Esercizi di Matematica

Esercizi di Matematica

Claudio Mattalia

Luglio 2009

Indice

Prefazione

Questo volume è il risultato dell'esperienza didattica maturata nel corso degli ultimi anni presso la Facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Torino. Esso si propone, in particolare, come strumento utile per il corso di *"Matematica Generale"*, nuovamente introdotto in tale Facoltà in seguito al riordino dei corsi di laurea.

In quest'ottica, il testo affronta gli argomenti tradizionali di un primo corso universitario dedicato alla matematica applicata in campo economico ed aziendale. Dopo un capitolo iniziale dedicato alle disequazioni (utilizzate ampiamente nel seguito) ed uno dedicato ai concetti di base della teoria degli insiemi e della logica, vengono introdotte le nozioni fondamentali riguardanti le funzioni reali di una variabile reale, i limiti, il calcolo differenziale e il calcolo integrale per tali funzioni. I capitoli conclusivi sono dedicati all'algebra lineare e alle funzioni reali di più variabili reali, con alcuni approfondimenti utili anche per corsi più avanzati.

In ogni capitolo ciascuno degli argomenti affrontati è introdotto attraverso un breve richiamo di carattere teorico (tenendo comunque presente che questo volume è essenzialmente un eserciziario, e non sostituisce quindi il libro di testo), dopodiché vengono illustrati e risolti in modo dettagliato una serie di esempi, procedendo in ordine crescente di difficoltà. La presentazione è condotta ad un livello il più possibile semplice e chiaro, con lo scopo essenziale di mettere in evidenza il ragionamento che (al di là dei singoli calcoli) è alla base della risoluzione di un certo problema. Al termine di ogni capitolo, infine, sono raccolti numerosi esercizi da svolgere, la cui soluzione è contenuta nel capitolo conclusivo.

Desidero ringraziare i miei colleghi del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata della Facoltà di Economia dell'Università di Torino per i suggerimenti di cui ho beneficiato nella stesura di questo libro, e i numerosi studenti che, nel corso degli ultimi anni, hanno utilizzato ed apprezzato parte del materiale qui raccolto. Resta ovviamente inteso che gli eventuali errori ancora presenti sono di mia esclusiva responsabilità. Un ringraziamento particolare va anche all'Editore, per l'incoraggiamento e il sostegno nella realizzazione di questo lavoro.

Torino, luglio 2009 Claudio Mattalia

Capitolo 1

Disequazioni

1.1. Definizioni

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni contenenti una o più incognite. Nel caso di una sola incognita, in particolare, si ha:

$$A(x) \geq B(x) \qquad \text{oppure} \qquad A(x) \leq B(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

dove eventualmente le disuguaglianze valgono in senso stretto.

Soluzioni della disequazione sono quei valori dell'incognita che rendono vera la disuguaglianza.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni; valgono a questo proposito i seguenti due principi fondamentali:

1. Aggiungendo o togliendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa quantità (costante o variabile) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità (costante) positiva si ottiene una disequazione equivalente a quella data, moltiplicandoli o dividendoli per una stessa quantità (costante) negativa si ottiene una disequazione equivalente a quella data rovesciando il verso della disuguaglianza:

$$A(x) > B(x) \Rightarrow \begin{cases} c \cdot A(x) > c \cdot B(x) & \text{se} \quad c > 0 \\ \\ c \cdot A(x) < c \cdot B(x) & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

Questi due principi vengono utilizzati per risolvere una disequazione, trasformando la disequazione iniziale in una più semplice, ad essa equivalente.

Esempio 1.1 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 3 \geq 0$$

Aggiungendo la quantità (costante) $+3$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il $1°$ principio di equivalenza):

$$x - 3 + 3 \geq 0 + 3$$

cioè:

$$x \geq 3$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.2 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 5 > x$$

Aggiungendo la quantità (variabile) $-x$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il $1°$ principio di equivalenza):

$$2x + 5 - x > x - x$$

cioè:

$$x + 5 > 0$$

e poi aggiungendo la quantità (costante) -5 ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando ancora il $1°$ principio di equivalenza):

$$x + 5 - 5 > 0 - 5$$

cioè:

$$x > -5$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.3 *Risolvere la disequazione:*

$$3x < 4$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e positiva) $\frac{1}{3}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza):

$$\frac{1}{3} \cdot 3x < \frac{1}{3} \cdot 4$$

cioè:

$$x < \frac{4}{3}$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.4 *Risolvere la disequazione:*

$$-3x < 4$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e negativa) $-\frac{1}{3}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza e rovesciando la disuguaglianza):

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3x) > \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4$$

cioè:

$$x > -\frac{4}{3}$$

che è la soluzione cercata.

In pratica, i due principi di equivalenza illustrati si applicano osservando che è possibile spostare un termine da un membro all'altro della disequazione a condizione di cambiarne il segno (1° principio) e che è possibile moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per una stessa quantità, tenendo presente che il verso della disuguaglianza va conservato se questa quantità è positiva mentre va rovesciato se questa quantità è negativa (2° principio).

Si possono a questo punto introdurre i principali tipi di disequazioni: razionali intere (di 1° e 2° grado), razionali fratte (e contenenti prodotti di polinomi), con valore assoluto, irrazionali, logaritmiche ed esponenziali, oltre ai sistemi di disequazioni.

1.2. Disequazioni razionali intere di 1° grado

Le disequazioni razionali intere di 1° grado possono sempre essere ricondotte alla forma canonica:

$$ax + b \geq 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax + b \leq 0 \qquad \text{con } a > 0$$

dove eventualmente le disuguaglianze valgono in senso stretto (se risulta $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Da questa forma si ottiene facilmente la soluzione, che è:

$$x \geq -\frac{b}{a} \qquad \text{oppure} \qquad x \leq -\frac{b}{a}$$

Esempio 1.5 *Risolvere la disequazione:*

$$3x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, applicando i principi di equivalenza visti in precedenza si ottiene facilmente:

$$3x > 12$$

e poi:

$$x > 4$$

che è la soluzione.

Esempio 1.6 *Risolvere la disequazione:*

$$-3x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica (in quanto $a < 0$), moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene allora innanzitutto:

$$3x + 12 < 0$$

che è la disequazione scritta nella forma canonica (in quanto $a > 0$). Da questa si ricava poi facilmente (applicando i principi di equivalenza visti in precedenza):

$$3x < -12$$

e poi:

$$x < -4$$

che è la soluzione.

1.3. Disequazioni razionali intere di 2° grado

Le disequazioni razionali intere di 2° grado possono sempre essere ricondotte alla forma canonica:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad \text{con } a > 0$$

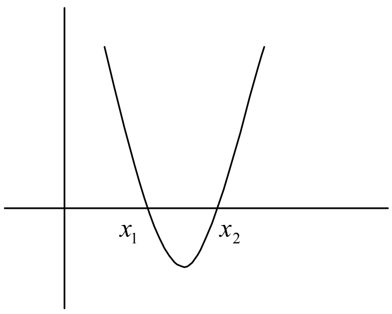
dove eventualmente le disuguaglianze valgono in senso stretto (se risulta $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Per risolvere una disequazione di questo tipo si considera innanzitutto l'equazione di 2° grado associata:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e se ne calcolano le radici x_1 e x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$ nel caso di radici distinte). A questo punto, il trinomio $ax^2 + bx + c$ risulta positivo per $x < x_1$ e per $x > x_2$, negativo per $x_1 < x < x_2$ e nullo per $x = x_1$ e per $x = x_2$.

Più precisamente, tenendo presente che graficamente il trinomio $ax^2 + bx + c$ può essere rappresentato da una parabola con la concavità rivolta verso l'alto (se $a > 0$), e che un'equazione di 2° grado può avere 2 radici reali distinte, 2 radici reali coincidenti oppure nessuna radice reale, si possono distinguere i seguenti 3 casi:

1. Il discriminante dell'equazione di 2° grado risulta positivo, cioè $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. In questo caso la parabola che rappresenta il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha il seguente andamento:



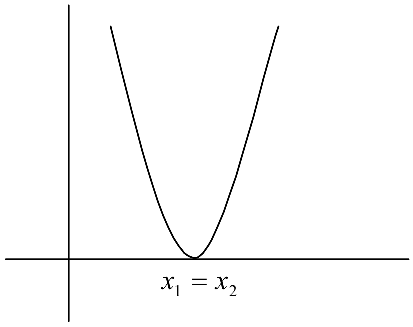
per cui l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali distinte x_1, x_2 (con $x_1 < x_2$) e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x < x_1 \quad \vee \quad x > x_2$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 < x < x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1 \quad \vee \quad x = x_2$$

2. Il discriminante dell'equazione di 2° grado risulta nullo, cioè $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. In questo caso la parabola che rappresenta il trinomio ax^2+bx+c ha il seguente andamento:

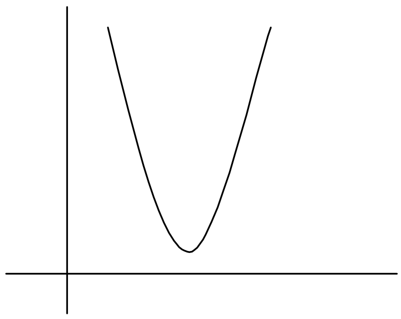


per cui l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali coincidenti $x_1 = x_2$ e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x \neq x_1, x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1, x_2$$

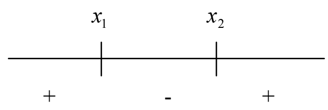
3. Il discriminante dell'equazione di 2° grado risulta negativo,cioè $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. In questo caso la parabola che rappresenta il trinomio ax^2+bx+c ha il seguente andamento:



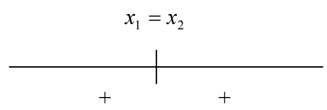
per cui l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non possiede radici reali e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

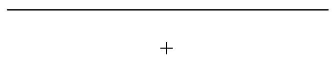
In pratica, quindi, se $\Delta > 0$ il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ presenta questo andamento:



mentre se $\Delta = 0$ le due radici coincidono ($x_1 = x_2$) e il segno del trinomio risulta:



e se $\Delta < 0$ non vi sono radici (reali) e il segno del trinomio è:



Esempio 1.7 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, inoltre l'equazione associata:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

possiede due radici reali distinte $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -2 \quad \vee \quad x > 5$$

Esempio 1.8 *Risolvere la disequazione:*

$$-x^2 + 3x + 10 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica, conviene allora innanzitutto riscriverla in modo da ricondursi a tale forma; moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene:

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

la cui equazione associata (la stessa dell'esercizio precedente) ha radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$-2 < x < 5$$

Esempio 1.9 *Risolvere la disequazione:*

$$-3x^2 + 12x < 0$$

Riscrivendo la disequazione in forma canonica si ottiene innanzitutto:

$$3x^2 - 12x > 0$$

la cui equazione associata:

$$3x^2 - 12x = 0$$

ha radici $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 4$$

Esempio 1.10 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 \geq 4$$

Conviene innanzitutto ricondursi alla forma canonica scrivendo la disequazione nella forma:

$$x^2 - 4 \geq 0$$

dopodiché si osserva che l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

possiede radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2$$

Esempio 1.11 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 4x + 4 < 0$$

In questo caso la disequazione è in forma canonica, e l'equazione associata:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

ha due radici reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione non è mai soddisfatta (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione non è altro che $(x-2)^2$ che, essendo un quadrato, non potrà mai essere < 0).

Esempio 1.12 *Risolvere la disequazione:*

$$3x^2 + 4 > 0$$

In questo caso la disequazione è in forma canonica, e l'equazione associata:

$$3x^2 + 4 = 0$$

non possiede radici reali, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione è la somma di un termine non negativo, $3x^2$, e di un termine positivo, 4, quindi è strettamente positivo qualunque sia il valore di x, per cui la disequazione è sempre verificata).

1.4. Disequazioni razionali fratte

Le disequazioni razionali fratte sono quelle nelle quali l'incognita compare a denominatore di una frazione e possono sempre essere ricondotte alla forma canonica:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

dove eventualmente le disuguaglianze valgono in senso stretto (e dove il numeratore $N(x)$ può anche non dipendere da x, cioè $N(x) = N$ costante, mentre il denominatore $D(x)$ deve necessariamente contenere l'incognita, poiché altrimenti la disequazione non è razionale fratta).

In questo caso occorre innanzitutto scartare i valori di x che annullano il denominatore della frazione $D(x)$ (in quanto una frazione con denominatore nullo perde significato), dopodiché si studiano separatamente il segno di $N(x)$ e quello di $D(x)$ e, combinandoli attraverso la "regola dei segni", si determina il segno della frazione, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.13 *Risolvere la disequazione:*

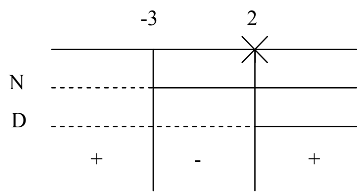
$$\frac{x+3}{2x-4} > 0$$

Deve essere innanzitutto $2x - 4 \neq 0$, da cui $x \neq 2$ (condizione di realtà della frazione). Studiando separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) > 0 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$$

A questo punto, il segno di $N(x)$ e di $D(x)$, insieme a quello globale della frazione, può essere rappresentato graficamente nel modo seguente (dove la linea continua indica gli intervalli in cui il segno è positivo e la linea tratteggiata gli intervalli in cui il segno è negativo, mentre la croce indica il valore escluso dal campo di esistenza):



Dall'analisi di questo grafico si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -3 \quad \vee \quad x > 2$$

Esempio 1.14 *Risolvere la disequazione:*

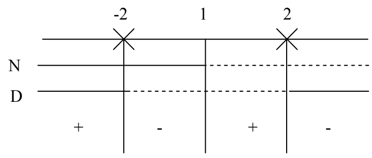
$$\frac{-x+1}{x^2-4} \leq 0$$

Deve essere innanzitutto $x^2 - 4 \neq 0$, da cui $x \neq \mp 2$ (condizione di realtà della frazione). Studiando il segno del numeratore e del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) \geq 0 \Rightarrow -x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \quad \vee \quad x > 2$$

e graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-2 < x \leq 1 \quad \vee \quad x > 2$$

Poiché il segno di un prodotto segue le stesse regole del segno di un rapporto, lo stesso procedimento visto per risolvere le disequazioni razionali fratte può essere utilizzato anche per risolvere disequazioni contenenti solo prodotti di polinomi. In questo caso si studiano separatamente i segni dei singoli fattori e poi, combinandoli come visto in precedenza, si determina il segno del prodotto, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.15 *Risolvere la disequazione:*

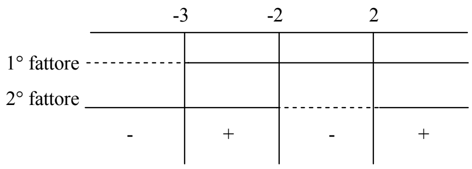
$$(x+3)(x^2-4) > 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$2^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x^2-4 > 0 \Rightarrow x < -2 \quad \vee \quad x > 2$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-3 < x < -2 \quad \vee \quad x > 2$$

Esempio 1.16 *Risolvere la disequazione:*

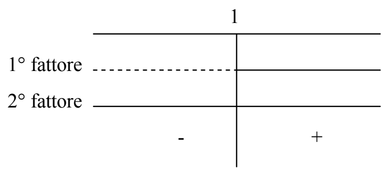
$$(x-1)(x^2-x+3) \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1° \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2° \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x^2-x+3 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$x \leq 1$$

1.5. Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è un insieme di due o più disequazioni che devono essere verificate simultaneamente. Per risolvere un sistema di disequazioni occorre quindi risolvere ciascuna delle disequazioni che lo compongono e considerare poi solo le soluzioni che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni. A questo scopo è possibile utilizzare una rappresentazione grafica, in cui si indicano con una linea continua i valori soluzione di ogni disequazione; il sistema è allora soddisfatto negli intervalli in corrispondenza dei quali tutte le linee (tante quante le disequazioni che compongono il sistema stesso) sono continue.

Esempio 1.17 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2x-4} > 0 \\ \\ -x^2 + 3x + 10 > 0 \end{cases}$$

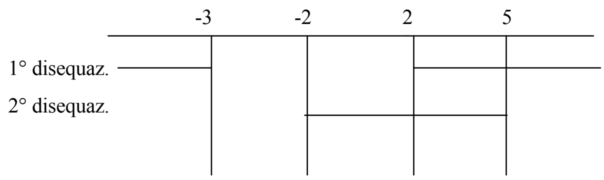
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, si è visto che la disequazione fratta ha soluzione:

$$x < -3 \quad \vee \quad x > 2$$

mentre la disequazione di 2° grado ha soluzione:

$$-2 < x < 5$$

A questo punto è possibile rappresentare graficamente questi insiemi di soluzioni, ottenendo:



da cui si deduce che il sistema considerato ha soluzione:

$$2 < x < 5$$

perché in corrispondenza di questo intervallo vi sono contemporaneamente due linee continue (tante quante le disequazioni che formano il sistema).

Esempio 1.18 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} -3x - 12 > 0 \\ \\ \dfrac{-x+1}{x^2-4} \leq 0 \end{cases}$$

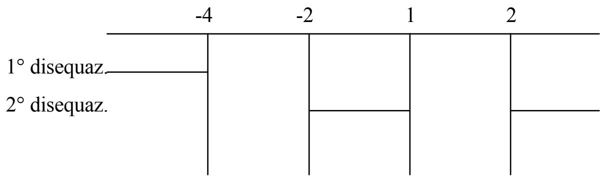
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, la prima ha soluzione:

$$x < -4$$

mentre la seconda ha soluzione:

$$-2 < x \leq 1 \quad \vee \quad x > 2$$

Rappresentando graficamente questi insiemi di soluzioni si ottiene:



da cui si deduce che il sistema considerato non ammette soluzioni (perché in nessun intervallo dell'asse reale vi sono contemporaneamente due linee continue), cioè è impossibile.

1.6. Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni con valore assoluto sono quelle contenenti il valore assoluto di una o più espressioni. Dato $x \in \mathbb{R}$, il valore assoluto di x è definito nel modo seguente:

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Più in generale, data un'espressione $f(x)$ che dipende da una quantità variabile x, il valore assoluto di $f(x)$ è definito come:

$$\mid f(x) \mid = \begin{cases} f(x) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ \\ -f(x) & \forall x : f(x) < 0 \end{cases}$$

Per definizione, il valore assoluto di una determinata espressione è quindi sempre non negativo, e in particolare è nullo quando è nulla l'espressione contenuta nel valore assoluto.

Per risolvere una disequazione contenente uno o più valori assoluti è necessario "spezzarla" in due o più (sistemi di) disequazioni corrispondenti agli intervalli di positività e di negatività delle espressioni alle quali i valori assoluti si riferiscono, e la soluzione cercata è data dall'unione delle soluzioni di queste singole disequazioni.

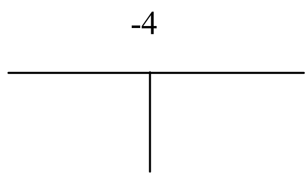
Esempio 1.19 *Risolvere la disequazione:*

$$| x + 4 | < 1$$

Applicando la definizione di valore assoluto all'espressione $| x + 4 |$ si ottiene:

$$| x + 4 | = \begin{cases} x + 4 & \text{se} \quad x + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -4 \\ -x - 4 & \text{se} \quad x + 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -4 \end{cases}$$

per cui -4 è il valore "critico", che delimita i due intervalli in corrispondenza dei quali l'espressione che compare dentro il valore assoluto cambia segno:



A questo punto, la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei seguenti 2 sistemi (uno per ciascuno dei due intervalli in cui l'espressione contenuta nel valore assoluto cambia segno):

$$\begin{cases} x < -4 \\ -x - 4 < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -4 \\ x + 4 < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x < -4 \\ x > -5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -4 \\ x < -3 \end{cases}$$

e poi:

$$-5 < x < -4 \quad \vee \quad -4 \leq x < -3$$

e infine:

$$-5 < x < -3$$

che rappresenta la soluzione della disequazione iniziale.

Esempio 1.20 *Risolvere la disequazione:*

$$| x+3 |<| x-4 |$$

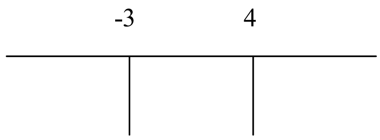
Applicando la definizione di valore assoluto alle espressioni $| x+3 |$ e $| x-4 |$ si ottiene:

$$| x+3 |= \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x+3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ \\ -x-3 & \text{se} \quad x+3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$$

e poi:

$$| x-4 |= \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x-4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4 \\ \\ -x+4 & \text{se} \quad x-4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \end{cases}$$

per cui -3 e 4 sono i valori “critici”, che delimitano gli intervalli in corrispondenza di ciascuno dei quali una delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno:



A questo punto la disequazione di partenza può essere “spezzata” nei seguenti 3 sistemi (uno per ciascuno degli intervalli in cui una delle espressioni contenute nei valori assoluti cambia segno):

$$\begin{cases} x < -3 \\ \\ -x-3 < -x+4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \\ x+3 < -x+4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ \\ x+3 < x-4 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x < -3 \\ \\ -3 < 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ \\ 3 < -4 \end{cases}$$

e poi:

$$x < -3 \quad \vee \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \emptyset$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$x < \frac{1}{2}$$

Esempio 1.21 *Risolvere la disequazione:*

$$\frac{|\, x+5 \,|}{2-|\, x \,|} \geq 0$$

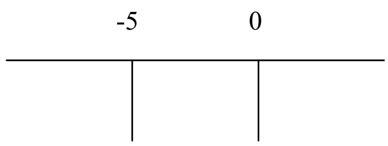
In questo caso occorre innanzitutto escludere i valori di x che annullano il denominatore della frazione, quindi deve essere $2-|x| \neq 0$, da cui $|\, x \,| \neq 2$, cioè $x \neq \mp 2$. Applicando la definizione di valore assoluto alle espressioni $|\, x+5 \,|$ e $|\, x \,|$ si ottiene poi:

$$|\, x+5 \,| = \begin{cases} x+5 & \text{se} \quad x+5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -5 \\ \\ -x-5 & \text{se} \quad x+5 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -5 \end{cases}$$

e:

$$|\, x \,| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

per cui -5 e 0 sono i valori "critici", che delimitano gli intervalli in corrispondenza di ciascuno dei quali una delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno:



A questo punto la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei seguenti 3 sistemi (uno per ciascuno degli intervalli in cui una delle espressioni contenute nei valori assoluti cambia segno):

$$\begin{cases} x < -5 \\ \\ \dfrac{-x-5}{2-(-x)} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -5 \leq x < 0 \\ \\ \dfrac{x+5}{2-(-x)} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ \\ \dfrac{x+5}{2-x} \geq 0 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x < -5 \\ \\ \dfrac{-x-5}{2+x} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -5 \leq x < 0 \\ \\ \dfrac{x+5}{2+x} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ \\ \dfrac{x+5}{2-x} \geq 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x < -5 \\ \\ -5 \leq x < -2 \end{cases} \vee \begin{cases} -5 \leq x < 0 \\ \\ x \leq -5 \quad \vee \quad x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ \\ -5 \leq x < 2 \end{cases}$$

cioè:

$$\emptyset \quad \vee \quad (-5 \vee -2 < x < 0) \quad \vee \quad 0 \leq x < 2$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$-5 \quad \vee \quad -2 < x < 2$$

Esempio 1.22 *Risolvere la disequazione:*

$$| x^2 - 9 | > -3$$

In questo caso è possibile osservare immediatamente che, poiché il valore assoluto di una certa espressione è, per definizione, non negativo, il primo membro è sempre ≥ 0, quindi sicuramente è maggiore di -3 e di conseguenza la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.7. Disequazioni irrazionali

Le disequazioni irrazionali sono quelle nelle quali l'incognita compare sotto il segno di radice. Per la loro soluzione conviene isolare la radice ad uno dei due membri, dopodiché occorre distinguere il caso in cui l'indice della radice è dispari e il caso in cui l'indice è pari.

Se la radice presente nella disequazione è di indice n dispari, si ottiene una disequazione equivalente a quella data elevando entrambi i membri alla potenza n; non sono necessarie altre condizioni, perché una radice di indice dispari può avere il radicando di segno qualsiasi e può essa stessa assumere segno qualsiasi. Se le radici sono più di una, eventualmente con indici diversi (sempre dispari), si elevano entrambi i membri alle potenze opportune in modo da eliminare le radici.

Esempio 1.23 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x^2 - 5} \leq -1$$

In questo caso elevando entrambi i membri al cubo si ottiene:

$$x^2 - 5 \leq -1$$

e poi:

$$x^2 - 4 \leq 0$$

da cui:

$$-2 \leq x \leq 2$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.24 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x+1} < \sqrt[9]{x^3+3x^2}$$

In questo caso elevando entrambi i membri alla nona si ottiene:

$$(x+1)^3 < x^3 + 3x^2$$

e poi:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < x^3 + 3x^2$$

da cui:

$$x < -\frac{1}{3}$$

che è la soluzione della disequazione.

Se la radice presente nella disequazione, invece, è di indice n pari, è possibile risolvere la disequazione utilizzando il seguente procedimento:

1. Si individua il campo di esistenza della radice (richiedendo che il radicando sia non negativo), quindi si discutono i segni dei due membri.

2. Se i due membri sono discordi si individuano subito i valori dell'incognita per i quali la disequazione è soddisfatta.

3. Se i due membri sono concordi (in particolare non negativi, in caso contrario si rendono non negativi moltiplicando entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza) si elevano alla potenza n, quindi si risolve la disequazione.

4. Si considera l'unione delle soluzioni trovate ai punti 2) e 3).

Si deve osservare che, nel caso di radice di indice pari, non sarebbe corretto elevare subito entrambi i membri alla potenza n (senza discutere il loro segno), poiché in questo modo si rischierebbe di introdurre soluzioni estranee oppure di trascurare una parte della soluzione.

Esempio 1.25 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 3 \leq \sqrt{x}$$

Applicando il procedimento sopra descritto si ha:

a) Deve essere innanzitutto $x \geq 0$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $x - 3 < 0$, cioè $x < 3$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x < 3$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$0 \leq x < 3$$

c) Se $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(x - 3)^2 \leq x$$

cioè:

$$x^2 - 7x + 9 \leq 0$$

che ha soluzioni:

$$\frac{7 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq 3$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$3 \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c) (cioè considerando la loro unione), infine, si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$0 \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

Si può osservare che se si procedesse elevando subito i due membri al quadrato si troverebbe la soluzione (che tiene conto della condizione di realtà) $\frac{7-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ che però non è corretta, in quanto trascura una parte dei valori dell'incognita che soddisfano la disequazione.

Esempio 1.26 *Risolvere la disequazione:*

$$x + 3 \geq \sqrt{3x - 1}$$

a) Deve essere innanzitutto $3x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq \dfrac{1}{3}$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $x + 3 < 0$, cioè $x < -3$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione non è mai soddisfatta (in quanto una quantità negativa non è mai maggiore o uguale ad una quantità positiva o nulla).

c) Se $x+3 \geq 0$, cioè $x \geq -3$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(x + 3)^2 \geq 3x - 1$$

cioè:

$$x^2 + 3x + 10 \geq 0$$

che è sempre verificata, purché sia $x \geq \dfrac{1}{3}$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq -3$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$x \geq \frac{1}{3}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x \geq \frac{1}{3}$$

Esempio 1.27 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt{x^2 + 2x - 8} < \sqrt{x + 4}$$

Si deve avere innanzitutto, per la condizione di realtà delle radici:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \quad \vee \quad x \geq 2 \\ \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \quad \vee \quad x \geq 2$$

A questo punto si può osservare che sicuramente entrambi i membri della disequazione sono concordi (non negativi), in quanto si tratta di due radici ad indice pari, si possono allora elevare al quadrato ottenendo:

$$x^2 + 2x - 8 < x + 4$$

cioè:

$$x^2 + x - 12 < 0$$

che ha soluzione:

$$-4 < x < 3$$

Combinando questo risultato con la condizione di realtà si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$2 \le x < 3$$

Esempio 1.28 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x + x^2} \le \sqrt{x}$$

a) Deve essere innanzitutto $x \ge 0$ (condizione di realtà della radice ad indice pari).

b) Se $x + x^2 < 0$, cioè $-1 < x < 0$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \ge 0$ (che è la condizione di realtà) e $-1 < x < 0$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Queste sono però condizioni incompatibili, per cui in realtà in questo caso la disequazione non ha soluzioni.

c) Se $x + x^2 \ge 0$, cioè $x \le -1 \quad \vee \quad x \ge 0$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare alla sesta e la disequazione diventa:

$$(x + x^2)^2 \le x^3$$

e poi:

$$x^4 + x^3 + x^2 \le 0$$

e infine:

$$x^2 \left(x^2 + x + 1\right) \le 0$$

che è verificata solo per $x = 0$ (compatibile con la condizione di realtà $x \ge 0$ e con la condizione $x \le -1 \quad \vee \quad x \ge 0$ che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame).

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x = 0$$

Nel caso di disequazioni con radici ad indice pari è anche possibile trasformare tali disequazioni in sistemi ad esse equivalenti. In particolare, considerando una disequazione del tipo:

$$A(x) \geq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice) e anche $A(x) \geq 0$ (in quanto la radice a secondo membro è sicuramente non negativa, e quindi affinché la disequazione sia soddisfatta anche il primo membro deve essere non negativo), dopodiché è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che a questo punto sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice. La disequazione di partenza è quindi equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \geq B(x) \end{cases}$$

Considerando invece una disequazione del tipo:

$$A(x) \leq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice), se poi $A(x) \geq 0$ è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che in questo caso sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice, e la disequazione di partenza è soddisfatta dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases}$$

nel quale la prima condizione è superflua in quanto è implicata dalla terza (infatti se $B(x) \geq [A(x)]^2$ allora sicuramente $B(x) \geq 0$). In questo caso, inoltre, la disequazione di partenza è verificata anche quando $A(x) < 0$ (perché una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità non negativa quale è $\sqrt{B(x)}$), quindi essa è soddisfatta anche dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

e, in definitiva, la disequazione di partenza equivale all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

In questi casi, quindi, data la disequazione iniziale è possibile innanzitutto scrivere il sistema (o i sistemi) ad essa equivalente, dopodiché la soluzione di questo sistema corrisponde a quella della disequazione di partenza.

Esempio 1.29 *Risolvere la disequazione:*

$$x + 3 \geq \sqrt{3x - 1}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.26) è scritta nella forma $A(x) \geq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi al sistema:

$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ (x+3)^2 \geq 3x - 1 \end{cases}$$

dal quale si ottiene:

$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x \geq -3 \\ \forall x \end{cases}$$

e infine:

$$x \geq \frac{1}{3}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.30 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 3 \leq \sqrt{x}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.25) è scritta nella forma $A(x) \leq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (x-3)^2 \leq x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

dai quali si ottiene:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 9 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

e poi:

$$3 \leq x \leq \frac{7+\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad 0 \leq x < 3$$

e infine:

$$0 \leq x \leq \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

1.8. Disequazioni logaritmiche

Dati due numeri a, $b > 0$ (con $a \neq 1$) si definisce logaritmo in base a di b il numero c al quale si deve elevare a per ottenere b; si ha quindi:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Dalla definizione di logaritmo si ha allora:

$$\log_a a^b = b \qquad\qquad a^{\log_a b} = b$$

per cui un qualsiasi numero b può essere espresso attraverso il logaritmo in una qualsiasi base $a > 0$ (e diversa da 1) utilizzando una delle due relazioni viste (la seconda può essere utilizzata solo quando $b > 0$). I logaritmi soddisfano inoltre le seguenti proprietà:

(i) $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0,\ a \neq 1$

(ii) se $0 < a < 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x > \log_a x'$ con $x,\ x' > 0$

(iii) se $a > 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x < \log_a x'$ con $x,\ x' > 0$

(iv) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ con $x,\ y > 0$

(v) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$ con $x,\ y > 0$

(vi) $\log_a x^p = p \log_a x$ con $x > 0$

(vii) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ con $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$

Le disequazioni logaritmiche sono quelle nelle quali l'incognita compare nell'argomento di un logaritmo. Per risolverle occorre innanzitutto richiedere che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (condizione di realtà), dopodiché si sfruttano le proprietà sopra elencate per giungere alla soluzione.

Esempio 1.31 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_{\frac{1}{2}} x < -4$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando semplicemente la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

cioè:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 16$$

e infine (applicando la proprietà (*ii*) vista sopra – poiché la base del logaritmo in questo caso è minore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra i rispettivi argomenti il verso della disuguaglianza va rovesciato –):

$$x > 16$$

che è la soluzione della disequazione (essendo compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando le proprietà degli esponenziali (elencate nella prossima Sezione); in questo caso si può scrivere innanzitutto (applicando ad entrambi i membri della disequazione di partenza l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$, il che richiede di rovesciare la disuguaglianza poiché la base dell'esponenziale è minore di 1):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

dopodiché si ha (applicando semplicemente la definizione di logaritmo per quanto riguarda il primo membro):

$$x > 16$$

che è la soluzione della disequazione (compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Esempio 1.32 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_2 x > 3$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_2 x > \log_2 (2)^3$$

cioè:

$$\log_2 x > \log_2 8$$

e infine (applicando la proprietà (*iii*) vista sopra – poiché la base del logaritmo in questo caso è maggiore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra i rispettivi argomenti il verso della disuguaglianza si conserva –):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (essendo compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando le proprietà degli esponenziali; in questo caso si può scrivere innanzitutto (applicando ad entrambi i membri della disequazione l'esponenziale di base 2, il che richiede di conservare la disuguaglianza poiché la base dell'esponenziale è maggiore di 1):

$$2^{\log_2 x} > 2^3$$

dopodiché si ha (applicando al primo membro la definizione di logaritmo):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Esempio 1.33 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{x+2} < 0$$

Si deve innanzitutto avere, per le condizioni di realtà della frazione e del logaritmo:

$$\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 0 \quad \vee \quad x > 0$$

dopodiché la disequazione di partenza può essere scritta nella forma:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{x+2} < \log_{\frac{1}{3}} 1$$

e passando agli argomenti (rovesciando la disuguaglianza, perché la base dei logaritmi è minore di 1):

$$\frac{x^2}{x+2} > 1$$

(la stessa espressione può essere ottenuta se, nella disequazione di partenza, si applica ai due membri l'esponenziale di base $\frac{1}{3}$). Questa è una disequazione razionale fratta, risolvendola come visto in precedenza (dopo averla ricondotta alla forma canonica $\frac{x^2}{x+2} - 1 > 0$ e avere eseguito i calcoli) si ottiene:

$$-2 < x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

che è compatibile con la condizione di realtà determinata inizialmente ($-2 < x < 0 \quad \vee \quad x > 0$), per cui quella trovata è anche la soluzione della disequazione di partenza.

Esempio 1.34 *Risolvere la disequazione:*

$$\log \sqrt{x+5} \leq 3$$

Si deve innanzitutto avere, per le condizioni di realtà della radice e del logaritmo:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ \sqrt{x+5} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -5$$

A questo punto (tenendo presente che quando la base non è indicata il logaritmo si intende in base $e = 2.7182...$, quindi maggiore di 1) la disequazione di partenza può essere scritta come:

$$\log \sqrt{x+5} \leq \log e^3$$

da cui:

$$\sqrt{x+5} \leq e^3$$

(la stessa espressione può essere ottenuta se, nella disequazione di partenza, si applica ai due membri l'esponenziale di base e). Questa è una disequazione irrazionale che può essere risolta come visto in precedenza (in particolare, poiché entrambi i membri sono concordi non negativi si possono elevare al quadrato) ottenendo:

$$x \leq e^6 - 5$$

Combinando questa soluzione con la condizione di realtà trovata all'inizio ($x > -5$) si ottiene la soluzione della disequazione di partenza, che è:

$$-5 < x \leq e^6 - 5$$

1.9. Disequazioni esponenziali

Dato un numero $a > 0$ (e diverso da 1) si indica con a^x una potenza di a ad esponente x reale. Si parla in questo caso di esponenziale, e gli esponenziali soddisfano le seguenti proprietà:

$$(i) \quad a^x > 0 \quad \forall x \text{ con } a > 0$$

$$(ii) \quad \text{se } 0 < a < 1 \text{ allora si ha } x < x' \Leftrightarrow a^x > a^{x'}$$

$$(iii) \quad \text{se } a > 1 \text{ allora si ha } x < x' \Leftrightarrow a^x < a^{x'}$$

Le disequazioni esponenziali sono quelle nelle quali l'incognita compare ad esponente di una certa espressione, e per risolverle si sfruttano le proprietà sopra elencate.

Esempio 1.35 *Risolvere la disequazione:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16$$

Si può innanzitutto riscrivere la disequazione nella forma:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

e poi (applicando la proprietà (ii) vista sopra – poiché la base dell'esponenziale in questo caso è minore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra gli esponenziali a quella tra i rispettivi esponenti il verso della disuguaglianza va rovesciato –):

$$x > -4$$

che è la soluzione della disequazione.

Lo stesso risultato può essere ottenuto servendosi dei logaritmi (in effetti le disequazioni esponenziali e quelle logaritmiche sono tra di loro strettamente legate, essendo esponenziali e logaritmi funzioni una inversa dell'altra). In particolare, partendo dalla disequazione data e applicando ad entrambi i membri il logaritmo in base $\frac{1}{2}$ (il che richiede di cambiare verso alla disuguaglianza, essendo la base minore di 1) si ottiene innanzitutto:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} 16$$

e poi (applicando semplicemente la definizione di logaritmo):

$$x > -4$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.36 *Risolvere la disequazione:*

$$3^x > 9$$

Si può innanzitutto riscrivere la disequazione nella forma:

$$3^x > 3^2$$

e poi (applicando la proprietà (*iii*) vista sopra – poiché la base dell'esponenziale in questo caso è maggiore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra gli esponenziali a quella tra i rispettivi esponenti il verso della disuguaglianza si conserva –):

$$x > 2$$

che è la soluzione della disequazione.

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando ad entrambi i membri della disequazione iniziale il logaritmo in base 3 (mantenendo il verso della disuguaglianza, poiché la base in questo caso è maggiore di 1), per cui si ha:

$$\log_3 3^x > \log_3 9$$

e poi (applicando la definizione di logaritmo):

$$x > 2$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.37 *Risolvere la disequazione:*

$$4^{2x+1} + 4^x - 1 < 0$$

Questa disequazione può innanzitutto essere scritta come:

$$4 \cdot 4^{2x} + 4^x - 1 < 0$$

e poi, ponendo $4^x = z$, si ha:

$$4z^2 + z - 1 < 0$$

che è una disequazione di 2° grado la cui soluzione è:

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{8} < z < \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$$

Tornando alla variabile di partenza si ha:

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{8} < 4^x < \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$$

dove la prima disuguaglianza è sicuramente verificata (poiché 4^x è sempre positivo, quindi maggiore della quantità negativa $\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$), mentre la seconda disuguaglianza (applicando ad entrambi i membri il logaritmo in base 4) conduce a:

$$x < \log_4 \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$$

che è la soluzione della disequazione di partenza.

Esempio 1.38 *Risolvere la disequazione:*

$$2^{x-1} > 3^{x+1}$$

Applicando il logaritmo in base e ad entrambi i membri si ha innanzitutto:

$$\log 2^{x-1} > \log 3^{x+1}$$

cioè:

$$(x-1)\log 2 > (x+1)\log 3$$

e con alcuni semplici calcoli si ottiene:

$$x(\log 2 - \log 3) > \log 2 + \log 3$$

da cui (tenendo presente che la quantità $(\log 2 - \log 3)$ è negativa, per cui quando si dividono entrambi i membri per questa quantità la disuguaglianza va rovesciata):

$$x < \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3}$$

che è la soluzione della disequazione data.

1.10. Esercizi da svolgere

Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $3x + 2 < -1$

2) $3(x + 2) - 4(x + 3) \leq 1$

3) $x^2 + 4x - 21 > 0$

4) $3x^2 - 15x \leq 0$

5) $x^2 - 6x + 9 > 0$

6) $2x^2 - 15x + 30 < 0$

7) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} \leq 0$

8) $\dfrac{4x - 5}{5x} < 4x$

9) $\dfrac{4x - 3}{2x} < 3x$

10) $(x - 3)^2(x + 5) \leq 0$

11) $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5) \leq 0$

12) $\begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 3x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + 4x - 21 > 0 \\ 3x^2 - 15x \leq 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ 2x^2 - 15x + 30 < 0 \end{cases}$

16) $\left|x^2 - 1\right| \geq -1$

17) $\mid x^2 - 2x + 5 \mid \leq -3$

18) $\left|x^2 - 4\right| > x - 2$

19) $\left|x^2 - 4\right| \geq x - 2$

20) $\mid x - 2 \mid < 2x + 2$

21) $\mid x - 2 \mid < \mid x \mid$

22) $\sqrt{x^2 - 4} < x$

23) $\sqrt{x^2 - 4} < x - 4$

24) $\sqrt{x + 5} < x - 1$

25) $\sqrt{x + 5} > x - 1$

26) $\sqrt{x + 2} \leq x + 1$

27) $\sqrt{x^2 + 7} > -2$

28) $\sqrt{x^2 + 1} > 1$

29) $\sqrt{x^2 - 1} \geq 1$

30) $\sqrt{x + 1} > \sqrt[3]{x - 1}$

31) $\log_3(x + 2) < 2$

32) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) < 2$

33) $\log_3(x^2 + 8) < -2$

34) $\log_4(x^2 + 7) < -2$

35) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 7) < -2$

36) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4) < -3$

37) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4) > -3$

38) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3) < -2$

39) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-1} \geq -1$

40) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+9} \leq -1$

41) $\log \sqrt{x+3} \leq 1$

42) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-4x} \leq 1$

43) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} \leq 1$

44) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x} \leq 1$

45) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x} \geq 1$

46) $2^{x^2-16} \geq 1$

47) $2^{x^2-3} < 2$

48) $4^x + 2^x - 2 < 0$

49) $4 \cdot 3^x \leq 2 \cdot 4^x$

50) $2^{x+1} > 3^{x-1}$

Capitolo 2

Insiemi e logica

2.1. Insiemi e loro operazioni

Il concetto di insieme viene di solito assunto come noto e utilizzato come sinonimo di collezione, famiglia, classe di elementi individuati in base ad una determinata specificazione. Gli insiemi vengono indicati con lettere maiuscole, mentre i loro elementi vengono indicati con lettere minuscole. Un primo modo per rappresentare un insieme consiste nell'elencare i suoi elementi, un secondo modo consiste invece nell'indicare una proprietà che li caratterizza, mentre un terzo modo consiste nell'utilizzare i diagrammi di Venn, nei quali gli elementi dell'insieme sono rappresentati come punti del piano.

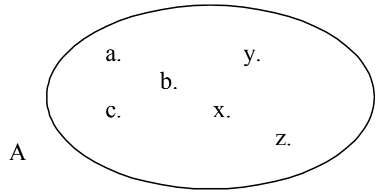
Esempio 2.1 *L'insieme A costituito dalle lettere dell'alfabeto può essere rappresentato elencando i suoi elementi:*

$$A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$$

oppure indicando una loro proprietà caratteristica:

$$A = \{\textit{lettere dell'alfabeto}\}$$

oppure con un diagramma di Venn:



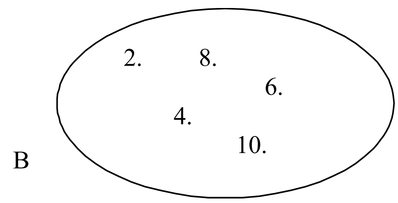
Esempio 2.2 *L'insieme B costituito dai primi 5 numeri positivi pari può essere rappresentato elencando i suoi elementi:*

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

oppure indicando una loro proprietà caratteristica:

$$B = \{\textit{primi } 5 \textit{ numeri positivi pari}\}$$

oppure con un diagramma di Venn:



Un simbolo spesso utilizzato è quello di $\in$ che indica "appartenenza", mentre il simbolo $\notin$ indica "non appartenenza", ed un insieme particolare è l'insieme vuoto, cioè privo di elementi, che si indica con il simbolo $\emptyset$.

Esempio 2.3 *Dato l'insieme:*

$$X = \{0, 1, 2\}$$

si ha che $1 \in X$ (cioè 1 è un elemento dell'insieme), mentre $4 \notin X$ (cioè 4 non è un elemento dell'insieme).

Dato l'insieme vuoto, poi, si ha che per qualsiasi elemento a risulta $a \notin \emptyset$ (cioè a non è un elemento dell'insieme vuoto).

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi, e in questo caso non è rilevante l'ordine con il quale essi vengono elencati.

Dati due insiemi A e B, si dice che A è sottoinsieme di B (oppure che A è contenuto in B) se ogni elemento di A è anche elemento di B, e si scrive $A \subseteq B$. Il simbolo $\subseteq$ indica inclusione, e non esclude che gli insiemi A e B coincidano, mentre se si vuole escludere questa possibilità si può usare il simbolo di inclusione stretta $\subset$. Si dice allora che A è sottoinsieme proprio di B (oppure che A è strettamente contenuto in B) se ogni elemento di A è anche elemento di B, ma esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A, e si scrive $A \subset B$. In particolare, l'insieme $\emptyset$ è strettamente contenuto in ogni altro insieme.

Esempio 2.4 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad\qquad B = \{1, 2, 0\}$$

si ha $A \subseteq B$ e anche $B \subseteq A$, cioè A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A, per cui in realtà i due insiemi sono uguali, cioè $A = B$.

Dati invece gli insiemi:

$$A = \{0, 1\} \qquad\qquad B = \{0, 1, 2\}$$

si ha $A \subset B$, cioè A è un sottoinsieme (proprio) di B.

Dato un insieme A, l'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi (propri e impropri) prende il nome di insieme delle parti e viene indicato con $\mathcal{P}(A)$. Se A è formato da n elementi, il suo insieme delle parti è costituito da 2^n elementi.

Esempio 2.5 *Dato l'insieme:*

$$A = \{1, 2, 3\}$$

determinare il suo insieme delle parti.

In questo caso l'insieme delle parti di A è dato da:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

che risulta costituito da $2^3 = 8$ elementi.

Tra insiemi si possono poi definire alcune operazioni. In particolare, dati due insiemi A e B, la loro unione è l'insieme, indicato con $A \cup B$, costituito da tutti gli elementi che appartengono ad A o a B (o ad entrambi), cioè:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

mentre la loro intersezione è l'insieme, indicato con $A \cap B$, costituito da tutti gli elementi che appartengono sia ad A sia a B, cioè:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se due insiemi hanno intersezione vuota (cioè $A \cap B = \emptyset$) si dicono disgiunti.

Esempio 2.6 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad B = \{1, 2, 3\}$$

individuare la loro unione e la loro intersezione.

In questo caso l'unione dei due insiemi è data da:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$$

mentre la loro intersezione è data da:

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

Dato un sottoinsieme A di U (insieme universo), il complementare di A rispetto ad U, indicato con A_U^C (oppure con A^C o con $\overline{A}$) è l'insieme formato dagli elementi di U che non appartengono ad A, cioè:

$$A^C = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

mentre dati due insiemi A e B l'insieme differenza di A e B, indicato con $A \setminus B$, è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A ma non a B, cioè:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Esempio 2.7 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{1, 4\} \qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad B = \{0, 1, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3\}$$

individuare il complementare di A rispetto ad U e l'insieme differenza di B e C.

In questo caso il complementare di A rispetto ad U è:

$$A^C = \{2, 3, 5, 6\}$$

mentre l'insieme differenza di B e C è:

$$B \setminus C = \{0\}$$

cioè l'insieme costituito dal solo elemento 0 (che non va confuso con l'insieme vuoto $\emptyset$).

Le operazioni di unione, intersezione e complementare godono di una serie di proprietà, in particolare:

(i) proprietà di idempotenza:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(ii) proprietà commutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(iii) proprietà associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(iv) proprietà distributiva:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(v)

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

(vi) leggi di De Morgan:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Dati due insiemi del tipo $A = \{a, b\}$ e $B = \{b, a\}$, come visto in precedenza essi coincidono (cioè $A = B$), in quanto possiedono gli stessi elementi. In molti casi occorre invece considerare delle coppie ordinate, nelle quali cioè è rilevante l'ordine con il quale si scrivono gli elementi. Dati due insiemi A e B (non necessariamente distinti), si chiama coppia ordinata un insieme (a, b) costituito prendendo un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$ nell'ordine indicato. L'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ si chiama prodotto cartesiano di A e B e si indica con $A \times B$, cioè:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

e se $A \neq B$ allora risulta $A \times B \neq B \times A$, mentre nel caso in cui sia $A = B$ allora si scrive $A \times A = A^2$.

Esempio 2.8 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad\qquad B = \{-1, 1\}$$

individuare i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$.

In questo caso il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato da:

$$A \times B = \{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$$

mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato da:

$$B \times A = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

e risulta $A \times B \neq B \times A$.

Più in generale, si chiama prodotto cartesiano di n insiemi $A_1, A_2, ..., A_n$ l'insieme delle n-ple ordinate di elementi appartenenti rispettivamente ad $A_1, A_2, ..., A_n$, cioè:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i \qquad i = 1, 2, ..., n\}$$

2.2. Insiemi di numeri reali e loro topologia

Insiemi di particolare importanza sono quelli numerici, più precisamente l'insieme dei numeri interi naturali $\mathbb{N}$, quello dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, quello dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e quello dei numeri reali $\mathbb{R}$, che stanno tra di loro nella seguente relazione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

dove ciascun insieme è un sottoinsieme proprio di quello successivo.

Un rilievo particolare spetta poi ad alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, che vengono detti intervalli. A questo proposito, dati due numeri reali a, b con $a < b$ si introducono i seguenti insiemi:

(i) intervallo chiuso e limitato di estremi a e b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

(ii) intervallo aperto e limitato di estremi a e b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

(iii) intervallo semichiuso o semiaperto (chiuso a sinistra e aperto a destra) e limitato di estremi a e b:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

(iv) intervallo semiaperto o semichiuso (aperto a sinistra e chiuso a destra) e limitato di estremi a e b:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

nei quali la specificazione "chiuso" e "aperto" deriva dal fatto che gli estremi, rispettivamente, appartengono o non appartengono all'insieme in esame, mentre la specificazione "limitato" deriva dal fatto che gli estremi costituiscono un confine inferiore e superiore per gli elementi dell'insieme stesso.

Tutti questi intervalli hanno un segmento di retta come immagine geometrica, mentre una semiretta è l'immagine geometrica degli intervalli illimitati, che sono insiemi definiti nel seguente modo:

(i) intervallo chiuso e illimitato a destra:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

(ii) intervallo aperto e illimitato a destra:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

(iii) intervallo chiuso e illimitato a sinistra:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

(iv) intervallo aperto e illimitato a sinistra:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

L'insieme dei numeri reali, la cui immagine geometrica è la retta, infine, può essere indicato con:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Con riferimento agli insiemi di numeri reali si possono introdurre le nozioni di massimo e minimo. In particolare, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero reale M si dice massimo dell'insieme A se:

$$\begin{aligned} &(i)\ M \in A \\ &(ii)\ M \geq a \qquad \forall a \in A \end{aligned}$$

mentre un numero reale m si dice minimo dell'insieme A se:

$$\begin{aligned} &(i)\ m \in A \\ &(ii)\ m \leq a \qquad \forall a \in A \end{aligned}$$

cioè il massimo (minimo) di un insieme è un elemento che appartiene all'insieme e che risulta maggiore (minore) o uguale a tutti gli elementi dell'insieme.

Esempio 2.9 *Dati gli insiemi (intervalli) di numeri reali:*

$$A = [-1, 3] \qquad\qquad B = (-1, 3)$$

individuare (se esistono) il massimo e il minimo.

Per l'insieme A il massimo e il minimo sono, rispettivamente:

$$\max A = 3 \qquad\qquad \min A = -1$$

in quanto essi rispettano le condizioni (i) e (ii) delle definizioni. Per l'insieme B, invece, il massimo e il minimo non esistono, in quanto i valori $x = -1$ e $x = 3$ soddisfano la condizione (ii) delle definizioni ma non la condizione (i) (poiché non appartengono all'insieme B).

Poiché massimo e minimo non esistono sempre, è possibile introdurre i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore (che invece esistono sempre). Innanzitutto, un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste un numero h maggiore (o uguale) di tutti gli elementi di A, cioè:

$$\exists h \in \mathbb{R} : h \geq a \qquad \forall a \in A$$

mentre si dice limitato inferiormente se esiste un numero k minore (o uguale) di tutti gli elementi di A, cioè:

$$\exists k \in \mathbb{R} : k \leq a \qquad \forall a \in A$$

e si dice limitato se è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente.

Esempio 2.10 *L'insieme:*

$$A = [-1, 3]$$

è limitato superiormente e inferiormente, quindi è limitato, mentre l'insieme:

$$B = (-\infty, 3)$$

è limitato superiormente ma non inferiormente, e l'insieme:

$$C = [1, +\infty)$$

è limitato inferiormente ma non superiormente.

A questo punto, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, si dice estremo superiore di A l'elemento $S \in \mathbb{R}$ tale che:

$$(i)\ S \geq a \qquad \forall a \in A$$
$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : S - \varepsilon < a$$

mentre dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, si dice estremo inferiore di A l'elemento $s \in \mathbb{R}$ tale che:

$$(i)\ s \leq a \qquad \forall a \in A$$
$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s + \varepsilon > a$$

cioè l'estremo superiore (inferiore) di un insieme è un maggiorante (minorante) dell'insieme stesso, e in particolare è il più piccolo maggiorante (il più grande minorante).

In queste definizioni non si richiede che $S \in A$ ($s \in A$), ed è proprio questa condizione che diversifica il concetto di estremo superiore (inferiore) da quello di massimo (minimo). In particolare, se $S \in A$ ($s \in A$), allora è il massimo (minimo) di A ed anche l'estremo superiore (inferiore) di A, mentre se $S \notin A$ ($s \notin A$) allora è l'estremo superiore (inferiore) di A, mentre il massimo (minimo) non esiste.

Esempio 2.11 *Dati gli insiemi:*

$$A = [-1, 3] \qquad\qquad B = (-1, 3)$$

individuare massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore.

In questo caso per l'insieme A si ha:

$$\sup A = \max A = 3 \qquad\qquad \inf A = \min A = -1$$

in quanto $x = 3$ è il più piccolo dei maggioranti di A ed inoltre appartiene ad A (per cui è anche il massimo) e $x = -1$ è il più grande dei minoranti di A ed inoltre appartiene ad A (per cui è anche il minimo). Per l'insieme B si ha invece:

$$\sup B = 3 \qquad\qquad \inf B = -1$$

mentre massimo e minimo non esistono, in quanto $x = 3$ è il più piccolo dei maggioranti di B ma non appartiene a B, mentre $x = -1$ è il più grande dei minoranti di B ma non appartiene a B.

Nel caso di un insieme A che non risulta limitato superiormente si può porre:

$$\sup A = +\infty$$

e nel caso di un insieme A che non risulta limitato inferiormente si può porre:

$$\inf A = -\infty$$

dove i simboli $+\infty$ e $-\infty$ caratterizzano il cosiddetto sistema ampliato di numeri reali (indicato con $\mathbb{R}^*$) e sono tali per cui:

$$-\infty < x < +\infty \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con riferimento ai sottoinsiemi di numeri reali si possono poi introdurre alcune nozioni di topologia. Il punto di partenza è la definzione di intorno di un punto, che costituisce un particolare intervallo. A questo proposito, dato un punto $p \in \mathbb{R}$, si chiama intorno (completo) di centro p e raggio r (dove $r > 0$) l'intervallo aperto $(p - r, p + r)$, cioè:

$$U_r(p) = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : p - r < x < p + r\}$$

per cui un intorno di un punto p con raggio r è un intervallo aperto centrato in p, i cui elementi sono i punti che distano da p meno di r.

Si possono poi considerare intorni destri e sinistri, che sono intervalli del tipo:

$$U_r^+(p) = [p, p + r) \qquad U_r^-(p) = (p - r, p]$$

e anche intorni di $+\infty$ e di $-\infty$, che sono intervalli del tipo:

$$U(+\infty) = (M, +\infty) \qquad U(-\infty) = (-\infty, M)$$

Esempio 2.12 *L'intorno (completo) di centro* 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

$$U_1(3) = (2, 4)$$

mentre l'intorno destro di centro 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

$$U_1^+(3) = [3, 4)$$

e l'intorno sinistro di centro 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

$$U_1^-(3) = (2, 3]$$

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si possono introdurre una serie di classificazioni con riferimento ai punti che appartengono (o non appartengono) ad A. In particolare, un punto $p \in \mathbb{R}$ è interno ad A se appartiene ad A ed esiste un suo intorno tutto contenuto in A, cioè:

$$p \in A \quad \text{e} \quad \exists U_r(p) \subseteq A$$

mentre è esterno ad A se è interno al complementare di A, e anche se non appartiene ad A ed esiste un suo intorno che non ha elementi in comune con A, cioè:

$$p \notin A \quad \text{e} \quad \exists U_r(p) : U_r(p) \cap A = \emptyset$$

ed è di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A sia punti del complementare di A (in questo caso il punto p può appartenere o meno ad A), cioè:

$$\forall U_r(p) : U_r(p) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad U_r(p) \cap A^C \neq \emptyset$$

Il punto p, inoltre, è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene punti di A (diversi dal punto p stesso), cioè:

$$\forall U_r(p) : U_r(p) \cap A \setminus \{p\} \neq \emptyset$$

mentre è isolato se appartiene ad A ed esiste un suo intorno al quale non appartengono punti di A (diversi dal punto stesso), cioè:

$$p \in A \qquad \text{e} \qquad \exists U_r(p) : U_r(p) \cap A \setminus \{p\} = \emptyset$$

Si possono infine introdurre alcune classificazioni con riferimento agli insiemi, in relazione alle caratteristiche dei punti che li costituiscono. A questo proposito, un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni, mentre si dice chiuso se il suo complementare è aperto, e si dice limitato se è contenuto in un opportuno intorno dell'origine. Vi sono inoltre insiemi che non sono né aperti né chiusi, mentre gli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ si considerano sia aperti sia chiusi, e sono gli unici ad avere questa proprietà.

Esempio 2.13 *Dato l'insieme:*

$$A = (-3, 1] \cup \{4\}$$

caratterizzarlo dal punto di vista topologico.

In questo caso si ha che i punti interni sono tutti quelli dell'intervallo $(-3, 1)$, mentre i punti esterni sono tutti quelli di $(-\infty, -3) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$ e i punti di frontiera sono quelli dell'insieme $\{-3, 1, 4\}$. I punti di accumulazione, poi, sono tutti quelli dell'intervallo $[-3, 1]$ e l'unico punto isolato è $\{4\}$. Questo insieme, inoltre, non è né aperto né chiuso ed è limitato.

Esempio 2.14 *Dato l'insieme:*

$$B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\}$$

caratterizzarlo dal punto di vista topologico.

In questo caso si ha che non vi sono punti interni, mentre i punti esterni sono quelli di $\mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ e i punti di frontiera sono quelli dell'insieme stesso, cioè $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$. In questo esempio, inoltre, l'unico punto di accumulazione è $\{0\}$, mentre i punti isolati sono quelli dell'insieme stesso, cioè $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$. Questo insieme, infine, è chiuso e limitato.

2.3. Elementi di logica

Un primo concetto di rilievo nell'ambito della logica è costituito dalla nozione di proposizione, che è una frase di senso compiuto alla quale è possibile attribuire un valore di verità: vero (V) o falso (F). Ad esempio la frase:

"Oggi piove"

è una proposizione (in quanto è possibile stabilire se è vera o falsa), mentre la frase:

"Come stai?"

non lo è. Le proposizioni vengono indicate con lettere quali p, q, r e possono essere legate tra di loro, dando luogo a proposizioni più complesse, attraverso i cosiddetti connettivi logici, che sono:

1. la negazione, che si indica con il simbolo $\sim$ (oppure con un trattino sopra la proposizione che viene negata) e corrisponde all'avverbio "non"; si ha ad esempio:

   $p :$ "Oggi piove"
   $\sim p :$ "Oggi non piove"

2. la congiunzione, che si indica con il simbolo $\wedge$ ("et") e corrisponde alla congiunzione "e"; si ha ad esempio:

   $p :$ "Leggo il giornale"
   $q :$ "Ascolto la radio"
   $p \wedge q :$ "Leggo il giornale e ascolto la radio"
   (p e q valgono entrambe)

3. la disgiunzione, che si indica con il simbolo $\vee$ ("vel") e corrisponde alla congiunzione "o"; si ha ad esempio:

   $p :$ "Leggo il giornale"
   $q :$ "Ascolto la radio"
   $p \vee q :$ "Leggo il giornale o ascolto la radio"
   (o faccio tutte e due le cose, una almeno tra p e q deve valere)

4. l'implicazione, che si indica con il simbolo $\Rightarrow$ e corrisponde alla locuzione "se...allora"; si ha ad esempio:

   $p :$ "C'è il sole"
   $q :$ "Vado al mare"
   $p \Rightarrow q :$ "Se c'è il sole allora vado al mare"

In questo caso si dice anche che p è condizione sufficiente perché valga q, e che q è condizione necessaria perché valga p. Considerando ad esempio:

p :	"Essere torinese"
q :	"Essere italiano"
$p \Rightarrow q$:	"Se si è torinese allora si è italiano"

si ha che "essere torinese" è condizione sufficiente per "essere italiano" (ma non è necessaria!), mentre "essere italiano" è condizione necessaria per "essere torinese" (ma non è sufficiente!)

5. l'equivalenza o doppia implicazione, che si indica con il simbolo $\Leftrightarrow$ e corrisponde alla locuzione "se e solo se"; si ha ad esempio:

p :	"Prendo l'ombrello"
q :	"Piove"
$p \Leftrightarrow q$:	"Prendo l'ombrello se e solo se piove"
	(cioè se prendo l'ombrello piove, e se piove prendo l'ombrello)

In questo caso si dice anche che p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q, e che q è condizione necessaria e sufficiente perché valga p.

Tra i connettivi logici, così come accade tra le operazioni aritmetiche, esiste un ordine gerarchico dato da:

$$\sim\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \Rightarrow\ ,\ \Leftrightarrow$$

in cui ciascun connettivo "lega" di più dei successivi. Ad esempio, l'enunciato:

$$q \vee \sim p \Rightarrow \sim r$$

corrisponde a:

$$(q \vee (\sim p)) \Rightarrow (\sim r)$$

Esempio 2.15 *Date le proposizioni:*

p :	*"Ho del tempo libero"*
q :	*"Piove"*
r :	*"Vado al mare"*

l'enunciato:

$$q \vee \sim p \Rightarrow \sim r$$

risulta equivalente a:

"Se piove oppure se non ho del tempo libero allora non vado al mare"

Il valore di verità (V o F) di una proposizione, ottenuta legando due o più proposizioni mediante i connettivi logici, dipende dal valore di verità delle proposizioni componenti secondo le seguenti "tavole di verità":

1. per la negazione:

p	$\sim p$
V	F
F	V

2. per la congiunzione:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. per la disgiunzione:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. per l'implicazione:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. per l'equivalenza:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Due proposizioni, inoltre, si dicono "logicamente equivalenti" se hanno la stessa tavola di verità.

Esempio 2.16 *Verificare l'equivalenza logica delle proposizioni:*

$$\sim (p \Rightarrow q) \qquad e \qquad p \wedge (\sim q)$$

In questo caso la tavola di verità di $\sim (p \Rightarrow q)$ è data da:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

e la tavola di verità di $p \wedge (\sim q)$ è data da:

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

che coincide con la precedente, per cui le due proposizioni sono logicamente equivalenti.

Una frase in cui compare una variabile (che rappresenta un elemento di un certo insieme) si chiama predicato e si indica con una scrittura del tipo $p(x)$, dove x rappresenta la variabile. La verità di un predicato dipende dai valori assegnati di volta in volta alle variabili, ad esempio considerando:

$$p(x): \quad \text{“x è un numero reale positivo”}$$

si ha:

$$\text{per } x = 5 \qquad p(x) \text{ è vera}$$

$$\text{per } x = -1 \qquad p(x) \text{ è falsa}$$

Un predicato quindi non è una proposizione, ma da esso si possono ottenere proposizioni assegnando alla variabile un particolare valore.

Esiste una corrispondenza tra le operazioni logiche sui predicati e le operazioni sugli insiemi. Infatti, dati due predicati $p(x)$ e $q(x)$, dove x è un elemento appartenente ad un insieme X, si possono considerare i sottoinsiemi di X dati da:

$$A = \{x \in X : p(x)\} \qquad B = \{x \in X : q(x)\}$$

per cui A è l'insieme dei valori della x che rendono vero il predicato $p(x)$ (si dice anche che A è il dominio di verità del predicato $p(x)$) e B è l'insieme dei valori della x che rendono vero il predicato $q(x)$ (si dice anche che B è il dominio di verità del predicato $q(x)$). A questo punto si ha:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X : p(x) \vee q(x)\} \\ A \cap B &= \{x \in X : p(x) \wedge q(x)\} \\ A^c &= \{x \in X : \sim p(x)\} \end{aligned}$$

per cui $A \cup B$ è l'insieme dei valori della x che rendono vero almeno uno dei due predicati $p(x)$ e $q(x)$, mentre $A \cap B$ è l'insieme dei valori della x che rendono veri entrambi i predicati $p(x)$ e $q(x)$, e A^c è l'insieme dei valori della x che rendono vera la negazione del predicato $p(x)$.

Esempio 2.17 *Dati i predicati:*

$$\begin{aligned} p(x) :& \quad \text{“}x \text{ è un numero reale maggiore o uguale a } 3\text{”} \\ q(x) :& \quad \text{“}x \text{ è un numero reale minore o uguale a } 5\text{”} \end{aligned}$$

si ha:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$$

e poi:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \vee x \leq 5\} = \mathbb{R} \\ A \cap B &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \wedge x \leq 5\} = [3, 5] \\ A^c &= \{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = (-\infty, 3) \end{aligned}$$

Per questo motivo la disgiunzione $\vee$ e la congiunzione $\wedge$ si chiamano anche, rispettivamente, “unione logica” e “intersezione logica”, essendo gli equivalenti, dal punto di vista logico, delle operazioni di unione e di intersezione dal punto di vista insiemistico. Per le operazioni logiche, inoltre, valgono le proprietà tipiche delle operazioni insiemistiche, in particolare le formule di De Morgan, in base alle quali si ha:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$$

(cioè se si nega che almeno una fra due proposizioni sia vera, ciò equivale ad affermare che entrambe sono false) e anche:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$$

(cioè se si nega che due proposizioni siano entrambe vere, ciò equivale ad affermare che almeno una delle due è falsa). Queste equivalenze logiche possono essere verificate facilmente costruendo le tavole di verità dei primi membri e quelle dei secondi membri ed osservando che sono uguali.

A partire dai predicati, poi, è possibile ottenere proposizioni mediante l'applicazione dei quantificatori, che sono:

1. il quantificatore esistenziale, che si indica con il simbolo $\exists$ e significa "esiste";
2. il quantificatore universale, che si indica con il simbolo $\forall$ e significa "per ogni".

Ad esempio, la proposizione:

$$\exists x : p(x)$$

significa:

"esiste (almeno) un x per cui è vera $p(x)$"

(si deve invece tenere presente che il simbolo $\exists!$ significa "esiste ed è unico"), mentre la proposizione:

$$\forall x : p(x)$$

significa:

"per ogni x è vera $p(x)$"

Esiste un'importante relazione tra i quantificatori, che risulta evidente passando da un'affermazione alla sua negazione; si ha infatti:

$$\sim (\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \quad \sim p(x)$$

e anche:

$$\sim (\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \quad \sim p(x)$$

Ad esempio, dato il predicato:

$p(x) :$ "lo studente x passa l'esame"

la prima equivalenza logica diventa:

non è vero che tutti gli studenti passano l'esame	$\Leftrightarrow$	esiste (almeno) uno studente che non passa l'esame

mentre la seconda diventa:

non è vero che esiste uno studente che passa l'esame	$\Leftrightarrow$	nessuno studente passa l'esame (tutti gli studenti non passano l'esame)

Risulta allora evidente che la negazione di un'affermazione esistenziale è un'affermazione universale e viceversa, cioè passando da un'affermazione alla sua negazione i simboli $\exists$ e $\forall$ si scambiano tra di loro.

Una tautologia, infine, è una proposizione che risulta vera qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che la compongono. Esempi di tautologie sono:

1. il principio del terzo escluso:
$$p \vee (\sim p)$$

2. il principio di non contraddizione:
$$\sim (p \wedge \sim p)$$

3. il sillogismo:
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

4. le leggi di De Morgan:
$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$$
$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$$

5. il modus ponens:
$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$
che viene usato nelle dimostrazioni dirette dei teoremi

6. il principio di contrapposizione:
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$
che viene usato nelle dimostrazioni per assurdo dei teoremi (in questo caso l'implicazione $p \Rightarrow q$ viene detta diretta, mentre l'implicazione $\sim q \Rightarrow \sim p$ viene detta contronominale)

7. l'equivalenza:
$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$$
che viene usata nelle dimostrazioni per controesempio dei teoremi.

Per verificare che le proposizioni sopra elencate sono delle tautologie è sufficiente costruire le rispettive tavole di verità, le quali devono dare il valore vero (V) qualunque sia il valore di verità delle proposizioni componenti. Considerando ad esempio il principio del terzo escluso, la corrispondente tavola di verità è:

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
V	F	V
F	V	V

dalla quale risulta che la proposizione $p \vee (\sim p)$ è sempre vera, il che conferma appunto che ci si trova in presenza di una tautologia.

Le ultime 3 tautologie riportate, in particolare, vengono usate nelle dimostrazioni dei teoremi. A questo proposito, data una proposizione p detta ipotesi a cui si attribuisce il valore vero (V) e una proposizione q detta tesi di cui si deve provare il valore di verità (V), si chiama teorema la proposizione $p \Rightarrow q$. Le regole che permettono di passare da una proposizione vera ad un'altra logicamente equivalente si chiamano regole di deduzione, e l'insieme dei passaggi da una proposizione ad un'altra logicamente equivalente si chiama dimostrazione. Poiché la dimostrazione di un teorema si basa sui teoremi già dimostrati e poiché non è possibile procedere a ritroso all'infinito, si devono assumere in partenza un certo numero di enunciati (detti assiomi o postulati) come convenzionalmente veri. Un assioma è quindi una proposizione che viene assunta vera senza dimostrazione.

Nelle dimostrazioni dirette dei teoremi, in particolare, si sfrutta la tautologia 5) prima enunciata. In questo caso, se p (ipotesi) è vera e si vuole mostrare che q (tesi) è vera, si procede mostrando che $p \Rightarrow q$ è vera.

Nelle dimostrazioni per assurdo, invece, si sfrutta la tautologia 6), in particolare si mantiene l'ipotesi p vera e si nega la tesi q (cioè si suppone vera la sua negazione $\sim q$), e in questo modo si arriva ad una contraddizione, cioè si dimostra la verità dell'implicazione $\sim q \Rightarrow \sim p$ (che, per quanto visto, è equivalente a $p \Rightarrow q$).

Nelle dimostrazioni per controesempio, infine, si sfrutta la tautologia 7), in particolare si considera una proposizione del tipo:

$$\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$$

e si dimostra che è falsa esibendo un particolare x (il controesempio) per il quale $p(x)$ è vera ma $q(x)$ è falsa, cioè si dimostra che:

$$\exists x : p(x) \wedge (\sim q(x))$$

il che garantisce la falsità della proposizione iniziale (perché sussiste l'equivalenza tra $\sim (p \Rightarrow q)$ e $p \wedge (\sim q)$).

2.4. Esercizi da svolgere

Dati gli insiemi A e B, individuare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

1) $A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{1, 2\}$

2) $A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{2, 3\}$

3) $A = \{1, 3, 5\}$ $\quad B = \{2, 3, 4\}$

Rappresentare i seguenti insiemi di numeri reali:

4) $X = A \cup B$ con $A = (-3, 3]$ e $B = (0, 5)$

5) $X = A \cup B$ con $A = (-8, 5]$ e $B = (0, 4)$

6) $X = A \cap B$ con $A = (-\infty, 7)$ e $B = (-3, 7)$

7) $X = A \cap B$ con $A = (-\infty, 3)$ e $B = (6, +\infty)$

8) $X = (A \cup B)^C$ con $A = [1, 4)$ e $B = [3, 8]$

9) $X = (A \cup B)^C$ con $A = (-\infty, 3)$ e $B = (-3, +\infty)$

10) $X = (A \cup B)^C$ con $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$

11) $X = (A \cap B)^C$ con $A = (-7, 7]$ e $B = (0, 5)$

12) $X = (A \cap B)^C$ con $A = (-\infty, 0)$ e $B = (-1, 2]$

13) $X = (A \cap B)^C$ con $A = (-\infty, 2)$ e $B = (2, +\infty)$

Dati gli insiemi A e B, individuare i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$:

14) $A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{0, -1\}$

15) $A = \{-1, 1\}$ $\quad B = \{0, 1\}$

16) $A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{-1, 2, 3\}$

Caratterizzare dal punto di vista topologico (massimi e minimi, estremo superiore e inferiore, punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati, insiemi aperti, chiusi, limitati) i seguenti insiemi di numeri reali:

17) $X = A \cup B$ con $A = (-1, 0)$ e $B = [0, 2]$

18) $X = A \cap B$ con $A = (-\infty, -3)$ e $B = (-4, -2)$

19) $X = (A \cup B)^C$ con $A = (-\infty, -5)$ e $B = (3, 4)$

20) $X = (A \cup B)^C$ con $A = [-2, 1)$ e $B = [-1, 2)$

21) $X = (A \cup B)^C$ con $A = [-3, -2)$ e $B = (-1, 0]$

22) $X = (A \cap B)^C$ con $A = [-3, 2)$ e $B = (-2, 3)$

23) $X = (A \cap B)^C$ con $A = (-2, 1]$ e $B = (-1, 2]$

24) $X = (A \cap B)^C$ con $A = (-\infty, 3]$ e $B = (-2, +\infty)$

25) $X = A \cup B$ con $A = (-2, 3]$ e $B = \{4\}$

Costruire le tavole di verità delle seguenti proposizioni:

26) $\sim p \wedge q$

27) $\sim (\sim p \wedge q)$

28) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$

29) $\sim p \Rightarrow \sim q$

30) $p \Leftrightarrow \sim q$

31) $\sim p \Rightarrow q$

32) $\sim q \Rightarrow p$

33) $q \Rightarrow p$

34) $\sim p \vee \sim q$

35) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

36) $p \Leftrightarrow q$

37) $p \Rightarrow \sim q$

38) $\sim p \Leftrightarrow q$

39) $p \wedge \sim q$

40) $\sim q \Rightarrow \sim p$

41) $[(p \vee \sim p) \wedge p] \vee q$

Verificare l'equivalenza logica delle seguenti proposizioni:

42) $p \Rightarrow q$ e $\sim p \vee q$

43) $p \Leftrightarrow q$ e $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

44) $\sim (p \vee q)$ e $(\sim p) \wedge (\sim q)$

45) $\sim (p \wedge q)$ e $(\sim p) \vee (\sim q)$

Verificare che le seguenti proposizioni costituiscono delle tautologie:

46) $\sim (p \wedge \sim p)$

47) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

48) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

49) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

50) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Capitolo 3

Funzioni

3.1. Definizioni

Dati due insiemi (non vuoti) X e Y, si chiama funzione (o applicazione, o corrispondenza) di X in Y una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno e un solo elemento $y \in Y$. Si scrive in questo caso:

$$f : X \to Y$$

e anche:

$$y = f(x)$$

e si dice che y costituisce l'immagine, tramite la funzione f, di x. L'insieme X prende il nome di dominio (o insieme di definizione, o campo di esistenza), mentre l'insieme Y prende il nome di codominio, e il sottoinsieme (proprio o improprio) di Y costituito dagli elementi $y \in Y$ per i quali esiste un elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$ (cioè il sottoinsieme di Y costituito dagli elementi che sono immagini di elementi di X) prende il nome di insieme delle immagini (in pratica, il codominio è l'insieme in cui, a priori, la funzione può assumere valori, mentre l'insieme delle immagini è l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla funzione). La variabile x, inoltre, viene detta variabile indipendente, mentre la variabile y viene detta variabile dipendente.

Le funzioni che vengono prese in esame in questo Capitolo (e anche nei Capitoli 4, 5 e 6) sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e assumono valori in $\mathbb{R}$, cioè sono funzioni reali di variabile reale:

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x)$$

mentre nel Capitolo 8 verranno introdotte le funzioni che sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (dove quest'ultimo è l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali) e che assumono valori in $\mathbb{R}$, cioè funzioni reali di più variabili reali:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

È possibile a questo punto analizzare i diversi elementi che caratterizzano una funzione, allo scopo di ottenere le informazioni che consentono di realizzare lo studio della funzione stessa.

3.2. Dominio di una funzione

Il primo problema da affrontare nello studio di una funzione è costituito dall'individuazione del suo dominio, che viene definito come il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui sono possibili le operazioni indicate nell'espressione $f(x)$ (per cui si parla anche di dominio naturale di f). In generale, invece, non si procede all'individuazione dell'insieme delle immagini, che in molti casi non è agevole da determinare, e ci si limita ad indicare il codominio (che per le funzioni considerate è costituito dall'insieme $\mathbb{R}$). Con riferimento a questo aspetto si possono incontrare i seguenti tipi di problemi, che richiedono di imporre le corrispondenti condizioni di realtà, allo scopo di giungere alla determinazione del campo di esistenza della funzione in esame:

1. Se la variabile indipendente compare al denominatore di una frazione si deve richiedere che il denominatore sia non nullo.
2. Se la variabile indipendente compare sotto il segno di una radice ad indice pari si deve richiedere che il radicando sia non negativo.
3. Se la variabile indipendente compare nell'argomento di un logaritmo si deve richiedere che l'argomento sia strettamente positivo.
4. Se la variabile indipendente compare sia nella base sia nell'esponente di una potenza, cioè si ha un'espressione del tipo $f(x)^{g(x)}$, si deve richiedere che la base della potenza sia strettamente positiva (come risulta evidente riscrivendo la funzione nella forma $e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$, nella quale $f(x)$ diventa l'argomento di un logaritmo, e quindi deve essere strettamente maggiore di zero).

Esempio 3.1 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

In questo caso deve essere $x + 3 \neq 0$, cioè $x \neq -3$, per cui il dominio è:

$$D = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$$

Esempio 3.2 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{x-3} + 5x$$

In questo caso deve essere $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$, per cui il dominio è:

$$D = [3, +\infty)$$

Esempio 3.3 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \log(x^2 - 4)$$

In questo caso deve essere $x^2 - 4 > 0$, cioè $x < -2 \quad \vee \quad x > 2$, per cui il dominio è:

$$D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Esempio 3.4 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = (3x)^{x+5} + 2$$

In questo caso deve essere $3x > 0$, cioè $x > 0$, per cui il dominio è:

$$D = (0, +\infty)$$

Spesso alcune di queste situazioni si presentano contemporaneamente, per cui per determinare il campo di esistenza di una funzione occorre considerare solo quei valori della x che soddisfano contemporaneamente le diverse condizioni imposte (cioè occorre risolvere un sistema di disequazioni e/o inuguaglianze).

Esempio 3.5 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{\log(x-3)}$$

In questo caso si deve avere contemporaneamente:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \\ \log(x-3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \\ \\ x - 3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

per cui il dominio è:

$$D = [4, +\infty)$$

Esempio 3.6 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x) = \left(\frac{2}{x-3}\right)^{3x}$$

In questo caso si deve avere contemporaneamente:

$$\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ \dfrac{2}{x-3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

per cui il dominio è:

$$D = (3, +\infty)$$

In alcuni casi, inoltre, può accadere che non interessi usare per intero il dominio naturale di una funzione, ma solo una sua parte. Nel caso in cui la variabile x rappresenti una grandezza di natura economica (quantità, prezzo), ad esempio, non hanno senso valori negativi per questa variabile, e quindi occorre eventualmente considerare solo una parte del dominio naturale.

3.3. Intersezioni con gli assi e segno di una funzione

Dopo l'individuazione del dominio di una funzione, il passo successivo consiste nella determinazione delle intersezioni (se esistono) della funzione con gli assi cartesiani e nello studio del segno della funzione stessa.

In particolare, le intersezioni con gli assi si ottengono risolvendo il sistema formato dall'equazione che costituisce l'espressione analitica della funzione e dall'equazione dell'asse in questione, mentre il segno di una funzione si ottiene determinando innanzitutto l'insieme dei valori della x per i quali la funzione è positiva o nulla (cioè risolvendo la disequazione $f(x) \geq 0$), dopodiché si ha che per i valori rimanenti della x (appartenenti al campo di esistenza) la funzione è negativa.

Esempio 3.7 *Determinare intersezioni con gli assi e segno della funzione:*

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Si può innanzitutto osservare che non vi sono restrizioni da imporre al dominio della funzione, che quindi coincide con $\mathbb{R}$. A questo punto le (eventuali) intersezioni con l'asse x si individuano risolvendo il sistema formato dall'equazione $y = f(x)$ e dall'equazione dell'asse delle ascisse (che è $y = 0$):

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui la funzione interseca l'asse x nei punti $A = (2, 0)$ e $B = (3, 0)$. L'intersezione (eventuale) con l'asse y si individua invece risolvendo il sistema formato dall'equazione $y = f(x)$ e dall'equazione dell'asse delle ordinate (che è $x = 0$):

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

per cui la fuzione interseca l'asse y nel punto $C = (0, 6)$ (per definizione di funzione vi è al massimo un'intersezione con l'asse delle y, in quanto ad un valore delle x – nel caso specifico $x = 0$ – corrisponde al più un valore $y = f(x)$).

Per studiare il segno della funzione sul suo dominio occorre invece risolvere innanzitutto la disequazione:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 3$$

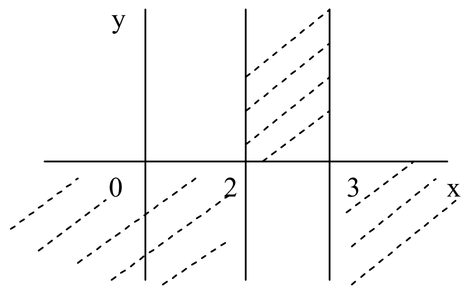
dopodiché si ha:

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad 2 < x < 3$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 3$$

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 2 \quad \vee \quad x > 3$$

I risultati ottenuti possono anche essere rappresentati graficamente nel seguente modo (il tratteggio indica le parti del piano in cui non può trovarsi la funzione):



In effetti, quella considerata non è altro che l'espressione analitica di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e che passa per i punti A, B e C sopra determinati; tale parabola si trova nel semipiano positivo delle y per valori di x minori di 2 e maggiori di 3, e nel semipiano negativo delle y per valori di x compresi tra 2 e 3, mentre interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di $x = 2$ e $x = 3$ e l'asse delle ordinate in corrispondenza di $y = 6$.

Esempio 3.8 *Determinare intersezioni con gli assi e segno della funzione:*

$$f(x) = \frac{\log(2x)}{x^3}$$

Occorre innanzitutto determinare il dominio della funzione, che si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ \\ x^3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

per cui il campo di esistenza della funzione è dato dall'intervallo $(0, +\infty)$. A questo punto le (eventuali) intersezioni con l'asse x si individuano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\log(2x)}{x^3} \\ \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui la funzione interseca l'asse x nel punto $A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Non vi sono invece intersezioni con l'asse y, in quanto per $x = 0$ (che è l'equazione dell'asse delle ordinate) la funzione non è definita (deve infatti essere $x > 0$ come visto sopra).

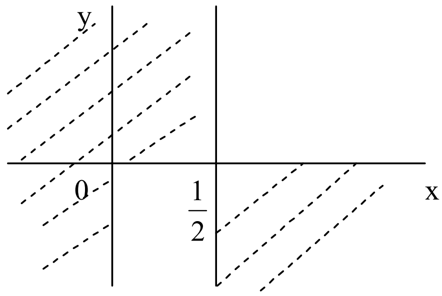
Per studiare il segno della funzione sul suo dominio, poi, occorre innanzitutto risolvere la disequazione:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{\log(2x)}{x^3} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

dopodiché si ha:

$$\begin{aligned} &f(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \tfrac{1}{2} \\ &f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \tfrac{1}{2} \\ &f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

e graficamente:



3.4. Funzioni pari, dispari, periodiche

Nello studio di una funzione, dopo l'individuazione del suo dominio, delle (eventuali) intersezioni con gli assi e del segno, interessa scoprire la presenza di eventuali simmetrie e periodicità. A questo proposito, una funzione si dice pari se vale:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

mentre una funzione si dice dispari se vale:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D$$

dove con D si indica il dominio della funzione (che deve essere simmetrico rispetto all'origine).

Una funzione invece si dice periodica di periodo t quando t è il più piccolo numero reale positivo per il quale si ha:

$$f(x + t) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

Una funzione pari è caratterizzata dal fatto che il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(-x, y)$ appartiene allo stesso grafico), mentre una funzione dispari è caratterizzata dal fatto che il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(-x, -y)$ appartiene allo stesso grafico). Una funzione periodica di periodo t, invece, è caratterizzata dal fatto che il suo grafico si ripete dopo ogni intervallo di ampiezza t (cioè se il punto (x, y) appartiene al grafico della funzione, anche il punto $(x+t, y)$ appartiene allo stesso grafico).

Nel caso di funzioni pari o dispari, quindi, è sufficiente effettuare lo studio per $x \geq 0$, dopodiché il grafico complessivo della funzione si ottiene ribaltando quello ottenuto per valori non negativi delle x rispetto all'asse y (nel caso di funzioni pari) oppure rispetto all'origine (nel caso di funzioni dispari). Nel caso di funzioni periodiche, invece, è sufficiente effettuare lo studio su di un intervallo, appartenente al dominio, di ampiezza t, dopodiché il grafico complessivo della funzione si ottiene riportando più volte quello così ottenuto.

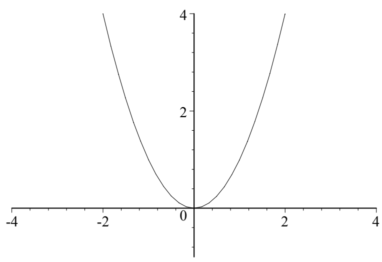
Un semplice esempio di funzione pari è costituito da:

$$y = f(x) = x^2$$

per la quale si ha:

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2 = f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché la funzione sia pari. Il suo grafico è:



e in questo caso risulta evidente la simmetria rispetto all'asse delle y.

Un semplice esempio di funzione dispari, invece, è costituito da:

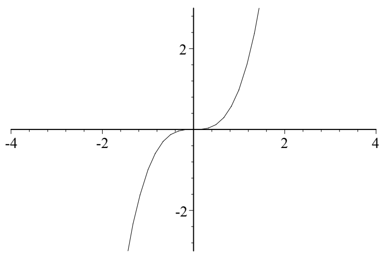
$$y = f(x) = x^3$$

per la quale si ha:

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = -x^3 = -f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché la funzione sia dispari.

Il suo grafico è:



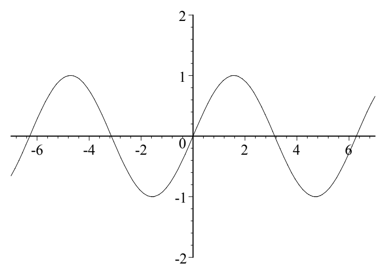
e in questo caso risulta evidente la simmetria rispetto all'origine.

Semplici esempi di funzioni periodiche (di periodo 2π), infine, sono il seno e il coseno, per le quali si ha:

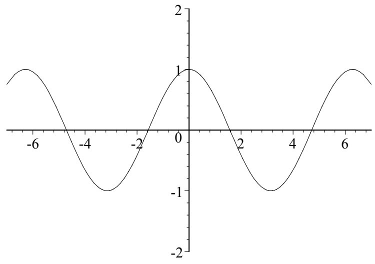
$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$$

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$$

che è appunto la condizione che deve essere verificata affinché una funzione sia periodica. Il grafico del seno è:



mentre quello del coseno è:



e risulta evidente che i grafici delle due funzioni si ripetono dopo un intervallo di ampiezza costante (pari a 2π). In aggiunta, queste due funzioni risultano anche simmetriche, in particolare il seno è una funzione dispari (infatti $\sin(-x) = -\sin x$) mentre il coseno è una funzione pari (infatti $\cos(-x) = \cos x$), come si può osservare graficamente.

Esempio 3.9 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = 5^x + 5^{-x}$$

Si ha in questo caso:

$$f(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = 5^{-x} + 5^x = f(x)$$

per cui la funzione è pari.

Esempio 3.10 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = \sqrt{2 - x^3} - \sqrt{2 + x^3}$$

Si ha in questo caso:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{2 - (-x)^3} - \sqrt{2 + (-x)^3} = \sqrt{2 - (-x^3)} - \sqrt{2 + (-x^3)} = \\ &= \sqrt{2 + x^3} - \sqrt{2 - x^3} = -\left(\sqrt{2 - x^3} - \sqrt{2 + x^3}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

per cui la funzione è dispari.

Esempio 3.11 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = |x| + 3x$$

Si ha in questo caso:

$$f(-x) = |-x| + 3(-x) = |x| - 3x$$

e, poiché quest'ultima espressione non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$, la funzione considerata non presenta simmetrie (cioè non è né pari né dispari).

Esempio 3.12 *Verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità nella funzione:*

$$f(x) = \sin(2x)$$

Si ha in questo caso innanzitutto:

$$f(-x) = \sin 2(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari, inoltre:

$$f(x+\pi) = \sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = f(x)$$

per cui la funzione è anche periodica, di periodo π.

3.5. Funzioni composte

Date le funzioni reali di variabile reale:

$$t = f(x) \qquad \text{con } f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y = g(t) \qquad \text{con } g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tali che ogni valore assunto da f cada nel dominio di g (cioé $f(A) \subseteq B$), ad ogni $x \in A$ la funzione f associa un unico elemento $f(x)$, e poiché questo è un elemento di B ad esso la funzione g associa un unico elemento $g(f(x))$. A questo punto si chiama funzione composta $g \circ f$ la funzione (dove è definita):

$$y = h(x) = g(f(x)) \qquad \text{con } h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che ad ogni $x \in A$ associa l'elemento $g(f(x))$.

La condizione da verificare per stabilire se la funzione composta esiste è quindi $f(A) \subseteq B$, e in pratica date le due funzioni f e g è possibile scrivere subito la funzione composta $g \circ f$, dopodiché si impongono le (eventuali) condizioni di realtà richieste dall'espressione analitica della funzione, e in questo modo si individua il dominio della funzione composta (eventualmente vuoto, nel qual caso la funzione composta non esiste). In modo analogo è possibile individuare (se esiste) la funzione composta $f \circ g$. L'operazione di composizione non è commutativa, cioè anche quando esistono sia $g \circ f$ sia $f \circ g$, in generale si ha $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio 3.13 *Date le funzioni:*

$$f(x) = x^3 + 2 \qquad\qquad g(t) = e^t + 5$$

determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = x^3 + 2$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = e^{x^3+2} + 5$$

e, poiché non vi sono condizioni di realtà da imporre, questa è la funzione composta $g \circ f$, che risulta definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

In modo analogo, per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = e^t + 5$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \left(e^t + 5\right)^3 + 2$$

e, poiché anche in questo caso non vi sono condizioni di realtà da imporre, questa è la funzione composta $f \circ g$, che risulta definita $\forall t \in \mathbb{R}$. Si può inoltre osservare che, pur essendo definite sia $g \circ f$ sia $f \circ g$, si ha $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio 3.14 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \log x \qquad\qquad g(t) = \sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \log x$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = \sqrt{\log x}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà (del logaritmo e della radice):

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{\log x} \qquad \text{per } x \geq 1$$

In modo analogo, per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = \sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \log(\sqrt{t})$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà (della radice e del logaritmo):

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t > 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \log(\sqrt{t}) \qquad \text{per } t > 0$$

Anche in questo caso si può osservare che, pur essendo definite sia $g \circ f$ sia $f \circ g$, si ha $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio 3.15 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \log x \qquad\qquad g(t) = -\sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \log x$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = -\sqrt{\log x}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = -\sqrt{\log x} \qquad \text{per } x \geq 1$$

In modo analogo, per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = -\sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \log(-\sqrt{t})$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ -\sqrt{t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

per cui la funzione composta $f \circ g$ non esiste (in quanto la funzione g assume sempre valori non positivi, che quindi non appartengono al dominio della funzione f, costituito dai valori strettamente positivi).

In questo caso si ha quindi che la funzione $g \circ f$ esiste, mentre la funzione $f \circ g$ non esiste.

Esempio 3.16 *Date le funzioni:*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad g(t) = -\sqrt{t}$$

determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Per determinare $g \circ f$ si pone:

$$t = f(x) = \sqrt{x}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $g(t)$ al posto di t si ottiene:

$$g(f(x)) = -\sqrt{\sqrt{x}}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

per cui la funzione composta cercata è:

$$g \circ f = g(f(x)) = -\sqrt{\sqrt{x}} = -\sqrt[4]{x} \qquad \text{per } x \geq 0$$

In modo analogo, per determinare $f \circ g$ si pone:

$$x = g(t) = -\sqrt{t}$$

e sostituendo questa espressione nella funzione $f(x)$ al posto di x si ottiene:

$$f(g(t)) = \sqrt{-\sqrt{t}}$$

A questo punto è necessario imporre le condizioni di realtà:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \\ -\sqrt{t} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \\ \sqrt{t} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

per cui la funzione composta cercata (definita in un solo punto) è:

$$f \circ g = f(g(t)) = \sqrt{-\sqrt{t}} \qquad \text{per } t = 0$$

cioè:

$$f(g(t)) = 0 \qquad \text{in } t = 0$$

3.6. Funzioni inverse

Data una funzione iniettiva:

$$y = f(x) \qquad \text{con } f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si chiama inversa di $f(x)$ la funzione:

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{con } f^{-1} : f(X) \to X$$

tale che:

$$f(x) = y \qquad \text{cioè } f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

Si ricorda che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se vale:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

cioè elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. L'iniettività di f è essenziale per garantire che ad un qualsiasi elemento $y \in f(X)$ corrisponda un unico elemento $x \in X$ (così che quella definita da $f(X)$ in X è effettivamente una funzione), e corrisponde alla proprietà per cui ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in un solo punto.

Si può inoltre osservare che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua è invertibile su X se e solo se è strettamente monotona su X; se invece la funzione non è continua, allora la stretta monotonia è solo una condizione sufficiente (non necessaria) per l'invertibilità, cioè si ha:

(i) f continua $\qquad$ f invertibile $\Leftrightarrow$ f strettamente monotona

(ii) f non continua $\qquad$ f strettamente monotona $\Rightarrow$ f invertibile

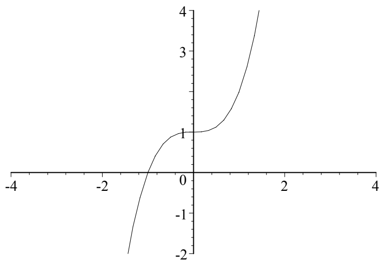
Data una funzione $y = f(x)$, per stabilire se essa è invertibile occorre quindi verificare innanzitutto che sia iniettiva. A questo punto è possibile ricavare l'espressione analitica della funzione inversa esprimendo la variabile x in termini della variabile y, ottenendo quindi $x = f^{-1}(y)$. Si deve inoltre tenere presente che, passando da una funzione alla sua inversa, il dominio e l'insieme delle immagini si scambiano tra di loro, cioè quello che è il dominio della funzione diretta diventa l'insieme delle immagini della funzione inversa e viceversa. I grafici di una funzione e della sua inversa, infine, risultano simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$, cioè se un punto (x, y) appartiene al grafico di una funzione, il punto (y, x) appartiene al grafico della funzione inversa.

Esempio 3.17 *Data la funzione:*

$$f(x) = x^3 + 1$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



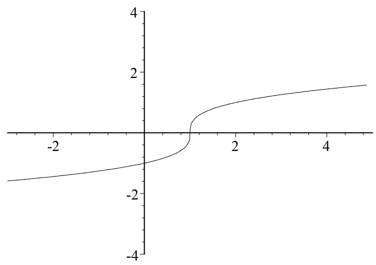
da cui risulta evidente che $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi è iniettiva ed invertibile su tutto $\mathbb{R}$. La funzione inversa si ottiene considerando:

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$$

ed è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni, infine, si ha:

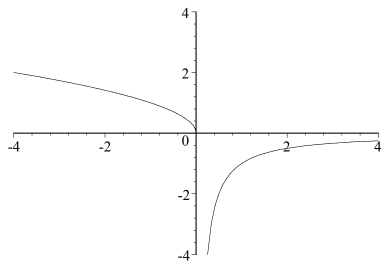
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
funzione inversa f^{-1}	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 3.18 *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & se \quad x \leq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



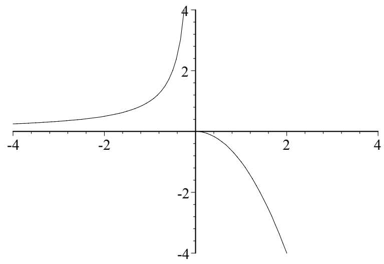
da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$ (infatti è strettamente monotona decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0]$ e strettamente monotona crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$ ma non è monotona su $\mathbb{R}$ nel suo insieme), tuttavia è iniettiva e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (in effetti in questo caso la funzione non è continua – in particolare ha una discontinuità nell'origine – per cui, come indicato prima, la stretta monotonia è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'invertibilità). La funzione inversa si ottiene considerando:

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x} \quad \text{se } x \leq 0 \Rightarrow x = -y^2 \quad \text{se } y \geq 0 \\ \\ y = -\dfrac{1}{x} \quad \text{se } x > 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{y} \quad \text{se } y < 0 \end{cases}$$

(dove i valori assunti dalla y in ciascuno dei due tratti della funzione inversa possono essere determinati osservando i valori assunti dalla medesima variabile nella corrispondente parte di grafico della funzione diretta) ed è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ -x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione inversa è il seguente:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni, infine, si ha:

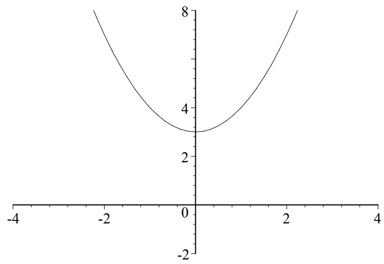
funzione diretta f	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
funzione inversa f^{-1}	$D = \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$

Esempio 3.19 *Data la funzione:*

$$f(x) = x^2 + 3$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$ (infatti vi sono rette parallele all'asse delle ascisse che intersecano il grafico della funzione in due punti), quindi non è invertibile. La funzione diventa però iniettiva (e quindi invertibile) considerando separatamente gli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. Le corrispondenti funzioni inverse (cioè le inverse delle restrizioni di f a ciascuno dei due intervalli su cui f è iniettiva) si ottengono considerando:

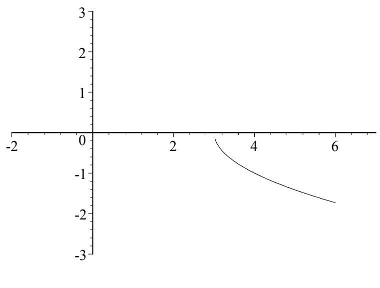
$$\text{su } (-\infty, 0] \qquad y = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = y - 3 \Rightarrow x = -\sqrt{y-3} \quad \text{se } y \geq 3$$

$$\text{su } [0, +\infty) \qquad y = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = y - 3 \Rightarrow x = +\sqrt{y-3} \quad \text{se } y \geq 3$$

A questo proposito si deve osservare che sul primo dei due intervalli l'espressione corretta da utilizzare è $-\sqrt{y-3}$ in quanto i valori corrispondenti della x sono negativi (infatti l'intervallo sul quale si sta effettuando il calcolo della funzione inversa è $(-\infty, 0]$) e tali valori si ottengono considerando appunto la radice quadrata di $y-3$ preceduta dal segno negativo; sul secondo dei due intervalli, invece, l'espressione corretta da utilizzare è $+\sqrt{y-3}$ in quanto i valori corrispondenti della x sono positivi (infatti l'intervallo sul quale si sta effettuando il calcolo della funzione inversa è $[0, +\infty)$) e tali valori si ottengono considerando la radice quadrata di $y - 3$ preceduta dal segno positivo. Si ha allora che la funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0]$ è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-3} \qquad \text{se } x \geq 3$$

il suo grafico è:



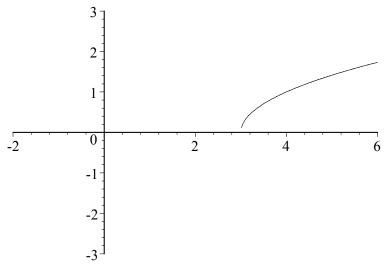
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = (-\infty, 0]$	$I = [3, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [3, +\infty)$	$I = (-\infty, 0]$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty)$ invece è data da:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-3} \qquad \text{se } x \geq 3$$

il suo grafico è:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = [0, +\infty)$	$I = [3, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [3, +\infty)$	$I = [0, +\infty)$

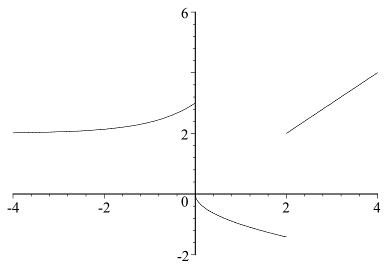
In questo caso, quindi, la funzione f non è iniettiva e perciò non è invertibile, mentre lo sono le sue restrizioni agli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$, e le corrispondenti funzioni inverse sono quelle sopra ricavate.

Esempio 3.20 *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & se \quad x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & se \quad 0 < x < 2 \\ x & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

verificare se essa è iniettiva e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

Il grafico della funzione è:



da cui risulta evidente che in questo caso $f(x)$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi non è invertibile. La funzione diventa però iniettiva (e quindi invertibile) considerando separatamente gli intervalli $(-\infty, 0]$, $(0, 2)$ e $[2, +\infty)$. Le corrispondenti funzioni inverse (cioè le inverse delle restrizioni di f a ciascuno dei tre intervalli su cui f è iniettiva) si ottengono considerando:

su $(-\infty, 0]$ $\quad y = e^x + 2 \Rightarrow x = \log(y - 2) \quad$ se $2 < y \leq 3$

su $(0, 2)$ $\quad y = -\sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \quad$ se $-\sqrt{2} < y < 0$

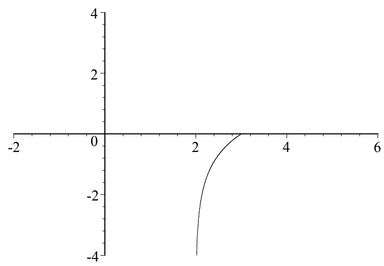
su $[2, +\infty)$ $\quad y = x \Rightarrow x = y \quad$ se $y \geq 2$

A questo proposito occorre tenere presente che gli intervalli di definizione di ciascuna di queste funzioni inverse si determinano osservando sul grafico le immagini delle corrispondenti restrizioni della funzione diretta (che appunto diventano i domini delle inverse, poiché dominio ed insieme delle immagini si scambiano passando da una funzione alla sua inversa).

Si ha allora che la funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0]$ è data da (indicando con x la variabile indipendente):

$$f^{-1}(x) = \log(x - 2) \quad \text{se } 2 < x \leq 3$$

il suo grafico è:



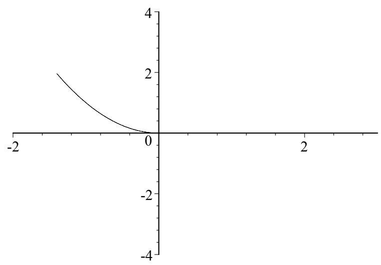
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = (-\infty, 0]$	$I = (2, 3]$
funzione inversa f^{-1}	$D = (2, 3]$	$I = (-\infty, 0]$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $(0, 2)$ invece è data da:

$$f^{-1}(x) = x^2 \quad \text{se } -\sqrt{2} < x < 0$$

il suo grafico è:



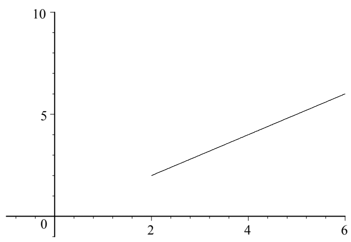
e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = (0, 2)$	$I = (-\sqrt{2}, 0)$
funzione inversa f^{-1}	$D = (-\sqrt{2}, 0)$	$I = (0, 2)$

La funzione inversa della restrizione di f all'intervallo $[2, +\infty)$ infine è data da:

$$f^{-1}(x) = x \quad \text{se } x \geq 2$$

il suo grafico è:



e per quanto riguarda dominio ed insieme delle immagini delle due funzioni si ha:

funzione diretta f	$D = [2, +\infty)$	$I = [2, +\infty)$
funzione inversa f^{-1}	$D = [2, +\infty)$	$I = [2, +\infty)$

3.7. Funzioni elementari e trasformazioni geometriche

Con il termine di funzioni elementari si indicano le funzioni (lineari, quadratiche, potenza, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche – oltre a quelle da esse ottenibili attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione –) a partire dalle quali è possibile ottenere funzioni più complesse. Dai loro grafici (e più in generale dai grafici di funzioni note), inoltre, è possibile, attraverso semplici considerazioni di tipo geometrico, ricavare i grafici di altre funzioni, legate a quelle di partenza da determinate relazioni.

In particolare, conoscendo il grafico di $y = f(x)$ è possibile ottenere agevolmente i grafici di:

$$y = -f(x) \qquad\qquad y = f(-x)$$

$$y = f(x) + c \ \text{ con } c \in \mathbb{R} \qquad\qquad y = f(x + c) \ \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

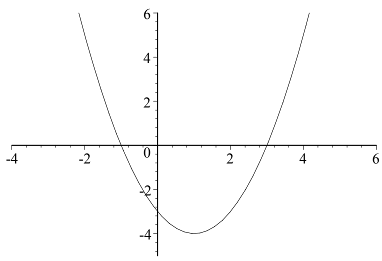
$$y = cf(x) \ \text{ con } c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad\qquad y = f(cx) \ \text{ con } c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$y = |f(x)| \qquad\qquad y = f(|x|)$$

Un esempio può essere illustrato considerando come funzione di partenza:

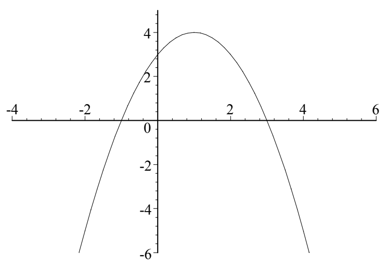
$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$$

che è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto la quale interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza dei punti $A = (-1, 0)$ e $B = (3, 0)$ e l'asse delle ordinate in corrispondenza del punto $C = (0, -3)$, e il cui grafico è il seguente:

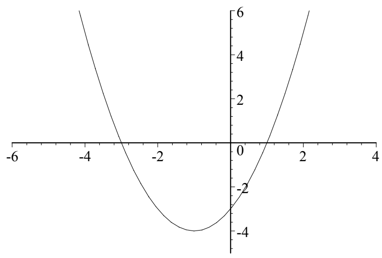


Da questo si ricavano facilmente i seguenti altri grafici:

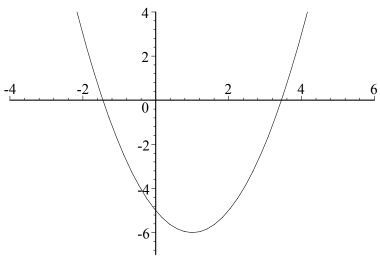
- Il grafico di $y = -f(x) = -x^2+2x+3$ si ottiene da quello di $f(x)$ "ribaltandolo" rispetto all'asse delle x:



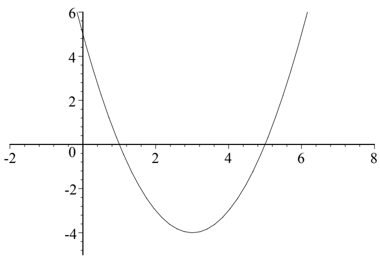
- Il grafico di $y = f(-x) = x^2+2x-3$ si ottiene da quello di $f(x)$ "ribaltandolo" rispetto all'asse delle y:



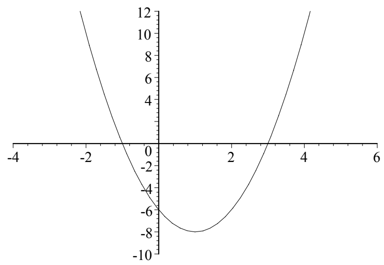
- Il grafico di $y = f(x) + c \quad$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ traslandolo della quantità $|c|$ verso l'alto (se $c > 0$) oppure verso il basso (se $c < 0$). Ad esempio, nel caso di $c = -2$ si ottiene $y = f(x) - 2 = x^2 - 2x - 5$ il cui grafico è:



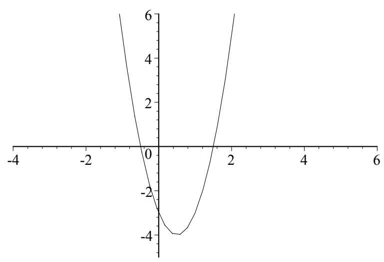
- Il grafico di $y = f(x + c) \quad$ con $c \in \mathbb{R}$ si ottiene da quello di $f(x)$ traslandolo della quantità $|c|$ a sinistra (se $c > 0$) oppure a destra (se $c < 0$). Ad esempio, nel caso di $c = -2$ si ottiene $y = f(x - 2) = x^2 - 6x + 5$ il cui grafico è:



- Il grafico di $y = cf(x)$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "dilatandolo" di $|c|$ volte nel senso dell'asse delle ordinate (più precisamente, il grafico risulta dilatato rispetto a quello di partenza se $c > 1$, mentre risulta compresso rispetto a quello di partenza se $0 < c < 1$ – e se $c < 0$ valgono considerazioni analoghe ma in aggiunta il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse delle x, come indicato nella prima delle trasformazioni considerate –). Ad esempio, nel caso di $c = 2$ si ottiene $y = 2f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ il cui grafico è:

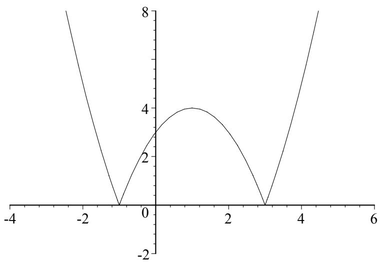


- Il grafico di $y = f(cx)$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ottiene da quello di $f(x)$ "comprimendolo" di $|c|$ volte nel senso dell'asse delle ascisse (più precisamente, il grafico risulta compresso rispetto a quello di partenza se $c > 1$, mentre risulta dilatato rispetto a quello di partenza se $0 < c < 1$ – e se $c < 0$ valgono considerazioni analoghe ma in aggiunta il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse delle y, come indicato nella seconda delle trasformazioni considerate –). Ad esempio, nel caso di $c = 2$ si ottiene $y = f(2x) = 4x^2 - 4x - 3$ il cui grafico è:



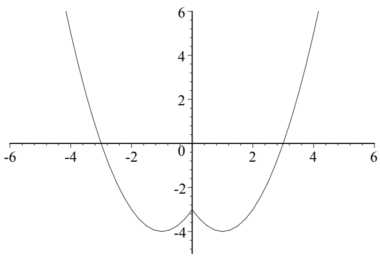
- Il grafico di $y = |f(x)| = \left|x^2 - 2x - 3\right|$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando al di sopra dell'asse delle ascisse la parte del grafico stesso che si trova al di sotto, in quanto si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



- Il grafico di $y = f(|x|) = x^2 - 2\,|x| - 3$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando a sinistra dell'asse delle ordinate la parte del grafico stesso che si trova alla destra, in quanto si ha:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



e, qualunque sia la funzione di partenza $f(x)$, si ha che la funzione $f(|x|)$ risulta essere pari.

3.8. Esercizi da svolgere

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \log\sqrt{x^2-3}$

2) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$

3) $f(x) = \log\sqrt{x^2+3}$

4) $f(x) = (3x)^{\sqrt{x^2-4}}$

5) $f(x) = \sqrt{\log(x^2-3)}$

6) $f(x) = \dfrac{\log\sqrt{x^2-3}}{|x^2-4|}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\log\sqrt{x^2+1}}$

8) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x\right)^{\log(-x)}$

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\log(x+3)}$

10) $f(x) = (4x)^{\sqrt{2-x}}$

11) $f(x) = \log\left(4-e^{-x}\right)$

12) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+|x|}$

13) $f(x) = \sqrt{\log x - 1}$

14) $f(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{x^2-4}}}$

15) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x}{\log(x-3)}}$

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\log(x^2-4)}$

17) $f(x) = \dfrac{\log\sqrt{x^2-3}}{e^{\sqrt{x^2+3}}}$

18) $f(x) = (\log x)^x$

19) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}-2}$

20) $f(x) = \dfrac{3\log x^2}{\sqrt{x^2}}$

Determinare intersezioni con gli assi e segno delle seguenti funzioni:

21) $f(x) = x(\log x - 3)^2$

22) $f(x) = e^{\frac{2-x}{1-x}}$

23) $f(x) = \dfrac{|\, x^2 - 4 \,|}{e^x}$

24) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+2}$

25) $f(x) = 3\dfrac{x^2-2\,|x|+1}{|x|+1}$

26) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$

27) $f(x) = \log\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$

Determinare se le seguenti funzioni presentano simmetrie:

28) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x^3}$

29) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^3 + x}$

30) $f(x) = \dfrac{2\,|x| + x^2}{x^3}$

31) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x^5}}{|x|}$

32) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x^4}$

33) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - x}}{x}$

Date le funzioni f *e* g*, determinare le funzioni composte* $g \circ f$ *e* $f \circ g$:

34) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} \qquad g(t) = t^3 + 1$

35) $f(x) = x^3 + 1 \qquad g(t) = \sqrt[3]{t + 1}$

36) $f(x) = \log x \qquad g(t) = e^{t+3}$

37) $f(x) = \log x \qquad g(t) = |t - 2|$

38) $f(x) = \log(x + 1) \qquad g(t) = e^t$

39) $f(x) = \log\,(x + 1) \qquad g(t) = \sqrt{t}$

40) $f(x) = \log x - 2 \qquad g(t) = \sqrt{t}$

41) $f(x) = |x - 1| \qquad g(t) = \sqrt{t}$

42) $f(x) = \log x \qquad g(t) = e^{t+1}$

43) $f(x) = e^{x+2} \qquad g(t) = \log t$

Date le seguenti funzioni, determinare le corrispondenti funzioni inverse:

44) $f(x) = 2x + 3$

45) $f(x) = x^3 + 3$

46) $f(x) = \sqrt{x+2}$

47) $f(x) = \log |x|$

48) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

49) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se} \quad x < 1 \\ \log x^3 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

50) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se} \quad x \leq -3 \\ x + 3 & \text{se} \quad -3 < x < 3 \\ \log x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Capitolo 4

Limiti e continuità

4.1. Definizioni e algebra estesa dei limiti

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato x_0 punto di accumulazione per X, si dice che f ammette limite l per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se in corrispondenza di ogni intorno di l di raggio ε, $U_\varepsilon(l)$, esiste un intorno di x_0 di raggio δ, $U_\delta(x_0)$, tale che per ogni x (diverso da x_0) appartenente all'intorno di x_0 (e al dominio di f) il corrispondente valore della funzione appartiene all'intorno di l; si ha quindi:

$$\forall U_\varepsilon(l) \quad \exists U_\delta(x_0) \quad : \quad x \in U_\delta(x_0) \cap X \ , \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(l)$$

o anche, con una diversa scrittura:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Nella definizione data, sia il punto x_0 sia il valore l possono essere finiti oppure uguali a $\pm\infty$. Quella considerata, inoltre, è la definizione di limite completo, ma si possono introdurre in maniera del tutto analoga le definizioni di limite destro o sinistro (considerando rispettivamente un intorno destro o sinistro di x_0 e scrivendo $x \to x_0^+$ oppure $x \to x_0^-$) e di limite per eccesso o per difetto (considerando rispettivamente un intorno destro o sinistro di l e scrivendo l^+ oppure l^-).

In pratica, però, per il calcolo dei limiti non si ricorre alla definizione ma si usano innanzitutto una serie di regole che consentono di ricondurre il calcolo del limite di una funzione (nella cui espressione analitica compaiono un numero finito di operazioni di somma, prodotto, quoziente) al calcolo dei limiti dei suoi addendi o dei suoi fattori.

In particolare, se f e g sono due funzioni che ammettono entrambe limite per $x \to x_0$ (dove x_0 è un punto di accumulazione per entrambi gli insiemi di definizione delle due funzioni), valgono le seguenti uguaglianze:

$$(i) \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

questa uguaglianza perde significato se uno dei due limiti è $+\infty$ e l'altro è $-\infty$

$$(ii) \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

questa uguaglianza perde significato se uno dei due limiti è 0 e l'altro è $\pm\infty$

$$(iii) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} \qquad \text{quando } \lim_{x \to x_0} f(x) = m \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty \qquad \text{quando } \lim_{x \to x_0} f(x) = 0^{\pm}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^{\pm} \qquad \text{quando } \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

$$(iv) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

questa uguaglianza perde significato se entrambi i limiti sono 0 oppure $\pm\infty$

In base a queste uguaglianze è possibile affermare che il limite di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni è uguale, rispettivamente, alla somma, al prodotto e al rapporto dei limiti delle singole funzioni. Queste regole rimangono valide quando i limiti in questione, anziché essere dei numeri, sono uguali a $\pm\infty$ (con l'eccezione dei casi indicati, in cui le uguaglianze elencate perdono significato e danno vita alle cosiddette "forme di indecisione"), per cui diventa possibile introdurre un'"algebra estesa" dei limiti. Valgono infatti i seguenti risultati:

a) per la somma:

$$(+\infty) + a = +\infty + a = +\infty \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$
$$(-\infty) + a = -\infty + a = -\infty \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

b) per il prodotto:

$$(+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$
$$(-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$
$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$
$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$$

c) per il reciproco:

$$\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$
$$\frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$

d) per il rapporto:

$$\frac{a}{0^{\pm}} = a \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = a \cdot \frac{1}{\pm\infty} = a \cdot 0^{\pm} = \begin{cases} 0^{\pm} & \text{se } a > 0 \\ \\ 0^{\mp} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{0^{\pm}}{\pm\infty} = 0^{\pm} \cdot \frac{1}{\pm\infty} = (0^{\pm}) \cdot (0^{\pm}) = 0^{+}$$

$$\frac{0^{\mp}}{\pm\infty} = 0^{\mp} \cdot \frac{1}{\pm\infty} = (0^{\mp}) \cdot (0^{\pm}) = 0^{-}$$

$$\frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$\frac{\mp\infty}{0^{\pm}} = \mp\infty \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = (\mp\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty$$

Occorre tenere presente che, in tutte queste formule, ∞ non rappresenta un numero ma un simbolo; una scrittura quale $+\infty + \infty = +\infty$ non va quindi letta come "la somma di $+\infty$ e di $+\infty$ è uguale a $+\infty$" (appunto perché ∞ non è un numero!) ma come "la somma di due funzioni che tendono a $+\infty$ tende a $+\infty$". In modo analogo, la scrittura $\dfrac{1}{0^{+}} = +\infty$ non va letta come "1 diviso 0^{+} è uguale a $+\infty$" (in quanto, algebricamente, la divisione per 0 non è possibile!) ma come "il reciproco di una funzione che tende a 0^{+} tende a $+\infty$". Considerazioni analoghe valgono per tutte le altre formule riportate, che rappresentano quindi delle "abbreviazioni" di quella che è appunto un'"algebra estesa" dei limiti, e hanno senso solo tenendo presente la nozione di limite che sta alla loro base.

Una proprietà fondamentale, che consente di calcolare agevolmente i limiti nella maggioranza dei casi (senza dover ricorrere alla definizione), è poi quella delle funzioni continue, per le quali si ha (per definizione appunto di funzione continua):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

per cui diventa possibile calcolare i limiti considerando semplicemente l'andamento, al variare di x, delle funzioni elementari. Poiché le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari attraverso le consuete operazioni algebriche e l'operazione di composizione sono continue (sul loro dominio), per tutte queste funzioni (che costituiscono la grande maggioranza dei casi che si presentano) è possibile calcolare in questo modo i limiti (utilizzando inoltre le regole relative al limite di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni e le regole dell' "algebra estesa"), evitando appunto di ricorrere alla definizione.

Esempio 4.1 *Calcolare i seguenti limiti:*

1) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+2}{(4-x)^2}$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-\sin x+2}{1-x}$

4) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-\sin x+2}{1-x}$

5) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{e^{-x}}$

6) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\log x}$

Tutte queste funzioni, essendo ottenute a partire dalle funzioni elementari, sono continue sul loro dominio, per calcolare i limiti indicati è allora sufficiente utilizzare le regole relative al limite di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni, la proprietà di continuità ed, eventualmente, le regole dell'"algebra estesa" introdotta prima. Si ottiene così:

1) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+2}{(4-x)^2} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x+2)}{\lim_{x\to 3}(4-x)^2} = \dfrac{3+2}{(4-3)^2} = \dfrac{5}{1} = 5$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x-2} = \dfrac{\lim_{x\to 0}(e^x-1)}{\lim_{x\to 0}(x-2)} = \dfrac{1-1}{0-2} = \dfrac{0}{-2} = 0$

3) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-\sin x+2}{1-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-\sin x+2)}{\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)} = \frac{1-\sin 1+2}{1-1^+} = \frac{3-\sin 1}{0^-} = -\infty$$

4) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-\sin x+2}{1-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-\sin x+2)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)} = \frac{1-\sin 1+2}{1-1^-} = \frac{3-\sin 1}{0^+} = +\infty$$

5) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x-1}{e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+3x-1)}{\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}} = \frac{+\infty+\infty-1}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

6) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x}{\lim\limits_{x\to 0^+} \log x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$$

Un altro risultato che, in alcuni casi, si utilizza nel calcolo dei limiti è poi il seguente:

Se f è limitata in un intorno di x_0 e se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

cioè il prodotto di una funzione limitata per una funzione che tende a 0, a sua volta tende a 0.

Questa proprietà viene applicata di solito in presenza di funzioni trigonometriche (in particolare seno e coseno, che godono della proprietà di essere limitate).

Esempio 4.2 *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \cos x$$

In questo caso e^x tende a 0 per $x \to -\infty$ mentre $\cos x$ è limitata in un intorno di $-\infty$ (infatti $|\cos x| \leq 1 \ \forall x$), si ha allora:

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \cos x = 0$$

Esempio 4.3 *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \cos x$$

In questo caso $\cos x$ è limitata in un intorno di $+\infty$ ma e^x tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, per cui non è possibile applicare il risultato sopra riportato (in particolare si può dimostrare che il limite considerato non esiste).

4.2. Forme di indecisione

Le regole viste in precedenza per il calcolo dei limiti (limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto) non possono essere applicate in alcuni casi, che rappresentano le cosiddette "forme di indecisione". Esse sono caratterizzate dal fatto che non è possibile conoscere a priori il risultato dell'operazione di limite che ha dato origine a tali forme, in quanto forme di indecisione dello stesso tipo possono dare vita a risultati diversi.

Considerando ad esempio le funzioni:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = -x^2$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

per cui il limite per $x \to +\infty$ di $[f(x) + g(x)]$ si presenta nella forma di indecisione $+\infty - \infty$. In questo caso si può però agevolmente ottenere:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + 1 - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Considerando invece le funzioni:

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = -x^2$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

per cui il limite per $x \to +\infty$ di $[f(x) + g(x)]$ si presenta nuovamente nella forma di indecisione $+\infty - \infty$, ma si può facilmente ottenere:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + x - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Considerando poi le funzioni:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2 - x$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

per cui il limite per $x \to +\infty$ di $[f(x) + g(x)]$ si presenta ancora nella forma di indecisione $+\infty - \infty$, ma in questo caso si ottiene facilmente:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x^2 - x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

Da questi esempi risulta quindi evidente come una stessa forma di indecisione (in questo caso $+\infty - \infty$) dia origine a risultati diversi, per cui non è possibile stabilire a priori il risultato a cui essa corrisponde.

Le forme di indecisione, in particolare, sono:

$$(+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0 \cdot \infty$$

$$\frac{0^\pm}{0^\pm} = \frac{0^\pm}{0^\mp} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \frac{\pm\infty}{\mp\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Accanto a queste, che vengono definite "aritmetiche", sono inoltre presenti forme di indecisione "esponenziali", date da:

$$1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Queste ultime, in realtà, possono essere agevolmente ricondotte alle precedenti (in particolare alla forma $0 \cdot \infty$) tenendo presente che esse nascono dal calcolo di limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, per le quali è sempre possibile utilizzare la seguente trasformazione:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$$

per cui le forme di indecisione esponenziali diventano:

$$1^\infty \Rightarrow e^{\infty\cdot\log 1} = e^{\infty\cdot 0}$$

$$0^0 \Rightarrow e^{0\cdot\log 0} = e^{0\cdot\infty}$$

$$\infty^0 \Rightarrow e^{0\cdot\log\infty} = e^{0\cdot\infty}$$

e vengono quindi ricondotte tutte alla forma di indecisione aritmetica $0 \cdot \infty$.

A questo punto diventa importante individuare delle tecniche che consentano di risolvere i limiti in presenza delle forme di indecisione; in particolare, è possibile distinguere i seguenti metodi:

- manipolazioni algebriche
- infinitesimi ed infiniti (principio di eliminazione dei termini trascurabili)
- limiti notevoli
- regola di de l'Hospital
- formula di Taylor-Mac Laurin

4.3. Calcolo di limiti: manipolazioni algebriche

Un primo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dal ricorso a manipolazioni algebriche. In genere, esse consistono in scomposizioni di polinomi, razionalizzazioni, utilizzo delle proprietà delle potenze, utilizzo delle proprietà dei logaritmi, che in alcuni casi consentono di superare la forma di indecisione presente inizialmente nel calcolo di un limite.

Esempio 4.4 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può allora scrivere (scomponendo il denominatore della frazione e semplificando):

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} -\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$$
$$= \lim_{x \to 2} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Esempio 4.5 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$, si può allora scrivere (moltiplicando e dividendo per una stessa quantità e sfruttando il prodotto notevole):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = 0\end{aligned}$$

Esempio 4.6 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$, si può allora scrivere (moltiplicando e dividendo per una stessa quantità e sfruttando il prodotto notevole):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}}\end{aligned}$$

A questo punto si ha la forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$, è allora possibile mettere in evidenza sia al numeratore sia al denominatore della frazione la potenza di grado massimo (una tecnica questa che viene utilizzata spesso quando si ha a che fare con una forma di indecisione del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e ci si trova in presenza di potenze della x sia a numeratore sia a denominatore), ottenendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

In questo caso si può notare che il termine x^2 portato fuori dal segno di radice quadrata dovrebbe essere scritto nella forma $|x|$, ma poiché il limite è calcolato per $x \to +\infty$ questo significa che si stanno considerando valori della x sicuramente positivi, per cui $|x| = x$.

Esempio 4.7 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\log(x^2-2)-\log(x-2)\right]$$

Il limite si presenta nella forma $+\infty - \infty$, si può allora scrivere (sfruttando una proprietà dei logaritmi):

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\log(x^2-2)-\log(x-2)\right] = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{x^2-2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\frac{x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = +\infty$$

4.4. Calcolo di limiti: infinitesimi ed infiniti

Un secondo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dal "principio di eliminazione dei termini trascurabili", applicabile quando la forma di indecisione nasce in presenza di somme di infinitesimi oppure di infiniti (in particolare, in presenza di somme di potenze). A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per X, si ha innanzitutto:

$$\text{f è infinitesima per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$$\text{f è infinita per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

cioè una funzione si dice infinitesima (per $x \to x_0$) se tende a 0, mentre si dice infinita (per $x \to x_0$) se tende a $\pm\infty$. Gli infinitesimi e gli infiniti, poi, sono caratterizzati da un determinato ordine (un numero), che indica la velocità con la quale essi tendono rispettivamente a 0 oppure ad ∞ (ad ordine maggiore corrisponde una maggiore velocità di convergenza a 0 – nel caso di infinitesimi – oppure ad ∞ – nel caso di infiniti –). In particolare, considerando le funzioni potenza $f(x) = kx^\alpha$ con $k \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ esse sono infinitesime per $x \to 0$ ed infinite per $x \to \pm\infty$, e il loro ordine è rappresentato dall'esponente α.

Con riferimento agli infinitesimi e agli infiniti vale la seguente regola, nota come "principio di eliminazione dei termini trascurabili", che può essere utilizzata nel calcolo di certi limiti (che si presentano nella forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$):

Se f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ e g_j $(j = 1, 2, ..., m)$ sono funzioni infinitesime oppure infinite per $x \to x_0$, allora si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + ... + g_m(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_h(x)}{g_k(x)} \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} 1 \le h \le n \\ 1 \le k \le m \end{array}$$

dove $f_h(x)$ e $g_k(x)$ rappresentano l'infinitesimo di ordine inferiore (nel caso di infinitesimi) oppure l'infinito di ordine superiore (nel caso di infiniti) fra quelli che compaiono nella somma rispettivamente a numeratore e a denominatore della frazione.

Questo risultato autorizza quindi a trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (nel calcolo del limite di un rapporto tra somme di infinitesimi) e gli infiniti di ordine inferiore (nel calcolo del limite di un rapporto tra somme di infiniti).

Questo criterio è di immediata applicazione nel caso di somme di potenze (per le quali ad esponenti maggiori corrispondono infinitesimi – per $x \to 0$ – o infiniti – per $x \to \pm\infty$ – di ordine superiore); in questo caso, infatti, è sufficiente considerare, sia a numeratore sia a denominatore, la potenza minore (nel caso di infinitesimi) oppure la potenza maggiore (nel caso di infiniti), tralasciando tutte le altre.

Esempio 4.8 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+\sqrt[3]{x}+5x^3}{x^2+\sqrt{x}+2x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infinitesimi è possibile trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (e quindi considerare solo le potenze di grado minore), ottenendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+\sqrt[3]{x}+5x^3}{x^2+\sqrt{x}+2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x)^{\frac{1}{3}}}{(x)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x)^{\frac{1}{6}}} = +\infty$$

Esempio 4.9 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+3x^3-6\sqrt{x}}{2x^3+x-2\sqrt{x}}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infinitesimi è possibile trascurare gli infinitesimi di ordine superiore (e quindi considerare solo le potenze di grado minore), ottenendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+3x^3-6\sqrt{x}}{2x^3+x-2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-6\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}} = 3$$

Esempio 4.10 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+x}{3+\sqrt{x^3}+2x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, poiché sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono somme di infiniti (in particolare il valore 3 a denominatore può essere considerato un infinito di ordine 0) è possibile trascurare gli infiniti di ordine inferiore (e quindi considerare solo le potenze di grado maggiore), ottenendo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+x}{3+\sqrt{x^3}+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} = 0^+$$

Esempio 4.11 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(3x + 2x^2 - \sqrt[3]{x}\right)$$

Il limite si presenta nella forma $-\infty + \infty$, e anche se non ci si trova in presenza di una frazione si tratta comunque di una somma di infiniti, per cui può essere applicato anche in questo caso il principio di eliminazione dei termini trascurabili per eliminare la forma di indecisione. In particolare, poiché l'espressione considerata è una somma di infiniti, è possibile trascurare gli infiniti di ordine inferiore (e quindi considerare solo la potenza di grado maggiore, che determina l'andamento della funzione per $x \to -\infty$), ottenendo:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(3x + 2x^2 - \sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$$

4.5. Calcolo di limiti: limiti notevoli

Un terzo metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dall'applicazione dei cosiddetti "limiti notevoli", per cui si cerca di ricondurre il calcolo di limiti complessi a quello di altri limiti, il cui valore è noto. Valgono in particolare i seguenti limiti notevoli:

(*i*) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(*ii*) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(*iii*) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ in particolare $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

(*iv*) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$ in particolare $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(*v*) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

(*vi*) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ in particolare $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Diventa così possibile, almeno in certi casi, risolvere le forme di indecisione presenti inizialmente.

Esempio 4.12 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{2x^3}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (iii) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-e^x)}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{e^x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Esempio 4.13 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) + x}{x - 3\sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, è però possibile sfruttare i limiti notevoli (i) e (iv) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) + x}{x - 3\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\log(1+x) + x}{x}}{\dfrac{x - 3\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\dfrac{\log(1+x)}{x} + 1}{1 - 3\dfrac{\sin x}{x}} =$$
$$= \frac{2\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} + 1}{1 - 3\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{2\cdot 1 + 1}{1 - 3\cdot 1} = -\frac{3}{2}$$

Esempio 4.14 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{4x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (v) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Esempio 4.15 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$$

Il limite presenta innanzitutto, nella base, la forma $\frac{\infty}{\infty}$, è però possibile sfruttare il limite notevole (vi) osservando che si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$$

I limiti notevoli visti si applicano anche in casi più generali, quando al posto di x si ha una funzione $f(x)$ che si comporta allo stesso modo della variabile x nelle espressioni prima esaminate. In questo caso, attraverso opportuni cambiamenti di variabile, diventa possibile ricondursi ai limiti notevoli fondamentali.

Esempio 4.16 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, inoltre non rientra in nessuno dei limiti notevoli sopra elencati, è però possibile effettuare innanzitutto la seguente trasformazione (dividendo numeratore e denominatore per $2\sqrt{x}$):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}=\frac{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$$

A questo punto il limite che compare a numeratore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $2\sqrt{x}=t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x\to0^+$ anche $t\to0^+$):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (i)), mentre il limite che compare a denominatore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $\sqrt{x} = t$, per cui si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(calcolato sfruttando nuovamente il limite notevole (i)). In conclusione, il limite cercato è:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Esempio 4.17 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x}{x\sin\frac{1}{x}}$$

Il limite può innanzitutto essere scritto nella forma:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x}{x\sin\frac{1}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x}{\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}$$

dopodiché il limite a numeratore si presenta nella forma 1^∞ mentre il limite a denominatore si presenta nella forma $0\cdot\infty$. Il limite a numeratore può però essere scritto come:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^x = e^{-2}$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (vi)), mentre il limite a denominatore può essere calcolato effettuando il cambiamento di variabile $\frac{1}{x} = t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x \to +\infty$ allora $t \to 0^+$):

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\sin t\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(calcolato sfruttando il limite notevole (i)). In conclusione, il limite cercato è:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}{x\sin\dfrac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{e^{-2}}{1} = \frac{1}{e^2}$$

4.6. Calcolo di limiti: regola di de l'Hospital

Un quarto metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione è costituito dall'applicazione della regola di de l'Hospital, che consente di superare forme di indecisione del tipo $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$. Per l'applicazione di questa regola è però necessario l'uso del concetto di derivata di una funzione, che verrà introdotto nel prossimo Capitolo; si rinvia quindi a tale Capitolo per l'illustrazione delle regole utilizzate per il calcolo della derivata di una funzione.

Con riferimento alla regola di de l'Hospital vale il seguente risultato:

Se f e g sono due funzioni definite e derivabili in un intorno del punto x_0, infinitesime oppure infinite per $x \to x_0$, e se $g'(x) \neq 0$ nell'intorno di x_0 (escluso al più il punto x_0 stesso), allora se esiste (finito o infinito) il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In pratica, questa regola consente di sostituire al calcolo del limite del rapporto di due funzioni il calcolo del limite del rapporto delle loro derivate; se quest'ultimo limite esiste, allora è anche uguale al limite iniziale, se invece non esiste non è detto che il limite iniziale non esista (in quanto quella espressa dalla regola di de l'Hospital è una condizione sufficiente – ma non necessaria – per l'esistenza del limite cercato). Qualora anche il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni si presenti in una delle forme $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, poi, diventa possibile (se sono soddisfatte le ipotesi richieste per l'applicazione di questa regola) applicare nuovamente (e anche più volte) la regola di de l'Hospital, fino a giungere alla risoluzione della forma di indecisione.

Esempio 4.18 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-4}$$

Il limite (che è già stato risolto nell'Esempio 4.4) si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può però applicare la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-4} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{D(2-x)}{D(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

che è il limite cercato (ed è uguale al valore ottenuto in precedenza servendosi delle manipolazioni algebriche).

Esempio 4.19 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{2x^3}$$

Il limite (che è già stato risolto nell'Esempio 4.12) si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si può però applicare la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{2x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D(x^2 - x^2 e^x)}{D(2x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - x^2 e^x - 2xe^x}{6x^2}$$

Anche questo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, è però possibile applicare nuovamente la regola di de l'Hospital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - x^2 e^x - 2xe^x}{6x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D(2x - x^2 e^x - 2xe^x)}{D(6x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 e^x - 4xe^x - 2e^x}{12x}$$

Anche questo nuovo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando una terza volta la regola di de l'Hospital si riesce però a risolvere l'indecisione, infatti si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 e^x - 4xe^x - 2e^x}{12x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D(2 - x^2 e^x - 4xe^x - 2e^x)}{D(12x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 e^x - 2xe^x - 4xe^x - 4e^x - 2e^x}{12} = -\frac{1}{2}$$

che è il limite cercato (ed è uguale al valore ottenuto in precedenza servendosi dei limiti notevoli).

Esempio 4.20 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{3x^3}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, applicando la regola di de l'Hospital 3 volte si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{3x^3}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{D(e^x-1)}{D(3x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{9x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{D(e^x)}{D(9x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{18x}\overset{H}{=}$$
$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{D(e^x)}{D(18x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{18}=+\infty$$

Esempio 4.21 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+}x\log x$$

Il limite si presenta nella forma $0\cdot\infty$, per applicare la regola di de l'Hospital occorre innanzitutto riscriverlo come:

$$\lim_{x\to0^+}x\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

che si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, a questo punto si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{D(\log x)}{D\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0^-$$

Esempio 4.22 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x$$

Il limite si presenta nella forma $0\cdot\infty$, per applicare la regola di de l'Hospital occorre innanzitutto riscriverlo come:

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$$

che si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, a questo punto si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{D(x)}{D(e^{-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0^-$$

Esempio 4.23 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to0^+}x^x$$

Il limite si presenta nella forma esponenziale 0^0, occorre allora innanzitutto effettuare la trasformazione:

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\log x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\log x}$$

Il limite ad esponente si presenta nella forma $0\cdot\infty$ ed è stato calcolato in precedenza (è uguale a 0), si ha quindi:

$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1$$

La regola di de l'Hospital consente anche di stabilire una gerarchia tra infiniti, confrontando tra di loro le famiglie di funzioni esponenziali, potenze e logaritmi (che, per $x\to+\infty$, sono appunto funzioni infinite). Vale a questo proposito il seguente risultato:

Ogni infinito esponenziale è di ordine superiore ad ogni infinito potenza, cioè ($\forall\alpha>1$, $\beta>0$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^\beta}=+\infty$$

A sua volta, ogni infinito potenza è di ordine superiore ad ogni infinito logaritmico, cioè ($\forall\beta>0$, $\gamma>0$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{(\log x)^\gamma}=+\infty$$

Esempio 4.24 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, applicando il risultato sopra enunciato si ha che 2^x è un infinito di ordine superiore a x^3 e quindi si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3} = +\infty$$

Esempio 4.25 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{3^x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, applicando il risultato sopra enunciato si ha che 3^x è un infinito di ordine superiore a $(\log x)^3$ e quindi si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{3^x}{(\log x)^3}} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{(\log x)^3}} = 0^+$$

4.7. Calcolo di limiti: formula di Taylor-Mac Laurin

Un quinto metodo utilizzato per la risoluzione delle forme di indecisione (in particolare quelle del tipo $\frac{0}{0}$) è costituito dall'applicazione della formula di Taylor-Mac Laurin. Tale formula verrà introdotta in forma estesa nel prossimo Capitolo (al quale quindi si rinvia per una illustrazione completa), mentre qui viene presentato il suo utilizzo nel calcolo di alcuni limiti, che generano forme di indecisione.

In generale, la formula di Taylor centrata in x_0 e arrestata all'ordine n (con resto di Peano) consente di approssimare una funzione, in un intorno del punto x_0, mediante un polinomio di grado n, commettendo in questo modo un errore che risulta essere un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ (cioè un errore che tende a 0 più rapidamente di $(x - x_0)^n$); se $x_0 = 0$, poi, la formula prende il nome di formula di Mac Laurin.

A questo proposito, per il calcolo di certi limiti risultano di fondamentale importanza i seguenti sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

In tutti questi sviluppi compare il simbolo o ("o piccolo"); con riferimento a tale simbolo occorre tenere presente che la scrittura:

$$f = o(g) \qquad \text{per } x \to x_0$$

(che si legge "f è o piccolo di g per x che tende a x_0") equivale a:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e in questo caso si dice anche che f è trascurabile rispetto a g, per $x \to x_0$ (in quanto l'idea sottostante è che, per $x \to x_0$, f tende a 0 più rapidamente di g). Il simbolo o, inoltre, soddisfa le seguenti proprietà:

$$o(c \cdot g) = o(g) \qquad \forall c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$$

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

le quali risultano particolarmente utili proprio nell'utilizzo della formula di Taylor-Mac Laurin per il calcolo di certi limiti (in particolare, l'ultima proprietà indica che la somma algebrica di due quantità trascurabili rispetto ad una certa funzione g è ancora una quantità trascurabile rispetto a questa funzione, e non è possibile una semplificazione del tipo $o(g) - o(g) = 0$).

Le formule prima introdotte possono essere applicate nel calcolo di certi limiti per la risoluzione delle forme di indecisione, in quanto permettono di sostituire alle funzioni coinvolte nei limiti i loro sviluppi di Taylor-Mac Laurin. In questi calcoli, il problema fondamentale è costituito dall'ordine dello sviluppo al quale è opportuno arrestarsi. A questo proposito, si deve tenere presente che l'unica regola da seguire è quella in base alla quale occorre arrestarsi quando diventa possibile eliminare la forma di indecisione, in quanto se ci si arresta troppo presto la forma di indecisione permane, mentre se si continua lo sviluppo introducendo termini in eccesso rispetto a quelli che consentono di superare la forma di indecisione si compie uno sforzo inutile (poiché questi termini, essendo infinitesimi di ordine superiore, verranno poi tralasciati nel calcolo).

Esempio 4.26 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione e^x e arrestandosi al primo ordine si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x+o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}$$

e non si conosce il risultato di questo limite (in quanto $o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad x per $x\to 0$, per cui si avrebbe $\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$, ma non si può dire niente del suo comportamento rispetto a x^2). Applicando invece lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al secondo ordine si ottiene (tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore, che sono incorporati nel termine $o(x^2)$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

e quindi si risolve la forma di indecisione. Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al terzo ordine, per cui si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

da cui risulta evidente che il fatto di proseguire lo sviluppo al di là dell'ordine che consente di superare la forma di indecisione costituisce uno sforzo inutile (in quanto i termini di ordine più elevato, essendo infinitesimi di ordine superiore, vengono trascurati e quindi non contribuiscono al calcolo del limite).

Esempio 4.27 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[(1+x)^2-1\right]}{x-\sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, applicando lo sviluppo di Mac Laurin alle funzioni $(1+x)^\alpha$ (con $\alpha=2$) e $\sin x$ si ottiene (arrestando lo sviluppo di $(1+x)^2$ al primo ordine e quello di $\sin x$ al terzo ordine e sfruttando le proprietà del simbolo o viste prima):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[(1+x)^2-1\right]}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[1+2x+o(x)-1\right]}{x-x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3+o(x^3)}{\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\dfrac{1}{6}x^3} = 12$$

In modo del tutto analogo a quanto è stato visto con riferimento ai limiti notevoli, gli sviluppi di Taylor-Mac Laurin si applicano anche a funzioni più generali di quelle prima considerate, ottenute per composizioni di funzioni infinitesime. In questo caso, attraverso opportuni cambiamenti di variabile diventa possibile ricondursi agli sviluppi di Taylor-Mac Laurin fondamentali.

Esempio 4.28 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}{x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, prima di applicare lo sviluppo di Mac Laurin conviene in questo caso effettuare il cambiamento di variabile $\sqrt[3]{x}=t$, per cui si ottiene (tenendo presente che se $x\to 0$ anche $t\to 0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t^3}$$

e poi, applicando lo sviluppo di Mac Laurin a $\sin t$ (arrestato al terzo ordine):

$$\lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t-t+\dfrac{t^3}{3!}+o(t^3)}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{1}{6}t^3}{t^3} = \frac{1}{6}$$

Esempio 4.29 *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\sin x}-1}{x^2 \sin x}$$

Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, applicando innanzitutto lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione $\sin x$ (arrestato al terzo ordine al numeratore e al primo ordine al denominatore) si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\sin x}-1}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}-1}{x^2(x+o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{6}x^3}-1}{x^3+o(x^3)}$$

A questo punto si può effettuare il cambiamento di variabile $\dfrac{1}{6}x^3 = t$ (tenendo presente che se $x \to 0$ anche $t \to 0$) e applicare poi lo sviluppo di Mac Laurin alla funzione esponenziale, ottenendo così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{6}x^3}-1}{x^3+o(x^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{6t+o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1+t+o(t)-1}{6t+o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{6t} = \frac{1}{6}$$

4.8. Asintoti

Un altro argomento legato al calcolo di limiti è costituito dalla ricerca degli asintoti di una funzione. In effetti, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il calcolo dei limiti in corrispondenza degli estremi del campo di esistenza consente di individuare la presenza di eventuali asintoti. Per questo motivo, procedendo nello studio di una funzione, dopo l'analisi del dominio, delle intersezioni con gli assi, del segno e di eventuali simmetrie (come visto nel Capitolo precedente) si passa al calcolo dei limiti agli estremi del dominio.

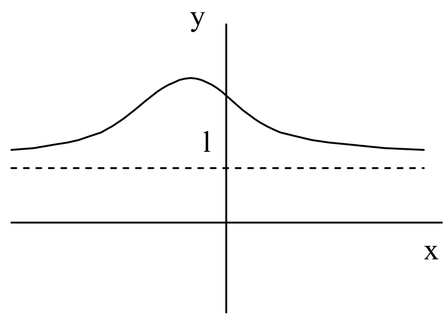
Con riferimento alla ricerca degli asintoti si hanno i seguenti risultati:

- Se vale:

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x) = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

allora $f(x)$ ammette come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = l$.

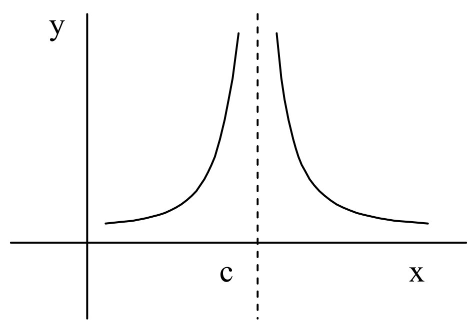
Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- Se vale:

$$\lim_{x \to c^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad \text{con } c \text{ punto di accumulazione per } X$$

allora $f(x)$ ammette come asintoto verticale la retta di equazione $x = c$. Graficamente si ha una situazione di questo tipo:

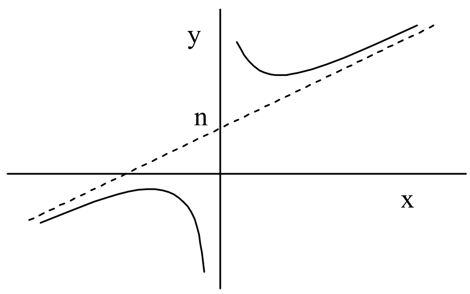


- Se vale:

$$\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - mx - n] = 0$$

allora $f(x)$ ammette come asintoto obliquo la retta di equazione $y = mx + n$.

Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



e quest'ultimo caso equivale all'esistenza dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{(con } m \text{ finito e} \neq 0)$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - mx] = n \quad \text{(con } n \text{ finito)}$$

Se i limiti sopra elencati valgono solo per $x \to -\infty$ o per $x \to c^-$ si parla di asintoto (orizzontale, verticale, obliquo) sinistro, se valgono solo per $x \to +\infty$ o per $x \to c^+$ si parla di asintoto (orizzontale, verticale, obliquo) destro. Si può inoltre osservare che l'asintoto orizzontale e quello obliquo si escludono a vicenda (quindi non possono essere presenti contemporaneamente), mentre l'asintoto verticale è compatibile sia con quello orizzontale sia con quello obliquo.

Esempio 4.30 *Individuare eventuali asintoti della funzione:*

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Si ha innanzitutto che il dominio della funzione è dato da:

$$D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

per cui i limiti da calcolare sono quelli per $x \to \mp\infty$ e per $x \to 2$ (infatti i limiti di una funzione vanno calcolati in corrispondenza degli estremi del suo dominio, per cui l'individuazione di quest'ultimo è importante anche per capire quali sono i limiti da determinare). Si ha poi:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} \frac{3}{x-2} = \mp\infty$$

da cui si deduce che $y = 0$ è un asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$ e anche per $x \to +\infty$), mentre $x = 2$ è un asintoto verticale.

Esempio 4.31 *Individuare eventuali asintoti della funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

Si ha innanzitutto che il dominio della funzione è dato da:

$$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

per cui i limiti da calcolare sono quelli per $x \to \mp\infty$ e per $x \to \mp 3$, a questo proposito si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^{\mp}} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 3^{\mp}} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 - 9} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Si può allora concludere che le rette $x = -3$ e $x = 3$ sono due asintoti verticali, non vi sono invece asintoti orizzontali, mentre per verificare la presenza di asintoti obliqui si considera:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = m$$

e poi:

$$\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^3+5x^2+1}{x^2-9}-x\right] =$$
$$= \lim_{x\to\mp\infty}\frac{5x^2+9x+1}{x^2-9} = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5 = n$$

per cui la retta $y = x+5$ è un asintoto obliquo per $x \to \mp\infty$.

4.9. Funzioni continue

Un ultimo utilizzo dei limiti è quello legato alla nozione di continuità di una funzione. A questo proposito, una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X, se vale:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

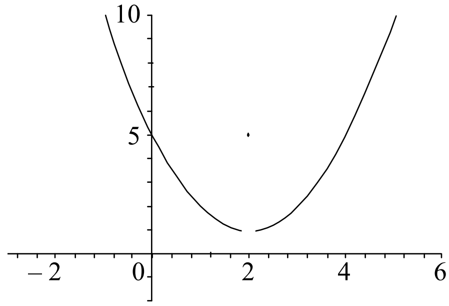
cioè il limite sinistro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ è finito e uguale al limite destro, ed entrambi sono uguali al valore effettivamente assunto dalla funzione nel punto x_0.

Se f non è continua si dice che presenta una discontinuità in x_0, la quale può essere di 3 tipi:

- discontinuità eliminabile, se vale:

  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

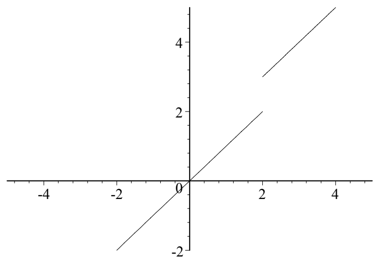
  cioè il limite sinistro e il limite destro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ sono finiti e uguali tra loro, ma sono diversi dal valore assunto dalla funzione in x_0. Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- discontinuità di prima specie, se vale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \text{ed entrambi sono finiti}$$

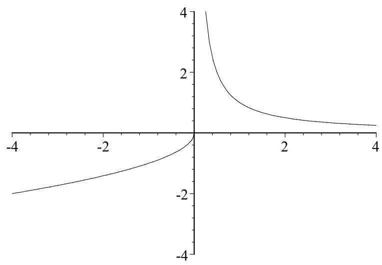
cioè il limite sinistro e il limite destro (per $x \to x_0$) di $f(x)$ esistono finiti ma sono diversi tra di loro. In questo caso si parla anche di "salto", e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



- discontinuità di seconda specie, se vale:

almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ non esiste oppure vale $\pm\infty$

Graficamente in questo caso si ha una situazione di questo tipo:



Se poi uno solo dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ è uguale al valore della funzione in x_0, $f(x_0)$, si dice che f è continua rispettivamente da sinistra oppure da destra in x_0.

In pratica, con riferimento alle funzioni elementari (e a quelle da esse ottenute attraverso le consuete operazioni algebriche, l'operazione di composizione e il calcolo dell'inversa) si sa che esse sono continue sul loro dominio. Il problema dell'esistenza di eventuali discontinuità può sorgere nel caso di funzioni definite a tratti, con riferimento ai punti in corrispondenza dei quali cambia l'espressione analitica della funzione. In questi punti è allora necessario studiare espressamente la continuità, applicando la definizione vista in precedenza.

Esempio 4.32 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x(x+5) & \text{se } x \le 0 \\ \\ \log(1+\sqrt{3x}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari, che sono continue sul loro dominio), per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre considerare:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [2x(x+5)] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1+\sqrt{3x}) = 0$$

$$f(0) = 0$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 0$.

Si deve osservare che, nel calcolo del limite sinistro e destro relativi al punto x_0 (in questo caso $x_0 = 0$), occorre prestare attenzione a quella che è l'espressione corretta della funzione da utilizzare. Nel caso in esame, per il calcolo del limite sinistro occorre utilizzare $2x(x+5)$ perché questa è l'espressione di $f(x)$ per $x < 0$, mentre per il calcolo del limite destro occorre utilizzare $\log(1+\sqrt{3x})$ perché questa è l'espressione di $f(x)$ per $x > 0$.

Esempio 4.33 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \le 0 \\ \\ \dfrac{2x}{4-x}+3 & \text{se } 0 < x < 4 \\ \\ e^x+1 & \text{se } x \ge 4 \end{cases}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua per $x \neq 0$ e $x \neq 4$. Per verificare la continuità in $x = 0$ occorre considerare:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + 3\right) = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2x}{4-x} + 3\right) = 3$$

$$f(0) = 3$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 0$. Per verificare la continuità in $x = 4$, poi, occorre considerare:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \left(\frac{2x}{4-x} + 3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (e^x + 1) = e^4 + 1$$

$$f(4) = e^4 + 1$$

da cui si deduce che $f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie in $x = 4$ (dove è continua solo da destra poiché si ha $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$).

Esempio 4.34 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha + 2x & se\ x < 1 \\ \\ 3x^2 + 5 & se\ x \geq 1 \end{cases} \qquad con\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 1$, per verificare la continuità anche in $x = 1$ occorre considerare:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3\alpha + 2x) = 3\alpha + 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(3x^2 + 5\right) = 8$$

$$f(1) = 8$$

e perché f sia continua anche in $x = 1$ si deve avere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè:

$$3\alpha + 2 = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

per cui si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 1$ se $\alpha = 2$.

Esempio 4.35 *Discutere la continuità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x-1} & \textit{se } x < 1 \\ \\ \alpha \log x + \beta & \textit{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 1$, per verificare la continuità anche in $x = 1$ occorre considerare:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \alpha e^{x-1} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\alpha \log x + \beta) = \beta$$

$$f(1) = \beta$$

e perché f sia continua anche in $x = 1$ si deve avere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè:

$$\alpha = \beta$$

per cui si può concludere che la funzione è continua anche in $x = 1$ se $\alpha = \beta$.

4.10. Esercizi da svolgere

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-x^2}$

2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

4) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$

5) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

6) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^3+2x}}$

7) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x^2+5x}{x^3+2x+3}$

8) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^5-x^4+2}{x^3-x^2+5}$

9) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2-5x}{x^3+6x^2}$

10) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{4x^2+5x}}$

11) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+3}}{\sqrt{x^2+2}}$

12) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x+\log x+1}{3^x+x^2+3}$

13) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$

14) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$

15) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\,x}{\sin x}$

17) $\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\log x}{x-1}$

18) $\lim_{x\to 0^+} x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

19) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\log x}{x+\log x}$

20) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x}{x}$

21) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1+\log x}{x-1-2\sin(x-1)}$

22) $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{\sin x-\log(1+x)}$

23) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$

24) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2}$

25) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$

Determinare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) delle seguenti funzioni:

26) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

27) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

28) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

29) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x-1}$

30) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x-2}$

31) $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x+3}$

32) $f(x) = \sqrt{x^2-2} - x$

33) $f(x) = xe^x$

34) $f(x) = xe^{-\frac{2}{x}}$

35) $f(x) = e^{\frac{3-x}{1-x}}$

36) $f(x) = e^{\frac{2-x}{1-x}}$

37) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+3}$

38) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x+1}$

39) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$

40) $f(x) = \log\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

Discutere la continuità delle seguenti funzioni sul loro dominio:

41) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e}{2}\left(3 - x^2\right) & \text{se } x \leq 1 \\ \\ e^{\frac{1}{x}} + \alpha & \text{se } x > 1 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

42) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \log x + 1 + \beta & \text{se } x > 1 \end{cases}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

43) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \alpha x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

44) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 5 & \text{se } x < 0 \\ \\ x^2 + 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

45) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha(x-1) & \text{se } x < 1 \\ \\ (x-1)^2 - 3(x-1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

46) $f(x) = \begin{cases} \left(x^2 + 1\right)^2 + \alpha & \text{se } x < -1 \\ \\ e^{x^2 - 1} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

47) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ \\ x^\alpha & \text{se } x = 1 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

48) $f(x) = \begin{cases} \alpha x \sin \frac{1}{x} - \alpha & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

49) $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x & \text{se } x < 0 \\ \\ x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

50) $f(x) = \begin{cases} (x + \alpha)^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ \\ \log(1 + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Capitolo 5

Calcolo differenziale

5.1. Definizioni e regole di derivazione

Un concetto di grande importanza per lo sviluppo del calcolo differenziale è quello di derivata. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un punto x_0 interno ad X, si definisce derivata di f in x_0 (e si indica con $f'(x_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto x_0, purché questo limite esista finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

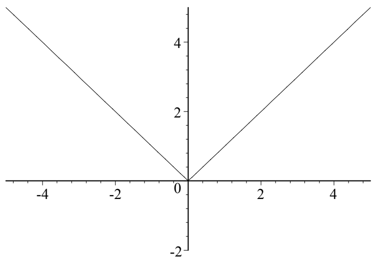
Con una diversa notazione, la stessa derivata può essere espressa come:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In modo analogo è possibile definire la derivata sinistra e quella destra di f in x_0 (indicate con $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$) come limite rispettivamente sinistro e destro del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto x_0, purché questo limite esista finito. La derivata (completa) di f in x_0 è allora il valore comune delle derivate sinistra e destra, cioè si ha $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Se invece nel punto x_0 esistono la derivata sinistra e quella destra, ma non sono uguali (oppure non sono finite), si dice che in x_0 la funzione f presenta:

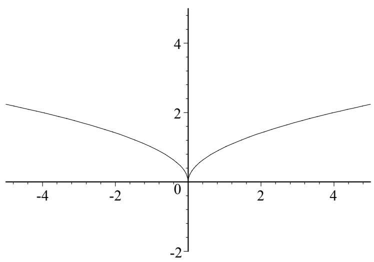
- un punto angoloso se vale:
$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$
e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



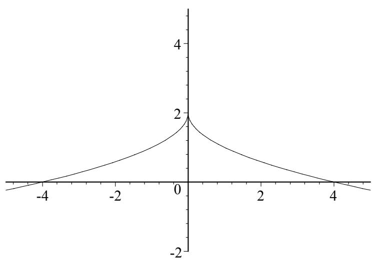
- un punto di cuspide se vale:

  $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono infiniti con segno differente (uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$)

  e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



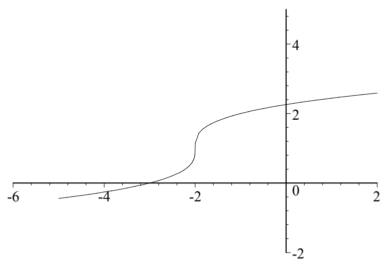
oppure di questo tipo:



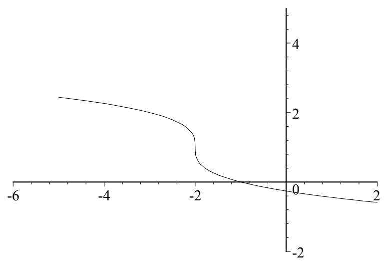
- un punto di flesso a tangente verticale se vale:

  $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono infiniti con lo stesso segno (entrambi $+\infty$ oppure $-\infty$)

  e graficamente si ha una situazione di questo tipo:



  oppure di questo tipo:



Se f è una funzione definita in un certo intervallo ed è derivabile in ogni punto x interno a tale intervallo, poi, ad ogni x è possibile associare la derivata di f in quel punto, $f'(x)$, ottenendo così una funzione f' che prende il nome di derivata prima di f. In definitiva, per calcolare la derivata di una funzione ricorrendo alla definizione occorre procedere in due fasi: prima si calcola il rapporto incrementale e poi si calcola il limite di questo rapporto per $h \to 0$. In pratica, però, per il calcolo delle derivate non si ricorre alla definizione (in modo del tutto analogo a quanto accade per il calcolo dei limiti) e si usano invece una serie di regole che consentono di ricondurre il calcolo della derivata di una funzione qualsiasi a quello delle derivate delle funzioni elementari (che sono note).

Il punto di partenza per il calcolo delle derivate è quindi costituito dalle derivate delle funzioni elementari, che sono riassunte nella tabella seguente:

Funzione primitiva $f(x)$	Funzione derivata $f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a \quad \text{con } a > 0$
e^x	e^x
$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \log a} \quad \text{con } x \neq 0, a > 0$
$\log \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x} \quad \text{con } x \neq 0$
$\log \lvert f(x) \rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

Si possono poi introdurre una serie di regole di derivazione. Per prima cosa, se f e g sono due funzioni derivabili in un generico punto x, allora sono derivabili in x anche la loro somma, il loro prodotto e il loro quoziente (quest'ultimo se $g(x) \neq 0$) e valgono le seguenti regole (dove con D si indica la derivata di una funzione):

(i) $\quad D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$

(ii) $\quad D[f(x) \cdot g(x)] = D[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$

in particolare se c è una costante si ha $D[c \cdot f(x)] = c \cdot D[f(x)]$

(iii) $\quad D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot D[g(x)]}{[g(x)]^2} \quad \text{con } g(x) \neq 0$

Le regole (i) e (ii), poi, si estendono al caso di un numero qualsiasi $n > 2$ di funzioni. Accanto a queste regole, che riguardano la derivata di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni, valgono inoltre le seguenti regole, relative alla derivata della funzione composta e alla derivata della funzione inversa:

(iv) Date le funzioni $y = f(t)$ e $t = g(x)$ tali da poter considerare la funzione composta $y = f \circ g = f(g(x))$, se g è derivabile in x e f è derivabile in $t = g(x)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x e si ha:

$$D\left[f(g(x))\right] = D\left[f(t)\right]_{t=g(x)} \cdot D\left[g(x)\right]$$

(v) Data una funzione f continua e strettamente monotona, se f è derivabile in x_0 con $D\left[f(x)\right]_{x=x_0} \neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=x_0}}$$

Con riferimento a quest'ultima regola, va osservato che essa consente di calcolare la derivata in un punto dell'inversa di una certa funzione senza dover calcolare l'inversa della funzione stessa (calcolo che in alcuni casi può non essere possibile). Se l'inversa può essere calcolata con facilità, tuttavia, può risultare più comodo, per il calcolo della derivata, ottenere prima la funzione inversa e poi derivarla, valutando tale derivata nel punto che interessa.

Esempio 5.1 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$f(x) = 2x \log x + x^3$$

Applicando le regole (i) e (ii) viste sopra si ha:

$$\begin{aligned} D\left[2x \log x + x^3\right] &= D\left(2x \log x\right) + D(x^3) = D\left(2x\right) \cdot \log x + 2x \cdot D(\log x) + D(x^3) = \\ &= 2 \log x + 2x \frac{1}{x} + 3x^2 = 2 \log x + 2 + 3x^2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \log x + 2$$

Esempio 5.2 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 3}$$

Applicando la regola (*iii*) vista sopra si ha:

$$D\left[\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right] = \frac{D\,(e^x - 3)\cdot(e^x + 3) - (e^x - 3)\cdot D(e^x + 3)}{(e^x + 3)^2} =$$
$$= \frac{e^x(e^x + 3) - (e^x - 3)e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^x(e^x + 3 - e^x + 3)}{(e^x + 3)^2} = \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}$$

e quindi:

$$f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}$$

Esempio 5.3 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = \sqrt{\log x}$$

La funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g$ dove f e g sono date da:

$$f(t) = \sqrt{t} \qquad t = g(x) = \log x$$

e applicando la regola (*iv*) vista sopra si ha:

$$D\,[f(g(x))] = D\,[f(t)]_{t=g(x)} \cdot D\,[g(x)] = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)_{t=\log x} \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$$

e quindi:

$$z'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$$

In pratica, poi, si può evitare di effettuare tutti i passaggi intermedi osservando che essi equivalgono a derivare la funzione "esterna" valutando però la derivata in corrispondenza della funzione "interna", e a moltiplicare questo risultato per la derivata della funzione "interna". Nell'esempio considerato si ha allora direttamente:

$$z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$$

dove il termine $\dfrac{1}{2\sqrt{\log x}}$ rappresenta la derivata della funzione "esterna" (cioè di $\sqrt{()}$) valutata in corrispondenza della funzione "interna" (cioè di $\log x$), mentre il termine $\dfrac{1}{x}$ rappresenta la derivata della funzione "interna" (cioè di $\log x$).

Esempio 5.4 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$$

La funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g \circ h$ dove f, g e h sono date da:

$$f(t) = e^t \qquad t = g(u) = \sqrt{u} \qquad u = h(x) = \sin x$$

per cui applicando la regola (*iv*) vista sopra (che si estende al caso di più di due funzioni) si ha:

$$\begin{aligned} D\left[f(g(h(x)))\right] &= D\left[f(t)\right]_{t=g(h(x))} \cdot D\left[g(u)\right]_{u=h(x)} \cdot D\left[h(x)\right] = \\ &= \left(e^t\right)_{t=\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)_{u=\sin x} \cdot \cos x = \\ &= e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\right) \cdot \cos x = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}} \end{aligned}$$

e quindi:

$$z'(x) = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

Anche in questo caso è possibile evitare di effettuare tutti i passaggi intermedi osservando che la regola vista equivale a calcolare la derivata di ogni funzione che compare nella composizione (partendo da quella più esterna), valutandola in corrispondenza della funzione interna (o delle funzioni interne, se le composizioni sono multiple), e a moltiplicare tra di loro queste diverse derivate. Nell'esempio considerato si ha allora direttamente:

$$z'(x) = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

dove il termine $e^{\sqrt{\sin x}}$ rappresenta la derivata della funzione più esterna (cioè di $e^{()}$) valutata in corrispondenza delle funzioni interne (cioè di $\sqrt{\sin x}$), mentre il termine $\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}$ rappresenta la derivata della funzione intermedia (cioè di $\sqrt{()}$) valutata in corrispondenza della funzione più interna (cioè di $\sin x$), e il termine $\cos x$ rappresenta la derivata della funzione più interna (cioè di $\sin x$).

Esempio 5.5 *Calcolare la derivata della funzione:*

$$z(x) = x^x$$

In questo caso occorre innanzitutto riscrivere la funzione operando la trasformazione:

$$x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$$

dopodiché la derivata può essere calcolata applicando la regola (iv) vista sopra, tenendo presente che la funzione è ottenuta dalla composizione $f \circ g$ dove f e g sono date da:

$$f(t) = e^t \qquad t = g(x) = x \log x$$

per cui si ha (eventualmente tralasciando i passaggi intermedi):

$$D\left[f(g(x))\right] = D\left[f(t)\right]_{t=g(x)} \cdot D\left[g(x)\right] = \left(e^t\right)_{t=x\log x} \cdot (1 + \log x) =$$
$$= e^{x \log x}(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

e quindi:

$$z'(x) = x^x(1 + \log x)$$

Esempio 5.6 *Data la funzione:*

$$f(x) = \sqrt{e^{x-3}}$$

calcolare la derivata della funzione inversa prima nel punto $y_0 = f(x_0)$ *con* $x_0 = 2$ *e poi nel punto* $y_0 = \sqrt{e}$.

Applicando la regola (v) vista sopra si sa che vale:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=x_0}}$$

Nel caso considerato si ha innanzitutto che la derivata della funzione $f(x)$ è data da:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{x-3}}} \cdot e^{x-3} = \frac{\sqrt{e^{x-3}}}{2}$$

A questo punto, per calcolare la derivata della funzione inversa in corrispondenza di $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 = 2$ si deve innanzitutto osservare che $y_0 = f(2) = \sqrt{e^{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, dopodiché applicando la formula vista sopra si ottiene:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=2}} \Rightarrow D\left[f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right] = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{e^{2-3}}}{2}} = 2\sqrt{e}$$

Per calcolare la derivata della funzione inversa in corrispondenza di $y_0 = \sqrt{e}$, invece, si deve osservare che $y_0 = \sqrt{e}$ corrisponde a $x_0 = 4$ (infatti $f(4) = \sqrt{e}$), dopodiché applicando di nuovo la formula vista sopra si ottiene:

$$D\left[f^{-1}(y)\right]_{y=\sqrt{e}} = \frac{1}{D\left[f(x)\right]_{x=4}} \Rightarrow D\left[f^{-1}\left(\sqrt{e}\right)\right] = \frac{1}{\frac{\sqrt{e^{4-3}}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Nel caso in esame la derivata della funzione inversa potrebbe anche essere calcolata ottenendo prima la funzione inversa stessa e poi derivandola. A questo proposito si ha:

$$\begin{aligned} & f(x) = \sqrt{e^{x-3}} \Rightarrow y = \sqrt{e^{x-3}} \Rightarrow y^2 = e^{x-3} \Rightarrow \log y^2 = x - 3 \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow x = f^{-1}(y) = 3 + 2\log y \end{aligned}$$

e la derivata di questa funzione è:

$$D\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{2}{y}$$

In particolare, poi, tale derivata valutata nel punto $y_0 = f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ vale:

$$D\left[f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right] = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = 2\sqrt{e}$$

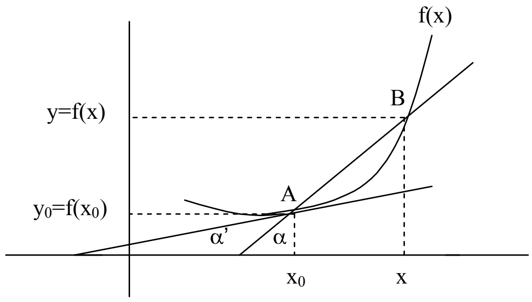
mentre la stessa derivata valutata nel punto $y_0 = \sqrt{e}$ vale:

$$D\left[f^{-1}\left(\sqrt{e}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

e questi sono esattamente i risultati ottenuti prima sfruttando la formula della derivata della funzione inversa.

5.2. Interpretazione geometrica della derivata

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per fornire un'interpretazione geometrica della derivata è possibile prendere in esame il grafico della funzione, dato ad esempio da:



L'equazione della retta passante per i punti $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x, y)$ è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dove m è il coefficiente angolare di tale retta, che può allora essere espresso come:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\alpha$$

cioè il coefficiente angolare della retta risulta essere la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta stessa forma con la direzione positiva dell'asse x. Quando $x \to x_0$ la retta passante per i punti A e B tende ad assumere una posizione limite, costituita dalla retta tangente alla funzione in corrispondenza del punto $A = (x_0, y_0)$, e il coefficiente angolare di questa retta tangente è dato dal limite del coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B, cioè:

$$m' = tg\alpha' = \lim_{x \to x_0} m = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Si ha allora che la derivata della funzione f in corrispondenza del punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto (cioè rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo α' che la retta tangente forma con la direzione positiva dell'asse x) e indica la pendenza della funzione in x_0. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, infine, è:

$$y - f(x_0) = m'(x - x_0)$$

cioè:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

e anche:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice poi differenziabile in un punto x_0 interno ad X se si può scrivere:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + R \qquad \text{per } x \to x_0$$

cioè l'incremento subito dalla funzione in corrispondenza ad una piccola variazione della variabile indipendente può essere espresso come somma di un termine lineare e di un termine trascurabile. In particolare, in questa formula $f(x) - f(x_0)$ rappresenta l'incremento subito dalla variabile dipendente a fronte di una variazione della variabile indipendente, incremento misurato sul grafico della funzione f, mentre $f'(x_0)\,(x - x_0)$ rappresenta l'analogo incremento misurato sulla retta tangente alla funzione in x_0 e R è una quantità trascurabile (in particolare risulta $R = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$). Questa formula può anche essere scritta come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + R \qquad \text{per } x \to x_0$$

da cui risulta che, vicino al punto x_0, la funzione $f(x)$ può essere espressa come somma della retta tangente alla funzione stessa nel punto x_0 e di una quantità trascurabile, cioè la funzione $f(x)$ può essere approssimata, vicino al punto x_0, dalla retta tangente alla funzione stessa in x_0, commettendo un errore che risulta essere trascurabile.

Il termine $f'(x_0)(x - x_0)$ prende il nome di differenziale della funzione f nel punto x_0, e nel caso di incremento infinitesimo della variabile indipendente x si indica con:

$$dy = f'(x_0)dx$$

Questa quantità rappresenta l'incremento della variabile dipendente (la y) quando la variabile indipendente (la x) varia di una piccola quantità, incremento misurato sulla retta tangente alla funzione in x_0 e, come visto, per valori di x prossimi a x_0 tale incremento costituisce una buona approssimazione della variazione della y osservata sulla funzione f.

Nel caso di funzioni reali di variabile reale (cioè $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) la nozione di differenziabilità è equivalente a quella di derivabilità (cioè una funzione è differenziabile in un punto se e solo se è derivabile in quel punto), mentre nel caso di funzioni reali di più variabili reali (cioè $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) questa equivalenza non è più valida (in particolare, la nozione di differenziabilità implica quella di derivabilità ma non vale necessariamente il viceversa).

Esempio 5.7 *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:*

$$f(x) = x^3 e^{x-1}$$

in corrispondenza del punto $x_0 = 1$ *e il differenziale della funzione in corrispondenza dello stesso punto.*

L'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $(1, f(1))$ è data da:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

per cui si devono considerare:

$$f(x) = x^3 e^{x-1} \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = x^3 e^{x-1} + 3x^2 e^{x-1} = x^2 e^{x-1}(x + 3) \Rightarrow f'(1) = 4$$

dopodiché si ottiene:

$$y = 1 + 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 3$$

che è l'equazione della retta cercata.

Il differenziale della funzione invece è:

$$dy = f'(x)dx$$

cioè:

$$dy = \left[x^2 e^{x-1}(x + 3)\right] dx$$

e nel punto $x_0 = 1$ tale differenziale vale:

$$dy = 4dx$$

Esempio 5.8 *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 4}{x - 4}$$

in corrispondenza del punto $x_0 = 2$ e il differenziale della funzione in corrispondenza dello stesso punto.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $(2, f(2))$ è data da:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

per cui si devono considerare:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 4}{x - 4} \Rightarrow f(2) = -3$$

$$f'(x) = \frac{(x-4)(3x^2 - 3) - x^3 + 3x - 4}{(x-4)^2} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 8}{(x-4)^2} \Rightarrow f'(2) = -6$$

dopodiché si ottiene:

$$y = -3 - 6(x - 2) \Rightarrow y = 9 - 6x$$

che è l'equazione della retta cercata.

Il differenziale della funzione invece è:

$$dy = f'(x)dx$$

cioè:

$$dy = \left[\frac{2x^3 - 12x^2 + 8}{(x-4)^2}\right] dx$$

e nel punto $x_0 = 2$ tale differenziale vale:

$$dy = -6dx$$

5.3. Derivabilità e continuità

La continuità e la derivabilità di una funzione rappresentano importanti condizioni di regolarità che consentono di ottenere informazioni sul comportamento della funzione stessa. Per quanto riguarda il legame esistente tra queste due nozioni, si ha che se una funzione è derivabile in un punto allora è anche continua in quel punto. Non vale invece necessariamente il viceversa (cioè una funzione può essere continua in un punto senza essere derivabile in quel punto), per cui si può dedurre che la derivabilità rappresenta una condizione più restrittiva della continuità. Come conseguenza della prima relazione, inoltre, si ha che se una funzione non è continua in un punto, allora sicuramente non è neanche derivabile in quel punto.

Come è stato illustrato nel Capitolo precedente a proposito della continuità, in genere le funzioni elementari (e quelle da esse ottenute attraverso le consuete operazioni algebriche, l'operazione di composizione e il calcolo dell'inversa) sono continue e derivabili su tutto il loro dominio (tranne eventualmente in singoli punti). Il problema sorge nel caso di funzioni definite a tratti, relativamente ai punti in corrispondenza dei quali cambia l'espressione analitica della funzione, per cui in questi punti occorre studiare espressamente la continuità e la derivabilità delle funzioni in esame. A questo proposito, una condizione sufficiente che può essere utilizzata per verificare la derivabilità di una funzione in un punto (senza dover ricorrere alla definizione) è la seguente:

Se f è definita e continua in un intorno di x_0 (compreso x_0) ed è derivabile in ogni punto $x \neq x_0$, e se esiste finito il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 e si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Questo risultato esprime in sostanza la continuità, nel punto x_0, della derivata prima, in quanto la duplice uguaglianza sopra riportata è esattamente la definizione di continuità nel punto x_0 applicata alla funzione $f'(x)$. Di conseguenza, le funzioni per le quali la derivabilità in x_0 può essere constatata attraverso questo risultato sono non solo derivabili ma derivabili con derivata continua in x_0 (si usa a questo proposito la notazione $f \in C^1(X)$ per indicare la classe delle funzioni derivabili con derivata prima continua in X). Se i limiti $\lim_{x \to x_0^{\mp}} f'(x)$ non esistono, però, non si può concludere che $f'(x_0)$ non esiste, in quanto quella considerata è una condizione sufficiente (ma non necessaria) per la derivabilità.

Esempio 5.9 *Discutere la continuità e la derivabilità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ \\ e^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la continuità si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari che sono continue sul loro dominio). Per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre poi considerare:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

e poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

allora $f(x)$ è continua anche in $x = 0$.

Per quanto riguarda la derivabilità, invece, si ha innanzitutto che, per $x \neq 0$, la funzione è derivabile con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

(si può notare che, nel caso di funzione definita a tratti, passando dall'espressione della funzione $f(x)$ a quella della sua derivata $f'(x)$ si "perde" un punto, che è il punto in corrispondenza del quale cambia l'espressione analitica della funzione – in questo caso si tratta dell'origine –). A questo punto, per verificare se $f(x)$ è derivabile anche nell'origine (tenendo presente che in tale punto è continua, poiché se non lo fosse non potrebbe neanche essere derivabile) si può applicare la condizione sufficiente sopra enunciata, considerando:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{aligned}$$

Poiché questi due limiti sono uguali si può concludere che $f(x)$ è derivabile anche in $x = 0$, e inoltre:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

Esempio 5.10 *Discutere la continuità e la derivabilità della seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^x & \textit{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x^2 + 3x + \beta & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda la continuità si ha innanzitutto che $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$ (poiché definita tramite funzioni elementari che sono continue sul loro dominio). Per verificare la continuità anche in $x = 0$ occorre poi considerare:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \alpha e^x = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + 3x + \beta\right) = \beta$$

$$f(0) = \alpha$$

e perché $f(x)$ sia continua anche in $x = 0$ si deve avere:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

cioè:

$$\alpha = \beta$$

Per quanto riguarda la derivabilità, invece, si ha innanzitutto che, per $x \neq 0$, la funzione è derivabile con:

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha e^x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ 2x + 3 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Perché $f(x)$ sia derivabile anche in $x = 0$ innanzitutto deve essere continua in $x = 0$, quindi deve valere $\alpha = \beta$, inoltre poiché si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \alpha e^x = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + 3) = 3$$

per la condizione sufficiente di derivabilità deve essere $\alpha = 3$. In conclusione, $f(x)$ è derivabile anche in $x = 0$ se $\alpha = \beta = 3$ e in questo caso si ha:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 3$$

5.4. Formula di Taylor-Mac Laurin

Come visto in precedenza, se una funzione f è differenziabile in un punto x_0, in un intorno di tale punto l'incremento $f(x) - f(x_0)$ è ben approssimato dal differenziale $f'(x_0)\,(x - x_0)$, e di conseguenza la funzione può essere approssimata dal polinomio di primo grado $f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$, cioè dalla retta tangente alla funzione nel punto x_0. A volte, però, questa approssimazione lineare (detta anche "del prim'ordine") risulta troppo grossolana e non fornisce sufficienti informazioni, per cui è possibile cercare di approssimare il grafico della funzione f, vicino al punto x_0, con una curva che ne possa seguire l'andamento meglio di una retta. Questa possibilità è offerta dalla cosiddetta formula di Taylor, centrata in x_0 e arrestata all'ordine n, che consente appunto di approssimare localmente (in un intorno del punto x_0) una funzione, derivabile un opportuno numero di volte, mediante un polinomio di grado n, commettendo in questo modo un errore trascurabile. Vale a questo proposito il seguente risultato:

Se f è una funzione derivabile $n-1$ volte in un intorno U di x_0 e derivabile n volte in x_0, allora $\forall x \in U$ vale il seguente sviluppo in formula di Taylor (con resto di Peano):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n$$

per $x \to x_0$.

Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ la formula prende il nome di formula di Mac Laurin (con resto di Peano).

La formula di Taylor esprime quindi una funzione come somma di un polinomio di grado n (detto polinomio di Taylor) e di un termine (il resto) che risulta trascurabile, e l'approssimazione che essa consente può essere migliorata aumentando il grado n del polinomio approssimante.

Esempio 5.11 *Determinare lo sviluppo in formula di Taylor centrato in $x_0 = 3$ e arrestato al terzo ordine, e poi in formula di Mac Laurin arrestato al terzo ordine, della funzione:*

$$f(x) = e^x + \cos x$$

Lo sviluppo in formula di Taylor centrato in $x_0 = 3$ e arrestato al terzo ordine è:

$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 + o\left((x-3)^3\right) \qquad \text{per } x \to 3$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + \cos x & \Rightarrow \quad & f(3) = e^3 + \cos 3 \\ f'(x) &= e^x - \sin x & \Rightarrow \quad & f'(3) = e^3 - \sin 3 \\ f''(x) &= e^x - \cos x & \Rightarrow \quad & f''(3) = e^3 - \cos 3 \\ f'''(x) &= e^x + \sin x & \Rightarrow \quad & f'''(3) = e^3 + \sin 3 \end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$\begin{aligned} f(x) = e^3 + \cos 3 + (e^3 - \sin 3)(x-3) + \frac{1}{2}(e^3 - \cos 3)(x-3)^2 + \\ + \frac{1}{6}(e^3 + \sin 3)(x-3)^3 + o\left((x-3)^3\right) \qquad \text{per } x \to 3 \end{aligned}$$

dove, eventualmente, è possibile esplicitare i calcoli svolgendo i prodotti notevoli $(x-3)^2$ e $(x-3)^3$.

Lo sviluppo in formula di Mac Laurin arrestato al terzo ordine, poi, è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

e poiché si ha:

$$f(0) = 2 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = 1$$

lo sviluppo diventa:

$$f(x) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

Esempio 5.12 *Determinare lo sviluppo in formula di Mac Laurin arrestato al terzo ordine della funzione:*

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Lo sviluppo cercato è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

e poiché si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin x} && \Rightarrow\ f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{\sin x}\cos x && \Rightarrow\ f'(0) = 1 \\
f''(x) &= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) && \Rightarrow\ f''(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^{\sin x}\cos x(\cos^2 x - 1 - 3\sin x) && \Rightarrow\ f'''(0) = 0
\end{aligned}$$

lo sviluppo diventa:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ricorrendo agli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari introdotti nel Capitolo precedente. In particolare, data la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ è possibile porre $\sin x = t$, dopodiché la funzione può essere sviluppata in formula di Taylor nel seguente modo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o\left(t^3\right) \qquad \text{per } t \to 0$$

e sostituendo di nuovo a t l'espressione $\sin x$ si ha:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o\left(\sin^3 x\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

A questo punto è possibile sviluppare la funzione $\sin x$ ottenendo (tenendo presente che nei calcoli tutti i termini di grado superiore al terzo non vengono indicati espressamente in quanto sono incorporati nel simbolo $o\left(x^3\right)$):

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^2 + \\
&= + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

In alternativa, data la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ è possibile sviluppare inizialmente $\sin x$ ottenendo:

$$e^{\sin x} = e^{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)} \qquad \text{per } x \to 0$$

dopodiché si pone $x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) = t$ e si sviluppa la funzione esponenziale ottenendo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o\left(t^3\right) \qquad \text{per } t \to 0$$

e sostituendo di nuovo a t l'espressione $x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$ si ha anche in questo caso:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= e^{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^2 = \\
&= +\frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) = \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

Come visto nel Capitolo precedente, infine, gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari possono essere utilizzati nel calcolo di certi limiti, in quanto consentono di superare le forme di indecisione che si presentano nella risoluzione dei limiti stessi.

5.5. Derivate e comportamento di una funzione

L'analisi delle derivate di una funzione fornisce una serie di informazioni utili per determinare il comportamento della funzione stessa, ed eventualmente giungere ad una sua rappresentazione di tipo grafico. Per poter applicare i risultati illustrati di seguito occorre che le funzioni in esame siano derivabili, ma (come osservato in precedenza) le funzioni elementari e quelle ottenute da esse tramite operazioni algebriche e composizioni sono derivabili (tranne eventualmente in singoli punti), per cui i criteri presentati sono applicabili nella grande maggioranza dei casi (mentre negli eventuali punti di non derivabilità è necessario, per la verifica di determinate proprietà, il ricorso alla corrispondente definizione).

I risultati ottenibili dallo studio delle derivate di una funzione riguardano in particolare:

- monotonia (ed invertibilità) della funzione
- estremanti (massimi e minimi) della funzione
- concavità e convessità (e flessi) della funzione

5.5.1. Monotonia

Per ottenere informazioni relative alla monotonia di una funzione è possibile utilizzare la derivata prima della funzione stessa. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su X, e dato un intervallo $I = (a, b)$ contenuto in X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie e sufficienti

$$f \text{ crescente su } I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ decrescente su } I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

(b) Condizioni sufficienti

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente crescente su } I$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente decrescente su } I$$

Si deve tenere presente che l'utilizzo di queste condizioni per la verifica della monotonia di una funzione sul proprio insieme di definizione richiede che esso sia un intervallo; in caso contrario, i risultati possono essere applicati sui singoli intervalli che costituiscono il dominio della funzione, ma non possono essere applicati globalmente.

Le condizioni legate alla monotonia di una funzione possono inoltre essere utilizzate per ottenere informazioni relative alla sua invertibilità. Come è stato osservato nel Capitolo 3, la stretta monotonia di una funzione su di un intervallo è condizione sufficiente per la sua invertibilità su quell'intervallo. Nel caso di funzioni derivabili si ha allora che condizione sufficiente affinché una funzione f sia invertibile su di un intervallo I è che abbia su questo intervallo derivata prima di segno costante (diverso da 0), cioè si ha:

$$f'(x) > 0 \text{ (oppure } f'(x) < 0) \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ invertibile su } I$$

5.5.2. Massimi e minimi

Lo studio del segno della derivata prima di una funzione consente anche di ottenere informazioni relative alla presenza di eventuali estremanti (massimi e minimi) della funzione stessa. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su X, con x_0 punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ e derivabile in un intorno di x_0, $U(x_0)$, con esclusione al più del punto x_0, valgono poi i seguenti risultati (dove x_0 è un punto stazionario, cioè tale che $f'(x_0) = 0$):

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) \geq 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ & \\ f'(x) \leq 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) \leq 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ & \\ f'(x) \geq 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo}$$

Si deve tenere presente che le condizioni necessarie illustrate al punto (a) per la verifica della presenza di massimi e minimi richiedono che tali punti siano interni all'insieme di definizione. Le condizioni sufficienti illustrate al punto (b) invece consentono di individuare tali estremanti anche quando le condizioni necessarie non sono applicabili (cioè nel caso di punti non interni al dominio, così come nel caso di punti isolati o di punti di non derivabilità).

5.5.3. Concavità e convessità

Per ottenere informazioni relative alla concavità e convessità di una funzione è necessario introdurre la derivata seconda della funzione stessa. Questa non è altro che la derivata della derivata prima (cioè il limite del rapporto incrementale costruito utilizzando la funzione f' anziché la funzione f, purché questo limite esista finito), e si calcola usando le stesse regole viste in precedenza, applicate alla funzione f' anziché alla funzione f.

A questo punto, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, e dato un intervallo $I = (a, b)$ contenuto in X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie e sufficienti

$$f \text{ convessa su } I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ concava su } I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

(b) Condizioni sufficienti

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente convessa su } I$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ strettamente concava su } I$$

Lo studio della derivata seconda consente inoltre di individuare la presenza di eventuali flessi. A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, con x_0 punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$x_0 \text{ punto di flesso} \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ e derivabile due volte in un intorno di x_0, $U(x_0)$, con esclusione al più del punto x_0, valgono poi i seguenti risultati (dove x_0 è un punto tale che $f''(x_0) = 0$):

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) \geq 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ \\ f''(x) \leq 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di flesso discendente}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) \leq 0 & \forall x \in U_-(x_0) \\ \\ f''(x) \geq 0 & \forall x \in U_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ punto di flesso ascendente}$$

I punti di flesso possono inoltre essere distinti in base al valore della derivata prima della funzione calcolata in corrispondenza di tali punti; se x_0 è un punto di flesso si ha infatti:

flesso a tangente orizzontale se $f'(x_0) = 0$

flesso a tangente verticale se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$

flesso obliquo negli altri casi

In conclusione, per ottenere informazioni relative al comportamento di una funzione servendosi delle sue derivate, si procede al calcolo delle derivate stesse (derivata prima e derivata seconda) e poi allo studio del loro segno. Applicando i criteri illustrati, infine, diventa possibile ricavare indicazioni sulla monotonia e la presenza di eventuali estremanti (attraverso la derivata prima) e sulla concavità/convessità e la presenza di eventuali flessi (attraverso la derivata seconda) della funzione in esame.

Esempio 5.13 *Discutere la monotonia e l'invertibilità della funzione:*

$$f(x) = \log \frac{3-x}{x}$$

La funzione è definita per:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3-x}{x} > 0 \\ \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow 0 < x < 3$$

e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-x-3+x}{x^2}}{\dfrac{3-x}{x}} = -\frac{3}{x^2} \cdot \frac{x}{3-x} = -\frac{3}{x(3-x)}$$

Per $0 < x < 3$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è strettamente decrescente sul suo dominio, e perciò è invertibile.

Esempio 5.14 *Discutere la monotonia e l'invertibilità della funzione:*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

La funzione è definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ &f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ &f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x > \frac{3+\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente crescente su ciascuno degli intervalli $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Di conseguenza, $f(x)$ non è invertibile su $\mathbb{R}$, mentre sono invertibili le sue restrizioni a ciascuno dei tre intervalli sopra elencati.

Esempio 5.15 *Determinare eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x) = 3x(\log x - 2)^2$$

La funzione è definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ e la sua derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(\log x - 2)\frac{1}{x} + 3(\log x - 2)^2 = 3(\log x - 2)(2 + \log x - 2) = \\ &= 3\log x(\log x - 2) \end{aligned}$$

A questo punto, studiando il segno dei due fattori e combinando i risultati si ottiene:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < e^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1 \quad \vee \quad x = e^2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1 \quad \vee \quad x > e^2$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(1, e^2)$ e strettamente crescente sugli intervalli $(0, 1)$ e $(e^2, +\infty)$, di conseguenza $x = 1$ è un punto di massimo relativo e $x = e^2$ è un punto di minimo relativo (e anche di minimo assoluto perché $f(x) \geq 0$ sul suo dominio e $f(e^2) = 0$).

Esempio 5.16 *Determinare eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x) = \sqrt{x} + 3 - 2x$$

sull'intervallo $[0, 10]$.

La funzione è definita sull'intervallo $[0, +\infty)$, inoltre poiché f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 10]$ per il Teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo assoluti su questo intervallo. La sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = \frac{1 - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

per la quale si ha:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{1}{16}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{1}{16}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{1}{16}$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{16}, +\infty\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ e $x = \frac{1}{16}$ è un punto di massimo relativo. Per individuare massimo e minimo assoluti sull'intervallo $[0, 10]$ è poi necessario prendere in considerazione anche gli estremi di questo intervallo, calcolando il valore della funzione in corrispodenza di questi estremi (e del punto di massimo relativo prima individuato). Poiché si ha:

$$f(0) = 3 \qquad f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{25}{8} \qquad f(10) = \sqrt{10} - 17$$

si conclude che $x = \dfrac{1}{16}$ rappresenta il punto di massimo assoluto e $x = 10$ il punto di minimo assoluto di $f(x)$ sull'intervallo $[0, 10]$. Su questo intervallo, come risulta dalla precedente analisi, non è sufficiente l'uso della derivata prima per individuare massimi e minimi, in quanto non tutti sono interni all'intervallo stesso; diventa allora necessario uno studio a parte dei punti che costituiscono gli estremi di tale intervallo.

Esempio 5.17 *Discutere convessità e concavità della funzione:*

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

La funzione è definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = 6x - 2$$

mentre la sua derivata seconda è:

$$f''(x) = 6$$

Poiché $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si può concludere che $f(x)$ è strettamente convessa su tutto il suo dominio.

Esempio 5.18 *Discutere convessità e concavità della funzione:*

$$f(x) = 3x(\log x - 2)^2$$

La funzione (la stessa dell'Esempio 5.15) è definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = 3 \log x(\log x - 2)$$

mentre la derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{1}{x} 3 \log x + \frac{3}{x}(\log x - 2) = \frac{6}{x}(\log x - 1)$$

Sul dominio, il segno di $f''(x)$ dipende solo dal fattore $(\log x - 1)$ (in quanto $\frac{6}{x}$ è sempre positivo) e si ha:

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < e$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = e$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > e$$

da cui si deduce che $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $(0, e)$ e strettamente convessa sull'intervallo $(e, +\infty)$ e $x = e$ è un punto di flesso (in particolare si tratta di un flesso ascendente obliquo).

5.6. Studio di funzioni

I risultati riguardanti le funzioni ottenuti in precedenza (relativamente al dominio, al segno, alle intersezioni con gli assi – presentati nel Capitolo 3 –, ai limiti – presentati nel Capitolo 4 –, alle relazioni tra derivate e monotonia, estremanti e convessità – presentati in questo Capitolo –) possono essere utilizzati congiuntamente per effettuare lo studio di funzioni, che consiste appunto nell'analisi di tutti gli elementi che caratterizzano una funzione, partendo dalla sua espressione analitica, fino ad ottenere la sua rappresentazione grafica.

In particolare, nello studio di una funzione è possibile procedere individuando i seguenti elementi:

1. dominio
2. segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie
3. comportamento alla frontiera (limiti) e asintoti
4. derivata prima, monotonia, estremi locali
5. derivata seconda, concavità, flessi
6. grafico della funzione

Qualora lo studio del segno della funzione o quello della derivata seconda risulti particolarmente complesso, poi, è possibile tralasciarlo, deducendo l'andamento della funzione dagli altri elementi.

Esempio 5.19 *Studiare la funzione:*

$$f(x) = x^2 e^{3-x}$$

Si ha in questo esempio:

- Dominio della funzione

In questo caso non vi sono restrizioni da imporre, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

Si ha $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ e $f(0) = 0$, quindi la funzione interseca gli assi in corrispondenza dell'origine (che è un minimo assoluto), inoltre non presenta simmetrie.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{3-x} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{3-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x-3}} = 0^+$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, poiché inoltre:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{3-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{3-x} = -\infty$$

la funzione non presenta asintoti obliqui.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima è:

$$f'(x) = -x^2 e^{3-x} + 2x e^{3-x} = x e^{3-x}(2 - x)$$

Il segno di questa derivata dipende da quello di $x(2-x)$ e si ha:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < 0 \quad \vee \quad x > 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 2$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(0, 2)$, inoltre $x = 0$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto) e $x = 2$ è un punto di massimo relativo.

- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda è:

$$f''(x) = -xe^{3-x} + (2-x)(-xe^{3-x} + e^{3-x}) = -xe^{3-x} + e^{3-x}(2-x)(1-x) =$$
$$= e^{3-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Il segno di questa derivata dipende solo dal secondo fattore e si ha:

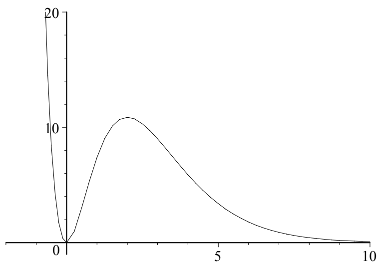
$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 2 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 + \sqrt{2}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 2 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x > 2 + \sqrt{2}$$

per cui $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ e strettamente convessa sugli intervalli $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ e $\big(2 + \sqrt{2}, +\infty\big)$, inoltre $x = 2-\sqrt{2}$ e $x = 2+\sqrt{2}$ sono punti di flesso.

- Grafico della funzione



Esempio 5.20 *Studiare la funzione:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| + 1}$$

Si ha in questo esempio:

- Dominio della funzione

In questo caso deve essere $|x| + 1 \neq 0$, che è sempre vero, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

È possibile innanzitutto osservare che vale:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2|-x| + 1}{|-x| + 1} = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| + 1} = f(x)$$

per cui $f(x)$ è pari. È allora sufficiente studiarla per $x \geq 0$ (in quanto il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) e si ha:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x-1)^2}{x + 1} \qquad \text{con } x \geq 0$$

da cui risulta $f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$, inoltre $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, per cui la funzione interseca l'asse x nel punto $(1, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 1)$. Il punto $x = 1$, infine, è un punto di minimo assoluto.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = 1$$

e infine:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -3$$

per cui la funzione $f(x)$ ammette, per $x \to +\infty$, asintoto obliquo di equazione $y = x - 3$.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \neq 0$ e la derivata prima (per $x > 0$) è:

$$f'(x) = \frac{(x+1)2(x-1)-(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)\,[2(x+1)-(x-1)]}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)(2x+2-x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende (per $x > 0$) solo da quello di $(x-1)$, si ha allora:

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, 1)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$, inoltre $x = 1$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto).

- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \neq 0$ e la derivata seconda (per $x > 0$) è:

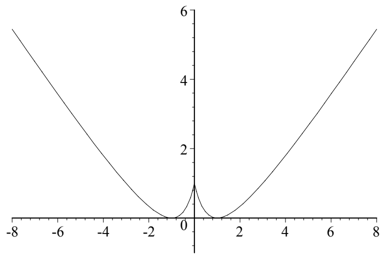
$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(2x+2)-(x^2+2x-3)2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)^3-2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)\left[(x+1)^2-x^2-2x+3\right]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

e per $x > 0$ si ha $f''(x) > 0$, per cui $f(x)$ è strettamente convessa sull'intervallo $(0, +\infty)$.

- Grafico della funzione



5.7. Esercizi da svolgere

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{2-x}\right)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}$

3) $f(x) = \dfrac{\log(3x)}{1 + \log(3x)}$

4) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}}$

5) $f(x) = \sqrt{\log(x^2+1)}$

6) $f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-2x}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{6x - 4}$

9) $f(x) = \dfrac{1 + \log x}{\log x}$

10) $f(x) = xe^{\sqrt{\sin x}}$

11) $f(x) = e^{\frac{4-x}{1-x}}$

12) $f(x) = \log \sqrt{x^2 + 1}$

13) $f(x) = xe^{\sin x}$

14) $f(x) = x\sqrt{1 + x}$

15) $f(x) = (xe^x)^x$

Data la funzione $y = f(x)$, calcolare la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ in corrispondenza del punto $y_0 = f(x_0)$:

16) $y = f(x) = e^{x^2 - 2}$ con $x_0 = 1$

17) $y = f(x) = \log(x^2 + 2)$ con $x_0 = -1$

18) $y = f(x) = \sqrt{e^x}$ con $x_0 = 2$

19) $y = f(x) = \sqrt{e^{x^2 - 2}}$ con $x_0 = 2$

20) $y = f(x) = e^{x^2 + 2}$ con $x_0 = 1$

Data la funzione $f(x)$, determinare l'equazione della retta tangente a $f(x)$ in corrispondenza del punto x_0:

21) $f(x) = 2\sqrt{x} + 5x$ con $x_0 = 1$

22) $f(x) = x^2 - x + 3$ con $x_0 = 1$

23) $f(x) = \log x + 5x$ con $x_0 = 1$

24) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$ con $x_0 = 2$

25) $f(x) = \log x + \sqrt{x} \quad \text{con} \quad x_0 = 1$

26) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 \quad \text{con} \quad x_0 = 1$

27) $f(x) = e^x + \sin x \quad \text{con } x_0 = 0$

28) $f(x) = x^3 e^{x-1} \quad \text{con } x_0 = 1$

Discutere la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni sul loro dominio:

29) $$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } x < 1 \\ \alpha x^2 + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

30) $$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \alpha \log x + \beta & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

31) $$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) + \dfrac{3}{1+x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Determinare lo sviluppo in formula di Taylor-Mac Laurin, centrato in x_0 e arrestato all'ordine n, delle seguenti funzioni:

32) $f(x) = e^{\cos x} \quad x_0 = 0 \quad n = 3$

33) $f(x) = e^x - \sin x \quad x_0 = 0 \quad n = 3$

34) $f(x) = e^x \log x \quad x_0 = 1 \quad n = 2$

35) $f(x) = e^x - x^2 \quad x_0 = 0 \quad n = 3$

36) $f(x) = \sqrt{1 + 2x} \quad x_0 = 0 \quad n = 3$

Discutere la monotonia e determinare eventuali massimi e minimi delle seguenti funzioni:

37) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

38) $f(x) = \sqrt{x} + x$ sull'intervallo $[1, 2]$

39) $f(x) = \sqrt{x} + 2 + \frac{1}{2}x$ sull'intervallo $[0, 1]$

40) $f(x) = \log x - \sqrt{x}$ sull'intervallo $[2, 4]$

41) $f(x) = \sqrt{x} + 1 - x$ sull'intervallo $[0, 1]$

42) $f(x) = \log \sqrt{x}$ sull'intervallo $(1, 2]$

43) $f(x) = 2 \log x + x^2$

Discutere la concavità e convessità delle seguenti funzioni:

44) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6$

45) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 3}$

46) $f(x) = e^{x^2 - 2}$

47) $f(x) = xe^x$

48) $f(x) = e^{4 - x^2}$

Studiare le seguenti funzioni:

49) $f(x) = e^{-x^2 + \log x + 2}$

50) $f(x) = \dfrac{e^{|x| - 3}}{x}$

Capitolo 6

Calcolo integrale

6.1. Primitive e integrale indefinito

Nell'ambito del calcolo differenziale, introdotto nel Capitolo 5, data una funzione f è possibile associare ad essa una nuova funzione, detta funzione derivata, che viene indicata con f'. Nell'ambito del calcolo integrale il primo passo consiste nel procedere in modo inverso, per cui data una funzione f occorre determinare una funzione F la cui derivata sia proprio la funzione di partenza. Diventa così possibile introdurre la nozione di primitiva di una funzione e, successivamente, quella di integrale indefinito.

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un intervallo $I = (a, b)$ contenuto in X, una funzione $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se vale:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Se una funzione ammette una primitiva, inoltre, ne ammette infinite, le quali differiscono tra di loro per una costante arbitraria, cioè se F è una primitiva di f anche $F + c$ (dove c è una costante) è una primitiva di f, infatti si ha:

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x) \qquad \forall x \in I$$

che indica appunto che anche $F + c$ è una primitiva di f. È invece unica la primitiva di f che assume un valore assegnato y_0 in corrispondenza di un dato $x_0 \in I$, cioè la primitiva di f che passa per il punto $P = (x_0, y_0)$.

Considerando infatti la generica primitiva $F(x) + c$ della funzione $f(x)$ ed imponendo che essa passi per il punto P, cioè imponendo la condizione:

$$F(x_0) + c = y_0$$

si ottiene:

$$c = y_0 - F(x_0)$$

e sostituendo questo valore della costante in $F(x) + c$ si ha che la primitiva cercata è:

$$F(x) + c = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f assume particolare importanza e prende il nome di integrale indefinito di f, che si indica con il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

per cui si ha:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

La funzione f viene detta funzione integranda, mentre x costituisce la variabile di integrazione.

Il problema dell'integrazione indefinita di una funzione f consiste nella determinazione del suo integrale indefinito, quindi nella individuazione di una sua primitiva. A questo scopo si utilizzano alcune regole che consentono di ricondurre il calcolo della primitiva di una funzione qualsiasi a quello delle primitive delle funzioni elementari (che sono note), in modo del tutto analogo a quanto visto con riferimento al calcolo delle derivate. In effetti, un primo risultato è costituito dai cosiddetti integrali immediati, che si ottengono semplicemente interpretando "a rovescio" la tabella relativa alle derivate delle funzioni elementari, introdotta nel Capitolo precedente.

Si hanno allora i seguenti risultati:

Formula di derivazione	Formula di integrazione
$Dx = 1$	$\int 1dx = x + c$
$D\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = x^{\alpha} \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$D\dfrac{a^x}{\log a} = a^x \quad \text{con } 0 < a \neq 1$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log a} + c$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$D\log\|x\| = \dfrac{1}{x} \quad \text{con } x \neq 0$	$\int \dfrac{1}{x}dx = \log\|x\| + c$
$D\log\|f(x)\| = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \log\|f(x)\| + c$
$D\sin x = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$D\cos x = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$Dtgx = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$

Partendo da questi integrali immediati, poi, per calcolare gli integrali di funzioni qualsiasi si sfruttano due proprietà dell'integrale indefinito e due metodi di integrazione, allo scopo di ricondurre gli integrali che si vogliono calcolare ad uno o più integrali immediati (che a questo punto sono noti).

Le due proprietà utilizzate sono le seguenti:

(i) *Omogeneità*. Se $f(x)$ è una funzione continua e k è una costante, allora:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

(*ii*) *Additività rispetto alla funzione integranda.* Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, allora:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(e lo stesso vale nel caso di somma di più di due funzioni).

Queste due proprietà indicano che le costanti moltiplicative possono essere "portate fuori" dal segno di integrale e che l'integrale di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni. Considerando congiuntamente le proprietà (*i*) e (*ii*) si ha che l'integrale indefinito soddisfa la proprietà di linearità, che può essere riassunta nell'espressione:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx$$

in base alla quale l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è uguale alla combinazione lineare degli integrali delle singole funzioni, e che esprime il cosiddetto procedimento di integrazione per scomposizione.

I due metodi di integrazione utilizzati sono invece i seguenti:

(*i*) *Integrazione per sostituzione.* Se $f(x)$ è una funzione continua e $x = \varphi(t)$ è una funzione dotata di derivata continua, tale da poter considerare la funzione composta $f(\varphi(t))$, allora:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

In pratica, questo metodo viene utilizzato effettuando, nell'integrale di partenza, la sostituzione $x = \varphi(t)$ e tenendo presente che da essa, differenziando entrambi i membri, si ha $dx = \varphi'(t)dt$ che va anch'esso sostituito nell'integrale di partenza (dove, quindi, il simbolo dx viene interpretato come simbolo di differenziale).

(*ii*) *Integrazione per parti.* Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue dotate di derivata continua, allora:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

In pratica, questo metodo viene utilizzato per calcolare l'integrale indefinito di una funzione che può essere espressa come prodotto di due funzioni $f(x)$ e $g'(x)$, una delle quali è la derivata di una funzione nota. In questo caso, nell'integrale di partenza, $f(x)$ prende il nome di fattore finito mentre $g'(x)dx$ prende il nome di fattore differenziale.

In definitiva, lo scopo di questi metodi di integrazione è quello di ricondurre il calcolo di un dato integrale a quello di un integrale più semplice (attraverso un'opportuna sostituzione, oppure attraverso una scelta opportuna del fattore finito e del fattore differenziale), che quindi si riesce a risolvere.

Per quanto riguarda infine l'individuazione di condizioni che garantiscono l'integrabilità di una funzione, si può dimostrare che ogni funzione continua su di un intervallo ammette primitive su quell'intervallo. Non sempre però queste primitive possono essere espresse per mezzo di funzioni elementari; quando questo è possibile si dice che la funzione considerata è integrabile elementarmente.

Esempio 6.1 *Determinare la generica primitiva della funzione:*

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

In questo caso, utilizzando il procedimento di integrazione per scomposizione, si ottiene innanzitutto:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 + 3x + 2\right) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 2 dx = \\ &= \int x^2 dx + 3 \int x dx + 2 \int dx\end{aligned}$$

A questo punto ognuno degli integrali nei quali è stato scomposto quello di partenza è facilmente calcolabile (in quanto si tratta di integrali immediati), si ha allora:

$$\begin{aligned}\int x^2 dx + 3 \int x dx + 2 \int dx &= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x + c = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

che rappresenta la generica primitiva della funzione $f(x)$. Si può anche osservare che nel calcolo di un integrale è possibile verificare l'esattezza del risultato ottenuto, semplicemente derivando la funzione risultante dai calcoli; poiché questa rappresenta una primitiva della funzione di partenza, per definizione la sua derivata deve essere proprio la funzione considerata all'inizio, cioè quella che compare sotto il segno di integrale. Nel caso in esame si ha:

$$D\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c\right) = x^2 + 3x + 2$$

che è appunto la funzione di partenza, per cui quella ottenuta è effettivamente la sua generica primitiva (cioè il suo integrale indefinito).

Esempio 6.2 *Determinare la primitiva della funzione:*

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

passante per il punto $P = (2, 3)$.

In questo caso occorre innanzitutto determinare la generica primitiva di $f(x)$, che è (come è stato calcolato nell'esercizio precedente):

$$\int \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

A questo punto si impone che questa funzione passi per il punto $P = (2, 3)$, cioè:

$$\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2 + 2 \cdot 2 + c = 3$$

da cui si ottiene:

$$\frac{38}{3} + c = 3 \Rightarrow c = -\frac{29}{3}$$

e sostituendo nella generica primitiva il valore di c così trovato si ha:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{29}{3}$$

che rappresenta la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P = (2, 3)$.

Esempio 6.3 *Determinare la generica primitiva della funzione:*

$$f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt{x} - 2}{x}$$

e successivamente individuare la primitiva di questa stessa funzione passante per il punto $P = (1, 0)$.

In questo caso, utilizzando il procedimento di integrazione per scomposizione, si ottiene innanzitutto:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - \sqrt{x} - 2}{x} dx &= \int \frac{3x^3}{x} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx - \int \frac{2}{x} dx = \\ &= 3 \int x^2 dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

A questo punto ognuno degli integrali ottenuti è facilmente calcolabile (in quanto si tratta di integrali immediati), si ha allora:

$$3\int x^2dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 2\int \frac{1}{x}dx = 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\log|x| + c =$$
$$= x^3 - 2\sqrt{x} - 2\log|x| + c$$

che rappresenta la generica primitiva della funzione $f(x)$. Imponendo poi che questa primitiva passi per il punto $P = (1, 0)$ si ottiene:

$$(1)^3 - 2\sqrt{1} - 2\log|1| + c = 0$$

da cui:

$$1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

e sostituendo nella generica primitiva il valore di c così trovato si ha:

$$F(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - 2\log|x| + 1$$

che rappresenta la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P = (1, 0)$.

Esempio 6.4 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int \sin(2x+3)dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione, a questo scopo si pone innanzitutto:

$$2x + 3 = t$$

da cui si ha anche:

$$x = \frac{t-3}{2}$$

e differenziando entrambi i membri si ottiene:

$$dx = \frac{1}{2}dt$$

A questo punto si sostituiscono le espressioni ottenute per $2x + 3$ e per dx nell'integrale di partenza, che diventa:

$$\int \sin(2x+3)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt$$

Questo integrale è facilmente risolvibile, si ha infatti:

$$\int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + c$$

ed infine, sostituendo a t la sua espressione originaria, si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato.

Esempio 6.5 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int \log x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, a questo scopo l'integrale che si sta cercando può innanzitutto essere scritto come:

$$\int 1 \cdot \log x dx$$

dopodiché occorre individuare, tra i due fattori presenti sotto il segno di integrale, il fattore finito ed il fattore differenziale (cioè, in pratica, le funzioni $f(x)$ e $g'(x)$ che compaiono, insieme a $f'(x)$ e $g(x)$, nella formula di integrazione per parti). In questo caso la scelta da effettuare è:

$$f(x) = \log x \qquad g'(x) = 1$$

per cui le funzioni da utilizzare nella formula di integrazione per parti risultano:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log x & f'(x) = \dfrac{1}{x} \\[2ex] g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array}$$

e applicando tale formula di integrazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \log x dx &= x \log x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - \int dx = \\ &= x \log x - x + c = x(\log x - 1) + c \end{aligned}$$

che rappresenta l'integrale cercato.

Si deve osservare che, scegliendo $f(x) = 1$ e $g'(x) = \log x$, non si sarebbe potuto risolvere l'integrale in quanto non sarebbe stato possibile risalire alla funzione $g(x)$ che compare nella formula di integrazione per parti (in questo caso essendo $g'(x) = \log x$ la funzione $g(x)$ è la primitiva di $\log x$, cioè proprio quella che si sta cercando di calcolare). In pratica, la regola da seguire è quella che consiste nello scegliere come funzione $g'(x)$ quella più "complicata" ma che nello stesso tempo è integrabile immediatamente tra le due funzioni presenti nell'integrale di partenza (nel caso in esame la più "complicata" delle due funzioni che compaiono in $\int 1 \cdot \log x dx$ è $\log x$, che però non è integrabile immediatamente, per cui occorre necessariamente scegliere $g'(x) = 1$).

Esempio 6.6 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int xe^x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

e poi:

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = \\ &= e^x(x-1) + c\end{aligned}$$

che rappresenta l'integrale cercato.

In questo caso si può osservare che, effettuando la scelta $f(x) = e^x$ e $g'(x) = x$, ci si sarebbe trovati a dover calcolare (applicando la formula di integrazione per parti) un integrale più complicato di quello di partenza (per l'esattezza $\int x^2 e^x dx$) per cui non si sarebbe risolto il problema. Resta quindi valida la regola sopra enunciata, in base alla quale è opportuno scegliere come funzione $g'(x)$ quella più "complicata" ma che nello stesso tempo è integrabile immediatamente tra le due funzioni presenti nell'integrale di partenza (in questo caso la più "complicata" delle due funzioni che compaiono in $\int xe^x dx$ è e^x, che è integrabile immediatamente, per cui si pone $g'(x) = e^x$).

Esempio 6.7 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int x^2 e^x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

A questo punto il nuovo integrale $\int x e^x dx$ può anch'esso essere risolto per parti (è l'integrale calcolato nell'esercizio precedente), per cui alla fine si ottiene:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2\left[e^x(x-1) + c\right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c =$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato (in questo caso si può notare che il prodotto $-2c$ che compare svolgendo i calcoli continua ad essere indicato con c in quanto quest'ultima è una costante arbitraria, che quindi può assumere qualsiasi valore, esattamente come $-2c$).

Esempio 6.8 *Calcolare l'integrale indefinito:*

$$\int e^x \sin x dx$$

In questo caso è possibile utilizzare il metodo di integrazione per parti, ponendo innanzitutto:

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

dopodiché si ha:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

A questo punto il nuovo integrale $\int e^x \cos x dx$ può essere risolto anch'esso per parti ponendo:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f'(x) = -\sin x \\ g(x) = e^x & g'(x) = e^x \end{array}$$

per cui si ottiene:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right] =$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

e poi, osservando che a primo e a secondo membro compare lo stesso integrale:

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

e infine:

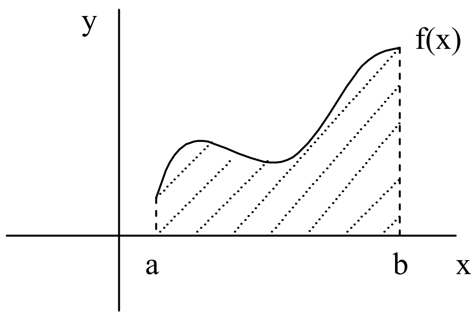
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right) + c$$

che rappresenta l'integrale cercato (si può notare che a secondo membro la costante c compare nel momento in cui non vi è più il simbolo di integrale, in quanto fino a quel punto essa è di fatto "incorporata" nel simbolo di integrale stesso).

In questo caso l'integrale avrebbe anche potuto essere risolto, sempre per parti, scegliendo all'inizio $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \sin x$ e, in occasione della seconda integrazione per parti, $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$ (cioè occorre scegliere in entrambe le integrazioni per parti come $f(x)$ la funzione esponenziale e come $g'(x)$ la funzione trigonometrica, oppure viceversa, perché altrimenti si viene ad avere l'identità $0 = 0$ che non permette di calcolare l'integrale di partenza).

6.2. Integrale definito

Un concetto diverso rispetto a quello di integrale indefinito introdotto nella Sezione precedente è quello di integrale definito. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un intervallo $I = [a, b]$ contenuto in X, si chiama integrale definito di f tra a e b il numero che rappresenta l'area (con segno) della superficie compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[a, b]$, cioè:



Questo integrale si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove f prende il nome di funzione integranda, x è la variabile di integrazione, mentre a e b costituiscono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di integrazione.

Nel caso di una funzione $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ (cioè di una funzione il cui grafico non si trova mai al di sotto dell'asse delle ascisse) il valore dell'integrale risulta a sua volta ≥ 0, mentre nel caso di una funzione $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$ (cioè di una funzione il cui grafico non si trova mai al di sopra dell'asse delle ascisse) il valore dell'integrale risulta a sua volta ≤ 0. Nel caso di una funzione $f(x)$ che cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, invece, il valore dell'integrale rappresenta la differenza tra l'area (positiva) della superficie compresa tra la parte di grafico che si trova al di sopra dell'asse delle ascisse e l'asse delle ascisse stesso e l'area (negativa) della superficie compresa tra la parte di grafico che si trova al di sotto dell'asse delle ascisse e l'asse delle ascisse stesso, cioè in questo caso il valore dell'integrale esprime il risultato della "compensazione" tra aree positive e negative.

Per quanto riguarda l'individuazione di condizioni che garantiscono l'esistenza dell'integrale definito di una funzione, si può dimostrare che ogni funzione continua su di un intervallo chiuso $[a, b]$, oppure limitata sull'intervallo $[a, b]$ (con eventualmente un numero finito di punti di discontinuità), oppure monotona sull'intervallo $[a, b]$

(con eventualmente anche un'infinità numerabile di punti di discontinuità) risulta integrabile su tale intervallo.

L'integrale definito gode di una serie di proprietà; innanzitutto si pone per definizione:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{con } b < a$$

dopodiché valgono le seguenti proprietà (dove f e g sono funzioni continue, quindi integrabili, sull'intervallo $[a, b]$):

(i) *Omogeneità. S*e k è una costante, allora:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(ii) *Additività rispetto alla funzione integranda.* Si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(iii) *Linearità.* Dalle proprietà (i) e (ii) si ottiene:

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^n k_i \int_a^b f_i(x)dx$$

(iv) *Additività rispetto all'intervallo di integrazione.* Si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \forall c \in (a, b)$$

(v) *Positività.* Se $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(vi) *Monotonia.* Se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(vii) Si ha:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

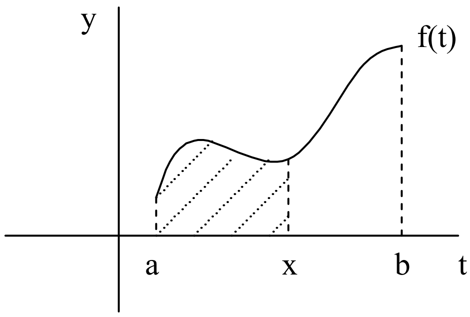
Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (o Teorema di Torricelli-Barrow) stabilisce poi il legame esistente tra calcolo differenziale e calcolo integrale (e anche tra integrale definito e integrale indefinito), e fornisce la regola che consente, in pratica, il calcolo di un integrale definito. In base a questo teorema, data una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$, la corrispondente funzione integrale, che è definita come:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con } x \in [a, b]$$

è continua e derivabile $\forall x \in [a, b]$ e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$

La funzione integrale è una funzione che indica il valore dell'area (con segno) della superficie compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[a, x]$, con x che varia in $[a, b]$ (perciò al variare di x cambia il valore dell'area, e per questo si ottiene una funzione), cioè si ha:



e dal teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale di f risulta essere una primitiva di f, più precisamente quella che in $x = a$ vale 0 (poiché $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$). Da questo teorema si ha poi, come corollario, che il calcolo di un integrale definito può essere effettuato utilizzando la seguente formula:

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

dove G è una qualunque primitiva di f. Questo significa che l'integrale definito di una funzione (continua) su di un intervallo è uguale alla differenza tra i valori che una qualsiasi primitiva della funzione stessa assume nell'estremo superiore e nell'estremo inferiore di integrazione.

Esempio 6.9 *Calcolare l'integrale definito di* $f(x) = x$ *prima sull'intervallo* $[0, 1]$ *e poi sull'intervallo* $[-1, 1]$.

In questo caso si ha (tenendo presente che una primitiva di x è $\frac{x^2}{2}$):

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

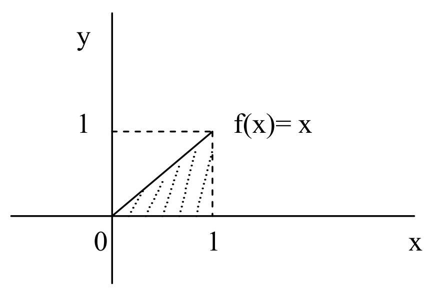
che rappresenta il valore dell'integrale sull'intervallo $[0, 1]$, e poi:

$$\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

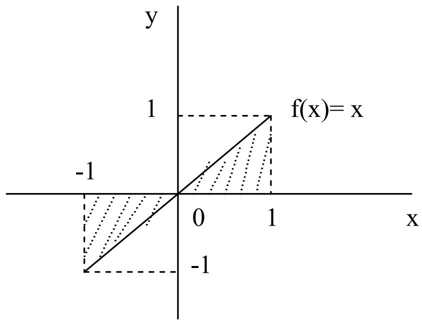
che rappresenta il valore dell'integrale sull'intervallo $[-1, 1]$.

Si può osservare che, nella scelta della primitiva da utilizzare per il calcolo, è possibile tralasciare la costante arbitraria c (cioè, di fatto, scegliere $c = 0$) in quanto tale costante si annulla comunque effettuando la differenza tra i valori che la primitiva assume in corrispondenza dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di integrazione.

Questo esempio può inoltre essere utilizzato per mettere in evidenza il significato geometrico dell'integrale definito; in particolare, il primo integrale costituisce l'area (positiva) del triangolo (di base ed altezza pari ad 1) rappresentato in figura:



Quest'area è pari a $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ come in effetti risulta dal calcolo dell'integrale definito. Il secondo integrale considerato costituisce invece, dal punto di vista geometrico, la somma algebrica delle aree dei due triangoli rappresentati in figura:



Ciascuna di queste due aree è pari ad $\frac{1}{2}$, ma essendo una positiva e l'altra negativa la loro somma algebrica è uguale a 0, come in effetti risulta dal calcolo dell'integrale definito (che quindi in questo caso esprime la compensazione tra aree positive e aree negative). In pratica, volendo invece utilizzare l'integrale definito per il calcolo di un'area (senza segno) occorre considerare le aree delle parti di piano che si trovano al di sotto dell'asse delle ascisse prendendo il loro valore assoluto. Ad esempio, nell'ultimo caso considerato, per calcolare l'area della parte di piano tratteggiata in figura occorre procedere nel modo seguente:

$$\int_{-1}^{1} xdx = \left|\int_{-1}^{0} xdx\right| + \int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

che rappresenta appunto la somma delle aree (positive) dei due triangoli.

Esempio 6.10 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^2 \left(x^2 + 3x + 2\right) dx$$

In questo caso si ha:

$$\int_0^2 \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 =$$
$$= \left(\frac{8}{3} + 6 + 4\right) - (0 + 0 + 0) = \frac{8}{3} + 10 = \frac{38}{3}$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito.

Esempio 6.11 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_1^3 \frac{3x^3-\sqrt{x}-2}{x}dx$$

In questo caso si ha:

$$\int_1^3 \frac{3x^3-\sqrt{x}-2}{x}dx = \int_1^3 \left(\frac{3x^3}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(3x^2-x^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= \left[3\frac{x^3}{3}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-2\log|x|\right]_1^3 = \left[x^3-2\sqrt{x}-2\log|x|\right]_1^3 =$$

$$= \left(27-2\sqrt{3}-2\log 3\right)-(1-2-0) = 28-2\sqrt{3}-2\log 3$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito.

Esempio 6.12 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

In questo caso l'integrale può essere calcolato effettuando innanzitutto la sostituzione:

$$x^2+1=t$$

da cui si ha anche:

$$x^2=t-1$$

e differenziando entrambi i membri:

$$2xdx=dt$$

A questo punto l'integrale diventa:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt$$

dove, passando dall'integrale nella variabile x a quello nella nuova variabile t, anche gli estremi di integrazione vanno cambiati. Più precisamente, i nuovi estremi di integrazione si ottengono sostituendo quelli relativi all'integrale in x (cioè 0 e 1) nell'espressione che definisce la variabile t (cioè $t=x^2+1$) ottenendo così gli estremi relativi all'integrale in t (cioè 1 e 2). A questo punto il nuovo integrale può essere facilmente calcolato ottenendo:

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\log |t|]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito di partenza.

Lo stesso risultato può essere ottenuto calcolando prima l'integrale indefinito corrispondente a quello di partenza, cioè (effettuando la stessa sostituzione sopra indicata):

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c$$

quindi sostituendo a t la sua espressione originaria:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1) + c$$

ed infine passando all'integrale definito (mantenendo gli estremi di integrazione originari in quanto la primitiva trovata è funzione della variabile originaria x), ottenendo:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\log(x^2+1)\right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che è lo stesso risultato trovato prima.

In questo caso, infine, lo stesso risultato può essere ottenuto anche sfruttando l'integrale immediato:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

in quanto nell'esempio in esame il numeratore della frazione che compare sotto il segno di integrale è esattamente la derivata del denominatore, si ha allora:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\log \left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

che è lo stesso risultato trovato in precedenza.

Esempio 6.13 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_{-3}^{1} e^{\sqrt{x+3}} dx$$

In questo caso è possibile innanzitutto effettuare la sostituzione:

$$\sqrt{x+3} = t$$

da cui si ottiene:

$$x = t^2 - 3$$

e anche:

$$dx = 2tdt$$

A questo punto l'integrale di partenza diventa (tenendo presente che gli estremi di integrazione vanno cambiati):

$$\int_{-3}^{1} e^{\sqrt{x+3}} dx = \int_{0}^{2} e^t 2tdt = 2 \int_{0}^{2} te^t dt$$

Questo integrale può essere calcolato per parti ponendo:

$$f(t) = t \qquad f'(t) = 1$$

$$g(t) = e^t \qquad g'(t) = e^t$$

dopodiché si ha:

$$2 \int_{0}^{2} te^t dt = 2 \left[\left[te^t \right]_0^2 - \int_{0}^{2} e^t dt \right] = 2 \left[\left[te^t \right]_0^2 - \left[e^t \right]_0^2 \right] =$$
$$= 2 \left[\left(2e^2 - 0 \right) - \left(e^2 - 1 \right) \right] = 2 \left(e^2 + 1 \right)$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito di partenza.

Esempio 6.14 *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ \\ x^2 + 1 & se\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$.

In questo caso, poiché la funzione integranda è definita a tratti, occorre applicare la proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione, "spezzando" l'integrale nel seguente modo:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

e poi, utilizzando su ciascun intervallo l'espressione di $f(x)$ corrispondente a tale intervallo:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^2 2xdx + \int_2^3 \left(x^2 + 1\right) dx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \\ &= \left[x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3 = (4 - 0) + \left(\frac{27}{3} + 3 - \frac{8}{3} - 2\right) = \\ &= 4 + 9 + 3 - \frac{8}{3} - 2 = \frac{34}{3} \end{aligned}$$

che rappresenta il valore dell'integrale definito di partenza.

6.3. Esercizi da svolgere

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \left(x + 2x^2 + 3x^3\right) dx$

2) $\displaystyle\int \left(2x + 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}\right) dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x + 5}{\sqrt{x}} dx$

4) $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x dx$

5) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}dx$

6) $\displaystyle\int x\log x dx$

7) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\log^2 x}{x}dx$

9) $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$

10) $\displaystyle\int \sqrt{1-x}dx$

11) $\displaystyle\int \left(1+e^{2x}\right)dx$

12) $\displaystyle\int (x+1)e^{-x}dx$

13) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

14) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+x^2\right)dx$

15) $\displaystyle\int (x+\sin x)\,dx$

16) $\displaystyle\int 2x^2e^{2x}dx$

17) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx$

18) $\displaystyle\int \sqrt{1+x}dx$

19) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

20) $\displaystyle\int e^{1-x}dx$

Determinare la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P=(x_0, y_0)$:

21) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5 \quad \text{con } P = (-1, 1)$

22) $f(x) = \cos x + x + 3x^2 \quad \text{con } P = (0, 1)$

23) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} \quad \text{con } P = (1, 1)$

24) $f(x) = (2x+3)^2 \quad \text{con } P = (0, -1)$

25) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + 2}{\sqrt{x}} \quad \text{con } P = (1, 1)$

26) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - 1} \quad \text{con } P = (1, -1)$

27) $f(x) = e^{\sin x}\cos x \quad \text{con } P = (0, 2)$

28) $f(x) = e^{2x-3} \quad \text{con } P = (1, 0)$

29) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad \text{con } P = (0, 1)$

30) $f(x) = \sqrt{x} - x^2 \quad \text{con } P = (1, 0)$

Calcolare i seguenti integrali definiti:

31) $\displaystyle\int_1^2 e^{x-1}dx$

32) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1}\,dx$

33) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{1+x}dx$

34) $\displaystyle\int_{0}^{1} \cos\sqrt{x}dx$

35) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{2x}{x^2+1}dx$

36) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}dx$

37) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

38) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+\sqrt{x})\, dx$

39) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\sqrt{x}+x^2\right) dx$

40) $\displaystyle\int_{0}^{5} e^x \sin x dx$

41) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+\cos x)\, dx$

42) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt[3]{x}dx$

43) $\displaystyle\int_{1}^{2} xe^x dx$

44) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+3}{2}dx$

45) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\log x dx$

46) $\displaystyle\int_0^1 e^{1-x} dx$

47) $\displaystyle\int_1^2 \log(3x)\, dx$

48) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-2x} dx$

49) *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & se \ -1 \leq x \leq 0 \\ \\ x+2 & se \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x) dx.$

50) *Data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & se \ 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} + 1 & se \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^2 f(x) dx.$

Capitolo 7

Algebra lineare

7.1. Vettori: definizioni e proprietà

L'algebra lineare è un insieme di regole di calcolo costruite a partire da oggetti che prendono il nome di vettori e matrici, e che sono sostanzialmente delle tabelle numeriche utilizzate in molte applicazioni. Il punto di partenza dell'analisi è allora costituito dalla definizione dei concetti di vettore e, successivamente, di matrice e dallo studio delle operazioni che è possibile introdurre tra di essi. Queste nozioni vengono successivamente utilizzate, dopo aver introdotto i concetti di determinante, rango di una matrice e matrice inversa, per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Si chiama vettore una n-pla ordinata di numeri reali, che si indica con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le componenti del vettore. Lo stesso vettore (che prende il nome di vettore colonna) può essere rappresentato nel modo seguente:

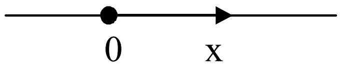
$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}$$

e si parla allora di vettore trasposto di $\mathbf{x}$ (e anche di vettore riga).

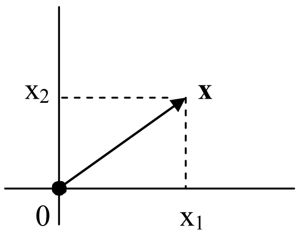
L'insieme di tutti i vettori con n componenti reali si indica con $\mathbb{R}^n$, che è dato dal prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ considerato n volte, cioè si ha:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

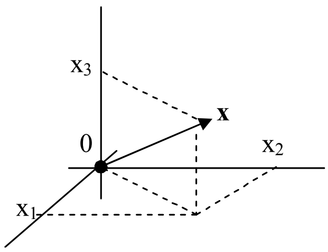
I numeri reali possono essere visti come un tipo particolare di vettori, con una sola componente, e come è noto possono essere rappresentati su di una retta, che costituisce quindi l'immagine geometrica dell'insieme $\mathbb{R}$:



In modo analogo, i vettori a due componenti (cioè le coppie di numeri reali) possono essere rappresentati su di un piano, che costituisce quindi l'immagine geometrica di $\mathbb{R}^2$:



e i vettori a tre componenti (cioè le terne di numeri reali) possono essere rappresentati nello spazio tridimensionale, che costituisce quindi l'immagine geometrica di $\mathbb{R}^3$:



mentre per $n \geq 4$ non è più possibile una rappresentazione di tipo geometrico.

Tra i vettori di $\mathbb{R}^n$ assumono particolare importanza i cosiddetti vettori fondamentali (o "versori"), denotati con $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$. Il generico vettore fondamentale $\mathbf{e}^i$

ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima, che è uguale a 1, si ha cioè:

$$\mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ i vettori fondamentali sono:

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Due vettori con lo stesso numero di componenti sono uguali quando le componenti di posto uguale coincidono, cioè:

$$\text{Dati} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \;\; \mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

Ad esempio, i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono chiaramente uguali, mentre i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non lo sono (in quanto nei vettori è importante l'ordine delle componenti).

Tra i vettori è inoltre possibile introdurre un ordinamento (parziale), per cui si ha:

$$\text{Dati} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \;\; \mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

(in modo analogo si introducono le relazioni di $<$, $\geqq$, $\leqq$). L'ordinamento è parziale perché (a differenza di quanto accade con i numeri) dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ non è necessariamente vero che $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (eventualmente $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$) oppure $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ (eventualmente $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$) oppure $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Considerando ad esempio i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

si ha $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, mentre considerando i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ha $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, se però si considerano i vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in questo caso $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono tra loro confrontabili.

Si introduce poi la nozione di vettore positivo nel modo seguente:

$$\text{Dato} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{allora} \;\; \mathbf{x} > \mathbf{0} \Leftrightarrow x_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

dove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo (cioè il vettore con le componenti tutte nulle). In modo analogo si possono definire vettori negativi ($\mathbf{x} < \mathbf{0}$) e anche vettori non negativi ($\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$) e vettori non positivi ($\mathbf{x} \leqq \mathbf{0}$).

7.2. Operazioni tra vettori

Diventa a questo punto possibile introdurre le operazioni tra vettori, che sono 3. Servendosi di queste operazioni, poi, si possono introdurre altre due nozioni di particolare importanza, quella di norma di un vettore (e di distanza tra vettori) e quella di combinazione lineare di vettori (con i concetti di dipendenza e indipendenza lineare).

7.2.1. Somma di vettori

La prima operazione che si può introdurre è la somma di vettori. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

si chiama somma il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dato da:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

cioè il vettore che si ottiene sommando ogni componente del primo vettore con la corrispondente componente del secondo vettore.

7.2.2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La seconda operazione è la moltiplicazione di un vettore per uno scalare (cioè per un numero reale). Dati $c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto del vettore $\mathbf{x}$ per lo scalare c il vettore $c\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dato da:

$$c\mathbf{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ ... \\ cx_n \end{pmatrix}$$

cioè il vettore che si ottiene moltiplicando ogni componente del vettore di partenza per lo scalare.

7.2.3. Prodotto scalare tra vettori

La terza operazione è il prodotto scalare (o prodotto interno) tra vettori. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto scalare (o prodotto interno) il numero dato da:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

cioè il numero che si ottiene moltiplicando ogni componente del primo vettore per la corrispondente componente del secondo vettore e sommando tra di loro i vari prodotti così ottenuti. A differenza di quanto accade nel caso di prodotto tra numeri, per il prodotto interno non vale la legge di annullamento (il prodotto scalare di due vettori, di cui uno è il vettore nullo, è uguale a zero, ma il prodotto scalare può essere uguale a zero senza che nessuno dei fattori sia il vettore nullo). Due vettori il cui prodotto interno è nullo, inoltre, si dicono ortogonali (e si scrive $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$).

Esempio 7.1 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *calcolare la loro somma.*

Si ha in questo caso:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la somma dei due vettori.

Esempio 7.2 *Dato il vettore* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *e lo scalare* $c = -5$ *calcolare il prodotto* $c\mathbf{x}$*.*

Si ha in questo caso:

$$c\mathbf{x} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

che rappresenta il prodotto $-5\mathbf{x}$.

Esempio 7.3 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *calcolare il loro prodotto scalare.*

Si ha in questo caso:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 5$$

che rappresenta il prodotto scalare dei due vettori.

Esempio 7.4 *Determinare per quale valore di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$ *sono ortogonali.*

Si ha in questo caso:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot \alpha + 2 \cdot 5 = 12 - 3\alpha$$

e poi:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow 12 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

per cui per $\alpha = 4$ i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali. Questo è un esempio da cui risulta evidente che non vale per il prodotto scalare la legge di annullamento del prodotto, infatti (se $\alpha = 4$) il prodotto interno tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è nullo senza che nessuno dei due vettori sia il vettore nullo.

7.2.4. Norma di un vettore, distanza tra vettori, combinazione lineare di vettori, dipendenza e indipendenza lineare

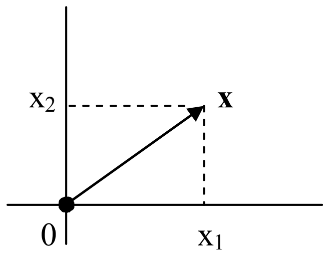
L'operazione di prodotto interno (o prodotto scalare) tra vettori consente di introdurre la nozione di norma di un vettore. Dato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

si chiama norma di $\mathbf{x}$ il numero dato da:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

cioè dalla radice quadrata del prodotto scalare di $\mathbf{x}$ con se stesso. Geometricamente la norma di un vettore rappresenta la lunghezza del segmento che individua il vettore stesso, come risulta evidente nel caso $n = 2$:



in cui, applicando il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come vertici $0, x_1$ e $\mathbf{x}$ è data da $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, che è appunto la norma del vettore in esame.

Nel caso $n = 1$, poi, si ha:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$$

cioè la norma coincide con il valore assoluto del numero in esame.

Utilizzando la nozione di norma diventa possibile introdurre quella di distanza tra vettori di $\mathbb{R}^n$. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si definisce distanza tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ la norma della differenza $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, cioè la lunghezza del segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Le operazioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare, invece, consentono di introdurre la nozione di combinazione lineare di vettori. Dati k vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ e k scalari (cioè numeri) $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$, il vettore dato da:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + ... + c_k\mathbf{x}^k = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}^i$$

si chiama combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ con pesi (o coefficienti) $c_1, c_2, ..., c_k$.

In particolare, si può dimostrare che ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori fondamentali (o versori) $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$

con coefficienti uguali alle componenti x_1, $x_2, ...,$ x_n del vettore, si ha infatti:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + ... + x_n\mathbf{e}^n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}^i$$

La nozione di combinazione lineare consente poi di introdurre quella di dipendenza (e indipendenza) lineare tra vettori. A questo proposito, si dice che i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se uno (almeno) di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri, cioè se esistono degli scalari $c_1, c_2, ..., c_{k-1} \in \mathbb{R}$ tali che è possibile scrivere:

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i\mathbf{x}^i$$

(si può sempre pensare che sia l'ultimo vettore ad essere esprimibile come combinazione lineare degli altri, eventualmente cambiando l'ordine). Quando invece questa rappresentazione non è possibile, si dice che i vettori in esame sono linearmente indipendenti.

Una definizione equivalente (che viene usata in pratica per verificare la dipendenza o l'indipendenza lineare) è quella in base alla quale i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}^i = \mathbf{0} \qquad \text{con almeno un } c_i \neq 0$$

mentre i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli, cioè si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}^i = \mathbf{0} \qquad \text{solo quando } c_i = 0 \quad \forall i$$

(si può notare che questa soluzione esiste sempre, poiché è evidente che una combinazione lineare di vettori a coefficienti tutti nulli è sempre uguale al vettore nullo).

Esempio 7.5 *Dato il vettore* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ *calcolare la sua norma e la sua distanza dal vettore* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Si ha innanzitutto:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

che rappresenta la norma del vettore $\mathbf{x}$, e poi:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \\ &= \sqrt{(3-2)^2 + (0-(-3))^2 + (-4-(-5))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

che rappresenta la distanza tra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Esempio 7.6 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e gli scalari* $\alpha = 3$ *e* $\beta = -2$ *determinare la combinazione lineare* $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$.

Si ha in questo caso:

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la combinazione lineare $3\mathbf{x} - \mathbf{2y}$.

Esempio 7.7 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *stabilire se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti.*

Si ha in questo caso:

$$c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

cioè si considera la generica combinazione lineare dei 2 vettori e la si uguaglia al vettore nullo. Svolgendo i calcoli si ottiene poi:

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

per cui si deve avere:

$$
\begin{cases} c_1 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}
$$

e poiché l'unica combinazione lineare dei 2 vettori che fornisce il vettore nullo è quella con coefficienti nulli, i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

Esempio 7.8 *Dati i vettori* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *stabilire se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti.*

Si ha in questo caso:

$$
c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} + c_3\mathbf{z} = \mathbf{0} \qquad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}
$$

e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ 3c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_2 - c_3 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

per cui si deve avere:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3 \\ c_2 = c_3 \\ c_2 = c_3 \end{cases} \qquad \text{con } c_3 \in \mathbb{R}$$

Tutte le combinazioni lineari dei 3 vettori con coefficienti $(-2c_3, c_3, c_3)$, dove $c_3 \in \mathbb{R}$, sono uguali al vettore nullo, e poiché ce ne sono anche con coefficienti non tutti nulli (basta prendere $c_3 \neq 0$) i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

7.3. Matrici: definizioni e proprietà

Si chiama matrice una tabella di numeri reali, che si indica con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

e risulta essere una matrice con m righe e n colonne, la quale può anche essere rappresentata in forma compatta nel modo seguente:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

Una matrice di dimensione $m \times n$, inoltre, può essere ottenuta sovrapponendo m vettori riga di $\mathbb{R}^n$, per cui si può usare una scrittura di questo tipo:

$$A = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{pmatrix} \\ ... \\ \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ ... \\ \mathbf{a}^m \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{a}^i \in \mathbb{R}^n \\ \\ i = 1, 2, ..., m \end{array}$$

oppure può essere ottenuta affiancando n vettori colonna di $\mathbb{R}^m$, per cui si può usare una scrittura di questo tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{b}^n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{b}^j \in \mathbb{R}^m \\ \\ j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

L'insieme delle matrici con componenti reali e aventi m righe e n colonne si indica con $\mathbb{R}^{m,n}$, e i vettori possono essere visti come particolari matrici, aventi una sola colonna (nel caso di vettori colonna, che quindi possono essere indicati in generale con $\mathbb{R}^{m,1}$) oppure una sola riga (nel caso di vettori riga, che quindi possono essere indicati in generale con $\mathbb{R}^{1,n}$).

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

si chiama trasposta di A la matrice $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ data da:

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{j=1,2,...,n \\ i=1,2,...,m}}$$

cioè la matrice che si ottiene da A scambiando tra loro le righe e le colonne. Ad esempio, data la matrice 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

la sua trasposta è la matrice 3×2:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha anche $\left(A^T\right)^T = A$, cioè la trasposta della trasposta di una data matrice è la matrice di partenza.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (cioè con lo stesso numero di righe e di colonne) si dice quadrata di ordine n, e gli elementi con indici di riga e di colonna uguali $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ costituiscono la diagonale principale.

Una matrice quadrata che coincide con la sua trasposta si dice simmetrica, e in essa gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali, si ha quindi:

$$A \text{ simmetrica} \Rightarrow A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$$

La matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ad esempio è simmetrica.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi tutti nulli al di sotto della diagonale principale si chiama triangolare alta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi tutti nulli al di sopra della diagonale principale si chiama triangolare bassa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con elementi qualsiasi lungo la diagonale principale e nulli altrove, inoltre, si chiama matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e infine la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale tutti 1 si chiama matrice unità o matrice identità (di ordine n) e si indica con I_n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

7.4. Operazioni tra matrici

Diventa a questo punto possibile introdurre le operazioni tra matrici, che sono 3 e sono del tutto analoghe a quelle viste per i vettori (in effetti, nel caso particolare in cui le matrici hanno una sola riga oppure una sola colonna – per cui sono in realtà dei vettori – le operazioni diventano esattamente quelle introdotte in precedenza con riferimento ai vettori).

7.4.1. Somma di matrici

La prima operazione che si può introdurre è la somma di matrici. Date $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

si chiama somma la matrice $A + B \in \mathbb{R}^{m,n}$ data da:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

cioè la matrice che si ottiene sommando ogni componente della prima matrice con la corrispondente componente della seconda matrice.

7.4.2. Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

La seconda operazione è la moltiplicazione di una matrice per uno scalare (cioè per un numero reale). Dati $c \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

si chiama prodotto della matrice A per lo scalare c la matrice $cA \in \mathbb{R}^{m,n}$ data da:

$$cA = (ca_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$$

cioè la matrice che si ottiene moltiplicando ogni componente della matrice di partenza per lo scalare.

7.4.3. Prodotto di matrici

La terza operazione è il prodotto di matrici. Date $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ ... \\ \mathbf{a}^m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{b}^p \end{pmatrix}$$

si chiama prodotto la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,p}$ data da:

$$C = AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^p \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^p \\ ... \\ \mathbf{a}^m\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^p \end{bmatrix}$$

Usando una diversa notazione si ha che, date $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}} \qquad B = (b_{jr})_{\substack{j=1,2,...,n \\ r=1,2,...,p}}$$

si chiama prodotto la matrice $C = AB \in \mathbb{R}^{m,p}$ data da:

$$C = (c_{ir})_{\substack{i=1,2,...,m \\ r=1,2,...,p}}$$

dove:

$$c_{ir} = a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + ... + a_{in}b_{nr} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}$$

cioè il generico elemento di posto (i, r) della matrice prodotto è uguale al prodotto scalare dell'i-esima riga della prima matrice con la r-sima colonna della seconda matrice.

Affinché sia definito il prodotto tra due matrici, quindi, è necessario che il numero delle colonne della prima matrice sia uguale al numero delle righe della seconda matrice; in questo caso il prodotto è una matrice che ha lo stesso numero di righe della prima matrice e lo stesso numero di colonne della seconda matrice. In particolare, il prodotto tra una matrice $1 \times n$ (un vettore riga ad n componenti) e una matrice $n \times 1$ (un vettore colonna ad n componenti) è un numero, ed è il prodotto scalare introdotto in precedenza.

Il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa (cambiando l'ordine dei fattori il prodotto può addirittura non essere più definito, e comunque se anche lo è in generale si ha $AB \neq BA$), inoltre (come già visto per il prodotto scalare) non vale la legge di annullamento (il prodotto di due matrici, di cui una delle due è la matrice nulla – cioè con elementi tutti uguali a zero – è la matrice nulla, tuttavia un prodotto tra matrici può essere nullo senza che nessuno dei fattori sia la matrice nulla).

Esempio 7.9 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *calcolare la loro somma.*

Si ha in questo caso:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la somma delle due matrici.

Esempio 7.10 *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *e lo scalare* $c = 3$ *calcolare il prodotto* cA*.*

Si ha in questo caso:

$$cA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta il prodotto $3A$.

Esempio 7.11 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *calcolare il prodotto* $C = AB$.

In questo caso, poiché $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ e $B \in \mathbb{R}^{3,3}$, il prodotto AB esiste (perché il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda) – mentre non esiste il prodotto BA – e si ha $C = AB \in \mathbb{R}^{2,3}$ con:

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

che rappresenta il prodotto AB.

Esempio 7.12 *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *calcolare il prodotto* AB *e il prodotto* BA.

In questo caso, poiché $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ e $B \in \mathbb{R}^{2,2}$, esistono sia il prodotto AB sia il prodotto BA e si ha $AB \in \mathbb{R}^{2,2}$ e $BA \in \mathbb{R}^{2,2}$ con:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

da cui risulta evidente che non vale la proprietà commutativa del prodotto tra matrici (infatti $AB \neq BA$) e non vale la legge di annullamento del prodotto (infatti BA è uguale alla matrice nulla senza che nessuna delle due matrici A e B sia la matrice nulla).

7.5. Determinante di una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, cioè una matrice quadrata di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si chiama determinante il numero (indicato con $\det A$ oppure con $|A|$):

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

dato dalla differenza tra il prodotto dei due termini sulla diagonale principale e il prodotto dei due termini sulla diagonale secondaria. Data poi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$, cioè quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si chiama determinante il numero:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

che può essere ottenuto affiancando alla matrice di partenza le sue prime due colonne:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

ed eseguendo poi i prodotti degli elementi in diagonale, sommando quelli che si trovano sulla diagonale principale della matrice iniziale e sulle diagonali parallele, e sottraendo quelli che si trovano sulla diagonale secondaria della matrice iniziale e sulle diagonali parallele.

Il determinante della matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ può anche essere scritto come:

$$\det A = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

dove le espressioni contenute in parentesi sono i determinanti delle matrici (quadrate di ordine 2) che si ottengono dalla matrice iniziale eliminando la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento raccolto, per cui si ha:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Formule analoghe possono essere ottenute raccogliendo, anziché gli elementi della prima riga, gli elementi di un'altra riga o di una qualsiasi colonna, e in ogni caso in questo modo il calcolo del determinante di una matrice di ordine 3 viene ricondotto al calcolo di determinanti di matrici di ordine 2.

Esempio 7.13 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante.

In questo caso si ha:

$$\det A = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 = 1$$

che rappresenta il determinante della matrice.

Esempio 7.14 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante.

In questo caso si può innanzitutto scrivere:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 0 & & -2 & & 1 & & 0 \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 1 \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ 0 & & 1 & & -3 & & 0 & & 1 \end{array}$$

e poi:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-3) = \\ &= -3 + 0 - 4 - 0 - 3 - 0 = -10 \end{aligned}$$

che rappresenta il determinante della matrice. In alternativa si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-3 - 3) - 0 \cdot (-6 - 0) - 2 \cdot (2 - 0) = \\ &= -6 + 0 - 4 = -10 \end{aligned}$$

che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

In generale, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $n > 3$, è possibile calcolare il suo determinante attraverso una generalizzazione della formula utilizzata nel caso di matrici di ordine 3 (e nel caso $n = 1$ si pone $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$). Per prima cosa, data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si chiama minore complementare dell'elemento a_{ij} il determinante M_{ij} della sottomatrice che si ottiene dalla matrice A eliminando la riga i e la colonna j alle quali appartiene tale elemento, mentre si chiama complemento algebrico di a_{ij} il numero:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

che è quindi uguale a M_{ij} se la somma degli indici $i+j$ è pari, mentre è uguale all'opposto di M_{ij} se la somma degli indici $i+j$ è dispari. A questo punto, il determinante di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna per i rispettivi complementi algebrici, per cui nel caso della riga i-esima si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

mentre nel caso della colonna j-esima si ha:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Nel caso di una matrice triangolare, in particolare, il determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale, inoltre il determinante di una matrice è nullo se e solo se le sue righe (colonne) sono linearmente dipendenti.

Esempio 7.15 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante.

In questo caso conviene scegliere per il calcolo la riga o la colonna che ha il maggior numero di elementi nulli, in particolare la seconda colonna, per cui si ha:

$$\begin{aligned}\det A &= 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

e sviluppando questo determinante scegliendo la terza riga si ottiene:

$$\begin{aligned}\det A = 2 \cdot \left(0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = \\ = 2 \cdot (-2 + 9 - 1 + 6) = 24\end{aligned}$$

che rappresenta il determinante della matrice iniziale.

Esempio 7.16 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante.

In questo caso conviene scegliere per il calcolo la terza riga, costituita da elementi tutti nulli, per cui si ha:

$$\begin{aligned}\det A &= 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

cioè il determinante di una matrice con almeno una riga (o una colonna) costituita da elementi tutti nulli è uguale a 0 (in questo caso si dice che la matrice è singolare).

7.6. Rango di una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, se $k \leq \min(m,n)$ si chiama minore di ordine k estratto da A il determinante di una sua sottomatrice quadrata di ordine k. Si chiama poi rango o caratteristica di A il numero intero $r \geq 0$ tale che A possiede almeno un minore di ordine r diverso da 0 e tutti i minori di ordine superiore sono nulli. Il rango rappresenta quindi il massimo ordine dei determinanti non nulli estraibili da A, ed anche il massimo numero di vettori riga o colonna linearmente indipendenti.

Esempio 7.17 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo rango.

In questo caso, considerando il minore formato dalle prime due righe e due colonne si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

per cui il rango di A è almeno 2 (in quanto vi è almeno un minore di ordine 2 non nullo). Considerando poi il minore formato dalle prime tre colonne si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

per cui il rango di A è 3.

Si ha anche che se la matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ possiede un minore di ordine r (con $r < \min(m,n)$) non nullo e tutti i minori di ordine $r+1$ che si ottengono "orlando" tale minore con una riga e una colonna di A non appartenenti ad esso sono nulli, allora il rango di A è r. Su questo risultato si basa un procedimento di calcolo del rango, detto algoritmo di Kronecker, che si articola nei seguenti passi:

(i) si considera una sottomatrice quadrata di A non singolare (cioè con determinante diverso da 0) di ordine r;

(ii) si "orla" tale sottomatrice con una delle righe e una delle colonne di A non ancora utilizzate;

(iii) se tutti i determinanti associati a tali sottomatrici di ordine $r+1$ sono nulli, la matrice A ha rango r;

(iv) se almeno una sottomatrice di ordine $r+1$ così ottenuta ha determinante non nullo si ripete il procedimento partendo da tale sottomatrice.

Esempio 7.18 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo rango.

In questo caso considerando il minore formato dalle prime due righe e due colonne si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

per cui il rango di A è almeno 2 (in quanto vi è almeno un minore di ordine 2 non nullo). A questo punto, per stabilire se il rango di A è 3 non è necessario considerare tutti i possibili minori di ordine 3 (che sono 4), ma è sufficiente considerare i minori di ordine 3 che si ottengono "orlando" il minore di ordine 2 prima esaminato, e che sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e poiché entrambi sono nulli si conclude che la matrice A ha rango 2.

7.7. Matrice inversa

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, si chiama inversa di A la matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AB = BA = I_n$. Se l'inversa di A esiste è unica, e in questo caso si dice che A è invertibile e la matrice inversa viene indicata con il simbolo A^{-1}. Se invece A non è invertibile si dice che è singolare. Per calcolare l'inversa di una matrice quadrata A occorre considerare la trasposta della matrice dei complementi algebrici. A questo proposito, se $A = (a_{ij})$ e A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}, si pone:

$$A^* = (A_{ij})$$

e si chiama aggiunta di A la matrice $(A^*)^T$. A questo punto si ha che condizione necessaria e sufficiente perché A sia invertibile è che essa abbia determinante diverso da 0, e in questo caso la matrice inversa è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T$$

Si ha invece che una matrice è singolare se e solo se il suo determinante è nullo.

Esempio 7.19 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\det A = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5 \neq 0$$

per cui A è invertibile. A questo punto i complementi algebrici degli elementi di A sono:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

per cui la matrice dei complementi algebrici degli elementi di A è:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice aggiunta è:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto l'inversa di A è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

e si può verificare che vale:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$$

infatti si ha:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.20 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\begin{aligned} \det A &= -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot (2 - (-2)) + 0 \cdot (1 - (-1)) - 1 \cdot (2 - 2) = \\ &= -12 \neq 0 \end{aligned}$$

per cui A è invertibile. A questo punto i complementi algebrici degli elementi di A sono:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

per cui la matrice dei complementi algebrici degli elementi di A è:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

e la matrice aggiunta è:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

A questo punto l'inversa di A è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si può verificare che vale:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$$

infatti si ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.8. Riduzione di una matrice

Per il calcolo del rango e dell'inversa di una matrice è anche possibile utilizzare un altro metodo, quello di riduzione di una matrice per righe (o per colonne). A questo proposito, una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice ridotta per righe se, in ogni riga non nulla, c'è un elemento non nullo al di sotto del quale ci sono soltanto degli zeri (in modo analogo si definisce una matrice ridotta per colonne). Considerando ad esempio la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

essa è ridotta per righe, mentre considerando la matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

essa non è ridotta per righe.

In alcuni casi, poi, è utile fare riferimento a matrici in forma ulteriormente semplificata, e a questo proposito una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice ridotta per righe in forma triangolare se si presenta nella forma:

$$A = \begin{bmatrix} T_r & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

dove T_r è una matrice triangolare alta di rango r (cioè al di sotto della diagonale principale vi sono solo zeri, mentre sulla diagonale principale non vi sono zeri), mentre B è una matrice qualsiasi. Considerando ad esempio la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & \vdots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

essa è ridotta per righe in forma triangolare.

Nel caso di una matrice ridotta per righe, le righe non nulle sono linearmente indipendenti e il loro numero è uguale al rango della matrice stessa.

Per ottenere, partendo da una matrice qualsiasi, una matrice ridotta per righe è possibile utilizzare le seguenti trasformazioni elementari (dove R_i indica la riga i-esima della matrice considerata):

(i) $R_i \to R_i + \alpha R_j$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $i \neq j$

(ii) $R_i \leftrightarrow R_j$ con $i \neq j$

(iii) $R_i \to \alpha R_i$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La prima trasformazione consiste nel sostituire ad una riga la somma di tale riga con un multiplo (o sottomultiplo) di un'altra riga, la seconda trasformazione consiste invece nello scambiare tra di loro due righe, mentre la terza trasformazione consiste nel sostituire ad una riga un suo multiplo (o sottomultiplo). Queste operazioni elementari, inoltre, non modificano il rango rispetto a quello della matrice iniziale.

In questo modo, partendo da una matrice qualsiasi A diventa possibile, applicando una o più di queste trasformazioni, ottenere una matrice $\widetilde{A}$ che risulta ridotta per righe, e per la quale il calcolo del rango è immediato.

Esempio 7.21 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo rango.

Per questa matrice (già considerata nell'Esempio 7.17) è possibile applicare il procedimento di riduzione nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; R_3 \to 2R_3 \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 - R_1 \quad \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 + R_2 \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \widetilde{A}$$

e risulta:

$$r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$$

in quanto nella matrice ridotta $\widetilde{A}$ vi sono 3 righe non nulle, e quindi la matrice iniziale A ha rango 3 (come già trovato in precedenza).

Esempio 7.22 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo rango.

Per questa matrice (già considerata nell'Esempio 7.18) è possibile applicare il procedimento di riduzione nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 + R_1 \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 - R_2 \quad \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{A}$$

e risulta:

$$r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$$

in quanto nella matrice ridotta $\widetilde{A}$ vi sono 2 righe non nulle, e quindi la matrice iniziale A ha rango 2 (come già trovato in precedenza).

Il procedimento di riduzione può essere utilizzato anche per il calcolo dell'inversa di una matrice. A questo proposito, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile si considera la matrice data da:

$$(A \mid I_n)$$

dove I_n è la matrice identità di ordine n, dopodiché si applicano le trasformazioni elementari in modo da ottenere una matrice:

$$(I_n \mid B)$$

e così facendo risulta:

$$B = A^{-1}$$

cioè la matrice che si ottiene, al termine delle trasformazioni, al posto della matrice I_n risulta essere proprio l'inversa della matrice iniziale A.

Esempio 7.23 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa.

Per questa matrice (già considerata nell'Esempio 7.19) si ha innanzitutto $\det A = -5 \neq 0$ per cui essa è invertibile, dopodiché si considera la matrice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e applicando le trasformazioni elementari si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) \; R_1 \to R_1 + \tfrac{3}{5}R_2 \quad \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) \; R_2 \to -\tfrac{1}{5}R_2 \quad \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

per cui risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

che è l'inversa della matrice iniziale (come già trovato in precedenza).

Esempio 7.24 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa.

Per questa matrice (già considerata nell'Esempio 7.20) si ha innanzitutto $\det A = -12 \neq 0$ per cui essa è invertibile, dopodiché si considera la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e applicando le trasformazioni elementari si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - 3R_1 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - R_1 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \to 3R_1 + R_2 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \to 2R_1 - R_3 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - 2R_3 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \to \frac{1}{6}R_1 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to -\frac{1}{6}R_2 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 \to \frac{1}{2}R_3 \quad \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to$$

per cui risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che è l'inversa della matrice iniziale (come già trovato in precedenza).

7.9. Sistemi lineari: definizioni

Un'equazione nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ si dice lineare se è del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

dove $a_1, a_2, ..., a_n$ sono i coefficienti (reali) e b è il termine noto. Una soluzione dell'equazione è una n-pla di numeri reali $x_1, x_2, ..., x_n$ che verificano l'uguaglianza.

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ è costituito da m equazioni lineari che devono essere soddisfatte simultaneamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove i numeri a_{ij} (con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$) sono i coefficienti (reali) e i numeri b_i (con $1 \leq i \leq m$) sono i termini noti. Se tutti i b_i sono uguali a zero il sistema si dice omogeneo.

Una soluzione del sistema è una n-pla di numeri reali $x_1, x_2, ..., x_n$ che verificano simultaneamente le m equazioni. Se un sistema non ha soluzioni si dice impossibile, altrimenti si dice possibile o risolubile. Due sistemi si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.

Un sistema lineare può essere scritto in forma matriciale come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle incognite e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Considerando ad esempio il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare di 2 equazioni algebriche (a coefficienti reali) in 3 incognite si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dato un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si definisce poi matrice completa la matrice:

$$(A \mid \mathbf{b})$$

ottenuta affiancando alla matrice dei coefficienti A il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. Con riferimento al sistema precedente, ad esempio, la matrice completa è:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, poi, si dice ridotto se la matrice A è ridotta per righe, e in questo caso il sistema può essere risolto facilmente per sostituzione.

Esempio 7.25 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dove la matrice A è ridotta per righe, per cui il sistema lineare è un sistema ridotto e può quindi essere risolto agevolmente per sostituzione, ottenendo:

$$\begin{cases} x_3 = 5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 = -7 \\ x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e il sistema è determinato (in quanto possiede una sola soluzione).

Esempio 7.26 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove la matrice A è ridotta per righe (in forma triangolare), per cui il sistema lineare è un sistema ridotto e può quindi essere risolto per sostituzione, ottenendo ad esempio (se si considera x_2 come incognita libera):

$$\begin{cases} x_3 = 3 - 2x_2 \\ x_1 = 1 - x_2 - x_3 = -2 + x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_2 \\ 3 - 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } x_2 \in \mathbb{R}$$

e il sistema è indeterminato con un grado di libertà e possiede infinite soluzioni, ad esempio:

$$\text{se } x_2 = 0 \Rightarrow \ \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{se } x_2 = 1 \Rightarrow \ \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.27 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove la matrice A è ridotta per righe (in forma triangolare), per cui il sistema lineare è un sistema ridotto, nel quale però la terza equazione non è mai verificata, per cui il sistema è impossibile.

A questo proposito, un primo metodo utilizzato per la risoluzione dei sistemi lineari è quello di riduzione (o di eliminazione) di Gauss, che consiste nel trasformare un sistema dato in uno ridotto ad esso equivalente, che risulta quindi facilmente risolvibile. In effetti, dato un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ esso risulta equivalente (cioè ha tutte e solo le stesse soluzioni) ad un sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, dove la matrice completa del secondo sistema $(A' \mid \mathbf{b}')$ si ottiene dalla matrice completa del primo sistema $(A \mid \mathbf{b})$ attraverso il metodo di riduzione, e la matrice A' è ridotta per righe (per cui il sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ è un sistema ridotto).

In base a questo risultato, quindi, ogni sistema lineare è equivalente ad un sistema ridotto, e questo fornisce un metodo generale di soluzione dei sistemi lineari, in quanto dato un sistema qualsiasi è possibile applicare il metodo di riduzione alla corrispondente matrice completa, ottenendo così un sistema ridotto (equivalente a quello iniziale) che può essere facilmente risolto.

Esempio 7.28 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

In questo caso si ha innanzitutto che la matrice completa corrispondente è:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

che può essere trasformata in una nuova matrice $(A' \mid \mathbf{b}')$ con A' ridotta per righe attraverso trasformazioni elementari:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftrightarrow R_2 \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) = (A' \mid \mathbf{b}')$$

A questo punto il sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ è un sistema ridotto equivalente al sistema iniziale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e corrisponde a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_2 = -1 \\ -2x_3 = -1 \end{cases}$$

che può essere risolto per sostituzione ottenendo:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che è anche la soluzione del sistema iniziale.

7.10. Sistemi lineari di n equazioni ed n incognite

I sistemi di n equazioni ed n incognite sono del tipo:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

cioè la matrice dei coefficienti è quadrata di ordine n, per cui essi vengono anche detti sistemi quadrati. In base al risultato noto come Teorema di Cramer, un sistema quadrato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette una e una sola soluzione $\forall\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se A è invertibile (cioè se e solo se $\det A \neq 0$), e in questo caso la soluzione è data da:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Da questo risultato, tenendo conto dell'espressione per il calcolo dell'inversa di una matrice, deriva la cosiddetta "regola di Cramer" per il calcolo delle soluzioni di un sistema quadrato, in base alla quale si ha:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} \qquad ... \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

dove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo alla colonna i-esima il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti.

Esempio 7.29 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che risulta invertibile (in quanto $\det A = -3 \neq 0$), quindi il sistema ha un'unica soluzione, e applicando la regola di Cramer tale soluzione risulta:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Esempio 7.30 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = -6 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

che risulta invertibile (in quanto $\det A = 46 \neq 0$), quindi il sistema ha un'unica soluzione, e applicando la regola di Cramer tale soluzione risulta:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 10 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{46} = \frac{46}{46} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{46} = \frac{92}{46} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{46} = \frac{-46}{46} = -1$$

7.11. Sistemi lineari di m equazioni ed n incognite

Considerando sistemi generali, con m equazioni ed n incognite, vale innanzitutto il risultato, noto come Teorema di Rouché-Capelli, in base al quale il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è risolubile se e solo se $r(A) = r(A \mid \mathbf{b})$, cioè se e solo se la matrice dei coefficienti e quella completa ad esso associate hanno lo stesso rango.

Esempio 7.31 *Discutere la risolubilità del sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = k \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

che risulta singolare, e poiché ad esempio il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è diverso da 0, essa ha rango 2. Considerando poi la matrice completa:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & k \end{array}\right)$$

e sfruttando l'algoritmo di Kronecker, si studia il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = k - 2$$

ottenuto "orlando" quello di ordine 2 non nullo con la terza riga e la quarta colonna della matrice completa. Tale minore di ordine 3 risulta nullo per $k = 2$, per cui la matrice completa $(A \mid \mathbf{b})$ ha rango 2 se $k = 2$ e rango 3 se $k \neq 2$. In conclusione, il sistema iniziale è risolubile se $k = 2$, mentre è impossibile se $k \neq 2$.

In base al Teorema di Cramer, poi, se $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = r = n$ (numero di incognite) allora il sistema ha un'unica soluzione, mentre se $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = r < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni, che dipendono da $n - r$ incognite libere (gradi di libertà). In particolare, certe $n-r$ incognite possono essere scelte come libere se e solo se le r colonne della matrice A corrispondenti alle altre incognite sono linearmente indipendenti.

In pratica, per risolvere un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nel caso in cui $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = r$ (tenendo presente che il rango r indica quante sono le equazioni significative del sistema, cioè le equazioni linearmente indipendenti), si procede nel seguente modo:

(i) si considera un minore di ordine r, estratto dalla matrice A, diverso da zero;
(ii) del sistema si considerano solo le r equazioni corrispondenti alle righe di questo minore;
(iii) a primo membro del sistema si mantengono le r incognite i cui coefficienti costituiscono le colonne del minore, mentre si portano a secondo membro i termini contenenti le altre $n - r$ incognite;
(iv) si ottiene così un sistema di r equazioni in r incognite, che può essere risolto (ad esempio con la regola di Cramer).

In definitiva, dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si ha:

- se $r(A) \neq r(A \mid \mathbf{b})$ il sistema è impossibile
- se $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = r = n$ (numero di incognite) il sistema ammette un'unica soluzione
- se $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = r < n$ (numero di incognite) il sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da $n - r$ incognite libere)

Esempio 7.32 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

per le quali si ha:

$$r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 2$$

per cui il sistema ammette soluzioni. A questo punto si applica il procedimento sopra illustrato per la soluzione del sistema. In particolare, si prende il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

dopodiché si considerano entrambe le equazioni del sistema (che corrispondono alle due righe del minore), quindi si mantengono a primo membro le incognite x_1, x_2 (che corrispondono alle colonne del minore) e si porta a secondo membro l'incognita x_3, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-x_3 \\ 2 & -1 & 1+4x_3 \end{array}\right)$$

che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 + 4x_3 \end{cases}$$

il quale può essere risolto con la regola di Cramer ottenendo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2-x_3 & 1 \\ 1+4x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2+x_3-1-4x_3}{-3} = \frac{-3-3x_3}{-3} = 1+x_3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-x_3 \\ 2 & 1+4x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1+4x_3-4+2x_3}{-3} = \frac{-3+6x_3}{-3} = 1-2x_3$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

per cui la soluzione del sistema è:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1+x_3 \\ 1-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in \mathbb{R}$$

Esempio 7.33 *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

per le quali si ha:

$$r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 2$$

per cui il sistema ammette soluzioni (come visto nell'Esempio 7.31 nel caso in cui $k = 2$, che è quello qui considerato). A questo punto si considera ad esempio il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

dopodiché si considerano le prime due equazioni del sistema (che corrispondono alle righe del minore), quindi si mantengono a primo membro le incognite x_1, x_2 (che corrispondono alle colonne del minore) e si porta a secondo membro l'incognita x_3, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 - x_3 \\ 1 & 1 & 1 - 3x_3 \end{array}\right)$$

che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_1 + x_2 = 1 - 3x_3 \end{cases}$$

il quale può essere risolto con la regola di Cramer ottenendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 - x_3 & 0 \\ 1 - 3x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - x_3}{1} = 1 - x_3 \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - x_3 \\ 1 & 1 - 3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 3x_3 - 1 + x_3}{1} = -2x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

per cui la soluzione del sistema è:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_3 \in \mathbb{R}$$

7.12. Sistemi lineari omogenei e struttura delle soluzioni di un sistema lineare

Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in cui $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ si dice omogeneo. Un sistema omogeneo è sempre possibile, in quanto ammette sempre la soluzione nulla $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Se poi $r = n$ (dove r è il rango della matrice A) tale soluzione è l'unica, mentre se $r < n$ vi sono infinite soluzioni (che dipendono da $n - r$ incognite libere).

Esempio 7.34 *Risolvere il sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per la quale il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

mentre i minori di ordine 3 che si ottengono "orlandolo" con le due colonne e la riga non utilizzate sono entrambi uguali a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

per cui il rango della matrice è $r = 2$. Solo due equazioni del sistema sono significative, e poiché il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è diverso da zero, il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ -3x_2 = 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + \frac{2}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = -x_3 + \frac{2}{3}x_4 \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

che possono anche essere rappresentate in forma vettoriale come:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Con riferimento ai sistemi lineari non omogenei, poi, si ha che se $\mathbf{x}^0$ è una soluzione particolare del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, allora ogni soluzione può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{z}$$

dove $\mathbf{z}$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Di conseguenza, tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono note se si conosce una soluzione del sistema e si conoscono tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio 7.35 *Risolvere il sistema lineare non omogeneo:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

La matrice A (la stessa dell'Esempio 7.34) ha rango 2, mentre dalla matrice $(A \mid \mathbf{b})$, attraverso il procedimento di riduzione, si ottiene:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\longrightarrow}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per cui anche essa ha rango 2. In questo caso quindi $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 2$ per cui il sistema è possibile, inoltre poiché $n = 4$ il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $n - r = 4 - 2 = 2$ incognite libere. In particolare, poiché il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne della matrice dei coefficienti è diverso da zero, il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 - 3x_3 + x_4 \\ -3x_2 = -4 + 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} - x_3 + \frac{2}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} - x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} - x_3 + \frac{2}{3}x_4 \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

che possono anche essere rappresentate in forma vettoriale come:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

e sono date dalla somma di una soluzione particolare del sistema non omogeneo (ottenuta ponendo $x_3 = x_4 = 0$) e dalla soluzione generale del sistema omogeneo associato (considerato nell'Esempio 7.34).

7.13. Esercizi da svolgere

Confrontare (se possibile) i vettori x e y:

1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dati i vettori x e y calcolare la loro somma, il loro prodotto scalare e il prodotto $2x$:

6) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

8) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

10) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcolare per quale valore del parametro $\alpha \in R$ i vettori x e y sono ortogonali. Posto $\alpha = 1$, poi, calcolare la norma dei vettori x e y e la distanza tra di essi:

11) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

12) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

13) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3\alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

14) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

15) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Stabilire se i vettori dati sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti:

16) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

17) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

18) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in R$ i vettori dati sono linearmente dipendenti e per quali valori sono linearmente indipendenti:

19) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

20) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

Date le matrici A e B, calcolare la loro somma e il prodotto $-2A$:

21) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

22) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

23) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

24) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

25) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Date le matrici A e B, calcolare il prodotto AB e il prodotto BA:

26) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

28) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

29) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

31) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

32) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

33) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

34) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

35) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcolare il rango delle seguenti matrici:

36) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

37) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

38) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

39) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

40) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Calcolare l'inversa (se esiste) delle seguenti matrici:

41) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

42) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

43) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

44) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

45) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

46) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

48) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi lineari non omogenei, esprimendo la soluzione come somma di una soluzione particolare del sistema non omogeneo e della soluzione generale del sistema omogeneo associato:

49) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$

50) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 11x_4 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 20 \end{cases}$

Capitolo 8

Funzioni di più variabili

8.1. Definizioni e dominio

Nei Capitoli precedenti sono state esaminate le funzioni reali di variabile reale, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x)$$

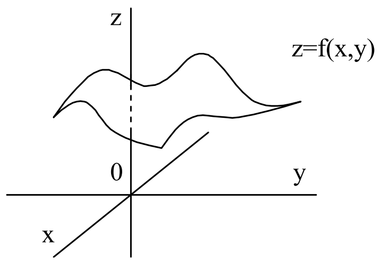
le quali sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e assumono valori in $\mathbb{R}$. A questo punto è possibile introdurre alcuni concetti relativi alle funzioni reali di più variabili reali, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

le quali sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e assumono valori in $\mathbb{R}$. In particolare, si possono prendere in esame funzioni reali di 2 variabili reali, cioè funzioni del tipo:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{e anche } y = f(x_1, x_2) \text{ oppure } z = f(x, y)$$

Come per le funzioni reali di variabile reale, anche per le funzioni reali di più variabili reali il punto di partenza è costituito dalla determinazione del dominio (o campo di esistenza). Valgono a questo proposito le stesse regole viste per le funzioni di una variabile (il denominatore di una frazione non può essere nullo, il radicando di una radice ad indice pari deve essere non negativo, l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo, la base di una potenza con base ed esponente variabili deve essere strettamente positiva), tenendo presente che in questo caso vi sono n variabili indipendenti. Considerando le funzioni di 2 variabili, inoltre, è possibile la rappresentazione grafica del dominio (che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, eventualmente coincidente con $\mathbb{R}^2$). Per queste funzioni è anche possibile una rappresentazione grafica delle funzioni stesse (nello spazio tridimensionale, cioè in $\mathbb{R}^3$, anche se in genere non è agevole individuare il grafico di una funzione di questo tipo), mentre ciò non è più possibile quando si considerano funzioni di n variabili con $n > 2$.



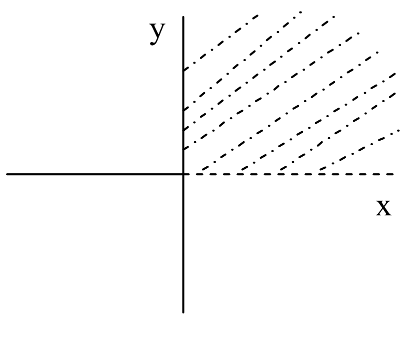
Esempio 8.1 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}}$$

In questo caso ogni radicando deve essere non negativo, quindi si deve avere $2x \geq 0$ (cioè $x \geq 0$) e $3y \geq 0$ (cioè $y \geq 0$), inoltre il denominatore della frazione deve essere diverso da 0 (il che accade quando $3y \neq 0$, cioè quando $y \neq 0$), per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y > 0\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che appartengono al primo quadrante, con l'esclusione di quelli che si trovano sul semiasse positivo delle ascisse.

Esempio 8.2 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{5x}{2y}}$$

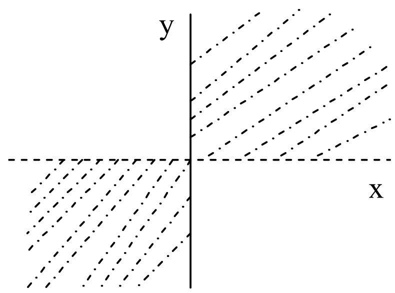
In questo caso il radicando deve essere non negativo, quindi si deve avere $\frac{5x}{2y} \geq 0$ (cioè $\frac{x}{y} \geq 0$), il che accade quando si ha:

$$(x \geq 0 \ \wedge \ y > 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge \ y < 0)$$

per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \geq 0\right\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \ \wedge \ y > 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge \ y < 0)\big\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che appartengono al primo e al terzo quadrante del piano cartesiano, con l'esclusione di quelli che si trovano sull'asse delle ascisse.

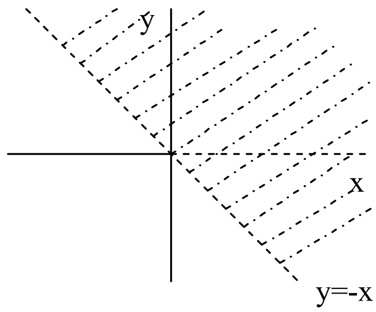
Esempio 8.3 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x,y) = \log(x+y)$$

In questo caso l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, quindi si deve avere $x+y > 0$, il che accade quando $y > -x$, per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\big\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che si trovano nel semipiano al di sopra della retta di equazione $y = -x$ (la bisettrice del secondo e del quarto quadrante), esclusi i punti che appartengono alla retta stessa.

Esempio 8.4 *Determinare il dominio della funzione:*

$$f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$$

In questo caso l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, quindi si deve avere $x^2 - y^2 > 0$, e perciò:

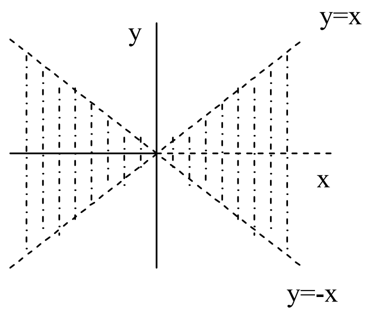
$$x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases} \vee \begin{cases} y > x \\ y < -x \end{cases}$$

per cui il dominio della funzione è dato da:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x < y < x) \;\; \vee \;\; (x < y < -x)\right\}$$

Graficamente questo insieme può essere rappresentato nel modo seguente:



ed è costituito da tutti i punti che sono compresi tra le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ (le bisettrici del primo e terzo e del secondo e quarto quadrante), esclusi i punti che appartengono alle rette stesse.

8.2. Derivate parziali, differenziale, piano tangente

Anche per le funzioni di più variabili è possibile introdurre le nozioni di derivata e differenziale, e poiché in questo caso si hanno più variabili indipendenti vi sono più derivate dello stesso ordine, che vengono dette derivate parziali.

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e dato un punto (x_0, y_0) interno a X, si definisce derivata parziale di f rispetto alla variabile x in (x_0, y_0) (e si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oppure con $f_x(x_0, y_0)$ oppure con $D_x f(x_0, y_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto (x_0, y_0) incrementando la sola variabile x, purché questo limite esista finito:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

In modo analogo si definisce derivata parziale di f rispetto alla variabile y in (x_0, y_0) (e si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oppure con $f_y(x_0, y_0)$ oppure con $D_y f(x_0, y_0)$) il limite del rapporto incrementale di f costruito a partire dal punto (x_0, y_0) incrementando la sola variabile y, purché questo limite esista finito:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se f è una funzione definita in un certo insieme e possiede derivate parziali prime in ogni punto (x, y) interno a tale insieme, inoltre, ad ogni coppia (x, y) è possibile associare le derivate parziali prime di f in quel punto, $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, ottenendo così due funzioni che prendono il nome di derivate parziali prime di f.

Si possono poi definire le derivate parziali seconde, costruite con un procedimento analogo a quello appena descritto, partendo dalle derivate parziali prime. Le derivate parziali seconde risultano essere 4 e vengono denotate con i simboli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

oppure:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \qquad f_{xy}(x_0, y_0) \qquad f_{yx}(x_0, y_0) \qquad f_{yy}(x_0, y_0)$$

o anche:

$$D_{xx}f(x_0, y_0) \qquad D_{xy}f(x_0, y_0) \qquad D_{yx}f(x_0, y_0) \qquad D_{yy}f(x_0, y_0)$$

dove f_{xx} e f_{yy} vengono dette derivate seconde pure (in particolare f_{xx} si ottiene partendo da f_x e derivandola ancora rispetto ad x, mentre f_{yy} si ottiene partendo da f_y e derivandola ancora rispetto a y), mentre f_{xy} e f_{yx} vengono dette derivate seconde miste (in particolare f_{xy} si ottiene partendo da f_x e derivandola rispetto a y, mentre f_{yx} si ottiene partendo da f_y e derivandola rispetto a x, inoltre se tali derivate sono continue si ha $f_{xy} = f_{yx}$, cioè l'ordine di derivazione è irrilevante).

Anche in questo caso se f è definita in un certo insieme e possiede derivate parziali seconde in ogni punto (x, y) interno a tale insieme si possono introdurre le funzioni derivate parziali seconde di f.

Le derivate parziali prime vengono raccolte in un vettore (riga) che prende il nome di gradiente della funzione f:

$$\triangledown f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

mentre le derivate parziali seconde vengono raccolte in una matrice (quadrata e simmetrica) che prende il nome di matrice hessiana della funzione f:

$$\triangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nella pratica, per il calcolo delle derivate parziali di una funzione di più variabili non si usa la definizione (come già si è visto per le derivate delle funzioni reali di variabile reale) ma si usano le regole valide per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile, tenendo presente che, quando si deriva rispetto ad una variabile, le altre variabili vanno considerate come costanti.

Esempio 8.5 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x, y) = 4x^2 y$$

e valutarli nel punto $P = (1, 0)$.

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono (tenendo presente che quando si deriva rispetto ad x la y va considerata come costante e quando si deriva rispetto ad y la x va considerata come costante):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y \cdot 2x = 8xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 \cdot 1 = 4x^2$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\triangledown f(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy & 4x^2 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\triangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 8y & 8x \\ 8x & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare, nel punto $P = (1, 0)$ il gradiente è:

$$\triangledown f(1, 0) = (0 \quad 4)$$

mentre la matrice hessiana è:

$$\triangledown^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 8.6 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x, y) = 3x^2(x - 2y)$$

e valutarli nel punto $P = (1, 2)$.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$f(x, y) = 3x^3 - 6x^2 y$$

dopodiché le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 12xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x - 12y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 12xy & -6x^2 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\bigtriangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x - 12y & -12x \\ -12x & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare, nel punto $P = (1, 2)$ il gradiente è:

$$\bigtriangledown f(1, 2) = (-15 \qquad -6)$$

mentre la matrice hessiana è:

$$\bigtriangledown^2 f(1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 8.7 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x, y) = 2x \log y + 3xy$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \log y + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y} + 3x$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{y} + 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y^2}$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \left(2 \log y + 3y \qquad \frac{2x}{y} + 3x \right)$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\bigtriangledown^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{y} + 3 \\ \\ \dfrac{2}{y} + 3 & -\dfrac{2x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Esempio 8.8 *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione:*

$$f(x, y) = x^y$$

In questo caso occorre innanzitutto riscrivere la funzione nel modo seguente:

$$f(x, y) = x^y = e^{y \log x}$$

dopodiché le derivate parziali prime della funzione sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \log x} \cdot \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \log x} \cdot \log x$$

e le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y\log x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x} \cdot e^{y\log x} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x^2} \cdot e^{y\log x} \cdot (y-1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{y\log x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x} \cdot e^{y\log x} \cdot \log x = \frac{1}{x} \cdot e^{y\log x} \cdot (1 + y\log x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \log x \cdot e^{y\log x} \cdot \log x = e^{y\log x} \cdot \log^2 x$$

Il gradiente della funzione è allora dato da:

$$\triangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} x^y \cdot \frac{y}{x} & x^y \cdot \log x \end{pmatrix}$$

mentre la matrice hessiana è data da:

$$\triangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} \cdot x^y \cdot (y-1) & \frac{1}{x} \cdot x^y \cdot (1 + y\log x) \\ \frac{1}{x} \cdot x^y \cdot (1 + y\log x) & x^y \cdot \log^2 x \end{pmatrix}$$

Come è stato visto nel Capitolo 5, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè $y = f(x)$, si dice che tale funzione è differenziabile in un punto x_0 interno ad X se si può scrivere:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R \qquad \text{per } x \to x_0$$

In questo caso, inoltre, l'espressione $f'(x_0)(x - x_0)$ viene detta differenziale della funzione nel punto x_0, indicato con:

$$dy = f'(x_0)dx$$

e, vicino al punto x_0, una buona approssimazione della funzione f è costituita dalla retta tangente alla funzione stessa in corrispondenza di x_0, la cui equazione è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

In modo analogo, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cioè $z = f(x,y)$, si dice che tale funzione è differenziabile in un punto (x_0, y_0) interno ad X se si può scrivere:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + R \qquad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

In questo caso, inoltre, l'espressione $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ viene detta differenziale totale della funzione nel punto (x_0, y_0), indicato con:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

mentre ciascuno dei due termini $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$ costituisce un differenziale parziale (il primo rispetto alla variabile x e il secondo rispetto alla variabile y). Vicino al punto (x_0, y_0), poi, una buona approssimazione della funzione f è costituita dal piano tangente alla funzione stessa in corrispondenza di (x_0, y_0), la cui equazione è:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Nel caso di una funzione di due (o più) variabili, inoltre, la nozione di derivabilità e quella di differenziabilità non sono equivalenti (come invece accade per le funzioni di una variabile). In particolare, la nozione di differenziabilità implica quella di derivabilità ma non vale necessariamente il viceversa, cioè se una funzione è differenziabile in un punto allora essa possiede derivate parziali in quel punto, mentre se possiede derivate parziali non è detto che sia differenziabile (se però tali derivate sono continue allora la differenziabilità è garantita).

Esempio 8.9 *Data la funzione:*

$$f(x, y) = 5 - 3x^2 - 2y^2$$

scrivere l'espressione del suo differenziale totale, valutarlo in corrispondenza del punto $P = (1, 2)$ e determinare l'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza di questo punto.

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y$$

e il differenziale totale di f è dato da:

$$dz = -6xdx - 4ydy$$

mentre in corrispondenza del punto $P = (1, 2)$ tale differenziale vale:

$$dz = -6dx - 8dy$$

L'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza del punto P, infine, è data da:

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

e poiché si ha:

$$f(1,2) = -6 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -6 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -8$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} z &= -6 - 6(x-1) - 8(y-2) = -6 - 6x + 6 - 8y + 16 = \\ &= 16 - 6x - 8y \end{aligned}$$

per cui l'equazione del piano tangente nel punto $P = (1,2)$ è $z = 16 - 6x - 8y$.

Esempio 8.10 *Data la funzione:*

$$f(x,y) = 3e^x + 2y^2$$

scrivere l'espressione del suo differenziale totale, valutarlo in corrispondenza del punto $P = (0,1)$ *e determinare l'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza di questo punto.*

In questo caso si ha innanzitutto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

e il differenziale totale di f è dato da:

$$dz = 3e^x dx + 4y dy$$

mentre in corrispondenza del punto $P = (0,1)$ tale differenziale vale:

$$dz = 3dx + 4dy$$

L'equazione del piano tangente alla funzione in corrispondenza dal punto P, infine, è data da:

$$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$$

e poiché si ha:

$$f(0,1) = 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 4$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} z &= 5 + 3(x - 0) + 4(y - 1) = 5 + 3x + 4y - 4 = \\ &= 1 + 3x + 4y \end{aligned}$$

per cui l'equazione del piano tangente nel punto $P = (0, 1)$ è $z = 1 + 3x + 4y$.

8.3. Massimi e minimi liberi

Con riferimento alle funzioni di più variabili un problema di notevole interesse è costituito dall'individuazione di eventuali estremanti (massimi e minimi). In particolare è possibile prendere in esame, relativamente ad una funzione di 2 variabili, la ricerca di massimi e minimi liberi (cioè senza tenere conto di alcun vincolo). A questo proposito, data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile su X, con (x_0, y_0) punto interno a X, valgono i seguenti risultati:

(a) Condizioni necessarie

$$(x_0, y_0) \text{ punto di massimo relativo} \Rightarrow \bigtriangledown f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

$$(x_0, y_0) \text{ punto di minimo relativo} \Rightarrow \bigtriangledown f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su X, con derivate parziali seconde continue in un punto (x_0, y_0) interno ad X, valgono poi i seguenti risultati (dove (x_0, y_0) è un punto stazionario, cioè tale che $\bigtriangledown f\,(x_0, y_0) = \mathbf{0}$):

(b) Condizioni sufficienti

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \\ \\ \det \bigtriangledown^2 f(x_0, y_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \\ \\ \det \bigtriangledown^2 f(x_0, y_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di minimo relativo}$$

$$\det \bigtriangledown^2 f(x_0, y_0) < 0 \ \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di sella}$$

dove $\det \bigtriangledown^2 f(x,y)$ è il determinante della matrice hessiana della funzione f:

$$\bigtriangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

che è definito dall'espressione:

$$\det \bigtriangledown^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

costituita dalla differenza tra il prodotto dei due termini che si trovano sulla diagonale principale e il prodotto dei due termini che si trovano sulla diagonale secondaria.

In pratica, per individuare la presenza di eventuali massimi o minimi liberi di una funzione di 2 variabili si cercano innanzitutto i punti che annullano il gradiente della funzione stessa (e che prendono il nome di punti stazionari), dopodiché si calcolano, in corrispondenza di questi punti, la derivata seconda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e il determinante della matrice hessiana. Se la successione dei segni di queste due quantità è $-$, $+$ si può concludere che ci si trova in presenza di un massimo relativo, se invece è $+$, $+$ si ha un minimo relativo, mentre se il determinante è negativo (indipendentemente dal segno di $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$) si ha un punto di sella (cioè un punto che è un massimo rispetto ad una delle due variabili ed un minimo rispetto all'altra). Nel caso in cui il determinante della matrice hessiana sia uguale a 0 (indipendentemente dal segno di $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$), infine, non si può concludere nulla con certezza.

Esempio 8.11 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$$

In questo caso si ha innanzitutto che le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ \\ 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui $A = (0, 0)$ rappresenta l'unico punto stazionario per la funzione in esame.

A questo punto per stabilire la natura del punto stazionario occorre utilizzare le condizioni sufficienti, a questo proposito si ha innanzitutto che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Questa è anche la matrice hessiana nel punto $A = (0, 0)$, e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 6 \qquad \det \nabla^2 f(0, 0) = 48$$

il punto $A = (0, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione (mentre non vi sono massimi relativi).

Esempio 8.12 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 4x + y$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y + 1$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

per cui $A = (-2, -1)$ e $B = (2, -1)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = (-2, -1)$ tale matrice è:

$$\bigtriangledown^2 f\,(-2,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-2,-1) = -4 \qquad\qquad \det \bigtriangledown^2 f\,(-2,-1) = -4$$

il punto $A = (-2, -1)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = (2, -1)$ la matrice hessiana invece è:

$$\bigtriangledown^2 f\,(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(2,-1) = 4 \qquad\qquad \det \bigtriangledown^2 f\,(2,-1) = 4$$

il punto $B = (2, -1)$ è un punto di minimo relativo. In conclusione, la funzione ha un minimo relativo e una sella, mentre non ha massimi relativi.

Esempio 8.13 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x, y) = -x^3 - y^2 - xy$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 - y = 0 \\ \\ -2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 - y = 0 \\ \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \\ \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(-3x + \frac{1}{2}) = 0 \\ \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ \\ y = -\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

per cui $A = (0, 0)$ e $B = \left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = (0,0)$ tale matrice è:

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \qquad \det \nabla^2 f(0,0) = -1$$

il punto $A = (0,0)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ la matrice hessiana invece è:

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = -1 \qquad \det \nabla^2 f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1$$

il punto $B = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ è un punto di massimo relativo. In conclusione, la funzione ha un massimo relativo e una sella, mentre non ha minimi relativi.

Esempio 8.14 *Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione:*

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - y^3 + 3y$$

In questo caso le derivate parziali prime della funzione sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3$$

e utilizzando le condizioni necessarie si ottiene:

$$\triangledown f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \\ -3y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ \\ y = 1 \end{cases}$$

per cui $A = (-2, -1)$, $B = (-2, 1)$, $C = (2, -1)$ e $D = (2, 1)$ sono i punti stazionari per la funzione in esame.

Si ha poi che le derivate parziali seconde della funzione sono date da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

per cui la matrice hessiana è:

$$\triangledown^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

Nel punto $A = (-2, -1)$ tale matrice è:

$$\triangledown^2 f\,(-2,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-2,-1) = -4 \qquad \det \triangledown^2 f\,(-2,-1) = -24$$

il punto $A = (-2, -1)$ è un punto di sella.

Nel punto $B = (-2, 1)$ la matrice hessiana invece è:

$$\triangledown^2 f\,(-2,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-2,1) = -4 \qquad \det \triangledown^2 f(-2,1) = 24$$

il punto $B = (-2, 1)$ è un punto di massimo relativo.

Nel punto $C = (2, -1)$ la matrice hessiana è:

$$\triangledown^2 f\,(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 4 \qquad\qquad \det \nabla^2 f(2,-1) = 24$$

il punto $C = (2,-1)$ è un punto di minimo relativo.

Nel punto $D = (2,1)$ infine la matrice hessiana è:

$$\nabla^2 f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

e poiché si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 4 \qquad\qquad \det \nabla^2 f(2,1) = -24$$

il punto $D = (2,1)$ è un punto di sella. In conclusione, la funzione ha un minimo relativo, un massimo relativo e due selle.

8.4. Esercizi da svolgere

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

2) $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$

3) $f(x,y) = \log(xy)$

4) $f(x,y) = \log x \cdot \log y$

5) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\log(xy)}$

6) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} + \sqrt{x^2+y^2}$

7) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

8) $f(x,y) = \log \sqrt{\dfrac{x^2}{y}}$

9) $f(x,y) = \log \sqrt{xy^2}$

10) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

11) $f(x,y) = e^{\log\left(x^2+y^2\right)}$

12) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2y}$

13) $f(x,y) = \log\left(x^2+y^2+1\right)$

14) $f(x,y) = \dfrac{\log(xy)}{xy}$

15) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x+y}}$

Determinare il gradiente e la matrice hessiana delle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ *indicato:*

16) $f(x,y) = \log(x+y) \quad \text{con } P = (1,0)$

17) $f(x,y) = e^{x+y} + xy + y^2 \quad \text{con } P = (1,-1)$

18) $f(x,y) = \dfrac{6}{x} + xy \quad \text{con } P = (1,0)$

19) $f(x,y) = e^{x^2+y} \quad \text{con } P = (1,-1)$

20) $f(x,y) = e^x + e^y \quad \text{con } P = (1,1)$

21) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} \quad \text{con } P = (0,0)$

22) $f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad \text{con } P = (2,2)$

23) $f(x,y) = \log\left(e^x + y^2\right) \quad \text{con } P = (0,0)$

24) $f(x,y) = y^{\log x} \quad \text{con } P = (1,1)$

25) $f(x,y) = 3x^2y - 5xy^2 \quad \text{con } P = (1,0)$

Determinare il differenziale totale delle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ indicato:

26) $f(x,y) = e^x + 2y \quad \text{con } P = (0,1)$

27) $f(x,y) = \log(xy) + e^{x+y} \quad \text{con } P = (2,-2)$

28) $f(x,y) = e^x + e^y \quad \text{con } P = (0,1)$

29) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{con } P = (3,4)$

30) $f(x,y) = e^{x^2+y} \quad \text{con } P = (1,-1)$

31) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x+y}} \quad \text{con } P = (2,2)$

32) $f(x,y) = \log\sqrt{xy^2} \quad \text{con } P = (3,2)$

Determinare l'equazione del piano tangente alle seguenti funzioni nel punto $P = (x_0, y_0)$ indicato:

33) $f(x,y) = e^x + y^2 \quad \text{con } P = (0,-1)$

34) $f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad \text{con } P = (1,3)$

35) $f(x,y) = e^x + y^3 \quad \text{con } P = (0,1)$

36) $f(x,y) = e^x + e^y \quad \text{con } P = (0,0)$

37) $f(x,y) = e^{x+y^2} \quad \text{con } P = (-1,1)$

38) $f(x,y) = \log(xy) \quad \text{con } P = (1,1)$

39) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{con } P = (3,4)$

40) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y} \quad \text{con } P = (1,0)$

Determinare eventuali massimi e minimi delle seguenti funzioni:

41) $f(x, y) = x^3 - 12x - y^2$

42) $f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + y^3 - xy$

43) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - y$

44) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4y^2 + 1$

45) $f(x, y) = \left(x^2 - 1\right)(y - 1)$

46) $f(x, y) = xe^x + y^2$

47) $f(x, y) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$

48) $f(x, y) = x^3 - 6x - y^2$

49) $f(x, y) = \log(1 + x + y) - 5x - y^2$

50) $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2$

Capitolo 9

Soluzioni degli esercizi

9.1. Esercizi Capitolo 1

1) $x < -1$

2) $x \geq -7$

3) $x < -7 \quad \vee \quad x > 3$

4) $0 \leq x \leq 5$

5) $x \neq 3$

6) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

7) $-\dfrac{1}{2} \leq x < 3$

8) $x > 0$

9) $x > 0$

10) $x \leq -5 \quad \vee \quad x = 3$

11) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

12) $-6 \leq x < \dfrac{7}{2}$

13) $-1 < x < 1$

14) $3 < x \leq 5$

15) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

16) ogni valore di $x \in \mathbb{R}$

17) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

18) $x \neq 2$

19) ogni valore di $x \in \mathbb{R}$

20) $x > 0$

21) $x > 1$

22) $x \geq 2$

23) nessun valore di $x \in \mathbb{R}$

24) $x > 4$

25) $-5 \leq x < 4$

26) $x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

27) ogni valore di $x \in \mathbb{R}$

28) $x \neq 0$

29) $x \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{2}$

30) $x \geq -1$

31) $-2 < x < 7$

32) $x > -\dfrac{17}{9}$

33) $-\dfrac{\sqrt{71}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{71}}{3}$

34) $-\dfrac{\sqrt{111}}{4} < x < \dfrac{\sqrt{111}}{4}$

35) $x < -3 \quad \vee \quad x > 3$

36) $x < -2 \quad \vee \quad x > 2$

37) $-2 < x < 2$

38) $x < -1 \quad \vee \quad x > 1$

39) $1 < x \leq 10$

40) $x \geq -5$

41) $-3 < x \leq e^2 - 3$

42) $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4$

43) $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 3$

44) $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4$

45) $0 \leq x \leq 4$

46) $x \leq -4 \quad \vee \quad x \geq 4$

47) $-2 < x < 2$

48) $x < 0$

49) $x \geq \dfrac{\log 4 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$

50) $x < -\dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3}$

9.2. Esercizi Capitolo 2

1) $A \cup B = \{0, 1, 2\} \quad A \cap B = \{1\} \quad A \setminus B = \{0\} \quad B \setminus A = \{2\}$

2) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \quad A \cap B = \emptyset \quad A \setminus B = \{0, 1\} \quad B \setminus A = \{2, 3\}$

3) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad A \cap B = \{3\} \quad A \setminus B = \{1, 5\} \quad B \setminus A = \{2, 4\}$

4) $(-3, 5)$

5) $(-8, 5]$

6) $(-3, 7)$

7) $\emptyset$

8) $(-\infty, 1) \cup (8, +\infty)$

9) $\emptyset$

10) $\{0\}$

11) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

12) $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

13) $\mathbb{R}$

14) $A{\times}B = \{(0,0), (0,-1), (1,0), (1,-1)\}$ e $B{\times}A = \{(0,0), (0,1), (-1,0), (-1,1)\}$

15) $A{\times}B = \{(-1,0), (-1,1), (1,0), (1,1)\}$ e $B{\times}A = \{(0,-1), (0,1), (1,-1), (1,1)\}$

16) $A \times B = \{(0,-1), (0,2), (0,3), (1,-1), (1,2), (1,3)\}$ e $B \times A = \{(-1,0), (-1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}$

17) $X = (-1, 2]$, $\max = 2$, $\min \nexists$, $\sup = 2$, $\inf = -1$, i punti interni sono quelli di $(-1, 2)$, i punti esterni sono quelli di $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-1, 2\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $[-1, 2]$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è limitato.

18) $X = (-4, -3)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = -3$, $\inf = -4$, i punti interni sono quelli di $(-4, -3)$, i punti esterni sono quelli di $(-\infty, -4) \cup (-3, +\infty)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-4, -3\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $[-4, -3]$, l'insieme è aperto ed è limitato.

19) $X = [-5, 3] \cup [4, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min = -5$, $\sup = +\infty$, $\inf = -5$, i punti interni sono quelli di $(-5, 3) \cup (4, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-\infty, -5) \cup (3, 4)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-5, 3, 4\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $[-5, 3] \cup [4, +\infty)$, l'insieme è chiuso ed è illimitato (superiormente).

20) $X = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, i punti interni sono quelli di $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-2, 2)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-2, 2\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è illimitato.

21) $X = (-\infty, -3) \cup [-2, -1] \cup (0, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, i punti interni sono quelli di $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-3, -2) \cup (-1, 0)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-3, -2, -1, 0\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $(-\infty, -3] \cup [-2, -1] \cup [0, +\infty)$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è illimitato.

22) $X = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, i punti interni sono quelli di $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-2, 2)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-2, 2\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, l'insieme è chiuso ed è illimitato.

23) $X = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, i punti interni sono quelli di $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-1, 1)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-1, 1\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è illimitato.

24) $X = (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$, $\max \nexists$, $\min \nexists$, $\sup = +\infty$, $\inf = -\infty$, i punti interni sono quelli di $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, i punti esterni sono quelli di $(-2, 3)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-2, 3\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è illimitato.

25) $X = (-2, 3] \cup \{4\}$, $\max = 4$, $\min \nexists$, $\sup = 4$, $\inf = -2$, i punti interni sono quelli di $(-2, 3)$, i punti esterni sono quelli di $(-\infty, -2) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$, i punti di frontiera sono quelli di $\{-2, 3, 4\}$, i punti di accumulazione sono quelli di $[-2, 3]$, il punto isolato è $\{4\}$, l'insieme non è né aperto né chiuso ed è limitato.

26) La tavola di verità di $\sim p \wedge q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

27) La tavola di verità di $\sim (\sim p \wedge q)$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

28) La tavola di verità di $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ è data da:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim (p \Rightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

29) La tavola di verità di $\sim p \Rightarrow \sim q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

30) La tavola di verità di $p \Leftrightarrow \sim q$ è data da:

p	q	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

31) La tavola di verità di $\sim p \Rightarrow q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

32) La tavola di verità di $\sim q \Rightarrow p$ è data da:

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

33) La tavola di verità di $q \Rightarrow p$ è data da:

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

34) La tavola di verità di $\sim p \vee \sim q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

35) La tavola di verità di $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

36) La tavola di verità di $p \Leftrightarrow q$ è data da:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

37) La tavola di verità di $p \Rightarrow \sim q$ è data da:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

38) La tavola di verità di $\sim p \Leftrightarrow q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

39) La tavola di verità di $p \wedge \sim q$ è data da:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

40) La tavola di verità di $\sim q \Rightarrow \sim p$ è data da:

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

41) La tavola di verità di $[(p \vee \sim p) \wedge p] \vee q$ è data da:

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$(p \vee \sim p) \wedge p$	$[(p \vee \sim p) \wedge p] \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F

42) Le tavole di verità di $p \Rightarrow q$ e di $\sim p \vee q$ sono:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

43) Le tavole di verità di $p \Leftrightarrow q$ e di $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sono:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

44) Le tavole di verità di $\sim (p \vee q)$ e di $(\sim p) \wedge (\sim q)$ sono:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

45) Le tavole di verità di $\sim (p \wedge q)$ e di $(\sim p) \vee (\sim q)$ sono:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

46) La tavola di verità di $\sim (p \wedge \sim p)$ è:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

47) La tavola di verità di $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ è:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

48) La tavola di verità di $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ è:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

49) La tavola di verità di $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ è:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

50) La tavola di verità di $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ è:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

9.3. Esercizi Capitolo 3

1) $D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

2) $D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$

3) $D = \mathbb{R}$

4) $D = [2, +\infty)$

5) $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

6) $D = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$

7) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

8) $D = \emptyset$ (insieme vuoto)

9) $D = (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

10) $D = (0, 2]$

11) $D = (-\log 4, +\infty)$

12) $D = (0, +\infty)$

13) $D = [e, +\infty)$

14) $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

15) $D = (4, +\infty)$

16) $D = \left[-5, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

17) $D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

18) $D = (1, +\infty)$

19) $D = [0, 4) \cup (4, +\infty)$

20) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

21) f interseca l'asse x nel punto $(e^3, 0)$ mentre non interseca l'asse y, inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \in D = (0, +\infty)$.

22) f non interseca l'asse x mentre interseca l'asse y nel punto $(0, e^2)$, inoltre $f(x) > 0\ \forall x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

23) f interseca l'asse x nei punti $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 4)$, inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \in D = \mathbb{R}$.

24) f non interseca l'asse x mentre interseca l'asse y nel punto $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, inoltre $f(x) < 0$ per $x < -2$ e $f(x) > 0$ per $x > -2$ (tenendo presente che il dominio è dato da $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$).

25) f interseca l'asse x nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e l'asse y nel punto $(0, 3)$, inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \in D = \mathbb{R}$.

26) f interseca l'asse x nel punto $(1, 0)$ mentre non interseca l'asse y, inoltre $f(x) < 0$ per $0 < x < 1$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$ (tenendo presente che il dominio è dato da $D = (0, +\infty)$).

27) f interseca l'asse x nel punto $(3,0)$ mentre non interseca l'asse y, inoltre $f(x)>0$ per $x<-2$ e per $x>3$ e $f(x)<0$ per $\frac{1}{2}<x<3$ (tenendo presente che il dominio è dato da $D=(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$).

28) f è dispari.

29) f è pari.

30) f è dispari.

31) f è dispari.

32) f è pari.

33) f non è né pari né dispari.

34) $g\circ f=g(f(x))=x$ mentre $f\circ g=f(g(t))=t$.

35) $g\circ f=g(f(x))=\sqrt[3]{x^3+2}$ mentre $f\circ g=f(g(t))=t+2$.

36) $g\circ f=g(f(x))=e^{\log x+3}=xe^3$ per $x>0$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\log e^{t+3}=t+3$.

37) $g\circ f=g(f(x))=|\log x-2|$ per $x>0$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\log|t-2|$ $\forall t\neq 2$.

38) $g\circ f=g(f(x))=e^{\log(x+1)}=x+1$ per $x>-1$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\log(e^t+1)$.

39) $g\circ f=g(f(x))=\sqrt{\log(x+1)}$ per $x\geq 0$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\log\left(\sqrt{t}+1\right)$ per $t\geq 0$.

40) $g\circ f=g(f(x))=\sqrt{\log x-2}$ per $x\geq e^2$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\log\sqrt{t}-2$ per $t>0$.

41) $g\circ f=g(f(x))=\sqrt{|x-1|}$ mentre $f\circ g=f(g(t))=\left|\sqrt{t}-1\right|$ per $t\geq 0$.

42) $g\circ f=g(f(x))=xe$ per $x>0$ mentre $f\circ g=f(g(t))=t+1$.

43) $g\circ f=g(f(x))=x+2$ mentre $f\circ g=f(g(t))=te^2$ per $t>0$.

44) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

45) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3}$

46) $f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad \text{per } x \geq 0$

47) L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0)$ è $f^{-1}(x) = -e^x$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$ è $f^{-1}(x) = e^x$.

48) $$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_2 x & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

49) $$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{se} \quad x < -1 \\ \sqrt[3]{e^x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

50) L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, -3]$ è $f^{-1}(x) = -x^2$ se $x \geq \sqrt{3}$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $(-3, 3)$ è $f^{-1}(x) = x - 3$ se $0 < x < 6$. L'inversa della restrizione di f all'intervallo $[3, +\infty)$ è $f^{-1}(x) = e^x$ se $x \geq \log 3$.

9.4. Esercizi Capitolo 4

1) $\frac{1}{2}$

2) 5

3) 0^+

4) 0

5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

6) 2

7) 1

8) $+\infty$

9) 0^-

10) $\frac{1}{2}$

11) 2

12) 0

13) e

14) $\frac{1}{e}$

15) 3

16) 0

17) 2

18) 0^+

19) $+\infty$

20) 2

21) -2

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 2$ e asintoto verticale $x = 1$.

27) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 1$ e asintoto verticale $x = 1$.

28) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 1$ e asintoto verticale $x = 3$.

29) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$) $y = 0$ e asintoto verticale $x = 1$.

30) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (sinistro) $y = 0$ e asintoto verticale $x = 2$.

31) $f(x)$ ammette asintoto verticale $x = -3$ e asintoto obliquo $y = x + 2$.

32) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) $y = 0$ e asintoto obliquo (per $x \to -\infty$) $y = -2x$.

33) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale (sinistro) $y = 0$.

34) $f(x)$ ammette asintoto verticale (sinistro) $x = 0$ e asintoto obliquo $y = x - 2$.

35) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = e$ e asintoto verticale (sinistro) $x = 1$.

36) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = e$ e asintoto verticale (sinistro) $x = 1$.

37) $f(x)$ ammette asintoto verticale $x = -3$ e asintoto obliquo $y = x - 1$.

38) $f(x)$ ammette asintoto verticale $x = -1$ e asintoto obliquo $y = x + 2$.

39) $f(x)$ ammette asintoti verticali $x = -1$ e $x = 1$ e asintoto obliquo $y = x + 2$.

40) $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoti verticali $x = -2$ e $x = 0$.

41) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = 0$.

42) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = \beta$.

43) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore reale di α e per $\beta = 1$.

44) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore reale di α.

45) $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ per qualsiasi valore reale di α, ma non è continua in $x = 1$ per nessun valore reale di α.

46) $f(x)$ è continua su tutto R per $\alpha = -3$.

47) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore reale di α.

48) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = -3$.

49) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per nessun valore reale di α.

50) $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha = \mp 1$.

9.5. Esercizi Capitolo 5

1) $f'(x) = \dfrac{4-x}{x(2-x)}$

2) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

3) $f'(x) = \dfrac{1}{x\left[1+\log(3x)\right]^2}$

4) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{\log x}}}{2x\sqrt{\log x}}$

5) $f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{\log(x^2+1)}}$

6) $f'(x) = -\dfrac{e^{\sqrt{\cos x}}\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

7) $f'(x) = e^{-2x}\dfrac{1-6x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

8) $f'(x) = \dfrac{6x^2-8x+12}{(6x-4)^2}$

9) $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

10) $f'(x) = e^{\sqrt{\sin x}}\left(\dfrac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}+1\right)$

11) $f'(x) = \dfrac{3e^{\frac{4-x}{1-x}}}{(1-x)^2}$

12) $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

13) $f'(x) = e^{\sin x}(1+x\cos x)$

14) $f'(x) = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{1+x}}$

15) $f'(x) = (xe^x)^x \left[x + 1 + \log(xe^x)\right]$

16) $D\left[f^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right)\right] = \dfrac{1}{2}e$

17) $D\left[f^{-1}(\log 3)\right] = -\dfrac{3}{2}$

18) $D\left[f^{-1}(e)\right] = \dfrac{2}{e}$

19) $D\left[f^{-1}(e)\right] = \dfrac{1}{2e}$

20) $D\left[f^{-1}\left(e^3\right)\right] = \dfrac{1}{2e^3}$

21) $y = 6x + 1$

22) $y = x + 2$

23) $y = 6x - 1$

24) $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

25) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

26) $y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}$

27) $y = 2x + 1$

28) $y = 4x - 3$

29) f è continua e derivabile $\forall x \neq 1$, inoltre è continua e derivabile anche in $x = 1$ se $\alpha = 2$.

30) f è continua e derivabile $\forall x \neq 1$, inoltre è continua e derivabile anche in $x = 1$ se $\alpha = \beta$.

31) f è continua e derivabile $\forall x \neq 0$, inoltre è continua anche in $x = 0$ se $\beta = 3$ ed è derivabile anche in $x = 0$ se $\alpha = -2$ e $\beta = 3$.

32) $f(x) = e - \dfrac{e}{2}x^2 + o(x^3)$

33) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

34) $f(x) = -\dfrac{e}{2} + \dfrac{e}{2}x^2 + o((x-1)^2)$

35) $f(x) = 1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

36) $f(x) = 1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

37) f è strettamente crescente sugli intervalli $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ e $(1, +\infty)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$, inoltre ha un massimo in $x = \dfrac{1}{3}$ e un minimo in $x = 1$.

38) f è strettamente crescente sull'intervallo $[1, 2]$, inoltre ha un minimo in $x = 1$ e un massimo in $x = 2$.

39) f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, 1]$, inoltre ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = 1$.

40) f è strettamente crescente sull'intervallo $[2, 4]$, inoltre ha un minimo in $x = 2$ e un massimo in $x = 4$.

41) f è strettamente crescente sull'intervallo $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$, inoltre ha un massimo in $x = \dfrac{1}{4}$ e un minimo in $x = 0$ e in $x = 1$.

42) f è strettamente crescente sull'intervallo $(1, 2]$, inoltre ha un massimo in $x = 2$ mentre non ha minimo.

43) f è strettamente crescente sul proprio dominio $(0, +\infty)$, inoltre non ha né minimo né massimo.

44) f è strettamente convessa sugli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$ e strettamente concava sull'intervallo $(-1, 0)$, inoltre ha un flesso in $x = -1$ e in $x = 0$.

45) f è strettamente concava sull'intervallo $(-\infty, -3)$ e strettamente convessa sull'intervallo $(-3, +\infty)$, inoltre in questo caso il punto $x = -3$ non è un flesso (perché qui la funzione non è definita).

46) f è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

47) f è strettamente concava sull'intervallo $(-\infty, -2)$ e strettamente convessa sull'intervallo $(-2, +\infty)$, inoltre ha un flesso in $x = -2$.

48) f è strettamente convessa sugli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e strettamente concava sull'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, inoltre ha un flesso in $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

49) Si ha in questo caso:

$$f(x) = e^{-x^2 + \log x + 2} = xe^{-x^2+2}$$

- Dominio della funzione

Deve essere $x > 0$, quindi il dominio è:

$$D = (0, +\infty)$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

Si ha $f(x) > 0 \ \ \forall x \in D$, inoltre non vi sono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione non presenta simmetrie.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{-x^2+2} = 0^+$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2-2}} = 0^+$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima è:

$$f'(x) = -2x^2 e^{-x^2+2} + e^{-x^2+2} = \left(-2x^2 + 1\right) e^{-x^2+2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello di $\left(-2x^2 + 1\right)$, si ha allora:

$$f'(x) < 0 \qquad \text{per} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e il punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di massimo assoluto.

- Derivata seconda, concavità, flessi

La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda è:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2x(-2x^2 + 1)e^{-x^2+2} - 4xe^{-x^2+2} = \\ &= 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2+2} \end{aligned}$$

Il segno di $f''(x)$ dipende solo da quello di $\left(2x^2 - 3\right)$, si ha allora:

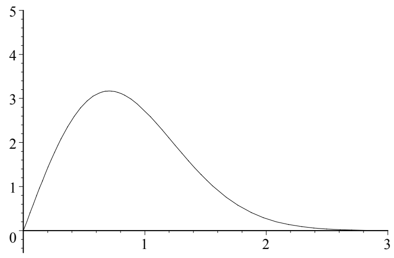
$$f''(x) < 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad x > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

per cui $f(x)$ è strettamente concava sull'intervallo $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e strettamente convessa sull'intervallo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ e il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di flesso.

- Grafico della funzione



50) Si ha in questo caso:

$$f(x) = \frac{e^{|x|-3}}{x}$$

- Dominio della funzione

Deve essere $x \neq 0$, quindi il dominio è:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Segno della funzione, intersezioni con gli assi, simmetrie

È possibile innanzitutto osservare che vale:

$$f(-x) = \frac{e^{|-x|-3}}{-x} = -\frac{e^{|x|-3}}{x} = -f(x)$$

per cui $f(x)$ è dispari. È allora sufficiente studiarla per $x > 0$ (in quanto il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine), dove $f(x) = \dfrac{e^{x-3}}{x}$. Si ha $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ e non vi sono intersezioni con gli assi cartesiani.

- Comportamento alla frontiera e asintoti

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x-3}}{x} = +\infty$$

per cui $x = 0$ è un asintoto verticale, inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = +\infty$$

e poi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2} = +\infty$$

per cui non vi sono asintoti obliqui.

- Derivata prima, monotonia, estremi locali

  La funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in D$ e la derivata prima (per $x > 0$) è:

$$f'(x) = \frac{xe^{x-3} - e^{x-3}}{x^2} = \frac{e^{x-3}(x-1)}{x^2}$$

  Il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello di $x-1$, si ha allora (sull'intervallo $(0, +\infty)$):

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

per cui $f(x)$ è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, 1)$ e strettamente crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$, inoltre $x = 1$ è un punto di minimo relativo (e quindi $x = -1$ è un punto di massimo relativo).

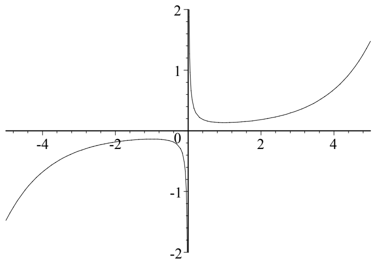
- Derivata seconda, concavità, flessi

  La funzione $f(x)$ è derivabile due volte $\forall x \in D$ e la derivata seconda (per $x > 0$) è:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2\left[e^{x-3} + e^{x-3}(x-1)\right] - 2xe^{x-3}(x-1)}{x^4} = \frac{xe^{x-3}(x^2 - 2x + 2)}{x^4} = \\ &= \frac{e^{x-3}(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

per la quale si ha (sull'intervallo $(0, +\infty)$) $f''(x) > 0$ per $x > 0$, per cui $f(x)$ è strettamente convessa sull'intervallo $(0, +\infty)$.

- Grafico della funzione



9.6. Esercizi Capitolo 6

1) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

2) $x^2 + 2x\sqrt{x} - 4\log|x| + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 10\sqrt{x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

4) $-e^{\cos x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

5) $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

6) $\frac{1}{4}x^2\left(2\log x - 1\right) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

7) $\frac{1}{2}\log^2 x + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

8) $\frac{1}{3}\log^3 x + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

9) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

10) $-\frac{2}{3}\left(1 - x\right)\sqrt{1 - x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

11) $x + \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

12) $e^{-x}(-x-2)+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

13) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

14) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

15) $\frac{1}{2}x^2-\cos x+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

16) $e^{2x}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

17) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

18) $\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

19) $\log\left|x^3+1\right|+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

20) $-e^{1-x}+c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$

21) $F(x)=x^3+x^2+5x+6$

22) $F(x)=\sin x+\frac{1}{2}x^2+x^3+1$

23) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\log|x|+\frac{1}{3}$

24) $F(x)=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x-1$

25) $F(x)=2e^{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}-3-2e$

26) $F(x)=\log\left|x^2-x-1\right|-1$

27) $F(x)=e^{\sin x}+1$

28) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-3}-\frac{1}{2}e^{-1}$

29) $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}\,(\sqrt{x} - 1) + 3$

30) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$

31) $e - 1$

32) $\frac{1}{3}$

33) $\frac{2}{3}$

34) $2\,(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

35) $\log 10$

36) $\frac{1}{2}\log 2$

37) $\log 9$

38) $\frac{7}{6}$

39) 1

40) $\frac{e^5(\sin 5 - \cos 5) + 1}{2}$

41) $\frac{1}{2} + \sin 1$

42) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

43) e^2

44) $\frac{9}{4}$

45) $2\log 2 - \frac{3}{4}$

46) $e - 1$

47) $\log 12 - 1$

48) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{8}{3}$

49) $\dfrac{7}{2}$

50) $2 + \log 2$

9.7. Esercizi Capitolo 7

1) $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$

2) $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$

3) $\mathbf{x} > \mathbf{y}$

4) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono confrontabili.

5) $\mathbf{x} < \mathbf{y}$

6) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -2 \quad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0 \quad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

8) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0 \quad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -4 \quad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

10) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = -10 \quad 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

11) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = -\dfrac{6}{5}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{5}$, $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{34}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{17}$.

12) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{14}$, $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{5}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{19}$.

13) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -\dfrac{1}{3}$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{14}$, $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{8}$.

14) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non sono mai ortogonali; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{6}$, $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{2}$.

15) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali per $\alpha = 0$; per $\alpha = 1$ si ha $\| \mathbf{x} \| = 1$, $\| \mathbf{y} \| = \sqrt{2}$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$.

16) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

17) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti.

18) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

19) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti per $\alpha = 2$ e linearmente indipendenti per $\alpha \neq 2$.

20) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti per $\alpha = 0$ e linearmente indipendenti per $\alpha \neq 0$.

21) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

22) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

23) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

24) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

25) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad -2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

26) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

27) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

28) $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 31 \\ 11 & 3 & 40 \end{pmatrix}$ $\qquad BA$ non esiste

29) AB non esiste $\qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

30) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

31) $\det A = 0$, cioè la matrice è singolare.

32) $\det A = 6\alpha + 8$, in particolare la matrice è singolare per $\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

33) $\det A = 0$, cioè la matrice è singolare.

34) $\det A = 2 - 3\alpha$, in particolare la matrice è singolare per $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

35) $\det A = -56$

36) $r(A) = 1$

37) $r(A) = 2$

38) se $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ allora $r(A) = 1$, mentre se $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $r(A) = 2$.

39) $r(A) = 2$

40) se $\alpha = \dfrac{2}{3}$ allora $r(A) = 2$, mentre se $\alpha \neq \dfrac{2}{3}$ allora $r(A) = 3$.

41) $\det A = -1$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

42) $\det A = 0$ per cui A non è invertibile.

43) $\det A = 9$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

44) $\det A = 0$ per cui A non è invertibile.

45) $\det A = 128$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & \frac{4}{32} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{32} & -\frac{4}{32} \\ \frac{1}{32} & \frac{7}{32} & \frac{4}{32} \end{pmatrix}$

46) $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 2 < n = 3$, quindi il sistema è possibile e indeterminato con 1 incognita libera, cioè possiede ∞^1 soluzioni, ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

47) $r(A) = 2 \neq r(A \mid \mathbf{b}) = 3$, quindi il sistema è impossibile.

48) $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 3 = n$, quindi il sistema è possibile e determinato e ha 1 sola soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

49) $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 3 < n = 4$, quindi il sistema è possibile e indeterminato con 1 incognita libera, cioè possiede ∞^1 soluzioni, ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{5} - \frac{8}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = \frac{13}{5} + \frac{2}{5}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } x_4 \in \mathbb{R}$$

dove $\begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} & 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo e $x_4 \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato.

50) $r(A) = r(A \mid \mathbf{b}) = 2 < n = 4$, quindi il sistema è possibile e indeterminato con 2 incognite libere, cioè possiede ∞^2 soluzioni, ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 + 6x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

dove $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo e $x_2 \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 6 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato.

9.8. Esercizi Capitolo 8

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (x \leq 0 \ \wedge \ y \leq 0)\}$

2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$

3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)\}$

4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$

5) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)) \wedge y \neq \frac{1}{x}\right\}$

6) $D = \mathbb{R}^2$

7) $D = \mathbb{R}^2$

8) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y > 0\}$

9) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y \neq 0\}$

10) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \vee \ y \neq 0\}$

11) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \vee \ y \neq 0\}$

12) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y > 0\}$

13) $D = \mathbb{R}^2$

14) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \ \wedge \ y > 0) \ \ \vee \ \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0)\big\}$

15) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\big\}$

16) $\nabla f(1, 0) = (1 \quad 1) \qquad \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

17) $\nabla f(1, -1) = (0 \quad 0) \qquad \nabla^2 f(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

18) $\nabla f(1, 0) = (-6 \quad 1) \qquad \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

19) $\nabla f(1, -1) = (2 \quad 1) \qquad \nabla^2 f(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

20) $\nabla f(1, 1) = (e \quad e) \qquad \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

21) $\nabla f(0, 0) = (0 \quad 0) \qquad \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

22) $\nabla f(2, 2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(2, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$

23) $\nabla f(0, 0) = (1 \quad 0) \qquad \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

24) $\nabla f(1, 1) = (0 \quad 0) \qquad \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

25) $\nabla f(1, 0) = (0 \quad 3) \qquad \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$

26) $df(0, 1) = dx + 2dy$

27) $df(2,-2) = \frac{3}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

28) $df(0,1) = dx + edy$

29) $df(3,4) = \frac{3}{5}dx + \frac{4}{5}dy$

30) $df\,(1,-1) = 2dx + dy$

31) $df(2,2) = \frac{3}{8}dx - \frac{1}{8}dy$

32) $df\,(3,2) = \frac{1}{6}dx + \frac{1}{2}dy$

33) $z = x - 2y$

34) $z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$

35) $z = x + 3y - 1$

36) $z = x + y + 2$

37) $z = x + 2y$

38) $z = x + y - 2$

39) $z = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$

40) $z = -x - y + 2$

41) La funzione ha un massimo relativo in $A = (-2,0)$, mentre non vi sono minimi relativi.

42) La funzione ha un minimo relativo in $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e una sella in $B = (0,0)$, mentre non vi sono massimi relativi.

43) La funzione ha un minimo relativo in $A = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e un altro minimo relativo in $B = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, mentre non vi sono massimi relativi.

44) La funzione ha un minimo relativo in $A = (0, 0)$ e una sella in $B = (-2, 0)$, mentre non vi sono massimi relativi.

45) La funzione ha una sella in $A = (-1, 1)$ e un'altra sella in $B = (1, 1)$, mentre non vi sono né massimi né minimi relativi.

46) La funzione ha un minimo relativo in $A = (-1, 0)$, mentre non vi sono massimi relativi.

47) La funzione ha un minimo relativo in $A = \left(\sqrt[3]{9}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, mentre non vi sono massimi relativi.

48) La funzione ha un massimo relativo in $A = \big(-\sqrt{2}, 0\big)$ e una sella in $B = \big(\sqrt{2}, 0\big)$, mentre non vi sono minimi relativi.

49) La funzione ha un massimo relativo in $A = \left(-\frac{33}{10}, \frac{5}{2}\right)$, mentre non vi sono minimi relativi.

50) La funzione ha un massimo relativo in $A = (0, 0)$, mentre non vi sono minimi relativi.