

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

Un nuovo invariante delle varietà di Fano

This is the author's manuscript

Original Citation:

Availability:

This version is available <http://hdl.handle.net/2318/151284> since

Publisher:

Zanichelli

Terms of use:

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

Un nuovo invariante delle varietà di Fano

Cinzia Casagrande

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Dato un divisore primo $D \subset X$, consideriamo l'applicazione di restrizione

$$r_D: H^2(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(D, \mathbb{R}).$$

In generale r_D non è né iniettiva né suriettiva; d'altronde r_D non può essere l'applicazione nulla, perché è sempre non nulla sulla classe di un divisore ampio.

Definiamo il seguente invariante di X :

$$c_X := \max\{\dim \ker r_D \mid D \subset X \text{ divisore primo}\}.$$

Abbiamo $c_X \in \{0, \dots, b_2(X) - 1\}$ e $c_X \geq b_2(X) - b_2(D)$ per ogni divisore primo $D \subset X$ (dove b_2 è il secondo numero di Betti).

L'invariante c_X è significativo quando X è una *varietà di Fano*, cioè il divisore anticanonico $-K_X$ è ampio. Infatti vale il seguente risultato, mostrato in [1].

Teorema 1. *Se X è una varietà di Fano, allora $c_X \leq 8$.*

Inoltre, se $c_X \geq 4$, allora $X \cong S \times Y$, dove S è una superficie di Del Pezzo con $b_2(S) = c_X + 1$, e Y è una varietà di Fano con $c_Y \leq c_X$.

Infine, se $c_X = 3$, allora esiste un morfismo suriettivo, piatto e a fibre connesse $X \rightarrow Y$, dove Y è una varietà di Fano liscia con $\dim Y = \dim X - 2$, $b_2(Y) = b_2(X) - 4$ e $c_Y \leq 3$.

Consideriamo ora una varietà di Fano X di dimensione 4. Dato che X ha un numero finito di possibili tipi topologici, $b_2(X)$ è limitato, tuttavia non se ne conosce il massimo valore. Se X è un prodotto di superfici di Del Pezzo, abbiamo $b_2(X) \leq 18$, mentre tutti gli esempi noti che non siano prodotti di superfici hanno $b_2 \leq 6$. Utilizzando il risultato precedente, si può dare una stima di $b_2(X)$ quando $c_X \geq 2$.

Teorema 2. *Sia X una varietà di Fano di dimensione 4, e supponiamo che X non sia un prodotto di superfici di Del Pezzo. Allora $c_X \leq 3$, e inoltre:*

- se $c_X = 3$ si ha $b_2(X) \leq 6$;
- se $c_X = 2$ si ha $b_2(X) \leq 12$.

Bibliografia

- [1] C. Casagrande: "On the Picard number of divisors in Fano manifolds", preprint arxiv:0905.3239v3, 2009.