La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 75-78

Quasi-interpolanti spline locali su domini limitati di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

SARA REMOGNA

Le funzioni spline ricoprono un ruolo importante sia nella teoria sia nelle applicazioni nelle Scienze e nell'Ingegneria e sono riconosciute come strumenti efficienti nella Teoria dell'Approssimazione, nel CAGD (Computer Aided Geometric Design), nell'analisi e ricostruzione di immagini e nell'Analisi Numerica.

La teoria della spline univariate ha avuto un rapido sviluppo all'inizio degli anni Sessanta sino al 1980 e i principali risultati sono esposti nelle monografie classiche di de Boor del 1978 e di Schumaker del 1981. Il ventennio successivo può essere visto come l'epoca delle spline multivariate, espresse dapprima come prodotto tensoriale di spline univariate e poi come funzioni polinomiali a tratti definite su una partizione di un dominio dato e raccordate in modo da garantire una certa regolarità globale. Possiamo per esempio riferirci alle monografie di Bojanov-Hakopian-Sahakian del 1993, di de Boor-Höllig-Riemenschneider del 1993, di Chui del 1988, di Lai-Schumaker del 2007 e di Wang del 2001. Le spline polinomiali in più variabili possiedono molte delle caratteristiche che fanno delle spline univariate degli strumenti importanti per le applicazioni. Per esempio esse sono capaci di approssimare con buona precisione funzioni regolari ed è possibile stabilire una relazione tra la regolarità della funzione e l'ordine di approssimazione, inoltre esistono degli algoritmi stabili ed efficienti per la valutazione delle loro derivate ed integrali.

Sia dunque Ω un dominio e Δ una partizione di Ω che lo decompone in un numero finito di sottodomini Δ_i, $i = 1, \dots, N$, allora definiamo lo spazio spline

$$S_k^\mu(\Omega, \Delta) = \left\{ s \in C^\mu(\Omega) \mid s\,|_{\Delta_i} \in \mathbb{P}_k,\ i = 1, \dots, N \right\}$$

i cui elementi $s \in S_k^\mu(\Omega, \Delta)$ sono funzioni polinomiali a tratti di grado k e classe C^μ.

I quasi-interpolanti spline locali sono operatori d'approssimazione aventi buone proprietà di shape-preserving e possono essere valutati rapidamente. Essi sono definiti da uno spazio funzionale $\mathcal{F}$ nello spazio spline $S_k^\mu(\Omega, \Delta)$ nella seguente forma:

$$Q : \mathcal{F} \to S_k^\mu(\Omega, \Delta)$$
$$Qf = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha(f)\phi_\alpha,$$

dove $\{\phi_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ è una famiglia di funzioni a supporto compatto che forma una partizione dell'unità (per esempio box spline o multi-box spline) e $\{\lambda_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ è una famiglia di funzionali lineari definiti su $\mathcal{F}$ come combinazione lineare di valori di f in punti che giacciono in un intorno del supporto di ϕ_α. Inoltre si richiede che Q sia esatto sullo spazio $\mathbb{P}_r$ dei polinomi di grado totale minore o uguale a r, cioè $Qp = p$ per ogni $p \in \mathbb{P}_r$. Da risultati classici nella Teoria dell'Approssimazione, ciò implica che l'ordine di convergenza dell'errore sia $f - Qf = O(h^{r+1})$, per $f \in \mathcal{F}$ sufficientemente regolare e h diametro massimo degli elementi della partizione.

Il grande vantaggio di tale approccio è che il calcolo di un quasi-interpolante è diretto e non necessita della risoluzione di alcun sistema lineare, contrariamente a quanto accade per gli interpolanti. Ciò è particolarmente interessante in dimensione due o tre, dove i sistemi possono essere di grandi dimensioni. D'altra parte i quasi-interpolanti hanno in generale una norma infinito non troppo elevata, contrariamente agli interpolanti che possono presentare oscillazioni indesiderate.

In letteratura gli operatori quasi-interpolanti sono stati largamente studiati, ma, generalmente, a parte il caso del prodotto tensoriale, essi sono definiti in tutto lo spazio $\mathbb{R}^d$. Per questo motivo, nella tesi, sono stati costruiti ed analizzati nuovi operatori quasi-interpolanti discreti definiti su domini limitati di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Un approccio standard per ottenere quasi-interpolanti discreti consiste nel costruire dapprima un quasi-interpolante differenziale, i cui coefficienti sono definiti utilizzando operatori differenziali, e poi discretizzare tali operatori con differenze finite. Di conseguenza i funzionali λ_α sono dati da combinazioni lineari della funzione f in certi punti situati nel supporto o in un intorno del supporto di ϕ_α, denotati con $\{x_\beta,\ \beta \in F_\alpha,\ F_\alpha \subset \mathcal{A}\}$

$$\lambda_\alpha(f) = \sum_{\beta \in F_\alpha} \sigma_\alpha(\beta) f(x_\beta). \tag{1}$$

Quando f è definita su un dominio limitato Ω, si presenta il seguente problema: alcune funzioni generatrici ϕ_α hanno supporto non completamente contenuto nel dominio Ω e i corrispondenti funzionali λ_α necessitano di valori di f in punti esterni al dominio. Per ovviare a tale problema è necessario modificare le funzioni ϕ_α e/o i funzionali λ_α. Nella tesi si propone la costruzione di nuovi funzionali associati alle funzioni generatrici di bordo in modo da ottenere un ordine di approssimazione ottimale e utilizzare punti di valutazione interni o sul bordo del dominio. In questo modo le funzioni generatrici hanno un'unica espressione nel dominio e questo rappresenta un vantaggio dal punto di vista computazionale.

Per ottenere un determinato potere di approssimazione, si impone l'esattezza dell'operatore Q su un certo spazio di polinomi $\mathbb{P}_r$ di grado totale r. Poichè differenti soluzioni sono possibili, la costruzione di diversi funzionali è discussa nella tesi. Più precisamente, i funzionali sono stati ottenuti minimizzando la loro norma infinito rispetto ad un numero finito di parametri liberi (chiameremo tali funzionali "near-best"), oppure imponendo la superconvergenza dell'operatore in certi punti del dominio.

Descriviamo ora brevemente i due metodi utilizzati per la costruzione di quasi-interpolanti.

Un quasi-interpolante "near-best" è ottenuto minimizzando la norma infinito dei suoi coefficienti funzionali. Infatti, da (1), è chiaro che, per $\|f\|_\infty \leq 1$ e $\alpha \in \mathcal{A}$, $|\lambda_\alpha(f)| \leq \|\sigma_\alpha\|_1$, dove σ_α è il vettore di componenti $\sigma_\alpha(\beta)$, e si deduce che

$$|Qf| \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\lambda_\alpha(f)| \phi_\alpha \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} |\lambda_\alpha(f)| \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|\sigma_\alpha\|_1.$$

Quindi

$$\|Q\|_\infty \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|\sigma_\alpha\|_1.$$

Vogliamo quindi trovare $\sigma_\alpha^* \in \mathbb{R}^{\mathrm{card}(F_\alpha)}$ soluzione del problema

$$\|\sigma_\alpha^*\|_1 = \min\left\{ \|\sigma_\alpha\|_1 ; \sigma_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{card}(F_\alpha)}, V_\alpha \sigma_\alpha = b_\alpha \right\},$$

dove $V_\alpha \sigma_\alpha = b_\alpha$ sono vincoli lineari che esprimono l'esattezza di Q su $\mathbb{P}_r$. Tale problema è un problema di minimo in norma l_1, ed esistono diverse tecniche per determinare una soluzione, che in generale non è detto essere unica. Inoltre tale problema è equivalente ad un problema di programmazione lineare, per questo nella tesi si è deciso di utilizzare il metodo del simplesso.

Se i funzionali λ_α vengono definiti utilizzando un numero di punti maggiore del numero di condizioni imposte, si ottiene un sistema con parametri liberi, che in questo caso, sono determinati minimizzando la norma infinito di λ_α e risolvendo il corrispondente problema di minimo.

Gli altri funzionali sono invece costruiti in modo da indurre superconvergenza dell'operatore Q in certi punti del dominio.

Se si costruisce un operatore discreto esatto su $\mathbb{P}_r$, allora $f - Qf = O(h^{r+1})$ per funzioni f sufficientemente regolari. Se vogliamo che sia presente un fenomeno di superconvergenza, cioè $f - Qf = O(h^{r+2})$ in certi punti particolari, dobbiamo richiedere che, per $f \in \mathbb{P}_{r+1}$, il quasi-interpolante Qf interpoli la funzione f in questi punti. Quindi, per costruire tali operatori, si impone $Qf(M) = f(M)$ per $f \in \mathbb{P}_{r+1} \backslash \mathbb{P}_r$, con M punto specifico del dominio.

Questo porta ad un sistema lineare con eventuali parametri liberi, che sono determinati minimizzando la norma infinito dei coefficienti e risolvendo il corrispondente problema di minimo.

La scelta dei punti di valutazione, necessari per definire i coefficienti funzionali, avviene in modo euristico, cercando di mantenere piccolo il numero di punti, la norma infinito del coefficiente e assicurando l'esattezza dell'operatore sullo spazio $\mathbb{P}_r$.

Nella tesi questi metodi proposti vengono applicati per costruire operatori di quasi-interpolazione in diversi spazi spline in due o tre dimensioni. In particolare, nel caso bivariato si considera un dominio rettangolare $\Omega = [0, m_1 h] \times [0, m_2 h]$ suddiviso inizialmente in quadrati di area h^2. Successivamente ogni quadrato è suddiviso in quattro triangoli dalle sue diagonali, ottenendo così una triangolazione uniforme di tipo 2, oppure è suddiviso in due triangoli dalla diagonale principale e a sua volta ciascun triangolo è suddiviso in sei sottotriangoli dalle tre mediane ottenendo una triangolazione uniforme di Powell-Sabin.

Sono stati quindi considerati gli spazi delle spline quadratiche C^1 e quartiche C^2 definiti su una triangolazione uniforme di tipo 2 e generati, rispettivamente, dalle traslate scalate di box spline quadratiche C^1 e quartiche C^2, e lo spazio delle spline cubiche C^2 definito su una triangolazione uniforme di Powell-Sabin e generato dalle traslate scalate di particolari funzioni chiamate multi-box spline in letteratura.

Nel caso trivariato si è considerato un parallelepipedo $\Omega = [0, m_1h] \times [0, m_2h] \times [0, m_3h]$ suddiviso inizialmente in cubi di volume h^3 e sono stati studiati due spazi spline. Il primo è ottenuto come prodotto tensoriale di spline quadratiche C^1 univariate e le spline quadratiche C^1 bivariate considerate in precedenza, ottenendo così una partizione di ogni cubo in quattro prismi a base triangolare. Invece, l'altro spazio spline trivariato è lo spazio delle spline quartiche C^2 definito su una partizione uniforme ottenuta suddividendo ogni cubo in ventiquattro tetraedri (tale partizione è nota in letteratura con il nome di partizione tetraedrale di tipo 6). Tale spazio è generato alle traslate scalate di box spline quartiche C^2.

Inoltre, utilizzando funzioni test note in letteratura, si sono sviluppati esempi numerici che confermano le proprietà di approssimazione dei vari operatori quasi-interpolanti e quelle di superconvergenza. Infine, negli spazi bivariati delle spline quadratiche C^1 e quartiche C^2 è stata considerata l'applicazione di tali operatori alla valutazione numerica di integrali e nello spazio delle quadratiche C^1 anche all'approssimazione dei punti stazionari di una funzione.

I quasi-interpolanti proposti possono essere utilizzati in diverse applicazioni interessanti. Per esempio, gli operatori bivariati possono essere utilizzati nel secondo passo dei metodi a due passi ("two-stage methods") proposti da Schumaker per l'approssimazione di dati sparsi, non strutturati. Il primo passo consiste nell'approssimazione locale dei dati, nel senso dei minimi quadrati. Il secondo passo consiste nell'approssimare i dati ottenuti al primo passo con una superficie regolare utilizzando un opportuno metodo di quasi-interpolazione.

Gli operatori trivariati invece possono trovare applicazione nell'estrazione esplicita di isosuperfici, utile per esempio in campo medico. Si potrebbero infatti ricostruire i dati tridimensionali con una spline trivariata, estrarre le isosuperfici ed esprimerle come spline bivariate utilizzando uno dei quasi-interpolanti bivariati proposti.

Infine, questi operatori quasi-interpolanti si possono utilizzare nella risoluzione di alcune equazioni funzionali, come le equazioni integrali o in problemi differenziali.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino,
e-mail: sara.remogna@unito.it
Scuola di Dottorato in Scienza e Alta Tecnologia, Indirizzo in Matematica,
dell'Università degli Studi di Torino – Ciclo XXII
École doctorale MATISSE (Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes, Electronique), Mention Mathématiques et Applications, Università di Rennes 1 (Francia)
Relatori: Prof.ssa Catterina Dagnino, Università degli Studi di Torino,
Prof. Paul Sablonnière, Università di Rennes 1 (Francia)