Proprietà contrattive in problemi di ottimizzazione sequenziale con funzione obiettivo uniperiodale non limitata. (now RENDICONTI PER GLI STUDI ECONOMICI QUANTITATIVI, ISSN: 1591-9773)

RENDICONTI

del Comitato per gli studi economici

VOL. XXX/XXXI

LUIGI MONTRUCCHIO - MARIACRISTINA UBERTI

PROPRIETÀ CONTRATTIVE IN PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE SEQUENZIALE CON FUNZIONE OBIETTIVO UNIPERIODALE NON LIMITATA

ESTRATTO

Cafoscarina

PROPRIETÀ CONTRATTIVE IN PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE SEQUENZIALE CON FUNZIONE OBIETTIVO UNIPERIODALE NON LIMITATA*

LUIGI MONTRUCCHIO

MARIACRISTINA UBERTI

Istituto di Matematica Finanziaria, Università di Torino

ABSTRACT In this paper an optimization model is considered: the objective function is a discounted sum of stationary one-period utilities and the dynamic constraints are stationary. By some qualifications for one-period utilities, the original Blackwell contraction theorem is generalized to the cases of unboundless utilities. Moreover, a few economic applications of achieved results are developed.

KEYWORDS Dynamic optimization programming – Control theory – Blackwell contraction theorem – strong concavity.

1. INTRODUZIONE

È ben nota la stretta relazione tra il problema di controllo ottimo a tempo discreto e ad orizzonte infinito

---

* Ricerca parzialmente finanziata con fondi MURST-40%, Gruppo nazionale *Dinamiche non lineari e applicazioni alle scienze economiche e sociali*. Il contenuto della presente nota è frutto dell'elaborazione congiunta degli autori. In particolare, i paragrafi 2 e 3 sono stati curati da M. Uberti mentre i paragrafi 4 e 5 da L. Montrucchio.

$$v(x_0) = \sup_{(x_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\, \beta^t \tag{1}$$
$$x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{dato} \quad x_0 \in X$$

e l'equazione funzionale di Bellman

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} [u(x, y) + \beta\, v(y)] \tag{2}$$

dove X è l'insieme degli stati, $\Gamma : X \to X$ una corrispondenza[1], la funzione $u : \Gamma \to \Re$ è la funzione di guadagno uniperiodale, $x_0 \in X$ rappresenta la condizione iniziale del sistema, il numero $\beta \in (0, 1)$ è il fattore di sconto intertemporale, mentre $v(x)$ è la funzione valore definita sull'insieme delle scelte X. Si sa infatti che, sotto condizioni estremamente generali, la funzione valore $v(x)$ del problema (1) è una soluzione dell'equazione di Bellman (2). Su questi aspetti che costituiscono il fondamento della Programmazione Dinamica rimandiamo, per esempio, a Stokey-Lucas [14] e Montrucchio [11], [13] (si vedano anche [1], [2], [5]).

Un altro risultato importante, dovuto a Blackwell [3] e che sarà l'argomento centrale della presente indagine, riguarda il fatto che la funzione valore di (1) può essere vista come il punto fisso di un operatore contrattivo. Preso infatti lo spazio di Banach $\mathcal{B}(X)$ di tutte le funzioni limitate su X, dotato della norma del sup, i.e., se $f \in \mathcal{B}(X)$, $\| f \| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, e considerato l'operatore di Bellman T associato alla (2):

$$(Tf)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} [u(x, y) + \beta\, f(y)] \tag{3}$$

se la funzione uniperiodale $u(x, y)$ è limitata su Γ, allora l'operatore $T : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ è una contrazione di modulo β. Ovvero vale:

$$\| Tf - Tg \| \leq \beta\, \| f - g \|, \quad \forall f, g \in \mathcal{B}(X).$$

[1] Con abuso di notazione, nel seguito identificheremo sempre la corrispondenza $\Gamma : X \to X$ con il proprio grafico. Ovvero, indicheremo con $\Gamma \subset X \times X$ l'insieme costituito dalle coppie (x, y) per cui $y \in \Gamma(x)$.

Come conseguenza immediata di questo teorema di Blackwell si ha che la funzione valore $v(x)$ di (1) è l'unico punto fisso di T, ovvero è l'unica soluzione dell'equazione di Bellman (2) nell'ambito delle funzioni limitate. Inoltre, presa una qualsiasi funzione limitata $v_0 \in \mathcal{B}(X)$, il sistema iterativo $v_{n+1} = Tv_n$ con condizione iniziale v_0 converge uniformente alla $v(x)$. Precisamente si ha la convergenza geometrica:

$$\| T^n v_0 - v \| \leq \beta^n \| v_0 - v \|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ove si è posto $T^n v_0 = T\,(T^{n-1} v_0)$ e $T^0 v_0 = v_0$.

Le conseguenze di questo elegante teorema di Blackwell, che ha anche estensioni nel caso stocastico (si vedano [2], [6] e [9]), sono innumerevoli e non potranno essere analizzate a fondo in questa sede. Menzioniamo solamente le più immediate.

i) La convergenza uniforme permette di approssimare la funzione valore $v(x)$ che non potrebbe calcolarsi altrimenti.

ii) Le iterate successive di $v_{n+1} = T\, v_n$, a partire da una fissata condizione iniziale v_0, hanno una ovvia interpretazione come funzioni valore di problemi ad orizzonte finito. Non è infatti difficile stabilire che la iterata n-esima $v_n(x)$ è la funzione valore del problema

$$v_n(x_0) = \sup_{(x_{t+1})_{t=0}^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} u(x_t, x_{t+1})\, \beta^t + \beta^n\, v_0(x_n) \tag{4}$$
$$x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\text{dato} \quad x_0 \in X$$

In quest'ottica, il teorema di Blackwell ci assicura che il problema (1) ad orizzonte infinito può essere concepito come limite dei troncamenti finiti.

iii) La proprietà discussa al punto (ii) permette di risolvere parecchie questioni teoriche concernenti il problema (1). Parecchi teoremi di regolarità delle *policy functions* sono appunto ottenuti sfruttando questa proprietà (si vedano [4], [11], [12], [13], [14]).

È importante sottolineare come nel teorema di Blackwell sia essenziale che l'utilità istantanea $u(x, y)$ sia limitata, ovvero che esista un M tale che si abbia $| u(x, y) | \leq M, \forall (x, y) \in \Gamma$. Si noti come in buona parte dei modelli di interesse in economia la $u(x, y)$ **non soddisfi** questa proprietà di limitatezza. Per vedere questo, interpretiamo il modello astratto (1) come modello di accumulazione del capitale.

In questo caso $X \subset \Re^n_+$ e x in X rappresenta il vettore degli *stock* dei beni capitali, la corrispondenza $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ riassume l'insieme delle tecnologie dell'economia e x_{t+1} è il vettore degli *stock* di capitale che l'economia può ottenere all'epoca $t+1$ a partire dal livello di *stock* x_t all'epoca t. La $u(x_t, x_{t+1})$ rappresenta l'utilità indiretta (in genere di un consumo) ottenibile nel periodo $(t, t+1)$ come funzione del livello iniziale e terminale dello *stock* di capitali (per una discussione più dettagliata si vedano [4], [10], [13], [14]). È ovvio che, senza forti restrizioni sulle funzioni di utilità, la $u(x, y)$ non è limitata su Γ. A questo inconveniente si ripara ponendo una condizione di non sostenibilità della tecnologia per alti livelli degli *stock*. Una versione, anche se non l'unica, è la seguente proposta da McKenzie [10]: vi è uno $\zeta > 0$ tale che da $| x | > \zeta$ e $(x, y) \in \Gamma$ segue che $| y | \leq \gamma | x |$, ove $\gamma < 1$.

Questa assunzione permette di ridurre il problema iniziale (1) limitando la condizione iniziale ad un sottoinsieme $X_0 \subset X$ che è costituito dagli stati "rilevanti" del sistema. Con l'ipotesi di McKenzie potrebbe porsi $X_0 = \{x \in X; | x | \leq \zeta\}$ in modo da rendere più ragionevole l'assunzione di limitatezza della $u(x, y)$ sul dominio $\Gamma \cap (X_0 \times \Re^n)$. Per esempio ciò sarà vero se $u(x, y)$ è continua e Γ è chiuso.

Nonostante questo artificio, è facile dare esempi di modelli di crescita ottima ove questa riduzione non è possibile (tale caso verrà esaminato nell'esempio 4.1 del § 4 di questa nota). Per di più vi sono altri modelli economici di natura diversa dai modelli di accumulazione che possono facilmente tradursi in problemi del tipo (1) ma nei quali l'ipotesi di limitatezza è certamente violata (a tal proposito, si veda il problema consumo/risparmio di un consumatore che verrà trattato nel § 4).

Nel presente lavoro intendiamo dare qualche risultato simile al teorema di Blackwell nel caso in cui sia violata l'ipotesi di limitatezza per la $u(x, y)$.

Nel § 2 affronteremo il caso contemplato dalla teoria della crescita ottima. L'ipotesi che faremo è sostanzialmente un'ipotesi debole di non sostenibilità del capitale per alti livelli dello *stock* di capitale. Mostreremo come si possa fare a meno di ricorrere alla riduzione degli stati in un sottoinsieme rilevante.

Nel § 3 presenteremo un caso più complesso che è di interesse, ad esempio, nella teoria dinamica del consumatore. Imponendo delle condizioni di crescita alla utilità illimitata $u(x, y)$, dimostreremo anche in questo caso che l'operatore di Bellman risulta essere una contrazione in un opportuno spazio funzionale.

Nel § 4 raccoglieremo, come preannunciato, alcuni esempi e controesempi che permetteranno di apprezzare i risultati qui ottenuti.

Nel paragrafo conclusivo 5 affronteremo il caso in cui la funzione uniperiodale illimitata è fortemente concava. Sebbene sia difficile dare una esplicita proprietà di contrazione, dimostreremo tuttavia l'unicità e la proprietà di attrattività della funzione valore. Questo sarà possibile utilizzando alcuni risultati stabiliti da Ekeland e Scheinkman [7].

2. IPOTESI DI NON SOSTENIBILITÀ

Facciamo le seguenti ipotesi.

(A.1) Esista una successione di insiemi "incapsulati" X_i tali che $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_i \subset \ldots$, con $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$, e per la quale si abbia che se $x \in X_i$ allora $\Gamma(x) \subset X_i$, per ogni i.

(A.2) L'utilità uniperiodale $u(x, y)$ sia limitata sugli X_i. Ovvero, per ogni i esista una costante L_i tale che $| u(x, y) | \leq L_i$ per ogni $x \in X_i$ e $y \in \Gamma(x)$.

Si indichi con $\mathcal{F}(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : X \to \Re$ tali che le restrizioni $f_i = f / X_i$ siano limitate in valore assoluto per ogni i. Si indichi ancora con Γ_i la restrizione della corrispondenza Γ sull'insieme X_i. Per l'ipotesi A.1 si ha ovviamente che $\Gamma_i : X_i \to X_i$.

Sussiste allora il seguente

Teorema 1. Sotto le ipotesi A.1 - A.2, la funzione valore v di (1) appartiene a $\mathcal{F}(X)$. L'equazione funzionale di Bellman (2) ha una e una sola soluzione in $\mathcal{F}(X)$. Inoltre, la successione $v_{n+1} = T v_n$ converge puntualmente alla funzione valore v per ogni condizione iniziale $v_0 \in \mathcal{F}(X)$ e tale convergenza è uniforme su ogni X_i.

Dimostrazione. Che la funzione valore $v(x)$ sia limitata su ogni X_i è ovvio, valendo la $| v(x) | \leq L_i(1 - \beta)^{-1}$ per ogni $x \in X_i$. Così è pure immediato il fatto che $T : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$.

Indichiamo con $T_i : \mathcal{B}(X_i) \to \mathcal{B}(X_i)$ l'operatore di Bellman definito sullo spazio $\mathcal{B}(X_i)$ delle funzioni limitate su X_i. Ovvero poniamo:

$$(T_i g)(x) = \sup_{y \in \Gamma_i(x)} [u(x, y) + \beta\, g(y)],$$

dove $x \in X_i$.

Per ogni $f \in \mathcal{F}(X)$ si ha che $f_i \in \mathcal{B}(X_i)$ per ogni i. È immediato verificare che per ogni $f \in \mathcal{F}(X)$ ed ogni i vale la relazione $T_i\, f_i = (T\, f)_i$. Pertanto, poiché la funzione valore $v \in \mathcal{F}(X)$ si ha che $T\, v = v$ e $(T\, v)_i = T_i\, v_i = v_i$. Dunque v_i è un punto fisso dell'operatore T_i. Dimostriamo ora per assurdo che v è l'unico punto fisso di T. Sia allora $T\, w = w$ un altro punto fisso e sia x un generico punto di X. Per le nostre ipotesi, esisterà un i tale che $x \in X_i$ e, nuovamente, $T_i\, w_i = w_i$. Dunque w_i è un punto fisso di T_i come lo è v_i. D'altra parte T_i è una contrazione e dunque $w_i = v_i$ che porge $w(x) = v(x)$.

Per quanto riguarda la convergenza alla soluzione v, sia $v_0 \in \mathcal{F}(X)$ una qualsiasi condizione iniziale e si ponga $v_{n+1} = T\, v_n$. Si ha $(v_{n+1})_i = (T\, v_n)_i = T_i(v_n)_i$, con $(v_0)_i \in \mathcal{B}(X_i), \forall i$. La successione $(v_n)_i$ convergerà uniformemente a $v_i, \forall i$, e dunque resta provato il nostro teorema. ■

3. IPOTESI DI CRESCITA

Nel corso del paragrafo assumeremo che

(A.1') esista una successione di insiemi "incapsulati" X_i di X, con $\cup_{i=1}^{\infty} X_i = X$ e con la proprietà che per ogni $x \in X_i$ si abbia $\Gamma(x) \subset X_{i+1}$, per ogni i.

(A.2') Per ogni i esiste una costante L_i per cui valga $|\, u(x, y)\, | \leq L_i$ per ogni $x \in X_i$ ed ogni $y \in \Gamma(x)$.

Si noti che, essendo $X_i \subset X_{i+1}$, potremo sempre supporre $L_i \leq L_{i+1}$. Ciò accade, ad esempio, se si prende $L_i = \sup\{|\, u(x, y)\, |; x \in X_i \text{ e } y \in \Gamma(x)\}$. Nel seguito converremo sempre che le costanti L_i siano scelte in questo modo.

Definiamo ora

$$\lim_{i\to\infty} \sup(L_{i+1}/L_i) = \vartheta \tag{5}$$

Si noti che nelle nostre ipotesi $\vartheta \geq 1$.

Vale allora la seguente

Proposizione 1. Per ogni fattore di sconto $\beta < 1/\vartheta$, la funzione valore $v(x)$ del problema (1) è limitata in valore assoluto su ogni X_i, ossia $v \in \mathcal{F}(X)$. Più precisamente

$$|\, v(x)\, | \leq \sum_{t=0}^{\infty} L_{i+t}\, \beta^t < +\infty, \quad \forall x \in X_i$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ è un cammino ammissibile uscente da $x_0 \in X_i$ si ha $x_t \in X_{i+t}$ e quindi, dall'ipotesi A.2', che $|\, u(x_t, x_{t+1})\, | \leq L_{i+t}$.

Considerata ora la serie $U(x) = \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\, \beta^t$ è immediato stabilirne la convergenza. Infatti da

$$|\, U(x)\, | \leq \sum_{t=0}^{\infty} |\, u(x_t, x_{t+1})\, |\ \beta^t \leq \sum_{t=0}^{\infty} L_{i+t}\, \beta^t$$

segue che la serie $U(x)$ è maggiorata in valore assoluto da una serie che converge in base al criterio del rapporto. Si ha poi ovviamente che $\forall x \in X_i, |v(x)| \leq \sum_{t=0}^{\infty} L_{i+t}\, \beta^t < +\infty$, e ciò completa la dimostrazione. ■

Si considerino ora i numeri $\alpha_i = \sum_{t=0}^{\infty} L_{i+t}\, \beta^t$ e in $\mathcal{F}(X)$ la famiglia di seminorme $\|\, f\, \|_i = \sup_{x \in X_i} |f(x)| = \|\, f_i\, \|$, ove f_i indica, come al solito, la restrizione della funzione $f \in \mathcal{F}(X)$ al sottoinsieme X_i. Tali seminorme definiscono in $\mathcal{F}(X)$ la topologia della convergenza uniforme sugli X_i[2]. Si consideri ora in $\mathcal{F}(X)$ il sottoinsieme $\mathcal{F}_\alpha(X)$ così definito: $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ se e solo se esiste una costante $M \geq 1$ tale che $\|\, f\, \|_i \leq M\, \alpha_i, \forall i$.

Proposizione 2. La funzione valore $v \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ e inoltre per l'operatore T di Bellman si ha che $T : \mathcal{F}_\alpha(X) \to \mathcal{F}_\alpha(X)$.

Dimostrazione. La prima affermazione è stata provata nella Proposizione 1. Per quanto riguarda l'operatore T di Bellman (3) si ha che

$$|\, (Tf)(x)\, | \leq \sup_{y \in \Gamma(x)} |\, u(x, y) + \beta\, f(y)\, | \leq \sup_{y \in \Gamma(x)} |\, u(x, y)\, | + \beta \sup_{y \in \Gamma(x)} |f(y)|.$$

Se ora prendiamo un $x \in X_i$, allora $y \in \Gamma(x) \subset X_{i+1}$. Perciò, per una qualsiasi $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, segue che $|\, T\, f\, |_i \leq L_i + \beta M\, \alpha_{i+1} = (1 - M) L_i + M\, \alpha_i \leq M\, \alpha_i$ e da questo la tesi. ■

[2] Si tratta di una topologia metrizzabile di Fréchet.

Introdotta ora nell'insieme $\mathcal{F}_\alpha(X)$ la metrica così definita

$$d(f,g) = \operatorname*{Sup}_{i=1,2,\dots}\left(\frac{\| f-g \|_i}{\alpha_i}\right); \quad \forall f,g \in \mathcal{F}_\alpha(X)$$

$\mathcal{F}_\alpha(X)$ risulta essere uno spazio metrico completo[3]. Sussiste il seguente:

Teorema 2. Per ogni fattore di sconto $\beta < 1/\vartheta$, l'equazione funzionale di Bellman (2) ha una e una sola soluzione in $\mathcal{F}_\alpha(X)$. Inoltre la successione $v_{n+1} = T\, v_n$ converge uniformemente sugli X_i per ogni condizione iniziale $v_0 \in \mathcal{F}_\alpha(X)$.

Dimostrazione. Usando la stessa tecnica utilizzata nel teorema di Blackwell segue facilmente che si ha $\|Tf - Tg\|_i \le \beta \|f-g\|_{i+1}, \forall f,g \in \mathcal{F}_\alpha(X), \forall i$.

Per stabilire che T è una contrazione su $\mathcal{F}_\alpha(X)$, osserviamo innanzitutto che per ogni i si ha

$$\frac{\|Tf - Tg\|_i}{\alpha_i} \le \frac{\beta\|f-g\|_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{\beta\,\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\left(\frac{\|f-g\|_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right) \tag{6}$$

Ora, poiché, $\beta\,\alpha_{i+1}/\alpha_i = (\alpha_i - L_i)/\alpha_i = 1 - (L_i/\alpha_i)$ e $L_i < \alpha_i$ segue, ovviamente, $\beta\,\alpha_{i+1}/\alpha_i < 1, \forall i$.

Non è difficile stabilire che tali rapporti risultano uniformemente minori di 1. Infatti, poiché, per ipotesi $\beta\,\vartheta < 1$, esiste un numero reale $\vartheta_1 > \vartheta$ tale che $\beta\,\vartheta_1 < 1$ e, dalla (5), esiste un intero N tale che $\forall i \ge N$ si abbia $(L_{i+1}/L_i) < \vartheta_1$.

Si avrà allora che per $i \ge N$, i rapporti

$$\frac{\beta\,\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = 1 - \frac{1}{\sum_{t=0}^{\infty}(L_{i+t}/L_i)\,\beta^t} \le 1 - \frac{1}{\sum_{t=0}^{\infty}(\vartheta_1\,\beta)^t} = \vartheta_1\,\beta < 1.$$

Cosicché, indicato con $\lambda = \max\{\max_{1\le i\le N-1}[(\beta\,\alpha_{i+1})/\alpha_i], \vartheta_1\,\beta\} < 1$, risulta $\beta\,\alpha_{i+1}/\alpha_i \le \lambda < 1, \forall i$.

Riprendendo ora la (6), si ha $\|Tf - Tg\|_i/\alpha_i \le \lambda\,(\|f-g\|_{i+1}/\alpha_{i+1}), \forall i$, che porge

$$\sup_i \frac{\|Tf - Tg\|_i}{\alpha_i} \le \lambda \sup_i \frac{\beta\|f-g\|_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \le \lambda \sup_i \left(\frac{\|f-g\|_i}{\alpha_i}\right)$$

[3] La completezza può essere verificata direttamente, oppure si può osservare che $\mathcal{F}_\alpha(X)$ è un chiuso dello spazio di Fréchet $\mathcal{F}(X)$.

da cui segue la tesi perché, $\forall f,g \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ esiste un numero reale $\lambda \in (0,1)$ tale che $d(Tf,Tg) \le \lambda\ d(f,g)$. ∎

Osservazione. La condizione $\limsup_{i\to\infty}(L_{i+1}/L_i) < 1/\beta$ è ovviamente soltanto sufficiente. È comunque possibile generalizzare i risultati precedenti sotto ipotesi meno restrittive, anche se esse portano a condizioni più difficilmente verificabili. Un'ulteriore estensione è anche ottenibile, per esempio, se si considera la contrazione di una iterata di T. Infatti, è apparente dalla prova che vale la seguente proprietà: l'operatore T ha l'iterata h-esima che è una contrazione se β soddisfa la condizione $\limsup_{i\to\infty}(\beta^h\, L_{i+h}/L_i) < 1$ (anche per $h = 1$ questa è più generale di quella enunciata nel Teorema 2).

4. ALCUNI ESEMPI

4.1 *Modello di crescita ottima unisettoriale*

Si consideri un modello di crescita ottima unisettoriale ove la tecnologia è descritta dalla funzione di produzione CES $y = [ax^\rho + (1-a)\ell^\rho]^{1/\rho}$, ove $a \in (0,1], \rho \in (-\infty, 1], x$ è l'input del capitale, ℓ è l'input del fattore non riproducibile (lavoro). È immediato verificare che, nell'ipotesi in cui il lavoro sia offerto anelasticamente in ogni periodo al livello $\ell = 1$ e il capitale si deprezzi al tasso costante μ, il vincolo dinamico risulta essere $y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow 0 \le y \le (1-\mu)\,x + [ax^\rho + (1-a)]^{1/\rho}$.

Per deprezzamenti sufficientemente piccoli, ovvero per $0 \le \mu \le a^{1/\rho}$, si può osservare che il vincolo viola l'ipotesi di McKenzie e così pure l'assunzione A.1. Invece per $\mu > a^{1/\rho}$ possiamo utilizzare, sotto ipotesi ragionevoli per la $u(x,y)$, il Teorema 1. Se al contrario $0 \le \mu \le a^{1/\rho}$ possiamo agevolmente costruire la successione X_i descritta in A.1'. Per esempio, possiamo prendere $X_i = [0, x_i]$ ove $x_1 = 1$ e $x_{i+1} = (1-\mu)\,x_i + [ax_i^\rho + (1-a)]^{1/\rho}$.

4.2 *Molteplicità di soluzioni dell'equazione di Bellman*

È poco noto il fatto che semplici problemi del tipo (1) possono condurre ad una molteplicità di soluzioni dell'equazione di Bellman. Si ponga ad esempio $u(x,y) =$

$-2^{-1}(x - Ay)^2 + x - Ay$, con $0 < A < 1$ e $\Gamma(x) = \Re$, per ogni $x \in \Re$. La funzione u è concava ma non strettamente su $\Re^2$. È facile verificare che se il fattore di sconto β è uguale ad A, l'equazione di Bellman (2) ha infinite soluzioni nell'ambito delle funzioni concave. Tra queste vi sono: $v_1(x) = x$, $v_2(x) = -2^{-1}(1-A)x^2+x$, $v_3(x) = v_1(x)$ per $x \geq 0$ e $v_3(x) = v_2(x)$ per $x \leq 0$, $v_4(x) = v_2(x)$ per $x \geq 0$ e $v_4(x) = v_1(x)$ per $x \leq 0$, $v_5(x) = \alpha x + 2^{-1}(1-\alpha)^2(1-A)^{-1}$, con $\alpha \in \Re$.

Si può poi facilmente dimostrare che $v(x) = 2^{-1}(1-A)^{-1}$ è la funzione valore (che corrisponde a v_5 per $\alpha = 0$). Questo esempio, che viola tutte le ipotesi incontrate in questa nota, conferma come non sia facile estendere i nostri teoremi senza porre qualche restrizione sui vincoli oppure qualche specificazione sull'utilità. A questo proposito si veda il § 5.

4.3 *Modello consumo/risparmio senza prestiti* [14]

Consideriamo un consumatore che viva eternamente con preferenze uniperiodali espresse mediante una funzione di utilità $u : \Re^n_+ \to \Re$. In ambito statico il problema di ottimizzazione è $V(w, \mathbf{p}) = \operatorname{Sup}_c u(\mathbf{c})$, sub $\mathbf{p}.\mathbf{c} \leq w$.

Se in tale modello si suppone che il vettore dei prezzi $\mathbf{p}$ dei beni sia costante nel tempo, l'utilità indiretta della ricchezza w diventa $V(w, \mathbf{p}) = V(w)$. Si assuma ora che il consumatore percepisca un reddito costante $I \geq 0$ in ogni periodo e possieda una ricchezza iniziale $x_0 \geq 0$. Egli può risparmiare ma non può indebitarsi. Il tasso di interesse r è costante nel tempo. Indicato con x_t il livello dei risparmi all'epoca t, il problema di scelta intertemporale assume allora l'aspetto

$$v(x_0) = \operatorname{Sup} \sum_{t=0}^{\infty} V\left(x_t + I - x_{t+1}(1+r)^{-1}\right)\beta^t$$
$$0 \leq x_{t+1} \leq (1+r)(x_t + I), \qquad x_0 \text{ fissato.}$$

Il vincolo $\Gamma(x)$ di questo problema viola l'ipotesi A.1 mentre soddisfa l'ipotesi A.1'. Basterà infatti porre $X_i = [0, x_i]$ con $x_i = R^{i-1}h + r^{-1}RI(R^{i-1} - 1)$, ove si è posto $R = (1+r)$ ed h è un arbitrario numero positivo.

L'esempio è utile per comprendere la portata del Teorema 2. Vediamo come, sotto ragionevoli ipotesi, sia particolarmente semplice determinare le quantità L_i

e come nella determinazione dei fattori di sconto β, per cui valga il Teorema 2, concorrano sia il tasso di crescita del vincolo sia il comportamento all'infinito della funzione di utilità.

Nell'ipotesi di insaziabilità dell'agente, ovvero nel caso in cui V sia monotona crescente, è facile verificare che $L_i = V(x_i + I)$. Pertanto:

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} L_{i+1}/L_i &= \limsup_{i\to\infty} V(x_{i+1} + I)/V(x_i + I)\\ &= \limsup_{i\to\infty} V(Rx_i + RI + I)/V(x_i + I)\\ &= \limsup_{i\to\infty} V(Ry_i + I)/V(y_i)\end{aligned}$$

ove si è posto $y_i = x_i + I$.

Una stima sul tasso di crescita $\limsup_{i\to\infty} V(Ry_i + I)/V(y_i)$ è facilmente ottenibile qualora la $V(w)$ risulti concava. Si ha infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3. Se l'utilità indiretta $V(w)$ soddisfa le condizioni: V limitata inferiormente, V crescente e concava per $w \geq 0$, allora $\limsup_{i\to\infty} L_{i+1}/L_i \leq R$, ovvero, il Teorema 2 è vero per fattori di sconto $\beta < (1+r)^{-1}$.

Dimostrazione. Si ponga per comodità $R + Iy_i^{-1} = R_i$. Pertanto avremo

$$\limsup_{i\to\infty} V(Ry_i + I)/V(y_i) = \limsup_{i\to\infty} V(y_i R_i)/V(y_i),$$

ove $R_i \to R$ per i tendente ad infinito. Sia p_i un qualsiasi sopradifferenziale di V in y_i. Potremo scrivere $V(y_i R_i) \leq V(y_i) + p_i(y_i R_i - y_i)$ da cui, con ovvi passaggi, segue che

$$V(y_i R_i)/V(y_i) \leq 1 + [(p_i y_i)/V(y_i)](R_i - 1).$$

D'altra parte, essendo V limitata inferiormente, non è restrittivo porre $V(0) = 0$. Applicando nuovamente la proprietà di sopradifferenziabilità, si ha $0 = V(0) \leq V(y_i) - p_i y_i$. Da questo si deduce che $(p_i y_i)/V(y_i) \leq 1$, ovvero $V(y_i R_i)/V(y_i) \leq R_i$ che porge la tesi perché, passando al limite, si ottiene $\limsup_{i\to\infty} V(y_i R_i)/V(y_i) \leq R$. ∎

La condizione $\limsup_{i\to\infty} V(y_i R_i)/V(y_i) \leq R$ vale per ogni funzione concava e monotona. È degno di nota osservare come la stima precedente possa essere migliorata se la funzione concava è sufficientemente regolare. Diamo la seguente definizione che risulta una versione leggermente modificata rispetto a quella rintracciabile in Loève [8], Cap. VII.

Definizione. Data una funzione $f(\lambda)$ concava sul semiasse $\lambda \geq 0$, diremo che essa varia regolarmente all'infinito con esponente $0 \leq \alpha \leq 1$ se, per ogni successione $t_n \to t \geq 1$ ed ogni successione $\lambda_n \to +\infty$, si ha che $f(\lambda_n t_n)/f(\lambda_n) \to t^\alpha$.

Si noti come nella precedente definizione α sia stato posto ≤ 1 per quanto visto nella Proposizione 3. L'altro caso estremo, $\alpha = 0$, ovvero il caso in cui $f(\lambda_n t_n)/f(\lambda_n) \to 1$, è pure interessante. In tal caso si dice che la f ha variazione lenta all'infinito.

Buona parte delle funzioni concave usualmente utilizzate sono a variazione regolare all'infinito. Così entrambe le funzioni $V = 1 - (1+w)^{-1}$ e $V = \log(1+w)$ sono a variazione lenta all'infinito. Le funzioni $V = w^\alpha$ sono regolari all'infinito con esponente α e le funzioni lineari hanno esponente 1.

Possiamo dunque formulare la seguente

Proposizione 4. Se l'utilità indiretta $V(w)$ varia regolarmente all'infinito con esponente α, allora il Teorema 2 è valido per fattori di sconto $\beta < (1+r)^{-\alpha}$. In particolare, per funzioni lentamente variabili all'infinito il teorema sussiste per ogni $0 < \beta < 1$.

5. CONCAVITÀ FORTE

Terminiamo questo lavoro presentando ancora un risultato non contemplato dai Teoremi 1 e 2. Nell'esempio 4.2 del § 4 abbiamo visto come da semplici funzionali quadratici derivino equazioni di Bellman con infinite soluzioni cosicché l'operatore non presenta alcuna proprietà contrattiva. Vale ancora la pena di ricordare che, sempre nello stesso esempio, la funzione di utilità pur essendo concava non risulta fortemente concava. Il risultato che diamo ora sfrutta in modo essenziale quest'ultima proprietà.

Nel seguito assumeremo che l'insieme X sia un sottoinsieme convesso di $\Re^n$. Ricordiamo innanzitutto la seguente (si veda [12]):

Definizione. La funzione $u : \Gamma \to \Re$ è detta (α, γ)-concava sul convesso $\Gamma \subset X \times X$ se $u(x, y) + (\alpha/2)\,|x|^2 + (\gamma/2)\,|y|^2$ risulta concava su Γ.

Teorema 3. Si supponga che il problema (1) soddisfi le seguenti proprietà:

i) $u(x, y)$ è (α, γ)-concava su Γ, con $\alpha, \gamma > 0$;

ii) esistono due numeri A e B tali che

$$u(x, y) \geq A - B\left(|x|^2 + |y|^2\right) \quad \text{per } (x, y) \in \Gamma;$$

iii) $0 \in \Gamma(x)$ per ogni x e Γ è un sottoinsieme chiuso e convesso di X chiuso;

iv) $u(x, y)$ è semicontinua superiormente su Γ;

allora l'equazione di Bellman (2) ha una ed una sola soluzione nella classe delle funzioni concave e semicontinue superiormente. Tale soluzione, che risulta essere la funzione valore di (1), risulta α-concava.

Dimostrazione. Una soluzione esiste in quanto la funzione valore $v(x)$ è concava e semicontinua superiormente. Sia dunque $w(x)$ una qualsiasi soluzione concava di (2).

Poiché $u(x, y)$ è (α, γ)-concava, la $u(x, y) + \beta w(y)$ è certamente (α, γ)-concava su Γ. È facile verificare (si veda [12]) che la funzione marginale $w(x) = \mathrm{Sup}[u(x, y) + \beta\, w(y)]$ è α-concava su X.

Vediamo ora cosa discende dalla proprietà (ii). Se $w(x)$ è una soluzione di (2), allora $w(x) \geq u(x, y) + \beta\, w(y)$ per ogni $(x, y) \in \Gamma$. Dunque $w(x) \geq A - B|x|^2 - B|y|^2 + \beta\, w(y)$. Ancora: $w(x) \geq A - B|x|^2 + \beta\, w(0)$, essendo $0 \in \Gamma(x)$. Pertanto, possiamo concludere che

$$w(x) \geq A_1 - B\,|x|^2 \tag{7}$$

dove $A_1 = A + \beta\, w(0)$.

Dimostriamo ora che necessariamente $w(x)$ coincide con la funzione valore $v(x)$. Per ipotesi, $w(x)$ è semicontinua superiormente sul chiuso X. Essendo $w(x)$ fortemente concava, sappiamo che w ha massimo su X (si veda [12]). Ovvero, esiste un $x^* \in X$ per cui $w(x) \leq w(x^*) = L$ per ogni x in X.

Iterando l'equazione di Bellman, segue facilmente che:

$$w(x_0) \geq \sum_{t=0}^{N-1} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t + \beta^N\, w(x_N),$$

per ogni N ed ogni traiettoria ammissibile $\mathbf{x}$ uscente da x_0. Consideriamo ora lo spazio delle sequenze $\ell_2(\beta)$, cioè l'insieme delle sequenze $\mathbf{x}$ per cui $\sum_{t=0}^{\infty} |x_t|^2 \beta^t < \infty$.

Se supponiamo che la traiettoria $\mathbf{x}$ non appartenga a $\ell_2(\beta)$ allora, come dimostrato in [13], si ha $\sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t = -\infty$. In altri termini si ha che se $\mathbf{x} \notin \ell_2(\beta)$ allora $w(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t = -\infty$.

Supponiamo ora che $\mathbf{x} \in \ell_2(\beta)$. Allora $|x_N|^2 \beta^N \to 0$. Dalla (7) segue che $L\,\beta^N \geq \beta^N w(x_N) \geq \beta^N (A_1 - B|x_N|^2)$, ovvero $\beta^N w(x_N) \to 0$ e dunque $w(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t$. Da ciò si può concludere che $w(x) \geq v(x)$ per ogni x.

Sempre per ipotesi sappiamo che la funzione $u(x_0, .) + \beta\, w(.)$ è semicontinua superiormente e fortemente concava sul chiuso e convesso $\Gamma(x_0)$. Pertanto il massimo è raggiunto in un punto x_1. Avremo così $w(x_0) = u(x_0, x_1) + \beta\, w(x_1)$. Iterando questa procedura, otteniamo un cammino ammissibile $\mathbf{x}$ per cui $w(x_0) = \sum_{t=0}^{N-1} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t + \beta^N w(x_N)$, per ogni N. Tale traiettoria risulterà appartenere a $\ell_2(\beta)$ perché, per ipotesi, $w(x) > -\infty$. Dunque $\beta^N w(x_N) \to 0$ e $w(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t$. Deduciamo che $w(x_0) \leq v(x_0)$ che unita alla precedente, fornisce $w(x_0) = v(x_0)$ ed il teorema resta provato. ∎

L'unicità della soluzione, dimostrata nel Teorema 3, risulta essere un requisito minimale affinché l'operatore sia contrattivo. Pur essendo difficile stabilire quest'ultima proprietà, è tuttavia possibile dimostrare come valga una proprietà di attrattività.

Teorema 4. Nelle condizioni (i)-(iv) del Teorema 3, per ogni condizione iniziale v_0 soddisfacente le condizioni:

a) $v_0(x)$ concava e limitata superiormente su X,
b) vale la condizione di crescita all'infinito: esiste un A_1 ed un B_1 per cui $v_0(x) \geq A_1 - B_1\,|x|^2$,

allora le iterate successive $v_{n+1} = Tv_n$ convergono uniformemente sui compatti alla funzione valore $v(x)$ di (1).

La dimostrazione del Teorema 4 richiede alcuni lemmi e si basa su un metodo suggerito da Ekeland e Scheinkman [7]. Si noti ancora che, nelle nostre ipotesi,

$u(x, y)$ risulta limitata superiormente su Γ. Pertanto non è restrittivo porre $u(x, y) \leq 0$. Nel seguito ipotizzeremo sempre che valga tale condizione.

Lemma 1. Sia $f : X \times Y \to \Re \cup (-\infty)$ una funzione $(\alpha, 0)$-concava sul convesso $X \times Y$, X e Y sottoinsiemi convessi di spazi euclidei, $f(x, y) \leq L$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$ e $f(0, 0) > -\infty$. Preso un qualsiasi λ, se la sezione superiore $S(\lambda) = \{(x, y) \in X \times Y;\, f(x, y) \geq \lambda\}$ non è vuota, allora l'insieme $\pi_1\, S(\lambda) = \{x \in X;$ esiste un y per cui $(x, y) \in S(\lambda)\}$ è limitato in norma. Precisamente vale:

$$|x|^2 \leq \alpha^{-1}\,[8L - 4l - 4f(0, 0)] \tag{8}$$

per ogni $x \in \pi_1\, S(\lambda)$.

Dimostrazione. Sia $(x, y) \in S(\lambda)$. Avremo

$$L \geq f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{0}{2}, \frac{y}{2} + \frac{0}{2}\right) \geq \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{1}{2} f(0, 0) + \\ + \frac{1}{8}\alpha\,|x|^2 \geq \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} f(0, 0) + \frac{1}{8}\alpha\,|x|^2$$

Da cui segue facilmente la (8). ∎

Lemma 2. Si consideri la famiglia (4) di problemi ad orizzonte finito $v_n(x_0) = \sup \sum_{t=0}^{n-1} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t + \beta^n v_0(x_n)$, con condizione iniziale x_0 fissata. Per ogni intero $h \geq 1$ ed ogni λ esiste una costante $a(h, \lambda)$ tale che per tutti gli $n > h$ e per tutte le traiettorie ammissibili con $\sum_{t=0}^{n-1} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t + \beta^n v_0(x_n) \geq \lambda$, si ha che $|x_h| \leq a(h, \lambda)$.

Dimostrazione. È una diretta applicazione del Lemma 1. Se si isola la componente h-esima del cammino ammissibile nel funzionale $\sum_{t=0}^{n-1} u(x_t, x_{t+1})\,\beta^t + \beta^n v_0(x_n)$ si ha $u(x_{h-1}, x_h)\,\beta^{h-1} + u(x_h, x_{h+1})\,\beta^h + F$, ove la funzione concava F non contiene la componente x_h. È immediato verificare che il funzionale risulta $(\beta^{h-1}\alpha + \beta^h\gamma, 0)$-concavo. Applicando la (8), si ottiene

$$|x_h|^2 \leq \left[8v_n(x_0) - 4\lambda - 4u(0, 0)(1-\beta)^{-1} - 4|v_0(0)|\right]\,\left(\beta^{h-1}\alpha + \beta^h\gamma\right)^{-1}.$$

Si noti che nella precedente maggiorazione abbiamo utilizzato il fatto che $u(x,y) \leq 0$. Per finire, osserviamo che nella stima ottenuta l'unico elemento dipendente dalla lunghezza n dell'orizzonte è $v_n(x_0)$. D'altra parte, utilizzando l'equazione di Bellman ed il fatto che $u(x,y) \leq 0$, deduciamo che $v_n(x_0) \leq \beta \operatorname{Sup} v_{n-1}(x)$. Essendo $v_0(x)$ limitata superiormente, ovvero, $v_0(x) \leq \ell$, si ricava che $v_n(x) \leq |\ell|$ e così resta provato che $|x_h| \leq a(h,\lambda)$. ∎

Dimostrazione. Teorema 4. Sia $v(x)$ la funzione valore e sia x_0 un punto fissato in X. Sappiamo che per ipotesi esiste un cammino ammissibile $\mathbf{x} = (x_0; x_1; x_2; \ldots) \in \ell_2(\beta)$ tale che

$$v(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t; x_{t+1})\,\beta^t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} u(x_t; x_{t+1})\,\beta^t.$$

Dalla definizione di $v_n(x)$ segue che

$$\sum_{t=0}^{n-1} u(x_t; x_{t+1})\,\beta^t \leq v_n(x_0) - \beta^n\, v_0(x_n).$$

Inoltre, come è stato visto nella prova del Teorema 3, dalle condizioni (a) e (b) segue che $\beta^n v_0(x_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Pertanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} u(x_t; x_{t+1})\,\beta^t \leq \liminf_{n\to\infty} v_n(x_0) - \lim_{n\to\infty} \beta^n\, v_0(x_n)$$

che porta alla condizione

$$v(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} v_n(x_0). \tag{9}$$

Consideriamo ora il $\limsup_{n\to\infty} v_n(x_0)$. Per definizione esiste una sequenza di indici $n_k \to \infty$ tale che $v_{n_k}(x_0) > \limsup_{n\to\infty} v_n(x_0) - 1/k$.

Per definizione di $v_{n_k}(x_0)$, sappiamo che per ogni indice k esisterà un cammino ammissibile $\mathbf{x}^k = (x_0; x_1^k; x_2^k; \ldots; x_{n_k}^k)$ per cui vale

$$\sum_{t=0}^{n_k-1} u(x_t^k; x_{t+1}^k)\,\beta^t + \beta^{n_k}\, v_0(x_{n_k}^k) > \limsup_{n\to\infty} v_n(x_0) - 1/k \tag{10}$$

Utilizziamo ora il Lemma 2, ponendo $\lambda = \limsup_{n\to\infty} v_n(x_0) - 1$. Deduciamo che per ogni indice t fissato, l'insieme degli (x_t^k) è limitato (il limite dipende da t). Usando il metodo diagonale di Cantor possiamo determinare una sottosequenza $(x_t^{k_1}; x_t^{k_2}; \ldots)$ convergente ad un elemento x_t^* per ogni t. Per comodità chiameremo questa sottosequenza nuovamente (x_t^k). Dalla chiusura di Γ si deduce che la sequenza (x_t^*) è ancora ammissibile. Inoltre, essendo $u(x,y)$ semicontinua superiormente, si ha che $\limsup_{k\to\infty} u(x_t^k; x_{t+1}^k) \leq u(x_t^*; x_{t+1}^*)$. Per comodità scriviamo $u_t^k = u(x_t^k; x_{t+1}^k)$.

Usando il lemma di Fatou:

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} u_t^k\,\beta^t \leq \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t^*; x_{t+1}^*)\,\beta^t.$$

Riscrivendo il primo membro di questa diseguaglianza, otteniamo:

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{t=0}^{n_k-1} u_t^k\,\beta^t \leq \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t^*; x_{t+1}^*)\,\beta^t.$$

Se ora facciamo tendere k all'infinito nella (10), otteniamo

$$\sum_{t=0}^{\infty} u(x_t^*; x_{t+1}^*)\,\beta^t + \limsup_{k\to\infty} \beta^{n_k}\, v_0(x_{n_k}^k) \geq \limsup_{n\to\infty} v_n(x_0).$$

D'altra parte, dalla limitatezza superiore di $v_0(x)$ segue che

$$\limsup_{k\to\infty} \beta^{n_k}\, v_0(x_{n_k}^k) \leq 0$$

e dunque si ottiene $v(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t^*; x_{t+1}^*)\,\beta^t \geq \limsup_{n\to\infty} v_n(x_0)$.

Questa accompagnata con la relazione (9) porge $\lim_{n\to\infty} v_n(x_0) = v(x_0)$. Poiché è ben noto che la convergenza puntuale per funzioni concave implica la convergenza uniforme sui compatti, la nostra prova è conclusa. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] BELLMAN R., *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1957.

[2] BERTSEKAS D. P., *Dynamic Programming and Stochastic Control*, Academic Press, New York, 1976.

[3] BLACKWELL D., "Discounted Dynamic Programming", *Annals of Mathematical Statistics*, 36, 1965, pp. 226-235.

[4] BOLDRIN M., MONTRUCCHIO L., "On the indeterminacy of capital accumulation paths", *Journal of Economic Theory*, 40, 1986, pp. 26-39.

[5] DANA R. A., LEVAN C., "On the Bellman Equation of the Overtaking Criterion", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 67, 1990, pp. 587-600.

[6] DENARDO E. V., "Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming", *SIAM Rev.*, 9, 1967, pp. 165-177.

[7] EKELAND I. - SCHEINKMAN J. A., "Transversality Conditions for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems", *Mathematics of Operations Research*, 11, 1986, pp. 216-229.

[8] LOÈVE M., *Probability Theory I*, New York: Springer-Verlag, 1977.

[9] MAITRA A., "Discounted Dynamic Programming on Compact Metric Spaces", *Sankhya*, Ser. A. 30, 1968, pp. 211-216.

[10] MCKENZIE L. W., "Optimal Economic Growth and Turnpike Theorems", in K. J. Arrow, M. Intrilligator, *Handbook of Mathematical Economics*, vol. III, Amsterdam: North Holland, 1986.

[11] MONTRUCCHIO L., "Optimal Decisions Over Time and Strange Attractors: An Analysis by the Bellman Principle", *Mathematical Modelling*, 7, 1986, pp. 341-352.

[12] MONTRUCCHIO L., "Lipschitz Continuous Policy Functions for Strongly Concave Optimization Problems", *Journal of Mathematical Economics*, 16, 1987, pp. 259-273.

[13] MONTRUCCHIO L., "Problemi matematici nei Modelli di Ottimizzazione Intertemporale di Derivazione Economica", *Atti del XIV Convegno A.M.A.S.E.S.*, Pescara, settembre 1990, pp. 13-15.

[14] STOKEY N. L., LUCAS R. E., PRESCOTT E., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge: Harvard University Press, 1989.