IRIS AperTO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

Federigo Enriques e l'impegno nella scuola

This is the author's manuscript

Original Citation:

Availability:

This version is available http://hdl.handle.net/2318/124309 since

Publisher:

Kim Williams Books

Terms of use:

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

27 April 2024

FEDERIGO ENRIQUES E L'IMPEGNO NELLA SCUOLA

Erika Luciano e Alice Tealdi
Dipartimento di Matematica 'G. Peano' – Università di Torino

Sunto. *Geniale matematico e docente di grande carisma, Enriques dedicò un'ampia parte della sua attività scientifica e politico-istituzionale all'insegnamento della matematica. In questo articolo, dopo aver illustrato gli assunti epistemologici su cui si fonda il suo progetto didattico, se ne ripercorrono le tappe di realizzazione, descrivendo le iniziative promosse per migliorare la formazione degli insegnanti, il contributo che Enriques diede, come presidente della Mathesis, alla Società e al Periodico di Matematiche, e la sua azione nell'ambito dell'editoria scolastica.*

1. Enriques e l'insegnamento della matematica: assunti ed influenze

Federigo Enriques (1871-1946), illustre rappresentante della Scuola italiana di Geometria Algebrica, ma anche filosofo e storico del pensiero scientifico, appartiene a quella ricca schiera di matematici che, nell'Ottocento e nelle prime decadi del Novecento, accostarono alla propria attività di ricerca avanzata un impegno continuativo e articolato nel campo educativo.

Scaturito da motivazioni di tipo filosofico ed epistemologico, l'interesse di Enriques per le problematiche dell'insegnamento emerge negli anni bolognesi, quelli del suo primo incarico sui corsi di Geometria Proiettiva e Descrittiva (gennaio 1894), della nomina a professore straordinario (1897) e quindi della promozione a ordinario della medesima disciplina (1900). A questo periodo risalgono infatti le sue prime ricerche sui fondamenti della geometria, sull'origine psicologica dei postulati e la pubblicazione delle *Lezioni di Geometria proiettiva* (1898).

A questi studi, che consolidano da un punto di vista teorico il suo orientamento, Enriques accosta, negli anni, gli spunti desunti dalla propria esperienza di docente, dapprima a Bologna sulla cattedra di Geometria Proiettiva e Descrittiva (1898-1922), e successivamente nei corsi di Matematiche superiori, Geometria superiore e Matematiche complementari svolti a Roma (1922-1946).

Nel frattempo, egli stringe una fitta rete di contatti con i colleghi italiani e stranieri impegnati sul fronte dell'istruzione. Il sodalizio scientifico e umano con il collega e amico Guido Castelnuovo, il dialogo con il peaniano Giovanni Vailati, i rapporti con i soci della Mathesis e della Federazione Nazionale Insegnanti Scuole Medie, i confronti con i membri delle sottocommissioni dell'International Commission on Mathematical Instruction e soprattutto con il suo presidente Felix Klein contribuiranno, a diverso titolo, alla precisazione del suo pensiero metodologico.

Essenziale si rivela, soprattutto, l'influenza di Klein sul geometra italiano.[1] L'insegnamento della matematica nei suoi molteplici aspetti – dalla pubblicazione degli *Elementi di Geometria* al coordinamento internazionale delle iniziative per l'educazione, dalla traduzione tedesca delle *Questioni riguardanti la geometria elementare* alla linea editoriale da dare al *Periodico di Matematiche* – divengono oggetto del loro dialogo epistolare e di vivaci conversazioni durante i soggiorni di Enriques a Gottinga e di Klein in Italia. La loro convergenza di opinioni è completa ed Enriques accoglie, in special modo, alcuni cardini del programma di Klein, fra cui la preferenza da accordare all'intuizione nei processi di apprendimento, la necessità di colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario, l'opportunità di valersi dell'aspetto storico delle discipline scientifiche, l'opportunità di dare risalto alle matematiche elementari da un punto di vista superiore, nella formazione dei futuri professori.

Alla luce di questo *parterre* di stimoli, influenze ed ambiti di movimento, non è semplice individuare i tratti fondamentali del pensiero didattico di Enriques, un pensiero a tratti talmente sfaccettato da risultare quasi contraddittorio. Senza banalizzare eccessivamente, si può tuttavia asserire che la sua visione dell'insegnamento sia ispirata ad una concezione della matematica come di un'entità viva e dinamica. A questa comune radice epistemologica si possono ricondurre gli assunti specifici, ribaditi da Enriques in più occasioni, sui vari aspetti dell'educazione scientifica e della formazione dei docenti:

- rivalutare il compito formativo della matematica in ogni indirizzo di studi;
- trasmettere agli allievi una visione unitaria del sapere, attraverso lo studio della storia della scienza;
- adottare un approccio attivo e dinamico, prediligendo il metodo socratico e cercando di creare un ambiente scolastico il più possibile stimolante;
- conciliare intuizione e rigore e limitare al minimo le analisi raffinate sui fondamenti, quanto meno ai primi livelli scolari;
- corroborare l'interesse degli allievi sottolineando i legami fra la matematica, le altre discipline e le applicazioni pratiche.

I valori dell'insegnamento della matematica

Facendo sua una posizione ampiamente condivisa dalla comunità matematica italiana post-risorgimentale, Enriques attribuisce all'istruzione scientifica una duplice finalità: formativa e strumentale.

Se infatti l'insegnamento della matematica è essenziale per il futuro cittadino – poiché gli fornisce i mezzi per saper leggere la realtà e i suoi problemi – è però altrettanto vitale la funzione culturale che ad esso deve essere affidata.

[1] Cfr. L. Giacardi 2012, pp, 223-229.

L'educazione matematica contribuisce infatti, secondo Enriques, alla formazione generale dello spirito, in quanto coopera allo sviluppo delle capacità critiche e dell'attitudine alla ricerca. Come tale, il sapere scientifico non può allora essere trascurato in alcun tipo di *curricula*.

Questa duplicità di orizzonte arricchisce, di rimando e in modo spontaneo, la prassi didattica. Da un lato, infatti, anche in un indirizzo di studi eminentemente tecnico-professionale è possibile dirigere l'interesse dei discepoli verso concetti e teorie astratte, addestrando le menti a riconoscere la loro bellezza ed utilità per la risoluzione di particolari problemi concreti. D'altro canto, neppure in una scuola squisitamente formativa come il liceo classico, si possono trascurare le applicazioni concrete della matematica, ed anzi è dovere del docente ricordare agli studenti che la vita industriale ed economica dei popoli civili è dominata dalle matematiche.

Per conciliare autenticamente le due finalità dell'insegnamento occorre tener sempre presente la "veduta dinamica dello spirito"[2]. In tal modo "la controversia sull'utilitarismo – tutta assorbita dalla più o meno stretta misura della scienza in rapporto alle applicazioni pratiche"[3] perde mordente, poiché da un lato si accetta che "la cosiddetta applicazione di una verità scientifica implic[hi] pure una capacita applicativa, che la vita domanda appunto di formare"[4] e, dall'altro, si ammette che

> la scienza, come l'arte e come la virtù, deve essere coltivata per se stessa, non per il premio che se ne aspetta e che verrà a chi non lo ha chiesto, [...] per l'elevazione dell'anima che si purifica e s'allegra nel contemplare un ordine intelligibile della realtà.[5]

La matematica, vista in rapporto ai suoi risvolti strumentali, sveste così i panni di disciplina arida, ostica e oggetto di diffuso disamore. Di rimando, l'insegnamento e la ricerca rivendicano la propria libertà di costruire e trasmettere conoscenze non necessariamente e immediatamente spendibili.[6]

L'unità del sapere

Per poter assolvere in modo adeguato ai suoi fini, l'insegnamento deve offrire agli allievi una visione unitaria della matematica, aspirando a una riunificazione sintetica dei suoi diversi settori e superando l'eccessivo particolarismo scientifico.

A questo proposito, assai netta è la denuncia formulata da Enriques ed Eugenio Rignano (1870-1930) all'atto di avviare la pubblicazione della *Rivista di Scienza* (1907).[7] Una rigida suddivisione disciplinare in compartimenti stagni

---

[2] F. Enriques 1921, p. 7.
[3] F. Enriques 1921, p. 7.
[4] F. Enriques 1921, p. 7.
[5] F. Enriques 1924, p. 4.
[6] Cfr. F. Enriques 1922, p. 287.
[7] F. Enriques, E. Rignano, *Programma*, *Rivista di Scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica*, 1, 1907, pp. 1, 2.

contraddistingue, a loro avviso, il sistema scolastico italiano. Analogamente, l'attività scientifica è dominata dalla frammentazione del sapere e dalla tendenza a sviluppare ricerche sempre più settoriali, incentrate su argomenti circoscritti e i cui risultati, espressi in un linguaggio ultra-tecnico, risultano inaccessibili ai più.

La formazione particolaristica che molti docenti hanno ricevuto si riverbera poi negativamente sul loro insegnamento, che risulta essere informativo anziché formativo, e che finisce per essere parcellizzato in una serie di analisi estremamente accurate di argomenti slegati l'uno dall'altro.[8] Per dirla con Enriques:

> ora io temo che, nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici, la logica in piccolo tenga troppo posto in confronto alla logica in grande! Ciò dipende […] dall'abito troppo analitico della maggior parte dei nostri insegnanti […]. A mio avviso ciò che si deve richiedere all'insegnamento matematico, concepito come formativo delle facoltà logiche, è prima di tutto di svolgere lo spirito di coordinazione, in quella forma che ho chiamato macroscopica.[9]

Questo – prosegue il geometra – richiede che siano costantemente richiamati sia i legami interni, ad esempio tra i contenuti dell'aritmetica e della geometria, sia quelli esterni, ovvero le connessioni fra la matematica e le altre discipline, dalla fisica alle scienze della vita, dalla storia alla filosofia. In tal modo, l'insegnante riesce a "ravvicinare dottrine matematiche, troppo separate da preoccupazioni puristiche"[10] e a restituire alla matematica il suo *status* di componente indispensabile di una sola ed unica *humanitas* culturale:

> [lo studio scientifico] deve essere opportunamente accompagnato da altri che conferiscono insieme alla formazione dell'intelligenza più armonica; in specie gli studi umanistici, di cui deve ritenersi come parte integrante.[...] L'umanismo include, in ogni caso, la mentalità storica, che – come abbiamo visto – deve comporsi colla mentalità scientifico-matematica universalistica, per una migliore aderenza ai vari aspetti della realtà.[11]

La visione dinamica e genetica del progresso scientifico

Per Enriques, l'unico approccio didattico capace di render ragione delle modalità con cui la matematica si è andata sviluppando, fino a raggiungere la propria fisionomia attuale, è quello dinamico e genetico.

La concezione storiografica soggiacente a quest'istanza è ben nota: il progresso scientifico è, secondo lo studioso italiano, un percorso infinito e mai

---

[8] F. Enriques 1921, p. 9.
[9] F. Enriques 1921, p. 9.
[10] F. Enriques 1921, *C. Ciamberlini, Saggi di didattica matematica (Milano, Paravia, 1921)*, Periodico di Matematiche, (4) 1, p. 123.
[11] F. Enriques 1938b, p. 178.

rettilineo[12] lungo il quale le teorie scaturiscono le une dalle altre allorché una o più ipotesi, soggette a verifica, vengono a cadere. Durante questo incessante processo di revisione e di rettifica, si stabiliscono via via nuovi quadri concettuali che, tenendo conto degli 'errori' riscontrati, risultano più esatti e completi di quelli che li hanno preceduti. In nessun caso, tuttavia, le nuove costruzioni sono espressione di verità assolute e universali. La scienza, infatti, non è un "ordine di conoscenze immobili"[13], un sistema chiuso di asserzioni definitive sulla realtà, fissate una volta per tutte in forma necessaria, bensì un

> procedimento di *approssimazioni successive,* dove dalle *deduzioni* parzialmente verificate e dalle contraddizioni eliminanti l'errore delle ipotesi implicite, sorgono nuove *induzioni più precise, più probabili, più estese*.[14]

Per essere compresa e fatta propria, la matematica deve essere perciò presentata in scuola come l'esito provvisorio di un percorso cumulativo di costruzione di cognizioni e contenuti.

Tale visione dinamica dell'insegnamento, oltre ad essere quella maggiormente coerente dal punto di vista storico ed epistemologico, è anche, secondo Enriques, quella che meglio ricalca la prassi della ricerca, che mira essenzialmente alla scoperta e nella quale i ruoli principali sono giocati dall'intuizione e dalla capacità di formulare congetture. "La cosa essenziale – ripete spesso il Nostro – è di regola scoprire ... a posteriori si riesce sempre a dare la dimostrazione" che "traducendo l'intuizione dello scopritore in termini logici, vuol dare a tutti il mezzo di riconoscere ed appurare la verità".[15]

Si tratta, come è facile intuire, di una linea di pensiero che porterà Enriques a contrapporsi criticamente, in più occasioni, alla Scuola di Peano.

Gli strumenti più efficaci di cui gli insegnanti dispongano per impostare in modo dinamico e genetico il proprio magistero sono quelli loro offerti dalla storia della scienza e dalla psicologia.

L'uso non episodico della prima consente in particolare di illustrare il guadagno in termini di generalità, potenza, completezza e astrazione della matematica moderna rispetto a quella antica. Per "cogliere in quell'astrattezza il contenuto concreto"[16], non esiste allora strada più efficace che quella di "rifare la strada che la mente umana ha percorso per giungervi, ripigliando dunque i metodi e i principii elementari dei Greci".[17] In tal modo, i concetti al

---

[12] Cfr. F. Enriques 1906, p. 5.

[13] F. Enriques, G. De Santillana 1936, *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni*, Bologna, Zanichelli, p. 445.

[14] F. Enriques 1906, p. 145.

[15] F. Enriques, O. Chisini 1918, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 2.3, pp. 44, 47.

[16] F. Enriques 1926, *Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici* in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, II, p. 595.

[17] F. Enriques 1926, *Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici* in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, vol., Bologna, Zanichelli, II, pp. 595-596.

centro del percorso cognitivo vengono introdotti "ricercandone il valore attraverso il processo d'acquisto"[18].

La conoscenza della genesi degli oggetti matematici, delle idee che li hanno ispirati e delle particolari intuizioni attraverso cui si sono andati formando, non può che accostarsi a quella del modo in cui, nel passato, sono stati posti e affrontati alcuni problemi, delle loro connessioni, dei metodi con cui si è cercata la loro soluzione e del retaggio che hanno lasciato sull'evoluzione successiva della matematica.

Per questo motivo, secondo Enriques, gli insegnanti dovrebbero educare gli allievi sui capolavori dei Maestri, commentandone in classe gli stralci più salienti, e guidare gli studenti a ricostruire e ad interpretare i risultati degli antichi, tenendo conto delle conoscenze da essi effettivamente possedute. Questo tipo di attività, infatti, oltre a stimolare la curiosità degli discenti e il loro desiderio di approfondimento, rappresenta un primo e indispensabile apprendistato in vista della lettura autonoma dei testi classici, in edizione integrale:

> Per una cultura seria e veramente fattiva è necessario che [i giovani] vengano messi a contatto coi grandi pensatori, e avviati così a conoscere la genesi storica delle idee scientifiche. I poeti sviluppano la loro coscienza in compagnia dei poeti, i mercanti in compagnia dei mercanti, i filosofi dei filosofi. Anche per quella filosofia che è la scienza è tempo di volgersi dai manuali e dalle compilazioni alle fonti.[19]

È alla luce di queste convinzioni di fondo che si comprende appieno l'impegno di Enriques a favore della storia della scienza e del suo inserimento nei *curricula*. In veste di Presidente dell'Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze, da lui stesso fondato nel 1923 presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, Enriques organizzò infatti una Scuola di perfezionamento in Storia delle Scienze e, negli anni Trenta, si adoperò – invano – per l'istituzione di cattedre universitarie di Storia delle scienze fisiche e matematiche.

Il sapere come conquista personale

L'obiettivo di promuovere una nuova prassi didattica più viva e costruttiva, in cui "il processo di acquisizione del vero assume un'importanza quasi uguale a quella del fatto acquisito"[20], contraddistingue tutto l'operato di Enriques nel campo dell'istruzione. Esso rispecchia alla perfezione, del resto, il suo stesso stile di insegnamento, rivolto a cogliere l'essenza dei problemi, caratterizzato dall'improvvisazione, dal rifiuto degli artifici tecnici e dal gusto per le digressioni storiche, oltre che

[18] F. Enriques 1925b, pp. 5-6.
[19] F. Enriques 1925b, p. 11.
[20] L. Campedelli 1973, p. 80.

> caldo di una immediatezza e di un fascino che avvincevano. L'interesse, sempre rinnovantesi, dell'autore per il proprio argomento, prendeva l'uditorio. [...] Mai la sua esposizione aveva contenuto puramente erudito: rifuggiva nel modo più assoluto dalla semplice informazione culturale, dalla notizia caduta dal cielo, dalla proprietà asserita ex-abrupto, anche se poi dimostrata più o meno faticosamente. Il metodo induttivo [...] qui dominava appieno: ogni nuovo passo nell'esposizione doveva presentarsi spontaneo, preparato dalle premesse.[21]

Se la storia della scienza dimostra che ciò che si trasmette è solo un momento ed un frammento dell'umana conoscenza, è chiaro che il fine prioritario del percorso educativo non deve essere quello di insegnare i risultati ottenuti dai grandi del passato, bensì quello di farli ricreare autonomamente, sorretti dal convincimento che la verità non è una proprietà intrinseca del pensiero ma è frutto di sforzo, tensione, lotta e conquista. Un buon insegnante, secondo Enriques, deve quindi saper innanzitutto sollecitare l'iniziativa e la fantasia degli studenti, svilupparne lo spirito d'osservazione oltre che il ragionamento logico, e accompagnarli nella formazione della propria personalità, da un lato offrendo e dall'altro chiedendo collaborazione:

> l'insegnamento non può essere un regalo che il maestro faccia a qualcuno che viene ad ascoltare le sue ben tornite lezioni [...]; ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé e però sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o un prodotto del proprio spirito [...] senza escludere che questa volontà venga stimolata e quindi fortificata dall'insegnante che, coll'esercizio graduato, riesce ad educare le attività spirituali, mostrandone il successo possibile.[22]

Quello dell'insegnante, in sostanza, non è un mestiere che si possa esercitare *ex cathedra*, ma un''arte' che richiede talenti speciali e comporta gravosi carichi di responsabilità. Prima ancora di valutare i pro e i contro dei vari approcci per la trattazione di questo o quel tema, Enriques invita allora a ripensare globalmente le dinamiche di confronto docente-allievi. A essere messa in rilievo è, in primo luogo, la componente emozionale, ovvero la personalità dei docenti:

> la loro mentalità, la comunicativa, la passione che portano nelle cose insegnate, la larghezza degli interessi che li fa capaci di mettersi al posto degli allievi e di sentire con essi.[23]

Solo una lezione preparata e svolta con coinvolgimento ed entusiasmo è realmente in grado di muovere l'attività del discepolo e di rendere l'insegnamento "qualcosa di vivo", presente nel pensiero del docente e da lui

---

[21] L. Campedelli 1947, p. 105.
[22] F. Enriques 1921, p. 6.
[23] F. Enriques 1938b, p. 188.

trasmesso allo spirito dell'allievo, come una "scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco".[24]

In secondo luogo, occorre che il percorso educativo si dipani in un ambiente scolastico aperto, nel quale l'insegnante non mortifichi il gusto per la ricerca e per la scoperta dei suoi allievi ma – al contrario – ne segua lo "svolgersi dell'intelligenza"[25]. Ciò comporta la disponibilità a raccogliere le osservazioni "piene d'interesse"[26] che emergono dal dialogo in aula e la capacità di incanalarle nella giusta direzione, partendo dalle nozioni più elementari per approdare a quelle più elevate, e facendo scaturire nuovi interrogativi. A tal scopo, secondo Enriques, può essere utile dar notizie di nuovi campi di studio e dei problemi non ancora risolti, che non sono però "irresolubili", ma soltanto non ancora formulati "in un conveniente enunciato"[27]. Altrettanto suggestiva, per gli allievi, può risultare la conoscenza dei tentativi e degli errori che hanno accompagnato lo sviluppo della scienza:

> diventa importante di esporre accanto alla verità le vie – spesso diverse – che vi conducono, senza escludere dal confronto con i metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e di chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie.[28]

Una volta che i docenti abbiano chiara consapevolezza della complessità del compito ad essi affidato e delle sfide culturali e pedagogiche che comporta, diventa per loro naturale prediligere il metodo maieutico, che dà modo di conversare con gli allievi, fingendosi "un poco ignorante" e ricercando insieme la via per la conquista della verità:

> Il più grande vantaggio di questo metodo è […] – ricorda peraltro Enriques – la sincerità, perché il *postulato* dell'ignoranza è infinitamente più vicino al vero che la presupposizione di conoscenze già sicure nella mente dell'allievo, da cui muove la lezione cattedratica.[29]

---

[24] F. Enriques 1900, p. 23 e F. Enriques 1921, p. 15.
[25] F. Enriques 1908, p. 65.
[26] F. Enriques 1908, p. 65.
[27] F. Enriques 1906, p. 5.
[28] F. Enriques, O. Chisini 1915, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 1, Bologna, Zanichelli, p. 10. Cfr. anche F. Enriques 1938b, p. 51.
[29] F. Enriques 1921, p. 14. Nell'articolo *La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella scuola media* (1928b, p. 69), Enriques riporta un aneddoto che avvalora la sua tesi sull'utilità del metodo socratico: il grande geometra tedesco C. von Staudt, assistendo come commissario agli esami di un ginnasio, volle interrogare egli stesso gli studenti, poiché non approvava la soddisfazione del professore, di fronte a risposte su questioni geometriche "recitate a memoria". Staut cerco di "stimolare l'intendimento dei giovani" e, a poco a poco, la sua "arte socratica"

L'ultimo snodo della riflessione enriquesiana tocca il tema della preparazione scientifica e didattica dei docenti che, per poter mettere in pratica gli assunti sopra illustrati, devono a loro volta aver appreso la matematica "non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire".[30]

Affinché i 'maestri' non si limitino "a ripetere un po' meccanicamente", nella forma e nel contenuto, le nozioni che furono loro insegnate[31], Enriques richiama ancora una volta l'importanza dello studio della storia della matematica elementare, atto a preservare i futuri docenti "dal pericolo di diventare ripetitori meccanici di una cultura ricevuta dal di fuori e però estranea veramente al loro spirito".[32]

Il ruolo dell'errore

Se l'errore, nelle sue varie sfaccettature, non deve essere trascurato dalla riflessione storiografica ed epistemologica, essendo un elemento connaturato alla matematica "finché progredisca nel suo cammino millenario, senza isterilirsi nell'esercizio di pedanti senza fantasia [...]"[33], è naturale che ad esso sia riservato un posto altrettanto importante nell'ambito didattico. A questa tematica Enriques dedica, non a caso, un interessante articolo, *L'errore nelle matematiche*, pubblicato nel 1942 sul *Periodico di matematiche*, sotto lo pseudonimo di Adriano Giovannini a causa delle leggi razziali.

Qui egli fornisce una valutazione dinamica dell'errore e una sua classificazione in tre categorie: l'errore materiale, "di disattenzione" che "può essere esemplificato coll'errore del contabile che sbaglia le somme di un rendiconto di cassa", l'errore-lacuna "dove la tesi affermata [è] sostanzialmente vera" in quanto conduce alla scoperta di una proprietà esatta, ma attraverso una via incompleta dal punto di vista del rigore e "l'errore propriamente detto" in cui "la tesi falsa [viene] affermata come vera".[34]

L'errore-lacuna e l'errore propriamente detto costellano necessariamente il percorso cognitivo poiché, come spiega Enriques, non sono dovuti né alla facoltà logica né a quella intuitiva, ma si presentano nel momento delicato del loro raccordo, quando cioè dagli oggetti percepiti si deve passare alla formazione dei corrispettivi concetti astratti, oppure dall'esperienza empirica si deve risalire ad una legge universale.[35] Per il docente, la comprensione degli errori dei suoi allievi diventa allora "la cosa più importante della sua arte

---

riuscì ad "orientare e animare lo spirito degli allievi" i quali, alle sue "domande incalzanti", fornivano "risposte sempre più pronte e precise".

[30] F. Enriques 1938b, p. 190.

[31] Cfr. F. Enriques 1921, p. 15.

[32] F. Enriques a G. Gentile, 23 dicembre 1922, in A. Guerraggio, P. Nastasi (a cura di) 1993, p. 166.

[33] Enriques 1942, p. 65. Cfr. anche F. Enriques 1911, p. 417: "ogni errore contiene sempre una verità parziale da mantenere, così ogni verità un errore parziale da correggere".

[34] F. Enriques (con lo pseudonimo di Adriano Giovannini) 1942, pp. 57-58.

[35] F. Enriques (con lo pseudonimo di Adriano Giovannini) 1942, pp. 64-65.

didattica". Suo compito è quello di "distinguere gli errori significativi da quelli, che non sono propriamente errori – affermazioni gratuite di sfacciati che cercano d'indovinare – dove manca lo sforzo del pensiero della cui adeguatezza si vorrebbe giudicare".[36] Gli errori devono poi essere integrati con la loro correzione, che da essi "trae occasione e motivo".[37] Benché possano talvolta derivare da lacune e carenze del singolo allievo, gli errori significativi possono e devono dunque essere sfruttati come "tappe naturali del pensiero nella ricerca della verità" e come esperienze didattiche che il professore "persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio" ed "anche ad errare per imparare a correggersi" poiché "tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere".[38]

L'esigenza di conciliare intuizione e rigore

L'*engagement* di Enriques sul fronte dell'educazione si colloca in un contesto che vede la contrapposizione di due scuole di pensiero: quella geometrica che, sulla scorta dell'influenza di Klein, H. Poincaré, E. Borel, ritiene che la parte principale nell'insegnamento spetti all'intuizione, e quella guidata da G. Peano, che mira invece a riversare nella didattica e nella manualistica i frutti degli studi logico-fondazionali. Protagonista di questa particolare temperie culturale, e di molteplici scontri – celebri fra tutti quelli con C. Burali-Forti – Enriques sostiene che logica e intuizione sono due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo:

> In concreto non ci sono una facoltà intuitiva e una facoltà logica distinte, ma l'una e l'altra si fondono nell'unità dialettica dello spirito umano, ad un tempo come solidali ed opposte [...] invero l'astrarre è insieme un atto intuitivo e logico.[39]

Lo scoglio diviene allora quello di trovare un giusto equilibrio tra queste facoltà dell'intelligenza che devono essere coltivate contemporaneamente, conciliando le "esigenze di una logica sempre più raffinata" con "i diritti dell'intuizione, che è l'attività creatrice della scienza".[40]

L'opinione di Enriques è chiara: gli insegnanti italiani si preoccupano eccessivamente di sviluppare la 'logica in piccolo', cioè l'analisi accurata, criticamente ineccepibile, delle definizioni e delle dimostrazioni, mentre trascurano 'la logica in grande', ovvero lo studio delle connessioni organiche della scienza, tanto più essenziale nella fase di formazione delle competenze.[41] Ecco allora che egli si scaglia contro la tendenza, antididattica a suo avviso, a dimostrare ciò che è intuitivamente evidente, a rischio di toglier valore al concetto stesso di deduzione e di indurre gli allievi a dubitare dell'importanza del ragionamento:

---

[36] Per questa citazione e la precedente cfr. F. Enriques 1936, p. 12.
[37] F. Enriques (con lo pseudonimo di Adriano Giovannini) 1942, p. 62.
[38] Per questa citazione e la precedente cfr. F. Enriques 1936, p. 12.
[39] F. Enriques 1942, p. 65.
[40] F. Enriques 1942, p. 57.
[41] Cfr. F. Enriques 1921, pp. 7-9.

> è un errore il credere che l'insegnamento razionale importi sempre la compiutezza delle dimostrazioni o la perfetta generalità delle dimostrazioni; basta che il significato e il bisogno ideale di questa compiutezza sia compreso dallo studioso, ed a questo scopo vale spesso assai meglio qualche deficienza voluta e messa in luce, di una precisione pedantesca.[42]

La preoccupazione di garantire l'assoluto rigore conduce ad evidenti inconvenienti: spesso, infatti, una malintesa aspirazione alla generalità non corrisponde ad alcun reale arricchimento dei contenuti, ed anzi "reca, molte volte, un'espressione più astratta delle nozioni già acquisite, dove è dato men facilmente d'intendere quel che ne costituisce il valore".[43]

In una trattazione dell'aritmetica elementare o della geometria euclidea rigidamente assiomatico-deduttiva, l'allievo distingue inoltre con più difficoltà, secondo Enriques, le proprietà veramente significative, costituenti l'impalcatura della teoria da quelle che sono semplici anelli della catena. La scienza gli si appare così, *à la* Hegel, come un'"infinita notte, in cui tutte le vacche sono nere"[44].

Aderendo per così dire al principio per cui l'ontogenesi ricalca la filogenesi, Enriques raccomanda dunque di limitare al minimo, nei primi gradi di insegnamento, tutte le questioni riguardanti l'ordinamento della scienza e specialmente le riflessioni di cesello sulle definizioni e sulle dimostrazioni, che si possono sostituire con giustificazioni e verifiche di natura empirico-intuitiva. Gli allievi, infatti, accettano come puro oggetto di apprendimento mnemonico questo tipo di studi, non ne afferrano lo scopo e non sono in grado di ricostruirli come cosa propria. In tal modo, essi perdono pure il loro 'valore di esercitazione logica' per cui vengono di solito proposti:

> il rigore logico nasconde in parte la genesi delle idee; anche l'esatta formulazione delle restrizioni che si richiedono nell'enunciato dei teoremi può toglier la veduta della genesi delle idee e perfino l'intelligenza del loro valore; [...] può accadere che l'allievo prima di aver colto il senso del teorema nel caso che costituisce la regola, si fermi proprio sulla eccezione (che forse vedrebbe implicita in un enunciato meno preciso).[45]

Un'educazione al rigore logico, prosegue Enriques:

> è pur contenuta nell'esercizio dell'intuizione, quando questa venga messa alla prova facendo lavorare il discepolo. Così, per esempio la costruzione di una figura geometrica [...] attività

---

[42] F. Enriques 1912b, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I: *Critica dei principii*, Bologna, Zanichelli, p. 29.
[43] F. Enriques 1938b, p. 153.
[44] F. Enriques 1921, p. 10.
[45] F. Enriques 1938b, pp. 188, 189.

> costruttiva che ordina i dati di osservazioni ed esperienze passate [...] è vera attività logica.[46]

Le riflessioni sulla natura degli oggetti matematici, sui criteri di scelta degli enti e delle proposizioni primitive, sull'ossatura formale e ipotetico-deduttiva del pensiero matematico possono essere sviluppate con positivo riscontro, ma solo di fronte ad un pubblico di studenti maturi e solo nell'ambito di alcuni indirizzi di studi.[47]

2. La realizzazione del progetto didattico[48]

L'interesse di Enriques per la scuola non resta confinato nell'alveo della riflessione teorica, ma si esplica concretamente lungo molteplici linee: dalle iniziative per la formazione degli insegnanti a quelle nel campo dell'editoria e della manualistica, dall'azione a livello politico-istituzionale agli incarichi di spicco ricoperti nelle associazioni degli insegnanti e negli organismi internazionali che si occupano di educazione.

Le proposte per la formazione degli insegnanti

Fin dal 1906 Enriques dedica profonda attenzione al problema della formazione degli insegnanti dal punto di vista disciplinare, metodologico e didattico, ritenendo che la preparazione loro tradizionalmente impartita nelle Università risulti inadeguata a fornire le cognizioni e a sviluppare le attitudini che occorrono all'esercizio della professione di docente.

In attesa di una riforma globale dell'istruzione superiore, egli si adopera per organizzare conferenze su temi di filosofia, storia della matematica, fisica e biologia, allo scopo di aiutare gli insegnanti ad imprimere un carattere di maggiore spessore culturale al proprio magistero.

Suggerisce inoltre l'istituzione di una laurea pedagogica, distinta da quella scientifica, cui accedere dopo un biennio di studi generali. L'offerta formativa, per tale percorso di studi, avrebbe dovuto comprendere:

- corsi relativi alle parti della scienza che si collegano "ad una più profonda visione degli elementi",
- conferenze su questioni di pedagogia concreta, che interessano i vari rami dell'insegnamento e nelle quali privilegiare soprattutto la critica dei testi,
- esercitazioni e un periodo di tirocinio, da effettuarsi all'Università e nelle scuole secondarie, e comprendenti prove di disegno e di tecnica sperimentale.[49]

Enriques promuove inoltre innumerevoli progetti editoriali volti ad ampliare, ma soprattutto a fortificare, la cultura dei docenti di matematica. Fra questi non si può non citare la pubblicazione, nel 1900, delle *Questioni riguardanti la*

---

[46] F. Enriques 1921, p. 8.
[47] Cfr. F. Enriques 1921, p. 11.
[48] Per approfondimenti cfr. Giacardi 2012.
[49] F. Enriques 1907, p. 78.

Geometria elementare. Questa collezione di monografie, rivolte espressamente agli allievi delle Scuole di magistero, agli studenti dei corsi di Matematiche complementari e a coloro che dovevano prepararsi a sostenere gli esami di Stato, riguardano in un primo momento solo temi di geometria elementare, affrontati nel loro sviluppo storico e critico. Tradotte in tedesco nel 1907, poi approfondite nel 1912, giungono alla versione definitiva fra il 1924 e il 1927. Sotto il titolo di *Questioni riguardanti le matematiche elementari* comprendono, nell'edizione finale, oltre una ventina di saggi dedicati ad argomenti di aritmetica, geometria, analisi e algebra, firmati da illustri studiosi del calibro di G. Castelnuovo, A. Conti, A. Padoa, G. Vitali, E. Bompiani e G. Vailati. Esemplate sul modello dei celebri volumi di Klein *Elementar Mathematick vom höheren Standpunkte aus*, le *Questioni* coordinate da Enriques eserciteranno un'influenza determinante sulle successive collane italiane rivolte agli insegnanti, a partire dall'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* diretta da L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli.[50]

Di notevole importanza risulta pure la serie di testi *Per la storia e la filosofia delle matematiche*, avviata da Enriques nel 1925 con il volume da lui stesso curato *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, *(Libri IIV)*. L'idea di creare una collezione di questo tipo gli viene suggerita "dalla pratica della Scuola di Magistero"[51], nella quale – spiega Enriques – "se si vogliono educare i giovani alla critica comparativa dei testi"[52] è necessario partire da una base storica, facendo riferimento ai classici e studiandone le variazioni, attraverso le edizioni e i commenti successivi. La collana, indirizzata al pubblico degli educatori, ma anche a quello degli studenti delle scuole secondarie superiori, e in generale degli uomini colti, comprende una dozzina di volumi.[53] A essere privilegiata è la traduzione e l'apparato esegetico, ricco di note storiche su quegli scritti degli autori classici, da Euclide a I. Newton, da R. Bombelli a G. Galilei, che possono avere una rilevanza per l'insegnamento. Non mancano volumi di ampio respiro anche su temi di matematica contemporanea, come la magistrale traduzione dei due saggi di R. Dedekind *Essenza e significato dei numeri* e *Continuità e numeri irrazionali*, curata da O. Zariski (1926) durante il suo soggiorno romano.

Enriques e la Mathesis

Eletto presidente della Mathesis al termine della prima guerra mondiale, nel 1919, Enriques non solo dà un'impronta personale alle attività di questa associazione ma, per così dire, la rivitalizza, rilanciando innanzitutto il *Periodico di Matematiche* che torna, nel novembre 1920, ad essere l'organo ufficiale della società. Il prestigio e il carisma di Enriques inducono molti

---

[50] Cfr. E. Luciano, The *Enciclopedia delle Matematiche elementari and the Contributions of Bolognese Mathematicians*, in S. Coen (a cura di), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Basel, Birkhäuser, 2012, pp. 343-372.

[51] F. Enriques (a cura di) 1925, p. 7.

[52] Federigo Enriques (a cura di) 1925, p. 7.

[53] Cfr. L. Giacardi 2006, *Convergenze: una collana per la scuola*, Notiziario dell'UMI, 33, 5, pp. 59-61.

colleghi ad interessarsi ai problemi dell'insegnamento secondario di cui, in seno alla Mathesis, vengono dibattute le principali problematiche: i programmi di matematica, l'abbinamento di quest'ultima alla fisica, gli orari, le ricadute sull'apprendimento delle riflessioni inerenti la logica e la psicologia. I soci, che alla fine del 1920 sono 391, nell'ottobre 1921 salgono a 638, nel 1922 sono quasi 900 e nel 1923 superano le 1100 unità. Numerosi sono i congressi della Mathesis organizzati sotto la presidenza di Enriques (1919-1932): Trieste (1919), Napoli (1921), Livorno (1923), Milano (1925), Firenze (1929) e Bolzano (1930). Durante quello di Napoli, in particolare, Enriques viene incaricato di esplorare le vie utili a ottenere una più larga partecipazione dei fisici alla Società. L'esito della sua opera di 'riavvicinamento' fra matematici e fisici è la ratifica, nel maggio del 1922, di un nuovo statuto della Mathesis, che accoglie fra i soci anche gli insegnanti di fisica e assume la nuova denominazione di Società italiana di scienze fisiche e matematiche. Nel 1932, ultimo anno del suo mandato, per suo esplicito desiderio la presidenza dell'associazione viene da lui condivisa con il fisico Luigi Puccianti (1875-1952), che resterà in carica fino al 1936.

Oltre che alla Mathesis, Enriques prende pure parte attiva alla fondazione della Federazione nazionale insegnanti scuole medie; nel primo congresso nazionale (Firenze 1902) interviene due volte, su questioni di carattere giuridico ed organizzativo e nel quinto (Bologna 1906) è relatore sul tema della preparazione degli insegnanti di scienze. Fra il 1913 e il 1915, infine, è presidente dell'Associazione Nazionale tra i Professori Universitari e, dal 1908, è delegato della sottocommissione italiana dell'ICMI.

Enriques e il *Periodico di Matematiche*

L'azione di Enriques nel mondo dell'editoria si esplica prevalentemente attraverso tre canali: la creazione, nel 1907, della *Rivista di Scienza* (che nel 1910 prenderà il nome *Scientia*), di cui è condirettore insieme a E. Rignano fino al 1915; la direzione del *Periodico di matematiche* dal 1921 al 1938 e nel 1946, e l'impegno nell'ambito della casa editrice Zanichelli.[54]

A questo proposito, non si può non ricordare come a Enriques spetti *in primis* il merito di aver reso maggiormente completo, sotto il profilo contenutistico, il *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario* che con lui viene ribattezzato e assume significativamente il nome di *Periodico di Matematiche: storia – didattica – filosofia*.

La politica editoriale della rivista, edita dal 1886, è radicalmente rinnovata sotto la sua guida, e maggior spazio viene attribuito, nella quarta serie (1921), alle questioni metodologiche, alle matematiche elementari intese in senso lato ed in generale a tutte quelle tematiche che tendono "ad una più vasta comprensione dello spirito matematico". Il mutamento di indirizzo è a tal

[54] Dal 1921 al 1934 Enriques condivide la direzione del *Periodico* con Giulio Lazzeri; dal settembre del 1938, a causa delle leggi razziali, non compare né come direttore, né come autore; nel 1946 ricompare come direttore accanto a Oscar Chisini.

punto significativo che, come sottolinea M. Dedò, si può considerare "Enriques come il fondatore del Periodico di Matematiche".[55]

Attraverso i suoi molteplici scritti apparsi sul *Periodico* – fra cui il celebre saggio *Insegnamento dinamico* – Enriques promuove infatti l'idea della matematica come parte integrante della cultura filosofica e contribuisce a colmare il "vuoto esistente, nella cultura italiana, sul piano della didattica della scienza"[56], diffondendo la sua visione dell'insegnamento e della formazione dei docenti.

Ecco allora che, sulle pagine della rivista, riaffiorano le idee da lui sempre sostenute: "approfondire, in più sensi, la scienza stessa che s'insegna così da poterla dominare da nuovi e più alti punti di vista"; utilizzare la storia non in senso erudito, bensì allo scopo di illustrare in forma dinamica i concetti e le teorie; far emergere i collegamenti della matematica con le altre scienze, in modo da offrire più "larghe visioni della scienza e degli scopi o significati di tante svariate ricerche"; rilevare l'identità di contenuto tra le dottrine geometriche e quelle algebriche, ad esempio illustrando i legami tra il V libro degli *Elementi* di Euclide e la teoria dei numeri irrazionali.[57]

Per portare avanti questo programma di lavoro, Enriques esorta i lettori a dare il proprio contributo alla rivista, sottolineando come ciascuno possa "recare una pietra all'edificio della scienza che ha per oggetto la scuola", sia i matematici illustri, sia i giovani "forniti di solida preparazione scientifica", e così pure "gli insegnanti più umili" che desiderino "offrire il contributo di una coscienziosa esperienza".[58]

Fra le principali novità che caratterizzano la nuova serie del *Periodico* spicca la moltitudine di articoli di storia della matematica e di fisica, assai rari nelle serie precedenti, e le numerose e accurate recensioni di volumi di storia della scienza. Per quanto riguarda i primi, Enriques si avvale specialmente della collaborazione di Ettore Bortolotti (1866-1947), Gino Loria (1862, 1954), Amedeo Agostini (1892-1958) e Oscar Chisini (1889-1967). Grazie all'opera di coordinamento da lui svolta, gli articoli ospitati su uno stesso numero del *Periodico* sono inoltre spesso correlati tra loro: così, per esempio, nel volume del 1922 e in quello del 1923 si trovano più lavori che affrontano il tema dei logaritmi; in quello del 1924 due scritti sono dedicati a Leonardo Pisano ed altrettanti ad Alessandro Volta; in quello del 1931 parecchi contributi trattano del numero π, ecc. Per quanto riguarda la fisica, invece, la maggior parte degli interventi si deve a Umberto Forti e Enrico Persico (1900-1969); anche il celebre Enrico Fermi (1901,1954) darà il suo contributo al *Periodico*, pubblicandovi tre articoli.

---

[55] M. Dedò 1982, p. 259.
[56] U. Fabietti 1982, *Enriques, l'editoria e la Zanichelli* in O. Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte Editore Libraio, pp. 271, 272.
[57] Enriques F. 1921b, pp. 4-5.
[58] Enriques F. 1921b, pp. 4, 5.

Accanto a questi scritti di taglio scientifico o metodologico, il *Periodico* ospita una rubrica dedicata alle *questioni* e alle *risposte*, molte delle quali suggerite da importanti matematici, oltre che dallo stesso Enriques; sezioni specifiche sono infine dedicate a notizie riguardanti la professione degli insegnanti (cattedre, concorsi e premi).

I libri di testo

Il ruolo dirigenziale ricoperto da Enriques nella casa editrice Nicola Zanichelli lo induce a pubblicare, per i suoi tipi, numerosi libri di testo, scritti in collaborazione con Ugo Amaldi (1875-1957) a partire dal 1903. A inaugurare la serie sono gli *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori* (1903), seguiti da parecchie versioni del medesimo manuale per i diversi ordini di scuole, dalle *Nozioni di matematica* (1914,. 1921), dalle *Nozioni di geometria* (1914), dalla *Geometria elementare* (1924), e così via.

Fra questi spiccano, per il loro carattere innovativo, le *Nozioni di Matematica ad uso dei Licei moderni*, edite in due volumi: quello per la classe II nel 1914, e quello per la classe III, apparso nel 1921.

Come è noto, nel 1911 il ministro L. Credaro, accogliendo le proposte di G. Vailati e di G. Castelnuovo, aveva istituito una nuova tipologia di scuola secondaria, il liceo moderno appunto, che si differenziava dal classico a partire dalla II liceo. Per quanto riguarda la matematica, nei programmi del nuovo corso di studi si attribuiva maggior rilievo alle approssimazioni numeriche e si introducevano i concetti di funzione, derivata ed integrale. Tali programmi incominciarono ad essere sperimentati a partire dall'anno scolastico 1914-15, pur con notevoli difficoltà, dovute alla mancanza di docenti preparati, all'ostilità degli insegnanti del liceo classico, che dirottavano a quello moderno gli studenti meno dotati, e alla carenza di fondi che ostacolava la realizzazione dei laboratori scientifici.[59] Le *Nozioni di Matematica* di Enriques e Amaldi figurano, insieme al *Corso di algebra elementare per i licei classici e moderni secondo i nuovi programmi* di S. Catania fra i pochissimi libri di testo pensati per questo nuovo tipo di scuola. Esse esemplificano al meglio la maggior parte degli assunti metodologici enriquesiani precedentemente descritti.

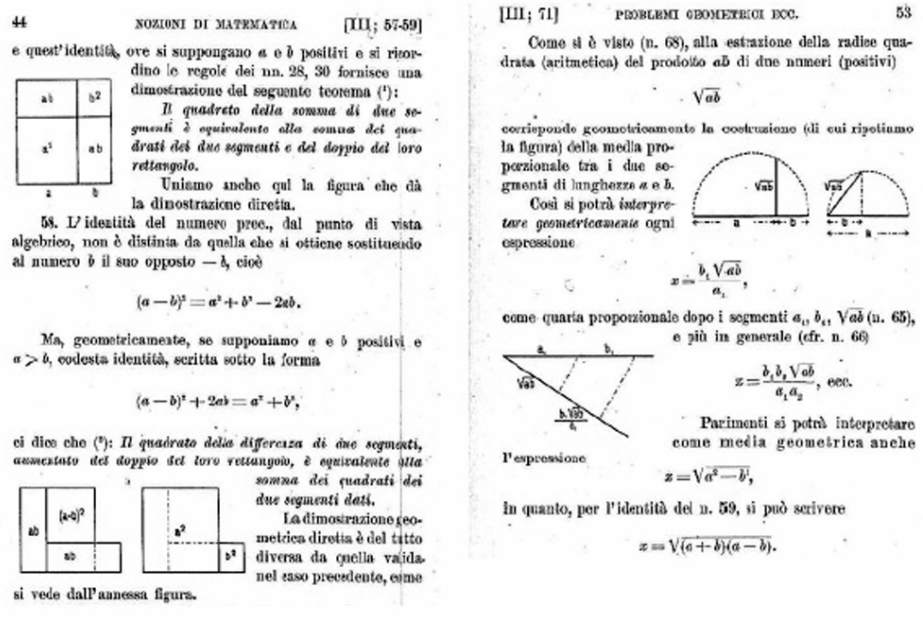
La trattazione dei radicali quadratici e delle equazioni di 2° grado, svolta nei capitoli 3° e 4° del volume I, consente ad esempio di mettere in rilievo

> lo svolgimento parallelo e l'interdipendenza dei concetti algebrici e geometrici, quali risultano dal processo storico" e di indirizzare i lettori alla comprensione delle "verità insegnate rivivendo il processo del loro acquisto[60].

Enriques e Amaldi, infatti, esplicitano la corrispondenza tra alcune note identità algebriche e alcuni teoremi sull'equivalenza ed espongono l'interpretazione geometrica di formule omogenee e non omogenee attraverso l'introduzione del segmento unitario, mostrando ad esempio come

[59] Cfr. Giacardi 2006b, pp. 38-47.
[60] F. Enriques, U. Amaldi 1914, p. V.

all'estrazione della radice quadrata del prodotto di due numeri *ab* corrisponda geometricamente la costruzione della media proporzionale tra i due segmenti di lunghezze *a* e *b* (fig. 1).[61]


44 NOZIONI DI MATEMATICA [III; 57-59]

e quest'identità, ove si suppongano a e b positivi e si ricordino le regole dei nn. 28, 30 fornisce una dimostrazione del seguente teorema (¹):

Il quadrato della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti e del doppio del loro rettangolo.

Uniamo anche qui la figura che dà la dimostrazione diretta.

58. L'identità del numero prec., dal punto di vista algebrico, non è distinta da quella che si ottiene sostituendo al numero b il suo opposto $-b$, cioè

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ma, geometricamente, se supponiamo a e b positivi e $a > b$, codesta identità, scritta sotto la forma

$$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2,$$

ci dice che (²): *Il quadrato della differenza di due segmenti, aumentato del doppio del loro rettangolo, è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti dati.*

La dimostrazione geometrica diretta è del tutto diversa da quella valida nel caso precedente, come si vede dall'annessa figura.

[III; 71] PROBLEMI GEOMETRICI ECC. 53

Come si è visto (n. 68), alla estrazione della radice quadrata (aritmetica) del prodotto ab di due numeri (positivi)

$$\sqrt{ab}$$

corrisponde geometricamente la costruzione (di cui ripetiamo la figura) della media proporzionale tra i due segmenti di lunghezze a e b.

Così si potrà *interpretare geometricamente* ogni espressione

$$x = \frac{b_1\sqrt{ab}}{a_1},$$

come quarta proporzionale dopo i segmenti a_1, b_1, $\sqrt{ab}$ (n. 65), e più in generale (cfr. n. 66)

$$x = \frac{b_1 b_2 \sqrt{ab}}{a_1 a_2}, \text{ ecc.}$$

Parimenti si potrà interpretare come media geometrica anche l'espressione

$$x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

In quanto, per l'identità del n. 59, si può scrivere

$$x = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Fig. 1.

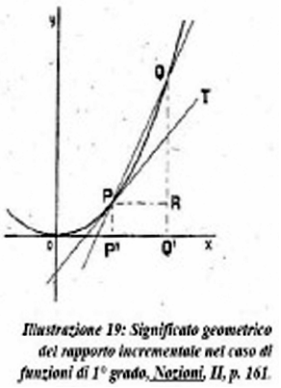


Fig. 2.

Per introdurre il concetto di funzione (vol. 1, cap. 10), invece, gli autori spiegano per prima cosa come rappresentare le variazioni di determinate quantità connesse a esperienze fisiche o a misurazioni concrete, tracciando i diagrammi della temperatura in un intervallo di tempo di 24 ore, il grafico del commercio internazionale dell'Italia nel trentennio 1881-1911 ecc. (fig. 2). Una volta definito il concetto di legge matematica, esso è subito applicato all'interpretazione di fenomeni fisici (moto uniforme, moto verticale dei gravi, legge di Boyle sui gas).

Un approccio induttivo-razionale contraddistingue pure l'introduzione del concetto di derivata (vol. 2, cap. 5). In questo caso, dopo aver studiato il comportamento del rapporto incrementale delle funzioni $y=ax+b$ e $y=ax^2$, Enriques e Amaldi ne danno l'interpretazione geometrica e meccanica. Successivamente passano alla definizione di derivata per una funzione qualsiasi come limite del rapporto incrementale, e immediatamente la

[61] F. Enriques, U. Amaldi 1914, pp. 43-58.

utilizzano per il calcolo della derivata della somma algebrica di due funzioni, delle funzioni razionali intere fino al terzo grado e della funzione razionale fratta $y=a/x$. Concludono infine accennando allo studio dell'andamento di una funzione (crescenza, decrescenza, massimi, minimi) in relazione al comportamento della sua derivata.

Per giungere alle definizioni di area di una superficie e di integrale (vol. 2, cap. 6), si ricorre alla carta quadrettata (fig. 3). Gli allievi sono invitati a osservare che si possono ottenere valori via via più approssimati, per difetto e per eccesso, dell'area racchiusa da una curva, utilizzando una carta quadrettata a lato sempre più piccolo. Il valore esatto dell'area racchiusa dalla curva è il limite comune delle aree delle due serie di scale, una inscritta e l'altra circoscritta. L'esistenza di tale limite comune è ammessa, senza dimostrazione. Introdotto così l'integrale definito, si passa al calcolo delle aree di alcune regioni di piano sottese da curve di 1° e di 2° grado.

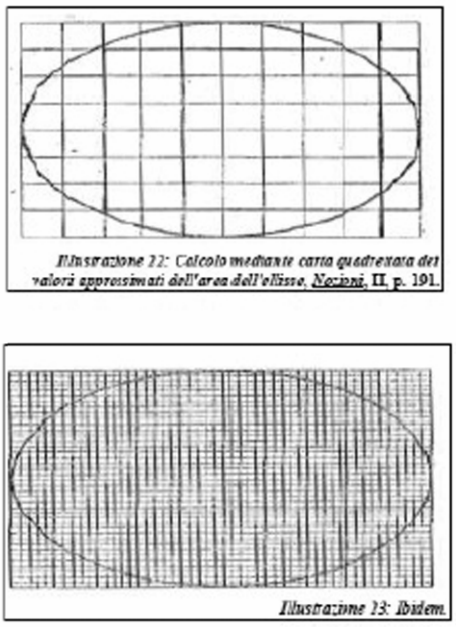


Fig. 3.

La trattazione termina con un cenno al concetto di integrale indefinito, inserito allo scopo di metter in luce il rapporto tra integrale e derivata, mostrando che sono operazioni l'una inversa dell'altra.

Numerose e interessanti digressioni storiche punteggiano questo manuale: vengono ad esempio forniti i valori approssimati di π proposti nel corso del tempo, il valore dell'area del triangolo equilatero di lato assegnato assunto dagli agrimensori romani e quello stabilito da Erone. In altri frangenti, si trae spunto dalla storia della matematica per formulare problemi o esercizi[62].

La volontà di sfruttare il più possibile il bagaglio culturale degli allievi, ricorrendo alle loro esperienze di vita quotidiana e quindi a materiali 'poveri' come la carta, le forbici, la sabbia, l'acqua, ecc. contraddistingue anche le *Nozioni di geometria ad uso dei ginnasi inferiori*, edite da Enriques e Amaldi nel 1914. La tecnica dell'origami è ad esempio qui sfruttata per introdurre in classe il concetto di somma e di sottrazione di angoli o quello di bisettrice. Quest'ultima infatti è semplicemente la semiretta data dalla piegatura su se stesso di un angolo di carta, effettuata in modo che i due lati si sovrappongano. Per calcolare la somma degli angoli interni di un triangolo, gli autori propongono invece di procedere così: si ritaglia il triangolo su carta e,

[62] Cfr. F. Enriques, U. Amaldi 1914, vol. I, pp. 192, 193.

individuato il lato maggiore, si abbassa su di esso la perpendicolare dal vertice opposto; si piegano le tre punte del triangolo in modo da riunire i tre vertici nel piede della perpendicolare e si osserva che la somma dei tre angoli è un angolo piatto (pp. 54-66). E ancora, per determinare la formula del volume della piramide, Enriques e Amaldi consigliano di utilizzare una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo e una piramide di ugual base e altezza della scatola, "colla bocca in alto come un imbuto". Riempiendo tre volte la piramide di sabbia e svuotandola ogni volta nella scatola, l'insegnante può far toccare con mano ai suoi alunni che quest'ultima viene riempita esattamente in tre tempi.

Problemi aperti

Le riflessioni metodologiche e didattiche di Enriques, per la loro ricchezza di spunti e per la loro poliedricità, sono odiernamente oggetto di un ampio interesse storiografico.

Restano infatti ancora da indagare molteplici aspetti, a partire dalle fonti su cui Enriques basò la sua visione dell'insegnamento e dei suoi problemi, ancora in larga parte da individuare[63], per arrivare al retaggio del pensiero di questo autore su altri matematici che si occuparono di questioni educative (B. de Finetti, T. Viola, …).

Sono inoltre in attesa di maggiore definizione i contorni del magistero di Enriques e, a questo proposito, si stanno compiendo ricerche d'archivio a Bologna e a Roma per precisare i contenuti dei suoi corsi alla Scuola di Magistero e di quelli di Matematiche complementari.[64]

Quasi del tutto inesplorati appaiono pure i legami che Enriques intrecciò con alcuni esponenti della Scuola di Peano. Di là dai toni di asprezza che caratterizzarono il confronto con Burali-Forti in occasione della seconda edizione del manualetto Hoepli *Logica matematica*,[65] vi è infatti tutta una trama di relazioni fra il geometra livornese e A. Padoa, M. Pieri, G. Vailati, G. Vacca, che attende di essere ricostruita. Allo stato attuale delle nostre indagini, possiamo affermare che Pieri, Vailati e Padoa apprezzassero alcuni lavori di Enriques, come il volume *Problemi della scienza*,[66] e che riconoscessero l'"innegabile cultura matematica e filosofica" del suo autore.[67] Ormai assodata è peraltro la collaborazione fra Enriques e Vacca nell'ambito della storia della matematica e della logica, negli anni delle loro frequentazioni quotidiane

---

[63] Sono ad esempio noti due soli rimandi a opere di pedagogisti (J. Pestalozzi e F. Fröbel), presenti in F. Enriques 1938b, pp. 184-186.

[64] Cfr. L. Giacardi 2012, pp. 250-263 e F. Furinghetti, L. Giacardi 2012.

[65] Cfr. G. Lolli 1993, *I critici italiani di Peano: Beppo Levi e Federigo Enriques*, in AAVV, *Peano e i Fondamenti della Matematica*, Modena, Mucchi, pp. 51-71.

[66] Cfr. E. Luciano 2012, *Mario Pieri e la Scuola di Peano*, in Quaderni di Storia dell'Università di Torino 2009-2011, pp. 40, 43-44, 57-59 e la recensione di G. Vailati 1906, *F. Enriques, I Problemi della scienza, Bologna 1906*, Leonardo, 4, 1906.

[67] A. Padoa a G. Vailati, 21 febbraio 1902, in Fondo Giovanni Vailati, Biblioteca del Dipartimento di Filosofia dell'Università di Milano, cp.

nell'Università e nell'Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze di Roma.[68] Sul fronte opposto, benché spesso Enriques abbia incrociato 'il fioretto della parola'[69] con i logici, appare però indiscutibile che abbia dimostrato un interesse profondo per gli studi sul concetto di numero di Peano e di Padoa

Sul versante propriamente didattico, invece, i contorni di questa rete di relazioni sono rimasti un po' in ombra.[70] La ricostruzione di questo tipo di collegamenti potrà condurre – speriamo – ad un'immagine meno manichea, più equilibrata e corrispondente al vero dei dibattiti che, nel campo dell'insegnamento, opposero per decenni la Scuola di Peano a quella di Geometria Algebrica.

Questo articolo ha origine dalla Tesi di Laurea di Alice Tealdi "Federigo Enriques e l'impegno nella scuola" diretta da Livia Giacardi e discussa presso l'Università di Torino nel dicembre 2010.

Bibliografia primaria

ENRIQUES, F., *Edizione Nazionale delle Opere*, http://enriques.mat.uniroma2.it /italiano/piano.html.

---

[68] Cfr. E. Luciano 2012, *I contributi di G. Vacca alla Storiografia della Logica Matematica*, in Quaderni di Storia dell'Università di Torino 2009-2011, pp. 133, 141, 147 e E. Luciano 2012, *Giovanni Vacca's contributions to the Historiography of Logic*, in *Proceedings of the Italian Society for Logic and Philosophy of Science International Conference* 2010, Logic and Philosophy of Science, IX, pp. 150-155 in bozze.

[69] R. Simili 1987, *Filosofi a congresso: il quarto congresso internazionale di filosofia. Bologna 6-11 aprile 1911*, in W. Tega (a cura di), *Lo Studio e la città: Bologna 1888-1988*, Bologna, Nuova Alfa, 1987, pp. 330-334.

[70] È noto ad esempio che a Vailati si deve una recensione elogiativa degli *Elementi di geometria* di Enriques e Amaldi (G. Vailati 1904, *F. Enriques, U. Amadli, Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori, 1903*, Boll. Bibl. e Storia Sci. Mat. (Loria), 7, pp. 16-24) mentre non è ancora stato chiarito se e in quale misura Enriques sia stato al corrente dell'esperienza della rivista *Schola et Vita*, su cui pure apparvero recensioni di suoi volumi e un suo articolo di carattere storico tradotto in *latino sine flexione*. Cfr. *F. Enriques, Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna; L. Heiberg, Matematiche, Scienze naturali e Medicina nell'antichità classica; a cura di F. Enriques, U. Forti, I. Newton, Principii di filosofia naturale; E. Rufini, Il Metodo di Archimede; R. Dedekind, Essenza e significato dei numeri*, Schola et Vita, 2, 1927, pp. 221-222; F. Enriques 1930, *Philosophia de Elea et positione de problema de Mechanica*, Schola et Vita, 5, pp. 5-10. Enriques stesso, segnalava l'esistenza di queste 'zone grigie' fra la due scuole italiane relativamente all'insegnamento della matematica scrivendo (CIEM, *Compte rendu du Congrès de Milan*, l'Enseignement mathématique, 13, 1911, p. 468): "Au sujet de la distinction établie entre le point de vue logique et le point de vue intuitif", M. Enriques croit qu'il convient d'appeler l'attention de la Commission sur la différence entre la méthode intuitive et la méthode expérimentale. Il est très remarquable que parmi les partisans de la méthode expérimentale se trouvent souvent des logiciens. C'est ainsi que - chez nous - le regretté Vailati était surtout adversaire de l'appel à l'intuition, mais il voulait d'un côté la rigueur logique, de l'autre côté le développement de véritables expériences géométriques. Dans la même situation se trouve peut-être en partie l'école de Peano".

ENRIQUES, F. 1898, *Lezioni di geometria proiettiva,* Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1900, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1906, *Problemi della scienza,* Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1907, *Sulla preparazione degli insegnanti di Scienze*, in *Quinto Congresso Nazionale degli insegnanti delle scuole medie, Bologna, 25-26-27-28 settembre 1906, Atti*, Pistoia, Tip. Sinibuldiana, pp. 69-78.

ENRIQUES, F. 1908, *Questioni filosofiche,* Bologna – Modena, Formiggini.

ENRIQUES, F. 1911, *Esiste un sistema filosofico di Benedetto Croce?*, Rassegna contemporanea, a. 4, f. 4, pp. 405-418.

ENRIQUES, F. 1912, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I, *Critica dei principii*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1921, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, (4) 1, pp. 6-16.

ENRIQUES, F. 1921b, *Ai lettori*, Periodico di matematiche, (4) 1, pp. 1-5.

ENRIQUES, F. 1922, *Per la storia della logica*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1924, *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale*, Periodico di Matematiche, (4) 4, pp. 1-6.

ENRIQUES, F. (a cura di) 1925, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna (Libri I-IV)*, Roma, Stock.

ENRIQUES, F. 1926a*, Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici* in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, pp. 575-596.

ENRIQUES, F. 1926b*, Prefazione* a E. Rufini*, Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità,* Roma, Stock, pp. V-VIII.

ENRIQUES, F. 1928, *Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio. Gli studi matematici*, Leonardo, a. 4, n. 5-6, pp. 132-141.

ENRIQUES, F. 1928b, *La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella Scuola media*, Periodico di Matematiche, (4) 8, pp. 68-73.

ENRIQUES, F. 1936, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1938, *Importanza della storia del pensiero scientifico nella cultura nazionale,* Scientia, 63, pp. 125-134.

ENRIQUES, F. 1938b, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. (con lo pseudonimo di Adriano Giovannini). 1942, *L'errore nelle matematiche,* Periodico di matematiche, (4) 22, pp. 57-65.

ENRIQUES, F., De Santillana G. 1973, *Compendio di storia del pensiero scientifico*, ristampa anastatica dell'edizione del 1936, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. 1983*, La teoria della conoscenza scientifica da Kant ai nostri giorni*, Bologna, Zanichelli

ENRIQUES, F., AMALDI, U. 1903, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F., AMALDI, U. 1914, *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni*, vol. I, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F., AMALDI, U. 1914b, *Nozioni di geometria ad uso dei ginnasi inferiori*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F. , AMALDI U. 1921e, *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni,* vol. II, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F., CHISINI, O. 1915, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 1, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F., CHISINI, O. 1918, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. 2, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, F., FORTI U. 1925b, *Prefazione, introduzione e note critiche sullo sviluppo dei concetti della meccanica*, in I. Newton, *Principi di filosofia naturale. Teoria della gravitazione*, Roma, Stock, pp. 1-11, 13-16, 166-215.

Bibliografia secondaria

CAMPEDELLI, L. 1947, *Federigo Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche,* Periodico di matematiche, (4) 25, 2, pp. 95-114.

CAMPEDELLI, L. 1973, *Un cinquantenario. Federigo Enriques nell' insegnamento*, Accademia Nazionale dei Lincei, Quaderno 184, pp. 75-90.

DEDÒ, M. 1982, *Federigo Enriques e la matematica elementare*, in O. Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte, pp. 251-263.

DE NUCCIO, S. 2010, *Il Periodico di matematiche e la Mathesis Un felice binomio che resiste da più di un secolo*, sul sito web www.congressomathesis.it

DI SIENO, S., GALUZZI, M. 1995, *La storia della matematica in Italia tra le due guerre mondiali ed il Periodico di Matematiche* in L. Carbone, A. Guerraggio (a cura di), *Aspetti della matematica italiana del Novecento*, Napoli, La Città del Sole, pp. 25-68.

FABIETTI, U.1982, *Enriques, l'editoria e la Zanichelli*, in O. Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte, pp. 265-272.

POMPEO FARACOVI, O. 2005, *Federigo Enriques, Filosofo*, Pianeta Galileo, 2005, pp. 193-204.

FURINGHETTI, F., GIACARDI, L. 2012, *Secondary school mathematics teachers and their training in pre- and post-unity Italy (1810–1920)*, ZDM, 44, 4, pp. 537-550.

GIACARDI, L. 2005, *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, in *Atti del Congresso Nazionale Mathesis Conoscere attraverso la matematica: linguaggio, applicazioni e connessioni interdisciplinari*, Anzio-Nettuno, 18-21.11.2004, Roma, 2005, pp. 303-344.

GIACARDI, L. (a cura di) 2006, *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Milano, Agorà publishing.

GIACARDI, L. 2010, *The Italian School of Algebraic Geometry and Mathematics Teaching in Secondary Schools. Methodological Approaches,*

Institutional and Publishing Initiatives, International Journal for the History of Mathematics Education, 5, 1, pp. 1–19.

GIACARDI, L. 2012, *Federigo Enriques (1871-1946) and the training of mathematics teachers in Italy* in S. Coen (a cura di), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Basel, Birkhäuser, pp. 209-275.

GUERRAGGIO, A., NASTASI, P. (a cura di) 1993, *Gentile e i matematici italiani. Lettere, 1907-1943*, Torino, Bollati Boringhieri.

ISRAEL, G. 1992, *F. Enriques e il ruolo dell'intuizione nella geometria e nel suo insegnamento*, in F. Enriques, U Amaldi, *Elementi di geometria*, Pordenone, Studio Tesi, pp. IX-XXI.

LUCIANO, E., ROERO, C.S. 2012 (a cura di), *From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence (1879-1923)*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXII, 1, 2012, 232 p.

LUCIANO, E., *The Transposition of the Foundational Studies in Italian Pedagogic Debates (1890-1930)*, in K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. Matos, G. Schubring (a cura di), *Proceedings of the II International Conference on the History of Mathematics Education*, Lisbon, UIED, 15 p., in corso di stampa.

MORETTI, M. 2003, *Insegnamento dinamico. Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923)*, in F. Enriques 2003, *Insegnamento dinamico*, La Spezia, Agorà.

POMPEO FARACOVI, O. 1982, *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte.

POMPEO FARACOVI, O. 2004 (a cura di), *Enriques e Severi, matematici a confronto nella cultura del Novecento*, Sarzana, Agorà.

SIMILI, R. 2000 (a cura di), *Per la scienza. Scritti editi e inediti*, Napoli, Bibliopolis.

TEALDI, A. 2010, *Federigo Enriques e l'impegno nella scuola*, Tesi di laurea, relatrice Livia Giacardi, Torino, Università di Torino

Torino, 1 marzo 2012