loria” intitolato *Bollettino di Storia e Bibliografia Matematica* (*Supplemento al Giornale di Matematiche di Battaglini*). Il primo numero è del Gennaio e Febbraio, l’ultimo (n. 6) è del Novembre e Dicembre. Nel titolo del giornale compare la parola bibliografia, che sarà poi sempre presente (aggettivata) nei successivi titoli del giornale. Questo aspetto, al pari della storia, sta a cuore a Loria ed è legato all’esigenza molto sentita all’epoca di pubblicare riviste e repertori bibliografici.

Ogni numero consta di quattro pagine, numerate in successione nei vari numeri separatamente dalle pagine del giornale. Sono pubblicati articoli,[93] recensioni ed annunci, notizie, necrologi.[94] Le recensioni del libro di

[91] *Commission Internationale de l’Enseignement Mathématique,* in *Comptes rendus du congrès international des mathématiciens,* Oslo, A.W. Brøggers Boktrykkeri A/S, 1937, pp. 287-289.

[92] Per notizie su questo giornale si veda Furinghetti, Somaglia 2005 cit.

[93] G. Loria, *Di alcuni nuovi documenti relativi a J. Steiner,* pp. 1-2; pp. 5-6; pp. 9-11; G. Vailati, *Di una dimostrazione del principio della leva, attribuita ad Euclide,* pp. 21-22.

[94] Questi vari contributi sono in genere firmati G. L.; anche Vivanti è attivo collaboratore.

Ernesto Pascal *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale (calcolo differenziale e integrale)*, di quello di Ernesto Cesaro *Lezioni di geometria intrinseca* e della *Commemorazione del IV centenario di Francesco Maurolico* pubblicata dalla Regia Accademia Peloritana hanno il peso di articoli. Annunci (di premi, concorsi, convegni,...), necrologi, recensioni riguardano il mondo matematico in generale, non ristretto alla sola storia. Si sente che nelle intenzioni di Loria questo *Bollettino* deve rispondere all'esigenza di stabilire una rete di comunicazione all'interno della comunità dei matematici, esigenza messa in evidenza proprio quell'anno dall'evento (annunciato e commentato brevemente nel *Bollettino*) del primo Congresso Mondiale dei Matematici tenuto a Zurigo.

Nel 1898 il supplemento al *Giornale di Matematiche* diventa un giornale autonomo diretto da Loria con il titolo *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*. L'editore è Carlo Clausen (Torino), all'inizio direttore-gerente è Mario Bertolone ed è stampato presso la Tipografia R. Istituto Sordo-muti di Genova.[95] Il giornale cambia editore nel 1910 (Rosenberg & Sellier, Torino) e nel 1918 (Libreria Scientifica D. Capozzi, Palermo). Esce trimestralmente; la prima annata ha 164 pagine, poi il numero di pagine si attesta intorno alle 130. La numerazione delle pagine è in successione nei vari numeri annuali. In ciascun volume c'è l'indice dell'annata e l'elenco dei nomi citati. Durante la prima guerra mondiale il *Bollettino* non si interrompe; l'ultima annata pubblicata è quella del 1919.

[95] Il volume del 1908-1909 è stampato dalla Premiata Tipografia P. Valdès di Cagliari, dal 1912 leggiamo nelle pagine iniziali che il giornale è stampato dai fratelli Fusi a Pavia, dal 1918 la stamperia è quella dell'editore Capozzi.

5. *Il giornale di Loria come sezione del giornale «Il Bollettino di Matematica»*

Nel 1922 *Il Bollettino di Matematica* (a. I, nuova serie) pubblica una *Sezione Storico-Bibliografica* (menzionata nella copertina) per cura di Loria. Questa sezione, che può essere considerata la continuazione del *Bollettino* di Loria, è pubblicata finché il giornale ospitante vive (1948) e poi, con diverse modalità, nel suo successore *Archimede*[96] per molti anni.

Dato l'intrecciarsi del destino dei due giornali (*Il Bollettino di Matematica* e la *Sezione* di Loria) è opportuno delineare le vicende del giornale ospitante. Il primo numero esce nel 1902 a Bologna per opera di Alberto Conti, professore nella Regia Scuola Normale Femminile Anna Morandi Manzolini di Bologna. Egli ne sarà direttore responsabile fino al 1939.[97] Dal primo numero del 1940 (s. IV, I) fino al 1943 il *Bollettino* è diretto da Enrico Nannei e Enrico Grassi (direttore responsabile). Nel 1947 (primo anno di pubblicazione del giornale dopo la guerra) c'è un comitato di redazione composto da E. Nannei (Genova, direttore responsabile), G. Burnengo (Genova), P. Cattaneo (Padova), G.B. Gonella (Genova), A. Marangoni (Bergamo), A. Natucci (Chiavari), G. Palamà

[96] In *Archimede* la sezione diventa una delle rubriche senza numerazione indipendente e senza menzione in copertina, ma reca l'intestazione «Sezione storico-bibliografica diretta dal prof. G. Loria». Loria muore a Genova il 30 gennaio 1954: nel primo numero della sesta annata di *Archimede* (1954) il suo nome è ancora citato nell'intestazione della sezione, nei due numeri successivi la sezione è anonima, nell'ultimo numero di quell'anno la sezione è diretta da Attilio Frajese.

[97] Nato a Firenze nel 1873, muore ivi nel 1940. Il suo necrologio è pubblicato nel *Bollettino* a firma della Direzione (s. IV, I, 1940, pp. 81-84 con fotografia).

(Lecce), U. Serra (Genova). Nel 1948 si aggiungono V.G. Cavallaro (Cefalù) e E. Maccaferri (Bologna).

Il *Bollettino* è stampato fino al 1943 dalla Tipografia Paolo Cuppini di Bologna. Dal 1947 è stampato dalla Società Tipografica "Leonardo da Vinci" a Città di Castello. Nel 1937, 1938 e 1939 è edito a Firenze (città nella quale Conti insegnava), nel 1940 è edito a Genova con Direzione e Amministrazione presso l'Istituto "G. Leopardi" di quella città. Nel 1947 e 1948 è edito dalla Casa Editrice Marzocco, Firenze. Fu in genere bimestrale con irregolarità e cambiamenti durante le guerre (per esempio, nel 1942 è semestrale) e per le sanzioni.

Pur essendo un giornale che viveva sostanzialmente degli abbonamenti dei lettori (con l'aggiunta dei proventi di qualche annuncio pubblicitario legato all'editoria) il *Bollettino* esce con regolarità comparabile con quella dei giornali di matematica accademici, con qualche problema nella prima guerra mondiale[98] e, soprattutto, nella seconda. Due bombardamenti aerei colpirono l'Istituto "G. Leopardi" (e quindi l'archivio del giornale). Uscirono le annate 1940, 1941, 1942, 1943. Dopo il primo bombardamento del 22 ottobre 1942 la collezione dei fascicoli fu ricostruita grazie a donazioni della famiglia Conti, della Tipografia Cuppini e di vari abbonati (tra cui Loria e Eugenio G. Togliatti).[99] Il bombardamento aereo del 19 maggio 1944 uccise Grassi e da questo anno non ci sono uscite fino al 1947 (fascicolo I del novembre-

[98] L'anno XIV si riferisce al biennio 1915-16, il XV a 1917-1918, il XVI a 1919, il XVII a 1920-1921.

[99] *Ai lettori,* s. IV, IV, 1943, p. 1. È stata usata come copertina dell'annata 1943 la copertina dell'annata 1941 senza le opportune correzioni, il volume manca dell'indice dei contenuti e dell'elenco dei nomi citati nella *Sezione* di Loria.

dicembre, a. XLVII, a. I della quinta serie). Nel 1949 il giornale di Conti diventa *Archimede*.

Il sottotitolo «Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie» spiega bene le finalità e la particolare collocazione del giornale nel quadro delle pubblicazioni dell'epoca. Nella presentazione il direttore scrive:

> Nella circolare del 20 novembre 2001 colla quale annunziammo la fondazione di questo nuovo periodico, cercammo di delinearne il programma [...]:
> «Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola» [frase di Giovanni Frattini, presidente della *Mathesis*]. È questo che ci proponiamo *e non intendiamo di avere iniziato un nuovo giornale di matematiche speciali*, di cui attualmente non c'è davvero difetto in Italia, ove anzi ne fioriscono diversi pregevolissimi. Intendiamo che questo periodico abbia un carattere spiccatamente pedagogico, diguisachè tutto il suo contenuto possa opportunamente e utilmente trasportarsi nella Scuola Media.[100]

Conti colloca con precisione il suo giornale nell'ambito dell'insegnamento secondario,[101] ma si propone di tene-

[100] *Il nostro programma*, «Il Bollettino di Matematica», I, n. 1, 1902, pp. 1-2.

[101] Nel 1899 (in realtà il primo volume ha in copertina la data 1900) Conti aveva fondato a Bologna «Il Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali. Giornale per la coltura dei maestri delle scuole elementari e degli alunni delle scuole normali». Ricordo che negli anni 1901 e 1902 fu pubblicato, oltre a quelli già menzionati, il giornale «Le Matematiche Pure e Applicate», diretto da Cristoforo Alasia (S. Lapi Tipografo-Editore in Città di Castello), che si dichiarava un «Periodico mensile di matematiche pure ed applicate, superiori ed elementari, ad uso dell'istruzione media e superiore».

re d'occhio gli sviluppi della ricerca (si veda la citazione della frase di Frattini). Il cuore del giornale sono le note su argomenti di matematica elementare attinenti i programmi scolastici, ma quello che caratterizza il giornale rispetto agli altri pubblicati in Italia è l'intento di informare e stabilire una rete di comunicazione, intento che era già (più a livello di ricerca) nel *Bollettino* di Loria e che qui è ulteriormente accentuato con la posta dei lettori come rubrica fissa. Tra gli argomenti che il direttore si propone di trattare ci sono le questioni di terminologia matematica e la storia della matematica elementare. Il primo è un argomento in discussione tra i matematici e di esso si occupa particolarmente la *Rivista* di Peano. Il secondo è il cuore del *Bollettino* di Loria.

Lo spirito del giornale di Conti riecheggia alcune idee di fondo di Loria, non solo per quello che riguarda la comunicazione delle informazioni, ma anche per l'attenzione alla storia nell'insegnamento matematico. Loria collabora a questo giornale fin dal primo numero, rispondendo all'intenzione dichiarata di Conti di avere contatti con l'Università.

Nel 1922 il ridimensionamento del giornale di Loria a sezione del *Bollettino* di Conti ne comporta perdita di autonomia, visibilità e slancio, ma esso riesce a mantenere il suo stile e una notevole indipendenza dal giornale ospitante, sottolineata dalla numerazione romana delle pagine. La sezione si integra bene nel giornale introducendo l'aspetto internazionale, l'attenzione per le nuove pubblicazioni anche non didattiche e il legame con la ricerca matematica.[102]

[102] Il *Bollettino* di Conti menziona alcuni eventi della comunità dei matematici professionisti (per esempio i convegni della Unione Mate-

Tavola 1. - *«Il Bollettino di Matematica» e la «Sezione Storico-Bibliografica»: confronto del numero di pagine*

Anno	*Bollettino* di Conti	*Sezione Storico-Bibliografica* di Loria
1922	112 pagine	112 pagine
1923	152 pagine	108 pagine
1924	136 pagine	94 pagine
1932	148 pagine	134 pagine
1937	140 pagine	102 pagine
1938	132 pagine	80 pagine
1941	102 pagine	48 pagine
1942	76 pagine	38 pagine
1943	58 pagine	27 pagine

Nella Tavola 1 si riporta il numero di pagine in alcune annate che dà l'idea della relazione tra gli spazi occupati dai due tronconi del giornale.

6. *La storia e l'insegnamento della matematica nel giornale di Loria*

Il *Bollettino* di Loria e, successivamente, la *Sezione* del giornale di Conti sono organizzati secondo lo schema del primo numero inserito nel *Giornale di Battaglini*, cioè contengono:

matica Italiana), ma gli universitari (di cui nella presentazione Conti auspicava la presenza nel giornale) non sono assidui collaboratori.

- lavori storici (di solito non più di due per numero)
- recensioni ed annunzi
- programmi e rapporti di corsi, eventi,…
- necrologi
- notizie varie.

Nella prima annata del 1898 i lavori storici sono di Loria (*Per la storia di alcune curve piane*, pp. 1-7) e di Alexandr W. Vassilief (*Pafnutii Lvovitch Tchébychef*, pp. 33-45, 81-92, 114-139). Solo 58 pagine sulle 164 della prima annata sono dedicate a veri e propri contributi storici.[103] Per il resto il giornale informa sulla vita accademica del tempo (con particolare riferimento alla matematica) e su eventi riguardanti la ricerca e la cultura matematica. Tra le notizie Loria riporta e commenta: l'articolo pubblicato nel *Panaro* sulla dispersione della Biblioteca Boncompagni, la traduzione in italiano, francese e inglese delle conferenze di Klein sui tre problemi classici, la mutazione dell'associazione britannica A.I.G.T. in *Mathematical Association.* Sono segnalati non solo libri e articoli apparsi di recente, ma anche scritti antichi e documenti esistenti in varie biblioteche, che possono essere utili agli studiosi di storia. Concorsi internazionali e premi sono annunciati,

[103] Per l'analisi degli articoli storici si vedano: P. Freguglia, M.E. Di Stefano, M. Frasca Spada, *Su alcune tendenze della storiografa delle matematiche riscontrabili in riviste italiane nella prima metà del Novecento*, in F. Barbieri, F. Cattelani Degani (a cura di), *Atti del convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia"*, Modena, Università degli Studi di Modena, 1989, pp. 133-146; L. Dell'Aglio, *Des glissements dans l'historiographie des mathématiques: le cas du Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche de Gino Loria*, in E. Ausejo & M. Hormigón (editors), *Messengers of mathematics: European mathematical journals (1800-1946)*, Madrid, Siglo XXI de España Editores, 1993, pp. 283-297.

ne sono riportati i punti fondamentali del bando e i testi dei temi proposti.

In questa prima annata troviamo i programmi dei corsi universitari di Fisica matematica (Carlo Somigliana, Pavia), Analisi superiore (Pincherle, Bologna), Storia della meccanica (corso libero di Vailati, Torino), Geometria superiore (Bertini, Pisa). Sono pubblicati i necrologi di E. Julius Schering, Francesco Brioschi, Hermann Schapira, Paul Serret. Con i necrologi (brevi, ma curati) Loria è attento a ricordare tutti i matematici defunti di cui ha notizia. I necrologi di italiani (insegnanti, ispettori, familiari di colleghi) sono pubblicati di solito nel giornale di Conti, che in questo ha un carattere più familiare.

Nel giornale di Loria sono notevoli le recensioni, che hanno il peso di veri e propri articoli. Esse non concernono solo lavori storici, ma tutto quanto attiene la cultura matematica, inclusa la didattica. Vediamone qualche esempio nella prima annata. Segre recensisce[104] il trattato *Lezioni di geometria projettiva* di Enriques (Bologna, Zanichelli, 1898). Da una parte egli esprime il suo apprezzamento per l'autore, dall'altra coglie l'occasione per ribadire alcune idee di fondo sulla conoscenza matematica, con riferimenti specifici alla scuola. Segre scrive:

> Nel suo libro egli [Enriques] si serve di quelle sue ricerche [sui postulati che servono di base all'opera di Staudt], tenendo il debito conto delle esigenze didattiche. Alcune osservazioni intuitive conducono a enunciare con precisione certi postulati, scelti in modo che da essi si possan poi trarre,

[104] «Bollettino di Bibliografia…», I, 1898, pp. 11-15. Le citazioni sono a p. 11, a p. 14, a p. 15.

> non solo con rigore, ma anche con semplicità, tutte le proposizioni fondamentali della geometria di posizione. Questa condizione della semplicità è essenziale per la scuola.

Segre[105] sviluppa la sua recensione intorno al tema dell'intuizione e del rigore, avendo sempre in mente non solo la purezza del metodo, ma anche le esigenze didattiche. La frase conclusiva di questo contributo dovette piacere molto a Loria per il riferimento alla storia: «E in ogni modo qui si tratta principalmente della opportunità didattica: la quale ora, come tante altre volte, sembra condurre a tener conto dello sviluppo storico della scienza».

Loria recensisce[106] il libro di Charles-Ange Laisant *La mathématique. Philosophie - Enseignement* (Bibliothèque de la Revue générale des Sciences, Paris, Carré et Naud, 1898). Il libro si divide in due parti: la prima tratta il rapporto tra filosofia e matematica e descrive le varie branche della matematica, la seconda si addentra nella discussione sull'insegnamento matematico. L'autore del libro recensito era un personaggio in vista della comunità matematica, dirigeva *L'Intermédiaire des Mathématiciens* e l'anno seguente avrebbe fondato con Henri Fehr *L'Enseignement Mathématique*.[107] Loria fa qualche garbata critica a certe omissioni nella prima parte, che, comunque,

[105] Tema caro a Segre, come risulta anche dal contributo nella *Rivista* di Peano precedentemente citato. Su questo punto si veda L. Giacardi, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», sez. A, s. VIII, VI-A, 2003, pp. 141-164.

[106] «Bollettino di Bibliografia…», I, 1898, pp. 51-54. La citazione è a p. 53. La sigla G. L. che spesso appare si riferisce a Loria, come precisato nell'indice dei nomi.

[107] Cfr. Furinghetti 2003 cit.

apprezza. Riguardo alla seconda, egli dice che «rappresenta il frutto di molti anni di esperienza personale ed è così piena di osservazioni acute che sono assai pochi gl'insegnanti che non vi troveranno qualche cosa da apprendere o almeno lo stimolo a nuove idee». Tra le osservazioni "acute" Loria segnala la necessità di ridimensionare il peso della trigonometria nei programmi, problema già allora sentito. Riguardo all'insegnamento della geometria, Loria non manca di confrontare la tradizione francese basata su Legendre con la tradizione italiana, nella quale esistono sviluppi interessanti, quali il fusionismo. Questo tema era d'attualità all'epoca e il *Bollettino* pubblica la recensione fatta da Giudice del libro di Lazzeri e Bassani.[108]

Beppo Levi recensisce[109] la seconda edizione (ampliata e corretta) del libro di Loria *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (Carlo Clausen, Torino, 1896). La prima edizione era stata pubblicata nel terzo tomo della seconda serie delle *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* nel 1887 e, scrive il recensore, «per quanto meritevole di considerazione, non fu ancora oggetto di esame per parte de' periodici italiani; gli scienziati stranieri furono più solleciti e gli furon larghi d'encomio». Levi riporta le parole stesse di Loria per illustrare lo scopo dell'opera che è «quello di aiutare la ricerca bibliografica preliminare che deve precedere oggi qualunque fruttifera investigazione scientifica, ed

[108] «Bollettino di Bibliografia…», I, 1898, pp. 150-151. Giudice aveva recensito la prima edizione (1891) nella «Rivista» di Peano e scriverà sul fusionismo nel «Periodico di Matematica» (1899).

[109] «Bollettino di Bibliografia…», I, 1898, pp. 145-147. Le citazioni sono a p. 145.

adunare alcuni materiali per la storia della geometria del secolo XIX». Emerge in questo passo la già menzionata concezione della storia della matematica diffusa in quel periodo tra i matematici: essa è considerata un efficace prodromo e ausilio alla ricerca matematica. La quarta edizione di questa opera sarà poi recensita nel 1935 da Edgardo Ciani,[110] che sottolineerà lo scarso rilievo dato al contributo di Bertini e Segre.

Queste tre recensioni pubblicate nella prima annata riguardano i tre poli d'interesse di Loria: la storia, l'insegnamento (anche quello pre-universitario), la ricerca matematica. Intorno a questi poli si svilupperà il giornale negli anni successivi, coprendo l'informazione nei tre campi relativi, senza restrizione ai confini nazionali per quello che riguarda le recensioni, gli articoli, gli eventi da annunciare.[111]

Questo stile di apertura culturale e geografica si conserva per tutto il periodo di pubblicazione e caratterizza sia la figura di Loria rispetto ad altri personaggi matematici del periodo, sia il suo giornale rispetto ad altri più parrocchiali. Senza dubbio lo sviluppo della ricerca matematica gli sta a cuore: nel tomo XI (1908-1909, che in realtà comprende solo fascicoli pubblicati nel 1908), lancia una nuova rubrica (pp. 79-83) "Rassegna delle Dissertazioni di laurea recenti" curata da G. L., la quale contiene brevi notizie su tesi discusse nelle varie università. Una delle tesi segnalate come «notevole contributo» è quella discussa da Emmy Noether a Erlangen nel 1907 sotto la direzione di Paul Albert Gordan.

Molte delle recensioni delle prime annate sono dovute

[110] «Il Bollettino di Matematica», s. n., IV, 1935, pp. IV-IX.

[111] Tra i recensori stranieri segnaliamo Thomas L. Heath.

a Vivanti, che si interessava specialmente a opere collegate all'analisi. Egli recensisce[112] molto garbatamente il libro di E. Vecchietti *L'infinito. Saggio di psicologia della matematica* (Società editrice Dante Alighieri, 1908) e dà all'autore il prezioso consiglio:

> di non prendere la letteratura di seconda mano, ma di ricorrere direttamente alle fonti; vi spenderà maggior tempo e maggior fatica, ma né l'uno né l'altra saranno sciupati. La lettura delle opere dei grandi passati è altamente istruttiva, e nulla va che la sostituisca [...]. Anche i loro errori sono per noi una scuola. (pp. 78-79)

Nel seguito il giornale pubblica altre notevoli recensioni. Ben nota è quella fatta da Giovanni Vailati[113] del testo di geometria di Enriques e Amaldi. Vailati mette a confronto posizioni didattiche diverse e chiarisce le sue idee riguardo al rapporto tra le ricerche «sulle questioni fondamentali di principi e di metodi» e la loro influenza «sulla forma e sul contenuto dei testi destinati all'insegnamento delle parti elementari dell'algebra e della geometria». Tale influenza, secondo lui, non è «affatto una conseguenza legittima dei nuovi indirizzi di ricerca» e, inoltre, essa ignora le capacità di astrazione dello studente, la necessità di dare stimoli intellettuali, le esigenze degli studi che seguiranno (incluse le applicazioni). Questa critica riecheggia temi già discussi in passato;

[112] «Il Bollettino di Bibliografia...», XI, 1908-1909, pp. 77-79.

[113] Nella rubrica *Recensioni ed Annunzi* («Bollettino di Bibliografia...», VII, 1904, pp. 16-24): recensione del libro "J. (sic) Enriques e U. Amaldi, *Elementi di geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori* - Bologna, N. Zanichelli, 1903, 8°, pag. XXIII-655 [Prezzo L. 4,50]". Le citazioni sono a p. 16, a p. 17, a. p. 24.

Scarpis[114] aveva sottolineato con sarcasmo che l'insegnamento matematico non è da intendersi necessariamente solo «come una *ginnastica intellettuale* [corsivo mio] e come parte di un'educazione filosofica». Il tema della tolleranza per le diverse esigenze intellettuali e pratiche degli allievi era centrale nella campagna contro il carattere accademico della matematica scolastica combattuta in quegli anni da Perry in Gran Bretagna. Il rigore per Vailati non consiste nell'appoggiare le dimostrazioni su certi presupposti piuttosto che su altri, ma piuttosto nel fatto che «di nessuna proposizione, si [faccia] in esse [nelle dimostrazioni], espressamente o tacitamente, uso senza che questa [figuri] tra quelle antecedentemente dimostrate o esplicitamente assunte come postulati». La recensione si conclude con l'esplicitazione delle note idee di Vailati sulla dimostrazione:

> È in fatti di somma importanza che l'allievo arrivi *il più presto possibile* a vedere nel processo di dimostrazione un mezzo per passare dal noto all'ignoto, uno strumento cioè di prova e, ancora di più, di ricerca, mentre solo più tardi potrà apprezzarne e gustarne l'efficacia come strumento d'analisi, e di riduzione al minimo, dei concetti e delle ipotesi fondamentali.

Di tono più polemico è la replica di Francesco Severi[115] alle critiche di Enriques apparse nel *Periodico di Matematiche*

[114] Cfr. U. Scarpis, *Rivista bibliografica*, «Periodico di matematica», VI, 1891, pp. 198-199. La citazione è a p. 199. Il sarcasmo era indirizzato ai geometri protagonisti della polemica ottocentesca sugli *Elementi* di Euclide.

[115] Cfr. F. Severi, *Del principio di Plücker-Clebsch e di altre cose meno importanti*, «Bollettino di Matematica», n. s., XIV, 1935, pp. XXV-XXXII.

nel 1934 e 1935. In alcuni tratti essa ha toni estremamente personali e accesi. Ancora una volta si contrappongono intuizione e rigore: la discussione non è puramente teorica e sono in gioco questioni di priorità, di paternità di idee e di validità del metodo usato nelle proprie scoperte.

Nella prima annata (1922) della *Sezione* inserita nel *Bollettino* di Conti Loria riprende i fili interrotti dalla guerra e dal tumultuoso dopoguerra. Sono pubblicate notizie anche non recenti, ma di grande interesse, quali i necrologi di Perry (morto nel 1920) e di Lord Raleigh (morto nel 1919), e una breve nota sulla *Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico*. In questa nota è segnalato che nell'annata ventunesima del giornale *L'Enseignement Mathématique* c'è l'elenco dei rapporti internazionali sull'istruzione matematica pubblicati a cura della *Commissione*; è sottolineato il valore di questi studi. L'impegno bibliografico e informativo continua costante. Loria ribadisce il ruolo chiave della storia anche nella nuova sezione pubblicando l'articolo di Guido Vetter[116] *Intorno al metodo nella storia della matematica* nei numeri 4-5-6 e 7-8-9-10 del 1922. Vetter pubblicò altri contributi su vari temi storici. In seguito tra gli autori di articoli storici compaiono professori di scuola secondaria. Il giornale considera anche la storia matematica delle varie civiltà e la matematica dei popoli primitivi.[117]

[116] Questo articolo è commentato in Freguglia, Di Stefano, Frasca Spada 1989 cit.

[117] Cfr., ad esempio, *L'aritmetica dei popoli barbari*, «Il Bollettino di Matematica», s. IV, III, 1942, p. XXIII. Loria fu attento alle altre culture. Nel 1914 (XVI, pp. 13-15) recensisce il libro di J. Carlebach sulla storia della matematica ebrea. Nello stesso volume (pp. 109-117) e nel successivo (XVII, 1915, pp. 1-4) recensisce il trattato di Y. Mikami sullo sviluppo della matematica in Cina e Giappone.

Nelle rubriche "Notizie" o "Spigolature" troviamo interessanti informazioni di varia natura e, inoltre, curiosità e aneddoti storici forse inseriti per adattarsi al giornale ospitante, i cui lettori erano per lo più insegnanti di scuola secondaria. Si nota attenzione ai vari mezzi di trasmissione della matematica. Dagli Stati Uniti Loria riporta notizie su *Una cinematografia a soggetto matematico*,[118] *L'applicazione cinematografica all'insegnamento*,[119] *La matematica sulla scena*,[120] *Matematica e poesia*.[121] Nel 1943 egli pubblica tra questi contributi vari una breve nota, *La donna nella storia delle matematiche*,[122] tornando su un tema cui aveva dedicato un celebre articolo.[123]

Il *Bollettino di Storia* e la *Sezione Storico-Bibliografica* ebbero sporadicamente contributi di autori stranieri. Loria fu l'infaticabile autore di articoli, recensioni, raccolte di notizie. Sul piano della ricerca, il *Bollettino di Storia* e la *Sezione* non ressero la concorrenza di giornali del settore con maggiore visibilità accademica. Essi, però, raggiun-

[118] «Il Bollettino di Matematica», n. s., XVII, 1938, p. LIX.

[119] «Il Bollettino di Matematica», s. III, I, 1939, p. XXVIII.

[120] «Il Bollettino di Matematica», s. III, I, 1939, p. XXVIII.

[121] «Il Bollettino di Matematica», s. III, I, 1939, p. LXIX.

[122] «Il Bollettino di Matematica», s. IV, IV, 1943, p. XXVI.

[123] Cfr. G. Loria, *Donne matematiche*, in *Scritti, conferenze e discorsi sulla storia delle matematiche*, Padova, C.E.D.A.M., 1936, pp. 447-466. Si tratta del testo di una conferenza tenuta nel 1901 a Mantova e poi pubblicata in «Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova» biennio 1901-1902, 1903, pp. 75-98. Cfr. Anche G. Loria, *Les femmes mathématiciennes* (nella rubrica "Histoire des sciences"), «Revue scientifique», s. IV, XX, 1903, pp. 385-392; G. Loria, *Encore les femmes mathématiciennes* (nella rubrica "Variétés"), «Revue scientifique», s. V, I, 1904, pp. 338-340. Si tratta della replica al commento di Joteyko all'articolo di Loria del 1903, cfr. J. Joteyko, *A propos des femmes mathématiciennes* (nella rubrica "Variétés"), «Revue scientifique», s. V, I, 1904, pp. 12-15.

sero alcuni obiettivi importanti, specialmente per il mondo della scuola: tennero vivo il gusto per la storia e dettero agli insegnanti non universitari l'opportunità di misurarsi con essa, informarono su aspetti della ricerca e della vita della comunità matematica, furono una finestra sul mondo.

Appendice 1. - *Giornali matematici italiani del XIX secolo**

TITOLO	PRIMA USCITA A	PERIODO
Annali di Scienze Matematiche e Fisiche fondato da Barnaba Tortolini,	Roma	1850-1857,
continua come *Annali di Matematica Pura ed Applicata* curato da Enrico Betti, Francesco Brioschi, Angelo Genocchi, Barnaba Tortolini	Roma	1858-
Giornale di Matematiche fondato da Giuseppe Battaglini, Vincenzo Janni, Nicola Trudi	Napoli	1863-1938/39, 1947/48-1965/67
Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche fondato da Baldassarre Boncompagni	Roma	1868-1887
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo fondato da Giovanni Battista Guccia	Palermo	1887-1917, 1919-1941, 1952-
Bollettino di Storia e Bibliografia Matematica Sezione del *Giornale di Matematiche* curata da Gino Loria,	Napoli	1897,
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche fondato da Gino Loria,	Torino	1898-1919,
continua come *Sezione Storico-Bibliografica* curata da Loria ne *Il Bollettino di Matematica*	Bologna	1922-1943, 1947-1948

APPENDICE 2. - *Giornali italiani di didattica della matematica nel XIX secolo**

TITOLO	PRIMA USCITA A	PERIODO
Rivista di Matematica Elementare fondata da Giovanni Massa	Alba (CN)	1874-1885
Il Piccolo Pitagora fondato da Alberto Cavezzali	Novara	1883-1884
Periodico di Matematica (dal 1921 Periodico di Matematiche) fondato da Davide Besso	Roma	1886-
Rivista di Matematica fondata da Giuseppe Peano	Torino	1891-1906
Il Pitagora fondato da Gaetano Fazzari	Avellino	1895-1919
Bollettino dell'Associazione "Mathesis„ dal 1909 al 1920 *Bollettino della "Mathesis„ Società Italiana di Matematica*	Roma	1896 (con varie modalità e tempi di uscita)
Supplemento al Periodico di Matematica fondato da Giulio Lazzeri	Livorno	1897-1917
La Palestra Scientifica fondato da Vincenzo Giriodi	Torino	1897, pochi numeri
Il Tartaglia fondato da Pietro Caminati	Foggia	1898-1899

*Non sono riportate alcune irregolarità di uscita ininfluenti nella vita dei giornali.

PAOLA GARIO

I CORSI DI GUIDO CASTELNUOVO PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Si dice che l'insegnamento scientifico sia esclusivamente utilitario: niente di più erroneo. Esso invece ispirando l'amore e il rispetto alla verità, fornisce un possente mezzo di educazione morale; la coscienza non è soltanto quella che diciamo l'io, ma anche il fuori di me, che conosciamo e che ci appartiene. Lo studio delle scienze estende il dominio dell'io e costituisce quella humanitas scientifica che completa nel senso moderno gli studi dell'antica humanitas.

Le parole di Leonardo Bianchi, riprese nell'intervento di Giulio Lazzeri al Congresso della Mathesis del 1908,[1] esprimono in modo efficace lo sfondo culturale nel quale leggere il contributo di Guido Castelnuovo ai problemi dell'insegnamento secondario.

[1] G. Lazzeri, *Discorso del prof. Giulio Lazzeri,* Atti del I° congresso della "*Mathesis*", Firenze 1908, All. F, pp. 15-23; p. 19.

1. *Il contesto*

Nel febbraio del 1908 la Commissione Reale per la Riforma delle Scuole medie, istituita nel 1905 da Leonardo Bianchi, allora ministro della Pubblica Istruzione, propose uno schema di disegno di legge che prevedeva, fra l'altro, una Scuola media senza latino e la creazione di tre tipi di Liceo, classico, moderno e scientifico. Il principio, da lui sostenuto, di una *humanitas scientifica*, che si affiancava a quella classica, non riuscì a imporsi nella cultura del nostro paese e ne conseguì, fra l'altro, il mancato varo delle riforme proposte dalla Commissione Reale.

In quello stesso anno Guido Castelnuovo incominciava a prendere parte al dibattito sui progetti di riforma degli ordinamenti e dei programmi scolastici, che all'epoca coinvolse la comunità internazionale e che in Italia fu particolarmente vivace e all'insegna di un profondo rinnovamento.

Al Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi a Roma nell'aprile del 1908, i problemi dell'insegnamento ebbero, per la prima volta, un'apposita sezione ad essi dedicata. Dopo un'animata discussione introdotta da Federigo Enriques, «la Sezione IV, avendo riconosciuto l'importanza di un esame comparato dei programmi e dei metodi dell'insegnamento delle Matematiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni», approvava l'ordine del giorno proposto da Castelnuovo e confidava «ai Prof.i Klein, Greenhill e Fehr l'incarico di costituire un Comitato internazionale»[2] che studiasse la questione e

[2] *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici,* Roma 6-11 aprile 1908, I-III, Accademia R. dei Lincei, Roma 1909; I, p. 51.

ne riferissse al successivo Congresso, che si sarebbe tenuto a Cambridge nel 1912.

Con il pronunciamento dell'Assemblea generale del congresso di Roma, nasceva la Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica (oggi ICMI). I delegati per l'Italia furono Castelnuovo, Enriques e Giovanni Vailati, sostituito, dopo la sua scomparsa nel maggio 1909, da Gaetano Scorza. Castelnuovo coordinò il lavoro di inchiesta e ne riferì, prima a Milano nel corso di una riunione del Comitato centrale, tenutosi nel settembre del 1911, poi a Cambridge, presentando il rapporto della Commissione nazionale.

Ai partecipanti al Congresso di Roma, la redazione de *L'Enseignement mathématique* aveva offerto l'estratto del rapporto Gutzmer-Klein, *La préparation des candidats à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles*,[3] apparso nello stesso anno in traduzione francese.

Il problema della formazione degli insegnanti di Matematica, tema tra i più dibattuti nei congressi della Mathesis tenutisi tra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento, diventava, a seguito dei progetti di riforma del sistema scolastico, di grande attualità. «La preparazione del futuro insegnante è fatta solo in quella larva di scuole di magistero che ben pochi, docenti o discepoli, prendono sul serio, e in cui, nella dozzina o poco più di conferenze annuali, troppi scarsi punti della matematica elementare si possono prendere in esame», aveva scritto Salvatore Pincherle in una lettera indirizzata ad Alberto Conti e pubblicata sul Bollettino di Matematica

[3] A. Gutzmer-F. Klein, *La préparation des candidats à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles,* «L'Enseignement mathématique», 10, 1908, pp. 5-49.

nel 1906.[4] Secondo Pincherle, per la preparazione dei futuri docenti di Matematica, sarebbe stato opportuno creare una «laurea in didattica», giacché «cosa seria ed utile sarebbe che il secondo biennio di matematica preparasse, di norma, minor copia di dottori e maggiore di veri ed efficaci maestri; e che lo studio approfondito di un argomento speciale fosse riservato a quei pochi, fra costoro, che sentono per la ricerca originale una effettiva vocazione».[5]

Il punto di vista di Pincherle ebbe il pronto appoggio di Enriques, ma non venne tuttavia accolto dai due congressi della Mathesis del 1908 e 1909, essendo prevalsa la posizione di Gino Loria e di Alessandro Padoa che ritenevano invece «urgente di costituire su più larghe basi la scuola di Magistero, inserendo nell'organo universitario, alcune cattedre apposite d'indole storica e critica».[6] La proposta Loria-Padoa venne perfezionata nel congresso del 1909 con la richiesta di istituire cattedre di Metodologia matematica presso ogni Scuola di Magistero, per «colmare il deplorevole abisso che oggi separa l'insegnamento universitario dall'insegnamento secondario».[7] Nel contempo, il congresso approvava la mozione di Castelnuovo, che rivolgeva un

[4] S. Pincherle S., *Sulle riforme scolastiche da compiersi e in particolare su quelle relative all'insegnamento della matematica*, «Bollettino di Matematica», 5, 1906, n. 5-6, pp. 83-87; p. 86.

[5] Ibidem, p. 86.

[6] *Atti del I° congresso della "Mathesis", Società italiana di matematica*, Firenze 16-23 ottobre 1908, Padova, 1908, p. 55.

[7] G. Loria, A. Padoa, *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie"*, in *Atti del II° congresso della "Mathesis" società italiana di matematica*, Padova, 1909, All. A, 1-10; pp. 4-5.

> invito ai professori universitari del secondo biennio delle università ove non avvenga immediatamente l'istituzione della cattedra di metodologia matematica, affinché, per turno, nel loro corso normale, s'intrattengano in quegli argomenti che più semplicemente possono illuminare l'insegnamento della matematica elementare.[8]

Come vedremo, Castelnuovo attuò questa indicazione dall'anno seguente: uno sguardo al complesso dei corsi di Geometria superiore[9] è particolarmente illuminante e rivela un progetto articolato e profondo. Castelnuovo elaborò nel corso degli anni una proposta didattica riguardante il piano di studi del secondo biennio che configura quella «laurea in didattica» che Pincherle aveva posto all'attenzione della comunità matematica nel 1906.

L'adesione di Castelnuovo alla creazione di una nuova laurea per l'insegnamento si palesa al Congresso della Mathesis tenutosi a Genova nel 1912, quando, in veste di Presidente, suggerì all'assemblea di «formulare una proposta concreta relativa alla migliore organizzazione della Scuola di magistero e alla distinzione tra laurea scientifica e laurea didattica».[10]

[8] *Atti del II° congresso della "Mathesis", Società italiana di matematica,* Padova 20-23 settembre 1909, Padova 1909, p. 51.

[9] Per l'elenco completo di questi corsi, si veda l'Appendice A. Cfr. *Guido Castelnuovo. Quaderni delle lezioni*, CD-Rom 1-6, a cura di P. Gario, Milano 2001-2003, riproduzione digitale dei quaderni di appunti dei corsi di Geometria superiore, Matematiche complementari, Matematica superiore e Calcolo delle probabilità, ora conservati presso l'Archivio storico dell'Accademia dei Lincei.

[10] *Atti del III° congresso della "Mathesis", Società italiana di matematica,* Genova 21-24 ottobre 1912, Roma, 1913, p. 87.

2. *I corsi di Geometria superiore*

L'insegnamento di Geometria superiore inizia per Castelnuovo nel gennaio 1904, a seguito della morte di Luigi Cremona che ne era stato sino allora il titolare. Il corso, le cui lezioni si limitano a poco più di un semestre, dopo un cenno alla classificazione dei vari indirizzi geometrici secondo il punto di vista di Felix Klein, tratta il tema delle curve algebriche piane, primo passo verso un programma di studio nell'ambito della geometria algebrica che verrà svolto negli anni successivi. Infatti, il corso del 1904-1905 è dedicato alla geometria sulle curve, quello del 1905-1906 alle curve sghembe, quello del 1906-1907 riguarda i sistemi lineari di curve piane e le superfici razionali, e quello del 1907-1908 tratta la teoria generale delle superfici algebriche. Nei due anni seguenti, 1908-1909 e 1909-1910 i corsi sono invece dedicati allo studio degli integrali abeliani e delle funzioni abeliane, e hanno lo scopo di illustrare l'approccio trascendente alla geometria algebrica. Si tratta di una proposta, articolata in quasi sei anni, e che nel suo complesso poteva rappresentare il percorso di formazione del futuro ricercatore.

Castelnuovo, che sino ai primi anni del secolo si era esclusivamente dedicato alla geometria algebrica, si apre a nuovi interessi che progressivamente lo allontaneranno dalle ricerche in tale ambito. Nel corso di Geometria superiore del 1910-1911 sperimenta contenuti che ritiene particolarmente adatti alla formazione culturale dei futuri insegnanti: esso infatti è dedicato alla Geometria non euclidea, argomento che, come si legge nel quaderno delle sue lezioni,[11] per le attinenze colle matematiche

[11] G. Castelnuovo, CD-*Lezioni, Corso di geometria superiore. Geometria non euclidea,* a.a. 1910-1911, pp. 2-3.

elementari è indicato a «provvedere ad un'esigenza del 2° biennio, cui non si pensa abbastanza», cioè alla preparazione dei docenti di matematica. Coerentemente con la posizione assunta nell'autunno 1909 al Congresso della Mathesis, Castelnuovo afferma che sarebbe opportuno che «nel 2° biennio, accanto a corsi di alta cultura matematica, si tengano insegnamenti che abbiano lo scopo di allargare le idee e di mettere in luce i rapporti tra le matematiche elementari e le matematiche superiori». Un corso sulle geometrie non euclidee, proponendo una riflessione sui principi della disciplina, è indicato allo scopo, poiché tratta di «questioni strettamente legate con l'insegnamento secondario, questioni che nessun insegnante dovrebbe ignorare». L'argomento ha inoltre un profondo valore dal punto di vista della formazione disciplinare, quando lo si affronti analizzando i «vari metodi con cui la geometria non euclidea fu studiata (elementare, differenziale, proiettivo, gruppale)» e riveste anche un «interesse filosofico: sia sotto l'aspetto logico (questioni della indipendenza o compatibilità dei postulati), sia sotto l'aspetto fisico (origini dei postulati; natura dello spazio)».

Il corso non ha carattere elementare, come si evince dal programma.[12] La geometria non euclidea offre perciò un importante esempio di argomento di matematica superiore che ha tuttavia significativi riflessi sulle matematiche elementari.

Nello stesso spirito si può leggere la proposta per il corso di Geometria superiore "Indirizzi geometrici" del 1915-1916. Questo, pur avendo lo stesso titolo, si differenzia da quello del 1903-1904 che aveva carattere

[12] Si veda l'Appendice B.

introduttivo alla teoria delle curve piane e si inseriva in un programma specialistico riguardante lo studio della geometria algebrica articolato, come abbiamo sottolineato, in un percorso di alcuni anni. Il corso del 1915-1916, di durata annuale, ha invece respiro più ampio.[13] Convinto dell'«importanza della cultura generale per l'insegnamento nelle scuole secondarie», egli si rivolge esplicitamente ai futuri insegnanti e, nell'introduzione al quaderno delle lezioni, sottolinea il fatto che «per acquistare una larga conoscenza di discipline geometriche è interessante stabilire una classificazione dei vari indirizzi geometrici, ed esaminare i risultati fondamentali spettanti a ciascun indirizzo». Dato il pubblico cui si rivolge, anche il *metodo* dovrà essere adeguato e Castelnuovo intende dare spazio al «metodo intuitivo seguito spesso dallo scopritore (figure, modelli, ecc.)», che serve a illuminare «il metodo logico», perché «l'insegnamento secondario deve tener conto dell'uno e dell'altro». Queste considerazioni di carattere metodologico si inseriscono nel vivo del dibattito, che all'epoca aveva coinvolto la cultura europea, sul ruolo dell'intuizione e del rigore nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.

I corsi che seguono, nei due anni successivi, quello dedicato agli indirizzi geometrici trattano, rispettivamente, la teoria delle curve algebriche piane e la geometria differenziale, e rientrano pertanto nella tradizione dei corsi di geometria superiore.

Nel 1918-1919 il corso di Geometria superiore è dedicato alla teoria delle equazioni algebriche. Qual è lo «scopo del corso»?

[13] Si veda l'Appendice C, per il programma del corso.

> La distinzione tra geometria e analisi che apparisce nei periodi specialistici non appare opportuna, salvo per argomenti particolari, di fronte ad una visione più larga della scienza. L'algebra e la geometria elementare erano strettamente legate presso i greci; quella però era agli inizi, mentre questa ebbe un grande sviluppo. Coll'introduzione della geometria analitica si restrinsero i legami. Se la teoria delle coniche e delle curve algebriche più semplici può essere studiata direttamente sulla figura, senza intervento di mezzi analitici, si va incontro a serie difficoltà se si vuol fare astrazione dell'algebra, e con ciò si esce dal campo strettamente geometrico. La teoria delle curve e delle superficie algebriche è in realtà algebra interpretata con linguaggio geometrico.
> Considerazioni analoghe possono ripetersi per la geometria differenziale. Le prime proprietà vengono suggerite dall'intuizione geometrica: tangenti asintotiche, linee di curvatura,… Ma ben presto l'uso dell'analisi appare necessario per definire gli enti considerati mediante equazioni differenziali o alle derivate parziali. E progredendo la geometria differenziale diviene lo studio delle dette equazioni coll'aiuto dell'intuizione geometrica.
> Importanza dell'algebra nello sviluppo della matematica; la mancanza di un vero corso d'algebra costituisce una lacuna del nostro insegnamento universitario. Antico e attuale programma del corso di algebra del 1° anno.[14]

Oltre che a colmare la lacuna costituita «dalla mancanza di un vero corso di algebra» nel curriculum universitario, il corso riveste interesse «per i futuri insegnanti» per l'ampio respiro dovuto alla sua trasversalità nei vari rami della matematica, che si palesa quando se ne affronti lo studio dal punto di vista storico.

[14] G. Castelnuovo, CD-*Lezioni*, *Corso di geometria superiore. Equazioni algebriche*, a.a. 1918-1919, I, p. 2.

> La teoria delle equazioni algebriche e la storia della matematica.
> Interesse della storia della matematica anche per l'insegnamento secondario. Come questo insegnamento possa essere ravvivato. Oggi prevale negli insegnanti la preoccupazione logica; inconvenienti dell'eccessivo criticismo. Come la storia della matematica e in generale della scienza metta in luce vantaggi e difetti della costruzione puramente logica. Periodo di sviluppo della matematica e periodo di assestamento.[15]

La storia della matematica, per il cui tramite si realizzava, secondo Vailati, il dialogo tra cultura scientifica e cultura umanistica, dà un'esposizione della teoria seguendo il modo in cui è venuta a formarsi. Per tale ragione è, secondo Castelnuovo, utile mezzo per ovviare ai difetti della presentazione puramente logica. Il metodo genetico, evidenziando i processi euristici, agevola la comprensione profonda dei fondamenti di una teoria.

Per esemplificare il suo punto di vista Castelnuovo entra in argomento. "Equazioni quadratiche e numeri irrazionali" è il primo tema trattato: il riferimento è a Euclide e alle proposizioni del libro II degli Elementi sull'applicazione delle aree, e il loro utilizzo per risolvere problemi di secondo grado, e alla teoria delle proporzioni del libro V.

> Sapevano che essi [i numeri irrazionali] possono approssimarsi con numeri razionali, ma riguardavano come imperfetta una scienza ove l'irrazionale fosse sostituito da un razionale approssimato. È questa la ragione per cui nel risolvere le equazioni quadratiche operavano su segmenti

[15] Ibidem, p. 3.

> anziché sui numeri; mentre il problema ‘trovare due numeri di cui son noti somma e prodotto’ non aveva soluzioni per essi tranne nel caso eccezionale di radici razionali, il problema ‘costruire due segmenti di cui è nota la somma e l’area del rettangolo’ è risolvibile graficamente ogniqualvolta ha soluzioni reali.
> È anche da aggiungere che i greci a quanto pare non erano molto famigliari coi calcoli aritmetici un po’ complicati e la stessa approssimazione di radice quadrata rappresentava un’operazione che cercavano di evitare. E in ogni modo, lasciavano ad una dottrina, la logistica, che essi consideravano come inferiore alla geometria, l’insegnamento dei processi di calcolo. Può pensarsi che l’arte del calcolo sarebbe rimasta allo stato rudimentale se l’astronomia e le scienze applicate non avessero richiesto metodi di approssimazione, i quali però, a quanto pare, hanno destato interesse nell’epoca in cui inizia la decadenza della geometria greca (dopo il 200 a.C.).
> Così avvenne che lo spirito logico e le preoccupazioni di rigore abbiano nociuto allo sviluppo dell’aritmetica, abbiano impedito il sorgere dell’algebra, ed abbiano rallentato il progresso delle scienze sperimentali.[16]

Il tema delle equazioni algebriche è quindi trattato attraverso il suo sviluppo storico: si prosegue esaminando i contributi di Diofanto e della matematica araba, per poi parlare della scuola bolognese, ecc. Nella seconda parte il corso si fa più tecnico, anche se il punto di vista storico non viene abbandonato. Così ne è riassunta l’ultima parte:

> *Contributo di Lagrange*: 1) Esame delle funzioni razionali a più valori e di gruppi di sostituzione che ne lasciano

[16] Ibidem, I, p. 24.

> invariato un valore; 2) Equazione risolvente; Risolvente di Lagrange.
> *Contributo di Abel*: 1) Concetto di irriducibilità e teorema relativo; 2) Classificazione degli irrazionali algebrici e dimostrazione dell'impossibilità di risolvere algebricamente un'equazione di grado > 4; 3) Scoperta di una vasta classe di equazioni risolubili algebricamente.
> *Contributo di Galois*: 1) Risolvente di Galois; 2) Gruppi di Galois.[17]

Il corso di Geometria superiore del 1919-1920 è dedicato alla Geometria non euclidea. Nella presentazione, Castelnuovo scrive:

> Argomento del corso. Come esso risponda al duplice fine che si propone il 2° biennio. Varie opinioni sul modo di raggiungere l'uno e l'altro fine; conviene tenerli uniti o separare i due ordini di studio?[18]

Per rispondere a questo quesito Castelnuovo suggerisce una riflessione sulle «varie tendenze intorno alla più efficace preparazione dei futuri insegnanti», così riassunte:

> a) Cultura intensiva nei rami più elevati della matematica; i suoi inconvenienti.
> b) Cultura estensiva sui rami di matematica che sono diventati o stanno diventando classici, e sulle scienze più affini; vantaggi.
> c) Cultura specifica, metodologica; corso di matematiche elementari proposto dal Consiglio Superiore; vantaggi e inconvenienti.[19]

[17] Ibidem, II, pp. 130-131.

[18] Castelnuovo, CD-*Lezioni*, *Corso di geometria superiore. Geometria non euclidea*, a.a. 1919-1920, I, p. 1.

[19] Ibidem, p. 1.

Alla prima «tendenza», che non richiede di «distinguere i due ordini di studio», Castelnuovo attribuisce degli «inconvenienti», mentre riconosce alla seconda dei «vantaggi». Vengono quindi indicate le ragioni per le quali «un corso di geometria non euclidea sia adatto allo scopo»:

> α) Interesse didattico
> β) Interesse per la cultura, tenendo conto dei vari metodi che hanno servito a studiare la geometria non euclidea (elementare, differenziale, gruppale, proiettivo).
> γ) Interesse filosofico:
> γ_1) dal punto di vista logico (indipendenza e compatibilità dei postulati).
> γ_2) dal punto di vista della teoria della conoscenza (il concetto a priori dello spazio e la necessità logica dei postulati secondo Kant, di fronte alla veduta moderna, secondo cui le nozioni sulla forma dello spazio sono acquistate mediante i sensi).
> γ_2') lo spazio geometrico e lo spazio fisico; loro inseparabilità secondo la teoria della relatività.
> La geometria e l'esperienza; non conviene separare rigidamente la geometria dalle altre scienze come tenderebbe a fare il metodo logico portato alle estreme conseguenze. L'interesse della matematica non sta solo nei ragionamenti con cui i fatti sono collegati, ma pure nel valore dei fatti stessi. L'insegnamento della geometria nelle scuole secondarie.[20]

Rispetto al corso sullo stesso tema del 1910-1911, Castelnuovo motiva in modo più articolato l'interesse del tema per il futuro insegnante. Negli appunti si trovano frequenti riferimenti e rinvii al primo corso, ma in aggiunta

[20] Ibidem, p. 2.

Castelnuovo tiene conto dei nuovi risultati della teoria della relatività, di cui egli fu, nel nostro paese, uno dei primi sostenitori e più attivi divulgatori.

La geometria non euclidea coinvolge vari rami della matematica e fa riflettere sui rapporti della matematica con le scienze fisiche e con la gnoseologia ed è pertanto particolarmente adatta a formare quella «cultura estensiva» che è richiesta all'insegnante. Una «cultura intensiva» è invece strumento essenziale per il lavoro del ricercatore.

La risposta al quesito inizialmente posto, si lega quindi alla possibilità di provvedere, allo stesso tempo, alla formazione di una «cultura intensiva» e di una «cultura estensiva».

Il dibattito sulla riforma del sistema scolastico, interrottosi con la guerra, riprese con l'istituzione di una Commissione del Consiglio superiore dell'Istruzione, presieduta dall'ex ministro Luigi Credaro, che nel 1919 produrrà un *Parere* sugli ordinamenti universitari. Per la sezione di matematica, la relazione, redatta da Pincherle, riprendeva alcuni dei temi che erano stati argomento di riflessione negli anni precedenti.[21] Dato «il duplice scopo» della laurea in matematica, cioè quello di avviare «i giovani alla ricerca originale» e quello di «preparare gli insegnanti di matematica per le scuole medie dei vari gradi», si proponeva «che nel secondo biennio del corso, ven[isse] distinto più nettamente il duplice fine», dato che il candidato all'insegnamento perdendo, «per più

[21] I brani del *Parere* sono tratti da S. Di Sieno, *Storia e didattica*, in, *La Matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre*, a cura di S. Di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi, Marcos y Marcos, Milano, 1998, pp. 763-816.

anni, il contatto con quelle parti della matematica che dovrà insegnare» si trova disorientato nell'affrontare «un mondo troppo diverso da quello, in cui ha percorso gli studi universitari». Per tale ragione per i corsi che si indirizzano ai futuri insegnanti, gli argomenti di matematica superiore dovrebbero essere scelti opportunamente:

> Con ciò non si vuol dire che fra la matematica elementare e gli studi superiori vi sia antinomia. Questi sono necessari a quelli, e senza un corso di analisi superiore, di geometria superiore, non può essere proiettata la necessaria luce su molti punti degli elementi. Ma in questi stessi corsi superiori è diversa l'intonazione, che conviene alle due categorie di candidati: per il futuro scienziato si richiede in essi un carattere eminentemente monografico; preferibilmente propedeutico, invece, per chi si avvia all'insegnamento.[22]

Nella relazione di Pincherle si riconoscono le stesse espressioni linguistiche usate da Castelnuovo nei suoi quaderni, segno di opinioni condivise.

La «diversa l'intonazione, che conviene alle due categorie di candidati», perfezionava l'antica proposta di Pincherle di creare due tipi di Laurea in Matematica, l'una per la ricerca, l'altra per l'insegnamento i cui i corsi di matematica superiore dovevano avere respiro più ampio e non quel carattere «monografico» che si addice invece ai corsi che si rivolgono ai futuri ricercatori.

I corsi di Geometria superiore tenuti da Castelnuovo negli anni 1910-1911, 1915-1916, 1918-1919, 1919-1920, che non hanno carattere monografico, intendevano pertanto provvedere alla formazione della «cultura estensiva» che compete all'insegnante.

[22] Ibidem, p. 800.

2. *I corsi di Matematiche complementari*

Dopo la soppressione delle Scuole di Magistero, annesse alla Facoltà di Lettere e Filosofia e alla Facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali, a decorrere dall'anno scolastico 1920-1921,[23] il nuovo ministro Orso Maria Corbino istituiva la cosiddetta *Laurea mista in Scienze fisiche e matematiche*.[24] Un successivo decreto[25] istituiva la cattedra di Matematiche complementari, rendendone l'esame obbligatorio. Sulla Laurea mista, che nell'intenzione di Corbino risolveva il problema della formazione disciplinare degli insegnanti, il consenso non fu unanime. Nei suoi confronti l'opinione di Castelnuovo fu estremamente negativa, prevedendo che i suoi laureati «usciranno dall'università quali matematici di insufficiente cultura e fisici senza abilità sperimentali, riuscendo mediocri insegnanti dell'una e dell'altra disciplina».[26] Castelnuovo non nascondeva il timore che la nuova via aperta dalla Laurea mista potesse «portare un abbassamento della cultura dei futuri professori secondari di matematica e di fisica», in quanto i soli corsi del primo biennio non erano sufficienti a dare un'adeguata preparazione. «Come si può riparare a tali deficienze con un solo corso di matematica complementare nel secondo biennio?» si domandava Castelnuovo.

[23] R.D. 8 agosto 1920, art. 8. Ministro della Pubblica Istruzione era all'epoca Benedetto Croce.

[24] R.D. 24 novembre 1921.

[25] R.D. 19 febbraio 1922.

[26] Brano tratto dalla *Relazione* redatta da Castelnuovo per la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma e presentata nella seduta del 14 marzo 1922. Cfr. Gario P., *Guido Castelnuovo e il problema della formazione degli insegnanti*, Studies in the History of Modern Mathematics, V, «Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo», 2, 74, 2004, pp. 103-121.

> Questo corso, utile, come fu già detto, a coordinare nozioni di matematica superiore acquistate in altri insegnamenti, non può certo sostituire questi. E quando pure si volesse ridurre ad un mosaico di frammentarie notizie di Analisi, Geometria, Meccanica, non potrebbe mai tener le veci di corsi organici, i quali devon far vedere come la scienza si costruisca e si svolga anche a giovani che, pur non riuscendo a contribuire a tale sviluppo, devono della scienza di cui insegnano gli elementi conoscere qualcuno dei rami più elevati.[27]

A seguito del trasferimento di Enriques all'Università di Roma, Castelnuovo tenne per alcuni anni, a partire dal 1923-1924, il corso di Matematiche complementari. Gli argomenti trattati sono: "Geometria non euclidea" (1923-1924, I semestre), "Costruzioni con riga e compasso. Poligoni regolari" (1923-24, II semestre), "Numeri trascendenti"[28] (1924-1925, I semestre), "Massimi e minimi"[29] (1925-1926).

Nel riassumere le diverse opinioni sulla preparazione degli insegnanti di matematica, che nel corso di Geometria superiore del 1919-1920 erano state indicate come tre diverse «tendenze», Castelnuovo esprime ora una certa preoccupazione nei riguardi della tendenza alla «cultura estensiva» perché «l'allargamento della cultura in molti rami di matematica e scienze affini» può condurre a corsi di «carattere enciclopedico» che danno «nozioni superficiali»[30]. In queste parole si deve leggere una critica alla Laurea mista, in cui la necessità di una cultura estensiva

[27] Ibidem, pp. 118-119.

[28] Il programma del corso è riportato nell'appendice D.

[29] Il programma del corso è riportato nell'appendice E.

[30] G. Castelnuovo, CD-*Lezioni, Corso di Matematiche complementari. Geometria non euclidea*, a.a. 1923-1924, I, pp. 1-2.

si era tradotta in un guazzabuglio, disattendendo quanto previsto dal progetto di Laurea didattica del 1919.

«Io intendo il corso di matematica complementare come lo studio di questioni di matematiche superiori che hanno attinenza colle matematiche elementari» scrive Castelnuovo nei suoi appunti e per non ridurre il corso a un mosaico di frammentarie nozioni,

> anziché diffondermi su molti argomenti di questo tipo, tratterrò con sufficiente ampiezza due argomenti
> 1) Geometria non euclidea (1° sem)
> 2) Problemi risolubili per riga e compasso e in particolare problema della divisione del cerchio (2° sem).
> Così potranno esser esaminate questioni geometriche legate al primo soggetto e questioni algebriche legate col secondo.[31]

Le lezioni fino a quasi tutto gennaio sono dedicate agli «sviluppi elementari» e terminano con un cenno alla «geometria non-euclidea secondo l'indirizzo proiettivo», come introduzione ai tre tipi di metrica. Il corso si limita dunque agli sviluppi elementari dell'argomento, diversamente da quelli trattati nell'ambito dei corsi di Geometria superiore. Il secondo semestre è dedicato alle costruzioni con riga e compasso e negli appunti sono esaminati gli aspetti algebrici mentre, per i dettagli delle costruzioni geometriche, Castelnuovo rinvia ad altri testi.

4. *Conclusioni*

L'impegno di Castelnuovo per i corsi di Matematiche complementari fu abbastanza breve, essendosi limitato al trien-

[31] Ibidem, p. 2.

nio 1923-1926. Nel secondo semestre del 1927, Castelnuovo tenne un corso di Matematica superiore, dal titolo "Lunghezze, aree, volumi dal punto di vista storico". Si tratta di una prima testimonianza dell'interesse che lo porterà a pubblicare molti anni più tardi il volume *Le Origini del Calcolo infinitesimale nell'era moderna* (1938). Rispetto al testo che sarà dato alle stampe, ci sono differenze significative. Nel corso, Castelnuovo si spinge più avanti, sino ad accennare agli sviluppi allora più recenti (integrale di Lebesgue) e l'attenzione posta alla teoria dell'equivalenza e alle critiche moderne (Hilbert-Dehn 1903) evidenzia l'intento di approfondire aspetti fondazionali importanti per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.

Dal 1927-1928, Castelnuovo tenne regolarmente, sino al suo pensionamento, il corso di Calcolo delle probabilità, la cui cattedra era stata istituita per suo stesso interessamento. «Io non vedo ancora introdotte sistematicamente nell'insegnamento secondario quelle semplificazioni, quei procedimenti dimostrativi grafici, quei richiami frequenti alle applicazioni, che da qualche anno ci studiamo di includere nei nostri corsi universitari»,[32] così si era espresso Castelnuovo al congresso della Mathesis nel 1909, auspicando per l'insegnamento secondario una maggiore attenzione ai metodi della matematica che più interessano le sue applicazioni. In queste parole si legge l'adesione al pensiero di Klein,[33] che assegnava

[32] G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione internazionale pel Congresso di Cambridge*, Atti del II° congresso della "*Mathesis*", Padova 1909, All. F, pp. 1-4; p. 2.

[33] Cfr. P. Gario, *Quali corsi per la formazione del docente di matematica? L'opera di Klein e la sua influenza in Italia*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», sez. A, s. VIII, 2006, IX-A, pp. 131-141.

alla matematica applicata un ruolo importante nell'insegnamento secondario. Infatti, «il valore educativo della matematica sarebbe molto accresciuto se, nell'insegnamento, accanto ai procedimenti logici che servono per ricavare i teoremi dai postulati si accennasse mediante quale depurazione questi si ricavano dall'osservazione, e d'altra parte, con quali coefficienti i risultati teorici si verifichino in realtà»[34] scrive Castelnuovo nei suoi appunti del corso di Geometria superiore tenuto nel primo semestre del 1913-1914, dedicato ai rapporti tra «matematica esatta e matematica approssimata», ovvero tra i metodi della matematica *pura* e quelli utilizzati nelle applicazioni. Nel 1914-1915 Castelnuovo dedicherà il corso di Geometria superiore al Calcolo delle probabilità, prima testimonianza di un nuovo interesse, che trae origine dall'impegno e dalla riflessione nei confronti dell'insegnamento secondario, e a cui rivolgerà le sue ricerche negli anni a venire.[35]

[34] G. Castelnuovo, CD-*Lezioni*, *Corso di Geometria superiore. Matematica di precisione e matematica di approssimazione*, a.a. 1913-1914, I, p. 2.

[35] Cfr. P. Gario, *Quali corsi per la formazione del docente di matematica? I congressi dei professori di matematica*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», sez. A, s. VIII (in stampa).

Appendice A - *Corsi di Geometria superiore*

1903-04	Indirizzi geometrici
1904-05	Geometria sulle curve
1905-06	Geometria sulle curve. Curve algebriche sgembe
1906-07	Sistemi lineari di curve piane. Superficie razionali
1907-08	Superficie algebriche
1908-09	Funzioni algebriche e loro integrali. Integrali abeliani
1909-10	Integrali abeliani e loro inversione. Funzioni abeliane
1910-11	Geometria non-euclidea
1911-12	Geometria differenziale
1912-13	Geometria sulle curve algebriche
1913-14	Matematica di precisione e matematica di approssimazione Integrali abeliani
1914-15	Calcolo delle probabilità
1915-16	Indirizzi geometrici
1916-17	Geometria differenziale
1917-18	Curve algebriche
1918-19	Equazioni algebriche
1919-20	Geometria non euclidea
1920-21	Funzioni algebriche e loro integrali
1921-22	Funzioni abeliane
1922-23	Curve algebriche piane e sghembe

Appendice B - *Geometria non euclidea*
Corso di Geometria superiore, 1910-11

I. *Indirizzo elementare*

1. Il postulato delle parallele da Euclide a Gauss.
2. Definizione e proprietà delle rette parallele secondo Lobatschefski e Boljai. Somma degli angoli di un triangolo. Perpendicolare comune a due rette non secanti.
3. Punti corrispondenti sopra due rette. I tre tipi di cicli e di sfere; in particolare l'oriciclo e l'orisfera. Nella stella impropria di rette e sulla orisfera vale la geometria euclidea.
4. Archi di oricicli concentrici compresi fra gli stessi raggi. Formule fondamentali della trigonometria iperbolica.
5. Valore logico e possibilità fisica della geometria non-euclidea.

II. *Indirizzo metrico-differenziale*

6. Coordinate curvilinee sopra una superficie e forma dell'elemento lineare. Raggi principali di curvatura in un punto. Curvatura di Gauss.
7. Superficie applicabili; teorema di Gauss. Geodetiche di una superficie. Coordinate geodetiche e forma che assume l'elemento lineare. Caso delle superficie a curvatura costante; teorema di Minding. Superficie rotonde a curvatura costante negativa.
8. Teorema di Beltrami sulla rappresentazione piana delle superficie a curvatura costante. Rappresentazione di una superficie pseudosferica nell'intorno del cerchio limite. Geodetiche parallele. Angolo di parallelismo. Immagine dei tre tipi di cicli.
9. Regioni piane ove vengono rappresentati i tre tipi di superficie pseudosferiche e rotonde. Rappresentazione conforme di una superficie pseudosferica nella sfera o nel piano; forme corrispondenti dell'elemento lineare.
10. La Memoria di Riemann. Postulati cui deve soddisfare una determinazione metrica e forma che ne consegue per l'ele-

mento lineare. Forme differenziali quadratiche equivalenti. Geodetiche e superficie geodetiche. Varietà a curvatura costante; forma che Riemann assegna al loro elemento lineare. Con qual grado di libertà una tal varietà possa applicarsi sopra se stessa. Come solo l'esperienza possa fornire, nel caso del nostro spazio, il valore della curvatura.

11. Forma dell'elemento lineare in uno spazio a curvatura costante secondo Beltrami. Equazioni lineari delle geodetiche. Movimenti dello spazio nominato in se stesso. Angolo di due direzioni. Traiettorie ortogonali di una stella di geodetiche. Altri sistemi di coordinate adottate da Beltrami.
12. Il problema di Helmholtz di caratterizzare mediante postulati il gruppo dei movimenti di una varietà a curvatura costante. Complementi portati da Lie.

III. *Indirizzo metrico-proiettivo*

13. La geometria proiettiva e le proprietà metriche secondo la scuola francese, tedesca ed inglese. I risultati di Cayley.
14. Costruzione (secondo Klein) della geometria proiettiva indipendentemente dal postulato delle parallele. Doppio rapporto e coordinate proiettive senza ricorrere agli ordinari concetti metrici.
15. Condizioni cui devono soddisfare le misure sulle forme di 1ª specie. L'assoluto sulla forma di 1ª specie. Formula generale della distanza, e particolarità delle determinazioni ellittica, iperbolica e parabolica.
16. Generalità sulle determinazioni metriche sul piano. Il piano della geometria ellittica, la stella di rette e la sfera. Movimenti sul piano ellittico. Il piano ellittico è una superficie unilatera.
17. Il piano della geometria iperbolica e la geometria di Lobatschefski e Boljai, e la rappresentazione di Beltrami. I movimenti del piano iperbolico.
18. Il piano della geometria parabolica e la geometria Euclidea. Movimenti del piano parabolico. Similitudini.

19. Classificazione proiettiva delle quadriche nello spazio a tre dimensioni. Rette reali ed immaginarie delle quadriche. Collineazioni di una quadrica in sé.
20. Geometria iperbolica dello spazio e relativi movimenti.
21. Geometria ellittica dello spazio. I movimenti dello spazio ellittico. Superficie e parallele di Clifford.
22. Geometria parabolica dello spazio.

Appendice C - *Indirizzi geometrici*
Corso di Geometria superiore, 1915-16

I. *Introduzione*

1. Cenno sui problemi della geometria non euclidea ed i vari aspetti sotto cui può essere studiata.
2. Geometria astratta; varie interpretazioni concrete dei punti, rette o piani astratti: a) legge di dualità; b) geometria dei cerchi di un piano; c) geometria delle coppie o terne di punti di una retta.
3. Cenno sugli iperspazi.

II. *Classificazione degli indirizzi geometrici secondo Klein*

4. Nozioni generali sui gruppi di operazioni
5. Distinzione tra geometria e topografia. Gruppo principale delle similitudini.

III. *Geometria proiettiva*

6. Gruppo delle collineazioni. Doppio rapporto e coordinate proiettive.
7. Nozioni generali sugli invarianti e covarianti. Invarianti della quartica binaria.
8. Curve algebriche piane. Numero dei punti che determinano una curva di ordine *n*. Paradosso di Cramer.
9. Caratteri di una curva algebrica piana. Formule di Plücker.
10. Proprietà proiettive differenziali. Tangenti asintotiche di una superficie in un punto; tangenti coniugate.
11. Linee asintotiche di una superficie. Asintotiche di una rigata. Le superficie a punti parabolici sono le sviluppabili.

IV. *Geometria delle inversioni*

12. Ogni affinità circolare o sferica può scindersi nel prodotto di una inversione per una similitudine. Carattere invariantivo dell'angolo.
13. Rette isotrope e curve di lunghezza nulla (o isotrope). I due sistemi di curve isotrope sopra una superficie.

14. Tangenti di curvatura ad una superficie in un punto. Linee di curvatura.
15. Superficie di cui ogni punto è ombelico. Linee di curvatura delle sviluppabili. Superficie su cui un sistema di linee di curvatura si compone di cerchi.
16. Ciclide di Dupin.
17. Sistemi tripli ortogonali di superficie; teorema di Dupin. Esempi di sistemi tripli ortogonali.

V. *Trasformazioni conformi*
18. Trasformazioni conformi nel piano a funzioni di variabile complessa. Esempi. Affinità circolare e trasformazione lineare di una variabile.
19. Proprietà invarianti per trasformazioni conformi. Sistemi ortogonali isotermi nel piano. Cenno sulle ricerche di Kasner.
20. Trasformazioni conformi nello spazio; teorema di Liouville.

VI. *Trasformazioni cremoniane*
21. Trasformazione quadratica.
22. Trasformazione cremoniana tra piani.

VII. *Trasformazioni puntuali continue*
23. Cenno intorno alle trasformazioni equivalenti.

VIII. *Estensione del concetto di gruppo di trasformazione*
24. Cenno sulle trasformazioni non puntuali; esempio di trasformazioni di contatto.
25. Trasformazione birazionale tra due curve. Invariantività del genere.
26. Coordinate curvilinee sopra una superficie. Cenno intorno alle trasformazioni conformi tra due superficie e intorno all'applicabilità delle superficie.

Appendice D - *Numeri algebrici e numeri trascendenti*
Corso di Matematiche complementari, 1924-25

1. Grandezze incommensurabili e numeri irrazionali.
2. Irrazionali provenienti da estrazioni di radici. Irrazionali provenienti dalla risoluzione di equazioni di 2°, 3° e 4° grado.
3. Campo di razionalità. Equazioni irriducibili in un campo. Esempio relativo all'equazione binomica di grado primo.
4. Irresolubilità per radicali di una equazione generale di grado superiore al 4°.
5. Numeri algebrici; loro proprietà fondamentali.
6. L'insieme dei numeri algebrici è numerabile; il continuo non è numerabile. Esistenza di numeri trascendenti.
7. Frazioni continue; proprietà fondamentali.
8. Approssimazione di un numero algebrico mediante un numero razionale. Criterio di Liouville per costruire numeri trascendenti.
9. Frazioni continue periodiche.
10. Cenni storici sui numeri π ed e. Scoperta di logaritmi naturali. Relazione tra e e π. Irrazionalità di e e π.
11. Dimostrazione della trascendenza di e.
12. Dimostrazione della trascendenza di π.
13. Il teorema generale di Lindemann. Impossibilità di rettificare il cerchio con strumenti che traccino curve algebriche; la quadratrice. Particolarità della curva logaritmica e sinusoide.

APPENDICE E - *Massimi e Minimi*
Corso di Matematiche complementari, 1925-26

I. *Teoria geometrica degli isoperimetri*

1. Massimi e minimi relativi al triangolo, determinati sia nell'ipotesi dell'esistenza dell'estremo, sia dimostrando tale esistenza.
2. Curva di data lunghezza che con la corda congiungente gli estremi racchiude area massima; procedimento di Steiner nell'ipotesi dell'esistenza del massimo; giustificazione di Carathéodory.
3. Proprietà isoperimetrica del cerchio dimostrata col principio di simmetrizzazione; procedimento di Steiner e dimostrazione rigorosa di Study.
4. Dimostrazione di Frobenius della proprietà isoperimetrica del cerchio. Combinazione lineare delle aree secondo Brunn-Minkowski.
5. Combinazione lineare dei volumi nello spazio. Proprietà isoperimetrica della sfera. Cenno sulla dimostrazione del Tonelli.

II. *Massimi e minimi nell'Analisi*

6. Funzione di una variabile, limite superiore o inferiore. Funzione continua; continuità uniforme. Massimi o minimi di una funzione continua.
7. Funzioni di due o più variabili. Limiti superiori o inferiori. Funzione continua; esistenza di massimi o minimi.
8. Esistenza di massimi o minimi vincolati. Es. i triangoli di perimetro minimo iscritti in un dato triangolo; punto interno ad un triangolo le cui distanze dai tre vertici danno somma minima.
9. Ricerca analitica dei massimi e minimi relativi delle funzioni di una variabile col mezzo della prima o delle successive derivate. Caso della funzione implicita.
10. Applicazione geometrica: il teorema dei quattro vertici di un ovale.

11. Ricerca analitica dei massimi o minimi delle funzioni di due variabili. Discussione sull'Hessiano. Trattazione analitica del secondo problema del numero 8.
12. Massimi e minimi vincolati. Es. massimo e minimo semidiametro di una quadrica a centro.
13. Massimo valore assoluto di un determinante ad elementi reali, soddisfacenti a date uguaglianze. Teorema di Hadamard.

III. *Massimi e minimi delle funzioni di linee*
14. Insieme di linee; linea limite. Condizioni sufficienti per la esistenza di una linea limite. Criteri di Ascoli e Arzelà.
15. Teorema di Hilbert sopra gli insiemi di linee rettificabili. Linea di lunghezza minima congiungente due punti sul piano entro una regione assegnata o sopra una superficie. Applicazione del teorema di esistenza.
16. Primo problema del calcolo delle variazioni. Equazioni di Eulero. Lemma per giustificarlo.
17. Osservazioni critiche. Condizioni necessarie per un minimo o massimo. Condizioni di Legendre e Jacobi. Condizioni sufficienti secondo Weierstrass.
18. Massimo o minimo con estremi mobili. Minima distanza di un punto da una curva sul piano.
19. Regola isoperimetrica di Eulero. Curva di data lunghezza che con la retta congiungente gli estremi racchiude area massima.
20. Il primo problema del calcolo delle variazioni quando la curva viene rappresentata parametricamente.
21. Generalità di geometria differenziale. Prima forma differenziale quadratica; angoli, elementi di area. Superficie applicabili.
22. Seconda forma differenziale quadratica. Raggio di curvatura di una curva tracciata sulla superficie. Teorema di Meusnier. Curvatura delle sezioni normali; teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin. Cenno sulle linee asintotiche e di curvatura.

23. Equazioni differenziali di una geodetica sopra una superficie. Proprietà del piano osculatore. Sistema di coordinate geodetiche; curve geodeticamente parallele.
24. Unicità della geodetica congiungente due punti sufficientemente vicini. Sistema di coordinate polari geodetiche. Un arco di geodetica segna il cammino minimo assoluto fra due punti abbastanza vicini.
25. Variazioni di una geodetica in uno spostamento infinitesimo. Geodetiche normali ad una curva (evolvente) e tangenti ad un'altra (evoluta). Fuoco coniugato di un punto sopra una geodetica uscente da esso. Arco di geodetica che è minimo relativo o minimo assoluto.

ERIKA LUCIANO[1]

ARITMETICA E STORIA NEI LIBRI DI TESTO DELLA SCUOLA DI PEANO

1. *Peano didatta e storico della matematica*

Il profondo interesse di Peano[2] per la storia e per la didattica della matematica, la sua salda padronanza delle lingue classiche e l'impegno a condurre l'insegnamento con metodo storico affiorano, oltre che dalla fitta rete di corrispondenze documentata dall'Archivio cuneese,[3] nelle testimonianze di allievi e collaboratori.[4]

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del Progetto MIUR "Storia delle scienze matematiche", Unità di Torino.

[2] Per le opere di G. Peano e per gli articoli comparsi sulle riviste da lui dirette, le fonti consultate si trovano nei cd-roms *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002 e *Le Riviste di Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2003. Gli scritti di Peano sono qui citati con la relativa sigla del cd-rom *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, consultabile nel sito www.dm.unito.it/collanacdrom/operaomnia/scritti.pdf .

[3] Cfr. i carteggi di G. Peano con F. Amodeo, A. Borio, G. Bordiga, E. Bortolotti, U. Cassina, O. Chisini, C. Ciamberlini, M. Cipolla, F. Enriques, F. Gerbaldi, S. Pankurst, P. Quarra, G. Scorza, S. Timpanaro, E. Togliatti, G. Treccani, G. Vacca, E. Viglezio e L. Viriglio nel cd-rom *L'Archivio Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, N. Nervo, T. Armano, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002.

[4] M. Gliozzi e U. Cassina conservano vivo il ricordo delle conversazioni settimanali "di tutte le cose e di altro ancora" a casa di Peano.

L'impegno profuso da Peano nel campo della didattica e della storia della matematica si concretizza non solo nella sua lunga docenza all'Università di Torino, sulle cattedre di Calcolo Infinitesimale, di Analisi Superiore e, dal 1924-25, su quella di Matematiche Complementari, ma si esplica anche in alcuni ambiziosi progetti editoriali, promossi con entusiasmo: il *Formulario di Matematica*, apparso in cinque edizioni (1894-1908), la «Rivista di Matematica» [nel seguito abbreviata con la sigla «RdM»], di cui sono pubblicati otto volumi fra il 1891 e il 1906 e il *Dizionario di Matematica*.[5] Si tratta di iniziative volte espressamente a favorire i contatti fra il mondo dell'Università e quello della scuola, creando "libere palestre" di discussione scientifica. L'invito *Ai lettori* posto *in exergo* al primo volume della «Rivista di Matematica» ribadisce, ad esempio, che essa dovrà ospitare, accanto ad articoli di ricerca matematica, interventi sulla storia e la didattica e recensioni di libri di testo.[6]

Cfr. U. Cassina, *Su l'opera filosofica e didattica di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo Scientifico, 1953, pp. 16-17 e M. Gliozzi, *Giuseppe Peano (27 augusto 1858 – 20 aprile 1932)*, «Archeion», 14, 1932, p. 255.

[5] Presentato al Congresso della Mathesis di Livorno del 1901 il *Dizionario di matematica. Parte I, Logica Matematica* (1901h, pp. 1-8, 1901j, pp. 160-172) avrebbe dovuto costituire un palliativo per ovviare al problema della mancante uniformità del linguaggio matematico, spesso prolisso e disseminato di locuzioni oscure, fornendo agli insegnanti una guida per selezionare il lessico da utilizzare nelle spiegazioni. Nonostante l'entusiasmo con cui Peano e alcuni collaboratori, fra cui G. Vailati, perorano l'iniziativa, il progetto del *Dizionario* si arena poco dopo. Peano, tuttavia, continua per lungo tempo ad accarezzare l'idea di proseguirne l'edizione e, nel 1927, pubblica alcuni stralci di un *Vocabolario matematico* (cfr. G. Peano, *Vocabulario Mathematico*, 1927f, pp. 270-272) contenente un elenco di termini matematici, per ognuno dei quali è fornita la definizione, la storia e l'etimologia.

[6] [G. Peano], *Ai lettori*, «RdM», 1, 1891, p. non numerata.

I contatti con il mondo della scuola, pur coltivati scrupolosamente da Peano fin dal 1891, si rinsaldano dopo il 1910, quando il matematico piemontese vive con amarezza lo scontro in Facoltà con alcuni esponenti della Scuola di Geometria Algebrica, che criticano il suo insegnamento dell'Analisi Superiore, basato sull'utilizzo del *Formulario* come principale libro di testo.[7] Sollevato da questo incarico, Peano rivolge il suo impegno al mondo della scuola: intensifica la partecipazione alle attività della Mathesis, si rende disponibile come membro nelle commissioni per gli esami di maturità in varie sedi d'Italia e, nel 1914, istituisce con T. Boggio e M. Bottasso le *Conferenze Matematiche Torinesi.* Da questa iniziativa, che proseguirà con successo fino al 1924, traggono origine numerosi articoli didattici e divulgativi[8] e la pubblicazione delle tavole numeriche.[9]

Le rapsodiche riflessioni di Peano sulla storia della matematica devono essere rintracciate in un vasto zibaldone di scritti, poco noti e talora, a torto, considerati occidui.[10]

[7] Cfr. C. S. Roero, *Giuseppe Peano. Matematica, cultura e società,* Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001, pp. 67-73 e C. S. Roero, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro,* in R. Allio (a cura di), *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento,* Torino, Stamperia artistica nazionale, 2004, pp. 141-143.

[8] Cfr. ad esempio T. Boggio, *Sui numeri immaginarii,* «Bollettino Mathesis», 7, 1, 1915, pp. 42-44; R. Frisone, *Una teoria semplice dei logaritmi,* «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 52, 1917, pp. 846-853; L. Viriglio, *I segni numerali romani,* «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 52, 1916, pp. 48-54 e *Le parole italiane di matematica derivate dal greco,* «Bollettino di Matematica», 16, 1918, pp. 25-41.

[9] Cfr. G. Peano, Prefazione e note alle *Tavole numeriche,* 1918b, pp. 1-35.

[10] T. Viola sottolinea invece l'importanza di queste note asserendo (T. Viola, *Giuseppe Peano, Opere scelte,* «Bollettino UMI», s. 3, 16,

Questo comprende i lavori di taglio logico-fondazionale, corredati da introduzioni storiche in cui Peano traccia incisivi affreschi sullo sviluppo del linguaggio ideografico, del calcolo geometrico e dell'analisi infinitesimale,[11] gli articoli sulle definizioni e sugli *Elementi* di Euclide, i volumi di dispense per i corsi di Calcolo Infinitesimale e due saggi, ampi ed articolati, in cui illustra le biografie scientifiche di L. Richeri, G. F. Peverone e G. Benedetti, enucleando i loro contributi più rilevanti.[12] Particolarmente interessante per comprendere il programma metodologico di Peano è invece il bel saggio del 1910 *Sui*

1961, pp. 351-352): «non c'è pagina di quelle note che non contenga qualcosa di fortemente originale ed interessante, e frequenti sono gli spunti addirittura divertenti e spiritosi [...]. In questo senso il loro interesse è sommo: segnaliamo per es. le note, già citate, in cui sono ridotti in formule alcuni libri degli *Elementi* d'Euclide, note che oggi e sempre potrebbero utilmente entrare in qualunque corso di matematiche complementari o di storia della matematica».

[11] Cfr. G. Peano, *Formules de logique mathématique*, 1900a, pp. 1-41; *Saggio di calcolo geometrico*, 1896d, pp. 952-975 e *Derivata e differenziale*, 1913a, pp. 47-69.

[12] Cfr. G. Peano, *Sui numeri irrazionali*, 1899c, pp. 126-140; *Le definizioni in matematica*, 1911d, pp. 49-70; *Le definizioni per astrazione*, 1915k, pp. 106-120; *Le definizioni in matematica*, 1921d, pp. 175-189; *Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules*, 1890d, pp. 73-74; *Sommario dei libri VII, VIII, IX di Euclide*, 1891d, pp. 10-12; *Sommario del libro X d'Euclide*, 1892c, pp. 7-11; *Sul libro V di Euclide*, 1906c, pp. 87-91; *Definitione de numeros irrationale secundo Euclide*, 1915e, pp. 31-35; *Sommario di Analisi Infinitesimale, Lezioni per il corso di integrazione dettate dal prof. G. Peano, Dispense 1-15*, 1919c, 126 p.; *Un precursore della Logica matematica*, 1894e, p. 120; *Gio. Francesco Peverone ed altri matematici piemontesi ai tempi di Emanuele Filiberto*, in *Studi pubblicati dalla Regia Università di Torino nel IV centenario della nascita di Emanuele Filiberto*, 1928f, pp. 181-189.

fondamenti dell'Analisi,[13] nel quale egli rivendica il ruolo essenziale del rigore nell'insegnamento pre-universitario e sottolinea l'importanza di fornire agli alunni una chiave di interpretazione dei risultati matematici attraverso la loro contestualizzazione storica.

2. *La storia della matematica e gli assunti epistemologici*

Gli assunti epistemologici che orientano Peano e la sua Scuola nell'indagine storiografica si possono compendiare in alcune semplici linee guida.

La storia consente, in primo luogo, di fondare una disciplina matura come la matematica, mettendo in risalto le "ragioni storiche e logiche" delle verità matematiche e le connessioni fra le varie teorie, ed evidenziando le modalità con cui l'esigenza di rigore è stata gradualmente soddisfatta dal processo di formalizzazione.[14] L'analisi storica alimenta dunque l'attività di ricerca e fornisce il quadro concettuale in cui inserire i più recenti risultati. Assumono perciò un preciso significato gli accurati studi condotti da Peano, G. Vacca e G. Vailati sulle questioni di priorità e sui cosiddetti "precursori",[15] un termine che,

[13] G. Peano, *Sui fondamenti dell'Analisi*, 1910a, pp. 31-37. Sulle concezioni didattiche di Peano cfr. anche G. Peano, *Contro gli esami*, 1912o; *Problemi pratici*, 1922f, pp. 88-89 e *Sui libri di testo per l'Aritmetica nelle scuole elementari*, 1924d, pp. 237-242.

[14] Cfr. Viola, *Giuseppe Peano* ..., 1961 cit., pp. 352-355.

[15] Cfr. Peano, *Un precursore* ..., 1894e cit., p. 120; G. Vacca, *Sui precursori della logica matematica*, «RdM», 6, 1899, pp. 121-125, 183-186 e M. Gliozzi, *Francesco Lana proecursore de aviatione*, «Schola et Vita» (nel seguito abbreviata «SeV»), 5, 1930, pp. 369-369. Cfr. anche G. Peano, *Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica*, 1898e, pp. 83, 89: «Si

pur carico oggi di valenze negative, costituisce uno degli strumenti metodologici dell'indagine storiografica maggiormente apprezzati nella Scuola di Peano.

Questo particolare registro dell'attività storica, imperniato sulla considerazione del «valore universale ed eterno delle verità matematiche»,[16] richiede lo studio critico comparato delle varie teorie, sulla base delle opere a stampa, dei carteggi e dei manoscritti di differenti civiltà. Diventa allora essenziale poter accedere alle fonti originali grazie a edizioni critiche accurate, che devono integrare la traduzione a fronte, il più possibile aderente al testo, con un dettagliato apparato di note storiche, chiose filologiche, riferimenti bibliografici, raffronti ad altre edizioni e rimandi alle interpretazioni moderne dei singoli risultati. Esemplare, in tal senso, risulta l'edizione curata da Vacca del primo libro degli *Elementi* di Euclide,[17] adottata più volte da Peano nel corso di Matematiche Complementari, in cui questi elementi sono sapientemente dosati, senza indulgere al commento erudito e sterile.[18]

badi poi che le indicazioni storiche contenute nel Formulario non pretendono punto di rimontare alla prima origine della Proposizione in questione; ma solo di indicare un Autore ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica»; «... la nota storica d'ogni Proposizione indica il più antico lavoro in cui chi propone la nota incontrò la Proposizione. Una stessa Proposizione può portare più indicazioni storiche, corrispondenti a civiltà diverse, ovvero ad Autori che successivamente la generalizzarono e la perfezionarono. Altrimenti ogni citazione annulla le posteriori».

[16] Viola, *Giuseppe Peano* ..., 1961 cit., p. 353.

[17] G. Vacca, *Euclide. Il primo libro degli Elementi*, Firenze, Sansoni, 1916.

[18] Cfr. le lettere di G. Peano a G. Vacca del 30.11.1914; 24.1.1915; 21.11.1915; 31.1.1916; 9.2.1916; 15.3.1916; 27.4.1916 e del 1.11.1929

L'accuratezza delle trascrizioni e dell'analisi semantica, l'importanza attribuita alle ricostruzioni etimologiche e il legame con le ricerche fondazionali costituiscono dunque i criteri basilari che soggiacciono alle ricerche di storia della matematica condotte nella Scuola torinese. Il materiale raccolto confluisce, in larga misura, nell'apparato storico-critico del *Formulario*, curato per la maggior parte da Vacca[19] e Vailati, che costituisce l'elemento catalizzatore della ricerca storiografica di Peano e dei suoi collaboratori e, nello stesso tempo, ne motiva i principi ispiratori:

> Qu'est que c'est l'histoire d'une science? On peut penser que ce soit l'*exposé impartial* des idées scientifiques de ceux qui nous ont précédé. Mais on ne peut pas les exposer toutes. Si l'on veut les exposer toutes avec *impartialité* il faut les reproduire presque en entier. Ce travail *prépare* l'histoire, ce n'est pas encore l'*histoire*. La seule conception

in G. Osimo (a cura di), *Lettere di Giuseppe Peano a Giovanni Vacca*, Milano, Università Bocconi, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., n. 3, 1992, lettere nn. 109, 110, 111, 113, 114, 115, 116 e 127.

[19]A Vacca si devono, fra l'altro, le preziose indicazioni sui manoscritti inediti di Leibniz relativi all'aritmetica e alla logica, da lui raccolte ad Hannover nell'estate del 1899. Per quanto concerne la collaborazione fra Peano, Vacca e Vailati per la redazione delle note al *Formulario* cfr. ad es. la lettera di G. Peano a G. Vacca, Cavoretto 15.5.1894, in Osimo (a cura di), *Lettere* ..., 1992 cit., lettera n. 1, e la lettera di G. Vailati a G. Vacca, Siracusa 16.12.1899, in G. Lanaro (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971, p. 169: «Ho avuto il volume del *Formulario*, dove ho trovato una quantità di cose nuove, e lo sto leggendo appunto ora. Vedo con molto piacere che la parte *storica* viene sempre più in *Vordergrund* e contribuisce ad accrescere non solo l'utilità, ma anche l'*attrattività* dell'opera, che va diventando sempre più classica e unica nel suo genere».

> qui permette de *choisir* dans les travaux des anciens c'est de se mettre à *notre* point de vue. Faire l'histoire des vérités d'une science, c'est *chercher* et exposer dans le passé tous les essais qui ont produit successivement les vérités que nous connaissons. [...] L'histoire d'une science est alors l'exposition ordonnée des vérités de cette science suivie d'un nombre ou d'une *date*.[20]

Se è vero che l'attenzione appare «severamente concentrata nella richiesta di confronto e studio diretto»[21] delle fonti, occorre tuttavia rilevare che emerge, in relazione al *Formulario,* una concezione dell'indagine storiografica contraddistinta da una spiccata sensibilità per la ricchezza e la correttezza delle informazioni. Essa eserciterà una critica positiva nei confronti di un nutrito filone di studi che, seppure più aperto alla visione globale delle dinamiche del processo storico, non dimostrerà altrettanta precisione per i dettagli.

3. *I risvolti didattici*

Questi assunti epistemologici si traducono in proposte concrete per migliorare e rinnovare l'insegnamento della matematica, ai vari livelli dell'istruzione scolastica.[22]

[20] G. Vacca a L. Couturat, [Genova, 12.1901], in P. Nastasi, A. Scimone (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca,* Palermo, Università Bocconi, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., n. 5, 1995, pp. 51-52.

[21] S. Di Sieno, *Storia e didattica,* in S. Di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali,* Milano, Marcos y Marcos, 1998, p. 784.

[22] Grazie all'opera di Vailati in seno alla Commissione Reale per l'insegnamento della Matematica trovano concreta attuazione alcune riflessioni di Peano sulla funzione didattica della storia della matematica per "spedantizzare" le esposizioni e sul valore educativo e formativo

Peano raccomanda infatti ai futuri insegnanti di non limitarsi a fornire un arido catalogo di formule, ma li invita a stimolare l'interesse degli alunni, integrando le esposizioni con notizie[23] che alimentino la loro riflessione sulla genesi, sugli sviluppi, sulle applicazioni e sulla fortuna dei singoli concetti.

L'importanza didattica della dimensione storica dell'insegnamento si traduce nella volontà di proporre agli studenti la lettura di alcune pagine significative di Euclide, Archimede o Apollonio - la cui conoscenza diretta è ritenuta «indispensabile [...] da parte di chi si proponga di spingersi innanzi e approfondire qualunque ordine di ricerche scientifiche»[24] - conducendone una critica analoga a quella che si effettua sui classici della letteratura e della filosofia.[25] Essa emerge, d'altro canto, nell'ambito

della conoscenza storica, come antidoto contro ogni forma di "agnosticismo" e di miopia intellettuale. A questo proposito cfr. F. Arzarello *La Scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica*, in *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Bologna, Pitagora, 1987, pp. 34-35 e L. Giacardi, *Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati e le reazioni dei matematici*, Associazione Subalpina Mathesis, *Conferenze e Seminari 2001-2002*, Torino, 2002, pp. 234, 239-240.

[23] Cfr. Cassina, *Su l'opera filosofica ...*, 1953 cit., pp. 13-14. La presenza di note storiche nei manuali di aritmetica è anche segnalata con apprezzamento nelle recensioni. Per esempio, G. Vivanti, recensendo il manuale di *Aritmetica razionale* di A. Sterza («RdM», 4, 1894, p. 141) sottolinea: «numerose note storico-biografiche [...] danno brevi ma esatte notizie sugli scienziati antichi e moderni menzionati nel testo. Tutto ciò dà al libro un carattere assai più scientifico e meno scolastico di quello della maggior parte delle opere congeneri».

[24] G. Vailati, *Idee Pedagogiche di H. G. Wells*, 1906, in M. Quaranta (a cura di), *Giovanni Vailati, Scritti*, Bologna, Forni, 1987, III, p. 294.

[25] G. Vacca, *Lo studio dei classici negli scritti matematici di Giuseppe Peano*, «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», XXII, 9-15.10.1932, II, 1933, pp. 97-99: «Mi diceva più di una volta

delle note sulla storia del formalismo matematico, un tema caro a Peano, da lui analizzato in numerosi articoli, volti ad illustrare l'"età", le varianti dei segni, le trasformazioni subite nel corso dei secoli e i vantaggi o svantaggi che presenta la loro esecuzione tipografica.[26]

Mirate a stimolare l'approfondimento individuale, le note storiche nei testi didattici devono anche suggerire letture e indicare gli strumenti con cui proseguire in modo autonomo l'indagine storiografica. Di qui discende l'accento posto sulla precisione nei rimandi[27] e l'attenzione con cui sono redatte le bibliografie, il più

che avrebbe insegnato volentieri il calcolo prendendo come libro di testo, la *Théorie des Fonctions Analytiques* di Lagrange. [...] Ricordo la prima parte del corso del 1903, iniziato seguendo i metodi della geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri. Ricordo le lezioni sulla teoria dei numeri irrazionali, illustrati col V Libro di Euclide, le lezioni sulla rettificazione delle curve, partendo dalla esposizione di Archimede. Ricordo infine la lettura delle pagine di Galileo e di Torricelli sulla caduta dei gravi, e le lezioni sul calcolo delle variazioni, che interpretavano in forma nuova le classiche memorie di Eulero e di Lagrange».

[26] Cfr. G. Peano, *Importanza dei simboli in matematica*, 1915j, pp. 165-173 e *Sulla forma dei segni di algebra*, 1920b, pp. 44-49. Peano intraprende questi studi nel 1891 e li prosegue fino alla morte, come si evince dalla lettura del manoscritto *Signos de Mathematica* (ms. 103063, 1929, cc. 1r-4r nel cd-rom *L'Archivio* ..., 2002 cit.). In questi appunti egli traccia un raffronto puntuale fra le notizie sulla storia del linguaggio matematico inserite nella quinta edizione del *Formulario* e quelle contenute nei volumi di F. Cajori, *A History of Mathematical Notations, vol. I, Notations in elementary mathematics*, London, The Open Court Comp., 1928 e di E. Löffler, *Ziffern und Ziffernsystem der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Leipzig, Teubner, 1912, mostrando di essere aggiornato sulle pubblicazioni più recenti.

[27] Cfr. ad es., in proposito, N. Festa, *Prefazione* a Vacca, *Euclide* ..., 1916 cit., p. III.

possibile vaste e aggiornate, poste in appendice al *Formulario* o inserite nei manuali. Un atteggiamento democratico, quest'ultimo, che emerge nelle riflessioni di Peano e di Vailati:

> le citazioni del Formulario portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il passo citato;[28]
>
> mancano libri che […] forniscano le opportune indicazioni bibliografiche, che […] guidino nella scelta delle letture o nell'acquisto dei libri, mettendo in guardia, ad esempio, contro quelli fra essi che non valgono la pena di essere consultati o per essere troppo oscuri o troppo disordinati o troppo prolissi o troppo superficiali etc.[29]

4. *Aritmetica e storia nei libri di testo di Peano*

Per analizzare l'impatto culturale delle riflessioni di Peano sul valore didattico della storia risulta particolarmente significativo l'esame dei libri di testo di aritmetica, una disciplina che, per i suoi risvolti fondazionali, è oggetto di studio intenso e metodico nella Scuola torinese di logica. Nonostante il nome di Peano sia universalmente noto per i contributi all'assiomatizzazione dell'aritmetica, la produzione del matematico cuneese in questo settore è ben più ampia, e comprende due manuali didattici: l'*Aritmetica generale e Algebra elementare* e i *Giochi di Aritmetica e problemi interessanti*,[30] alcune recensioni di testi di

[28] Peano, *Sul § 2 del Formulario* …, 1898e cit., p. 83.

[29] Vailati, *Idee Pedagogiche* …, 1906 cit., in M. Quaranta (a cura di), *Giovanni Vailati, Scritti*, 1987 cit., III, p. 294.

[30] G. Peano, *Aritmetica generale e Algebra elementare*, 1902b; *Giochi di Aritmetica e problemi interessanti*, 1924b.

aritmetica e di algebra[31] e una caleidoscopica antologia di brevi articoli divulgativi, per lo più in *latino sine flexione*, su argomenti di aritmetica dilettevole e curiosa.[32]

Le opinioni di Peano sui tratti salienti che deve possedere un buon manuale di aritmetica emergono efficacemente nel saggio *Sui fondamenti dell'Analisi* e nell'articolo *Sui libri di testo di aritmetica nelle scuole elementari*,[33] pubblicato nel 1924 a ridosso della relazione ministeriale sui libri di testo di aritmetica curata da L. Lombardo Radice e M. Cipolla. Peano stigmatizza con schietta ironia i difetti dei manuali in uso nelle scuole italiane, mentre usa parole di vivo apprezzamento per quello di F. Gerbaldi:

> Per limitarci al nostro paese, il prof. Gerbaldi, ora all'Università di Pavia, pubblicò un'aritmetica ad uso delle scuole elementari, di cui l'edizione, che qui presento, è del 1888, che è tutta in simboli. Questa aritmetica, pubblicata per incarico del comune di Roma, dietro consiglio del compianto prof. Cerruti, fu adottata per molti anni, con ottimo successo. Essa rappresenta il rigore assoluto.[34]

[31] G. Peano, F. Giudice, *Domenico Amanzio, Elementi di algebra elementare*, 1892d, pp. 14-17; G. Peano a M. Nassò, Torino 12.10.1898 in *Nassò Dott. Marco, Algebra Elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici …*, «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», s. 3, 1, 1898, pp. 531-532; *Alpinolo Natucci, Il concetto di numero e le sue estensioni*, 1923a, pp. 382-383; *Interessante libro super Calculo numerico*, 1928h, pp. 217-219.

[32] Cfr. ad esempio G. Peano, *Calculo super Calendario*, 1922a, pp. 1-3, 6-7; *Quadrato magico*, 1926c, pp. 84-87; *Jocos de Arithmetica*, 1926d, pp. 166-173; *Historia et Reforma de Calendario*, 1927c, pp. 49-55; *Sulla riforma del Calendario*, 1927d, pp. 566-568; *Historia de numeros*, 1928e, pp. 97-100; *Jocos de Aritmetica*, 1931b, pp. 50-51.

[33] Peano, *Sui fondamenti …*, 1910a cit., pp. 31-37 e *Sui libri di testo …*, 1924d cit., pp. 237-242.

[34] Peano, *Sui fondamenti …*, 1910a cit., p. 35. Cfr. anche Peano, *Sul § 2 del Formulario …*, 1898e cit., p. 86 e *Sui libri di testo …*, 1924d cit., p. 238.

Le Aritmetiche devono essere – secondo Peano – “razionali” e “pratiche”: occorre allora soppiantare le trattazioni farraginose e dogmatiche,[35] imperniate sul verbalismo e sull’apprendimento mnemonico, con spiegazioni semplici e chiare, ed accentuare i risvolti applicativi dell’insegnamento. A tal scopo, è utile proporre esempi e quesiti “sensati” sia nell’impostazione che nel risultato, che forniscano gli strumenti matematici necessari per affrontare i problemi della vita quotidiana. È possibile, ad esempio, esercitare gli alunni nelle addizioni e nelle sottrazioni facendoli “viaggiare mentalmente” fra le città e i continenti o abituarli a interpretare i dati statistici.[36]

Peano non si limita tuttavia a condurre una critica astratta dei libri di testo e, a partire dal 1898, si mostra intenzionato a impegnarsi in prima persona nella redazione di un manuale di aritmetica per gli insegnanti della scuola secondaria, modellato sul *Formulario*[37] e contraddistinto dalla medesima impostazione:

[35] Cfr. Peano, *Sui libri di testo …*, 1924d cit., pp. 237-238: «I trattati di Aritmetica variarono di forma ogni secolo. Or sono cinquant’anni si insegnava l’aritmetica sotto forma di catechismo. Il maestro domanda “che cosa è il numero” cui risponde quale eco la voce dolente dell’allievo: “il numero è la riunione di più unità”. Ancora uno dei libri oggi sottoposti al giudizio della commissione è per domande e risposte. Ma poi si soppressero le domande conservando le risposte».

[36] Cfr. a questo proposito Peano, *Problemi pratici*, 1922f cit., p. 88 e *Sui libri di testo …*, 1924d cit., pp. 239-240. Cfr. anche R. Bettazzi, *Le applicazioni della matematica*, «Bollettino della Mathesis», 8, 3, 1903-04, pp. 40-44.

[37] In questo stesso periodo, fra l’altro, Peano decide di introdurre il *Formulario* come libro di testo per le lezioni universitarie. Cfr. Peano, *Sul § 2 del Formulario…*, 1898e cit., p. 86: «Del resto quest’anno mi sono deciso ad introdurre il nuovo Formulario nell’insegnamento superiore, con ottimi risultati. Ho visto gli allievi interessarsi vivamente alla precisione e chiarezza della scrittura ideografica, apprendendola assai più facilmente di quanto mi sarei immaginato».

> Il Formulario d'Aritmetica, nello stato attuale, contiene già l'analisi completa delle idee d'Aritmetica. […] Questa analisi che io ho fatta in massima parte nel citato lavoro del 1889, è ciò che differenzia nella forma e nella sostanza questo Formulario dagli altri libri. Alcuni di questi studii già furono introdotti in trattati scolastici, quali: C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica*, Torino 1898; P. Gazzaniga, *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*,[38] Padova, a. 1897; M. Nassò, *Algebra elementare*, Torino 1898. […] Ma si può tener conto di questi studii anche nell'insegnamento secondario ed elementare, col sopprimere tutte quelle definizioni di numero, e di somma, che sono pure parole […]. Da alcuni anni meditavo come si potrebbe compilare un libro di Aritmetica elementare, che seguisse fedelmente il mio lavoro del 1889 […]. Il Formul. §2 potrebbe forse essere usato nelle scuole liceali come libro di consultazione, quali tavole di logaritmi.[39]

Il progetto di applicare le teorie logiche, ormai sufficientemente mature, per redigere un manuale di aritmetica

[38] Risulta molto interessante l'introduzione alla terza edizione di questo manuale, dove l'autore giustifica la sua volontà di riversare nell'insegnamento secondario le ricerche sui fondamenti scrivendo (P. Gazzaniga, *Libro di aritmetica e di algebra elementare*, 3ª ed., Verona, Drucker, 1900, pp. 1, 2): «Riducendo nell'Aritm. i postulati al minimo numero (cosa che in un primo tentativo, come a suo luogo dichiarai, non mi era sembrato opportuno di fare) ho seguito l'ordine di idee dei valorosi cultori del Calcolo logico, al quale devesi il progresso che nei suoi principî fondamentali ha fatto l'insegnamento della matematica elementare in questi ultimi anni. […] Il metodo in esso seguito, lo riconosco, non è di quelli cosidetti facili; lo ritengo però particolarmente opportuno per l'insegnamento nei licei, dove, più che negli istituti tecnici, la matematica elementare ha principalmente l'elevatissimo incarico di abituare la mente al ragionamento rigoroso e profondo».

[39] Peano, *Sul § 2 del Formulario …*, 1898e cit., pp. 83-84, 86.

e d'algebra si concretizza quattro anni più tardi, con la pubblicazione, nel 1902, dell'*Aritmetica generale ed Algebra elementare*. Nonostante Peano sottolinei l'aderenza di questo testo ai contenuti previsti nei programmi ministeriali, suggerendo anche possibili percorsi di lettura,[40] l'*Aritmetica* si configura come libro di rottura nel panorama editoriale per l'uso massiccio del simbolismo, per l'estrema condensazione del testo e per la disposizione dei contenuti. Un elemento di sicura originalità consiste nel ricco apparato di note storico-critiche che «vagliate alla stregua di una critica dotta e rigorosa» costituiscono, come sottolinea Pieri, un «nuovo e singolar pregio dell'opera».[41] Mutuate per lo più dal *Formulario*, le note includono indicazioni bibliografiche puntuali, rimandi alle varie edizioni critiche disponibili dei classici, scolii semantici e innumerevoli citazioni riportate trascrivendo i passi in lingua originale.[42] Fra queste meritano di essere citate, perché particolarmente documentate, quella sui

[40] Cfr. Peano, *Aritmetica* …, 1902b cit., pp. VI-VII. Per quanto concerne l'addizione Peano scrive ad esempio (p. VI): «*Addizione*. §+ (p. 8) le prime tre righe. Si tralascino le Prop 1. Si leggano le Prop 2, 3·1-·6 (p. 9-12), tralasciando le dimostrazioni. Per uno studio più profondo, si legga tutto il §+ come è scritto».

[41] Cfr. M. Pieri, *G. Peano, Aritmetica generale ed algebra elementare*, «Periodico di Matematica», s. 2, 5, 1903, p. 295.

[42] Cfr. ad esempio, Peano, *Aritmetica* …, 1902b cit., p. 33: «$N_1 \supset N_1^2 + N_0^2 + N_0^2 + N_0^2$ {Bachet a. 1621 p. 241: "Omnem autem numerum vel quadratum esse vel ex duobus aut tribus aut etiam quatuor quadratis componi, satis experiendo deprehendis"}»; pp. 50-51: «Questo modo di introdurre i numeri negativi trovasi in: Mac Laurin a. 1748 p. 6: "a Quantity that is to be added is called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative." Cauchy, a. 1821, p. 333: "… on acquiert l'idée de quantité (positive ou négative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant

sistemi di numerazione,[43] con interessanti spunti sulla storia dei regoli di Nepero e dell'aritmetica binaria,[44] e quelle relative alla storia dei logaritmi, delle progressioni aritmetiche e delle unità di misura.[45]

L'uso costante del linguaggio ideografico in sede didattica desta – come è prevedibile – la perplessità di molti insegnanti che fraintendono la natura di un testo che, rivolgendosi non all'allievo, ma al docente, richiede a quest'ultimo di operare una costante e impegnativa attività di «mediazione epistemologico-cognitiva».[46] Incaricato di curarne la recensione per il «Periodico di Matematica», Pieri individua opportunamente le cause della sua tiepida ricezione da parte del mondo della scuola, [47] concludendo:

servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce. Pour indiquer cette destination, on représente les grandeurs qui doivent servir d'accroissements par des nombres précédés du signe +, et les grandeurs qui doivent servir de diminutions pas des nombres précédés du signe –".»; p. 63: «L'eguaglianza ${}^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$ è detta da Euclide "analogia", che si potrebbe tradurre in "eguaglianza di ragioni", e che fu tradotto in "proporzione"».

[43] Peano aveva tratteggiato la storia della diadica nella nota *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, 1898m, pp. 47-55.

[44] Cfr. E. Luciano, C. S. Roero, *La macchina stenografica di Giuseppe Peano*, «Le culture della Tecnica (AMMA)», 15, 2004, pp. 5-28; E. Luciano, C. S. Roero, *Dagli esagrammi di Fu-hi all'aritmetica binaria: Leibniz e Peano*, Associazione Subalpina Mathesis, *Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, 2004, pp. 49-69.

[45] Cfr. Peano, *Aritmetica* …, 1902b cit., pp. 20-21, 103, 107-108, 111-113 e 138-141.

[46] Cfr. P. Freguglia, *Giuseppe Peano e la didattica della matematica*, in *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis, Centenario 1895-1995", Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Roma, Palombi, 1996, p. 153.

[47] Cfr. anche le lettere di G. Vacca a G. Vailati, Genova [30.9.1902-6.11.1902], Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati;

> Non c'è troppo da illudersi sull'accoglienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico: ché son troppo noti i motivi, tutti umanissimi e spiegabilissimi, i quali hanno fatto in ogni tempo e faranno sempre ostacolo a certe novità, che toccano la più gelosa delle nostre proprietà intellettuali.[48]

Enrico Nannei esprime invece senza reticenze la sua preoccupazione che il portare nella scuola le discussioni sui fondamenti inaridisca l'insegnamento della matematica e induca la disaffezione degli alunni più giovani che, pur avendo già sviluppato l'attitudine deduttiva, non possono ancora aver coltivato il gusto per la raffinatezza della critica logica.[49]

Il manuale di Peano è tuttavia apprezzato da alcuni autorevoli studiosi: viene citato nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* e nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*[50] e recensito favorevolmente al-

G. Vailati a G. Vacca, Como 7.11.1902 e G. Vacca a G. Vailati, [Como 8.11.1902] in Lanaro (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario* ..., 1971 cit., pp. 213, 214.

[48] Pieri, *G. Peano, Aritmetica* ..., 1903 cit., p. 293.

[49] E. Nannei, *Studiare le cause del poco profitto, che fanno, nello studio della matematica, i giovani delle nostre scuole medie, e proporre i mezzi per ovviarvi* in *Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle scuole medie italiane*, Napoli 14-17.9.1903, Torino, Artigianelli, 1904, pp. 20-24.

[50] Cfr. L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Milano, Hoepli, 1962, I.1, p. 901; III.2, pp. 95, 124, 126, 145, 153, 173 ed F. Enriques (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 3ª ed., Bologna, Zanichelli, I, 1924-27, p. 286. Particolarmente significativo risulta, nel contesto italiano, l'intervento di G. Sforza, *L'aritmetica generale ed algebra elementare di G. Peano come libro di testo nelle scuole secondarie superiori*, «Bollettino della Mathesis», 1904-05, pp. 30-34 (cit. a p. 30): «Ho adottato quest'anno nella 1ª classe dell'Istituto tecnico la predetta opera insigne, soprattutto perché ho ritenuto estremamente didattica l'ideografia logico-matematica,

l'estero.[51] In Italia è soprattutto S. Catania a raccogliere l'invito di Peano a mettere a frutto della didattica i progressi della logica. Convinto dell'efficacia didattica di questo nuovo strumento, Catania pubblica infatti, nel 1904, un'*Aritmetica* destinata a "volgarizzare" quella di Peano. Il mondo accademico e quello della scuola si scindono in due compagini distinte al suo apparire: accolto con favore e giudicato positivamente da Peano e dalla sua Scuola – in particolare da C. Burali-Forti e M. Pieri [52] – il libro di Catania riceve invece una decisa

con la quale si ottiene brevità, precisione e possibilità di buone ripetizioni anche da parte di alunni meno che mediocri» e soggiunge in nota: «Il prof. Catania (*Arit. raz.*, 1904) e il prof. Leoncini (*Le operaz. con i num. relativi,* 1904) pure dichiarando che si ispirano ai metodi del Peano, rigettano l'ideografia logico-matematica ritenendola un impaccio didattico; io credo invece che così essi rinuncino alla parte *didatticamente* migliore del libro del Peano».

[51] Cfr. la recensione anonima apparsa sulla rivista belga «Mathesis»: *Aritmetica generale ed algebra elementare di G. Peano …*, «Mathesis», s. 3, 3, 1903, p. 48.

[52] C. Burali-Forti, *S. Catania, Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori,* «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche», 7, 1904, p. 91 e M. Pieri, *S. Catania, Aritmetica razionale per le scuole secondarie superiori,* «Periodico di matematica», s. 3, 2, 1905, pp. 47-48. Pieri osserva (p. 47): «Nel fascicolo marzo-aprile 1903 discorrendo sull'*Aritmetica generale ed Algebra elementare* di G. Peano (Torino, Paravia, 1902) auguravo che la bontà di questo trattato […] inducesse qualche volenteroso docente a sperimentarlo per sé e per la scuola. Un tal desiderio è oggi realizzato in gran parte, mercè l'operetta, che l'egregio prof. S. Catania ha testé pubblicata […]. Il prof. Catania ha estratto dal libro del prof. Peano (il quale di buon grado assentiva ed incoraggiava) le parti meno elevate dell'aritmetica - quelle insomma, che più interessano la scuola media - e le ha riprodotte fedelmente con la scrittura ordinaria (salvo qualche leggera e inevitabile modificazione) studiandosi di conservare al possibile il loro nativo sapore».

stroncatura da parte di quei settori della cultura italiana che reputavano dannoso, se non pericoloso, introdurre le istanze del rigore logico nell'insegnamento secondario. Ne scaturiscono due vivaci polemiche, che oppongono Catania a G. Castelnuovo e G. Scorza,[53] a loro volta inestricabilmente intrecciate al più ampio dibattito sul ruolo del rigore e dell'intuizione che, fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, è oggetto di intense discussioni in Europa.[54]

[53] Cfr. C. Mammana, R. Tazzioli, *The mathematical School in Catania at the beginning of the 20th Century and its Influence on Didactics*, in *Proceedings, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique «De la maternelle à l'université»*, U.C.L. Louvain-la-Neuve, 15-18.7.1999, Louvain, 2001, pp. 223-232.

[54] Il reale oggetto del contendere è un determinato metodo di fare ricerca matematica, che si riflette in una pratica di insegnamento elementare e secondario che mira alla «chiarificazione dei concetti elementari fondamentali delle varie discipline matematiche mediante una adeguata teoria delle definizioni matematiche, con l'utilizzo della tecnica dei controesempi» (Freguglia, *Giuseppe Peano* ..., 1996 cit., p. 153). Come ribadiscono in più circostanze Peano e i sostenitori del metodo assiomatico, non si vuole bandire l'intuizione dall'insegnamento dell'aritmetica, né si mira a impedire l'uso di quegli strumenti – l'abaco e i regoli calcolatori, per esempio – che aiutano i fanciulli ad acquisire familiarità con il concetto di numero. D'altra parte, tuttavia, osservano Catania e Padoa, non è opportuno illudere gli alunni presentando loro finte dimostrazioni, che celano dietro il paravento dell'intuizione l'ignoranza del maestro e l'imprecisione del libro di testo. Converrà quindi, se l'argomento è troppo ostico, omettere alcune dimostrazioni, rinviando a un successivo approfondimento nel corso di studi superiore. Cfr. S. Catania, *Sui metodi d'insegnamento della matematica nelle Scuole medie*, «Bollettino della Mathesis», 4, 1912, pp. 142-143; A. Padoa, *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, «Bollettino della Mathesis», 9, 1910, pp. 86-88 ed anche M. De Franchis, *Geometria elementare*, Milano, Sandron, 1909, pp. V-VI.

Se l'insegnamento dell'aritmetica deve stimolare, in primo luogo, l'intelligenza creativa e critica, non stupisce che Peano attribuisca grande importanza agli indovinelli e ai rompicapi.[55] Seppure previsti dai programmi per le scuole elementari, i giochi matematici - che addestrano la sagacia e catturano l'attenzione dei fanciulli - sono troppo poco diffusi, secondo Peano, nei libri di testo: di qui nasce la sua decisione di pubblicare, nel 1924, una rassegna di *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. In questo libretto, lodato da L. Berzolari e più volte citato nella sua *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Peano illustra i quadrati e i triangoli magici, le tavole misteriose e i problemi capziosi e, ancora, le operazioni curiose come la moltiplicazione fulminea, i giochi sui numeri sferici, i problemi sul calendario e l'aritmetica parlata. Il libro si presenta atipico, non solo nella forma, ma anche nei contenuti: pur trattandosi di un testo divulgativo per gli insegnanti della scuola elementare, Peano non rinuncia infatti a inserire interessanti spunti di storia della matematica, dichiarando spesso le fonti antiche e moderne da cui sono tratti i vari giochi e, in tal modo, fornisce un compendio sintetico di quella che oggi definiamo la storia della matematica dilettevole e curiosa. A fianco dei rimandi biografici e bibliografici alle opere di numerosi autori, fra cui Teone di Smirne, S. Boezio, L. Fibonacci, N. Tartaglia, Ibn Albanna, C. Bachet, W. Oughtred e J. Houzeau, la rassegna comprende note più estese, che descrivono la storia del sistema di numerazione romano,

[55] L'efficacia didattica di variare l'esposizione proponendo giochi, sofismi e paradossi è sottolineata anche da A. Padoa nella relazione *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie* in *Atti del II Congresso della "Mathesis", Società Italiana di Matematica*, Padova, 20-23.9.1909, Padova, Premiata Società Cooperativa, 1909, p. 6.

il funzionamento dell'abaco, i regoli di Nepero e il calendario.[56]

5. *Storia e divulgazione*

L'interesse di Peano per la storia e la didattica della matematica è condiviso da allievi e collaboratori della sua Scuola. Fra questi, G. Vacca, G. Vailati, U. Cassina e M. Gliozzi[57] si prodigano per diffondere la storia della matematica e delle scienze tenendo corsi universitari, redigendo articoli e saggi e presentando comunicazioni in numerosi congressi di storia e filosofia delle scienze.

[56] Cfr. Peano, *Giochi di Aritmetica* ..., 1924b cit., pp. 18, 19-20, 29-30 e 33-51.

[57] Vacca tiene corsi di Storia delle Matematiche all'Università di Roma dal 1923 al 1936 ed è invitato a redigere per l'*Enciclopedia delle matematiche elementari* il capitolo dedicato alla Storia della Matematica. Vailati promuove l'insegnamento della storia della scienza tenendo dal 1896 al 1899 un corso libero di Storia della Meccanica all'Università di Torino. Cassina cura la pubblicazione dei *Selecta* di Peano nel 1959 e la riedizione del *Formulario Mathematico* nel 1961 e, nel suo insegnamento sulla cattedra di Matematiche Complementari all'Università di Milano, riflette l'impostazione storica e fondazionale di Peano. M. Gliozzi collabora alla redazione della rivista «Schola et Vita» pubblicandovi articoli di divulgazione della fisica e pubblicherà numerosi articoli e libri di storia della fisica. Cfr. E. Carruccio, *Giovanni Vacca, matematico, storico e filosofo della scienza*, «Bollettino UMI», s. 3, 8, 1953, pp. 448-456; F. Skof, *Ugo Cassina* in (a cura di C. S. Roero), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, Tomo II, *I docenti*, Torino, Deputazione Sub. di Storia Patria, 1999, pp. 595-597; C. S. Roero, S. Caparrini, *Mario Gliozzi (1899-1977) storico della scienza*, in *Due studiosi laici: Mario e Giuliano Gliozzi (in occasione dei 100 anni della Fnism)*, Torino, F. Antonicelli, 2003, pp. 11-22.

L'entourage di Peano include però, accanto a questi storici professionisti, noti in ambito nazionale e internazionale, anche numerose studentesse, insegnanti ed assistenti nel corso di Matematiche Complementari, fra cui Piera Chinaglia, Clementina Ferrero, Tina Pizzardo, Paolina Quarra e Luisa Viriglio.[58] Sotto la direzione di Peano queste ultime discutono tesi[59] e sottotesi di laurea e pubblicano lavori di carattere storico, didattico, fondazionale e divulgativo.[60] Seppure di esile originalità, queste note risultano interessanti per ricostruire l'insegnamento di Peano sulla cattedra di Matematiche Complementari. Ad esempio emerge da esse un'atten-

[58] Cfr. Roero, *Peano e l'altra metà del cielo*, in (a cura di C. S. Roero) *Giuseppe Peano* …, 2001 cit., pp. 60-77.

[59] In quest'ambito occorre segnalare, all'Università di Torino, la tesi di laurea di F. Audisio, *Il numero* π, del luglio 1930. Si tratta della prima dissertazione in cui è compiuta un'analisi storico-critica dei contributi aritmetici, geometrici ed analitici concernenti π. Dalla tesi traggono origine gli articoli *Calcolo di* π *colla serie di Leibniz*, «Atti della R. Accademia dei Lincei», s. 6, Rendiconti, 11, 1930, pp. 1077-1080; *Calcolo di* π *in Archimede*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 65, 1930, pp. 101-108; *Il numero* π, «Periodico di Matematiche», s. 4, 3, 1931, pp. 11-42 e *Ancora sul numero* π, «Periodico di Matematiche», s. 4, 20, 1931, pp. 149-150. L'ultima nota è redatta in risposta ad un intervento critico di E. Bortolotti sulla determinazione di $\sqrt{3}$ di Archimede.

[60] Cfr. P. Chinaglia, *Jocos de shah et progressione geometrico*, «Academia pro Interlingua» (nel seguito abbreviata con la sigla «ApI»), 1926, pp. 45-48; *Super uno definitione de Mathematica*, «ApI», 1926, pp. 94-95; *Numeros*, «ApI», 1927, pp. 102-104; C. Ferrero, *Curiositate de numeros*, «ApI», 1927, pp. 83-85; T. Pizzardo, *Quaestiones de arithmetica in Beda*, «ApI», 1926, pp. 44-45; P. Quarra, *Calcolo delle parentesi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 53, 1917-18, pp. 1044-1047; *Relatione inter medio arithmetico et geometrico*, «Periodico di Matematica», s. 3, 15, 1915, pp. 81-86.

zione costante per la storia dell'aritmetica, che si traduce nella riscoperta di testi di ricreazioni matematiche - fra cui quelli di Beda e di C. Bachet de Meziriac - dai quali attingere giochi e rompicapi per rendere più gradevole l'apprendimento.

6. *I manuali di aritmetica nella Scuola di Peano*

La produzione di libri di aritmetica per la scuola elementare e secondaria da parte di allievi e collaboratori di Peano è particolarmente vasta e l'impegno nella redazione di questi volumi testimonia la volontà di agire concretamente nei progetti ministeriali di riforma dell'insegnamento della matematica.[61] L'obiettivo di questi testi è dichiaratamente quello di utilizzare gli studi teorici sull'assiomatizzazione dell'aritmetica per evidenziare le lacune, le inesattezze linguistiche e gli errori di concetto e di metodo in numerosi manuali, italiani ed esteri, adottati nelle scuole italiane.[62] Intenzionati a favorire l'affer-

[61] Cfr. Appendice, pp. 302-303.

[62] Peano e i suoi collaboratori mostrano di tenersi costantemente aggiornati sui manuali di aritmetica, e sovente li recensiscono. Cfr. ad esempio R. Bettazzi, *Dott. Alpinolo Natucci, Compendio di Aritmetica pratica per le scuole medie,* «Periodico di Matematica», s. 3, 7, 1909, pp. 43-44; *C. Ciamberlini, Aritmetica e Geometria per le scuole complementari,* «Periodico di Matematica», s. 3, 8, 1910 p. 48; C. Burali-Forti*, S. Catania, Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori,* «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche», 7, 1904, p. 91; *Osservazioni al "Trattato di Aritmetica di G. Bertrand",* «RdM», 1, 1891, pp. 85-87; M. Nassò, *Rodolfo Bettazzi, Aritmetica Razionale ad uso dei Ginnasi,* «Periodico di Matematica», s. 2, 5, 1903, pp. 68-69; A. Padoa, *Note critiche al libro di aritmetica e di algebra elementare di Paolo Gazzaniga,* Pinerolo, Chiantore-Mascarelli, 1899, 17 p.; M. Pieri, *S. Catania, Aritmetica razionale per le*

marsi di una nuova concezione didattica, gli esponenti della Scuola torinese di logica ed alcuni collaboratori "esterni", fra cui Corrado Ciamberlini e Alpinolo Natucci, trasfondono in essi l'esigenza di rigore nelle esposizioni, le riflessioni sul linguaggio e l'attenzione per il valore operativo delle nozioni, redigendo con particolare cura i paragrafi sul concetto di numero e sulle tecniche dimostrative per ricorrenza.[63]

Un documento importante per comprendere come gli autori intendano dare attuazione concreta a queste linee guida è fornito dalle "norme per l'insegnamento" che corredano l'*Aritmetica pratica* di C. Burali-Forti e A. Ramorino, un testo estremamente valido dal punto di vista pedagogico, rivisto e aggiornato più volte nel corso degli anni e proposto in numerosi ordini e gradi di scuole. Gli autori focalizzano qui le motivazioni che li hanno guidati nell'esposizione e suggeriscono le strategie più opportune da adottare nella pratica dell'insegnamento. Burali-Forti e Ramorino commentano, fra l'altro, le scelte di illustrare il sistema di numerazione decimale,

scuole secondarie superiori, «Periodico di Matematica», s. 3, 2, 1905, pp. 47-48; G. Vivanti, *Prof. A. Sterza, Aritmetica razionale per il ginnasio superiore*, «RdM», 4, 1894, pp. 141-142.

[63] Cfr. ad esempio C. Burali-Forti, A. Ramorino, *Aritmetica e norme …* , Torino, Gallizio, 1898, pp. 1-10. Gli autori analizzano in primo luogo i termini utilizzati per definire il concetto di numero, escludono quelli superflui, e giungono alla sua definizione per postulati, mediante i termini di "numero", di "unità" e di "successivo". Commentano i singoli postulati dal punto di vista storico, illustrando le motivazioni che hanno indotto Peano a sostituire lo zero all'uno come origine del sistema dei naturali e giustificano l'ordine nel quale sono inseriti i postulati. Esortano, infine, a introdurre l'induzione, fino ad allora appannaggio della matematica universitaria, come tecnica dimostrativa nelle scuole elementari.

dopo aver dimostrato le principali proprietà dei numeri interi, e non viceversa; di non far precedere il concetto di numero intero da quello di grandezza; e di introdurre i numeri irrazionali, sfruttando il concetto di limite superiore di una classe di razionali, in luogo del metodo delle classi contigue.[64] Del resto, gli allievi della Scuola di Peano intendono agire anche sulla formazione degli insegnanti, sulle strutture a supporto dell'attività didattica e sull'organizzazione del lavoro scolastico. A questo proposito, gli eserciziari sono ritenuti uno dei principali parametri di valutazione di un testo di aritmetica. Per agevolare la pratica di calcolo degli alunni e coltivare la loro capacità a misurarsi con problemi concreti, gli esempi e gli esercizi devono essere opportunamente strutturati in modo da consolidare le conoscenze teoriche acquisite, stimolare l'alunno a trovare varianti e generalizzazioni di teoremi dimostrati, a individuare controesempi e non richiedere la semplice applicazione di una formula. Il ruolo degli eserciziari è determinante nei manuali per le Scuole Normali. Rivolgendosi infatti ad *allievi* di un istituto destinati a diventare *maestri*, Burali-Forti e Ramorino scelgono di calibrare gli esercizi della loro *Aritmetica* perseguendo un rigido "dualismo di fini": gli esercizi sono suddivisi in Teoremi e Problemi. I primi servono

[64] Il manuale di Burali-Forti e Ramorino riceve una recensione particolarmente severa da parte di C. Pacchiani. Quest'ultimo si scaglia con veemenza proprio sulla scelta di introdurre i numeri astratti indipendentemente dalle grandezze che possono rappresentare. Cfr. C. Pacchiani, C. *Burali-Forti e A. Ramorino, Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, «Periodico di Matematica», 13, 1898, pp. 201-202 e la risposta di C. Burali-Forti, *C. Burali-Forti e A. Ramorino, Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, «Periodico di Matematica», 13, 1898, pp. 230-231.

come «ginnastica mentale», per «avvezzare» lo studente al rigore deduttivo e renderlo «sempre più padrone dei concetti appresi nel testo»; i secondi forniscono un repertorio di esercizi cui il futuro maestro potrà attingere per la sua attività didattica.[65]

Seguendo l'esempio fornito dall'*Aritmetica* di Peano, i manuali redatti nell'ambito della sua Scuola prevedono un ricco apparato di note storiche, che integrano la trattazione matematica, fornendo un quadro concettuale poliedrico e di ampio respiro, nel quale lo studio della matematica si coniuga con quello della storia, della filosofia, delle lettere, dell'arte e della tecnica. Pur tenendo conto della differente rilevanza nei vari testi, le note rivelano un'impostazione uniforme, sia nei contenuti che nello stile. L'indagine storica mira soprattutto a rintracciare le linee fondamentali della storia del simbolismo, indicando come sono stati introdotti i segni per le operazioni fondamentali. Eccone un esempio:

> Il segno × della moltiplicazione si trova per la 1ª volta nella *Clavis mathematica* del parroco inglese Guglielmo Oughtred (nato in Eton, contea di Buckingham, in Inghilterra, nel 1574, e morto nel 1660) stampata nel 1631. Fu Renato Descartes (nato a Lahaye, nella Turenna, nel 1596, e morto a Stoccolma in Svezia nel 1650) che propose di mettere un

[65] Burali-Forti, Ramorino, *Aritmetica e norme* …, 1898 cit., p. 193. Anche nella redazione dei testi degli esercizi trapela la sensibilità per la storia della matematica. Sono infatti proposti quesiti del tipo: «Isacco Newton nacque il 25 dicembre 1642 a Woolsthorpe e morì il 20 marzo 1727 a Londra. Quanto visse? (Verificare, facendo uso del Calendario perpetuo Gregoriano, che Newton nacque e morì di giovedì.)» (C. Burali-Forti, A. Ramorino, *Lezioni di Aritmetica pratica* …, Torino, 14ª ed., Petrini, 1925, p. 19).

> punto tra un fattore e l'altro: e fu Michele Stifel (1486-1587) che suggerì di scrivere i fattori, uno a destra dell'altro, senza frapporvi alcun segno.[66]

Nassò fornisce anche, fra l'altro, nel suo manuale, confronti fra le varie notazioni in uso nelle diverse civiltà:

> Nelle opere del matematico indiano Âryabhatta, nato a Pâtaliputra (oggi Patna) nel 476 e morto verso il 550, si trovano per la prima volta i numeri positivi e negativi considerati come esprimenti *avere*, *debito*, lunghezze *verso destra* o *verso sinistra*. Nel secolo XIII i Cinesi scrivevano i numeri positivi in rosso, i negativi in nero. Gli Indiani distinguevano i positivi dai negativi ponendo un punto sopra i negativi.[67]

7. *La ricezione*

La fortuna dei manuali di aritmetica della Scuola torinese di logica, se da un lato è indiscutibilmente sancita dalle numerose edizioni prodotte, non è tuttavia né immediata, né incontrastata. Improntate allo stile di ricerca che contraddistingue la produzione di Peano e dei suoi allievi, queste *Aritmetiche* suscitano talora la disapprovazione di autorevoli matematici e di esponenti del mondo delle Istituzioni e della scuola.

L'adozione dell'*Aritmetica pratica* di C. Burali-Forti e A. Ramorino è ad esempio osteggiata, nella scuola di Alessandria, da alcuni docenti, e poi vietata per intervento dell'Ispettore ministeriale Amaldi. Si tratta di una sgra-

[66] M. Nassò, *Aritmetica generale …*, Torino, 10ª ed., Internazionale 1919, p. 23.

[67] Nassò, *Aritmetica generale …*, 10ª ed., 1919 cit., p. 8.

devole vicenda, i cui contorni emergono nel carteggio di Burali-Forti a Vailati del 1907:

> Eccoti brevemente un bel fatto i cui particolari mi sono stati affermati e che ho tutte le ragioni per credere esatti. Il prof. Buffa fu mandato l'anno scorso (1905-1906) nella scuola *Tecnica* di Alessandria, ove fece adottare la mia aritmetica *che adottava da nove anni* nelle altre scuole. Il prof. Amaldi di Bologna, mandato ad Alessandria come ispettore, *vietò* al Buffa l'uso del mio libro!!!! Al principio dell'anno scolastico 1906-1907 il Buffa ripropose il mio libro, ma il direttore e i 4 colleghi di matematica delle classi aggiunte si opposero: il Buffa richiede una critica scritta, e dopo molti stenti riesce ad ottenerla e farla inserire nel verbale. Ti mando copia dei cinque capi d'accusa, con le mie osservazioni in rosso. […] 2º È poco accessibile alla mente degli alunni perché fa inutile ed eccessivo sfoggio di simbolismo, presuppone noti e familiari agli alunni concetti, operazioni e teorie che essi non possono sapere, ed il frasario stesso è artificioso ed oscuro.[68]

Con favore è invece accolta la pubblicazione dell'*Algebra elementare* del sacerdote salesiano Marco Nassò, allievo di Peano e professore al Liceo Valsalice di Torino. Ben più tradizionale nei contenuti, il manuale di Nassò riceve ottime recensioni in Italia, Francia, Spagna, Inghilterra, Germania e Polonia[69] e conosce un notevole successo

[68] C. Burali-Forti a G. Vailati, Torino 6.1.1907, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati, cc. 2r-2v. Cfr. anche le lettere di C. Burali-Forti a Vailati del 2.5.1906; 15.1.1907; 7.3.1907; 5.9.1907 e del 28.12.1907, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati.

[69] Il rilievo attribuito alla storia della matematica in questo manuale è ad esempio sottolineato nelle recensioni. Cfr. G. Peano a M.

editoriale, tanto che nel 1919 raggiunge la decima edizione e nel 1925 si rende necessaria una nuova ristampa riveduta e aggiornata, curata, dopo la morte di Nassò, da Agostino Borio, anch'egli allievo di Peano. L'*Aritmetica* di Nassò brilla per chiarezza e semplicità di esposizione ed è corredata da 2300 esercizi e problemi graduati, da 400 esercizi risolti in dettaglio, e da un vasto apparato di note storiche, in parte mutuate dai celebri *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* di M. Cantor, che includono indicazioni su testi classici di aritmetica cinesi, indiani e arabi.

Non si possono infine tralasciare i manuali di aritmetica redatti da alcuni studiosi e insegnanti che, pur non facendo propriamente parte della Scuola di Peano,

Nassò, Torino 12.10.1898 in *Nassò Dott. Marco* ..., 1898 cit., p. 531: «Le sue indicazioni storiche sono preziose...»; W. J. Greenstreet, *Algebra elementare. By M. Nassò*, «The Mathematical Gazette», 18, 1899, p. 305: «An interesting feature of the book is the number of purely historical notes»; M. Cantor, *Marco Nassò, Algebra elementare*, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», 44, 1899, p. 122: «Wir empfehlen nochmals aufs wärmste das Buch unseres italienischen Fachgenossen, welches auf uns persönlich auch durch die zahlreichen eingestreuten geschichtlichen Angaben einen angenehmen Eindruck machte»; S. Dickstein, *M. Nassò, Algebra elementare*, (traduzione italiana: «La nota caratteristica di queste opere è il massimo rigore scientifico, una grande chiarezza di esposizione, le numerose note storiche inserite nel testo, ed il grande numero di esercizi e di problemi.»); C. A. Laisant, *M. Nassò, Algebra elementare*, «L'Enseignement mathématique», 1899, 1, pp. 226-227 e G. Teixeira, *Marco Nassò: Algebra elementare*, «Jornal de Sciencas Mathematicas e Astronomicas», 13, 1899, pp. 175-176. Per la redazione dell'apparato storico-critico Nassò si rivolge anche a Vailati e Vacca: cfr. G. Vailati a G. Vacca, Roma 23.3.1909, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati, c.p.

intrattengono con lui contatti epistolari e partecipano alle iniziative editoriali da lui patrocinate. L'*Aritmetica e Geometria* di Ciamberlini, rivolta agli studenti delle Scuole Complementari, è apprezzata nell'ambito della Scuola torinese di logica e recensita con favore da Bettazzi, che ha parole di elogio per la sobrietà di linguaggio e per l'abilità con cui l'autore ha saputo dosare le spiegazioni teoriche e le applicazioni concrete.[70]

Altrettanto positivo è il giudizio espresso da Peano sul libro di Natucci *Il concetto di numero e le sue estensioni,* ritenuto pregevole per le numerose note storiche e bibliografiche:

> Ora il prof. Natucci pubblica questo grosso libro, denso di informazioni, di critiche e di citazioni bibliografiche. [...] L'Autore rileva l'importanza degli studi storici relativi alla scienza, e degli studi critici, che servono a perfezionare l'insegnamento. [...] Il libro è corredato da una ricchissima bibliografia in varie appendici, oltre alla citazione di circa 500 autori nel testo.[71]

8. *Conclusione*

L'analisi dei libri di testo di aritmetica consente pertanto di cogliere i valori e i limiti della riflessione sulla storia e la didattica della matematica, di grande modernità, avviata nella Scuola di Peano. Se è vero che Peano non fu uno storico della matematica "professionista", occorre tuttavia rilevare che egli e i suoi collaboratori contribui-

[70] Cfr. R. Bettazzi, *C. Ciamberlini, Aritmetica* ..., 1910 cit., p. 48.

[71] Peano, *Alpinolo Natucci* ..., 1923a cit., pp. 382, 383.

rono a evidenziare alcune componenti dell'indagine storiografica di importanza indiscutibile, rivolgendo particolare attenzione alla ricerca delle fonti, alle trascrizioni e alle traduzioni, ai repertori bibliografici, alle edizioni critiche accurate e alle antologie dei classici della scienza. La concezione storiografica di Peano rivela tuttavia alcuni limiti oggettivi, ravvisabili in una visione rettilinea del progresso della matematica, che non prevede soste né deviazioni, e che pone l'accento sulle sole "verità" che hanno contribuito al progresso della scienza. Nello stesso tempo, però, Peano e i suoi allievi mostrano di avere una corretta percezione della dimensione storica delle differenti discipline matematiche e, nonostante il rilievo dato al carattere "ludico" della storia della matematica per la didattica, sono attenti a non indulgere in mere considerazioni aneddotiche.

Per quanto riguarda il risvolto più propriamente didattico, la sensibilità della Scuola torinese di Peano per l'insegnamento condotto con metodo storico, largamente condivisa all'epoca e alimentata dal dialogo fecondo con matematici e storici della matematica, trova conferma nelle proposte istituzionali che, a vari livelli, sottolineano l'importanza di bandire una pratica di insegnamento della matematica atemporale e acritica.

L'esigenza scientifica e didattica di intrecciare l'indagine storica alla trattazione matematica si traduce nella richiesta, giunta da più parti, di introdurre corsi di Metodologia e di Storia delle Matematiche nelle Università e nelle Scuole di Magistero[72] e viene recepita dalla Riforma

[72] Cfr. Padoa, *Preparazione degli insegnanti di matematica* …, 1909 cit., p. 4: «A parer nostro, il corso biennale di Metodologia matematica […] obbligatorio per il conseguimento del Diploma di magistero […] potrebb'esser frequentato durante il quadriennio di Facoltà o anche

Gentile del 1923 nella quale «si trovano indicate alcune nozioni sopra la Storia delle Scienze di ragionamento e di osservazione».[73]

All'interno della Scuola di Peano si assiste infine al fiorire di una produzione di manuali di aritmetica e di algebra, che, se da un lato si differenzia sempre più nettamente dal manuale "di riferimento" di J. Bertrand,[74] dall'altro inaugura una nuova stagione della manualistica italiana per la scuola elementare e secondaria, che riscuote notevoli successi.

Nello stesso tempo, la collaborazione feconda fra docenti universitari e insegnanti della scuola secondaria, la volontà di patrocinare la divulgazione scientifica e l'at-

dopo la Laurea; nel primo caso durante il 2° biennio, perché stimiamo utile far ritornare la mente dei giovani sulle questioni elementari dopo uno stacco, il quale accentui la diversità di intendimenti con cui viene ripreso tale studio (non più soltanto conoscitivo, ma sovratutto critico e storico) [...]. Ed appunto la Storia della matematica – anziché essere svolta a parte, col pericolo di trarne soltanto un faticoso e sterile notiziario biografico e cronologico – dovrebbe compenetrare tutto il nostro corso, mirando sovratutto alla ricostruzione delle varie fasi di sviluppo di ciascuna teoria ed all'indagine dell'azione vicendevole di causa e di effetto tra il progredire di teorie sostanzialmente o formalmente affini».

[73] G. Loria, *L'insegnamento della Storia delle Scienze in Italia*, «Archeion», 13, 1931, pp. 474-476.

[74] Il volume di J. Bertrand è recensito con molta severità da Burali-Forti per la «RdM» (1, 1891, p. 85): «Sul trattato di Aritmetica del sig. Bertrand sono stati modellati tutti i trattati d'aritmetica finora pubblicati; in questi si trovano conservate (anzi il più delle volte aumentate) le inesattezze esistenti nel trattato del Bertrand. Credo cosa non inutile rilevare le principali di queste inesattezze». A partire da questa data, dunque, la manualistica di aritmetica si svincola dalle traduzioni dei manuali europei e, in particolare, dall'impostazione del testo di Bertrand, considerato normativo per oltre tre decenni.

tenzione rivolta al panorama editoriale dei libri di testo si rivelano strategie integranti di un più ampio progetto di promozione e diffusione della cultura matematica, volto a stimolare il dialogo fra la cultura umanistica e quella scientifica e a proporre un insegnamento interdisciplinare. Ne risulta un'originale e modernissima sintesi delle attività di ricerca matematica, storica e didattica che costituisce uno dei lasciti più duraturi della Scuola di Peano nella cultura italiana.

Ringraziamenti

Al termine di questo lavoro desidero esprimere il mio più sentito ringraziamento alla Prof.ssa C. S. Roero che con costante disponibilità e grande pazienza ha diretto questa ricerca, mi ha incoraggiato in tutte le sue fasi ed è stata prodiga di innumerevoli e preziosi suggerimenti. Sono inoltre molto grata alla Prof.ssa L. Giacardi, che mi ha dato l'opportunità di esporre questa ricerca e ne ha discusso con me alcuni interessanti aspetti.

Appendice

I manuali di aritmetica della Scuola di Peano citati nell'articolo

Bersano C., Gili D., Zavagna I., *Calcolo numerico*, Torino, Paravia, 1924.

Bettazzi R., *Aritmetica razionale ad uso dei ginnasi*, Torino, Salesiana, 1902.

Boggio T., Agostinelli C., *Lezioni di Matematica (Algebra, Geometria, Trigonometria)*, 2ª ed., Torino, Gili, 1940.

Boggio T., *Lezioni di algebra per gli Studenti della R. Scuola Sup. di Commercio di Genova*, 2ª ed., Genova, Castello, 1908.

Burali-Forti C., *Aritmetica razionale*, Torino, Bona, 1892.

Burali-Forti C., *Lezioni di Aritmetica pratica ad uso delle scuole secondarie inferiori*, Torino, Petrini, 1897, 14ª ed., Torino, Petrini, 1925.

Burali Forti C., Ramorino A., *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, Torino, Gallizio, 1898.

Burali Forti C., Ramorino A., *Elementi di Aritmetica Razionale ad uso della 3ª Classe della Scuola Tecnica*, Torino, Petrini, 1898.

Burali-Forti C., Boggio T., *Esercizi di algebra*, Torino, Petrini, 1932.

Cassina U., *Calcolo numerico, con numerosi esempi e note storiche originali*, Bologna, Zanichelli, 1928.

Ciamberlini C., *Complemento di Aritmetica razionale ad uso dei Ginnasi*, 2ª ed., Torino, Salesiana, 1905.

Ciamberlini C., *Aritmetica e Geometria per le scuole complementari*, Torino, Paravia, 1909-10.

Nassò M., *Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici (1° biennio)*, Torino, Salesiana, 1898.

Nassò M., *Aritmetica generale ed Algebra*, Torino, Salesiana, 1898, 10ª ed. Torino, Internazionale, 1919.

Natucci A., *Aritmetica pratica*, Palermo, Sandron, 1909.

Natucci A., *Aritmetica ragionata ed Algebra*, Palermo, Sandron, 1909.

Natucci A., *Elementi di Aritmetica ragionata ed Algebra per le scuole medie*, Palermo, Sandron, 1909.

Natucci A., *Il concetto di numero e le sue estensioni*, Torino, Bocca, 1923.

Natucci A., *Aritmetica, geometria e computisteria*, Palermo, Sandron, 1927.

Padoa A., *Aritmetica intuitiva per le Scuole Medie*, Milano, Sandron, 1923.

Pagliero G., *Algebra per i Ginnasi superiori e i Licei classici*, Torino, Paravia, 1930.

Vivanti G., *Aritmetica razionale e algebra per il Corso Magistrale Superiore*, Torino, Lattes, 1928.

ORNELLA POMPEO FARACOVI

ENRIQUES, GENTILE E LA MATEMATICA

Come è ben noto, l'atteggiamento di Enriques nei confronti della riforma Gentile fu critico, ma non polemico. Il matematico-filosofo non sembrò mai attratto dalla questione delle implicazioni sociali di una riforma, che Rodolfo Mondolfo ebbe invece immediatamente a classificare come oscurantistica, dominata com'era da «due superstizioni che in essa campeggiano», quella del latino e quella dell'esame di stato.[1] Non si soffermò sugli aspetti autoritari e classisti di un provvedimento, che Gaetano Salvemini avrebbe bollato poi come volto ad «intercettare alla povera gente il passaggio dalla scuola elementare ad ogni altro tipo di scuola superiore», infamia che non si era prodotta, avrebbe aggiunto, «in nessun altro paese del mondo».[2] Non riprese gli argomenti con i quali molti esponenti dell'ambiente scientifico stigmatizzarono la svalutazione dell'istruzione tecnico-scientifica: gli fu estranea, in particolare, la riflessione sui danni che potevano derivare dall'abbondanza di «giovani filosofi

[1] R. Mondolfo, *La riforma della scuola* [1923], in *Critica sociale*, a cura di M. Spinella, A. Caracciolo, R. Amaduzzi, G. Petronio, Feltrinelli, Milano 1959, vol. II, p. 755.

[2] G. Salvemini, *Scuola e società*, in *Scritti sulla scuola*, Feltrinelli, Milano 1965, p. 1065.

dell'avvenire», dai quali sarebbe stato difficile, quando necessario, cavare «quelle migliaia di sottotenenti del genio e dell'artiglieria, che si sono potute procurare in pochi mesi durante l'ultima guerra».[3] Non fece proprie nemmeno lo considerazioni di principio con le quali Vito Volterra e Guido Castelnuovo ebbero ad insistere sugli effetti devastanti di riduzioni e accorpamenti degli insegnamenti scientifici nella scuola media e nell'università. Vale la pena di ricordare brevemente queste ultime prese di posizione, per farne emergere le differenze rispetto a quelle di Enriques.

In Senato, Vito Volterra prese parte, il 21 aprile, il 4 e il 25 maggio 1923, a riunioni assai vivaci, nelle quali fu discussa la possibilità di proporre la sospensione della riforma con un apposito ordine del giorno.[4] Presso l'Accademia dei Lincei, di cui era in quel momento presidente, istituì una commissione, che nella relazione conclusiva, redatta da Castelnuovo, criticò l'incipiente preponderanza della filosofia sulla scienza, ed espresse il timore che

[3] «Qui siamo tutti sgomenti per le 'riforme' dell'onorevole Gentile: senza parlare dell'interesse per la scienza, ci si domanda come sarà possibile, quando se ne presentasse la necessità, cavare dai giovani filosofi dell'avvenire quelle migliaia di sottotenenti del genio e dell'artiglieria, che si sono potute procurare in pochi mesi durante l'ultima guerra», scrisse il fisico fiorentino Antonio Garbasso, in una lettera a Vito Volterra del luglio 1923, citata in P. Nastasi, A. Guerraggio, *Gentile e i matematici italiani*, Bollati Boringhieri, Torino 1993, p. 74.

[4] I verbali delle riunioni sono conservati nell'Archivio Volterra, a Roma, presso la Biblioteca dell'Accademia dei Lincei. Sull'episodio è tornato recentemente E. Vesentini, *Scienza e cultura formativa ieri e oggi*, Quaderni del Centro Studi Enriques, I, Agorà Edizioni, Sarzana 2004, pp. 15-16.

> una parte esuberante data alla filosofia nei programmi dei licei po[tesse] favorire il risorgimento delle tendenze eccessivamente aprioristiche e delle argomentazioni meramente verbali, contro le quali i maggiori spiriti del Rinascimento hanno sostenuto tante lotte, che parevano chiuse, grazie alla vittoria del sommo Galileo.[5]

La conclusione della Commissione fu dunque una sonora bocciatura della riforma, accusata di essere inopportunamente sopravvenuta a cancellare una scuola che fra il 1860 e il 1880, «per merito di illuminati legislatori», aveva saputo salire ad alto livello, «e poteva competere con le migliori straniere». L'efficacia del vecchio ordinamento negli ultimi decenni era forse diminuita a causa di «deplorevoli indulgenze e rilassatezza di disciplina»; ma «sarebbe bastata una mano ferma, che avesse rimesso in vigore le norme più austere, per ridare alla scuola l'antico prestigio»; mentre «una riforma radicale, per quanto ispirata da nobili intendimenti, non sembrava necessaria».[6]

Negli interventi di Enriques non ci fu nulla di tutto questo. Non ci fu, in particolare, l'ultimo argomento - l'inutilità di una riforma -, radicalmente smentito dall'intensa attività che il matematico-filosofo aveva svolta lungo tutto il primo quindicennio del secolo a vantaggio del riordino dell'istruzione medio superiore e universitaria, e che lo aveva visto esplicitamente criticare, come diremo poi, un caposaldo della politica scolastica dell'età del positivismo, la sezione fisico-matematica degli Istituti Tecnici. All'atto della rifor-

[5] *Sopra i problemi dell'insegnamento superiore e medio a proposito delle attuali riforme*, Tipografia della Reale Accademia dei Lincei, Roma 1923, p. 3.

[6] Ibidem.

ma del 1923, Enriques era presidente della Mathesis, l'associazione dei docenti di matematica di cui, assumendone la guida nel 1918, aveva favorito l'apertura ai docenti di fisica. In quella veste, scelse la strada non della contrapposizione, ma del tentativo di integrazione.[7] Nel marzo 1923, alla guida di una commissione rappresentativa della società, presentò a Gentile le proposte degli aderenti[8], ottenendo assicurazioni, come ebbe poi a riferire, circa il non esservi da parte del ministro «alcuna idea di abbassare o diminuire l'importanza dell'insegnamento scientifico nella Scuola Media».[9] In maggio, in un nuovo incontro con il ministro, gli consegnò un promemoria contenente i frutti di una serie di riunioni molto critiche rispetto alle riduzioni di orario e agli accorpamenti fra le materie,[10] cui Gentile replicò definendone le richieste «difficilmente conciliabili» con la situazione economica.[11] Nel successivo congresso della Mathesis, tenutosi a Livorno nel settembre dello stesso anno, mantenne una posizione moderata, dichiarandosi d'accordo con quanti sottolineavano l'opportunità di esaminare, oltre all'aspetto organizzativo, anche i «principii generali» della riforma, che potevano giudicarsi, riteneva, almeno in parte condivisibili.[12] In continuità con quella presentata quattro anni prima a Trieste,[13] la relazione con

[7] L'azione svolta in tale contesto da Enriques è stata criticamente esaminata da F. La Teana, *F. Enriques e la riforma Gentile*, in *La ristrutturazione delle scienze fra le due guerre mondiali*, a cura di G. Battimelli, M. De Maria, A. Rossi, La Goliardica, Roma 1984, pp. 303-314.

[8] Per il resoconto delle riunioni cfr. «Periodico di Matematiche», s. IV, 3, 1923, pp. 154-160.

[9] *Intorno alla riforma della scuola media*, «Periodico di Matematiche», s. IV, 3, 1923, p. 264.

[10] Per i verbali, ivi, pp. 265-270 e 341-362.

[11] Ivi, p. 337.

[12] «Periodico di matematiche», s. IV, 4, 1924, p. 471.

la quale introdusse i lavori del congresso affrontò il tema della tradizione italica, che era venuto emergendo alla sua riflessione negli anni intorno alla prima guerra mondiale. In essa un accento particolare venne a cadere sul rapporto inscindibile fra cultura umanistica e cultura scientifica nell'antichità classica e nel Rinascimento italiano: si fece luce in tal modo sulla prospettiva storiografica che costituiva lo sfondo del tentativo enriquesiano di integrazione della riforma Gentile. Ciò di cui si trattava era infatti operare una iniezione di cultura scientifica nella nuova scuola, ad arricchirne la portata formativa, senza diminuire il ruolo dell'istruzione classica.

Accortamente, l'intervento del settembre 1923 si concluse con una sottolineatura del ruolo degli insegnanti, assegnando proprio a loro il futuro della scuola, piuttosto che farlo dipendere dalle strutture della riforma, in tal modo implicitamente sdrammatizzata.[14] In questo atteggiamento di cautela poté non essere assente una intenzione tattica: esperto di presidenze e di assemblee, Enriques sapeva che è più facile ottenere consensi su posizioni moderate, che non su posizioni radicali; in altre occasioni, del resto, aveva saputo rinunciare a proposte alle quali personalmente teneva, quando era apparsa chiara l'impossibilità di registrare su di esse ampie convergenze[15]. Ma non solo di tattica doveva trattarsi, se a

[13] F. Enriques, *Il valore delle matematiche nella filosofia italica,* «Bollettino della Mathesis», XII, 1920, pp. 4-7; «Bollettino di Matematica», XVI, 1919, pp. 113-114.

[14] F. Enriques, Il *significato umanistico della scienza nella cultura nazionale,* «Periodico di matematiche», s. IV, 4, 1924, pp. 1-6.

[15] Cfr. Associazione Nazionale fra i Professori Universitari, *Atti del Congresso Universitario Roma 11-13 aprile 1912,* Tip. Cooperativa, Pavia 1912, p. 14.

quella linea il matematico-filosofo rimase fedele anche quando essa cominciò a perdere consensi all'interno della Mathesis, dove fu infine giudicata povera di risultati, tanto da convincerlo nel 1932, allo scadere del mandato, a non ripresentare la propria candidatura.[16]

Le sue posizioni di sempre furono intanto ribadite punto per punto nell'intervento su *La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella scuola media*, uscito anche su «Cultura fascista» nel 1927. Di nuovo la battaglia sulla riforma era ricondotta alla questione degli orari di insegnamento delle due materie ora abbinate, e la soluzione del non lieve problema di «conferire alle discipline matematiche e fisiche il posto che loro compete nella formazione umanistica» affidata all'accrescimento del numero delle cattedre. Su due aspetti della riforma veniva ribadito un giudizio positivo: la prevalenza delle valenze formative su quelle informative, e il principio stesso dell'abbinamento, in linea di principio non discordante dall'avvicinamento delle due discipline, già promosso, come si è visto, anche all'interno della Mathesis. Enriques ripeteva che «non vi è difficoltà a consentire che la più ampia veduta delle discipline matematiche e fisiche, dove il ragionamento si armonizza coll'esperienza [...] conferisca a chi la possiede una comprensione veramente superiore della scienza», e riconosceva «tutto

[16] Ancora nel 1925, dopo aver ottenuto attraverso la Mathesis pronunciamenti critici sulla riforma da parte delle Facoltà di Scienze di diverse Università (Bologna, Napoli, Milano, Roma, Torino, Genova, Firenze, Pavia («Periodico di Matematiche», s. IV, 5, 1925, pp. 202-204), nel congresso di fine ottobre fece spazio a voci che ribadivano come i voti della Mathesis non fossero contrari alla riforma, ma intendessero migliorare le condizioni del suo funzionamento (Ivi, s. IV, 6, 1926, p. 48).

il valore dell'educazione classica e storica che si è voluto promuovere».[17] Il problema principale veniva individuato a livello di organizzazione, di cattedre e di orari: «il posto che si è fatto nella Scuola media e particolarmente nell'Istituto classico agli insegnamenti scientifici è inadeguato agli scopi che occorre raggiungere». La soluzione stava dunque in «semplici ritocchi» da apportare alla legge. Tale proposta non mirava in alcun modo ad infirmare i principi della riforma, ma puntava «ad evitare che il miglior spirito della riforma Gentile sia compromesso, e la sua bontà frustrata nelle strette dei piccoli ostacoli economici».[18]

La moderazione enriquesiana non era dunque soltanto tattica; né era riducibile a quella renitenza a schierarsi apertamente contro la politica del fascismo, per la quale, pur se si guardò bene, a differenza di Severi, di vestire i panni dell'intellettuale di regime, Enriques non prese mai pubbliche posizioni antifasciste. Quella del suo rapporto con il fascismo è una questione controversa; basterebbero a ricordarlo la formale dichiarazione di Castelnuovo circa la sua istintiva avversione alle ideologie del regime, e quella diametralmente diversa di Tricomi, per il quale Enriques «non era per nulla un antifascista professo, ma anzi, pur non chiudendo gli occhi davanti agli errori e peggio del regime, tendeva a scusarli, propendendo per idee cosiddette di destra».[19] Sulla questione ho scritto altrove, e posso qui soltanto

[17] F. Enriques, *La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella scuola media*, Ivi, s. IV, 8, 1928, pp. 70-71.

[18] Ivi, pp. 72-73.

[19] F. Tricomi, *Ricordo di F. Enriques nel centenario della nascita*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», 1971, p. 890.

rimandare a quanto già detto.[20] Aggiungerei soltanto che Enriques sembrò sorpreso dall'introduzione autoritaria della riforma, imposta dal governo Mussolini, in virtù dei pieni poteri, per decreto legge, senza ascoltare le associazioni professionali, e senza approvazione parlamentare. Va ricordato che, appena divenuto presidente dell'associazione Mathesis, aveva promosso l'elaborazione di suggerimenti da sottoporre al governo, continuando dunque a puntare sul rapporto diretto fra associazioni scientifiche ed esecutivo, che era stato consueto nell'età giolittiana; e su questa linea nel 1919 era riuscito a sventare la ventilata, temuta abolizione dell'insegnamento della matematica nell'ultimo anno del liceo.[21] Sembrò sorpreso anche nel 1938, a quanto testimonia una pagina recentemente pubblicata del diario della moglie, di fronte all'introduzione delle leggi razziali.[22] Qualunque giudizio voglia darsi sul suo rapporto di voluta estraneità alla politica, che il suo parziale appoggio alla riforma Gentile non fosse dettato da un qualche criptico filofascismo, è testimoniato dal suo difenderla pubblicamente anche quando divenne chiaro che le più dure critiche, e le più incisive modifiche, dell'ordinamento gentiliano venivano proprio dagli ambienti fascisti, che quell'ordinamento, per molti

[20] Cfr. O. P. Faracovi, *Federigo Enriques e/o l'impoliticità dell'intellettuale*, in *Enriques e Severi. Matematici a confronto nella cultura del Novecento*, a cura di O. P. Faracovi, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 4, Agorà Edizioni, Sarzana 2004, pp. 107-130.

[21] Cfr. *I nuovi programmi*, «Bollettino di Matematica», XVI, 1919, p. 215.

[22] Cfr. L. Cohen, *Soggiorno a Gressoney e nuovi dispiaceri*, in *Le città di mare e lo spirito scientifico.* Scritti di U. Bottazzini, A. De Benedetti, P. E. Fornaciari, O. P. Faracovi, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 1, Agorà Edizioni, La Spezia 2001, pp. 81-85.

aspetti aristocratico e comunque estraneo alle esigenze di un regime reazionario di massa, non mostrarono mai di amare particolarmente[23]. Sull'ancora imperfetta, ma auspicabile, realizzazione della riforma tornò infatti nel 1929, in un articolo uscito su «L'enseignement mathématique»; di nuovo nel 1938 parlò dell'impellente dovere di lavorare per tradurla in atto.[24] Se dunque Enriques espresse sulla riforma Gentile un giudizio critico, ma non globalmente negativo, fu in primo luogo per ragioni attinenti alla sua concezione della cultura e della conoscenza; per ragioni, quindi, di ordine pedagogico e, ancor più, di ordine filosofico.

I temi della riforma, che Enriques valorizzava, erano essenzialmente la valenza formativa, e non solo informativa, dell'educazione; l'impostazione sintetica dei programmi; il taglio attivistico del rapporto maestro-scolaro. Essi convergevano con molti dei motivi da lui stesso elaborati, lungo strade diverse, nel primo quindicennio del secolo. Enriques infatti era stato attivo fin dai primi del Novecento sul fronte della promozione e del coordinamento di testi per la preparazione degli insegnanti (è del 1900 la raccolta delle *Questioni riguardanti la Geometria elementare*), e della stesura di manuali scolastici (esce nel 1903 la prima edizione degli *Elementi di geometria*, scritti in collaborazione con Ugo Amaldi). Nel decennio 1905-1915, era ripetutamente intervenuto sulla questione universitaria, ed aveva impostato una coerente battaglia contro la visione particolaristica della scienza, che

[23] Su ciò J. Charnitzky, *Fascismo e scuola. La politica scolastica del regime (1922-1943)*, La Nuova Italia, Firenze 1996.

[24] «L'Enseignement mathématique», XXVIII, 1929, pp. 13-18; F. Enriques, *Importanza della storia del pensiero scientifico nella cultura nazionale*, «Scientia», XXXII (1938), p. 133.

considerava propria dell'età del positivismo[25]. In tale contesto, aveva esplicitamente criticato il ruolo di scuola preparatrice agli studi universitari di ingegneria, di quella sezione fisico-matematica degli Istituti Tecnici, che era stata una figlia prediletta della pedagogia positivistica italiana.[26] Al contrario, aveva valorizzato la scuola classica, della quale, come aveva scritto nel 1902 a Giovanni Vailati, era convinto avessero bisogno soprattutto i futuri scienziati.[27]

> E buono è oggi relativamente il nostro Ginnasio – aveva scritto nel 1908 –; la scuola classica ha una tradizione, che anche gl'innovatori debbono rispettare, quando si pensi che i licenziati da codesta scuola tengono tuttora il primato nelle Facoltà fisico-matematiche.[28]

L'invito a sviluppare nell'insegnamento un approccio sintetico, capace di far «brillare sugli umili particolari

[25] Su questo tema rimando al mio *Una nuova antologia enriquesiana*, in *Intorno a Enriques. Cinque conferenze*, a cura di L. M. Scarantino, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 3, Agorà Edizioni, Sarzana 2003, pp. 1-15.

[26] F. Enriques, F. Severi, A. Conti, *Relazione sul tema "Estensione e limiti dell'insegnamento della matematica, in ciascuno dei due gradi, (inferiore e superiore), delle Scuole medie*", «Bollettino di Matematica», II, 1903, pp. 50-56.

[27] «Quanto alla questione pedagogica cui Ella mi accenna, le dirò ch'io do il più alto valore all'istruzione classica secondaria, come Ella forse già sa; temo quindi che i nuovi progetti tolgano il beneficio di questa istruzione a coloro che, secondo me, ne hanno più bisogno, cioé i futuri scienziati», F. Enriques a G. Vailati, lettera del 17 maggio 1902, in G. Vailati, *Epistolario,* a cura di G. Lanaro, Introduzione di M. Dal Pra, Einaudi, Torino 1971, p. 578.

[28] F. Enriques, Recensione a A. Galletti-G.Salvemini, *La riforma della scuola media,* in «Rivista di Scienza (Scientia)», II, 1908, p. 194.

la grande luce dell'idea generale», e di far scaturire dalle osservazioni più elementari «una scintilla di quella fiamma» che si accende nel pensiero, aveva fatto parte integrante del programma di formazione degli insegnanti di matematica, proposto con le diverse edizioni delle *Questioni*. La convinzione che la scuola media non possa fornire il sapere, ma debba svolgere piuttosto le attitudini a conquistarlo, non «informatrice ma largamente educatrice delle energie attive dell'intelligenza»,[29] aveva guidato i numerosi interventi sulla questione della riforma. Su questi temi, come si sa, Enriques non si era limitato a scrivere; li aveva posti anche al centro dell'attività svolta all'interno della Federazione Nazionale Insegnanti Medi e della Associazione dei Professori Universitari, quando era stato un protagonista di discussioni che avevano coinvolto molte delle migliori energie intellettuali del paese.[30]

Per Enriques nella scuola, in ogni tipo di scuola, è implicita una essenziale finalità formativa; nessun tipo di istruzione, per quanto professionale o tecnica, può trascurare la questione della formazione generale dello spirito, ossia dello sviluppo delle capacità critiche e dell'attitudine alla ricerca e allo sforzo personale. Convinto che fra i vari tipi di scuola quella che meglio svolgeva la funzione formativa fosse la scuola classica, si sforzò di mostrare come l'educazione matematica fosse parte integrante, interna e non esterna, della classicità e della

[29] Ivi, p. 192.

[30] Questo aspetto della sua attività è stato recentemente esaminato da Mauro Moretti, *Appunti sulla politica scolastica di Federigo Enriques*, in F. Enriques, *Insegnamento dinamico,* con scritti di F. Ghione e M. Moretti, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 2, Agorà Edizioni, Sarzana 2003, pp. 15-91.

cultura formativa che ad essa si richiamava: di ciò i suoi scritti sulla storia del pensiero scientifico, specialmente di quello antico, si incaricarono di recare importanti conferme. La moderazione con la quale condusse il confronto con la scuola gentiliana, dunque, non derivava dalla accettazione della superiorità filosofica dell'idealismo; da una subalternità sulla quale si scrisse molto, a sproposito, venticinque anni fa, da parte di storici della scienza e della filosofia, troppo affezionati ai due miti simmetrici del carattere retorico della tradizione culturale italiana, e della costitutiva debolezza filosofica dell'ambiente scientifico, da Galileo in poi. Nasceva invece da una elaborazione autonoma, che sui temi della politica scolastica era anteriore al rapporto con l'idealismo e indipendente da esso, così come lo era sul piano delle posizioni filosofiche e delle prospettive storiografiche. Il tentativo di far convergere formazione classica e cultura matematica si collegava infatti in Enriques al grande tema filosofico suo proprio: quello dell'unità della cultura, in cui si esprime e manifesta l'unità essenziale della ragione umana.

A proposito del rapporto fra Enriques e la filosofia, è forse opportuno osservare che quando si parla di lui come di un matematico-filosofo, l'espressione non va intesa nel senso che nella sua opera la filosofia si aggiunga alla matematica, restandone in qualche modo all'esterno. Al contrario, nella prospettiva enriquesiana la filosofia è dentro la matematica, nel duplice senso che l'elaborazione dei problemi matematici pone interrogativi filosofici, e il modo di intendere le finalità, gli oggetti e gli strumenti della matematica fa parte del fare matematica e in qualche modo anche lo condiziona. Ne sono un esempio le *Lezioni di geometria proiettiva*, dove questa forma di geometria è intesa come volta in primo luogo allo studio delle proprietà grafiche, non metriche, e sono soprattutto sviluppati metodi che operino con tali proprietà.[31] La matematica ha una valenza filosofica essenziale, è un luogo privilegiato dell'attività universale del pensiero, «che in tanto appunto si sublima e cresce sopra se stesso, in quanto ha da lottare non col fantasma di sé, anzi con qualcosa d'esterno e d'opaco, ch'ei conquista e fa proprio nella chiarezza dell'idea matematica».[32] Erano posizioni lontane da quelle gentiliane; Enriques non mancava di far risaltare tale lontananza, con l'accenno all'oggetto del conoscere, ridotto dall'idealismo al semplice fantasma dello spirito.

Per Gentile, è soltanto la filosofia a cogliere ed esprimere l'atto spirituale nella sua attualità. La scienza coglie il pensato nella sua oggettualità, come qualche cosa di fisso, immobile, dato; ne perde dunque il nesso con l'atto spirituale. La filosofia è «gran madre di tutte le singole operosità spirituali»[33]; la scienza, invece, appartiene al momento religioso dello spirito, quello del non-io o della pura oggettività.[34]

> La filosofia genera sempre scienze, in cui par che si alieni da sé; scienze particolari, autonome, che, appena nate, chiedono alla madre di vivere da sé vita libera e indipendente [...]

[31] Rimando su questo punto al saggio di P. Bussotti, *Matematica e filosofia: il caso della geometria proiettiva*, in *Enriques e Severi*, cit., pp. 181-212.

[32] F. Enriques, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna 1936, p. 4.

[33] G. Gentile, *La preparazione degl'insegnanti medi*, in *La nuova scuola media*, a cura di H. A. Cavallera, Le Lettere, Firenze 1988, p. 182.

[34] G. Gentile, *Sommario di pedagogia come scienza filosofica*, II, 1937^4, p. 152.

> Non occorre dire che una tale scienza particolare, affatto chiusa nella sua particolarità, non esiste.[35]

E ancora:

> La scienza, una volta formata e costruita, viene considerata come qualcosa di immutabile in sé, o, come si dice appunto, affatto oggettivo. Tipo le matematiche: le cui verità non s'inventano, ma si scoprono [...] Ogni scienza aspira sempre a scoprire, con la fede che, scoperta che abbia precisamente la verità, questa sia per chiudersi in una formula matematicamente esatta, perfettamente analoga a una definizione dommatica.[36]

Lo scienziato intende la scienza come acquisto definitivo di una verità esteriore allo spirito; perciò all'educazione scientifica è intrinseco «il senso di oggettività pura del reale chiuso in sé, non compenetrabile e plasmabile per opera della nostra attività soggettiva»; modo di vedere che è proprio di quella scienza «che coi suoi schemi, le sue formule, le sue leggi, i suoi tracciati, i suoi preparati, i suoi cadaveri e le sue piante disseccate e le sue bestie impagliate è come un mondo di spettri, dove l'anima sente il freddo della morte».[37] Nulla di più lontano dalla interpretazione enriquesiana della scienza, e in primo luogo della matematica, come luogo del manifestarsi del carattere attivo della ragione umana, che stimolata dall'esperienza costruisce i propri concetti, senza mai fermarsi ai risultati raggiunti, ma procedendo verso sintesi conoscitive sempre rinnovate: una interpretazione il

[35] Ivi, p. 11

[36] *Sommario,* I, p. 229.

[37] Ivi, pp. 229-231.

cui massimo referente filosofico è, ricordiamolo, uno dei più grandi critici del dogmatismo, Immanuel Kant.

Dunque fra Enriques e Gentile le divergenze non riguardavano solo questioni di carattere pratico-organizzativo. Differenze su tali questioni erano certo presenti, ed erano rilevanti; come rilevanti erano state quelle già emerse nel 1907 all'interno della Associazione Nazionale Professori Universitari, quando Gentile aveva combattuto le proposte del matematico sui bienni preparatori e le scuole di magistero.[38] Ma fra le due prospettive c'era distanza anche e soprattutto nel modo di intendere il ruolo del pensiero matematico e del pensiero scientifico. È vero che il Gentile riformatore della scuola, e direttore dell'Enciclopedia Italiana, dovette sforzarsi di assicurare un orizzonte filosofico alla collaborazione con gli ambienti scientifici, divenuta indispensabile in ambedue i casi. Individuò perciò già nel 1923, proprio in rapporto alla riforma della scuola, nella storia del pensiero scientifico il possibile *trait d'union* fra i due campi, sottolineando il valore culturale della scienza, «in quanto non sia concepita come estranea alla vita e da essa distaccata, ma sappia trovare la propria giustificazione e il proprio valore nella storia della scienza»;[39] un tema che avrebbe ripreso e allargato negli anni Trenta. Ma queste aperture risolvevano solo in parte la difficoltà a penetrare il carattere strutturalmente dinamico della conoscenza matematica, il suo costruire i propri oggetti attraverso il duplice rapporto fra i dati fenomenici e la struttura degli organi di senso.

[38] *La preparazione degl'insegnanti medi,* cit., pp. 171-172.

[39] G. Gentile, *La moralità della scienza,* «Atti della Società Italiana per il Progresso della Scienza», XII Riunione, 1923, p. 14.

Che su questo punto la distanza fosse incolmabile lo aveva mostrato assai bene la recensione, faticosa e faticata, scritta da Gentile, su invito di Croce, ai *Problemi della scienza*. Era emersa allora tutta lontananza fra le due prospettive, insieme alla difficoltà insormontabile per il filosofo neoidealista a confrontarsi con la sottile disamina dei nuovi termini del sapere scientifico, con l'ausilio dei soli strumenti di una logica filosofica astratta[40]. Ma il tono era rimasto civile, così come lo sarebbe sempre stato in seguito; anzi la risposta di Enriques era stata di una serenità davvero olimpica:

> Lessi a suo tempo la sua critica dei miei problemi della Scienza. È naturale che non possa trovarmi d'accordo con Lei, ma la divergenza di vedute accresce in me il desiderio di chiarire colla conoscenza personale le origini del dissenso".[41]

Nella prospettiva di Gentile, nonostante le divergenze pienamente riconosciute, e più volte segnalate, Enriques ritrovava, sia pure in forma astratta, l'idea del carattere attivo del conoscere, e dell'educazione come formatrice delle capacità attive. Per questo nel 1922, alla vigilia della riforma, aveva potuto indirizzare a Gentile una lettera illustrativa della sua raccolta delle *Questioni*, nella quale aveva scritto:

> Attraverso quei problemi che toccano più da vicino le matematiche elementari e che hanno una storia venti volte secolare, si mira soprattutto a muovere l'interesse dei giovani

[40] Cfr. G. Gentile, Recensione a F. Enriques, *Problemi della scienza* (Zanichelli, Bologna 1906), «La Critica», VI, 1908, pp. 433-434.

[41] F. Enriques a G. Gentile, agosto 1909, in *Gentile e i matematici italiani*, cit., p. 147.

> chiamati all'insegnamento, i quali - anche nel caso che non sieno in grado di proseguire ricerche matematiche originali - debbono essere preservati dal pericolo di diventare ripetitori meccanici di una cultura ricevuta dal di fuor e però estranea veramente al loro spirito: che è una tesi a cui Ella giunge da premesse metafisiche, ma a cui io ho pur dato da parte mia - nella misura delle mie forze - il contributo dell'azione della mia vita".[42]

L'accenno alle premesse metafisiche dell'attualismo rimarcava una distanza pienamente assunta; ma la sottolineatura degli elementi di convergenza non nasceva solo dalla deferenza verso il ministro, e dalla personale simpatia e persino amicizia, mai rinnegate, per l'uomo. Nella scuola gentiliana, dei buoni professori di matematica, formati su buoni libri, avrebbero potuto svolgere, meglio che in altri contesti, quell'insegnamento dinamico della loro disciplina, cui Enriques riteneva di doverli invitare. Di ciò, il matematico filosofo era davvero convinto. Noi che abbiamo assistito al decadimento prima, allo smantellamento poi, di quella scuola, possiamo chiederci se in questo suo giudizio Enriques avesse, alla fine, davvero del tutto torto.

[42] F. Enriques a G. Gentile, 23 dicembre 1922, Ivi, p. 150.

Appendice 1.

Provvedimenti legislativi

Provvedimenti legislativi

1. Estratto dal Decreto Coppino (10.10.1867), *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze 24 ottobre 1867.*

Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei.

La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da risguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.

Prefisso per tal modo il fine alla matematica nella istruzione secondaria, esso ne conduce a stabilire i limiti della materia ed il metodo dell'insegnamento. I limiti devono essere abbastanza ristretti, affinché non possa in alcun modo accadere che gli allievi, supposti d'ingegno sufficiente e convenientemente preparati dall'istruzione linguistica, si trovino oppressi da un eccesso di estensione e di difficoltà; anzi giova che la materia sia tanto lontana dal riempir tutto l'orario assegnato ad essa, che il professore abbia comodità, di fare molti esercizi e d'interrogare spessissimo i suoi scolari. Quali parti della scienza convenga allogare entro i limiti così adombrati, è ancora chiaramente designato da ciò che si è detto sopra. Nell'aritmetica e nell'algebra si sono potute ommettere tutte quelle teorie speciali, la cui importanza risiede principalmente nelle applicazioni a cui menano o negli sviluppi successivi delle matematiche superiori; ma bisognò invece dare conveniente posto a quei principii, a quelle teorie generali che mostrano, grado per grado, come dal concetto volgare di numero intero si arrivi a quello del numero qualsivoglia, epperò dall'aritmetica comune si entri nell'algebra, dove le operazioni hanno il carattere di tanta universalità. Imperocché senza quei principii e quelle teorie generali, esposte colla più scrupolosa esattezza e con discreta misura, sarebbe affatto impossibile al giovane di formarsi una esatta idea dell'algebra.

Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa, e per ridurre a un tempo la materia entro modesti confini, basta applicare alle nostre l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli *elementi di Euclide*, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico.

Il metodo d'insegnamento non può essere che uno, cioè che tutte le singole parti sieno strettamente collegate fra loro e svolte con ordine razionale e con processo rigorosamente scientifico. Di questo metodo è appunto Euclide insuperabile maestro. Ma anche nell'aritmetica e nell'algebra è d'uopo attenersi al più assoluto rigore, procedere con somma cautela, ed evitare ogni sorta di sottintesi, specialmente là dove si estendono le operazioni del calcolo alle varie specie di numeri. Il professore si persuaderà facilmente che gli argomenti da svolgersi secondo le indicazioni che qui si uniscono, formano un sistema, nel quale la natura, i limiti, l'ordine dell'insegnamento sono chiaramente designati. Al professore spetta mostrare il legame di tutte queste parti, la dipendenza loro, e con unità di metodo, con rigore scientifico, comporne un tutto, che sia avviamento alle scienze esatte e compimento della coltura filosofica degli alunni per ciò che riguarda la logica matematica. Non si vuole che ciascuna parte del programma sia svolta con grande estensione, e condotta a minuti particolari; possono invece bastare le proposizioni fondamentali e più generali; ma è necessario che si vada innanzi senza salti, che tutto sia coscienziosamente dimostrato colla più severa esattezza, e che nessuno dei punti toccati rimanga oscuro o dubbioso.

Il professore dovrà sino dal principio dell'anno scolastico stabilire per sé un programma minuto e particolareggiato, nel quale sia determinato con precisione il metodo di coordinazione dei vari argomenti fra di loro, e la via per isvolgere ciascuno di essi; si faccia un obbligo rigoroso di essere sempre ordinato, chiaro ed esatto nel suo discorso; si astenga affatto da quelle lezioni accademiche, le quali servono solamente a far pompa di erudizione, e non lasciano alcuna traccia nelle menti dei giovanetti. Al contrario l'opera della scuola sia un continuo scambio di domande e risposte fra maestro e scolaro, per modo che il primo verifichi ad ogni momento se è seguìto ed inteso; ed il secondo sia indotto a riflettere sulle cose che ascolta e le faccia sue proprie; e non se ne appaghi finché gli resti alcunché d'incerto. Non si trascurino i frequenti esercizi numerici, sia nella scuola a viva voce, sia per mezzo di lavori, che, proposti dal professore, gli scolari eseguiranno a casa, e poi il professore correggerà. Mediante tali esercizi gli scolari si abitueranno ad applicare le regole imparate ed a superare da sé difficoltà prima inavvertite.

Ecco ora il programma delle materie assegnate alle singole classi.

Classe V ginnasiale

Geometria

Libro I d'Euclide.

Aritmetica ragionata

Sistemi di numerazione. Le prime quattro operazioni sui numeri interi. Esponenti - calcolo delle potenze. Divisibilità dei numeri. Calcolo dei numeri frazionari.

Classe I liceale

Geometria

Libri II e III di Euclide.

Aritmetica ragionata e algebra

Quadrato di un numero composto di parti. Radice quadrata dei numeri. Numeri incommensurabili. Somma e sottrazione algebrica - numeri negativi. Moltiplicazione e divisione algebrica - esponenti negativi. Potenze e radici dei monomi - calcolo dei radicali - esponenti frazionari.

Classe II liceale

Geometria

Libri IV, V, VI, XI, XII di Euclide.

Misura del cerchio, del cilindro, del cono, della sfera (Archimede).

Formole per le aere ed i volumi.

Algebra

Proporzioni. Generalità sulle equazioni. Equazioni di primo grado ad una incognita. Equazioni di secondo grado a due incognite, ed equazioni del quarto grado riducibile al secondo. Generalità sui sistemi di più equazioni simultanee. Risoluzioni di più equazioni lineari fra altrettante incognite. Progressioni per differenza e per quoziente - logaritmi - potenze con esponenti incommensurabili.

Appendice 1

Trigonometria

Linee goniometriche (funzioni circolari) - loro variazioni - riduzione degli archi al primo quadrante - espressione degli archi che corrispondono ad una linea trigonometrica data - relazioni fra le linee goniometriche di uno stesso arco. Formole per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli archi. Relazioni fra gli elementi di un triangolo.

Geometria

L'insegnamento della geometria comprende i primi sei libri, l'undecimo ed il dodicesimo degli elementi d'Euclide, ai quali si faranno succedere le più essenziali proposizioni di Archimede sulla misura del circolo, del cilindro, del cono e della sfera. Insegnata col metodo degli antichi, la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri: ond'è che in luogo di posporla all'algebra, se ne è assegnata una parte (I libro d'Euclide) alla quinta classe del ginnasio, ed una anche alla prima del liceo (II e III libro d'Euclide). Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Sopratutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete (linee, angoli, superficie, volumi) le loro misure: ma avvezzi i suoi scolari a ragionare sempre sulle prime, anche là dove se ne considerano i rapporti. Solamente dopo avere terminate le proposizioni d'Euclide e d'Archimede, richieste dal programma, si dedurranno da esse le formole che nella pratica servono per calcolare le aree delle figure rettilinee, l'area del cerchio, la lunghezza della circonferenza, la misura della superficie, ed i volumi del prisma, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera.

Aritmetica ragionata e Algebra

Nella quinta classe del ginnasio ha principio l'insegnamento dell'aritmetica come scienza esatta, cioè come primo grado di una rigorosa istituzione matematica. Gli scolari dovrebbero conoscere bene le regole pratiche del conteggio, apprese nelle scuole elementari, ma prevedendosi il caso non improbabile che se ne sia affievolita la memoria, il professore avrà cura di richiamarle per mezzo di sufficienti esercizi. Ed è a tal fine che si sono assegnate a questa classe cinque ore di matematica in luogo di quattro, che sarebbero bastate per compimento del programma.

Astrazione fatta da tali esercizi, il professore incomincierà da esporre chiaramente l'ordine di un sistema di numerazione, e poi passerà alle quattro operazioni fondamentali, dichiarandone la teoria con processo razionale. Nella moltiplicazione non tarderà ad introdurre la notazione degli esponenti, e dimostrerà il teorema che serve per moltiplicare fra loro due potenze di uno stesso numero; il teorema analogo che serve per la divisione, ecc. Esposte le nozioni fondamentali sui numeri primi, esplicherà con evidenza i teoremi più importanti sulla divisibilità dei numeri, insegnerà la scomposizione di un numero ne' suoi fattori primi, la ricerca di tutti i divisori di un numero, la ricerca del massimo multiplo comune a più numeri, quella del massimo comun divisore, sia per mezzo della scomposizione in fattori primi, sia col metodo delle successive divisioni. Mostrerà come la divisione dei numeri interi dia origine ad una seconda specie di numeri: i numeri frazionari. Estenderà ad essi il concetto di moltiplicazione, e le regole pel calcolo delle potenze. Avrà cura che si apprendano bene le regole più spedite per le trasformazioni delle frazioni e pel calcolo decimale.

Passando ora alla prima classe del liceo, si tratterà della formazione del quadrato di un numero composto di parti, e della estrazione (con una data approssimazione) della radice quadrata d'un numero (intero, o frazionario). Di qui si ricaverà il concetto di *numero incommensurabile;* e, data la definizione, si estenderanno a questi nuovi numeri le operazioni aritmetiche e le regole pel calcolo degli esponenti. Questo importante argomento somministrerà al maestro la prima occasione di stradare i suoi scolari nel fecondo metodo dei limiti. Allora comincierà l'uso *sistematico* delle lettere per esprimere *numeri generali* (commensurabili od incommensurabili), e si darà mano all'esposizione del *calcolo letterale.* La sottrazione genera i *numeri negativi,* ai quali si deve pure applicare il concetto delle quattro operazioni, di guisa che in progresso le lettere dell'alfabeto simboleggino indifferentemente numeri positivi o negativi. La divisione dei monomi conduce naturalmente ad ampliare la notazione esponenziale mercé la introduzione degli esponenti negativi, pei quali si dimostrerà che valgono le medesime regole già stabilite per gli esponenti positivi.

La divisione dei polinomi vuol esser trattata con qualche larghezza ed applicata a parecchi casi che in progresso si offriranno di frequente nell'algebra. In particolare si assegni il criterio di divisibilità di un polinomio intero rispetto alla lettera x per un binomio della forma $x - a$, criterio il quale oltre all'includere certi teoremi speciali (come la condizione di divisibilità di $y^m - z^m$ per $y^n - z^n$) sarà poi utile anche nella teoria della equazione di secondo grado.

Come esercizio di moltiplicazione, gioverà trovare gli sviluppi del quadrato e del cubo di un polinomio.

Definita la radice *massima* (ove m è intero positivo) di un numero qualunque delle specie fin qui indicate, terrà dietro il calcolo dei radicali monomi; e introdotta la notazione degli esponenti frazionari, si estenderanno a questi le regole del calcolo degli esponenti interi.

Nella seconda classe del liceo l'insegnamento dell'algebra prende le mosse dalle proporzioni, le quali, per la parte che riguarda i numeri astratti, giova che vengano dopo il V libro di Euclide, dove si tratta dei rapporti fra grandezze concrete. Quest'argomento è di una importanza capitale; ed il professore non dovrà omettere alcuna diligenza ad ottenere che i suoi scolari acquistino idee precise sul rapporto di due grandezze concrete della stessa specie, commensurabili od incommensurabili, sulla proporzionalità diretta o inversa, semplice o composta, e sulle trasformazioni che può avere una proporzione fra grandezze concrete, senza che a queste si sostituiscano i numeri esprimenti le loro rispettive misure.

In progresso si esporrà con molti esercizi numerici la teoria delle equazioni ad un'incognita di primo e di secondo grado, e quella delle equazioni lineari simultanee fra altrettante incognite. Su questo argomento non è necessario dare qui altre indicazioni, perché le indicazioni premesse parlano abbastanza chiaro. Da ultimo si tratti delle progressioni per differenza e per quoziente, mirando specialmente alla somma dei termini ed alle formole per l'interpolazione. Dalle progressioni si passa naturalmente ai logaritmi, i quali si connetteranno eziandio collo studio della equazione esponenziale $b^y = x$. Qui si definiranno le potenze con esponenti incommensurabili, e a questi si estenderanno le regole già note per gli esponenti razionali. La variabilità continua e simultanea di x ed y (essendo b costante), fornirà occasione di esporre il concetto di funzione (y funzione di x).

Trigonometria

Stabilito il quale concetto, si potrà assai opportunamente passare allo studio delle funzioni circolari *senx*, *tangx* (e delle loro correlative *cosx*, *cotx*), intorno alle quali basterà che il professore determini i principii fondamentali e faccia conoscere le formole più importanti.

Rispetto alle relazioni fra gli elementi di un triangolo insegni come si passa facilmente da certe formole a certe altre, secondo i diversi casi offerti dal problema della risoluzione dei triangoli obliquangoli.

Istruzioni per l'insegnamento di matematiche nelle scuole tecniche.

Il fine dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche è quello di fornire ai giovanetti in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri.

Nell'aritmetica è d'uopo che gli scolari acquistino facilità e sicurezza in ogni sorta di conteggio e nella interpretazione delle forme algebriche, cioè nella intelligenza delle operazioni che vi sono indicate e nella conseguente traduzione della formola in numeri. In particolar modo l'insegnante insisterà nel far ben comprendere i concetti di rapporti e di proporzionalità diretta ed inversa, acciocché gli scolari posseggano un criterio certo per giudicare i casi in cui è applicabile la regola del tre.

Quanto alle regole pratiche del conteggio non occorre che siano rigorosamente dimostrate. Se il maestro crede che le ragioni teoriche possano essere intese da tutti o dalla maggior parte, le esponga: in caso contrario se ne astenga, e si restringa a dichiarare la regola, accompagnandola con numerosi e svariati esercizi.

Nel terzo anno si eserciteranno gli scolari a risolvere problemi numerici relativi a quistioni di geometria, mirando principalmente ad applicare il calcolo decimale, la regola del tre ed il sistema metrico.

Nella geometria, mediante il metodo grafico-intuitivo, il docente potrà dare semplici dimostrazioni del maggior numero delle proposizioni richieste dalle indicazioni. Questo insegnamento dovrà essere accompagnato da un continuo esercizio di disegno lineare geometrico: cioè il maestro farà sì che gli scolari disegnino sulla carta con precisione le figure che egli delinea sulla tavola, e li abituerà a seguire sul disegno i ragionamenti che egli stima opportuno di fare. I quali ragionamenti del resto si ridurranno a ricavare dalla figura disegnata la prova intuitiva delle proprietà che le competono. Per tal modo la costruzione insegnata per la soluzione di un problema (come sarebbe quello di condurre la perpendicolare ad una retta da un punto dato fuori di essa) può condurre intuitivamente allo scoprimento di altre verità (luogo dei punti equidistanti da due date, proprietà del triangolo isoscele, ecc.). Non importa che la via battuta per dimostrare una proposizione sia rigorosamente scientifica: importa bensì che gli scolari acquistino la cognizione di quella proposizione e la persuasione della sua verità.

La proporzionalità degli angoli agli archi; i rapporti fra le superficie di due rettangoli; la proporzionalità dei segmenti fatti su due lati di un triangolo da una retta parallela al terzo; la somiglianza dei triangoli e dei poligoni; i rapporti fra le loro aree, sono tutte proposizioni che si riducono col disegno ad evidenza quasi materiale, purché il docente si restringa, come conviene, alla considerazione di rapporti commensurabili. Del teorema di Pitagora e di altre proposizioni analoghe si conoscono dimostrazioni intuitive: il docente le preferirà a quelle che si usano nell'insegnamento razionale della geometria.

Vi sono poi nel programma alcune parti (per esempio, le misure relative al circolo, ai poliedri, ai corpi rotondi), dove né è possibile seguire il metodo intuitivo, né l'età e la coltura degli alunni consentono un procedimento rigoroso. Ivi basterà che questi apprendano l'enunciamento delle regole pratiche e le sappiano applicare speditamente.

Per ultimo si raccomanda al docente di aver sempre speciale riguardo all'utilità pratica delle cognizioni che vuole impartire: non lasci mai suoi scolari inoperosi, ma sempre li tenga occupati o nelle operazioni grafiche o nei calcoli numerici; e non trascuri di far loro conoscere metodi speciali di abbreviazione, gli stromenti ed i ripieghi dei quali si fa effettivo uso sul terreno, o nelle operazioni delle arti e dei mestieri.

Programmi di matematiche per le varie classi delle scuole tecniche

Anno I

Aritmetica

Le quattro prime operazioni sui numeri interi e decimali.

Significato d'una frazione ordinaria - Frazione pura, apparente, impura o mista - Riduzione d'un numero composto in numero frazionario e riduzione reciproca - Trasformazione di una frazione in altre equivalenti - Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore.

Le prime quattro operazioni sui numeri frazionari e sui numeri composti, riducendoli prima a numeri frazionari.

Sistema metrico vigente nel luogo prima dell'attuale - Sistema metrico decimale - Conversione delle unità di una specie nelle altre unità della medesima specie - Uso delle tavole di riduzione delle misure antiche nelle attuali applicazioni.

Rapporto - Proporzionalità diretta ed inversa - Regola del tre semplice e composta col metodo di riduzione all'unità - Applicazione alle regole di cambio e di società.

Anno II

Geometria

Prime nozioni e definizioni relative alle figure geometriche - Linea retta - Superficie piane - Verificazione dei regoli e delle superficie piane.

Rette perpendicolari ed oblique - Angoli adiacenti - Angoli opposti al vertice.

Rette parallele - Angoli con i lati paralleli - Angoli con i lati perpendicolari. Definizioni relative al circolo - Eguaglianza degli angoli corrispondenti ad archi eguali in due circoli del medesimo raggio - Misura degli angoli - Divisione sessagesimale della circonferenza - Riportatori grafici - Costruzione di angoli uguali ad angoli dati.

Costruzione di triangoli con elementi dati - Condizioni per l'eguaglianza di due triangoli - proprietà del triangolo isoscele - Costruzione di perpendicolari e parallele - Bisezione di rette e di angoli - Punti equidistanti da due punti dati o da due rette date - Strumenti per tracciare linee perpendicolari e parallele sulla carta, sul terreno, ecc.; loro verificazione.

Somma degli angoli d'un triangolo - Angolo esterno - Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono convesso.

Costruzione di parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati - Loro proprietà elementari.

Equivalenza delle figure - Trasformazione di parallelogrammi, triangoli, trapezi, in un rettangolo - Rapporto fra due rettangoli - Area del rettangolo e delle figure piane rettilinee - Area delle figure piane mistilinee e curvilinee per approssimazione.

Regoli divisi - Misura delle rette e delle aree sul terreno e nelle applicazioni alle arti - Regole pratiche per calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza - Area d'un settore circolare - Lunghezza d'un'area corrispondente ad un angolo dato.

Teorema di Pitagora - Sue applicazioni.

Proprietà delle corde di un circolo - Costruzione della tangente in un punto dato sulla circonferenza - Centro del circolo a cui appartiene un arco dato - Costruzione del circolo che passa per tre punti dati o tocca tre rette date - Eguaglianza degli archi compresi fra rette parallele.

Misura dell'angolo compreso da due rette che si tagliano sulla circonferenza, dentro e fuori del circolo.

Costruzione del triangolo rettangolo con elementi dati - Costruzione delle tangenti che passano per un punto dato fuori del circolo.

Segmenti fatti sui lati d'un triangolo da una retta parallela al terzo lato - Similitudine dei triangoli - Costruzione di poligoni simili e similmente posti - Rapporto fra le aree dei triangoli e dei poligoni simili - Costruzione della quarta e della media proporzionale - Divisione di una retta in parti eguali e in parti di rapporti dati - Scala ticonica.

Definizioni di rette perpendicolari e parallele ad un piano - Angolo d'una retta con un piano - Angolo diedro - Come si misura.

Angolo poliedro.

Definizioni delle principali specie di poliedri e dei tre corpi rotondi.

Regole pratiche per calcolare la superficie ed i volumi del parallelepipedo retto, del prisma retto, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera.

Anno III

Aritmetica e calcolo letterale

Potenze - Calcolo degli esponenti.

Numeri primi - Formazione di una tavola di numeri primi - Criteri di divisibilità dei numeri interi - Scomposizione di un numero intero nei suoi fattori primi - Ricerca di tutti i divisori di un numero - Ricerca del minimo multiplo e del massimo divisore comune a più numeri dati - Applicazioni alla riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune.

Ricerca del medesimo comun denominatore col metodo dei residui.

Conversione d'una frazione ordinaria in frazione decimale - Caso in cui questa è finita - Casi in cui è periodica - Conversione d'una frazione decimale finita o periodica in frazione ordinaria.

Radice quadrata e cubica dei numeri interi e decimali con una data approssimazione.

Le quattro prime operazioni del calcolo letterale - Riduzione delle formole algebriche a numeri - Risoluzione delle equazioni pure di primo e di secondo grado ad una incognita.

2. Estratto da: Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio, *Ordinamento degli Istituti tecnici, Ottobre 1871*, Firenze, Tip. Claudiana, pp. 52-63.

Matematiche elementari e Geometria descrittiva

Coll'insegnamento delle Matematiche elementari si vogliono conseguire due fini distinti, entrambi di somma importanza. L'uno è che i giovani acquistino un buon corredo di cognizioni reali, suscettive di utili e non remote applicazioni; e le acquistino in modo da potersene poi giovare con franchezza nei successivi studi, e nell'esercizio delle professioni. L'altro fine, comune egualmente alle scuole classiche, è di rafforzare la facoltà del ragionamento. Per conseguir questo è d'uopo che i metodi d'esposizione siano in ogni parte rigorosamente esatti, e che mai non si anteponga alla severità del ragionamento scientifico il pregio apparente di una illusoria facilità.

La scienza moderna anche nell'insegnamento delle matematiche ha fatto grandi progressi; i nuovi metodi ormai hanno trasformato tutte le teoriche più importanti, rendendole più semplici, più generali, più intimamente fra loro connesse e meglio pieghevoli alle pratiche applicazioni. Rispetto poi all'Aritmetica generale, all'Algebra ed alla Trigonometria, la scienza moderna ci ha recato un altro beneficio coll'introduzione di quei procedimenti rigorosi, la necessità dei quali non era prima sentita abbastanza. Nella trattazione delle Matematiche elementari erano gravi mancanze e inconvenienti; valgano d'esempio i numeri incommensurabili, gli esponenti negativi e i fratti, le formole goniometriche; da definizioni particolari si tiravano conseguenze troppo larghe, sorpassando tacitamente quelle considerazioni che ora si sono riconosciute indispensabili per estendere il significato dei simboli delle operazioni: e mentre da una parte si credeva indispensabile dimostrare ciò che era una pura convenzione, dall'altra si trascorreva ad ammettere, come vere in generale, proposizioni non dimostrate che in casi particolarissimi. La scienza attuale, mettendo in rilievo questi difetti, insegnò la vera via da tenersi fin dalle prime definizioni e dalle nozioni fondamentali; così che l'edificio è ora piantato su basi solide ed inconcusse.

La Geometria non aveva inconvenienti di tal fatta; essa è stata sin dai tempi più remoti un insuperato modello di rigoroso ragionamento. I moderni hanno dato opera ad allargare il campo della sua efficacia, creando nuove teorie, atte come le antiche ad entrare in un sistema d'istruzione elementare, e notabili, oltre a ciò, per molteplici e nuove applicazioni. Infatti, mentre in ogni tempo la sintesi della greca geometria fu ammirata per la severa purezza delle sue dimostrazioni, si poteva però rimproverarle che nel risolvere i problemi non corresse veloce come l'analisi algebrica; e che la soluzione d'un problema per via geometrica richiedesse quasi una fortuita divinazione, da essere un privilegio degli ingegni più felici e delle menti più esercitate. La Geometria moderna possiede appunto quei metodi diretti e generali, per la mancanza dei quali la sintesi geometrica sembrava condannata all'immobilità e all'impotenza. La nuova dottrina della proiettività delle forme geometriche somministra costruzioni grafiche per isciogliere in modo uniforme i problemi del 1.° e 2.° grado[*], le quali sono tanto semplici e tanto facili ad apprendersi e ad usarsi, che potrebbero essere paragonate alle regole del conteggio aritmetico. In particolare ne ha guadagnato la teoria delle curve e delle superficie di 2.° grado; le cui costruzioni, abbracciando tutti i casi possibili con processo uniforme e fondandosi su pochissimi principî, hanno portato notabile avanzamento nel disegno geometrico e nella geometria descrittiva.

I professori degl'Istituti tecnici vorranno adunque ritemperare i loro corsi di Matematiche elementari e di Geometria descrittiva alle vive fonti della scienza moderna; la quale possiede non solo teorie nuove, ma eziandio metodi nuovi, più semplici o più esatti, per dimostrare le teorie antiche. Quanto si metodi, è desiderabile che in tutte le scuole siano riformati ogni qualvolta fa d'uopo o riempire lacune o togliere inconvenienti; ma quanto all'introduzione di nuove teorie, gioverà esaminare dapprima qual sia il posto da assegnarsi ad esse.

[*] Anche de' gradi superiori, ma allora si esce dal campo della geometria elementare.

I quattro anni dell'istruzione matematica debbono dividersi in tre periodi: il 1.° periodo, compreso nel primo biennio, durante il quale l'insegnamento è comune a tutte le Sezioni dell'Istituto; il 2.° periodo, compreso nel 3.° anno, in cui sono ancora riunite la Sezione Fisico-matematica e l'Industriale; il 3.° periodo, compreso nel 4.° anno che, per la Geometria descrittiva, è ancora comune alle predette due Sezioni, ma per le Matematiche elementari è proprio della Sezione Fisico-matematica.

Nel 1° periodo l'insegnamento sia assai piano e sobrio, e, serbandosi sempre esatto, si diriga di preferenza alle più pronte e più utili applicazioni. Si adottino i nuovi metodi, in quanto rendono rigorosa la trattazione o accorciano le vie; ma la materia dovrà all'incirca essere contenuta dentro ai soliti confini tradizionali, per non sopraccaricare indebitamente quegli allievi che, dopo il primo biennio, non avranno più a fare studi di matematiche pure. La parte analitica del corso, incominciando dalle prime operazioni dell'Aritmetica generale, abbraccerà le equazioni di 2.° grado, le progressioni, i logaritmi colle loro applicazioni. Da ultimo si darà un cenno dei principî dell'analisi combinatoria e del calcolo elementare delle probabilità, e si esporranno le cose più essenziali della teoria delle approssimazioni numeriche. La parte geometrica piglierà pur essa le mosse dalle prime nozioni, comprenderà la moltiplicazione grafica delle linee rette, la trasformazione delle aree piane e la loro riduzione ad una base data; e si chiuderà col determinare la misura della superficie e della solidità dei tre corpi rotondi. Nel 2.° periodo l'insegnamento si verrà elevando, senza trascurare le applicazioni. L'Algebra abbraccerà i principî dell'analisi algebrica, la teoria generale degli esponenti, i numeri complessi e la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche. Nella Geometria si esporranno: la teoria della proiettività delle forme geometriche, colle sue applicazioni alla risoluzione grafica dei problemi di 1.° e 2.° grado ed alla costruzione delle curve di 2.° ordine, considerate come proiezioni centrali del circolo; alcune proposizioni complementari di stereometria (sulla misura di corpi solidi), e la determinazione grafica dei baricentri delle figure piane. A tutto ciò si aggiungerà la Trigonometria piana.

Nel 3.° periodo si compirà l'analisi combinatoria, applicandola allo sviluppo delle potenze intere e positive dei polinomi, alla somma delle potenze simili dei termini d'una progressione, ecc. Seguiranno: i principi della teoria dei determinanti coll'applicazione alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari; i principî sulle serie infinite; le frazioni continue; lo studio speciale di alcune equazioni (equazioni binomie, equazioni di 3.° e 4.° grado).

In Geometria si spiegheranno: le proprietà focali delle curve di 2.° ordine; le proprietà proiettive dei coni di 2.° grado e delle figure sulla sfera; i principi della Geometria analitica, fondati sulla determinazione metrica (mediante i rapporti anarmonici) delle forme proiettive. Si stabiliranno in tutta la loro generalità le formole della Goniometria; la Trigonometria sferica; e da ultimo le formole fondamentali della Poligonometria.

La Geometria descrittiva, alla quale è assegnato un biennio (3.° e 4.° anno), può giovarsi, più di qualunque altro ramo delle scienze matematiche, delle teorie della moderna Geometria. Infatti, i diversi metodi, che la Geometria descrittiva impiega per la rappresentazione grafica dei corpi, delle superficie e delle linee e per la soluzione dei problemi ad esse relativi, non sono che casi particolari della *collineazione* o corrispondenza omografica fra due sistemi piani o fra due sistemi solidi. Perciò il professore, pigliando le mosse dalla proiezione centrale (come metodo di rappresentazione) e dalle proprietà proiettive delle figure, esporrà la teoria della collineazione di due sistemi piani, la costruzione di una figura collineare ad una data, e i casi speciali dell'*affinità* e della *similitudine*; si addentrerà maggiormente in ciò che riguarda l'omologia, e ne trarrà le regole che servono pel disegno di prospettiva. Durante l'intero corso, ma più particolarmente per questa introduzione, cerchi il professore di Geometria descrittiva di accordarsi con quello che insegna le Matematiche elementari, così che l'uno si giovi di ciò che l'altro avrà già trattato; giacché entrambi dovranno nella medesima classe occuparsi della proiettività delle forme geometriche. Applicherà poi i principi della prospettiva alla soluzione dei problemi elementari sui punti, sulle rette e sui piani nello spazio. Di poi, passando al caso particolare delle proiezioni parallele, insegnerà il metodo ordinario delle proiezioni ortogonali e quello del disegno axonometrico, e applicherà l'uno e l'altro agli stessi problemi elementari suaccennati. Sul metodo delle projezioni ortogonali insisterà maggiormente che sugli altri, e in seguito ne farà il soggetto abituale delle esercitazioni degli scolari; affinché questi comprendano tutti i metodi come casi particolari di uno solo, ma riconoscano che di quello delle proiezioni ortogonali dovranno in pratica fare uso più frequente.

Riprenderà poi lo studio della proiettività delle forme geometriche, trattando della collineazione e della reciprocità fra due *stelle* (due figure, ciascuna delle quali sia il sistema di tutte le rette e dei piani uscenti da un punto fisso); e inoltre della collineazione, dell'affinità e dell'omologia fra due sistemi a tre dimensioni. Di qui ricaverà i principi della prospettiva in rilievo.

Di queste premesse teoriche potrà agevolmente fare applicazione alla costruzione dei piani tangenti, delle sezioni piane e dei contorni delle ombre dei coni e dei cilindri; delle superficie gobbe di 2.° grado, generate mediante due fasci proiettivi di piani; e delle superficie di 2.° grado in generale, che si possono ottenere dall'incontro degli elementi corrispondenti di due stelle reciproche.

L'ultima parte del corso sarà dedicata alla costruzione dei piani tangenti, delle sezioni piane e de'contorni delle ombre delle superficie di rotazione, ed alle intersezioni di due superficie coniche o di due superficie di 2.° grado; e, ove avanzi tempo, si potrà dare un cenno delle eliche cilindriche, dell'elicoide sviluppabile e dell'elicoide gobbo a piano direttore. Il programma, che sussegue a questa istruzione, non fa che accennare i titoli dei principali argomenti. Al professore è lasciata libertà di svolgerli con quell'ordine e con quell'ampiezza ch'egli giudicherà più conveniente. Non occorre che nella trattazione delle singole teorie scenda ai più minuti particolari, bastando l'esposizione delle proposizioni cardinali, che sono sempre poche di numero; dagli esercizi numerici o grafici, che dovranno essere frequentissimi in ogni parte dell'insegnamento, egli dovrà trarre occasione per dare il necessario svolgimento ai principi stabiliti nelle lezioni teoriche. È pur dannoso il sistema di spiegare disgregatamente le varie teorie, a cui alcuni si tengono volontariamente legati, sicché non pongono mano all'una, prima di avere esaurito l'altra a fondo. L'importante è che ogni nuova verità si stabilisca su basi sicure; del resto avverrà spesso che una proposizione d'una teoria serbata ad altro tempo, ove sia opportunamente anticipata, riesca preziosa per accorciare e semplificare la trattazione d'altri argomenti, che senza di ciò riuscirebbe intricata e fors'anco oscura. Ce ne porge esempio la Geometria solida, la quale sovente serve a dare soluzioni rapidissime o dimostrazioni intuitive di proposizioni piane, troppo difficili pei metodi della pura planimetria. Il ricorrere allo spazio di tre dimensioni, anche nelle questioni di Geometria piana, è uno dei più efficaci e semplici artifici d'investigazione geometrica non ignoto neppure agli antichi, e contribuisce ad abituare di buon'ora gli scolari a vedere cogli occhi della mente le forme geometriche nello spazio ideale.

È superfluo avvertire che anche l'Algebra e la Geometria non devono andar troppo disgiunte; anzi converrà insegnarle contemporaneamente in modo che si prestino vicendevole aiuto, e la varietà della materia contribuisca a tener desta l'attenzione e la curiosità degli scolari.

Se al professore parrà che gli argomenti accennati nel Programma, non bastino ad occupare tutto l'orario, gli è data facoltà di trattarne a sua scelta alcun altro, che abbia connessione con quelli già sviluppati e si conformi al carattere della scuola. Sarà bene che di tale suo proposito faccia cenno nel Programma particolareggiato, che presenterà al principio di ciascun anno scolastico.

Ma l'efficacia di questi insegnamenti non tanto dipende dalle lezioni orali, quanto dalla moltiplicità, varietà e buona coordinazione, degli esercizi degli scolari. Questi devono *lavorare continuamente:* ossia che il maestro li chiami, nel tempo delle lezioni, ad uno ad uno, a risolvere problemi, o a sciogliere difficoltà col suo ajuto; ossia che egli proponga loro temi da trattare a casa., che poi restituirà corretti o annotati. L'insegnamento dell'Aritmetica generale, dell'Algebra e della Trigonometria dev'essere accompagnato da continui esercizî di calcolo numerico, dove i giovani siano avvezzati ad usar sempre le regole abbreviative, che conducono più prontamente e nella forma più semplice al risultato. Così pure l'insegnamento della Geometria, sì descrittiva che elementare, deve per una grandissima, parte consistere in lavori grafici, nei quali si richiederà non solo l'esattezza scientifica, ma eziandio la precisione e l'eleganza dell'esecuzione. Pongano i professori, somma cura nella scelta dei temi, avvertendo che le quistioni improvvisate sono quasi sempre inopportune, e che, se un calcolo e una costruzione riescono troppo complicati, gli allievi si annojano e si scoraggiano. I temi vogliono essere preparati prima colla maggior diligenza, ovvero tolti da buone collezioni, talché offrano una chiara e convincente applicazione delle teorie esposte nella scuola. Di tutti questi esercizi di calcolo o di disegno gli scolari siano obbligati a tenere appositi e ordinati quaderni, perché ad ogni uopo essi possano consultarli, e la scuola dar saggio della sua operosità e del grado d'istruzione.

Aritmetica generale ed Algebra

Biennio I.

Operazioni dirette - Operazioni inverse - Formole - Numeri negativi. Addizione e moltiplicazione dei polinomî - Quadrato è cubo di un polinomio.

Divisione - Numeri frazionari - Massimo comune divisore e minimo multiplo dei numeri e dei monomî - Calcolo delle frazioni.

Divisibilità dei numeri interi. Divisione dei polinomi ordinati. Equazioni e problemi di 1.° grado.

Sistemi di equazioni lineari; discussione delle formole di risoluzione. Principî sui limiti - Soluzioni indeterminate - Radici quadrate dei numeri - Numeri irrazionali.

Potenze e radici dei monomî - Calcolo dei radicali aritmetici. Rapporti - Grandezze commensurabili, grandezze incommensurabili. Proporzioni.

Equazioni e problemi di 2.° grado - Equazioni riducibili al 2.° grado - Quistioni elementari di massimo o di minimo.

Sistemi di più equazioni lineari e di una quadratica. Progressioni.

Logaritmi - Uso delle tavole - Logaritmi di Leonelli (o di Gauss) - Applicazioni al calcolo di formole aritmetiche.

Interessi composti - Annualità.

Permutazioni, variazioni, combinazioni di elementi dati. Principî sulle probabilità.

Approssimazioni numeriche - Operazioni abbreviate - Errori relativi.

Anno III.

Principî sull'analisi algebrica - Genesi delle operazioni aritmetiche - Introduzione de' numeri negativi, fratti, irrazionali (reali e complessi) - Esponente frazionario; esponente incommensurabile; esponente negativo; esponente nullo. - Numeri complessi; loro rappresentazione geometrica; calcolo dei medesimi. - Estensione delle operazioni aritmetiche.

Teoremi sulle funzioni algebriche - Divisori di una funzione intera - Divisori razionali - L'equazione algebrica di grado n ha n radici - Limiti delle radici reali; radici multiple; radici commensurabili; - Teoremi sulla separazione delle radici - Metodi d'approssimazione per la determinazione delle radici reali di un'equazione numerica - Risoluzione numerica di alcune equazioni trascendenti.

Anno IV.

Complemento dell'analisi combinatoria - Prodotti, potenze (intere positive) e radici dei polinomi - Serie a differenze costanti - Numeri figurati - Formole d'interpolazione.

Principî sui determinanti - Risoluzione di un sistema d'equazioni lineari.

Principî sulle serie infinite; serie esponenziale; serie logaritmica; serie trigonometriche.

Frazioni continue - Applicazione all'analisi indeterminata di primo grado.

Valori coniugati di una funzione algebrica - Norma di una funzione irrazionale - Eliminazione fra due equazioni algebriche.

Studio speciale di alcune equazioni - Equazioni reciproche - Equazioni binomie; divisione del circolo in parti uguali - Teoremi di Moivre e di Cotes - Equazioni di 3.° e di 4.° grado.

Geometria.

Biennio I.

Nozioni fondamentali - Angoli - Rette parallele - Proposizioni elementari sul cerchio - Angoli nel cerchio - Triangoli uguali - Quadrilateri - Poligoni regolari.

Divisioni delle rette in parti proporzionali - Moltiplicazione grafica delle rette - Elevazione a potenza - Poligono di moltiplicazione. Figure equivalenti - Teorema di Pitagora - Misura delle aree - Poligoni a contorno intrecciato.

Similitudine de' triangoli e de' poligoni.

Misura del circolo - Trasformazione grafica di una figura piana qualsivoglia; sua riduzione ad una base data.

Intersezione di piani e di rette - Angoli e distanze fra piani e rette nello spazio.

Cono cilindro e sfera.

Piramidi e prismi: eguaglianza, similitudine, simmetria.

Cubatura dei prismi, delle piramidi, del cilindro, del cono, della sfera e delle loro parti.

Quadratura dei tre corpi rotondi.

Anno III.

Proiezione centrale - Forme geometriche fondamentali - Proprietà armonica del quadrilatero e costruzioni che ne conseguono.

Proiettività delle rette punteggiate e dei fasci di rette; costruzione di una forma proiettiva ad una data - Rapporti anarmonici.

Fasci proiettivi nel circolo; tangenti punteggiate proiettive - Teoremi sui poligoni inscritti o circoscritti - Serie proiettive di punti in una circonferenza - Costruzione degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte.

Metodo geometrico di falsa posizione per la risoluzione grafica dei problemi di 2.° grado - Applicazioni.

Involuzione di punti in linea retta o in una circonferenza - Poli e polari nel cerchio - Costruzioni che ne dipendono. - Inscrizione di poligoni i cui lati debbano passare per punti dati. - Teorema sul quadrilatero segato da una trasversale.

Figure polari reciproche - Legge di dualità nel piano.

Le coniche (proiezioni centrali del cerchio) generate mediante due forme proiettive. - Proprietà delle coniche dedotte da quelle del cerchio - Teoremi di Pascal, di Brianchon, di Desargues e loro conseguenze - Costruzione di una conica soggetta a cinque condizioni (punti o tangenti).

Classificazione delle curve di 2 ° grado - Centro, diametri coniugati ed assi (dedotti come casi particolari dalla teoria dei poli e delle polari) - Proprietà speciali dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola - Costruzioni grafiche.

Complemento di stereometria - Baricentro di una figura geometrica - regola di Guldino - Determinazione grafica del baricentro di una qualsivoglia figura piana (mediante il poligono di moltiplicazione).

Anno IV.

Fuochi nelle coniche: definizione, proprietà, costruzioni - Proprietà relative ad un solo fuoco - Proprietà relative ai due fuochi - Costruzioni delle coniche, quando fra gli elementi dati vi è un fuoco, o vi sono entrambi i fuochi.

Proprietà proiettive dei coni di 2.° grado e delle figure descritte sulla sfera, dedotte dalle corrispondenti proprietà delle figure piane - Triangoli sferici: eguaglianza, simmetria; perimetro, area - Figure polari - Projezione stereografica.

Principî di Geometria analitica: concetto fondamentale delle coordinate proiettive - Equazioni simboliche de' luoghi geometrici (di l.° e 2.° grado) in un piano e nello spazio; teoremi sulle loro mutue intersezioni, dedotte dalle più semplici combinazioni di quelle equazioni - Dimostrazione analitica di alcune proprietà delle coniche, già note per mezzo della proiezione centrale.

Trigonometria.

Anno III.

Funzioni goniometriche: seno, coseno, tangente e cotangente - Tavole ed uso delle medesime - Relazioni trigonometriche fra gli elementi di un triangolo - Area in funzione dei lati - Problema di Pothenot. Risoluzione dei triangoli rettilinei.

Anno IV.

Precisa determinazione dell'angolo di due rette e delle sue funzioni goniometriche - Equazioni fondamentali nel triangolo - Formole generali per l'addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli angoli - Relazione fra le sei distanze di quattro punti in un piano - Area del triangolo, e del quadrilatero inscrittibile, in funzione dei lati.

Trigonometria sferica.

Formole fondamentali della Poligonometria.

Geometria descrittiva.

Proiezione centrale - Collineazione od omografia di due sistemi piani - Affinità - Similitudine - Omologia o posizione prospettiva di due figure collineari, contenute in uno stesso piano - Omologia armonica - Simmetria - Elementi a distanza infinita: punti di fuga, rette di fuga.

Risoluzione di problemi fondamentali, relativi a punti, rette e piani nello spazio - Problema inverso della prospettiva - Ribaltamento de' piani obbiettivi - Trasformazione della prospettiva mediante spostamento del centro di proiezione - Prospettiva di un poliedro - Collocare in posizione omologica due quadrilateri di dimensioni date.

Proiezioni parallele - Metodo ordinario delle proiezioni ortogonali sui due piani rettangolari - Risoluzione de' problemi fondamentali - Trasformazioni - Risoluzione dell'angolo triedro - Intersezioni, ombre proprie e portate di poliedri.

Prospettive rapide - Disegno axonometrico - Teorema di Pohlke - Risoluzione de' problemi fondamentali.

Superficie coniche e cilindriche: piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Collineazione e reciprocità fra due stelle - Collineazione fra due sistemi a tre dimensioni - Affinità - Omologia - Principî della prospettiva in rilievo.

Generazione dei coni e delle superficie gobbe di 2° grado mediante due fasci proiettivi di piani - Piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Generazione di tutte le superficie di 2° grado mediante due stelle reciproche - Loro classificazione - Proprietà armoniche, poli e piani polari - Centro, diametri, assi, cono assintoto - Rappresentazione grafica, piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Superficie di rotazione - Piani tangenti - Sezioni piane - Contorni delle ombre - Esempi: ellissoide di rotazione, iperboloide gobbo di rotazione, toro architettonico.

Intersezioni fra le superficie coniche e cilindriche. Intersezione di due superficie di 2° grado. Intersezione di una sfera con una superficie conica.

3. Estratto da *Commissione Reale per l'Ordinamento degli Studi Secondari in Italia. Relazione*, Roma: Ministero della Pubblica Istruzione, Tipografia L. Cecchini, 1909, pp. 614-616, 639-647.

Programma per l'insegnamento della matematica

Ginnasio triennale

Classe I

Numeri pari e dispari; criterio per distinguerli e sua giustificazione.

Enunciazione e giustificazione dei criteri di divisibilità per 4, 5, 25.

Criteri di divisibilità per 3 e per 9. Procedimento per prendere una data frazione di un numero intero, nei casi in cui il risultato sia pure un numero intero. Semplificazione delle frazioni. Esercizi sulle quattro operazioni sui numeri decimali: sistema metrico decimale. Esercizi di riduzione di una frazione decimale a forma di frazione ordinaria. Esercizi sulla riduzione di frazioni ordinarie a forma decimale, coll'approssimazione richiesta dal problema pratico che si risolve. Confronto tra frazioni di diverso denominatore. Loro riduzione a uno stesso denominatore. Loro somma e differenza. Esercizi sulle misure degli angoli e del tempo. Esercizio sull'uso dei segni di operazione e delle parentesi per indicare serie di calcoli da eseguire su numeri dati. Esame di figure poligonali; nomenclatura relativa ai loro elementi. Uso della riga e del compasso. Costruzione di un triangolo di dati lati. Triangolo isoscele, triangolo equilatero. Esercizi atti a precisare la nozione di angolo. Costruzione di un angolo eguale a un angolo dato. Costruzione di un triangolo di cui siano dati due lati e l'angolo compreso. Somma e differenza di angoli. Uguaglianza degli angoli opposti al vertice. Uso del rapportatore. Verifica della proprietà relativa alla somma degli angoli di un triangolo. Somma degli angoli di un poligono. Costruzione di un triangolo di cui siano dati due angoli e un lato. Punti e figure di un piano simmetriche rispetto a una retta. Costruzione della perpendicolare a un segmento per il suo punto di mezzo. Perpendicolarità delle diagonali del rombo. Caso del quadrato. Eguaglianza delle diagonali di un rettangolo. Costruzione della bisettrice di un angolo. Simmetria rispetto a due assi, e rispetto a un punto.

Classe II

Esercizi, mentali e scritti, sulla determinazione di un numero quando si conosca il risultato che si ottiene prendendo una data frazione. Idem, quando si conosca il risultato che si ottiene moltiplicandolo o dividendolo per un dato numero intero e aggiungendo o sottraendo poi, al risultato così ottenuto, un altro dato numero. Trascrizione di queste ed altre analoghe condizioni in formule, coll'impiego di una lettera per indicare il numero che si cerca. Potenze di un numero intero. Scomposizione di un numero nei suoi fattori primi. Ricerca del massimo divisore comune o del minimo comune multiplo di due o più numeri. Continuazione degli esercizi sulla somma e sottrazione di frazioni. Multipli di frazioni. Divisione di una frazione per un numero intero. Problemi ed esercizi facenti capo alla ricerca della quarta proporzionale dopo numeri interi dati. Metodo di riduzione all'unità. Scomposizione di un numero intero in parti proporzionali a due o più numeri interi. Indicazione dei procedimenti grafici per eseguire le analoghe operazioni su segmenti, triangoli o rettangoli.

Costruzione della perpendicolare ad una retta per un punto fuori di essa. Concetto di distanza di un punto da una retta. Uso e verifica della squadra. Linea descritta da un punto che si sposti in un piano conservandosi alla stessa distanza da una retta giacente in esso. Rette parallele. Eguaglianza degli angoli corrispondenti determinati da una trasversale che tagli due rette parallele. Simmetria di due rette parallele rispetto al punto medio di un segmento che congiunga un punto dell'una con un punto dell'altra. Proposizioni elementari sui parallelogrammi. Costruzione della parallela a una retta per un dato punto. Uso della riga a due orli e sua verifica. Proprietà dei segmenti determinati sui lati di un triangolo da una trasversale parallela al terzo lato. Esempi e verifiche relative alla connessione fra l'eguaglianza degli angoli di due triangoli e la proporzionalità dei lati corrispondenti. Esercizi di riduzione di figure in diverse scale. Interpretazione di disegni, piante, carte topografiche.

Classe III

Procedimenti per prendere una data frazione di una frazione. Prodotti e potenze di frazioni. Calcolo di interessi semplici e composti. Problemi di miscuglio, alligazione, ripartizione. Divisione di una frazione per un'altra frazione. Numeri decimali periodici e ricerca delle loro frazioni generatrici. Esercizi di semplificazione di espressioni contenenti solamente numeri dati, interi o frazionari. Verifica e giustificazione delle più elementari regole da applicare a tale scopo, in particolare della regola per togliere da un numero la differenza di due altri senza eseguire la loro sottrazione, e della regola per moltiplicare una somma o una differenza per un numero, o per effettuare l'operazione, inversa, di mettere un numero fattore comune dei termini di una somma o di una differenza. Esercizi di risoluzione di equazioni numeriche di primo grado a un'incognita nelle quali questa figuri in più di un posto. Rassegna dei procedimenti fondamentali a ciò richiesti (aggiunta o sottrazione di uno stesso numero dai due membri, moltiplicazione o divisione di essi per uno stesso numero, ecc.). Constatazioni relative alla dipendenza del valore di date espressioni dai valori che si attribuiscano a variabili che esse contengono.

Relazioni tra angoli al centro e angoli alla circonferenza insistenti sopra uno stesso arco. Esercizi pratici ed aritmetici relativi. Tangenti ad un cerchio. Perpendicolarità della tangente al raggio che passa per il punto di contatto. Costruzione della tangente ad un cerchio per un punto dato. Posizioni relative di due cerchi; intersezioni, contatti. Costruzione di un cerchio per tre dati punti. Determinazione del centro di un circolo di cui sia dato un arco. Altezze, mediane, bisettrici di un triangolo. Cerchi inscritti e circoscritti a triangoli. Poligoni inscritti e circoscritti a cerchi. Esercizi sulla costruzione di poligoni regolari. Equivalenza di rettangoli e parallelogrammi. Rettangoli equivalenti ad un triangolo, o ad un trapezio dato.

Licei: classico, moderno e scientifico

Liceo classico e moderno

Classe I (comune al liceo classico e al moderno)

Esercizi sulle equazioni di primo grado a una o due incognite, a coefficienti numerici, escluso sempre il caso di radici negative.

Enunciazione e verifica delle formule esprimenti le regole di calcolo applicabili alla trattazione delle suddette equazioni, per esempio delle formule:

$a - (b - c) = a - b + c$, $ab + ac = a(b + c)$, ecc.

Espressione del quadrato di una somma e di una differenza di due numeri. Prodotto della somma di due numeri per la loro differenza. Interpretazione geometrica di tali formule, e loro applicazione alla ricerca di proprietà relative alla equivalenza di rettangoli e di quadrati, in particolare alla deduzione del teorema di Pitagora.

Sviluppo delle conseguenze immediate del teorema di Pitagora. Costruzione di un quadrato equivalente a più quadrati dati. Espressione del quadrato del lato opposto a un angolo acuto od ottuso di un triangolo.

Relazione tra i segmenti determinati, da un punto interno o esterno a una circonferenza, sulle secanti condotte per esso.

Costruzione di un quadrato equivalente a un rettangolo dato.

Costruzione di un rettangolo avente un dato lato, ed equivalente a un rettangolo dato.

Classe II (comune al liceo classico e al moderno)

Esercitazioni di calcolo letterale. Somma e sottrazione di espressioni a più termini. Operazioni su frazioni al cui numeratore o denominatore figurino somme o differenze di più termini. Risoluzione di equazioni di primo grado a più incognite, e in cui figurino altre lettere oltre a quelle indicanti le incognite. Casi di indeterminazione e di incompatibilità. Concetto di numero negativo: spiegazione e giustificazione delle regole di calcolo relative, con riferimento ad interpretazioni concrete (debiti e crediti, tempi trascorsi o da trascorrere, distanze da contare in un senso o nel senso opposto, temperature superiori o inferiori allo zero, ecc.). Constatazione della validità che conservano e della maggior portata che vengono ad assumere le formule esprimenti regole di calcolo già note, quando sia tolta la restrizione che le lettere che contengono rappresentino soltanto numeri positivi.

Principio di una trattazione sistematica della geometria. I criteri di uguaglianza dei triangoli. Loro applicazione alla giustificazione delle costruzioni elementari già apprese e alla dimostrazione di alcune fra le meno evidenti proposizioni già note all'alunno. Determinazione di luoghi geometrici, costruzione, sopra un dato segmento, di un arco capace di un dato angolo, ecc. Riassunto, razionalmente ordinato, delle proprietà relative all'equivalenza di triangoli e di poligoni. Indicazione delle esigenze alle quali una dimostrazione deve soddisfare, specialmente per quanto riguarda l'enunciazione di tutte le proposizioni di cui in essa si è fatto uso. Enumerazione e classificazione dei postulati e delle proposizioni alle quali è concesso fare appello senza dimostrazione. Cenni sulle varie forme e procedimenti di dimostrazione (diretta, per riduzione all'assurdo, ecc.), e sullo scopo e i vantaggi di riconoscere che una data proposizione può ricavarsi per deduzione da altre.

Esempi tipici dei vari metodi e procedimenti da seguire per la risoluzione dei problemi geometrici.

Classe III (comune al liceo classico e al moderno)

Determinazione di due numeri di cui si conosca la somma e il prodotto: riduzione di tale questione (per esempio mediante ricorso alla formula: $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$) all'altra di trovare due numeri di cui si conosca la somma e la differenza.

Valore massimo di un prodotto di cui sia data la somma dei fattori, e valore minimo di una somma di cui sia dato il prodotto dei termini. Esercitazioni e applicazioni geometriche relative. Rappresentazione grafica del modo di variare di espressioni di secondo grado. Esercizi di risoluzione di equazioni di secondo grado numeriche, a radici reali. Relazioni tra le radici e i coefficienti. Interpretazioni e applicazioni geometriche delle equazioni di secondo grado. Criteri di similitudine dei triangoli, e dei poligoni. Lato del decagono regolare. Proposizioni relative ai segmenti determinati sui lati di un triangolo dalle sue bisettrici. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati stanno in un dato rapporto.

Relazioni tra i lati e le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio. Seno, coseno, tangente di un angolo. Ricerca del loro valore nei casi più semplici. Esercizi di risoluzione di triangoli. Applicazioni al caso della determinazione della distanza o delle dimensioni di oggetti inaccessibili. Seno della somma e della differenza di due angoli. Espressioni del seno e del coseno dell'angolo doppio e dell'angolo metà. Applicazione delle notazioni trigonometriche per enunciare questioni di statica o di fisica; per esempio quelle relative alla condizione di equilibrio di un grave appoggiato a un piano inclinato, alla determinazione della risultante di più forze o delle componenti di una data forza secondo date direzioni. Rette e piani nello spazio. Figure simmetriche rispetto a un piano. Rette oblique e perpendicolari a un piano. Angoli diedri e loro misura. Piani perpendicolari. Criteri di uguaglianza di triedri e di angoli solidi.

Classe IV (comune al liceo classico e al moderno)

Progressioni per differenza e per quoziente. Concetto di funzione e di variabile. Rappresentazione grafica delle funzioni. Rapidità di accrescimento di una funzione in un dato intervallo o in dato punto. Moto uniforme e moto vario. Velocità media corrispondente a un dato intervallo e velocità in un punto. Concetto di accelerazione. Esercizi e problemi relativi al moto di gravi che cadono liberamente, o lungo piani inclinati. Varie interpretazioni geometriche e fisiche del concetto di derivata. Direzione di una curva in un punto. Lunghezza di un arco di curva come limite superiore di poligonali in esso inscritte. Rapporto tra la circonferenza e il diametro. Area del cerchio. Rette e piani paralleli. Piramidi, prismi, parallelepipedi. Perpendicolare comune a due rette sghembe. Equivalenza di prismi e parallelepipedi. Scomposizione di un prisma a base triangolare in tre piramidi tra loro equivalenti.

Classe V (nel liceo classico)

Permutazioni e combinazioni. Qualche nozione elementare sul calcolo delle probabilità.

Cenni storici sullo sviluppo della geometrica greca. Piano dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide. Esame riassuntivo del loro contenuto. Caratteri della trattazione delle proporzioni contenuta nel Quinto libro degli Elementi. Qualche saggio del procedimento di dimostrazione ivi seguito. Suoi vantaggi e sua semplificazione mediante le notazioni moderne. Il concetto di numero irrazionale.

Nozioni complementari sui numeri primi. Qualche cenno di analisi indeterminata di primo grado, con qualche richiamo alle trattazioni di Diofanto.

Poliedri regolari e loro costruzione. Equivalenza di piramidi. Qualche esempio dei procedimenti seguiti da Archimede per la determinazione del rapporto tra i volumi, o le superficie della sfera e quelli del cilindro, o cono retto ad essa circoscritti. Confronto coi metodi moderni corrispondenti. Nozioni elementari di cosmografia. Qualche accenno allo sviluppo delle idee cosmografiche e astronomiche dei Greci.

(nel liceo moderno)

Permutazioni e combinazioni. Potenza intera e positiva di un binomio. Nozioni e problemi elementari sul calcolo delle probabilità con speciale riguardo alle applicazioni pratiche, questioni di assicurazione, di mutualità, ecc. Saggi di rappresentazioni grafiche di dati statistici. Esercizi di interpretazione di diagrammi. Le varie specie di medie; i vantaggi e i limiti del loro rispettivo impiego. Equazione esponenziale e sua rappresentazione grafica. Accenno alla legge dei grandi numeri e alla curva di frequenza agli errori. Nozioni complementari sui numeri primi. Cenni di analisi indeterminata di 1° grado. Equivalenza delle piramidi d'eguale base e altezza. Superficie e volume del cono, del cilindro, della sfera. Trattazioni di questioni di massimo e minimo, col sussidio delle derivate. Esercizi geometrici relativi.

Liceo Scientifico

Classe I

Esercizi sulle equazioni di primo grado a una o due incognite, e coefficienti numerici, escluso sempre il caso di radici negative. Esempi tipici dei vari procedimenti di eliminazione. Enunciazione e verifica delle formule esprimenti le regole di calcolo applicabili alla trattazione delle suddette equazioni per esempio delle formule:

$a - (b - c) = a - b + c$, $ab + ac = a(b + c)$, ecc. Espressione del quadrato di una somma e di una differenza di due numeri. Prodotto della somma di due numeri per la loro differenza. Interpretazione geometrica di tali formule, e loro applicazione alla ricerca di proprietà relative all'equivalenza di rettangoli e di quadrati, in particolare alla deduzione del teorema di Pitagora. Procedimento per l'estrazione della radice quadrata. Uso delle tavole dei logaritmi e del regolo calcolatore. Sviluppo delle conseguenze immediate del teorema di Pitagora. Costruzione di un quadrato equivalente a più quadrati dati. Espressione pel quadrato del lato opposto ad un angolo acuto od ottuso di un triangolo. Relazione tra i segmenti determinati da un punto interno o esterno ad un cerchio sulle secanti condotte per esso. Costruzione di un quadrato equivalente a un rettangolo dato. Costruzione di un rettangolo avente un dato lato ed equivalente a un rettangolo dato. Espressione delle altezze dell'area di un triangolo, mediante i lati. Verifiche sul modo di variare delle dimensioni e della aree dei triangoli e quadrilateri, quando esse variino di grandezza senza variare di forma.

Classe II

Esercitazioni di calcolo letterale. Somma e sottrazione di espressioni a più termini. Operazioni su frazioni al cui numeratore o denominatore figurino somme o differenze di più termini. Risoluzione di equazioni di primo grado a più incognite, in cui figurino altre lettere oltre quelle indicanti le incognite. Casi di indeterminazione e di incompatibilità. Concetto di numero negativo: spiegazione e giustificazione delle regole di calcolo relative, con riferimento ad interpretazioni concrete (debiti e crediti, tempi trascorsi o da trascorrere, distanze da contare in un senso o nel senso opposto, temperature superiori o inferiori allo zero, ecc.). Constatazione della validità che conservano, e della maggior portata che vengono ad assumere le formule esprimenti regole di calcolo già note, quando sia tolta la restrizione che le lettere che contengono rappresentino soltanto numeri positivi.

Principio di una trattazione sistematica della geometria. I criteri di uguaglianza dei triangoli. Loro applicazione alla giustificazione delle costruzioni elementari già apprese e alla dimostrazione di alcune fra le meno evidenti proposizioni già note all'alunno. Determinazione di luoghi geometrici: costruzione, sopra un dato segmento, di un arco capace di un dato angolo, ecc. Riassunto, razionalmente ordinato, delle proprietà relative all'equivalenza di triangoli e di poligoni. Indicazione delle esigenze alle quali una dimostrazione deve soddisfare, specialmente per quanto riguarda l'enunciazione di tutte le proposizioni di cui in essa sia fatto uso. Enumerazione e classificazione dei postulati e delle proposizioni alle quali è concesso fare appello senza dimostrazione. Cenni sulle varie forme e procedimenti di dimostrazione (diretta, per riduzione all'assurdo, ecc.), e sullo scopo e i vantaggi del riconoscere che una data proposizione può ricavarsi per deduzione da altre. Esempi tipici dei vari metodi e procedimenti da seguire per la risoluzione dei problemi geometrici. Proprietà caratteristiche della retta e del piano. Rette e piani nello spazio. Figure simmetriche rispetto a un piano. Rette oblique e perpendicolari a un piano. Angoli diedri e loro misura. Piani perpendicolari. Criteri di uguaglianza di triedri e di angoli solidi. Uguaglianza diretta e inversa. Rette e piani paralleli. Equivalenza di parallelepipedi e di prismi. Scomposizione di un prisma triangolare in tre piramidi di eguale altezza e basi equivalenti. Perpendicolare comune a due rette sghembe.

Classe III

Determinazione di due numeri di cui si conosca la somma e il prodotto : riduzione di tale questione (p.e. mediante ricorso alla formula: $(a - b)^2 = (a + b)^2 + - \ 4ab$) all'altra di trovare due numeri di cui si conosca la somma e la differenza. Valore massimo di un prodotto di cui sia data la somma dei fattori, e valore minimo di una somma di cui sia dato il prodotto dei termini. Esercitazioni e applicazioni geometriche relative. Rappresentazione grafica del modo di variare di espressioni di secondo grado. Esercizi di risoluzione di equazioni di secondo grado numeriche, a radici reali. Relazioni tra le radici e i coefficienti. Interpretazioni e applicazioni geometriche delle equazioni di secondo grado. Procedimenti grafici per la loro risoluzione. Trattazione sistematica delle proprietà dei triangoli e dei poligoni simili. Criteri di similitudine dei triangoli e dei poligoni. Lato del decagono regolare. Proposizioni relative ai segmenti determinati sui lati di un triangolo dalle sue bisettrici. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati stanno in un dato rapporto. Relazioni tra i lati e le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio. Seno, coseno, tangente di un angolo. Ricerca del loro valore nei casi più semplici. Esercizi di risoluzione di triangoli. Applicazioni al caso della determinazione della distanza o delle dimensioni di oggetti inaccessibili. Seno della somma e della differenza di due angoli. Espressioni del seno o del coseno dell'angolo doppio e dell'angolo metà. Applicazione delle notazioni trigonometriche per enunciare questioni di statica o di fisica (per esempio quelle relative alla condizione di equilibrio di un grave appoggiato a un piano inclinato, alla risultante di più forze, o alle componenti di una data forza secondo date direzioni). Progressioni per differenza e per quoziente. Concetto di funzione e di variabili. Rappresentazione grafica delle funzioni. Rapidità di accrescimento di una funzione in un dato intervallo o in un dato punto. Moto uniforme e moto vario. Velocità media corrispondente a un dato intervallo, e velocità in un punto. Concetto di accelerazione. Esercizi e problemi relativi al moto di gravi che cadono liberamente o lungo piani inclinati. Varie interpretazioni geometriche e fisiche del concetto di derivata. Direzione di una curva in un punto. Lunghezza di un arco di curva come limite superiore di poligonali in esso inscritte. Determinazione del rapporto tra la circonferenza e il diametro. Area del cerchio e di figure limitate da porzioni di rette e di circonferenze.

Classe IV

Esercizi relativi alla divisione dei polinomi. Criteri di divisibilità per $(x - a)$ e per $(x + a)$. Sistemi di equazioni riducibili ai primi due gradi. Discussione generale della formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado. Disuguaglianza di primo e di secondo grado. Procedimenti grafici per la loro trattazione. Trasformazioni di formule contenenti radicali. Uso degli esponenti frazionari e negativi. Numeri complessi e loro rappresentazione geometrica. Qualche cenno sui vettori e sulle operazioni fondamentali su di essi. Continuazione degli esercizi di trigonometria. Formule per la trasformazione di somme e differenze di seni e coseni in prodotti. Equazioni trigonometriche. Funzioni trigonometriche inverse. Espressioni del raggio dei circoli inscritti o circoscritti a triangoli, in funzione degli elementi del triangolo. Casi di risoluzione di triangoli in cui i dati non siano solamente lati e angoli. Operazioni sul terreno. Esercitazioni pratiche sull'uso degli istrumenti topografici. Equivalenza di piramidi. Poliedri regolari. Loro costruzione, e determinazione dei loro elementi. Rapporto tra i volumi di poliedri simili. Superficie e volume del cilindro, del cono, della sfera, della zona e del segmento sferici. Definizione e costruzione delle sezioni coniche. Accenno alle loro proprietà fondamentali più importanti per le applicazioni alla meccanica e alla fisica. Teorema di Pascal sull'esagono inscritto in una conica. Esempi di curve generate dalla composizione di moti (parabola, spirali, cicloide, ecc.); qualche esercizio di determinazione delle loro tangenti. Applicazioni al moto dei proiettili.

Classe V

Permutazioni e combinazioni. Nozioni e problemi elementari sul calcolo delle probabilità. Potenze intere e positive di un binomio. Nozioni complementari sui numeri primi. Cenni sull'analisi indeterminata di primo grado e sulle frazioni continue. Trattazioni di questioni di massimo e di minimo, col sussidio della derivazione. Esercizi geometrici e relativi. Interpretazione di espressioni che si presentano sotto forma indeterminata. Qualche esempio numerico di risoluzione di equazioni di terzo grado. Esercizi trigonometrici relativi. Equazione esponenziale. Sua rappresentazione grafica. Deduzione sulle proprietà fondamentali dei logaritmi. Enunciazione delle proprietà formali delle operazioni dell'algebra. Qualche cenno sulla logica matematica.

Triangoli sferici e relazioni fondamentali fra i loro elementi. Esercizi sulla loro risoluzione. Loro area. Volumi di poliedri e di solidi di rotazione. Esempi dell'impiego di considerazioni infinitesimali per la loro determinazione. Metodo di Cavalieri. Concetto di integrale e sue interpretazioni e applicazioni geometriche. Ricerche di centri di gravità di figure piane e di solidi di rotazione. Nozioni fondamentali sui movimenti d'un corpo rigido (gradi di libertà, traslazioni, rotazioni, loro composizione e decomposizione). Teorema di Eulero sui poliedri convessi. Nozioni elementari di geometria descrittiva e sulle varie specie di proiezioni cartografiche.

4. Estratto dal R.D. del 28 settembre 1913, n.1213, *Ginnasio - Liceo Moderno. Orario - Istruzioni - Programmi*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», XL, 45, 30 ottobre 1913, pp. 2791-2795.

Matematica

Ginnasio:

Lo stesso programma delle due classi corrispondenti del ginnasio classico.

Appendice 1

Liceo: *Classe I*

Lo stesso programma della prima classe del liceo classico.

Classe II

Misura approssimata dei segmenti e degli angoli. Brevi cenni sulle operazioni con numeri approssimati. Grandezze commensurabili ed incommensurabili. Rapporto di due grandezze. Numeri irrazionali.

Radicali ed operazioni su di essi. Equazioni di 2° grado ad una incognita; somma e prodotto delle radici. Esempi di equazioni riducibili al 1° o 2° grado.

Area dei più semplici poligoni. Perimetro ed area del cerchio. Principali teoremi sull'equivalenza e la similitudine dei poliedri. Superfici a volumi dei prismi e delle piramidi. Cilindri, cono e sfera; aree e volumi di questi solidi.

Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Rappresentazione grafica di un fenomeno che dipende da una sola variabile. Esempi di diagrammi. Concetto di funzione di una sola variabile. Studio delle funzioni $ax + b$, ax^2, $a : x$ mediante la rappresentazione grafica. Interpretazioni fisiche e meccaniche. Cenno sulle coordinate ortogonali nello spazio.

Classe III

Funzioni circolari e loro principali proprietà. Curva dei seni e delle tangenti. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli archi.

Concetto di limite. Sue applicazioni geometriche; tangente ad una curva e lunghezza di un arco. Derivata di una funzione; interpretazioni geometriche e meccaniche.

Derivata di una funzione di 1° e 2° grado e di $a : x$. Tangente alle curve immagini delle funzioni ax^2 ed $a : x$.

Potenze con esponente razionale. Cenno sulle potenze con esponente reale.

Equazione esponenziale. Logaritmi. Uso delle tavole ed applicazioni varie.

Rappresentazione grafica della curva logaritmica. Logaritmi delle funzioni circolari. Risoluzione dei triangoli rettilinei. Applicazioni pratiche della trigonometria.

Valutazione approssimata di una area piana mediante somme di quadrati.

L'area come limite di una somma di rettangoli. Cenno sull'integrale definito ed ovvie applicazioni.

Istruzioni

I programmi di matematica del ginnasio superiore e della prima liceale sono gli stessi per l'istituto classico e per il moderno. Tuttavia l'insegnante di quest'ultimo, nello svolgerli, e nella scelta degli esercizi, dovrà tener presente l'indirizzo che poi è seguito nella 2° e 3° liceale; ed in conseguenza avrà cura di preparare gradatamente gli alunni ad accogliere senza sforzo i concetti a cui le presenti istruzioni si riferiscono.

I programmi della 2ª o 3ª classe del liceo moderno rappresentano, sotto qualche rispetto, una innovazione di fronte ai programmi che da un cinquantennio vigono nelle nostre scuole classiche. È necessario per ciò esporre quali i criteri abbiano ispirato questi nuovi programmi ed entro quali limiti l'insegnante debba svolgerli.

Le esigenze della vita moderna, da un lato, e dall'altra parte una più larga visione della scienza nel suo complesso, richiedono che si restringano e si mettano in più viva luce i legami tra la matematica e le scienze sperimentali e di osservazione. È necessario che il giovane allievo, prima di lasciare il liceo, acquisti la persuasione che tra le matematiche e quelle altre scienze vi è un legame intimo ed un'affinità molto grande, e che esperienza e ragionamento sono entrambi indispensabili, sia pure in varia misura, per arricchire ogni campo del sapere. È necessario che egli sappia che le une e le altre scienze si sono sempre prestati reciproci aiuti, e che il rinnovamento delle matematiche nel XVII secolo è legato col fiorire delle scienze sperimentali. A tal fine l'insegnante coglierà le occasioni offerte dal presente programma per far notare ai giovani come alcuni concetti fondamentali delle matematiche moderne (quello di funzione in special modo) siano suggeriti dalle scienze d'osservazione, e precisati poi dal matematico, abbiano a loro volta esercitato un benefico influsso sullo sviluppo di queste.

Nello svolgere il programma deve però l'insegnante guardarsi da due opposti pericoli che renderebbero inefficace la sua opera; il pericolo di cadere in un grossolano empirismo o quello, non meno grave, di subire le lusinghe di un esagerato criticismo. Il metodo empirico, nascondendo i legami che passano tra i fatti suggeriti dall'esperienza, e tacendo delle teorie che ad essi si riferiscono, toglierebbe alla matematica il valore educativo della mente e oscurerebbe il fascino che essa deve esercitare sopra quegli allievi nei quali le facoltà logiche prevalgono. D'altra parte un insegnamento ove penetrassero le sottigliezze della critica moderna riuscirebbe accessibile a pochi ed a questi stessi darebbe una idea unilaterale, e quindi falsa, di ciò che è la scienza.

La giusta misura è la qualità che nello svolgimento di questi programmi più d'ogni altra devesi raccomandare all'insegnante. Il quale dovrà mediante interrogazioni ed opportuni esercizi fatti in iscuola, od assegnati per casa agli alunni, assicurarsi continuamente di essere seguito dalla maggioranza di questi, e far sì che il suo insegnamento riesca adatto alla media intelligenza della classe.

Prima di passare all'esame di alcuni punti speciali del programma, è opportuno avvertire che nel redigerlo venne seguito l'ordine che è parso più conforme allo sviluppo logico. Ma, entro al programma di ciascuna classe, il professore può fare spostamenti, soprattutto collo scopo di armonizzare il proprio corso con quello parallelo di fisica. A questo proposito si ricorda qui quanto è stato detto nelle *Istruzioni generali* circa gli accordi da prendersi fra gli insegnanti di materie scientifiche. Si avverte però che non è affatto necessario che sistematicamente il professore di matematica prepari al collega di fisica le conoscenze teoriche di cui questi ha bisogno, ma conviene talora, seguendo il processo storico, che una nozione venga accennata dall'insegnante di fisica, in precedenza a quello di matematica, salvo ad essere in seguito precisata e sviluppata da quest'ultimo.

Nelle istruzioni che seguono si insiste sui punti che presentano qualche novità, e si sorvola sugli altri che già comparivano nell'antico programma liceale.

Classe II

1. Nel ricordare agli alunni come le lunghezze e gli angoli si misurino praticamente col metro e col goniometro, l'insegnante avrà cura di avvertire che ogni misura concreta è necessariamente affetta da un errore che può essere ridotto perfezionando i mezzi di misura, ma non può mai venire soppresso.

Egli aggiungerà che nelle scienze applicate più evolute (geodesia, astronomia) viene prefissato un limite che l'errore non deve sorpassare e, quando tale condizione sia soddisfatta, la misura viene riguardata praticamente come esatta. A questo proposito egli potrà fare un confronto tra la risoluzione teorica e quella praticamente esatta di alcuni problemi geometrici fra i più semplici.

Le misure approssimate condurranno naturalmente l'insegnante a discorrere delle operazioni sui numeri decimali che rappresentano dei valori approssimati, ma egli si limiterà a ragionare sopra pochi esempi numerici opportunamente scelti.

Il confronto tra le misure approssimate e le misure esatte delle grandezze fa sorgere l'idea dell'esistenza o meno di una comune misura, donde il concetto grandezza incommensurabile. A queste si riattaccano i numeri irrazionali sui quali il professore dirà ciò che è strettamente necessario a fissarne bene il concetto, limitandosi a pochissimi cenni per quanto riguarda le operazioni su di essi.

Si intende che la via qui indicata per la introduzione dei numeri irrazionali non è obbligatoria e se il professore crederà di seguirne altra egli sarà perfettamente libero di farlo.

2. Nel capitolo sulle coordinate cartesiane nel piano l'insegnante non deve proporsi di svolgere una prima parte della geometria analitica, ma deve tener ben presente lo scopo di servirsi di esse per la rappresentazione grafica delle funzioni. Gli alunni faranno subito uso di carta quadrettata e su questa dovranno abituarsi a segnare i punti e le curve che l'insegnante indicherà. Conviene introdurre la nozione di funzione riprendendo a considerare i fenomeni descritti nei corsi di Fisica, Chimica, Biologia e Geografia economica che a ciò si prestino. Si indicherà la distinzione tra funzioni definite per un gruppo discreto di valori della variabile (i diagrammi delle quali hanno una forma in parte arbitraria e potrebbero anche essere rappresentati da linee spezzate) e funzioni definite per tutti i valori compresi tra certi limiti (i diagrammi delle quali spesso vengono tracciati da strumenti registratori). Dall'esame della curva immagine si dedurranno gli intervalli ove la funzione è crescente o decrescente, i punti ove raggiunge un massimo o minimo, ecc. Si introdurranno poi le funzioni definite da determinate operazioni da eseguirsi sulla variabile e si studieranno le rappresentazioni grafiche delle funzioni intere dei primi due gradi e della funzione inversa della variabile, mettendo in rilievo le loro interpretazioni fisiche e meccaniche (moto uniforme o uniformemente vario, legge di Boyle-Mariotte, ecc.).

A questo proposito il professore potrà anche citare l'esempio concreto degli orari grafici, adoperati sistematicamente dagli ingegneri ferroviari e da qualche tempo messi in commercio anche per il pubblico.

Altri esercizi opportuni su questo capitolo riguarderanno la risoluzione grafica di un sistema in due equazioni lineari a due incognite o di una equazione quadratica ad un'incognita.

3. Il cenno sulle coordinate cartesiane nello spazio sarà dato allo scopo di far comprendere ai giovani le rappresentazioni cristallografiche e dovrà essere ristretto al puro necessario.

Classe III

1. Il professore, riprendendo il concetto di funzione inerente ad una data curva, introdurrà come esempi importanti le funzioni circolari (seno, coseno, tangente e cotangente), le cui proprietà verranno studiate nel modo consueto, aiutandosi però colle curve rappresentative. Sarà bene che gli alunni imparino a costruire sulla carta quadrettata le curve dei seni e delle tangenti, e a determinare graficamente, con una relativa esattezza, i valori delle funzioni circolari di archi espressi da numeri interi di gradi.

2. Nell'introdurre il concetto di limite di una successione di numeri e di una quantità variabile l'insegnante avrà cura di far notare come nella teoria degli irrazionali, e nella definizione di perimetro od area di un cerchio, quel concetto implicitamente intervenga. Con altri esempi tolti dalla geometria e dall'algebra converrà di chiarire la definizione di limite, intorno alla quale è opportuno ripetere che non è questo il posto per sottilizzare. Delle operazioni sui limiti l'insegnante potrà tutto al più dare un semplice cenno, evitando ogni dimostrazione. Per quei pochi limiti che si dovranno determinare nel corso del programma si accennerà alle proprietà delle operazioni caso per caso. Le applicazioni del concetto di limite alla tangente od alla lunghezza di una curva si esporranno brevemente, ammettendo l'esistenza del limite per le curve, che ordinariamente si hanno da considerare. La determinazione della tangente ad una linea e la nozione di velocità del moto vario, condurranno senza sforzo l'insegnante ad introdurre la derivata di una funzione (sarà opportuno indicare questa derivata senza fare uso della notazione differenziale). Il calcolo delle derivate delle speciali funzioni ricordate più sopra, e le interpretazioni geometriche di tali derivate, sono immediate.

3. Stabilite le proprietà delle potenze ad esponente razionale, l'insegnante darà un breve cenno del caso in cui l'esponente è irra-

zionale, e passerà poi subito alla nozione di logaritmo. Con esempi numerici bene scelti dovrà impratichire i giovani nell'uso dei logaritmi ricorrendo a tavole con quattro o, al massimo, cinque decimali. La curva logaritmica di cui il programma parla s'intenderà scelta a base 10; e si osserverà che, mutando la base, le ordinate (cioè i logaritmi) variano tutte nello stesso rapporto.

4. Dei vari casi di risoluzione di un triangolo rettilineo l'insegnante si limiterà a trattare quelli in cui i dati sono lati ed angoli. Nelle applicazioni della Trigonometria si sceglieranno quei problemi che si presentano realmente nella pratica, trattandoli in casi numerici (distanza di due punti inaccessibili, altezza di una montagna, ecc.). Gioverà che l'insegnante dia un'idea agli alunni dei procedimenti che si impiegano per misurare un arco di meridiano (con la triangolazione) per valutare la distanza della luna, o delle stelle, ma ciò a solo scopo di coltura, e senza entrare in nessun particolare del calcolo numerico.

5. L'insegnante indicherà come praticamente, si misurano le aree di curve chiuse tracciate sulla carta millimetrata; farà valutare l'area per eccesso o per difetto, e farà notare come si ottengano valori via via più approssimati, impiccolendo il lato del quadrato fondamentale. Che le due serie di valori approssimati, per difetto e per eccesso, convergano ad uno stesso limite, sarà ammesso senza dimostrazione.

Quando invece si tratti dell'area compresa tra una curva, l'asse delle ascisse e due ordinate, converrà (nell'ipotesi che la curva sia tagliata in un solo punto da ogni parallela alle ordinate medesime) eseguire la decomposizione dell'area mediante ordinate intermedie, equidistanti tra loro e dalle due estreme, e riguardare detta area come compresa tra due somme di rettangoli di basi eguali. Qui è ovvia la determinazione della differenza, tra i due valori approssimati dell'area, e si vedrà subito che tale differenza tende a zero con l'aumento indefinitamente del numero delle ordinate intermedie.

Dopo ciò si accennerà brevemente al concetto di integrale definito, deducendolo dal precedente problema geometrico. In nessun altro dettaglio teorico si dovrà entrare, ma sarà utile fare qualche immediata applicazione, ed in particolare quella (che risale a Galileo) relativa alla determinazione del cammino percorso da un punto dotato .di moto vario, ove si ricorra al diagramma delle velocità.

5. Estratto dal R. D. del 14 ottobre 1923, n. 2345, *Approvazione degli orari e dei programmi per le Regie Scuole medie*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», 50, Roma 17 novembre 1923, Numero Straordinario *Orari e programmi per le Regie Scuole medie*, pp. 4413-4510.

Esame di ammissione alla 4ª Ginnasiale

Matematica

Conversazione della durata non meno di 10 e non più di 20 minuti intorno alla seguente materia:

Aritmetica:

Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi. Potenze di numeri interi; calcolo con esse. Nozioni sulla divisibilità dei numeri interi. Numeri primi. Criteri di divisibilità per 2, 5, 3 e 9. Prova per 9 delle quattro operazioni sui numeri interi. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo di due o più numeri interi. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri frazionari. Potenze di numeri frazionari e regole di calcolo relative. Numeri decimali. Numeri decimali periodici e loro funzioni generatrici. Sistema metrico decimale. Numeri complessi con applicazioni limitate alle misure degli angoli, degli archi e del tempo. Uso di semplici formule letterali per esprimere regole di calcolo o di misura, e per mostrare come da una di tali regole possano esserne dedotte altre. Uso delle parentesi. Calcolo del valore che un'espressione letterale assume per assegnati valori numerici delle lettere che vi compariscono. Proporzioni numeriche. Regole per l'estrazione della radice quadrata con assegnate approssimazioni.

Geometria:

Rette, semirette, segmenti. Piani, semipiani angoli. Rette perpendicolari, rette parallele. Poligoni, in particolare triangoli, trapezi, parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati. Poligoni regolari. Circonferenza e cerchio; archi e settori circolari. Retta e piano perpendicolari. Piani perpendicolari. Piani e rette paralleli. Prisma, parallelepipedo, piramide. Cilindro, cono e sfera. Misure di lunghezza, di superficie, di volumi, di angoli e di archi.

Avvertenze

[…] Per la matematica, l'esaminando sarà tenuto a calcolare espressioni aritmetiche o date direttamente o da ricavare mediante sostituzione di valori numerici da assegnate espressioni letterali; ed a risolvere facili problemi che richiedano la conoscenza delle regole di misura per le lunghezze, le superfici, i volumi, gli angoli, gli archi.

Durante lo svolgimento degli esercizi su esposti, non è escluso che l'esaminatore richieda dal candidato definizioni esatte dei termini tecnici, di cui avrà occasione di valersi, ed enunciati precisi delle regole pratiche, cui farà ricorso; ma è assolutamente escluso che l'esame possa procedere per domande e risposte di definizioni ed enunciati e muoversi in un campo di completa astrattezza.

Il candidato ha da dimostrare, soprattutto, di saper orientarsi nella risoluzione di un problema ed eseguire con franchezza le operazioni che essa richiede. Quindi, si condonerà piuttosto un qualche impaccio nel definire e nell'enunciare, che la deficienza nel risolvere e nell'operare.

Dalle norme stesse, secondo cui deve procedere l'esame, discende - occorre appena avvertirlo - che l'insegnamento dell'aritmetica si presuppone svolto con indirizzo pratico; il che da una parte, ove l'occasione si presti o la chiarezza lo consigli, non impedisce di fare uso discreto di qualche semplice ragionamento deduttivo; e, dall'altra, non impone che nello svolgimento del programma si debba seguire quell'ordine cui bisognerebbe ricorrere se si dovesse impartire un insegnamento di aritmetica razionale. Per es., non è consigliabile di cominciare a parlare di frazioni solo dopo aver svolta tutta la parte del programma riguardante i numeri interi; il calcolo con frazioni assai semplici, ove la riduzione ai minimi termini e la riduzione al minimo denominatore comune possono esser fatte mentalmente o per facili tentativi, potrebbe esser premesso con vantaggio all'introduzione delle nozioni generali di massimo comune divisore e di minimo comune multiplo e all'esposizione delle regole che li riguardano.

Da queste norme discende inoltre, che l'insegnamento della geometria non deve avere altro scopo che quello di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese nelle scuole elementari, fissar bene la nomenclatura, che in alcune sue parti occorre possedere con sicurezza per studiar poi con profitto la geografia astronomica, e fornire con le regole di misura abbondante materia di esercizi e ottime occasioni per l'introduzione di formule letterali, e la deduzione di una di esse, da altre.

ESAME DI MATURITÀ PER I PROVENIENTI DAL LICEO CLASSICO

Matematica

La prova d'esame consisterà in una conversazione della durata di non meno di 15 minuti sui seguenti argomenti:

A) Sistemi di equazioni di 1° grado; calcolo dei radicali; potenze con esponenti frazionari.

Equazioni di secondo grado o riconducibili a quelle di 2° grado. Esempi semplici di sistemi di equazioni di grado superiore al primo. Progressioni aritmetiche e geometriche. Logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazioni al calcolo di espressioni numeriche. Le funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Uso delle tavole trigonometriche (preferibilmente, ai valori naturali) ed applicazione alla risoluzione dei triangoli rettilinei.

B) Applicazioni dell'algebra alla geometria.

1. I numeri reali assoluti e relativi. Operazioni su di essi. Equazioni esponenziali.
2. Proporzioni fra grandezze. La teoria della similitudine nel piano. Inscrizione nella circonferenza del pentagono, del decagono e del pentadecagono, regolari.
3. Teoria della misura per le lunghezze e le superfici. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio.
4. Rette e piani nello spazio; ortogonalità e parallelismo. Minima distanza di due rette sghembe. Diedri, triedri, angoloidi. Poliedri, poliedri regolari.
5. Poliedri equivalenti, poliedri con volumi eguali.
6. La teoria della similitudine nello spazio.
7. Cilindro, cono e sfera. Aree e volumi che vi si riferiscono.

Fisica

L'esame consisterà in una conversazione della durata di non meno di 15 minuti su i seguenti argomenti

Meccanica:

I corpi in movimento con speciale riguardo al moto uniformemente vario ed a quello oscillatorio semplice. Composizione dei movimenti. Inerzia. Concetto statico di forza ed unità statica di questa. Composizione e decomposizione di forze. Coppia. Caso particolare dei gravi liberi. Proporzionalità fra le variazioni del moto e la forza. Massa. Unità dinamica di forza. Uguaglianza fra azione e reazione. Caduta dei gravi libera o lungo un piano inclinato. Oscillazione del pendolo. Moto circolare uniforme. Lavoro ed energia. Unità di lavoro e di potenza. Energia di moto e di posizione. Attrito e resistenza del mezzo. Equilibrio dinamico nelle macchine. Conservazione della energia. Pressioni interne ed alla superficie dei liquidi. Liquidi soggetti alla gravità e corpi solidi immersi in essi. Pressione negli aeriformi con speciale riguardo alla atmosfera. Relazione fra pressione e volume specifico. Moto dei fluidi e disposizioni per ottenerlo (pompe ecc.) Moto di un solido immerso in un fluido (cenno sui dirigibili e sui velivoli). Azioni molecolari e, in particolare, elasticità, capillarità. pressione osmotica.

Termologia:

Concetto soggettivo di temperatura con riferimento alle varie proprietà dei corpi. Misura della temperatura. Calore. Il 1° principio della termodinamica. Rapporto fra le unità di misura del calore e del lavoro. Le macchine termiche ed il 2° principio della termodinamica. Trasformazione delle varie forme di energia in calore e reciprocamente. Propagazione del calore. Dilatazione termica dei solidi e liquidi. Il calore negli aeriformi. Relazione fra pressione, volume specifico e temperatura. Temperatura assoluta. Cambiamento di stato.

Acustica:

Moto vibratorio del mezzo e percezione del suono. Frequenza, lunghezza d'onda ed intensità di un suono semplice. Coesistenza di più suoni semplici. Timbro di un suono. Intervalli musicali. Corde e tubi sonori. L'orecchio. Interferenze e battimenti.

Ottica:

Le radiazioni e la percezione della luce. Frequenza, lunghezza d'onda ed intensità di una radiazione semplice. I colori e le radiazioni non visibili. Effetti calorifici. Effetti chimici (fotografia).

Riflessione e rifrazione semplice con applicazione agli specchi piani e sferici, ai prismi ed alle lenti sottili. Occhio e strumenti ottici più usati.

Dispersione della luce. Interferenza, diffrazione e polarizzazione.

Elettrologia e Magnetismo:

Fenomeni principali di elettrostatica e grandezze che vi intervengono. La macchina elettrica e la pila in circuito aperto. Condensatori. Corrente elettrica. La macchina elettrica e la pila in circuito chiuso. Corrente elettrica costante nei conduttori di 1ª specie e grandezze da cui dipende: circuiti semplici ed a rete. Principali fenomeni di magnetostatica. Azione magnetica terrestre. Permeabilità magnetica. Isteresi. Campo magnetico prodotto da una corrente. Applicazione alla misura della corrente (galvanometro, ecc.), alla trasmissione di segnali (telegrafo, ecc.), ecc. Calore prodotto dalla corrente considerata come energia perduta e come energia utile. Applicazione in quest'ultimo caso al riscaldamento ed alla illuminazione. Correnti termoelettriche. La corrente elettrica nei conduttori di seconda specie. Dissociazione elettrolitica. Accumulatori. La corrente nei gaz; ionizzazione. Raggi catodici e raggi X. Radioattività. Induzione elettromagnetica. Corrente elettrica variabile e grandezze da cui dipende. Rocchetto di induzione. Telefono. Dinamo e motori. Corrente elettrica alternata. Alternatori e motori. Trasformatori statici. Campo magnetico rotante. Trasporto della energia. Onde elettromagnetiche; loro produzione e mezzi per rilevarle. Cenno di radiotelegrafia. Sistemi di misure elettriche assolute e pratiche.

Cosmografia e Meteorologia:

La sfera celeste ed il sistema solare. Leggi di Keplero sul moto dei pianeti. Legge di Newton. La terra in particolare e la misura del tempo. La luna e le maree. L'atmosfera terrestre ed i suoi movimenti. Vapor d'acqua nell'aria e sua misura. Meteore acquee, luminose, elettriche.

Avvertenze

[…] Per la matematica il programma è diviso in due parti: *A)* e *B)*.

In *A)* sono raccolte principalmente le teorie in cui prevalgono gli sviluppi algoritmici: cioè le teorie per le quali l'aver raggiunto una certa abilità nel valersi delle formule fondamentali è sufficiente garanzia di buona preparazione. Del possesso sicuro di questa parte, il candidato darà, dunque, prova risolvendo, sotto la guida dell'esaminatore, uno o più esercizi. Gli esercizi, di regola, saranno tali da non esigere per la loro risoluzione che l'applicazione immediata di teoremi e formule fondamentali di cui chi sia giunto alla fine della sua educazione matematica secondaria, deve avere conoscenza ferma e precisa; ma non è escluso che in qualche caso, in ispecie se si tratta di questioni geometriche da risolvere con l'ausilio dell'algebra, esse possano richiedere qualche opportuno accorgimento o qualche artifizio non immediatamente visibile. In tal caso l'esaminatore suggerirà senz'altro il procedimento da seguire: perché questa parte della prova deve servire soltanto a mostrare che il candidato ha pronto e franco il maneggio del calcolo letterale e l'uso delle principali formule di algebra e di trigonometria.

In *B)* sono riunite, distinte in sette capi, le teorie che meglio si prestano a saggiare la capacità del candidato a comprendere e far sua una rigorosa sistemazione deduttiva. Soltanto su quelle raccolte in cinque dei sette capi, il candidato è tenuto a indicare l'andamento generale della sistemazione logica, secondo la quale egli le ha studiate, e ad esporre le dimostrazioni di teoremi, ad esse riferentisi, che gli venissero chieste. Di tali cinque capi, quattro debbono essere il secondo, il terzo, il quarto e il quinto; l'ultimo è a scelta del candidato fra i rimanenti.

Per la fisica l'esame dovrà fornire la prova che il candidato conosce i vari argomenti indicati - nel programma - sia in loro stessi e sia nell'eventuale loro rapporto - ma, soprattutto, che egli ha ben chiari i concetti fondamentali che dominano nella fisica - come quelli di forza e massa, di lavoro, di conservazione della energia nelle sue trasformazioni, ecc. Dovrà inoltre dimostrare che gli è famigliare l'uso delle unità proprie alle varie grandezze e la interpretazione delle equazioni fra le variabili di un fenomeno e che possiede l'abito della osservazione e sa inquadrare i fenomeni - specialmente quelli più comuni - nelle teorie generali.

Esame di ammissione alla I^a classe del Liceo scientifico

Programmi uguali a quelli di ammissione al corso superiore dell'Istituto Tecnico.[1]

[1] Esame di ammissione alla 1^a Classe del corso superiore dell'Istituto tecnico

Matematica

Prova scritta: Problema in applicazione della materia degli esami orali.

Prova orale: Interrogazioni, per la durata di 15 minuti, sul seguente programma:

Appendice 1

Avvertenza

Siccome il liceo scientifico ha un carattere più culturale e meno pratico delle due sezioni dell'istituto tecnico l'esaminatore nel

Aritmetica: Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi. Potenze di numeri interi; calcolo con esse. Nozioni sulla divisibilità dei numeri interi. Numeri primi. Criteri di divisibilità per 2, 5, 3 e 9. Prova per 9 delle quattro operazioni sui numeri interi. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo di due o più numeri interi. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri frazionari. Potenze di numeri frazionari. Numeri decimali. Numeri decimali periodici e loro funzioni generatrici. Sistema metrico decimale. Numeri complessi con applicazioni anche ad antiche misure del luogo eventualmente non cadute in disuso. Uso di semplici formule letterali per esprimere regole di calcolo o di misura e per mostrare come da una di tali regole possano esserne dedotte altre. Uso delle parentesi. Calcolo del valore che un'espressione letterale assume per assegnati valori numerici delle lettere che vi compariscono. Proporzioni numeriche. Proporzionalità diretta ed inversa. Regole del tre. Regola per la divisione di un numero in parti proporzionali a più altri. Regole per l'estrazione della radice quadrata con assegnate approssimazioni.

Algebra: I numeri razionali relativi. Le quattro operazioni fondamentali su di essi e loro proprietà formali. Potenze con esponenti interi relativi; regole di calcolo che ad esse si riferiscono. Polinomi (razionali interi) con una o più indeterminate; le operazioni su di essi di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Quadrato e cubo di un polinomio. Frazioni algebriche; calcolo con esse. Equazioni di 1° grado con un' incognita. Sistemi di equazioni di 1° grado.

Geometria: Retta, semiretta, segmenti. Piani, semipiani, angoli. Triangoli e poligoni piani. Uguaglianza fra triangoli e poligoni. Disuguaglianza fra elementi di un triangolo. Circonferenza e cerchio. Mutuo comportamento di rette e circonferenze o di circonferenze complanari. Problemi grafici fondamentali. Rette parallele. Somma degli angoli interni o esterni di un poligono. Parallelogrammi: loro proprietà, loro casi particolari. Angoli nel cerchio (al centro e alla circonferenza). Poligoni regolari. Teoria dell'equivalenza tra ligure piane poligonali. Proporzioni fra grandezze geometriche e teoria della similitudine nel piano. Inscrizione nella circonferenza del pentagono, del decagono e del pentadecagono, regolari.

valutare le prove d'esame terrà conto di questo diverso carattere e richiederà una più profonda e seria capacità mentale.

Esame di maturità per i provenienti dal Liceo scientifico

Matematica

Prova scritta:

Risoluzione d'un problema riguardante la materia degli esami orali. (Durata della prova: cinque ore).

Prova orale:

La prova orale si svolge, relativamente alle parti *A* e *B* del programma con le norme indicate per le parti omonime del programma di liceo. Solo che qui si richiede per sei dei capi della parte *B* ciò che ivi si richiede per cinque, e che fra questi sei capi debbono essere compresi , di obbligo il 3°, il 4°, il 5°, il 6° e il 7°.

A) Calcolo dei radicali; potenze con esponenti frazionari. Equazioni di 2° grado o riconducibili a quelle di 2° grado. Esempi semplici di sistemi di equazioni di grado superiore al 1°. Progressioni aritmetiche e geometriche. Logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo di espressioni numeriche. Calcolo combinatorio e binomio di Newton, Goniometria, Trigonometria rettilinea.

Principali formule di trigonometria sferica e cenni sulla risoluzione dei triangoli sferici. Rappresentazioni grafiche delle funzioni di una variabile.

Derivate di x^m (m intero o frazionario), *senx*, *cosx* e *tgx*. Significato geometrico e cinematico della derivata. Massimi e minimi col metodo delle derivate. Applicazioni dell'algebra alla geometria.

B) 1. Elementi di teoria dei numeri. Divisibilità. Numeri primi. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo. L'indicatore

Avvertenze

[...] Degli argomenti del programma di matematica quelli aritmetici si presumono studiati con indirizzo pratico; quelli algebrici e geometrici, con metodo razionale; con che non si vuol significare che, ove si voglia, non si possa nei primi anni del corso inferiore dell'Istituto Tecnico ricapitolare le nozioni di geometria apprese nelle scuole elementari, senza alcun intendimento di sistemazione logica, nei limiti e per gli scopi indicati nelle *Avvertenze* che accompagnano i programmi di matematica per l'esame di ammissione alla 4ª classe del Ginnasio.

$\varphi(n)$. Congruenze. Teorema di Fermat e sua generalizzazione. Analisi indeterminata di 1° grado.

2. 1 numeri reali assoluti e relativi. Operazioni su di essi. Equazioni esponenziali.

3. La nozione di limite di una successione o di una funzione. Teoremi fondamentali che vi si riferiscono. Nozioni di derivata e di integrale per le funzioni di una variabile. Derivata di una somma, di un prodotto e di una funzione di funzione.

4. Teoria della misura per la lunghezza e la superficie. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio.

5. Rette e piani nello spazio; ortogonalità e parallelismo. Minima distanza di due rette sghembe. Diedri, triedri, angoloidi. Poliedri; poliedri regolari.

6. Poliedri equivalenti, poliedri con volumi eguali.

7. La teoria della similitudine nello spazio.

8. Cilindro, cono e sfera. Aree e volumi relativi.

Fisica

Esame orale della durata di non meno di 20 e non più di 30 minuti.

Valgono gli stessi programmi e le stesse avvertenze che per il liceo classico; solo che ai candidati del liceo scientifico si richiederà una conoscenza più approfondita delle varie teorie ed una maggiore familiarità nell'uso dei mezzi matematici.

Appendice 2.

Orari e materie

Tavola 1 - Tabella comparativa degli orari e dei programmi nelle scuole secondarie classiche italiane ed europee, 1887 - Ore settimanali nel corso complessivo, in *Esame comparativo dei programmi nelle scuole secondarie classiche*, «Bollettino Ufficiale dell'Istruzione», Ottobre 1887, XIII, p. 204.

Materie	**Francia** Corso classico del Liceo 7 anni	**Austria** Vienna Ginnasio 8 anni	**Sassonia** Lipsia Ginnasio Classico 9 anni	**Assia** Darmstadt Ginnasio classico 9 anni	**Prussia** Francoforte M. Ginnasio classico 9 anni	**Italia** Ginnasio Liceo 8 anni
Religione	-	16	21	18	19	-
Lingua patria	**18**	**26**	**23**	**25**	**21**	**47**
Latino	37 1/2	50	78	74	77	47
Greco	21	28	42	38	40	20
Lingue straniere: a) Francese b) Inglese c) Tedesco	 - 14 (o 14)	 - - -	 19 - -	 17 - -	 21 - -	 - - -
Geografia e storia	20	27	31	27	28	35
Matematica	**13**	**24**	**34**	**35**	**34**	**23**
Storia naturale	4 1/2	9	10	8	10	10
Fisica	5	10	8	8	8	8
Filosofia	8	4	(1)?	(1)?	(1)?*	8
Calligrafia	-	2	3	6	4	-
Disegno	-	-	5	8	6	-
	141	196	274	264	263	198

** In Germania l'insegnamento della Filosofia, ove si dà, è compreso nell'orario di altro insegnamento, per lo più di quello della lingua patria.*

Tavola 2 - Progetto di riforma della Commissione Reale, 1909. Materie e orari di insegnamento, in *Commissione Reale per l'Ordinamento degli Studi Secondari in Italia. "Orari"*, *Relazione*, Roma, Ministero della Pubblica Istruzione, Tipografia L. Cecchini, 1909, pp. 669-672.

Ginnasio

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III	Totale
Lingua italiana Nozioni di storia civile e di geografia politica Esercitazioni di educazione psicologica	9	9	9	27
Lingua francese	5	5	5	15
Matematica	**4**	**4**	**4**	**12**
Scienze naturali e geografia fisica	3	3	3	9
Disegno	3	3	3	9
Totale delle ore settimanali	24	24	24	72

Liceo Classico

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V	Totale
Italiano	5	4	4	4	4	21
Latino	8	6	6	6	6	32
Greco	-	5	5	5	5	20
Francese	3	2	-	-	-	5
Storia	3	3	3	3	3	15
Geografia	2	2	2	-	-	6
Filosofia	-	-	3	2	3	8
Matematica	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**10**
Fisica	-	-	-	3	2	5
Chimica	-	-	2	-	-	2
Storia naturale	2	2	-	-	2	6
Totale delle ore settimanali	25	26	27	25	27	130
Tedesco (facoltativo)	-	-	3	3	3	9
Totale	25	26	30	28	30	139

Liceo Moderno

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V	Totale
Italiano	5	4	4	4	4	21
Latino	6	5	4	4	3	22
Francese	4	2	2	2	2	12
Tedesco, o inglese	-	5	4	3	3	15
Storia	3	3	3	3	3	15
Geografia	2	2	2	2	-	8
Filosofia	-	-	3	2	3	8
Matematica	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**10**
Fisica	-	-	-	3	3	6
Chimica	-	-	2	-	-	2
Storia naturale	2	2	-	-	2	6
Elementi di scienze giuridiche ed economiche	-	-	-	3	3	6
Disegno	2	2	-	-	-	4
Totale delle ore settimanali	26	27	26	28	28	135

Liceo Scientifico

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V	Totale
Italiano	5	4	4	4	4	21
Francese	3	2	-	-	-	5
Tedesco, o inglese	3	3	3	3	3	15
Storia	3	3	3	3	3	15
Geografia	2	2	2	2	2	10
Filosofia	-	-	3	2	3	8
Matematica	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**25**
Fisica	-	-	3	3	3	9
Chimica	3	3	-	-	-	6
Storia naturale	2	2	2	2	2	10
Disegno	2	2	2	2	2	10
Totale delle ore settimanali	28	26	27	26	27	134

Tavola 3 - Materie e orari del Liceo Moderno, in «Bollettino Ufficiale del Ministero della Istruzione Pubblica», XL, 45, 30 ottobre 1913, p. 2760.

Liceo Moderno

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III
Italiano	3	3	3
Latino	3	3	2
Francese	4	-	-
Tedesco, o inglese	3	3	3
Storia e Geografia	4	4	2
Elementi di scienze giuridiche ed economiche e Filosofia	-	3	4
Matematica	**4**	**3**	**3**
Fisica e Chimica e geografia fisica ed astronomica	4	3	3
Scienze naturali	-	3	3
Totale delle ore settimanali	25	25	23
Educazione fisica	2	2	2

Tavola 4 - Riforma Gentile, 1923. Materie e orari di insegnamento del Ginnasio-Liceo, in *Orari e programmi per le regie scuole medie*, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'istruzione pubblica», 50, II, 17 Novembre 1923, pp. 4418, 4422, 4423.

Ginnasio

Materie d'insegnamento	I	II	III	IV	V
Lingua italiana	7	7	7	5	5
Lingua latina	8	7	7	6	6
Lingua greca	-	-	-	4	4
Lingua straniera	-	3	4	4	4
Storia e geografia	5	5	4	3	3
Matematica	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**
	21	24	24	24	24

Appendice 2

Liceo

Materie d'insegnamento	I	II	III
Lettere italiane	4	4	3
Lettere latine	4	4	3
Lettere greche	4	4	3
Storia	3	3	3
Filosofia ed economia politica	3	3	3
Matematica e fisica	**4**	**4**	**5**
Scienze naturali, chimica e geografia	3	2	3
Storia dell'arte	-	2	2
	25	26	25

Liceo Scientifico

Materie d'insegnamento	I	II	III	IV
Lettere italiane	4	4	3	3
Lettere latine	4	4	4	4
Lingua straniera	4	4	3	3
Storia	3	3	2	2
Filosofia ed economia politica	-	-	4	4
Matematica e fisica	**5**	**5**	**6**	**6**
Scienze naturali, chimica e geografia	3	3	2	2
Disegno	3	2	2	2
	26	25	26	26

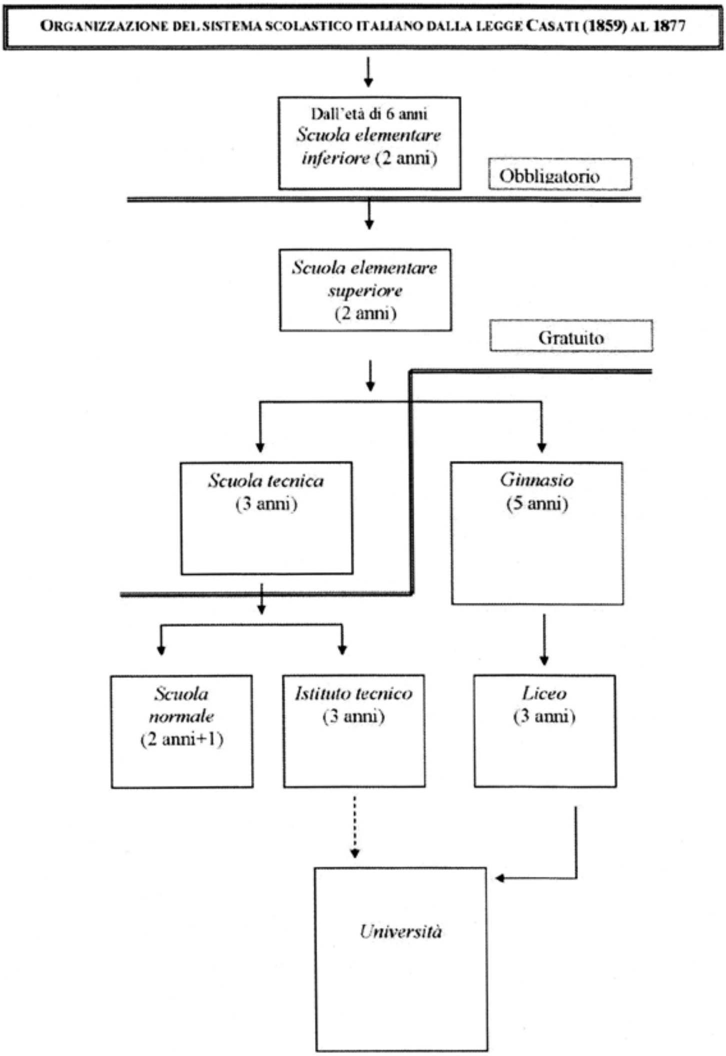
Liceo femminile

Materie d'insegnamento	Classe I	Classe II	Classe III
Lingua e letteratura italiana e latin latina	6	6	6
Storia e geografia	3	3	3
Filosofia, diritto ed economia politica	3	3	3
Storia dell'arte (facoltativo)	(2)	(2)	(2)
Lingua francese (facoltativo)	(4)	(4)	(4)
Lingua tedesca o inglese	4	4	4
Disegno	3	3	3
Musica, canto e danza	2	2	2
Strumento musicale (facoltativo)	(2)	(2)	(2)
Lavoro femminile ed economia domestica	3	3	2
	24	24	23

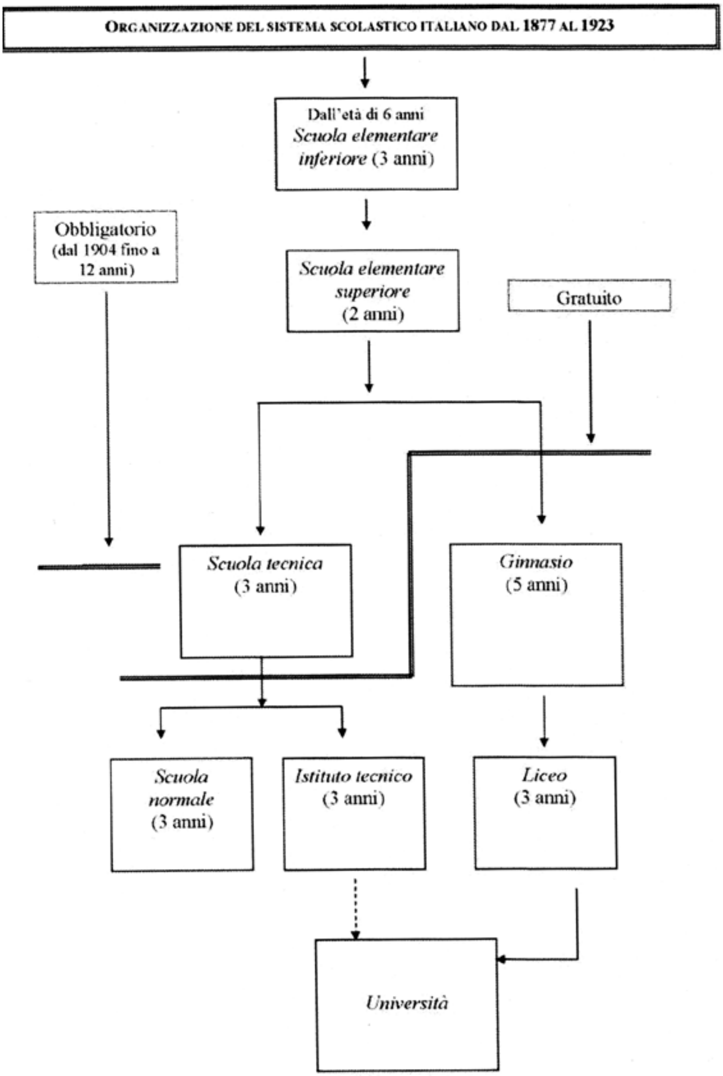
Appendice 3.

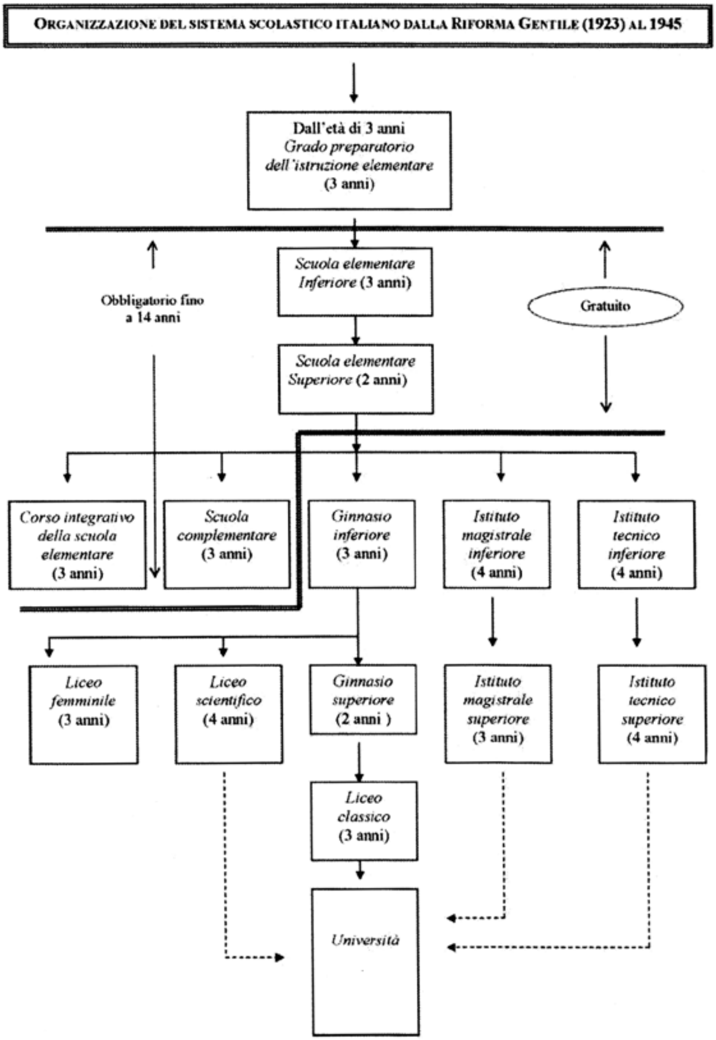
Tavole relative all'organizzazione scolastica

Tavole relative all'organizzazione scolastica



Appendice 3


ORGANIZZAZIONE DEL SISTEMA SCOLASTICO ITALIANO DAL 1877 AL 1923
Dall'età di 6 anni
Scuola elementare inferiore (3 anni)
Obbligatorio (dal 1904 fino a 12 anni)
Scuola elementare superiore (2 anni)
Gratuito
Scuola tecnica (3 anni)
Ginnasio (5 anni)
Scuola normale (3 anni)
Istituto tecnico (3 anni)
Liceo (3 anni)
Università


ORGANIZZAZIONE DEL SISTEMA SCOLASTICO ITALIANO DALLA RIFORMA GENTILE (1923) AL 1945
Dall'età di 3 anni
Grado preparatorio
dell'istruzione elementare
(3 anni)
Scuola elementare
Inferiore (3 anni)
Obbligatorio fino
a 14 anni
Gratuito
Scuola elementare
Superiore (2 anni)
Corso integrativo
della scuola
elementare
(3 anni)
Scuola
complementare
(3 anni)
Ginnasio
inferiore
(3 anni)
Istituto
magistrale
inferiore
(4 anni)
Istituto
tecnico
inferiore
(4 anni)
Liceo
femminile
(3 anni)
Liceo
scientifico
(4 anni)
Ginnasio
superiore
(2 anni)
Istituto
magistrale
superiore
(3 anni)
Istituto
tecnico
superiore
(4 anni)
Liceo
classico
(3 anni)
Università

BIBLIOGRAFIA*

AaVv, *La scuola secondaria in Italia (1859-1977)*, Firenze, Vallecchi, 1978.

AaVv, *Considerazioni su alcuni articoli di Didattica della matematica della rivista Il Pitagora*, «La Matematica e la sua didattica», 4, 1994, pp. 383-389.

AaVv, *La lavagna nera. Le fonti per la storia dell'istruzione nel Friuli-Venezia Giulia*, Atti del Convegno, Trieste-Udine, 24-25 novembre 1995.

Andri A., Mellinato G., *Scuola e confine. Le istituzioni educative della Venezia Giulia 1915-1945*, Trieste, Istituto Regionale per la Storia del Movimento di Liberazione nel Friuli-Venezia Giulia, 1994.

Ambrosoli L., *La Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media dalle origini al 1925*, Firenze, La Nuova Italia, 1965.

Anonimo, *Celebrazione del sessantennio di vita della Società "Mathesis"*, Atti della società italiana di scienze fisiche e matematiche "Mathesis", 1956, pp. 9-31.

[1] I libri e i saggi sulla storia della scuola sono assai numerosi, pertanto qui non si intende fornire una bibliografia esaustiva, piuttosto una bibliografia secondaria più espressamente dedicata all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie nel periodo considerato o a temi ad esso connessi. Vi trovano posto anche alcuni testi di carattere generale utili a offrire una cornice storica. All'interno di ciascun saggio che compare in questo volume vengono fornite ulteriori indicazioni bibliografiche specifiche dell'argomento preso in considerazione.

ANONIMO, *La "Mathesis" e l'ansia di rinnovamento della scuola*, «Periodico di matematiche», s. 5, 1972, 49, pp. 5-10.

ARZARELLO F., *La scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica*, in A. Guerraggio (a cura di), *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Bologna, Pitagora, 1987, pp. 25-41.

AVELLONE M., BRIGAGLIA A., ZAPPULLA C., *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, «Archive for History of Exact Sciences», 56, 2002, pp. 363-425.

BARRA M., FERRARI M., FURINGHETTI F., MALARA N., SPERANZA F. (a cura di), *Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trend*s, Quaderno TID - CNR, serie FMI, 1992 n. 12.

BELCASTRO A., CANEPA G., FENAROLI G., MODONESI M., *Alcuni manoscritti relativi all'insegnamento del calcolo delle probabilità presenti nelle carte di Giusto Bellavitis (1803-1880)*, «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Cl. di scienze fisiche, matematiche e naturali», 156, 2002-2003, pp. 331-370.

BESANA L., *Il concetto e l'ufficio della scienza nella scienza*, in G. Micheli (a cura di), *Storia d'Italia. Annali 3: Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento a oggi*, Torino, Einaudi, 1980, pp. 1167-1284.

BESANA L., GALUZZI M., *Geometria e latino: due discussioni per due leggi*, in G. Micheli (a cura di), *Storia d'Italia. Annali 3: Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento a oggi*, Torino, Einaudi, 1980, pp. 1285-1306.

BOLONDI G. (a cura di), *La* Mathesis. *La prima metà del Novecento nella "Società Italiana di Scienze matematiche e fisiche"*, PRISTEM/STORIA 5, Milano, Springer-Verlag Italia, 2002.

BOLONDI G., *Periodico di matematiche e Enciclopedia Italiana: tracce di un intreccio*, in BOLONDI 2002, pp. 121-133.

BOLONDI G., *Geometria proiettiva, geometria descrittiva e geometria dello spazio nella scuola italiana*, in M. Franciosi (a cura di), *Prospettiva e geometria dello spazio*, Quaderni del Centro Studi Enriques, 2, Sarzana, Agorà Edizioni, 2005, pp. 145-176.

BORGA M., FREGUGLIA P., PALLADINO D., *I contributi fondazionali della Scuola di Peano*, Milano, F. Angeli, 1985.

BORGATO M.T., *Alcune note storiche sugli "Elementi" di Euclide nell'insegnamento della matematica in Italia*, «Archimede», 1981, pp. 185-193.

BOSNA E., GENOVESI G., *L'istruzione secondaria superiore in Italia da Casati ai giorni nostri*, Bari, Cacucci, 1988.

BOTTAZZINI U., *I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, IV-A, 2001, pp. 281-329.

BOTTAZZINI U., *I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. B, s. VIII, IV, 2001, pp. 545–570.

BRIGAGLIA A., *Brioschi, Cremona e l'insegnamento della Geometria nel Politecnico*, in C. G. Lacaita, A. Silvestri (a cura di), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897). I saggi*, Milano, Franco Angeli, 2000, pp. 403-418.

BRUSOTTI L., *Questioni didattiche*, in L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari*, Milano, Hoepli, III.2, 1950, pp. 885-973.

CAMPEDELLI L., *Federigo Enriques nella storia: la didattica e la filosofia delle matematiche*, «Periodico di matematiche», s. 4, 25, 1947, pp. 95-114.

CAMPEDELLI L., *Federico Enriques nella scienza e nella scuola*, «Archimede», 8, 1956, pp. 97-103.

CAMPEDELLI L., *I cinquant'anni di un fondamentale scritto di Federigo Enriques*, «Archimede», 23, 1971, pp. 225-231.

CAMPEDELLI L., *Un cinquantenario. Federigo Enriques nell'insegnamento*, in *Atti del Convegno internazionale sul tema: Storia, Pedagogia e Filosofia della Scienza a celebrazione del centenario della nascita di Federigo Enriques*, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973, pp. 75-90.

CANESTRI G., RICUPERATI G., *La scuola in Italia dalla legge Casati a oggi*, Torino, Loescher, 1976.

CARDONE G., *Il congresso della Mathesis del 1921: Roberto Marcolongo e i modelli matematici*, in DI PALMA, BOVI, MARACCHIA 1996, pp. 147-152.

CASTELNUOVO E., *Didattica della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1963, Cap. II.

CASTELNUOVO E., *Guido Castelnuovo: Scuola e Società,* in stampa.

CAUTIERO M., GERLA G., *Un testo scolastico del 1897, gli "Elementi di geometria" di Giuseppe Veronese,* «Periodico di matematiche», 64, 1988, pp. 17-32.

CHARNITSKI J., *Fascismo e scuola. La politica scolastica del regime (1922-1943),* La Nuova Italia, Firenze 1996.

CIAMPI G., SANTANGELI C., *Il Consiglio superiore della pubblica istruzione, 1847-1928,* Pubblicazioni degli Archivi di Stato, Fonti XVIII, 1994.

CIARRAPICO L., *L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità,* «Archimede», 3, 2002, pp. 123-129. Una versione più estesa si trova sul sito http://www.lemonnier.it/riviste/archimede/archimede.htm nella sezione Archivio.

COMMISSIONE ALLEATA IN ITALIA (Sotto-Commissione dell'Educazione), *La politica e la legislazione scolastica in Italia dal 1922 al 1943 con cenni introduttivi sui periodi precedenti e una parte conclusiva sul periodo postfascista,* Milano, Garzanti 1947.

CONTI A., *Un quarantacinquennio di attività della* Mathesis *(1895-1940),* Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche "Mathesis", Bologna, Zanichelli, 1941, pp. 9-24.

CORAY D., FURINGHETTI F., GISPERT H., HODGSON B.R., SCHUBRING G. (editors), *One Hundred Years of l'Enseignement Mathématique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century,* Proceedings of the EM-ICMI Symposium, Geneva, 20-22 October 2000, «L'Enseignement Mathématique», MonographieN. 39, 2003

DALÉ M., *Giovanni Vailati e la didattica della matematica,* in M. De Zan (a cura di), *I mondi di carta di Giovanni Vailati,* Milano, Franco Angeli, 2000, pp. 252-280.

DEDÒ M., *Federigo Enriques e la matematica elementare,* in O. Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità,* Livorno, Belforte Editore, 1982, pp. 223-250.

DELL'AGLIO L., *Des glissements dans l'historiographie des mathématiques: le cas du Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Ma-*

tematiche de Gino Loria, in *Messengers of mathematics: European mathematical journals (1800-1946)*, Madrid, Siglo XXI España Ed., 1993, pp. 283-297.

D'Aloya M. G., Pacchioni A. R., Rizzi B., *Analisi storica dei programmi di matematica*, Atti del Convegno *La matematica nell'educazione*, Monopoli 27-30 Aprile 1981, Roma, Tip. Lucani, vol. II, pp. 87-108.

Di Bello G., Mannucci A., Santoni Rugiu A., *Documenti e ricerche per la storia del Magistero*, Firenze, Manzuoli, 1980.

Di Palma W., Bovi T., Maracchia S., *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis Centenario 1895-1995". Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Roma, Fratelli Palombi, 1996

Di Sieno S., *Storia e didattica*, in *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, 1998, pp. 765-816.

Fenaroli G., *Libri di testo di calcolo delle probabilità tra '800 e primo '900*, in *Conferenze e seminari 2000-2001*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 2001, pp. 179-197.

Fiocca A., Pepe L., *L'insegnamento della matematica nell'Università di Ferrara dal 1771 al 1942*, Firenze, Olschki, 1989.

Folisi E., Londero B., Parlamento F., Tamburlini F. (a cura di), *Quintino Sella Regio Commissario Straordinario in Friuli, 1866*, Atti del convegno di studi, Udine 27 e 28 settembre 2001, Accademia Udinese di Scienze Lettere e Arti, Udine, Tipografia Pellegrini - Il cerchio, 2001.

Frajese A., *Da Euclide a Choquet?*, «Archimede», 1968, 20, pp. 113-119.

Frajese A., *L'opera storico-didattica di Federigo Enriques*, «Archimede», 23, 1971, pp. 232-240.

Freguglia P., *Giuseppe Peano e la didattica della matematica*, in Di Palma, Bovi, Maracchia 1996, pp. 153-155.

Furinghetti F., Somaglia A., *Giornalismo matematico 'a carattere elementare' nella seconda metà dell'Ottocento*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 1992, 15, pp. 815-852.

FURINGHETTI F., *La didattica della matematica nei congressi internazionali (1897-1936)*, «Lettera PRISTEM», 13, 1994, pp. 24-30.

FURINGHETTI F., *La partecipazione italiana all'attività dell'ICMI*, «Lettera PRISTEM», 15, 1995, pp. 30-33.

FURINGHETTI F., *Les mathématiques dans l'enseignement secondaire supérieur en Italie: une réforme par siècle* , in B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin (a cura di), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris, Vuibert - INRP, 1996, pp. 259-272.

FURINGHETTI F., *La tradizione italiana nell'insegnamento della geometria*, «La Matematica e la sua Didattica», 1998, 2, pp. 176-198.

FURINGHETTI F., *Il* Bollettino della Mathesis *dal 1909 al 1920: pulsioni tra temi didattici internazionali e nazionali*, in BOLONDI 2002, pp. 31-58.

FURINGHETTI F., SOMAGLIA A., *Emergenza della didattica della matematica nei primi giornali matematici italiani*, in D. Moreira, J.M. Matos (organização de), *História do ensino da Matemática em Portugal*, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005, pp. 59-78.

GARIO P., *Guido Castelnuovo e il problema della formazione dei docenti di matematica,* Studies in the History of Modern Mathematics, V , Suppl. «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 74 , 2004, pp. 103-121.

GARIO P., *Quali corsi per il futuro insegnante? L'opera di Klein e la sua influenza in Italia,* «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, 2006, IX-A, pp. 131-141.

GARIO P., *Quali corsi per il futuro insegnante? I congressi dei professori di matematica,* «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII (in stampa).

GATTO R., *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in M. Menghini (a cura di), *La corrispondenza di Luigi Cremona*, III, Quaderni PRISTEM, Milano, Università Bocconi, 1996, pp. 7-90.

GATTO R., *Storia di una "anomalia". Le facoltà di scienze dell'Università di Napoli tra l'unità d'Italia e la riforma Gentile, 1860-1923*, Napoli, Fridericiana Editrice Universitaria, 2000.

GATTO R., *Il carteggio Betti - Cremona presso la Scuola Normale di Pisa,* in F. Palladino (a cura di), *La corrispondenza epistolare tra matematici italiani dall'Unità d'Italia al Novecento,* Napoli, Vivarium, 2004, pp. 61-80.

GAVAGNA V., *Cesare Arzelà e l'insegnamento della matematica,* «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XII.2, 1992, pp. 251-277.

GIACARDI L., *Gli "Elementi" di Euclide come libro di testo. Il dibattito di metà Ottocento in Italia,* in *Conferenze e seminari 1994-1995,* Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1995, pp. 175-188.

GIACARDI L., *Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati,* «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, 1999, III-A, pp. 317-352.

GIACARDI L., *"Educare alla scoperta". Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero,* «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, 2003, VI-A, pp. 141-164.

GIACARDI L., *L. Cremona, G. Vailati e C. Segre. Tre diversi approcci al problema dell'insegnamento della matematica fra '800 e '900,* Atti XXIII Congresso UMI-CIIM (Loano 3-5.10.2002), 2003, pp. 63-75.

GIACARDI L., *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento,* in G. Chiosso (a cura di), *TESEO, Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento,* Milano, Editrice Bibliografica, 2003, pp. XCVII-CXXIII.

GIACARDI L., *From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867-1923). Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy,* «Paedagogica Historica. International Journal of the History of Education», (in stampa)

GIACARDI L., ROERO C.S., *La nascita della Mathesis (1895-1907),* in L. Giacardi, C.S. Roero (a cura di), *Dal compasso al computer*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1996, pp. 7-49.

GIUSTI E., PEPE L., *La matematica in Italia, 1800-1950,* Firenze, Edizioni Polistampa, 2001.

Gliozzi M., *Storia dei programmi d'insegnamento scientifico nella scuola popolare*, «Cultura popolare», 1964, 36, pp. 295-312.

Grugnetti L., *Lineamenti della storia della didattica matematica in Italia dal 1859 al 1950*, «Archimede», 37, 1985, pp. 28-44.

Guerraggio A., Nastasi P., *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1943*, Torino, Bollati Boringhieri 1993.

Guerraggio A., *I primi anni [della Mathesis]*, in Bolondi 2002, pp. 1-29.

Howson A.G., *Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction*, «Educational Studies in Mathematics», 15, 1984, pp. 75-93.

Israel G., *Federigo Enriques e il ruolo dell'intuizione nella geometria e nel suo insegnamento*, in F. Enriques, U. Amaldi, *Elementi di geometria*, Pordenone, Studio Tesi 1992, pp. IX-XX1.

Israel G., *Vito Volterra e la riforma scolastica Gentile*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Sez. A, s. VIII, 1998, I-A, pp. 269-287.

La Teana F., *F. Enriques e la riforma Gentile*, in AaVv, *La ristrutturazione delle scienze tra le due guerre mondiali. I. L'Europa*, Roma, La Goliardica, 1984, pp. 303-314.

Londero B., *Friuli 1866: la politica scolastica di Quintino Sella*, in Folisi, Londero, Parlamento, Tamburlini 2001, pp. 139-167.

Lucia U. *L'insegnamento della matematica nella Riforma scolastica di Paolo Boselli del 1909*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 28.4, 2005, pp. 307-332.

Mammana C., *L'insegnamento della geometria nella scuola media*, «L'educazione matematica», Supplemento 2, 1981, pp. 24-49.

Mammana C., *La storia della didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni*, «Bollettino Acc. Gioenia, Sci. Nat.», 25, 1992, pp. 195-210.

Mammana C., *I "Grundlagen der Geometrie" e i libri di testo di geometria in Italia*, in «Le Matematiche», Supplemento 1, 55, 2000, pp. 225-251.

Mammana C., Tazzioli R., *The Mathematical School in Catania* *at the beginning of the 20.th Century and its Influence on Didactics,* Proceedings I*, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, Louvain, 2001, pp. 223-232.

Manara C. F., *La Mathesis nel primo dopoguerra*, in Di Palma, Bovi, Maracchia 1996, pp. 67-71.

Manara C. F., *Giuseppe Peano ed i fondamenti della geometria*, in Atti del Convegno *Peano e i fondamenti della geometria*, Modena, 22-24 ottobre 1991, Modena, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, 1993, pp. 171-184.

Maracchia S., *Cent'anni fa: il ritorno di Euclide*, «Cultura e scuola», 1967, 6, pp. 237-241.

Maracchia S., *Storia dell'insegnamento matematico nella scuola italiana*, Corso di aggiornamento sulla matematica moderna, Provveditorato agli studi di Siena, Siena, 1972, pp. 185-195.

Maracchia S., *Cento anni di Mathesis*, in Di Palma, Bovi, Maracchia 1996, pp. 13-17.

Maracchia S., *Sviluppi e mutamenti nei programmi della geometria in Italia*, «La Matematica e la sua Didattica», 1998, 1, pp. 45-66.

Maraschini W., Menghini M., *Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria*, «L'Educazione Matematica», 1992, 13.3, pp. 161-180.

Marchi M., *Confronto tra i sistemi assiomatici di Peano e di Hilbert in geometria*, in M. Ferrari, F. Speranza (a cura di), *Epistemologia della Matematica, Seminari 1992-93*, Quaderno 14, 1994, pp. 11-30.

Marchionna Tibiletti C., *Breve storia della "Mathesis"*, «Periodico di matematiche», s. V, 1979, 55, pp. 81-87.

Menghini M., *Die euklidische Methode im italienischen Geometrieunterricht seit 1867*, in *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften*, Band I: *Mathematik*, Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, Deutscher Studien Verlag, Weinheim 1994, pp. 138-151.

Menghini M., *Klein, Enriques, Libois: variazioni sul concetto di invariante*, Prima e seconda parte, «L'Educazione Matematica», n. 2, 1998, pp. 100-109 e n. 3, pp. 159 - 180.

Menghini, M., *The Euclidean method in geometry teaching,* in Jahnke H.N., Knoche N., Otte M. (editors) *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences,* Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1996, pp. 195-212.

Menghini, M., *The institutional and educational role of Projective Geometry at the end of the 19th century* (in stampa).

Micale B., *Esercitazioni matematiche: una rivista ad uso degli studenti universitari,* «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 15.6, 1992, pp. 573-587.

Minazzi F., *Vailati e la scuola italiana,* in M. De Zan (a cura di), *I mondi di carta di Giovanni Vailati,* Milano, Franco Angeli, 2000, pp. 223-251.

Moretti M., *Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923),* in F. Enriques, *Insegnamento dinamico,* a cura di M. Moretti, F. Ghione, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, 2, La Spezia 2003, pp. 15-91.

Nastasi P., *La Mathesis e il problema della formazione degli insegnanti,* in Bolondi 2002, pp. 59-119.

Nastasi P. (a cura di), *Le "Conferenze Americane" di Felix Klein,* Pristem/Storia 3-4, Milano, Springer-Verlag Italia, 2000.

Natucci A., *L'evoluzione dell'insegnamento della matematica elementare nell'ultimo secolo,* «Giornale di matematiche», s. 6, 1965-67, 2, pp. 160-172.

Parlamento F., *L'istruzione superiore in Friuli. Il contributo di Quintino Sella,* «Notiziario dell'Università di Udine», 3, 1998, pp. 23-24.

Parlamento F., *La politica della scienza di Quintino Sella e l'istruzione superiore in Friuli,* in Folisi, Londero, Parlamento, Tamburlini 2001, pp. 169-187.

Pepe L., *Giuseppe Vitali e la didattica della matematica,* «Archimede», 35, 1983, pp. 163-176.

Pepe L., *Note e documenti per una storia di programmi di matematica delle Scuole elementari italiane* (1859-1985), «L'Educazione Matematica», s. 2, 1, 1986, pp. 47-81.

Pepe L., *I matematici bolognesi fra ricerca avanzata e impegno civile, 1880-1920,* «Archimede», 46, 1994, pp. 19-32.

PEPE L., *Per una storia degli insegnamenti matematici in Italia*, in S. Invernizzi (a cura di), *Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della matematica in ricordo di Giovanni Torelli*, Trieste, Università degli Studi, 1996, pp. 101-116.

PEPE L., *Università o Grandes Ecoles: il Piano Mascheroni e il dibattito al gran Consiglio della Repubblica Cisalpina*, in A. Romano (a cura di), *Università in Europa*, Atti del convegno internazionale di studi, Catanzaro, Rubettino, 1995, pp. 511-523.

PEPE L., BLANCO L., *Stato e pubblica istruzione. Giovanni Scopoli e il suo viaggio in Germania (1812)*, «Annali Ist. Stor. Ital-Germ.», 21, 1995, pp. 101-116.

PEPE L., *La matematica e i suoi insegnanti. Qualche considerazione storica*, in Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, a cura di G. Lucchini, F. Mercanti, L. Tallini, Mantova, 2002, pp. 1-18.

POMPEO FARACOVI O. (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte Editore, 1982.

PIZZAMIGLIO P. L., *Gli Elementi di Euclide: storia di un manuale scolastico*, «L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate», 10, 1987, pp. 1165-1196.

ROERO C.S., *Alcune iniziative nella storia della Facoltà di Scienze MFN di Torino per promuovere la cultura matematica fra gli insegnanti: le Scuole di Magistero, l'operato di Peano, il Centro di Studi Metodologici*, in *Conferenze e Seminari 1998-1999*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1999, pp. 188-211.

ROERO C.S., *Peano e l'altra metà del cielo*, in C. S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano. Matematica, cultura e società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001, pp. 60-77.

SANTONI RUGIU A., *Il professore nella scuola italiana*, Firenze, La Nuova Italia, 1959.

SCALITI M., *Mathesis e mondo della scuola cent'anni fa. Problematiche e dibattiti*, in *Conferenze e seminari 1995-1996*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1996, pp. 170-178.

SCHUBRING G., *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein*, in

D. Rowe, J. McCleary (editors), *The History of Modern Mathematics*, London, Academic Press, 1989, vol. II, pp. 170-220.

Schubring G., *Euklid versus Legendre in Italien*, in *Mathematik erfahren und lehren*, Festschrift für Hans-Joachim Vollrath, Hrsg. Günter Pickert, Ingo Weidig, Stuttgart, Klett 1994, 188-194.

Schubring G., *Analysis of historical textbooks in mathematics*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 1997, anche *Análise Histórica de Livros de Matemática. Notas de Aula*, Campinas, Editora Autores Associados, 2003.

Schubring G., *Neues über Legendre in Italien*, «Algorismus» 44, 2004, pp. 256-274.

Schubring G., *Il primo movimento internazionale di riforma dell'insegnamento della matematica: Felix Klein e il caso degli Stati Tedeschi*, in *Conferenze e Seminari*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, (in stampa).

Siriati L., *Testi scolastici di geometria del decorso secolo*, «Periodico di matematiche», 26, 1948, pp. 65-73, 129-132, 27, 1949, pp. 65-72, 133-139.

Talamo G., *La scuola dalla Legge Casati alla inchiesta del 1864*, Milano, Giuffré, 1960.

Tazzioli R., *La matematica a Catania: dal Circolo matematico al secondo dopoguerra*, in C. Dollo (a cura di), *Per un bilancio di fine secolo. Catania nel Novecento*, Catania, 2002, pp. 95-112.

Tazzioli R., Becchere M., *Il concetto di volume nei libri di testo: una analisi storico-critica nell'ambito dell'evoluzione dei programmi (1867-1986)*, «L'educazione matematica», s. VI, 2, 2000, pp. 102-115.

Tomasi T., *La questione educativa nell'opera di Enriques*, in Pompeo Faracovi 1982, pp. 223-250.

Tonelli A., *L'istruzione tecnica e professionale di stato nelle strutture e nei programmi da Casati ai giorni nostri*, Milano, Giuffré, 1964.

Tricomi F., *Essenza e didattica delle Matematiche in un manoscritto* *inedito di Corrado Segre*, «Rendiconti Sem. Mat. e Fis.», Torino, 7, 1938-40, pp. 101-117.

ULIVI E., *Mode didattiche: il fusionismo*, «Archimede», 29, 1977, pp. 211-216.

ULIVI E., *L'insegnamento dell'algebra elementare: il Clairaut*, «Archimede», 32, 1980, pp. 130-135.

ULIVI E., *Sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria dalla legge Casati alla riforma Gentile: la Sezione fisico-matematica*, «Archimede», 1978, 30, pp. 167-182.

VARETTO T., *Corrado Segre e il problema della formazione degli insegnanti*, in *Conferenze e seminari 1994-1995*, Associazione Subalpina Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1995, pp. 179- 190.

VIOLA T., *Didactique sans Euclide et pédagogie euclidienne*, «L'Enseignement mathématique», s. II, 10, 1964, pp. 5-27.

VITA V., *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unita d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica*, Bologna, Pitagora, 1986.

VITA V., *La didattica della geometria nella scuola secondaria e la sua evoluzione storica*, «Archimede», 42, 1990, pp. 74-79.

VITA V., *L'insegnamento della geometria in una proposta di Giovanni Vailati*, «L'Educazione Matematica», 13, 1992, (2), pp. 71-84.

VITA V., *La Mathesis e i programmi di matematica per le scuole secondarie*, in DI PALMA, BOVI, MARACCHIA 1996, pp. 118-123.

Cd-Rom

Guido Castelnuovo. Lettere, CD-Rom 1-3, a cura di P. Gario, Milano 1999-2001

I Quaderni di Corrado Segre, a cura di L. Giacardi, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002.

L'Archivio Giuseppe Peano, a cura di C. S. Roero, N. Nervo, T. Armano, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002.

L'Opera Omnia di Giuseppe Peano, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002.

Guido Castelnuovo. Quaderni delle lezioni, CD-Rom 1-6, a cura di P. Gario, Milano 2001-2003.

Le Riviste di Giuseppe Peano, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2003.

Siti

http://www.dm.unito.it/mathesis/documenti.html
Raccoglie documenti rilevanti (provvedimenti legislativi, resoconti dei congressi della Mathesis, programmi, tabelle delle materie e degli orari, articoli di tipo metodologico di particolare interesse, ...) per la storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia dal 1859 al 1923.

http://www.scienzeformazione.unipa.it/cire/materiali/matesto/matesto1/ipotesi/index.htm
Raccoglie leggi e decreti dello Stato Italiano relativi alla Scuola di Magistero e alla formazione degli insegnanti

http://www.uni-bielefeld.de/idm/geschichte.html
Contiene informazioni sulle iniziative internazionali (pubblicazioni e convegni) relative alla storia dell'insegnamento della matematica e la prima *International Bibliography on the History of Teaching and Learning Mathematics.*

GLI AUTORI

MARIA TERESA BORGATO
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara, via Machiavelli, 35, 44100 Ferrara
bor@unife.it

ALDO BRIGAGLIA
Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo, via Archirafi 34, 90123 Palermo
brig@math.unipa.it

SIMONETTA DI SIENO
Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università di Milano, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano
Simonetta.DiSieno@mat.unimi.it

ORNELLA POMPEO FARACOVI
Centro Studi Enriques, Villa Henderson, via Roma 234, 57100 Livorno
http://www.centrostudienriques.it/

FULVIA FURINGHETTI
Dipartimento di Matematica, Università di Genova, via Dodecaneso 35, 16146 Genova
furinghe@dima.unige.it

PAOLA GARIO
Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università di Milano, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano
Paola.Gario@mat.unimi.it

LIVIA GIACARDI
Dipartimento di Matematica, Università di Torino, via Carlo Alberto 10, 10123 Torino
livia.giacardi@unito.it

Erika Luciano
Dipartimento di Matematica, Università di Torino, via Carlo Alberto 10, 10123 Torino
erikaluciano@hotmail.com

Luigi Pepe
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara, via Machiavelli, 35, 44100 Ferrara
pep@unife.it

INDICE DEI NOMI

Abel Niels H. 71n, 250
Agostinelli Cataldo 302
Agostini Amedeo 65n
Alasia Cristoforo 223n
Alfan De Rivera Carlo 84n
Alfaro Gaetano 83
Allio Renata 271n
Amaduzzi Ruggero 305n
Amaldi (ispettore ministeriale) 295, 296
Amaldi Ugo 9, 11, 11n, 45, 138, 160, 231, 231n,313
Amanzio Domenico 280n
Ambrosoli Luigi 16n, 17n, 62n, 387
Amiot A. 96, 97, 98, 101n, 132, 132n, 161, 165, 168, 169
Amodeo Federico 83, 84n, 197, 269n
Andrade Jules 39n
Andreini Carlo 80n
Andri Adriano 51n, 387
Andriani Angelo 136, 145
Angeleri Francesco 150
Angeloni Domenico 84
Apollonio 277
Archenhold Friedrich Simon 39n
Archimede 73, 76, 78, 79, 80, 85, 138,140, 210, 277, 278n, 290n, 328, 351
Armano Tiziana 269n, 400
Armenante Angelo 184
Artigue Michele 19n
Âryabhatta 295
Arzarello Ferdinando XIII, 193n, 203n, 277n, 388
Arzelà Cesare 13, 13n, 18, 136, 267, 393
Ascoli Giulio 197, 267
Audisio Fausta. 290n
Ausejo Elena 226n
Avellone Maurizio 388

Baccelli Guido 31n
Bachet de Méziriac Claude 283n, 288, 291
Bagnera Giuseppe 197
Baltzer Richard 132, 132n
Barbieri Francesco 90n, 209n, 226n
Barra Mario 388
Bassani Anselmo 130, 130n, 136, 136n, 137, 138, 141n, 142, 142n, 150, 151n, 203, 229
Battaglini Giuseppe 7, 8, 8n, 204, 219, 225, 236

Battimelli Giovanni 308n
Becchere Maria 398
Beda il Venerabile 290n, 291
Begey Maria 33n
Beke Emanuel 39n, 45, 45n, 47n
Belcastro Alessandro 388
Belhoste Bruno 19n, 392
Bellavitis Giusto 8, 8n, 111, 139, 169, 388
Bellegarde di Enrico 87
Beltrami Eugenio 8, 8n, 163, 211, 211n, 213, 260, 261
Benci Antonio 85
Benedetti Giovanni Battista. 272
Benfereri Carlo 81
Berengo Marino 93n
Bersano Carlo 302
Bertini Eugenio 184, 197, 227, 230
Bertini Giovanni Maria 27n, 28n
Bertolone Mario 220
Bertrand Joseph L. F. (Giuseppe Bertrand) 13, 95, 96, 98, 161, 291n, 300, 300n
Berzolari Luigi 36, 36n, 285n, 288, 389
Besana Luigi 388
Besso Davide 184,185, 237
Bessone Franco XIII
Bettazzi Rodolfo 15,16n, 25, 25n, 26, 26n, 37, 44n, 137, 145, 147, 151, 151n, 197, 201, 201n, 281n, 291n, 298, 298n, 302
Betti Enrico 5n, 6, 6n, 9, 13, 15, 65, 85, 95, 96, 96n, 103n, 107n, 112n, 133, 133n, 160, 161, 168, 171, 182, 202, 236, 392, 393
Bézout Étienne 76
Bianchi Leonardo 26, 239, 240
Biot Jean Baptiste 69, 73
Blanchet Marie Alphonse 6
Blanco Luigi 397
Blaserna Pietro 156
Boezio Severino 288
Boggio Tommaso 271, 302
Bolondi Giorgio 16n, 388, 394, 396
Bolyai (Boljai) Janos 164, 260, 261
Boncompagni Baldassarre 184, 209, 226, 236
Bonola Roberto 36, 36n
Bontà Giambattista 92
Bordiga Giovanni 269n
Bordoni Antonio 93
Borel Emil 39n
Borga Marco 388
Borgato Maria Teresa X, 11n, 66n, 73n, 125, 133, 389, 401
Borio Agostino 269n, 297
Bortolotti Ettore 36, 36n, 65n, 184n, 269n, 290n
Boselli Paolo 27, 27n, 394
Bosna Ernesto 389
Bossut Charles 74, 75, 76, 80, 86, 89, 93
Bottai Giuseppe 1n
Bottasso Matteo 271

Bottazzini Umberto 12n, 67n, 312n, 389
Bovi Tina 190n, 389, 391, 395, 399
Boyle Robert 359
Bretschneider Anton 128, 128n
Brianchon Charles Julien 118, 125, 127, 343
Brigaglia Aldo XI, 5n, 41n, 102n, 159, 388, 389, 401
Brioschi Francesco 6, 6n, 8, 8n, 9, 65, 85, 96, 96n, 102n, 103n, 112n, 160, 162, 162n, 171, 182, 202, 227, 236, 389
Brunacci Vincenzo 75, 76, 77, 78, 78n, 80, 94
Brunn Hermann 266
Brusotti Luigi 44n, 389
Buffa Pietro 296
Burali-Forti Cesare 197, 207, 207n, 282, 286, 286n, 291n, 292, 292n, 293, 293n, 294n, 295, 296, 296n, 300n, 302
Burnengo Giuseppe 221
Bussotti Paolo 317n
Bustelli Antonio Maria 145, 148, 148n

Cagnoli Antonio 76, 77, 80, 81
Cagnoli Ottavio 80
Cairoli Adelaide 121
Cairoli Benedetto 124, 171
Cairoli Enrico 171
Cajori Florian 214, 278n,
Calleri Paola 8n
Caminati Pietro 237
Campedelli Luigi 48n, 389
Candido Giacomo 10n, 130, 130n, 151, 184, 184n
Canepa Giuseppe 388
Canestri Giorgio 2n, 103n, 105n, 109n, 389
Cannizzaro Stanislao 65
Canovai Stanislao 76
Cantor Georg 197, 199, 199n
Cantor Moritz 297, 297n
Caparrini Sandro XIII, 289n
Capelli Alfredo 197, 200, 219
Caracciolo Alberto 305n
Carafa Andrea 92
Carathéodory Constantin 266
Caravelli Vito 87, 87n
Carbone Luciano 106n, 213n
Cardone Giuseppe 389
Carlebach Joseph 233n
Carnot Lazare 71, 97, 132
Carruccio Ettore 289n
Casati Gabrio X, 1, 2, 2n, 3n, 63, 103n, 131, 383, 389, 398, 399
Casorati Felice 65
Cassiani Paolo 80, 81
Cassina Ugo 198n, 208, 208n, 269n, 270n, 289, 289n, 302
Castagnola Stefano 13, 109
Castellano Filiberto 188
Castelnuovo Emma XIII, 40, 40n, 389, 390
Castelnuovo Guido XI, 12n, 15, 16n, 24n, 25, 37, 37n, 38-46, 51n, 54, 55, 62, 63n,

159, 171, 172-178, 181n, 219, 239-258, 287, 306, 311, 390, 392, 400
Catania Sebastiano 45, 45n, 286, 286n, 287, 287n, 291n
Cattaneo Carlo162, 163n, 171
Cattaneo Paolo 221
Cattelani Degani Franca 90n, 209n, 226n
Cauchy Augustin L., 283n
Cautiero Mariella 390
Cavalieri Bonaventura 278n
Cavallaro Vincenzo G. 183n, 222
Cavallera Herve A. 317n
Cavezzali Alberto 184, 237
Cavour Camillo Benso conte di 65
Cayley Arthur 101, 261
Cecchetto Mario XIII
Cerruti Valentino 17n, 18, 191, 280
Cesaro Ernesto 197, 200, 220
Chailan E. 131, 131n
Chanchenotte 130
Chaptal Jean 67
Charnitzki Jürgen 54n, 313n, 390
Chasles Michel 97, 101, 101n, 125, 126n, 139, 140
Chelucci Paolino (Paolino da San Giuseppe) 80, 82
Chinaglia Piera, 290, 290n
Chini Mineo 43
Chiosso Giorgio 10, 65n, 106n, 393
Chisini Oscar 269n
Choquet Gustave 391
Ciamberlini Corrado 269n, 291n, 292, 298, 298n, 302
Ciani Edgardo 230
Ciampi Gabriella 390
Ciarrapico Lucia XIII, 389
Cipolla Michele 269n, 280
Clairaut Alexis C. 76, 84, 86, 399
Claparède Edouard 216n
Clebsch Rudolf Alfred 211, 211n, 12n, 232n
Clifford William Kingdon 262
Cohen Luisa 312n
Colecchi Ottavio 83
Compagnoni Giuseppe 93
Condorcet Marie Jean A. 68
Consalvi Ercole 88
Conte Alberto 8n, 12n, 106n
Conti Alberto 39n, 185, 195, 196, 221, 223, 224, 224n, 225, 225n, 227, 233, 241, 314n, 390
Coppino Michele 3, 4, 27n, 28n, 124, 325
Coray Daniel 193n, 390
Corbino Orso Maria 254
Corridi Filippo 94, 95
Cotes Roger 342
Cotta Johann Georg 110n
Couturat Louis, 276n
Cozzolino Cremona Itala 122n, 123n
Cramer Gabriel 263
Credaro Luigi 43, 252

Cremona Luigi X, XI, 3, 5, 5n, 6, 6n, 8, 8n, 15, 65, 96, 96n, 97, 99-124, 132, 132n, 133, 138, 139n, 159-173, 177, 206, 218, 244, 389, 392, 393
Cremona Tranquillo 124
Croce Benedetto 61, 254n, 320

D'Aloya Maria Giuseppina 391
D'Andrea Carlo 85
D'Ovidio Enrico 9, 9n, 10, 10n, 15, 134, 134n, 138, 143, 213
Dal Pra Mario 314n
Dalé Marina 390
Darboux Gaston 19
De Amicis Enrico 145, 150, 151, 151n, 152, 156
De Benedetti Andrea 312n
De Franchis Michele 9, 11, 11n, 134, 138, 287n
De Galdeano Zoel Garcia 39n
De Giorgi Ennio 179
De Luca Ferdinando 83, 84
De Maria Michelangelo 308n
De Moivre Abraham 342
De Montel Enrico 184
De Paolis Riccardo 9, 10, 10n, 15, 131, 134, 134n, 135, 136, 138, 141n, 143, 143n, 144n, 388
De Sanctis Francesco 65
De Sanctis L. 184
De Sinno G. B. 92
De Zan Mauro 396
De Zolt Antonio 135, 145
Dedò Modesto 390
Dehn Max 257
Del Ricco Gaetano 76
Dell'Aglio Luca 226n, 390
Desargues Girard 118, 153, 154, 155, 343
Descartes René 294
Dewulf Eugène E. D. 110n
Dhombres Jean 68n
Di Bello Giulia 61n, 391
Di Biasio Aldo 84n
Di Ciò Anselmo 85
Di Palma Wilma 190n, 389, 391, 395, 399
Di Sieno Simonetta 5n, 99, 213n, 252n, 276n, 391, 401
Di Stefano M. Elena 226n, 233n
Dickstein Samuel 297n
Dini Ulisse 45
Diofanto 249
Dirichlet P. G. Lejeune 71, 71n
Dollo Corrado 398
Duhamel J. M. Charles 10, 10n, 135
Dupin Charles 94, 140, 264, 267

Emanuele Filiberto 272n
Eneström Gustaf 197, 209, 211, 211n
Enriques Federigo XII, 9, 11, 11n, 12n, 16, 16n, 24, 24n, 25, 39, 39n, 45, 48, 48n, 49n, 50, 50n, 54, 55, 55n, 56, 56n, 57n, 58, 58n, 65n, 97, 138, 150, 159, 160, 172, 178, 219, 227, 231, 231n,

232, 240, 241, 242, 255, 269n, 285n, 305-321, 389, 390, 391, 394, 395, 396, 397
Euclide 1-9, 66n, 70, 76, 77, 78, 82, 85, 96, 96n, 97, 106, 107, 110, 133n, 135, 140, 143, 160, 163, 171, 202n, 206n, 210, 215, 232, 260, 272, 272n, 274, 277, 278n, 284n, 326, 327, 328, 330, 351, 389, 391, 393, 395, 397, 398
Euler Leonhard (Eulero) 76, 86, 93, 267, 278n, 355

Faifofer Aureliano 9, 10, 15, 134, 134n, 135, 140
Fano Gino 19, 20n, 24, 24n, 25, 51, 189n, 197
Faracovi Pompeo Ornella XII, XIII, 48n, 57n, 305, 312n, 397, 398, 401
Farias Tommaso 83
Favaro Antonio 65n, 197, 209, 209n
Fazzari Gaetano 210, 237
Fehr Henri 39n, 216n, 228, 240
Fenaroli Giuseppina 13n, 388, 391
Fenoglio Lorenza 8n
Fergola Nicola 85, 86, 201
Fermat Pierre de 71n, 370
Ferrari Elisa 122, 123, 124, 163
Ferrari Mario 388, 395
Ferrari Nicola 121, 122, 123
Ferrari Napoleone 122, 123
Ferrero Clementina 290, 290n
Ferrucci Antonio 95
Festa Nicola 278n
Fibonacci Leonardo 288
Fiocca Alessandra 391
Flauti Vincenzo 85, 87
Flournoy Théodore 216n
Fornaciari Paolo E. 312n
Folisi Enrico 391, 394, 396
Forti Angelo 8, 8n,
Fossombroni Vittorio 88, 94
Fraccaro Erika 102n, 120
Frajese Attilio 221n, 391
Franciosi Marco 388
Franchini Pietro 89, 90, 90n
Franci Raffaella 212n
Francoeur Louis B. 91, 91n
François Giuseppe 94
Frasca Spada Marina 226n, 233n
Frattini Giovanni 136, 141n, 145, 151, 207, 223, 224
Frege Gottlob 197, 199, 199n, 200, 200n
Freguglia Paolo XII, 190n, 226n, 233n, 284n, 287n, 388, 391
Frisone Rosetta 271n
Frobenius Georg F. 266
Fu-hi 284n
Furinghetti Fulvia XI, 9n, 25n, 181, 183n, 184n, 187n, 189n, 193n, 196n, 215n, 216n, 219n, 228n, 388, 390, 391, 392, 401
Furlani Giacomo 52n

Gaeta Giovanni 85
Gagliani Michele 86
Galilei Galileo 63, 76, 78, 210, 278n, 307, 316, 361
Galletti Alfredo 30, 30n, 314n
Gallo Nicolò 31n, 35n
Gallucci Generoso 37
Galois Evariste 212n, 250
Galuzzi Massimo 213n, 388
Garbasso Antonio 306n
Garbolino Laura XIII
Garibaldi Giuseppe 65, 120, 171
Gario Paola XI, 12n, 16n, 20n, 42n, 61n, 239, 243n, 254n, 257n, 258n, 392, 400, 401
Gasbarri Giuseppe 94
Gatto Romano 5n, 6n, 96n, 103n, 107n, 112n, 392, 393
Gaultier Aloïsius E. C. 137, 140
Gauss Carl F. 260, 341
Gavagna Veronioca 14n, 393
Gazzaniga Paolo 11n, 145, 282, 282n, 291n
Genocchi Angelo 8, 8n, 45, 106, 106n, 171, 182, 213, 236
Genovesi Giovanni 389
Gentile Giovanni X, XII, 1, 1n, 3n, 53, 54-57, 59, 61, 62n, 63, 63n, 178, 300, 305-321, 377, 385, 392, 393, 394, 399
Gerbaldi Francesco 191, 199, 269n, 280
Gergonne Joseph D. 97, 127, 127n, 140
Gerla Giangiacomo 390
Geymonat Ludovico 192, 192n, 197, 197n, 208n
Ghione Franco 48n, 315n, 396
Ghizzetti Aldo 195, 195n
Giacardi Livia IX, X, XIII, 1, 4n, 7n, 8n, 10n, 16n, 32n, 35n, 65n, 106n, 145n, 203n, 213n, 228n, 277n, 301, 393, 400, 401
Gigli Duilio 285n, 389
Gili Domenica 302
Gioberti Vincenzo 65
Gioia Melchiorre 93
Giorgini Gaetano 88, 94
Gispert Hélène 19n, 193n, 390, 392
Giudice Francesco 24, 137, 140, 145, 148, 148n, 151, 151n, 197, 200, 229, 229n, 280n
Giusti Enrico XIII, 393
Gliozzi Giuliano 289n
Gliozzi Mario 269n, 270n, 273n, 289, 289n, 394
Godfrey Charles 39n, 206n
Gonella Giovanni Battista 221
Gordan Paul A. 230
Gorini Giovanni 93
Grandi Guido 76, 77, 80, 80n, 82
Grassi Enrico 221, 222
Grassmann Hermann 101, 169
Grattan-Guinness Ivor 67n, 91n, 188n, 189n
Greenhill Alfred G. 240

Greenstreet William John 297n
Gremigni Michele 202, 202n, 203
Grugnetti Lucia 394
Guccia Giovanni Battista 236
Guerraggio Angelo 54n, 193n, 213n, 252n, 276n, 306n, 388, 394
Guidi Filippo M. 70, 91
Guldin Paul (Guldino) 343
Gutzmer August 21n, 39n, 241, 241n

Hachette Jean Nicolas P. 71
Hadamard Jacques 216, 267
Hamilton William Rowan 169
Heath Thomas 230n
Helmholtz Hermann von 261
Herbart Johann F. 152n
Herre Franz 88n
Hilbert David 11, 154, 154n, 206n, 257, 267, 389
Hodgson Bernard R. 193n, 390
Hormigón Mariano 226n
Hoüel Jules 6n, 8n, 10n, 184n
Houzeau Jean Charles 288
Howson Albert Geoffrey 206n, 218n, 394
Høyrup Jens XIII
Hulin Nicole 19n, 392
Ibn Albanna, 288

Ingrami Giuseppe 138
Invernizzi Sergio 66n, 397
Israel Giorgio 63n, 394

Jacobi Carl Gustav 71, 71n, 101, 267
Jahnke Hans Niels 396
Janni Vincenzo 236
Joteyko Jozefa 234n
Jourdain Philip 197

Kant Immanuel 319
Katz Victor 8n
Kennedy Hubert C. 199n, 200n
Kepler Johannes 165, 366
Kasner Edward 264
Klein Felix 12, 12n, 19-26, 34, 39, 47, 50, 137, 205, 205n, 206, 214, 215, 216, 218, 218n, 226, 2409, 241, 244, 257, 257n, 261, 263, 392, 395, 396, 397
Knoche Norbert 396
Krazer Adolf 193n

L'Hospital Guillaume F. 86
La Teana Francesco 57n, 308n, 394
Lacaille Nicolas Louis 76
Lacaita Carlo G. 99n, 102n, 389
Lacroix Sylvestre F. 68, 69, 70, 74, 81, 86, 93, 95
Lagrange Joseph Louis 70, 73n, 74, 76, 86, 89, 249, 250, 278n
Laisant Charles-Ange 32n, 130, 131, 131n, 228, 297n
Lana Francesco 273n
Lanaro Giorgio 275n, 285n, 314n
Langins Janis 68n

Laplace Pierre Simon de 70
Lazzeri Giulio 15, 130, 130n, 136, 136n, 137, 138, 140, 141n, 142, 142n, 145, 148, 148n, 149, 149n, 150, 151n, 197, 202, 203, 229, 237, 239, 239n
Lebesgue Henri 257
Legendre Adrien Marie 6, 6n, 70, 71, 71n, 72, 73, 73n, 74, 84, 85, 91, 93, 95, 98, 132, 229, 267, 398
Leibniz Gottfried Wilhelm 275n, 284n, 290n
Lenzi Sergio 68n
Leoncini Michele 286n
Leonelli Zecchini Giuseppe 341
Leopoldo II 88
Leudesdorf Charles 110n
Levi Beppo 35, 229
Libois Paul 395
Lie Sophus 261
Lindemann C. Ferdinand 265
Liouville Joseph 140, 264, 265
Lipschitz Rudolf 136
Lobačevskij Nikolai (Lobatschefski) 164, 260, 261
Löffler Eugen 278n
Lombardo Radice Lucio 280
Londero Bruno 391, 394, 396
Loria Gino XI, 24n, 25, 45n, 65n, 133n, 151, 151n, 181, 182n, 184, 186, 187, 193, 193n, 200, 200n, 201, 201n, 202n, 208-236, 300n, 390
Lucchini Gabriele 397
Lucia Umberto 394
Luciano Erika XII, 14n, 284n, 269, 401
Lugli Aurelio 146, 152
Luvini Giovanni 98

Mac Laurin Colin 283n
Maccaferri Eugenio 222
Mahistre Gabriel Alcippe 128
Malara Nicolina 388
Mamiani Terenzio 65
Mammana Carmelo XIII, 10n, 287n, 394
Manara Carlo Felice 395
Mandoi Tommaso 85
Mannucci Andrea 61n
Manzolini Morandi Anna 221
Maracchia Silvio XIII, 190n, 389, 391, 395, 399
Marsico Silvia XIII
Maraschini Walter 395
Marangoni Ardiccio 221
Marchi Mario 395
Marchionna Tibiletti Cesarina 395
Marcolongo Roberto 37
Marie Joseph François 76, 76n, 86, 87
Mariotte Edme 359
Martini Ferdinando 28n
Martini Laura 212n
Mascheroni Lorenzo 89, 93, 397
Massa Giovanni 184, 237

Massa Nicola 83
Matos José Manuel 183n, 392
Matteucci Carlo 65
Maurolico Francesco 220
Mazzini Drago Maria 122, 122n, 123n
Mazzini Giuseppe 65, 120, 122, 122n, 124
McCleary John 20n, 398
Mehmke Rudolf 197
Mellinato Giulio 51n, 387
Menghini Marta XIII, 5n, 9n, 96n, 107n, 114n, 392, 395, 396
Mengotti Francesco 93
Méray Charles 129, 129n, 130, 131, 131n
Mercanti Fabio 213n, 397
Metternich Klemens 88, 88n
Meusnier Jean Baptiste 267
Micale Biagio 396
Michelacci Giacomo XIII
Mannucci A. 391
Micheli Gianni 124n, 388
Mikami Yoshio 233n
Marcolongo Roberto 389
Minarelli Camillo 77
Minazzi Fabio 396
Minding E. Ferdinand 260
Minkowski Hermann 266
Möbius August Ferdinand 95, 97, 137, 140, 169
Močnik Francesco (Moznik) 97, 133, 133n, 160
Modonesi M. 388
Mondolfo Rodolfo 305, 305n
Monge Gaspard 68, 70, 71, 89, 94, 95, 125, 126, 126n, 127, 140
Montferrier Alexandre Sarrazin de 94
Moreira Darlinda 183n
Morera Giacinto 197
Moretti Mauro XIII, 48n, 57n, 315n, 396
Mossotti Ottaviano Fabrizio 65
Mozzoni Andrea 75
Murat Gioacchino 66
Murer Vittorio 140, 150
Mussolini Benito 53

Nannei Enrico 14n, 184n, 221, 285, 285n
Napier John (Nepero) 284, 289
Napoleone Bonaparte 66, 71, 74
Nassò Marco 280n, 282, 291n, 295, 295n, 296, 297, 297n, 302
Nastasi Pietro XIII, 20n, 21n, 54n, 217n, 252n, 276n, 306n, 276n, 394, 396
Natucci Alpinolo 195, 195n, 213n, 221, 280n, 291n, 292, 298, 298n, 302, 396
Navier Claude Louis M. H. 85
Nervo Natalia 269n, 400
Newton Isaac 86, 294n, 366, 369
Noether Emmy 230
Novarese Enrico 188n
Novi Giovanni 95, 96, 132, 132n, 161, 168

Orlando Vittorio Emanuele 18, 155, 156n
Osimo Guido 275n
Otte Michael 396
Oughtred Wilhelm 288, 294

Pacchiani Carlo 293n
Pacchioni Anna Rosa 391
Padoa Alessandro 37, 38n, 156, 156n, 157, 197, 242, 242n, 287n, 288n, 291n, 299n, 302
Pagli Paolo 212n
Pagliero Giuliano 302
Palamà Giuseppe 221
Palatini Francesco 145, 150, 150n
Palladino Dario 388
Palladino Franco 84n, 103n, 106n, 393
Pankurst Silvia 269n
Paoli Pietro 76, 86, 89, 93, 212
Pappo 78
Parshall Karen H. 182n
Pascal Blaise 118, 343, 355
Pascal Ernesto 18, 189n, 197, 201, 202n, 220
Pasch Moritz 11
Peano Giuseppe XI, XII, 11, 13, 14, 14n, 15, 25, 26, 31, 32, 38, 39n, 45, 46, 134, 154, 156, 181, 186, 187-208, 224, 228n, 229n, 237, 269-303, 388, 391, 395
Pepe Luigi X, XIII, 65, 66n, 68n, 73n, 213n, 391, 393, 396, 397, 400, 401
Pellegrino Consolato XIII
Parlamento Franco XIII, 391, 394, 396
Perry John 215, 232, 233
Petronio Giuseppe 305n
Peverone Giovanni Francesco 272, 272n
Pieri Mario 11, 190, 191n, 197, 283, 283n, 284, 285n, 286, 286n, 291n, 388
Pincherle Salvatore 18, 25, 197, 205n, 207n, 227, 241, 242, 242n, 243, 252, 253
Pino Domenico 80
Pinto Luigi 184
Piria Raffaele 65
Pitagora 210, 332, 334, 342, 352
Pizzamiglio Pier Luigi, 397
Pizzardo Tina 290, 290n
Platner Giacomo 6n
Plücker Julius 140, 211, 211n, 232n, 263
Pohlke Karl Wilhelm 344
Poincaré Henri 205, 216
Poncelet Jean Victor 95, 97, 114n, 125, 127, 132, 140
Porro Francesco 188
Porta Francesco 188
Prony Gaspard C. F. M. 91n

Quaranta Mario 32n, 277n, 279n
Quarra Paolina 269n, 290, 290n

Rayleigh Lord (J. W. Strutt) 233
Ramorino Angelo 282, 292, 292n, 293, 293n, 294n, 295, 302
Reggio Giuseppe Zaccaria 138
Retali Virginio 150
Reye Theodor 140
Riboni Gaetano 145
Riccardi Pietro 65n, 90n, 209n, 226n
Riccati Vincenzo 76
Rice Adrian Clifford 182n
Richard Jules Antoine 194
Richards Joan L. 215, 215n
Richeri Ludovico 272
Ricuperati Giuseppe 1, 1n, 2n, 103n, 105n, 109n, 389
Riemann Bernhard 164, 260, 261
Ripert Léon 130n, 138
Rivolo Maria Teresa 90n
Rizzi Bruno 391
Robutti Ornella 35n
Rodriguez F. 184
Rodriguez Giovanni 83, 84
Roero Clara Silvia XIII, 16n, 145n, 187n, 197n, 213n, 269n, 271n, 284n, 289n, 290n, 301, 393, 397, 400
Romagnosi Giandomenico 93
Romano Andrea 397
Romano Lalla 194
Rosati Carlo 59n
Rosati Giuseppe 84
Rossi Arcangelo 308n
Rowe David 20n, 398
Rubini Irene 101n, 120
Rubini Raffaele 7n
Ruffini Paolo 76, 81, 88, 93
Russell Bertrand 188n, 197

Saladini Girolamo 76
Salvemini Gaetano 17, 27, 30, 30n, 31, 305, 305n, 314n
Sammartino Cav. 87
Sannia Achille 9, 9n, 10, 10n, 134, 134n, 138, 143
Sansone Giovanni 59n
Santangeli Claudio 390
Santoni Rugiu Antonio 61n, 391, 397
Saxer Walter 217n
Scaliti Maura 397
Scarantino Luca Maria 314n
Scarpis Umberto 232, 232n
Schapira Hermann 227
Schering Ernst J. 227
Schubring Gert XIII, 4n, 6n, 19n, 20n, 21n, 73n, 193n, 390, 397, 398
Scimone Aldo 276n
Scopoli Giovanni 67, 397
Scorza Gaetano 13n, 39, 60, 60n, 61n, 241, 269n, 287
Segre Corrado 3, 24, 24n, 25, 38, 159, 197, 204n, 227, 228, 228n, 230, 393, 398, 400
Segre Michael 188n
Sella Quintino 104, 391, 394, 396
Serra Umberto 222
Serret Alfred 95, 161

Serret Paul 227
Servois François-Joseph 168
Severi Francesco 3, 15, 16n, 25, 55, 159, 232, 232n, 311, 314n, 317n
Sforza Giuseppe 140, 145, 150, 285n
Sibirani Filippo 197
Silvestri Andrea 102n, 389
Silvestri Giovanni 93
Simi Annalisa 212n
Simon Max 39n
Siriati Lorenzo 398
Skof Fulvia 289n
Smith David Eugene 38n, 39, 39n, 218
Soave Francesco 82
Somaglia Annamaria 9n, 183n, 184n, 215n, 219n, 391, 392
Somigliana Carlo 227
Sonzogno Fratelli 93
Speranza Francesco 388, 395
Spinella Mario 305n
Staudt Karl G. C. von 107, 113, 227
Steen Adolph 128, 128n
Steiner Jacob 95, 97, 107, 132, 140. 266
Stella Anton Fortunato 93
Sterza Angelo 277n, 292n
Stifel Michael 295
Stolz Otto 197
Study Eduard 266
Suppantschitsch Richard 39n
Talamo Giuseppe 2n, 105n, 398
Talete 210
Tallini Luca 213n, 397
Tamburlini Francesca 391, 394, 396
Tartaglia Niccolò 288
Tazzioli Rossana XIII, 10n, 287n, 394, 398
Tchébichef Pafnuti L. (Chebyshev) 226
Teixeira Gomes Francisco 297n
Teone di Smirne 288
Terquem Orly 114n
Terracini Alessandro 213n
Thomson William 140
Timpanaro Sebastiano 269n
Toffoli Francesco 97, 160
Togliatti Eugenio 213n, 222, 269n
Tomasi F. Tina 48n, 57n, 398
Tonelli Aldo 103n, 104n, 266, 398
Torelli Gabriele 204, 204n
Torelli Giovanni 66n, 397
Torelli Luigi 106
Torricelli Evangelista 278n
Tortolini Barnaba 182, 212n, 236
Tramontini Giuseppe 80, 81
Trautvetter R. 110n
Treccani Giovanni 269n
Tricomi Francesco 311, 311n, 398
Trudi Nicola 236

Ulivi Elisabetta 3n, 131n, 399
Vacca Giovanni 197, 269n, 273, 273n, 274, 274n, 275, 275n, 276n, 277n, 278n, 284n, 285n, 289, 289n, 297n
Vailati Giovanni 15n, 26, 27, 31-40, 156, 171, 193, 197, 203, 203n, 219, 231, 232, 241, 248, 270n, 273, 275, 275n, 276n, 277n, 279, 284n, 285n, 289, 296, 296n, 297n, 314n, 390, 393, 396
Vallardi Antonio 93
Vandermonde Alexandre Théophile 71
Varetto Tiziana 399
Vassalli Sebastiano 90
Vassilief Alexandr W. 226
Vecchietti Evagrio 231
Veneroni Emilio 36, 36n
Veronese Giuseppe 9, 11, 11n, 18, 24, 35, 134, 138, 139, 139n, 199, 199n, 390
Verson Adolfo 52n
Vetter Guido 233
Viglezio Elisa 269n
Villari Pasquale 28n
Viola Tullio 4n, 13n, 271n, 273n, 274n, 399
Viriglio Luisa 269n, 271n, 290
Vita Vincenzo 104n, 108n
Vitali Giuseppe 396
Vitelo (Vitellione, Witelo) 168
Vittorio Emanuele II 1
Vivanti Giulio 197, 199, 199n, 200, 201n, 219n, 231, 277n, 285n, 292n, 302, 389
Viviani Vincenzo 133
Voghera Guido 53n
Volpicelli Paolo 92, 92n
Volterra Vito 3, 62, 63n, 181, 181n, 197, 306, 306n, 394

Weierstrass Karl Th. 188n, 267
Wells Herbert George 33n, 277n
Wieleitner H. 218n
Wilson James Maurice 7, 7n

Zappulla Carmela 388
Zavagna Ireneo 302
Zeuthen Hieronymus G. 39n
Zuccheri Luciana XIII

QUESTO VOLUME È STATO COMPOSTO CON I CARATTERI DISEGNATI
DA JOHN BASKERVILLE (1705-1775) NELLA VERSIONE DIGITALIZZATA
DALLA INTERNATIONAL TYPEFACE CORPORATION DI NEW YORK
E STAMPATO PRESSO LA GLOBAL PRINT SRL (MI)
NEL MESE DI LUGLIO DEL 2006