PARIS 7

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°11

Juillet 2014

Etude comparative sur l'enseignement des fonctions dans le secondaire en France et en Italie

Auteurs : Charlotte Derouet et Monica Panero

ISSN : 2105-5203

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

TITRE :

Etude comparative sur l'enseignement des fonctions dans le secondaire en France et en Italie

AUTEUR/S :

Charlotte Derouet, Monica Panero

RESUME :

Cette brochure présente une comparaison de l'enseignement des fonctions en France et en Italie, dans le secondaire. Dans la première partie, nous présentons le contexte général de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur dans les deux pays. Dans la deuxième partie, nous étudions plus particulièrement l'enseignement des fonctions au travers des programmes, dans la filière scientifique au lycée (voire au collège pour la France). Les contenus des deux pays sont analysés en parallèle. Et enfin, dans une troisième partie, nous nous centrons sur la comparaison du sujet de baccalauréat 2013 et celui de la *maturità* 2013 (examen de fin de lycée en Italie), pour pouvoir cerner les attendus en fin de lycée autour des fonctions dans les deux pays. Nous utilisons une analyse de tâches mettant en jeu les mises en fonctionnement attendues des connaissances du programme. Ce travail présente quelques aspects des points communs et des différences que l'on peut identifier dans l'enseignement sur les fonctions entre les deux pays.

MOTS CLES :

Fonctions, analyse, second degré, université, comparaison internationale, analyse de tâches

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2014 – ISBN : 978-2-86612-354-3

Table des matières

Introduction **3**

1 Contexte général de l'enseignement en France et en Italie **3**
1.1 Les différentes écoles en France et Italie 3
1.2 Quelques références statistiques sur l'enseignement secondaire en France et en Italie 4
1.2.1 Quelques chiffres en France 4
1.2.2 Quelques chiffres en Italie 5
1.2.3 Bilan sur le contexte de l'enseignement secondaire en France et en Italie . 7
1.3 Quelques références statistiques sur l'enseignement supérieur en France 7

2 Comparaison des programmes en France et en Italie sur les notions de fonctions **9**
2.1 L'enseignement des fonctions en France et en Italie 10
2.2 Les fonctions de référence 15

3 Comparaisons des sujets de mathématiques de l'examen final : Baccalauréat scientifique (en France) et *Maturità scientifica* (en Italie) **16**
3.1 Méthodologie de notre analyse a priori 16
3.2 Baccalauréat scientifique Métropole juin 2013 19
3.2.1 Analyse a priori de l'exercice 2 19
3.2.2 Bilan 30
3.3 Maturità scientifica 2013 - corso sperimentale 31
3.3.1 Analyse a priori du problème 1 31
3.3.2 Bilan sur le problème 1 43
3.3.3 Analyse a priori du problème 2 44
3.3.4 Bilan sur le problème 2 58
3.3.5 Bilan sur les deux problèmes italiens 59
3.4 Bilans comparatifs 59
3.4.1 Bilan comparatif entre l'exercice français et le problème 1 italien 59
3.4.2 Bilan comparatif entre l'exercice français et le problème 2 italien 60

4 Conclusions et perspectives **62**

ANNEXES **65**

A Quelques références statistiques sur l'enseignement supérieur en Italie **65**

B Quelques approfondissements théoriques (par Aline Robert) **66**

C Baccalauréat scientifique Métropole 20 juin 2013 **72**

D Baccalauréat - exercice 2 : tableaux récapitulatifs et proportions **75**

E *Maturità* - Examen national du lycée scientifique, cours expérimental P.N.I. 2013 **80**

F *Maturità* - problème 1 : tableaux récapitulatifs et proportions **86**

G *Maturità* - problème 2 : tableaux récapitulatifs et proportions **91**

Introduction

Cette brochure clôture le travail commun, supervisé par Aline Robert et Fabrice Vandebrouck, de deux doctorantes en didactique des mathématiques, l'une italienne et l'autre française. Il s'agissait de comprendre le fonctionnement de l'enseignement des mathématiques en France et en Italie, et plus particulièrement l'enseignement en section scientifique des fonctions dans le secondaire. Ceci dans le but de pouvoir ensuite comparer cet enseignement dans les deux pays. L'étude des fonctions constitue un des ponts entre le secondaire et l'université. Analyser l'apprentissage de ces notions au lycée permet en partie comprendre les difficultés que peut rencontrer un étudiant dans un cours d'Analyse à l'université. Les premières comparaisons se feront au niveau des contenus des programmes tout au long du lycée (voire au collège en France), puis nous nous concentrerons sur la comparaison du sujet de baccalauréat de juin 2013 et celui de la *maturità* de juin 2013 (examen de fin de lycée en Italie), pour pouvoir cerner les attendus en fin de lycée autour des fonctions dans les deux pays. Ce travail présente quelques aspects des points communs et des différences que l'on peut identifier entre les deux pays. Les différences rencontrées se situent au niveau de l'activité mathématique qu'un élève italien ou français doit mettre en œuvre, les connaissances à mobiliser et la typologie du travail à faire, pour résoudre les tâches proposées. L'analyse conduite est une analyse a priori des problèmes et le cadre de recherche choisi pour la mener reprend principalement les axes proposés par Aline Robert (1998, [10]).
Cette brochure a été écrite à double voix, en essayant de respecter les particularités de chaque pays. Les problèmes de la *maturità* ont été rédigé de façon "italienne", il est donc possible, par exemple, que certaines rédactions ou notations ne soient pas les rédactions françaises standards.

1 Contexte général de l'enseignement en France et en Italie

1.1 Les différentes écoles en France et Italie

Il nous semble important, avant toute chose, de situer les contextes scolaires français et italien dans leur globalité. Pour commencer, nous présentons et comparons donc les différentes écoles et classes que rencontrent les élèves au cours de leur scolarité en France et en Italie.

TABLE 1 – Les différentes écoles en France et en Italie.

France			**Italie**		
1		CP	1		
2		CE1	2		
3	École primaire (6/11 ans)	CE2	3	*Scuola primaria* (6/11 ans)	
4		CM1	4	École primaire	
5		CM2	5		
6		6ème	6	*Scuola secondaria di I grado* (11/14 ans)	1ère année
7		5ème	7	École secondaire du premier degré	2ème année
8	Collège (11/15 ans)	4ème	8		3ème année
9		3ème	9	*Scuola secondaria di II grado* (14/19 ans)	1ère année
10		2nde	10	École secondaire du second degré :	2ème année
11	Lycée (15/18 ans)	1ère	11		3ème année
12		Terminale	12	Lycée / Instituts techniques /	4ème année
			13	Instituts professionnels	5ème année

L'enseignement secondaire en Italie dure un an de plus qu'en France (8 ans en France contre 9 ans en Italie). L'enseignement italien est composé de l'école secondaire du premier degré qui dure 3 ans puis de l'école secondaire du second degré qui dure 5 ans. Il se termine donc à l'âge de 19 ans. En France, le collège se déroule sur 4 ans et le lycée 3 ans. On observe aussi une différence au niveau des choix d'orientation. En France, le collège est une école pour tous, qui se termine par un examen (le brevet des collèges) avec ensuite une première orientation en fin de troisième vers un lycée général et technologique (LGT) ou professionnel (LP). La classe de seconde en lycée général ou technologique est commune pour tous, puis le choix de filière se fait pour les classes de première et terminale. Le lycée se conclut par l'examen du baccalauréat. En Italie, l'école secondaire du premier degré est une école pour tous, qui comme en France, se termine par un examen (*licenza media*). Puis les élèves qui poursuivent à l'école secondaire du second degré choisissent leur orientation pour les cinq années soit au lycée, où ils ont le choix entre plusieurs filières générales, soit dans un institut technique ou soit dans un institut professionnel. A la fin de ces cinq années, les élèves italiens ont un examen final appelé *maturità*. Toutes ces informations sont réunies dans les deux schémas de la Fig. 1 ci-après.

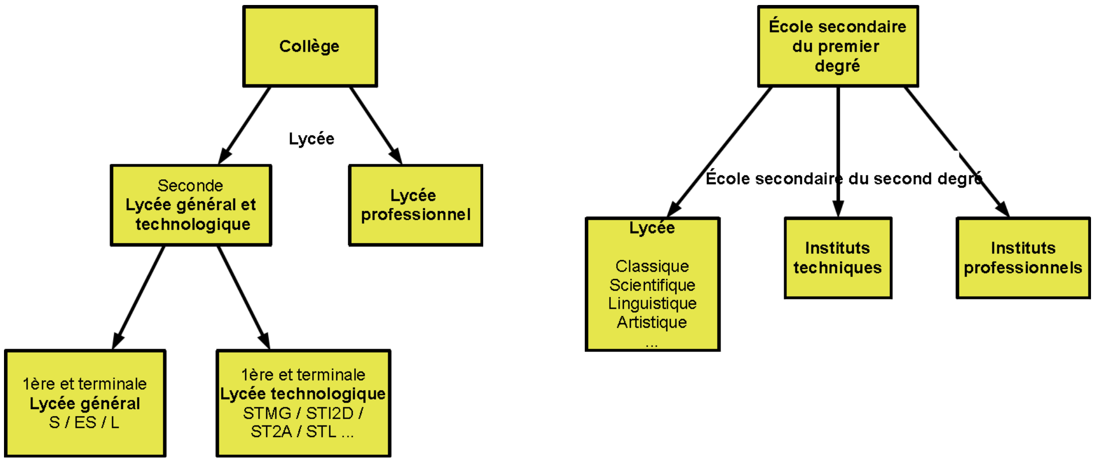


FIGURE 1 – Systèmes scolaires secondaires en France (à gauche) et en Italie (à droite)

1.2 Quelques références statistiques sur l'enseignement secondaire en France et en Italie

1.2.1 Quelques chiffres en France

Nous vous présentons quelques références statistiques extraites de *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche* édition 2013 ([17]) du Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie, disponibles sur le site Eduscol. 93,5% des élèves du panel 1995 ont accédé au lycée avec 58,5% en lycée général et technologique et 35% en lycée professionnel. A la rentrée 2012, les élèves de terminale du lycée général et technologique étaient répartis de la façon suivante : 35,9% en série S (scientifique) dont 19,7% de ces élèves en spécialité mathématiques, 22,8% en série ES (économique et social), 11,8% en série L (littéraire) et 29,5% dans les diverses filières technologiques. 678 000 candidats ont passé les épreuves du baccalauréat à la session de juin 2013 : 49% dans les séries générales, 21% dans les séries technologiques, 30% dans la voie professionnelle. Selon les résultats provisoires donnés sur le site Eduscol, le taux de réussite au baccalauréat général s'établit à 91,9%. Ce taux progresse régulièrement depuis dix ans. Le taux de réussite au baccalauréat technologique est de 86,4%, en progression par rapport à 2012 (+ 3,3 points) et celui du baccalauréat professionnel se stabilise à 78,6%. Nous avons compilé ces données dans la Fig. 2, ci-dessous, en gardant à l'esprit que le diagramme est simplifié car tous les pourcentages ne correspondent pas exactement aux mêmes cohortes.

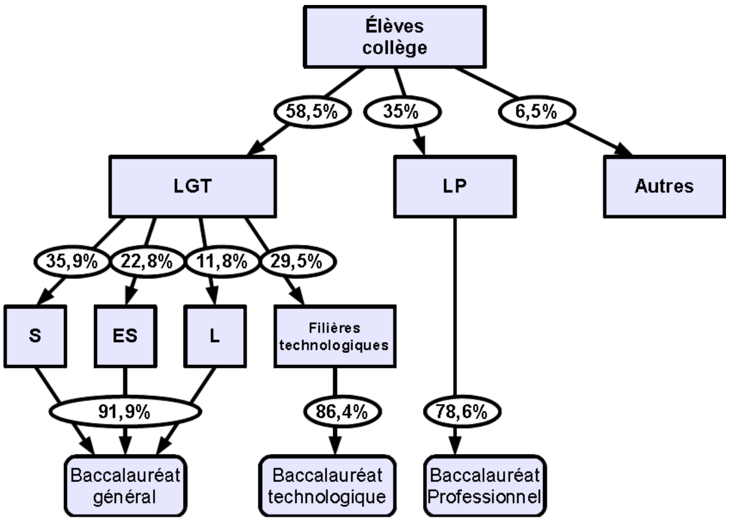


FIGURE 2 – Tendance de la répartition des élèves suivant leur orientation en 2012/2013

Si l'on s'intéresse aux diplômes obtenus par les élèves du panel de 1995, la proportion des élèves n'ayant aucun diplôme est de 12,8% et celle des élèves ayant obtenu seulement le brevet des collèges est de 7,5%. La proportion de bacheliers est de 62,2%, avec 33,7% pour les séries générales (16,6% pour la série S), 18,5% pour les séries technologiques et 11,5% pour les filières professionnelles. Ces données sont présentées dans le tableau 2 ci-après. 53,3% ont accédé à l'enseignement supérieur et 43,7% ont été diplômé de l'enseignement supérieur. Pour ce qui nous intéresse dans notre étude, en France, les élèves de terminale en série scientifique et les bacheliers de cette série représentent respectivement une proportion de 18,6% et de 16,6% d'une génération.

1.2.2 Quelques chiffres en Italie

Les données utilisées dans ce paragraphe sont extraites de l'enquête statistique *Noi Italia 2013* ([18]), disponible sur le site Istat, et de *Focus sulle iscrizioni alla scuola secondaria di II grado* ([19]) du MIUR (Ministère de l'Instruction, de l'Université et de la Recherche), disponible sur le site MIUR. En 2011, la proportion des jeunes italiens qui ont arrêté leurs études après l'école secondaire du premier degré est de 18,2%. Pour les autres élèves, 76,3% se sont inscrits à l'école secondaire du second degré avec 37,5% en lycée, 24,5% en institut technique et 14,3% en institut professionnel. Les 5,4% restants se sont inscrits dans des centres de formation professionnelle (CFP). Parmi les élèves qui, à la rentrée 2011, ont choisi le lycée : 14,4% étaient au lycée classique, 48,6% au lycée scientifique, 13,8% au lycée linguistique et 23,2% dans d'autres

Table 2 – Diplôme le plus élevé obtenu par les élèves du panel 1995 en fin d'études secondaires (France métropole, public et privé), d'après *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche* édition 2013 ([17])

Diplôme	Aucun	DNB (brevet)	Baccalauréat			Autres (CAP ou BEP)
			Bac général	Bac techno	Bac pro	
Fréquence	12,8%	7,5%	33,7%	18,5%	11,5%	16,0%

CAP : Certificat d'Aptitude Professionnelle (2 ans après la troisième)
BEP : Brevet d'Etudes Professionnelles (3 ans après la troisième)

lycées (comme lycée artistique, lycée de sciences humaines,...). Ces données sont rassemblées dans la Fig. 3, ci-dessous.
Le MIUR a également conduit une étude statistique sur la réussite à l'examen final de l'école secondaire du second degré (*maturità*). Contrairement au système français, tous les élèves en cinquième année de l'école secondaire du second degré ne se présente pas à l'examen final : ce sont les enseignants qui décident si l'élève peut ou non passer la *maturità*. En 2013, 95,5% des élèves ont été admis à passer l'examen et le taux de réussite a été de 99,1%, en d'autres termes 94,6% des élèves de dernière année ont obtenu l'examen final. Ces données sont tirées d'un panel de 90% des écoles. Les diplômes obtenus en 2011/2012 ont été repartis de la façon suivante : 50,5% aux lycées, 33,9% aux instituts techniques et 15,6% aux instituts professionnels. Ensuite, seuls 19% des jeunes de 19 ans s'inscrivent à l'université.

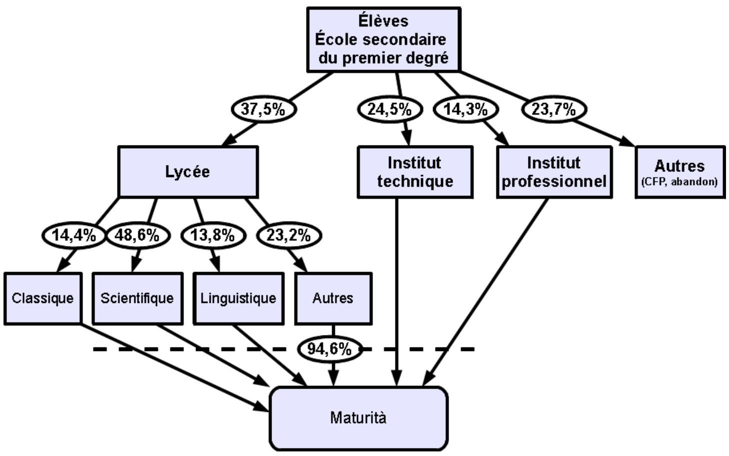


Figure 3 – Tendance de la répartition des élèves suivant leur orientation en 2011/2012

1.2.3 Bilan sur le contexte de l'enseignement secondaire en France et en Italie

Pour conclure cette partie, nous avons remarqué des différences entre les deux systèmes scolaires du secondaire, que ce soit dans la durée des études, dans les choix d'orientation, dans les conditions de passage de l'examen final. Cependant pour le niveau et la filière qui nous intéressent dans notre étude, nous remarquons de la proportion de population concernée dans les deux pays sont pratiquement identiques (autour de 20% en dernière année de lycée en filière scientifique). En revanche, le taux de réussite à l'examen final est supérieur en Italie.

1.3 Quelques références statistiques sur l'enseignement supérieur en France

N'ayant pas réussi à trouver des données comparables dans les deux pays, nous nous limitons, dans ce paragraphe, à présenter quelques statistiques sur l'enseignement supérieur et plus particulièrement sur l'université en France. Pour connaître des chiffres sur l'enseignement supérieur en Italie, nous vous proposons de vous reporter à l'annexe A. Cependant, avant de commencer, nous pouvons faire remarquer que les systèmes français et italiens sont différents pour l'enseignement supérieur. En Italie, un lycéen qui veut poursuivre ses études dans le public ne peut aller qu'à l'université publique. Il n'existe pas de classes prépatoires aux grandes écoles (CPGE), ni grandes écoles d'ailleurs. Il existe cependant trois *Polytecnico* (écoles polytechniques) pour préparer à l'ingénierie et l'architecture (mais ce sont tout de même des parcours universitaires). Comme nous l'avons mentionné plus tôt, seuls 19% des jeunes de 19 ans s'inscrivent à l'université, ce qui est beaucoup plus faible qu'en France, où plus de la moitié d'une tranche d'âge accède à des études supérieures.

Pour la France, d'après *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche édition 2013* ([17]), disponible sur le site Eduscol, 53,3% des élèves du panel 1995 ont accédé à l'enseignement supérieur. Pour l'année scolaire 2012/2013, 59,1% des étudiants, toutes disciplines confondues, étaient inscrits à l'université, contre par exemple 3,4% en CPGE (classes préparatoires aux grandes écoles). Pour les étudiants entrant en Licence 1ère année, seuls 5,1% étaient inscrits dans des filières des Sciences fondamentales et applications. La fréquentation de ces filières ne cesse de diminuer ces dernières années, avec une baisse de 7,8% des effectifs d'étudiants entre 2004 et 2012. Les filières de Sciences fondamentales à l'université et les CPGE scientifiques représentent respectivement un poids de 21,1% et 6,6% en 2012 dans le total des formations scientifiques. Une grande majorité des étudiants accédant à ces filières sont issus d'un baccalauréat scientifique. Prenons l'exemple de l'Université Paris Diderot (Paris 7).
A la rentrée 2012, les 2948 néo-bacheliers inscrits à l'Université Paris Diderot sont répartis suivant le tableau 2, ci-dessous.

TABLE 3 – Répartition des étudiants néo-bacheliers en L1 à l'Université Paris Diderot en 2012/2013 et admission en L2 de ces étudiants.

Domaine	Sciences	Médecine	Langues	Lettres	SES/psycho	Cinéma	Total
Inscrits en L1							
Effectif	627	1279	487	310	197	48	2948
Fréquence	21,3%	43,4%	16,5%	10,5%	6,7%	1,6%	100%
Admis en L2							
Effectif	200	147	199	124	90	35	795
Taux de réussite	31,9%	11,5%	40,9%	40,0%	45,7%	72,9%	27,0%

63,3% des étudiants inscrits en L1 sont issus d'un baccalauréat scientifique. Le taux de passage en L2 est relativement faible sur l'ensemble des filières : seuls 27% des néo-bacheliers poursuivent en L2 l'année suivante. En enlevant les étudiants en médecine, le pourcentage s'élève à 40,2%, ce qui reste tout de même assez faible. Si nous nous intéressons tout particulièrement aux filières scientifiques, la répartition des étudiants est présentée dans le tableau 3, ci-après.

TABLE 4 – Répartition des étudiants néo-bacheliers en L1 scientifique à l'Université Paris Diderot en 2012/2013 et admission en L2 de ces étudiants.

Filière	DUT	Chimie	CPEI	Info	MASS	Maths	Maths-Info	Physique	SV	STE	Total
Inscrits en L1											
Effectif	53	57	14	88	59	44	44	72	175	21	627
Fréquence	8,5%	9,1%	2,2%	14,0%	9,4%	7,0%	7,0%	11,5%	27,9%	3,3%	100%
Admis en L2											
Effectif	38	11	6	16	22	9	13	17	56	12	200
Taux de réussite	71,7%	19,3%	42,9%	18,2%	37,3%	20,5%	29,5%	23,6%	32,0%	57,1%	31,9%

DUT : Mesures physiques
CPEI : Cycle préparatoire aux Écoles d'Ingénieurs
MASS : Mathématiques appliquées aux sciences sociales
SV : Sciences de la vie
STE : Sciences de la terre et environnement

Pour l'année scolaire 2012/2013, 83,4% des étudiants néo-bacheliers inscrits en L1 dans une filière scientifique sont issus d'un baccalauréat scientifique. Le taux de passage en L2 pour ces étudiants est de 36,3% contre 9,6% pour les autres. Nous vous présentons les chiffres pour les L1 Mathématiques, Physique et Informatique à la Fig. 4.

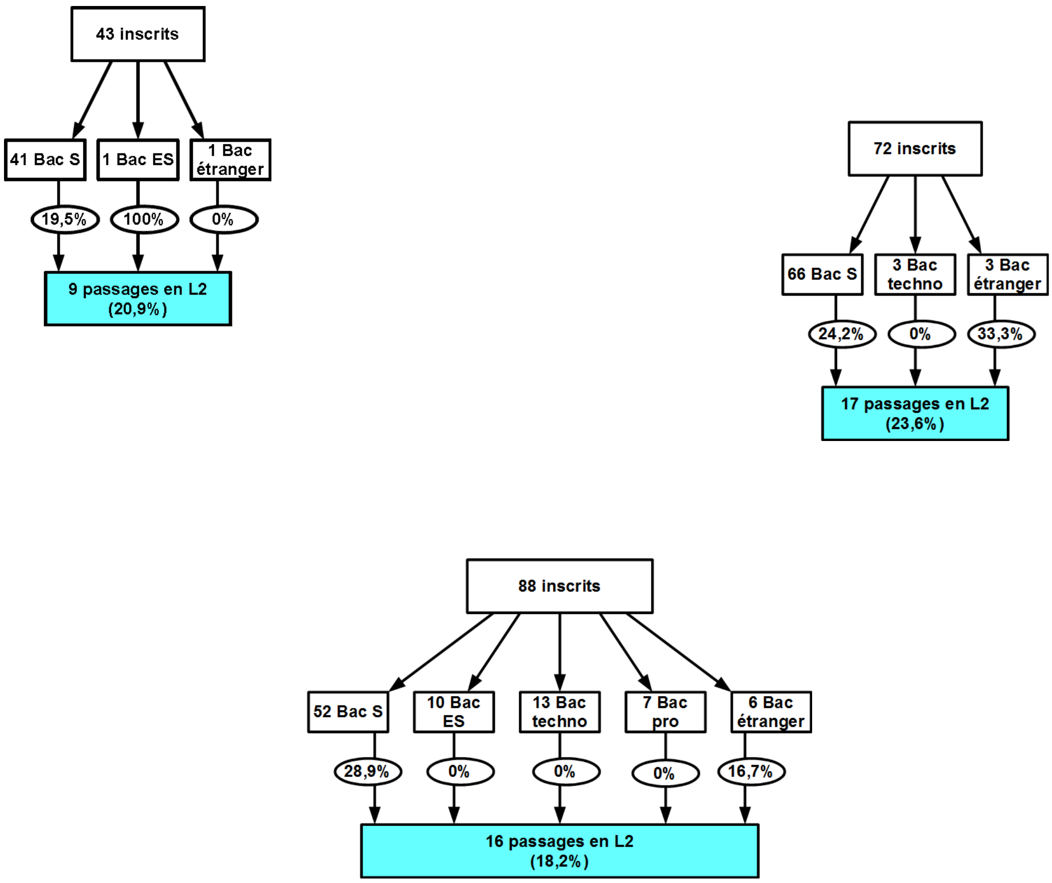


FIGURE 4 – Répartitions en L1 Mathématiques (à gauche), en L1 Physique (à droite) et en L1 Informatique (en bas)

Après cette comparaison de l'enseignement secondaire et une rapide présentation de l'enseignement supérieur en France et en Italie, nous voulons nous intéresser particulièrement à une notion des curricula français et italien : les fonctions, et plus généralement l'Analyse, dans la filière scientifique du lycée. Dans les parties suivantes, nous présenterons donc une comparaison des programmes sur les fonctions, puis nous analyserons les exercices portant sur les fonctions dans les examens nationaux de 2013 des deux pays.

2 Comparaison des programmes en France et en Italie sur les notions de fonctions

Pour commencer notre étude comparative sur l'enseignement des fonctions, nous présentons, dans cette partie, une comparaison détaillée entre les programmes français et italiens.

2.1 L'enseignement des fonctions en France et en Italie

Nous comparons l'enseignement des notions autour des fonctions au cours de l'enseignement secondaire en France et en Italie, pour la filière scientifique, au travers des programmes institutionnels. L'enseignement des fonctions, en France, débute en classe de troisième et, en Italie, en première année du lycée (scientifique) ; ces deux années sont « équivalentes » en terme d'année scolaire. Dans un premier temps, nous indiquons, sous forme de tableau, les notions abordées dans les programmes classe par classe, dans les deux institutions, à partir de la troisième, en France, et de la première année du lycée (scientifique), en Italie. Il est important de préciser qu'en Italie les programmes des classes de première et deuxième années sont regroupés ; ainsi que les programmes de troisième et quatrième années. Ces quatre années sont regroupées par bloc de deux ans durant lesquels les élèves d'une classe garde le même enseignant (sauf exceptions). L'enseignant organise donc les apprentissages de ses élèves sur deux ans. Pour la France, nous nous sommes intéressées aux nouveaux programmes qui ont débuté avec la réforme des lycées en 2010 et en 2009 pour la troisième. En Italie, il s'agit aussi de nouveaux programmes parus en 2010. Les programmes des deux pays ont une présentation totalement différente. En France, dans chaque partie du programme, nous avons un tableau qui détaille les contenus, les capacités attendues et précisent certains points sous forme de commentaires. En Italie, le programme est lui aussi divisé en parties, mais à l'intérieur de chacune, les précisions sont données sous forme discursive, de manière succincte, sans commentaires, ni détails.

En France, les fonctions rentrent dans la partie du programme intitulée "Organisation et gestion des données, fonctions" en troisième, "Fonctions" en seconde, puis "Analyse" en première et terminale. Les fonctions représentent environ 40% du programme en seconde, un tiers en première (et plus de 40% avec les suites) et 40% en terminale (et la moitié avec les suites). En Italie, on les retrouve dans la partie "*Relazioni e funzioni*" ("Relations et fonctions") tout au long du lycée. En première et deuxième années, les fonctions représentent environ 20% du programme, plus du tiers en troisième et quatrième années et les trois quarts de l'année en cinquième année. Dans les tableaux ci-dessous, nous essayons de rendre compte des programmes dans les deux pays en parallèle. Nous avons inclus, dans notre étude, les suites numériques, car nous pensons que l'étude des suites peut jouer un rôle dans l'apprentissage des fonctions (étant donné que ce sont des fonctions particulières, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).

Table 5 – Programmes sur les fonctions en France et en Italie (1).

<table>
<tr><th colspan="2">France</th><th colspan="2">Italie</th></tr>
<tr><th>Classe</th><th>Contenus</th><th>Classe</th><th>Contenus</th></tr>
<tr><td>3ème</td><td>Fonctions
- Image, antécédents, représentation graphique, tableau de valeurs.

- Fonction affine, fonction linéaire : représentation graphique, expression algébrique, proportionnalité.</td><td rowspan="2">1ère et 2ème années</td><td rowspan="2">Relations et fonctions
- Vocabulaire des ensembles et des fonctions (domaine, composition, inverse,...).
- Modélisation de problèmes simples (mise en équations, inéquations, interprétation des résultats).

- Fonction affine, fonctions polynômes du second degré : représentation graphique, expression algébrique, résolution d'équation.

- Fonction valeur absolue, fonction inverse, fonctions affines par morceaux, fonctions circulaires.

- Proportionnalités directe et inverse.

- Différents registres sur les fonctions : représentation graphique, calcul numérique, expression algébrique.</td></tr>
<tr><td>2nde</td><td>Fonctions
- Image, antécédents, représentation graphique, tableau de valeurs.

Etude qualitative des fonctions
- Variations d'une fonction, extremum.

Etudes de fonctions
- Fonction affine : représentation graphique, calcul du coefficient directeur, tableau de signes, ...
- Fonction carrée, fonction inverse : variations, représentations graphiques.

- Fonctions polynômes du second degré : variations, représentation graphique, détermination des coordonnées du sommet.
Equations, inéquations
- Résolution graphique d'équation et d'inéquation.
- Tableau de signes d'un produit, d'un quotient.</td></tr>
</table>

TABLE 6 – Programmes sur les fonctions en France et en Italie (2).

France		**Italie**	
Classe	**Contenus**	**Classe**	**Contenus**
1ère	**Second degré** - Résolution algébrique d'équation du second degré, tableau de signes d'un trinôme. **Étude de fonctions** - Fonction racine carrée, fonction valeur absolue : variations, représentations graphiques. - Transformations de fonctions (translation, homothétie,...), composition avec la fonction racine carrée, inverse,... **Dérivation** - Nombre dérivé d'une fonction en un point. - Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. - Fonction dérivée, dérivées des fonctions usuelles connues, dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient. - Lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction, extremum. **Suites** - Mode de génération d'une suite. - Suite arithmétique, suite géométrique.	3ème et 4ème années	**Relations et fonctions** - Fonctions polynômes de degré n : étude du nombre de solutions d'une polynôme (graphique). - Suites numériques : exemples simples - Suites arithmétiques, suites géométriques. - Étude des fonctions de référence : étude graphique et fonctionnelle. - Fonction exponentielle, fonction logarithme : étude graphique et fonctionnelle. - Modèles de croissance et de décroissance exponentielle, modèles de variations périodiques (en lien avec la physique). - Fonctions composées, fonctions inverses. - Concept de vitesse de variations d'un processus représenté par une fonction.

TABLE 7 – Programmes sur les fonctions en France et en Italie (3).

France		Italie	
Classe	**Contenus**	**Classe**	**Contenus**
Terminale	**Suites** - Raisonnement par récurrence. - Limite finie ou infinie d'une suite. Limite et comparaison. Opérations sur les limites. - Comportement à l'infini de la suite (q^n) avec q nombre réel. - Suite majorée, minorée, bornée. **Limites de fonctions** - Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini, limite infinie d'une fonction en un point, limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composition de fonctions. **Fonctions** - Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes des coordonnées.		
	Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires. **Calculs de dérivées : compléments** - Dérivée d'une composée avec des fonctions de références connues. **Fonctions sinus et cosinus / Fonction exponentielle / Fonction logarithme népérien.** **Intégration** - Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a;b]$ comme aire sous la courbe. - Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. - Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. - Linéarité, positivité, relation de Chasles. Valeur moyenne.	5ème année	**Relations et fonctions** - Concept de limite d'une suite et d'une fonction (calcul de limites dans des cas simples. - Concepts de l'analyse : continuité, dérivabilité et intégrabilité. - Liens avec vitesse instantanée, tangente à une courbe, calcul d'aires et de volumes. - Dérivée de fonctions connues. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une composée. Dérivée des fonctions rationnelles. - Intégration des fonctions usuelles. - Détermination d'aires et de volumes simples. - Équation différentielle. Résolution et principales propriétés. - Problèmes d'optimisation et applications dans divers contextes.

Au vue de ces tableaux, nous observons que les fonctions sont étudiées durant quatre années, en France (de la troisième à la terminale), et les cinq années du lycée, en Italie. Les notions de base sur les fonctions font l'objet de la classe de troisième et seconde en France, tandis qu'en Italie, toutes les fonctions usuelles, sans entrer dans les notions plus complexes de dérivée par exemple, sont étudiées pendant les quatre premières années du lycée. La cinquième année du lycée italien est ensuite pratiquement entièrement consacrée à l'analyse et l'étude de fonctions. Nous remarquons que le nombre dérivé et la fonction dérivée sont introduits en première en France, alors qu'ils ne sont introduits qu'en cinquième année en Italie, soit deux années scolaires plus tard. La continuité est abordée en France en terminale et en cinquième année en Italie (avant les notions de dérivabilité). De plus, l'introduction de ces notions se fait de façon totalement différente dans les deux pays.

En France, il est précisé explicitement dans les programmes que : « Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite ». Les élèves n'ont donc pas de définition formelle de la limite en première, seulement l'intuition. Les limites de suites et de fonctions ne sont vues qu'en terminale, mais encore aucun formalisme n'est exigé : « Pour exprimer u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : "tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang". Pour exprimer u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit : "tout intervalle de la forme $]A; +\inf[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang"». Et ensuite, « le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Après ces « définitions » de la limite, la définition du nombre dérivé n'est pas nécessairement revue. Pour ce qui est de la continuité, qui est vue après la dérivation, le programme de terminale précise : « On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle » . Donc, aucun formalisme n'est introduit au lycée, il faut attendre les études supérieures pour rencontrer les définitions formelles.

En Italie, l'apparition des notions de limites, de continuité et de dérivabilité arrivent dans cet ordre et seulement en cinquième année, après que toutes les fonctions aient été rencontrées dans les années précédentes. De plus, ces notions sont abordées directement avec le symbolisme en ε et δ (ou η). Dans un premier temps, la notion de limite est introduite, puis grâce à cette définition, sont définis rigoureusement la continuité en un point et le nombre dérivé d'une fonction en un point.

Nous pouvons faire un parallèle entre la troisième/seconde en France et la première et deuxième années de lycée en Italie : les mêmes notions sont abordées autour des différentes représentations d'une fonction (graphique, expression algébrique, valeurs numériques), des équations et inéquations du second degré. Ce dernier thème étant tout de même plus poussé en Italie, où le discriminant est introduit dans les deux premières années alors qu'il faut attendre la première en France. De plus, plus de fonctions sont rencontrées (valeur absolue, racine carrée). Ensuite, pendant qu'en France, le second degré fait l'objet du début de la première S, ce sont les fonctions polynômes de degré n qui sont étudiées en Italie (notamment autour du nombre de solutions aux équations, à l'aide d'un graphique). De nouvelles fonctions sont abordées dans les deux pays. Cependant en France, dès la première, les notions de nombre dérivé et de fonction dérivée sont introduites alors qu'il faut attendre la cinquième année en Italie. Les suites arithmétiques et géométriques sont étudiées en première en France et en troisième et quatrième années en Italie. Toutes les fonctions de références sont vues dans les quatre premières années du lycée italien. En France, en terminale, dernière année du lycée, de nouvelles fonctions sont introduites (exponentielle, logarithme népérien). En terminale et en cinquième année, l'étude de fonctions est centrale dans les exercices mais elle est plus poussée en Italie où l'étude des asymptotes, de la convexité de la fonction font partie intégrante de l'étude des fonctions. Le calcul intégral est introduit dans les deux pays, avec un enseignement plus approfondi en Italie, avec le calcul d'intégrales impropres. Nous pouvons donc repérer des similarités et des différences entre les enseignements sur les fonctions dans les deux pays.

2.2 Les fonctions de référence

Nous avons aperçu des différences dans l'apparition des différentes fonctions de référence au cours du lycée, nous avons donc voulu ensuite mettre en évidence le niveau pour lequel apparaissent pour la première fois les différentes fonctions usuelles dans l'apprentissage des élèves dans les deux pays. Ces informations sont regroupées dans le tableau 8 ci-après.

TABLE 8 – Introduction des fonctions de référence au cours de l'enseignement.

France		**Italie**	
3ème	Fonction linéaire, fonction affine	1/2	Fonction affine Fonction polynôme du second degré Fonctions inverse (proportionnalité inverse) Fonction valeur absolue Fonctions affines par morceaux Fonctions sinus et cosinus
2nde	Fonction carrée Fonction polynôme du second degré Fonction inverse Fonctions homographiques		
1ère	Fonction racine carrée Fonction valeur absolue Transformations de fonctions Composée de fonctions de référence	3/4	Fonction polynôme (généralisé) Fonction racine carrée Fonction exponentielle Fonctions logarithmes Composée de fonctions de référence
Terminale	Fonction exponentielle Fonction logarithme népérien Fonctions sinus et cosinus		
		5	

Nous remarquons que les mêmes fonctions de référence sont introduites dans l'enseignement secondaire, mis à part l'étude plus développée en Italie des fonctions polynômes de degré 3, 4 voire plus élevé. Quelques différences sont tout de même à repérer. Dans les deux pays, l'introduction des fonctions est accompagnée par la découverte des fonctions affines. En Italie, on insiste moins sur les fonctions linéaires, celles-ci étant vues seulement comme un cas particulier des fonctions affines, alors qu'en France une place importante est accordée aux fonctions linéaires en troisième. Ensuite sont introduites les fonctions du second degré. En Italie, le travail sur les fonctions du second degré est plus précoce qu'en France, avec la résolution algébrique d'équation du second degré vue dans les deux premières années du lycée. La fonction inverse est introduite en seconde en France et au cours des deux premières années en Italie, mais les fonctions homographiques ne sont étudiées plus généralement au cours de ces premières années qu'en France. La fonction valeur absolue est introduite un (ou deux) an(s) après en France. Les fonctions logarithmes ne sont enseignées dans leur généralité qu'en Italie, alors qu'en France, seule la fonction logarithme népérien est abordée (en terminale). Nous remarquons que jusqu'à la dernière année d'étude au lycée, les élèves français découvrent de nouvelles fonctions de référence (exp, ln, sin, cos), tandis qu'en Italie, en cinquième année, plus aucune nouvelle fonction n'est découverte. Elles peuvent être mobilisées pour accompagner les nouvelles notions telles que les limites, la continuité et la dérivabilité. L'ordre d'apparition des fonctions usuelles est donc légèrement différent dans les deux pays, mais ce qui est à mettre en avant, c'est le fait que la connaissance des fonctions usuelles semble importante en amont de l'introduction des notions d'analyse : continuité, limites, dérivabilité en Italie ; ce qui n'est pas le cas en France, car de nouvelles fonctions sont encore introduites en terminale. Cela dit, il faut garder en tête que les élèves français disposent d'une année de moins d'enseignement secondaire.

Ces comparaisons curriculaires, nous ont permis de mettre en avant des similitudes mais aussi des différences dans l'enseignement des fonctions en France et en Italie, notamment du point de vue du formalisme utilisé en Italie dans la définition de limites, du point de vue de l'étude de fonctions,... Il nous a alors paru intéressant d'étudier des sujets de l'examen final en France (baccalauréat scientifique) et en Italie (*maturità scientifica*), car il est certain que ces sujets influencent le mode de travail des enseignants, en tout cas pour ce qui est de la dernière année de lycée. Dans la partie suivante, nous présentons notre analyse a priori des exercices en lien avec les fonctions dans les sujets de juin 2013 dans les deux pays, ce qui nous amène à faire une comparaison plus poussée des enseignements dans les deux pays.

3 Comparaisons des sujets de mathématiques de l'examen final : Baccalauréat scientifique (en France) et *Maturità scientifica* (en Italie)

L'objectif de notre étude est de comparer les exercices/problèmes portant sur les fonctions d'une épreuve de mathématiques du baccalauréat scientifique en France et de la *maturità scientifica* en Italie. Le but de cette analyse est de dégager des différences dans la formulation des énoncés, dans les tâches demandées et dans les activités attendues des élèves, et ensuite de les caractériser. Pour cela, nous avons fait une analyse a priori des types de tâches demandées et des activités (potentielles) attendues des élèves. Les activités des élèves correspondent à ce que les élèves pensent, disent, écrivent (et n'écrivent pas), lors du travail provoqué par une tâche précise (Robert, 2003 [13]).

3.1 Méthodologie de notre analyse a priori

Nous avons répertorié, ci-dessous, certaines des questions que nous nous sommes posées pour faire notre analyse a priori et précisé dans quels buts. Nous avons en grande partie repris les axes 3 et 4 des analyses des tâches d'Aline Robert (1998 [12]). En annexe B, vous trouverez des approfondissements de certains des outils théoriques en question ci-dessous, écrits par Aline Robert.

1. <u>*Types de tâches*</u> *:* De quels types de tâches s'agit-il, au sens de Chevallard (1991 [4], 1992 [5]) ?
   On répertorie les types de tâches pour avoir une idée du spectre des tâches travaillées et évaluées dans ces examens.
2. <u>*Connaissances à mettre en fonctionnement*</u> *:*
   - *Ancien/Nouveau :* Les connaissances mises en jeu sont-elles anciennes (avant la dernière année de lycée) ou nouvelles (de la dernière année de lycée) ?

- *Degré d'ouverture et aides de l'énoncé :* Est-ce que la question est formulée de façon ouverte, quasi ouverte, quasi fermée ou fermée ? Une méthode (ou un cadre ou un registre) est-elle indiquée ? Sur quoi porte l'énoncé (résultat, méthode, démarche) ? Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé ?
- *Niveau de mise en fonctionnement des connaissances :* Quel est le niveau de mise en fonctionnement attendu (technique, mobilisable, disponible) ?
- *Adaptations :* Y a-t-il des adaptations à faire : reconnaissance de modalités d'application, introduction d'intermédiaires, introduction d'étapes, utilisation des questions précédentes, existence de choix de méthodes ?
- *Outil/objet :* Quel est l'aspect outil/objet des fonctions, ou autres connaissances, mises en jeu ? (Douady, 1986 [7])

Ces indicateurs caractérisent ce qui est travaillé, décrivent la richesse et la variété de l'activité des élèves et servent à questionner à la fois le degré de disponibilité éventuelle supposée et la mobilisabilité espérée des objets et des outils à utiliser.

3. *Moyens de contrôle :* Quels moyens de contrôle a l'élève ? Les moyens de contrôle sont-ils internes (dans la question même) ou externes (dans les questions suivantes) ?
Bien que ces moyens de contrôle soient peu utilisés par les élèves, ils renseignent sur l'autonomie laissée aux élèves dans le sujet proposé.
4. *Perspectives :* Quelles perspectives sur les fonctions sont en jeu (ponctuelle, ponctuelle universelle, globale, locale) ? Y a-t-il des changements de perspectives ? (Vandebrouck, 2011 [16])
Ces informations renseignent sur le statut des concepts mathématiques travaillées par les élèves.
5. *Cadres, cadres de travail, registres*
   - *Cadres et cadres de travail :* Quel est le cadre en jeu ? Et quels sont les différents types de travail dans ce cadre ? Y a-t-il des changements ou des jeux de cadres de travail ? (Douady, 1986 [7])
   - *Registres :* Quels registres de représentation sur les fonctions sont en jeu dans la question et dans la réponse ? Y a-t-il des changements de registres au sein de la réponse ou entre la question et la réponse ? (Duval, 1993 [8])

   L'analyse des cadres de travail et des registres complète la description des activités attendues des élèves. Il est important de distinguer les changements qui sont indiqués et ceux que l'élève doit prendre en charge seul.

On peut compléter l'analyse des activités attendues de l'élève (a priori) avec d'autres questions : y a-t-il à reconnaître (un type de problème, un type de justification, un type d'informations), à conjecturer (à l'aide d'un dessin, d'un calcul...), à modéliser, à faire des mise en relation, à interpréter, à changer de points de vue ? Faut-il choisir une méthode, un outil ?

Nous rappelons que le degré d'ouverture d'une question est lié à la formulation de l'énoncé. D'après Robert(1988 [10]), une question peut être :

– fermée : du type "Montrer que ... en utilisant ...". Peu d'initiative est laissé à l'élève vu que la méthode de résolution est donnée.
– quasi fermée : du type "Montrer que ...". La méthode n'est pas donnée, mais suivant la place de l'exercice dans l'apprentissage, l'élève aura plus ou moins d'adaptations à faire par rapport aux notions du cours, ce qui fera varier son degré d'ouverture.
– ouverte ou quasi ouverte : de type "Que peut-on dire de ...". Dans ce cas, ni ce qu'il faut démontrer, ni la méthode ne sont précisés. La question peut être plus ou moins ouverte en fonction du contexte.

Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est de l'ordre du technique, du mobilisable ou du disponible. Le niveau technique correspond à des mises en fonctionnement indiquées et isolées, mettant en jeu des applications directes du cours (théorème, définition, formule,...). Le niveau mobilisable correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées, mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois. Et enfin, le niveau disponible correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications (Robert, 1998 [12]). On peut cependant repérer deux niveaux de disponibilité : la disponibilité (supposée ou à acquérir) du caractère objet d'une notion (comme la mémorisation d'une formule pour travailler directement la notion en jeu) et la disponibilité d'un caractère outil de la même notion (à mobiliser pour résoudre une question qui ne porte pas directement sur la notion). La disponibilité "outil" présuppose donc la disponibilité "objet" (dans ce cas, nous ne préciserons que le caractère outil). Il faut cependant rappelé que ces catégories sont des notions relatives au contexte de l'enseignement reçu des élèves, et aussi au contexte de la recherche.

Le seul cadre (Douady, 1986 [7]) rencontré dans les sujets étudiés, à quelques rares exceptions, est le cadre fonctionnel. Mais à l'intérieur de ce cadre, le travail de l'élève peut être algébrique, numérique, graphique ou fonctionnel. Nous introduisons de plus un nouveau cadre de travail, que nous appelons *travail d'analyse algébrisée*. Ce cadre de travail se rencontre quand le calcul algébrique est étendu à des expressions avec des symboles (comme, par exemple, la limite ou l'intégrale), faisant intervenir l'infini et/ou à des expressions non définies : par exemple, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x-1}$, $\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x$,...

Nous avons trouvé intéressant d'introduire ce nouveau cadre de travail qui est une extension du travail algébrique mais sur un ensemble plus grand, où les opérations algébriques se font sur des objets de l'analyse. Cette extension des opérations algébriques peut parfois amener à de nouvelles formes, que nous appelons indéterminées, qui ne peuvent pas être traitées avec les règles de l'algèbre. Par exemple : "$(+\infty) - (+\infty)$" n'est pas égal à 0, mais est une forme indéterminée. Nous avons remarqué que ce cadre de travail est un cadre transitionnel entre l'algèbre et l'analyse. Nous introduisons aussi le registre associé *expression d'analyse algébrisée* pour désigner les expressions comprenant les symboles limite, intégrale et/ou infini,...

Les différents cadres de travail rencontrés sont donc :
- algébrique
- numérique
- graphique
- fonctionnel
- analyse algébrisée
- utilisation de la calculatrice graphique

et les différents registres rencontrés sont :
- langue naturelle
- expression algébrique
- représentation graphique
- expression numérique
- figure géométrique
- tableau
- expression d'analyse algébrisée.

Il faut garder à l'esprit que nos analyses a priori ne sont faites qu'à partir de sujets d'examen sans copies d'élèves à l'appui, ce qui modifieraient sûrement certaines de nos analyses.

3.2 Baccalauréat scientifique Métropole juin 2013

L'épreuve de mathématiques du baccalauréat scientifique 2013 comporte quatre exercices dont un (l'exercice 2) portant sur les fonctions (cf Annexe C). L'exercice reprend des notions sur les fonctions abordées tout au long de l'année voire au cours des années antérieures : dérivée, sens de variations d'une fonction, intégrale. L'élève est censé ne pas rencontrer pour la première fois ce type de questions. Cet exercice est dans un contexte purement mathématique. Nous retrouvons plusieurs cadres de travail et registres. Chaque question est divisée en sous questions qui sont liées. La représentation graphique de la fonction à étudier est donnée dans l'énoncé.

3.2.1 Analyse a priori de l'exercice 2

Nous présentons l'analyse a priori question par question de cet exercice, disponible en Annexe C.

Question 1.a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

Réponse :

Pour déterminer $f(1)$, il suffit d'observer que $B\,(1;2)$ est un point de la courbe. $f(1)$ est l'ordonnée de B, soit 2. $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, qui est la droite (CB). La tangente est horizontale donc son coefficient directeur est 0.

Donc $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$.

Il s'agit de lectures graphiques, connaissances anciennes (de seconde (voire de troisième) et de première). La question est quasi fermée car la méthode à utiliser ("En utilisant le graphique") est donnée : il y a donc un changement de cadres de travail à effectuer, passer du graphique au numérique, mais cela est guidé. Ce qui importe dans cette question, c'est le résultat. L'élève, qui voudrait utiliser l'expression algébrique de f, donnée dans l'énoncé, serait bloqué rapidement par le fait qu'elle contient des paramètres. Il aura un moyen de contrôle externe de ses résultats, une fois que l'expression algébrique (sans paramètres) de la fonction sera donnée, plus loin dans l'exercice (question 2.b.). Pour déterminer $f(1)$, il faut introduire un premier intermédiaire : isoler le "1" ; puis un deuxième intermédiaire : considérer le point d'abscisse 1 sur la courbe, c'est-à-dire $B(1;2)$; et enfin faire un changement de point de vue pour remarquer que "2" (l'ordonnée de B) correspond à $f(1)$. Pour déterminer $f'(1)$, cette fois-ci, il faut introduire comme intermédiaire la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, et s'intéresser plus particulièrement à son coefficient directeur. En observant que la tangente est horizontale, par deux changements de points de vue successifs, on peut traduire cette information en terme de pente nulle, puis de coefficient directeur nul. On voit ici le jeu entre cadres de travail : on part d'une donnée numérique unidimensionnelle (l'abscisse 1 sur l'axe des abscisses), on utilise un intermédiaire graphique (le point B ou la tangente en B) qui est bidimensionnel, pour obtenir une information numérique unidimensionnelle sur f ou f' (la valeur de $f(1)$ ou $f'(1)$). Ce jeu de cadres de travail est non indiqué mais usuel. Les fonctions f et f' sont ici utilisées en tant qu'objet. La détermination graphique de l'image d'un nombre par une fonction et celle du nombre dérivé relèvent du niveau technique. L'élève a effectué ces "gammes" plusieurs fois au cours de son apprentissage. Il connait a priori les changements de points de vue à effectuer et les intermédiaires à introduire, possiblement dans la tête. Cependant le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ donné dans l'énoncé est sans quadrillage, ni graduations sur les axes, ce qui peut perturber la lecture graphique de l'élève. L'énoncé donne cependant les coordonnées de plusieurs points dont celui qui nous intéresse (le point B). Les traits de construction pour la lecture des coordonnées du point d'abscisse 1 sont déjà dessinés. La tangente au point d'abscisse 1 est la droite (CB), l'énoncé le précise, toutefois en parlant de la tangente à la courbe en B. La droite (CB) est dessinée "entièrement" sur le graphique et non "coupée" en segment comme souvent quand est tracée une tangente dans un énoncé. L'élève doit faire le lien entre la droite et une certaine manière de la caractériser, notamment le coefficient directeur de la droite ou la pente, ce qui nous intéresse ici. Il doit notamment soit appliquer la formule pour le calcul du coefficient directeur, soit reconnaître que la droite est horizontale et donc que son coefficient directeur vaut 0. La détermination du coefficient directeur de la droite, par le calcul ou par la propriété d'une droite horizontale, est supposé disponible en tant qu'objet.

Types de tâches	Déterminer graphiquement l'image d'un nombre par une fonction. Déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction au point d'une abscisse donnée.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	La détermination graphique d'une image et d'un nombre dérivé est supposé du niveau technique et la détermination du coefficient directeur de la droite est supposé disponible en tant qu'objet.
Outil/objet	La fonction f et la dérivée f' ont un statut d'objet.
Perspective	Ponctuelle sur f et f'
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Numérique $\rightarrow$ graphique $\rightarrow$ numérique
Registres	Question : Langue naturelle, représentation graphique Réponse : Langue naturelle

Question 1.b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}.$$

Réponse :

Pour tout x réel strictement positif, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2} = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}.$$

Il s'agit d'un calcul de dérivée. La question est quasi fermée et le résultat attendu est donné dans l'énoncé (moyen de contrôle interne) ; l'intérêt est donc la technique utilisée pour arriver au résultat. La question est un travail purement algébrique sur la fonction et sur la dérivée. Le cadre de travail graphique n'aide pas. L'élève doit appliquer les formules de dérivée des fonctions usuelles : $x \longmapsto k$, $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x$, la formule de la dérivée d'une somme et la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ce sont des connaissances anciennes (de la classe de première), mis à part pour la dérivée de ln, cependant ces calculs ont été revu en terminale. Pour appliquer la formule, il doit avant tout repérer les fonctions u et v (numérateur et dénominateur) puis calculer leur dérivée. Ici, l'élève doit aussi adapter ses connaissances au fait qu'il y a présence des paramètres a et b, qui sont des constantes. Il faut donc adapter les formules avec ces notations. Les formules de dérivation et les opérations algébriques sont supposées disponibles comme objets, rattachés à la mémoire de l'élève.

Type de tâche	Calculer la dérivée d'un quotient.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Les formules de dérivation et les opérations algébriques sont supposées disponibles comme objets.
Outil/objet	La dérivée f' a un statut d'objet.
Perspective	Ponctuelle universelle sur f'
Cadre	Fonctionnel
Cadre de travail	Algébrique
Registre	Question et réponse : Expression algébrique

Question 1.c. En déduire les réels a et b.

Réponse :
D'après la question 1.a., $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, et d'après l'expression de f et celle de f' trouvée à la question 1.b., on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(1) & = & 2 \\ f'(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{a + b\ln(1)}{1} & = & 2 \\ \dfrac{(b-a) - b\ln(1)}{1^2} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 2 \\ b - a & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} a & = & b & = & 2 \end{array} \right.$$

Donc $a = b = 2$.

Il s'agit de déterminer les valeurs des paramètres a et b. La question est quasi ouverte. La méthode n'est pas donnée. L'expression "En déduire", en revanche, indique à l'élève qu'il doit utiliser les questions précédentes pour déterminer les réels a et b. Seul le cadre de travail algébrique permet de résoudre la question. Le cadre de travail graphique ne permet pas d'aboutir au résultat. Dans cette question, la méthode et le résultat importent. L'élève a un moyen de contrôle externe de son résultat dans une question ultérieure (question 2.b.). L'élève doit regrouper les différents points de vue sur $f(1)$, c'est-à-dire sa valeur numérique et son expression algébrique ; informations qu'il a recueilli dans les questions précédentes. De même sur $f'(1)$. L'élève obtient un système d'équations linéaires mais sous une forme non "classique" ; qui le devient rapidement s'il repère que $ln(1) = 0$. La résolution est ensuite immédiate. Le système d'équation est supposée être une notion disponible comme outil pour dans un premier temps l'établir, puis le reconnaître en tant que système et enfin disponible comme objet pour la résolution. Cette connaissance est ancienne. Seul le résultat $ln(1) = 0$ est une connaissance nouvelle. L'introduction des intermédiaires sont à la charge de l'élève : il faut utiliser une question précédente, établir un système et le résoudre.

Type de tâche	Résoudre un système linéaire de deux équations, deux inconnues.
Degré d'ouverture	Quasi ouvert
Niveau de fonctionnement des connaissances	La détermination du système est supposée disponible comme outil et sa résolution est supposée disponible comme objet.
Outil/objet	La fonction f et la dérivée f' ont un statut d'objet (mais aussi d'outil pour permettre d'établir le système).
Perspective	Ponctuelle sur f et f'
Cadre	Fonctionnel
Cadre de travail	Algébrique
Registre	Question et réponse : Expression algébrique

Question 2.a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

Réponse :
En remplaçant a et b par leurs valeurs, on obtient :

$$f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}.$$

Or $x \longmapsto \frac{2}{x^2}$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

Il s'agit de comparer le signe de deux fonctions données. La question est quasi fermée. Le résultat attendu est donné, mais pas la méthode. L'élève peut donc contrôler son résultat : contrôle interne et contrôle externe, à l'aide du graphique. Ce sont les justifications qui sont importantes dans cette question. Il suffit de remarquer que la fonction $x \longmapsto \frac{2}{x^2}$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et ensuite de conclure. Le cadre de travail est algébrique, si l'élève considère une inégalité sur l'expression algébrique de f ($\frac{2}{x^2} > 0$), ou fonctionnel, si le point de vue de l'élève est sur le signe de la fonction ($x \longmapsto \frac{2}{x^2}$ est strictement positive). Dans cette question, la dérivée est utilisée en tant qu'objet. La connaissance du signe de $x \longmapsto \frac{2}{x^2}$ est supposée disponible en tant qu'objet. Il s'agit d'une connaissance ancienne.

Type de tâche	Comparer le signe de deux fonctions.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	La connaissance du signe de $x \longmapsto \dfrac{2}{x^2}$ est supposée disponible en tant qu'objet.
Outil/objet	La dérivée f' a un statut d'objet.
Perspective	Globale sur f'
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Algébrique ou fonctionnel
Registres	Question et réponse : Langue naturelle, expression algébrique

Question 2.b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

Réponse :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2+2\ln x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$

et

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}) = 2\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2\times 0 + 2\times 0 = 0.$$

Il s'agit de calculer des limites. La question est quasi ouverte. Les résultats ne sont pas donnés, cependant une indication est fournie donnant une expression plus adaptée de f pour l'un des calculs. Cette indication est un moyen de vérification pour l'élève de plusieurs résultats antérieurs. La démarche et les résultats sont attendus dans cette question. Le graphique est un moyen de contrôle externe à la question, mais immédiat. La question est dans le cadre fonctionnel et pour la première fois dans le cadre de travail d'analyse algébrisée, qui permet de justifier ces calculs de limites, en appliquant les théorèmes sur les opérations de limites, ainsi que sur les limites usuelles. Cependant le cadre de travail graphique permet de vérifier les résultats. La fonction f est utilisée en tant qu'objet. Les opérations (de type analyse algébrisée) sur les limites et les propriétés sur les limites usuelles sont supposées disponibles en tant qu'objets. Ces connaissances sont nouvelles. L'élève doit faire un travail préliminaire de reconnaissance pour pouvoir appliquer les théorèmes en repérant des limites connues. Par exemple, pour le premier calcul, l'expression sous forme de quotient est à étudier comme produit de fonctions. L'indication donnée sur une autre écriture possible de f n'est pas à utiliser dans les deux calculs de limites. L'élève doit, dans un cas, utiliser l'expression "initiale" de f et, dans l'autre, utiliser l'indication. Ceci nécessite une adaptation de la part de l'élève. La perspective sollicitée ici est la perspective locale. Cependant on remarque qu'elle reste implicite au niveau des symboles de limite utilisés, sans demander un véritable travail local sur la fonction en jeu. En effet, ce travail d'analyse algébrisée peut être fait par l'élève sans réellement activer une perspective locale sur f, mais simplement en faisant des calculs algébriques, par le biais de formules apprises.

Type de tâche	Calculer des limites à l'aide des opérations sur les limites.
Degré d'ouverture	Quasi ouverte
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Les opérations sur les limites et les propriétés sur les limites usuelles sont supposées disponibles comme objets.
Outil/objet	La fonction a un statut d'objet.
Perspective	Locale sur f
Cadre	Fonctionnel
Cadre de travail	Analyse algébrisée
Registres	Question : Langue naturelle, expression algébrique Réponse : Expression d'analyse algébrisée

Question 2.c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Réponse :
D'après la question 2.a., il suffit d'étudier le signe de $-\ln x$ pour connaître le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Il s'agit de construire le tableau de variations de f. La question est quasi fermée, l'élève n'a pas vraiment le choix dans la méthode de résolution (choix forcé). De plus, les variations de f peuvent se déduire du graphique donné (moyen de contrôle externe). L'expression "En déduire" indique à l'élève qu'il doit utiliser les questions précédentes. Le cadre de travail est le cadre fonctionnel, mais l'élève peut aussi recourir à un travail algébrique s'il utilise des inégalités pour trouver le signe des expressions. L'élève doit utiliser un tableau pour d'abord étudier le signe de la dérivée, puis les variations de f. La question 2.a. permet à l'élève de gagner du temps dans l'étude du signe de $f'(x)$ mais il est possible qu'il étudie le signe de chaque terme de $f'(x)$. Ensuite, il doit remplacer dans le tableau les limites qu'il a calculé précédemment ainsi que la valeur de $f(1)$. Il y a un changement de point de vue dans le passage de f' à f. La dérivée est utilisée comme outil pour étudier la fonction en tant qu'objet. La construction du tableau de variation est supposée technique, cependant la connaissance du signe de la fonction *ln*, connaissance nouvelle, et la propriété liant signe de la dérivée et variation de la fonction, connaissance ancienne (vue dès la classe de première) sont supposées disponibles en tant qu'objets : ce sont des théorèmes à appliquer. Pour autant cette dernière propriété peut se restreindre pour certains élèves à l'association du signe avec la direction de la flèche, sans connaissance mathématique derrière.

Type de tâche	Construire un tableau de variations en utilisant le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.
Degré d'ouverture	Quasi fermée
Niveau de fonctionnement des connaissances	La construction du tableau de variation est supposée technique, cependant la connaissance du signe de la fonction ln et la propriété liant signe de la dérivée et variations de la fonction sont supposées disponibles en tant qu'objets.
Outil/objet	La dérivée f' est utilisée comme outil pour étudier la fonction f en tant qu'objet.
Perspective	Globale sur f et sur f'
Cadre et cadre de travail	Fonctionnel
Registres	Question : Langue naturelle Réponse : Tableau

Question 3.a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1]$.

Réponse :

f est continue (car dérivable, d'après l'énoncé) et strictement croissante sur $]0;1]$ à valeurs dans $]-\infty;2]$ et $1 \in]-\infty;2]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1]$.

Il s'agit de démontrer qu'une équation admet une unique solution sur un certain intervalle semi-ouvert. La question est quasi fermée. La réponse attendue est donnée dans l'énoncé, sans indication sur la méthode à utiliser. L'expression "Démontrer" implique que l'élève doit prouver rigoureusement le résultat, en utilisant (très certainement) un théorème. L'élève doit appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, avec pour seule adaptation de contextualiser en identifiant chaque élément de l'énoncé du théorème. Une difficulté est ajoutée par le fait que le théorème s'applique sur un intervalle semi-ouvert à valeurs dans un intervalle non borné. Il est courant que le théorème des valeurs intermédiaires, en classe de terminale, ne soit écrit dans le cours que dans le cas d'une fonction sur un intervalle fermé à valeurs dans un intervalle fermé ; les autres cas ne font alors que l'objet d'une remarque. Une vérification des hypothèses est attendue pour pouvoir conclure à l'aide du théorème. Le tableau de variations de la question précédente ou encore le graphique permettent à l'élève de visualiser la situation et peuvent lui suggérer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Pour cela, il doit faire un changement de point de vue. Un raisonnement dans le cadre de travail algébrique ne permet pas d'aboutir à une résolution. La fonction f a ici un statut d'objet sur lequel on démontre une propriété. Le théorème des valeurs intermédiaires, connaissance nouvelle, est supposé disponible essentiellement liée à l'objet (le texte du théorème) même si cette utilisation est à reconnaître, car l'énoncé de la question apporte une indication forte sur cette utilisation. L'élève a déjà rencontré ce type d'exercice. Il doit appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en recueillant par lui-même les informations utiles.

Type de tâche	Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Le théorème des valeurs intermédiaires est supposé disponible en tant qu'objet.
Outil/objet	La fonction f a le statut d'objet.
Perspectives	Globale sur f, ponctuelle sur f en α
Cadre et cadre de travail	Fonctionnel
Registre	Question et réponse : Langue naturelle

Question 3.b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $[1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

Réponse :
Comme f est continue (et strictement décroissante) sur $[1; +\infty[$, pour trouver n, il suffit donc de construire un tableau de valeurs de $f(x)$, à l'aide ou non de la calculatrice graphique :

x	$f(x)$
3	$1,3991$
4	$1,1931$
5	$1,0438$
6	$0,9306$
7	$0,8417$

On peut conclure que $5 < \beta < 6$.

Il s'agit de déterminer un encadrement par des entiers d'une des solutions de l'équation. La question est ouverte. Le résultat et la méthode ne sont pas donnés. Vu que le graphique donné n'a pas de quadrillage, ni de graduation, la simple lecture graphique ne permet pas de répondre de façon satisfaisante à la question. Un manque de précision dans les mesures et le tracé peuvent facilement entraîner des erreurs. Le fait que $f(\beta) = 1$ signifie que β est solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle qui nous intéresse. Ce changement de point de vue suggère à l'élève qu'il doit regarder les "$f(x)$" et observer quand $f(x)$ est supérieur puis inférieur à 1, vu que f est décroissante sur $[1; +\infty[$. Il peut alors soit faire un tableau de valeurs directement sur la calculatrice (mode "table"), soit faire le tableau de valeurs à la main (avec l'aide de la calculatrice pour faire les calculs). Les traces écrites peuvent être diverses (tableau de valeurs, simplement les deux valeurs qui encadrent,...). Le cadre de travail utilisé reste numérique. Cette méthode est valable car la fonction f est continue. Cette donnée est implicite, par le fait que le "raisonnement analogue" dont parle l'énoncé impose cette hypothèse, mais ne sera certainement pas rappelée par l'élève. Cela n'empêche pas l'élève d'aboutir au résultat attendu. La fonction f est utilisée en tant qu'objet. L'encadrement d'une valeur à l'aide d'un tableau de valeurs, connaissance ancienne, est supposé disponible en tant qu'outil.

Type de tâche	Faire un encadrement d'une valeur.
Degré d'ouverture	Ouvert
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	L'encadrement d'une valeur à l'aide d'un tableau de valeurs est supposé disponible en tant qu'outil.
Outil/objet	La fonction f a le statut d'objet.
Perspective	Ponctuelle sur f
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Numérique, calculatrice
Registres	Question : Langue naturelle, expression algébrique Réponse : Expression numérique, tableau

Questions 4.a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.
4.b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
4.c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Il s'agit d'une question d'algorithmique, portant sur la méthode de dichotomie. L'algorithme est donné, l'élève doit savoir le tester, le comprendre, puis le modifier. Il permet d'approcher à $0,1$ près α. Pour approcher β, il suffit, dans l'algorithme donné, d'affecter à a la valeur 5 et à b la valeur 6.

Cette question ne portant pas directement sur les fonctions, nous ne l'avons pas analysé plus en détail.

Question 5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

Cette question est un problème géométrique, guidé par des questions détaillées qui amènent l'élève à faire des changements de cadres.

Question 5.a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Réponse :
L'aire du rectangle $OABC$ est égale à $OA \times OC = 1 \times 2 = 2$.
On cherche ensuite l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ dans le rectangle $OABC$ est donc égale à :
$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le problème revient donc bien à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Il s'agit de justifier le fait que le problème proposé, dans le cadre géométrique, revient à calculer une intégrale. La question est quasi fermée. Le résultat attendu est donné, mais la démarche pour le justifier est à la charge de l'élève. Cette résolution nécessite un changement de cadres, des jeux de cadres de travail et de points de vue, non explicitement imposés mais indiqués par l'énoncé du problème et le résultat attendu. Le problème de départ est formulé dans le cadre géométrique et il est demandé de le reformuler dans le cadre fonctionnel. L'énoncé peut notamment amener à des problèmes de compréhension : l'élève doit simplement reformuler, donc poser différemment la question du problème qui est posé, et non résoudre le problème. Certaines confusions peuvent apparaître. Le problème géométrique se visualise sur le graphique de l'énoncé. Une reformulation du problème en langue naturelle apparaît alors : les deux domaines, celui sous la courbe $\mathcal{C}$ et celui au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$, ont pour aire la moitié de l'aire du rectangle $OABC$. il suffit donc de montrer que l'aire d'un des deux domaines vaut la moitié de l'aire du rectangle. Il y a donc deux aires à calculer, mais la nature de ces aires est différente et nécessite un changement de point de vue : une avec les formules usuelles de calcul d'aire d'un rectangle et l'autre avec le calcul intégral. Pour justifier le résultat "1", l'élève doit rester dans le cadre géométrique et calculer l'aire totale du rectangle et prendre la moitié. Ensuite, l'élève doit opérer un changement de point de vue en repérant que l'un des deux domaines dans le problème est l'aire sous la courbe sur un certain intervalle. Dans le cadre géométrique, un travail graphique permet le passage au cadre fonctionnel : l'élève doit appliquer la définition de l'intégrale comme aire sous la courbe, connaissance nouvelle. Il repère donc l'intervention d'une intégrale et il doit ensuite justifier les valeurs des bornes. Pour obtenir la borne inférieure de l'intégrale "$\frac{1}{e}$", l'élève doit faire un jeu de cadres de travail : passer d'un travail graphique, en remarquant qu'il s'agit de l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses, à un travail algébrique, en introduisant comme intermédiaire l'équation $f(x) = 0$. La résolution de l'équation nécessite l'utilisation des propriétés liant logarithme népérien et exponentielle, connaissances nouvelles. Il faut dans un dernier temps, regrouper toutes les informations pour conclure. Cette question a plusieurs étapes, avec des changements de points de vue à toutes les étapes, à la charge de l'élève. Le niveau de mise en fonctionnement attendu est disponible en tant qu'objet pour ce qui est d'utiliser une intégrale pour calculer une aire sous la courbe (indirectement indiqué dans l'énoncé) et disponible en tant qu'outil pour ce qui est d'identifier la borne inférieure de l'intégrale. L'intégrale est vu ici comme outil à la résolution du problème.

Type de tâche	Traduire un problème géométrique en un problème algébrique.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Le niveau de mise en fonctionnement attendu est disponible en tant qu'objet pour ce qui est d'utiliser une intégrale pour calculer une aire sous la courbe et disponible en tant qu'outil pour ce qui est d'identifier la borne inférieure de l'intégrale.
Outil/objet	L'intégrale de f a le statut d'outil.
Perspective	Globale sur f
Cadres	Géométrique $\rightarrow$ fonctionnel
Cadres de travail	Graphique $\rightarrow$ algébrique
Registres	Question : Figure géométrique, représentation graphique, expression algébrique, expression d'analyse algébrisée, langue naturelle Réponse : Expression algébrique, expression d'analyse algébrisée, langue naturelle

Question 5.b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$, terminer la démonstration.

Réponse :
Il faut donc vérifier que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\frac{2}{x} + 2\times\frac{1}{x}\times\ln x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = 2\,[\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} + 2\left[(\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$
$$= 2\left[0-\ln(\frac{1}{e})\right] + \left[0-(\ln(\frac{1}{e}))^2\right] = \ln(e) - (\ln(e))^2 = 2-1 = 1.$$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

Il s'agit d'un calcul d'intégrale pour résoudre le problème de départ. La question isolée est formulée de façon quasi ouverte mais dans son intégralité avec les points précédents, elle est fermée. "Terminer la démonstration" revient à "démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$", d'après la question précédente (moyen de contrôle externe). L'indication donnée amène l'élève à suivre une méthode imposée pour le calcul de l'intégrale. L'intégrale devient une somme d'intégrales facilement identifiables. La première intégrale est une intégrale élémentaire et la seconde, plus difficile à reconnaître, est de la forme $\int u'.u = \frac{u^2}{2}$. La partie en $2\times\frac{1}{x}\times\ln x$, introduite dans l'énoncé, permet de visualiser clairement u' et u et guide l'élève dans l'application de la formule. Il faut ensuite conclure en revenant au problème initial, qui est dans le cadre géométrique. Cependant dans cette question, il s'agit d'un travail d'analyse algébrisée dans le cadre fonctionnel. Les changements de cadres ont déjà été fait dans la question précédente. L'intégrale est ici objet, mais, dans le problème de départ, elle reste outil. Le niveau de mise en fonctionnement du calcul de l'intégrale, connaissance nouvelle, est supposé disponible comme objet (technique faisant appel à des formules à se rappeler).

Types de tâches	Calculer une intégrale élémentaire. Résoudre le problème posé.
Degré d'ouverture	Fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Le niveau de mise en fonctionnement du calcul de l'intégrale est supposé disponible comme objet.
Outil/objet	L'intégrale de f a le statut d'objet.
Perspective	Globale sur f
Cadre	Fonctionnel
Cadre de travail	Analyse algébrisée
Registres	Question : Expression algébrique, langue naturelle Réponse : Expression d'analyse algébrisée, langue naturelle

3.2.2 Bilan

Les données de chaque question ont été compilées dans des tableaux récapitulatifs (cf Annexe D) sur lesquels nous nous appuyons pour faire le bilan suivant. Les pourcentages indiqués ci-dessous sont extraits de ces tableaux.
Les types de tâches rencontrés dans cet exercice traitant sur les fonctions sont variés, et portent autant sur la fonction, sa dérivée que sur des intégrales liées. Cependant f reste dans tout l'exercice la fonction centrale. Le spectre des tâches évaluées dans ce sujet de Baccalauréat est étendu, cependant au vu de notre analyse a priori, nous remarquons qu'une majorité des questions posées sont quasi fermées ou fermées (7 questions sur 10). Dans quatre questions, il y a présence d'aides ou d'indications. Les moyens de contrôle sont assez fréquents (soit dans la question même, soit dans des questions ultérieures ou soit avec l'aide du graphique donné dans l'énoncé), mais ne sont certainement pas très utilisés par les élèves, surtout quand ils sont externes. Chaque question est divisée en sous-questions qui guident l'élève à chaque étape. Les connaissances en jeu sont anciennes et nouvelles, ceci est lié, en grande partie, au fait que la dérivée et ses propriétés sont étudiées dès la classe de première. La mise en fonctionnement des connaissances est majoritairement du niveau disponible (deux fois du niveau technique), car les méthodes à utiliser ne sont pas explicitées dans l'énoncé. Mais ce sont essentiellement (dans 77% des cas) des notions avec un statut objet qui sont supposées disponibles (des formules, des théorèmes, des méthodes ou techniques), à utiliser pour résoudre sans questionnement supplémentaire sur ce que la formule permet de calculer, ce que le théorème permet de démontrer, ce que la méthode ou technique permet d'obtenir. On en déduit qu'un degré de disponibilité des connaissances est attendu mais peu en tant qu'outil. Peu de choses sont laissées à la charge de l'élève dans l'introduction d'intermédiaires ou d'étapes par exemple. Ce sujet laisse peu de place à l'autonomie dans la recherche de l'élève. Les fonctions en jeu sont majoritairement travaillées en tant qu'objet (dans trois quarts des cas), ce qui laisse transparaître que le statut outil des fonctions n'est pas vraiment exploité. Au niveau des perspectives, nous remarquons que la perspective locale n'est utilisée qu'une seule fois et dans le cas de calcul de limites, s'appuyant sur des formules algébriques, peu révélateur de la perspective locale. Cette perspective n'est donc pas réellement évaluée. Toutes les activités attendues se trouvent dans le cadre fonctionnel, mis à part pour la question 5 où apparait aussi le cadre géométrique. En revanche, six cadres de travail différents sont rencontrés avec un partage assez équilibré entre les questions. Nous avons repéré un changement de cadres de travail (numérique $\longrightarrow$ graphique $\longrightarrow$ numérique) et un jeu de cadres de travail (graphique $\longrightarrow$ algébrique) à l'intérieur d'une question. L'utilisation de la calculatrice graphique est autorisée et le cadre de travail de la calculatrice peut même être avantageux (mais pas indispensable) dans cet exercice. Les registres les plus fréquents dans l'énoncé sont la langue naturelle, l'expression algébrique et la représentation graphique. Nous avons identifié quatre changements entre les registres de l'énoncé et les registres de la réponse. Les activités des élèves dans le cadre fonctionnel sont assez variées au niveau des cadres de travail et des registres, cependant les changements de cadres de travail à la charge de l'élève (jeux de cadres) sont peu travaillés. Nous terminons en mettant en évidence le fait que des adaptations sont présentes dans ce sujet : l'élève doit à plusieurs reprises utiliser les résultats des questions précédentes, mais elles sont souvent suggérées par l'énoncé de façon large par "En déduire".

3.3 Maturità scientifica 2013 - corso sperimentale

Dans cette épreuve, le candidat doit choisir un des deux problèmes portant sur les fonctions et répondre à cinq des dix questions, dont trois, voire quatre, portent sur les fonctions (cf le sujet et la traduction en annexes E). Les notions sur les fonctions abordées dans le sujet sont très variées : dérivée, dérivée seconde, étude de fonction, intégrale, extremum, calcul de limite. Dans cette épreuve la calculatrice graphique n'est pas autorisée, ce qui explique la non présence du cadre de travail calculatrice.

Une enquête nationale sur les résultats de cette épreuve de mathématiques est actuellement en cours par *Matmedia* ([24]) en vue du futur changement de l'épreuve de mathématiques en 2015 (dû à la réforme de 2010). Les établissements ont dû donner des renseignements quantitatifs sur le nombre d'élèves examinés ayant choisi le problème 1 (ou le problème 2) et sur l'exactitude des réponses données. Jusqu'à présent, trois cinquièmes des commissions ont rempli ce questionnaire et les informations sont disponibles en ligne. D'après les résultats partiels, on peut remarquer que seulement 15% des élèves ont choisi le problème 1 contre 85% qui ont abordé le deuxième. Cependant, un pourcentage plus élevé de réussite a été enregistré pour le problème 1, résolu de façon complètement correcte par 35% des élèves et de façon partiellement correcte par 54%, tandis que la résolution du problème 2 a été correcte pour 28% des élèves et partiellement correcte pour 60%. Nous devons cependant attendre que l'intégralité des commissions aient rempli le questionnaire pour tirer des conclusions globales. Nous pouvons tout de même déjà remarquer une tendance plus faible des élèves à choisir de travailler dans les cadres graphique et fonctionnel (problème 1), par rapport au classique exercice de type algébrique d'étude de fonction (problème 2). L'étude de fonctions semble dans la plupart des cas donner une plus grande sécurité, soit aux élèves, soit aux enseignants. Pourtant, il n'est pas évident que les exercices pour lesquels les élèves aient été entrainé le plus correspondent aux plus faciles à résoudre, comme nous pouvons le voir dans les pourcentages de réussite.

3.3.1 Analyse a priori du problème 1

Le problème 1 reprend différentes notions sur les fonctions étudiées en 5ème année du lycée italien : dérivée, dérivée seconde, extremum, point d'inflexion, asymptote et intégrale. L'énoncé est accompagné d'un graphique avec la représentation des fonctions f et f'' et de données concernant une tangente à la courbe de f et les asymptotes. Le problème est partagé en quatre questions, dont trois sont à traiter à l'aide de ce graphique. Les questions 1 et 3 sont dépendantes, les deux autres peuvent être traitées indépendamment. Le problème est dans le contexte mathématique, mis à part pour la question 2, où il y a une contextualisation dans un domaine non mathématique (croissance d'une population) pour faire intervenir l'interprétation d'un modèle. Notre analyse a priori est faite du point de vue d'un élève italien, dans l'institution lycée italien. Nous avons mis quelques commentaires pour l'activité supposée d'un élève français.

Nous séparons la question 1 en deux sous-questions.

Question 1. Démontrer que la fonction $f'(x)$, la dérivée de $f(x)$, a un maximum et déterminer ses coordonnées.

Réponse :

Pour trouver le maximum de f', on cherche x tel que la dérivée de f', soit f'', s'annule c'est-à-dire tel que $f''(x) = 0$. Nous observons sur le graphique que f'', représentée par Λ, s'annule en $x = 2$ et change de signe, donc $x = 2$ est l'abscisse d'un extremum de f'. En étudiant le signe de $f''(x)$, on détermine s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc f' admet un maximum en $x = 2$. L'ordonnée de ce maximum est $f'(2)$. Or $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f, soit Γ, au point d'abscisse 2.

$f'(2) = \dfrac{f(2) - 0}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$
car la tangente à Γ au point d'inflexion, de coordonnées $(2; 4)$, passe par $(0; 0)$.

Donc les coordonnées du maximum de f' sont $(2; 2)$.

Cette partie de question comporte deux types de tâche : le premier consiste à démontrer l'existence d'un maximum pour f' (question quasi fermée, car l'énoncé dit que ce maximum existe) et le second à déterminer les coordonnées de ce maximum (question ouverte). Aucune aide et aucune méthode ne sont données dans l'énoncé. La question 3 donne un moyen de contrôle externe pour les coordonnées du maximum. f' est l'objet de l'étude, fonction (qui est une fonction dérivée) pour laquelle nous ne disposons d'aucune représentation : ni graphique, ni expression algébrique,... Les seules informations disponibles pour cette question sont celles sur f et f''. Pour la première tâche, l'élève doit, dans un premier temps, mobiliser la connaissance nouvelle "une fonction admet un extremum si et seulement si sa dérivée s'annule et change de signe", qui est supposée disponible en tant qu'outil. Une adaptation de cette propriété est nécessaire car ici la fonction en jeu est la dérivée f' et donc sa dérivée est f''. Sur la fonction f'', nous ne disposons que de sa représentation graphique. Les courbes représentatives de f et f'' sont tracées dans le même repère et sont appelées respectivement Γ et Λ, noms qui ne font pas directement référence à l'objet auquel elles sont rattachées. Ces deux éléments peuvent être source d'erreur chez l'élève. Une fois que l'élève a bien identifié la courbe de f'', un changement de point de vue est nécessaire : le fait que f'' s'annule et change de signe correspond graphiquement au fait que la courbe de f'' coupe l'axe des abscisses. Par lecture graphique, l'élève voit que f'' coupe l'axe des abscisses en $x = 2$, il y a donc un extremum. Il remarque que la courbe passe de au-dessus à en-dessous de l'axe, donc par un nouveau changement de point de vue, il en déduit que f'' est d'abord positive, puis négative donc, à l'aide d'un tableau ou non, il peut conclure qu'il s'agit bien d'un maximum. La propriété liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction, connaissance nouvelle, est supposée disponible en tant qu'outil. Dans cette tâche, il y a des jeux de cadres à la charge de l'élève entre le cadre de travail graphique et le cadre de travail fonctionnel. L'abscisse du maximum est donc déjà trouvée avant de passer à la seconde tâche. Pour déterminer les coordonnées de ce maximum, il reste donc seulement l'ordonnée à trouver. L'élève doit faire le lien entre l'ordonnée du maximum de f' et

$f'(2)$ (changement de point de vue). Ensuite avec un deuxième changement de point de vue, il doit identifier $f'(2)$ comme le nombre dérivé de f au point d'abscisse 2. L'élève ne doit plus s'intéresser à f'' mais doit se concentrer sur f cette fois. Sur f, l'élève dispose du graphique et des informations sur la tangente au point $(2;4)$. Par un nouveau changement de point de vue, l'élève doit voir le nombre dérivé $f'(2)$ comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2, et par un quatrième changement de point de vue, repérer qu'il s'agit du coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'inflexion de coordonnées $(2;4)$, dont parle l'énoncé. Disposant des coordonnées de deux points appartenant à la tangente, l'élève doit appliquer, sans adaptation particulière, la formule du coefficient directeur d'une droite $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, avec $A(0;0)$ et $B(2;4)$ ou inversement. L'utilisation de la formule du coefficient directeur, connaissance ancienne, est supposée disponible en tant qu'outil. Il ne reste plus qu'à conclure sur les coordonnées. Cette étape demande l'enchainement de beaucoup de changements de point de vue. Le cadre de travail est fonctionnel puis numérique. Dans cette partie de question, f' est étudiée en tant qu'objet et les deux autres fonctions f et f'' sont des outils pour l'étudier. L'élève doit passer d'une fonction à l'autre pour déduire différentes propriétés. Ces adaptations sont toutes à la charge de l'élève.

Types de tâche	A l'aide du graphique, déterminer l'existence d'un maximum en faisant le lien entre une fonction et sa dérivée. Déterminer les coordonnées de ce maximum en utilisant le lien entre nombre dérivé et coefficient directeur de la tangente.
Degrés d'ouverture	Quasi fermé (existence du maximum), ouvert (coordonnées du maximum)
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	La connaissance "une fonction admet un extremum si et seulement si sa dérivée s'annule et change de signe" est supposée disponible en tant qu'outil. La propriété liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction est supposée disponible en tant qu'outil. L'utilisation de la formule du coefficient directeur est supposée disponible en tant qu'outil.
Outil/objet	La fonction f' est étudiée en tant qu'objet et les deux autres fonctions f et f'' sont des outils pour l'étudier.
Perspectives	Globale sur f' et f'', ponctuelle sur f et f'
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Fonctionnel $\longleftrightarrow$ graphique / Numérique
Registres	Question : Langue naturelle Réponse : Expression numérique, langue naturelle, tableau

Question 1. (suite) On suppose que pour tout x du domaine de définition : $f''(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$, donner une représentation graphique possible de f'.

Réponse :

x	0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	

Donc f' est positive sur $[0;+\infty[$.

D'après le début de la question,

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Donc f' est croissante sur $[0;2]$, puis décroissante sur $[2;+\infty[$ et admet un maximum 2 en $x=2$.

x	0		≈ 1		≈ 3		$+\infty$
$f''(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc on en déduit que f' est convexe, puis concave, puis à nouveau convexe.

De plus, comme $f''(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$, la courbe de f' est située entre les deux courbes Γ et Λ (Fig. 5).

Il s'agit de tracer une courbe possible de f''. La question est ouverte, aucune aide ou indication n'est donnée. L'élève doit conduire un raisonnement en considérant les informations qui découlent du graphique de f et de f''. Il doit ensuite regrouper toutes les propriétés de f' déduites précédemment. Elles peuvent être résumées dans des tableaux, ou en langue naturelle. Comme dans la première partie de la question, beaucoup de changements de point de vue sont nécessaires, en passant de f à f', de f'' à f' ou même en passant de f'' à $f^{(3)}$ puis à f'. L'élève déduit le signe de f' à l'aide des variations de f. Ceci nécessite une adaptation de la propriété liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction car celle-ci est souvent utilisée dans l'autre sens (on déduit les variations de la fonction avec le signe de la dérivée). L'élève déduit les variations de f' à l'aide du signe de f'', en utilisant ce qui a déjà été vu dans le début de la question, donc

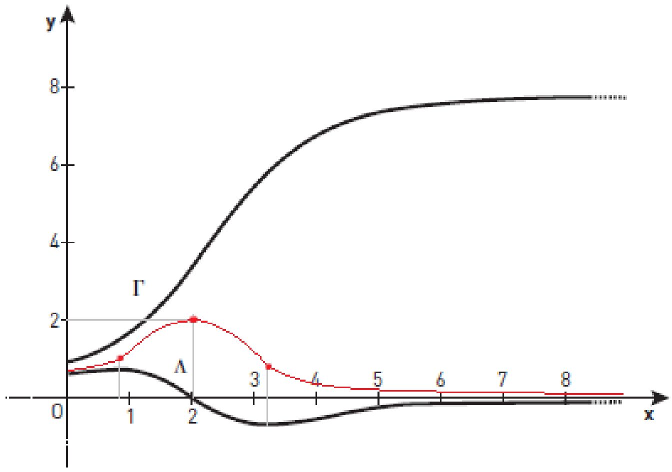


FIGURE 5 – Représentation graphique possible de f'

l'élève doit utiliser un résultat précédent. Pour la convexité/concavité de f', l'élève étudie les variations de f'' pour déduire le signe de $f^{(3)}$, intermédiaire à introduire par l'élève pour pouvoir ensuite conclure. Plusieurs adaptations sont encore nécessaires ici : la même adaptation citée précédemment avec en plus le fait que les fonctions en jeu sont f'' et $f^{(3)}$ (deuxième adaptation), puis la propriété liant la convexité d'une fonction au signe de sa dérivée seconde est à adapter à f' et donc à $f^{(3)}$, qui est sa dérivée seconde. La mise en fonctionnement des connaissances est supposée disponible en tant qu'outil pour ce qui est de l'utilisation de la propriété liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction, mais cette propriété a déjà été utilisée dans la première partie de la question, et de même pour celle liant la convexité de la fonction avec le signe de sa dérivée seconde. Les connaissances en jeu sont nouvelles. Un changement de point de vue sur l'encadrement de $f'(x)$ donné dans l'énoncé permet à l'élève de situer la courbe de f' entre celle de f etf'' et donc en regroupant toutes ces informations trouvées, il peut tracer une courbe possible de f'. Pour cela, il doit avant tout placer le maximum, dont les coordonnées ont été calculées au début de la question, puis placer les deux points de changement de convexité dont seules les abscisses approchées sont connues, ensuite il reste à relier les points en respectant les propriétés trouvées. Au niveau du graphique, il y a d'autres difficultés liées au fait qu'il n'y a pas de quadrillage et que même les fonctions tracées ne sont pas très précises par rapport aux informations fournies dans le texte. f' a le statut d'objet tandis que f et f'' ont le statut d'outils. Cette sous-question nécessite encore des va-et-vient entre le cadre de travail graphique et fonctionnel, et il y a aussi un passage d'un registre algébrique à un registre graphique. Elle est composée de plusieurs étapes, dont l'ordre n'est pas important, qui nécessitent des changements de points de vue et de cadres de travail et sont toutes à la charge de l'élève.

Un élève français ne s'intéresserait pas à l'étude de la convexité de f' car cette notion n'est pas au programme.

Type de tâche	Tracer une courbe possible de la fonction dérivée en utilisant les propriétés de celle-ci pouvant se déduire des liens entre une fonction, sa primitive, sa dérivée et sa dérivée seconde.
Degré d'ouverture	Ouvert
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	L'utilisation de la propriété liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction et de celle liant la convexité de la fonction avec le signe de sa dérivée seconde sont supposées disponibles en tant qu'outils.
Outil/objet	La fonction f' a le statut d'objet tandis que les fonctions f et f'' ont le statut d'outil.
Perspectives	Globale sur f, f' et f'', ponctuelle sur f'
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Graphique $\longleftrightarrow$ fonctionnel
Registres	Question : Langue naturelle, expression algébrique Réponse : Tableau (ou langue naturelle), représentation graphique

Question 2. On suppose que $f(x)$ modélise, évidemment avec des unités de mesures adaptées, la croissance d'un certain type de population. Quelles informations sur son évolution peut-on déduire des graphiques et en particulier du fait que Γ admette une asymptote horizontale et un point d'inflexion ?

Réponse :
Dans un premier temps, la population croit de plus en plus vite (les tangentes aux points d'abscisse entre 0 et 2 ont une pente positive et sont situées en-dessous de la courbe représentative de f). La tendance s'inverse au point d'abscisse 2 (point d'inflexion) où la population continue de croître mais de moins en moins vite (les tangentes au point d'abscisses après 2 ont une pente positive et sont situées au-dessus de la courbe représentative de f) pour finalement se stabiliser (asymptote horizontale) en-dessous de 8.

Il s'agit d'interpréter un phénomène modélisé par la fonction f, dont nous disposons du graphique. La question est ouverte : "Quelles informations [...] peut-on déduire... ?". Il n'y a pas d'indication, cependant la question précise qu'il faudra s'intéresser à l'interprétation de l'asymptote horizontale et du point d'inflexion. Le travail est graphique et fonctionnel, dans le cadre fonctionnel. En particulier, il s'agit de conversions, donc d'un changement, entre le cadre de travail graphique et le cadre de travail fonctionnel. Avec une première adaptation, l'élève doit interpréter la question posée en terme de vitesse de croissance de la population. L'élève doit ensuite faire un changement de contexte, accompagné d'un changement de point de vue : donner des informations sur la vitesse de croissance de la population revient à étudier les positions des tangentes par rapport à la courbe de f. Il faut donc introduire, mentalement, des intermédiaires : les tangentes. L'élève doit ensuite interpréter le fait que des tangentes avec une pente positive situées en-dessous de la courbe modélisent un phénomène où la vitesse est de plus en plus grande, et à nouveau changer de contexte pour répondre au problème posé en terme de vitesse de croissance de la population ; et inversement pour des tangentes avec une pente positive situées au-dessus de la courbe. Le point d'inflexion représente le point de rupture, l'abscisse où la tangente atteint la position limite (pente maximale) et donc où il y a un basculement au niveau de la vitesse. L'asymptote horizontale indique le comportement de la courbe de f à l'infini, donc en changeant de contexte, elle donne des informations sur la stabilisation de la croissance de la population au bout d'un certain nombre d'années. L'élève doit adapter les connaissances purement mathématiques sur les fonctions en les contextualisant à un domaine non mathématique. La mise en fonctionnement des connaissances est supposée disponible en tant qu'outil pour ce qui est de l'interprétation d'un phénomène modélisé par une fonction, connaissance nouvelle. Ce type de question est peu (voire pas du tout) travaillé en classe. La fonction f a un statut d'outil, c'est le modèle représentant un phénomène.

Type de tâche	Interpréter un phénomène modélisé par une fonction.
Degré d'ouverture	Ouvert
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	L'interprétation d'un phénomène est supposé disponible en tant qu'outil.
Outil/objet	La fonction f a un statut d'outil.
Perspective	Globale sur f
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Graphique $\rightarrow$ fonctionnel
Registre	Question : Langue naturelle, représentation graphique Réponse : Langue naturelle

Question 3. Si Γ est le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, prouver que $a = 8$ et $b = 2$.

Réponse :
D'après l'énoncé et la question 1, $f(2) = 4$ et $f'(2) = 2$.
De plus, si $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, alors $f'(x) = a\dfrac{e^{b-x}}{(1+e^{b-x})^2}$.

On peut remarquer que $f'(x) = f(x)\dfrac{e^{b-x}}{1+e^{b-x}}$.

Il faut ensuite résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(2) & = & 4 \\ f'(2) & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} & = & 4 \\ \\ f(2)\dfrac{e^{b-2}}{1+e^{b-2}} & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} & = & 4 \\ \\ 4\dfrac{e^{b-2}}{1+e^{b-2}} & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} & = & 4 \\ \\ 2e^{b-2} & = & 1+e^{b-2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} & = & 4 \\ \\ e^{b-2} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} & = & 4 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \frac{a}{2} & = & 4 \\ \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 8 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

Il s'agit de déterminer les valeurs des inconnues a et b dans l'expression de f. La question est quasi fermée ; la méthode à utiliser n'est pas indiquée mais les résultats sont donnés (moyen de contrôle interne). C'est la démarche pour y parvenir qui est évaluée ici. Seul le cadre de travail algébrique (avec un passage au numérique) permet de résoudre la question ; le cadre de travail graphique ne permet pas d'aboutir. L'élève, repérant qu'il y a deux inconnues à déterminer, doit déduire qu'il a besoin de deux équations avec a et b. Reconnaître qu'il s'agit d'un système à introduire est du niveau disponible en tant qu'objet. L'élève doit ensuite faire lui-même plusieurs étapes. Dans une première étape, il doit trouver les deux conditions qui vont être nécessaires. A l'aide de l'énoncé, il sait que le point de coordonnées $(2;4)$ est un point de la courbe de f (Γ) donc avec un changement de point de vue, il en déduit que $f(2) = 4$. De même, la résolution de la question 1 donne $f'(2) = 2$. Le cadre de travail est numérique. Dans une deuxième étape, l'élève doit déterminer l'expression algébrique de f' à l'aide de l'expression algébrique de f. Dans cette étape, le travail est purement algébrique sur la fonction f et sur sa dérivée f'. L'élève doit appliquer les formules de dérivée des fonctions usuelles : $x \longmapsto k$, $x \longmapsto e^{u(x)}$ et les formules de la dérivée d'une somme et de la dérivée d'un quotient :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour appliquer la formule, il doit avant tout repérer les fonctions u et v (numérateur et dénominateur), possiblement mentalement, puis calculer leur dérivée. Cependant, ici, l'élève doit adapter ses connaissances au fait qu'il y a présence de a et b, qui sont des constantes. Il faut donc adapter les formules avec ces notations. Le fait de faire intervenir la fonction et la dérivée pour établir le système est supposé disponible en tant qu'outil. Les formules de dérivation et les opérations algébriques, connaissances nouvelles, sont ensuite dans ce contexte supposées disponibles comme objets. L'élève peut éventuellement remarquer une relation entre l'expression de $f(x)$ et $f'(x)$ qui facilitera la suite, mais cette "astuce" n'est pas indispensable. Enfin dans une troisième étape, l'élève doit utiliser les deux étapes précédentes pour obtenir puis résoudre le système non linéaire de deux équations deux inconnues en a et b. Par substitution, l'élève arrive à une équation exponentielle en b : $e^{b-2} = 1$. Il doit utiliser la propriété $e^c = e^d \Leftrightarrow c = d$, en reconnaissant que $1 = e^0$. Une fois la solution b trouvée, par substitution, l'élève trouve a. Les mises en fonctionnement attendues sont supposées disponibles en tant qu'objet pour ce qui est de la résolution du système (exponentiel), connaissance ancienne. Les cadres de travail numérique et algébrique des étapes précédentes amènent à un travail algébrique. L'élève doit prendre en charge toutes les étapes, aucune indication à suivre n'est donnée.

Type de tâche	Résoudre un système (non linéaire) de deux équations, deux inconnues.
Degré d'ouverture	Quasi fermé
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Les formules de dérivation et les opérations algébriques sont supposées disponibles comme objets. Reconnaître qu'il faut introduire un système puis le résoudre sont supposées disponibles comme objets tandis que la méthode pour l'établissement du système est supposé disponible en tant qu'outil.
Outil/objet	Les fonctions f et f' ont un statut d'objet (mais aussi d'outil pour permettre d'établir le système).
Perspectives	Ponctuelle sur f et f' en $x = 2$, ponctuelle universelle sur f' pour l'expression algébrique de f')
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Numérique, algébrique
Registres	Question et réponse : Langue naturelle, expression algébrique

Question 4. Avec les hypothèses du point 3., calculer l'aire de la région du plan délimitée par Λ et l'axe x sur l'intervalle $[0; 2]$.

Réponse 1 :
L'aire A considérée est égale à l'intégrale définie suivante :

$$A = \int_0^2 f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, si G est une primitive de g, alors $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$.

Ici, la primitive de f'' est f', donc

$$A = f'(2) - f'(0) = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}.$$

Réponse 2 :
Dans la question 3, l'expression algébrique de $f'(x)$ a été déterminée :

$$f'(x) = a\ \frac{e^{b-x}}{(1+e^{b-x})^2},$$

où $a = 8$ et $b = 2$. Donc,

$$f'(x) = 8\ \frac{e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}.$$

Il s'agit de dériver encore une fois pour obtenir l'expression algébrique de $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8\ \frac{-e^{2-x}\cdot(1+e^{2-x})^2 - e^{2-x}\cdot 2(1+e^{2-x})(-e^{2-x})}{(1+e^{2-x})^4} \\ &= 8\ \frac{e^{2-x}(1+e^{2-x})[-1-e^{2-x}+2e^{2-x}]}{(1+e^{2-x})^4} \\ &= 8\ \frac{e^{2-x}[-1+e^{2-x}]}{(1+e^{2-x})^3}. \end{aligned}$$

L'aire sous la courbe représentative de f'' correspond à l'intégrale :

$$\int_0^2 f''(x)\,\mathrm{d}x =\ 8\ \int_0^2 \frac{e^{2-x}[-1+e^{2-x}]}{(1+e^{2-x})^3}\,\mathrm{d}x.$$

A l'aide du changement de variable $e^{2-x} = t$, on obtient $-e^{2-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-e^{2-x}} = \frac{\mathrm{d}t}{-t}$.
Les bornées deviennent $t = e^2$ quand $x = 0$ et $t = 1$ quand $x = 2$. On obtient donc l'intégrale en t :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f''(x)\,\mathrm{d}x &=\ 8\ \int_{e^2}^1 \frac{t[-1+t]}{(1+t)^3}\ \frac{\mathrm{d}t}{-t} \\ &=\ 8\ \int_1^{e^2} \frac{-1+t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On cherche ensuite la décomposition en éléments simples de $\frac{-1+t}{(1+t)^3}$. Il s'agit de trouver A, B et C tels que :

$$\frac{-1+t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{-1+t}{(1+t)^3} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3} \\
&= \frac{A(1+t)^2 + B(1+t) + C}{(1+t)^3} \\
&= \frac{A + B + C + (2A+B)t + At^2}{(1+t)^3}
\end{aligned}$$

Pour unicité de l'écriture d'un polynôme, on a forcément :

$$\begin{cases} A+B+C=-1 \\ 2A+B=1 \\ A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-2 \\ B=1 \\ A=0 \end{cases}$$

Donc, $\dfrac{-1+t}{(1+t)^3} = \dfrac{1}{(1+t)^2} - \dfrac{2}{(1+t)^3}$ et l'intégrale devient :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = {} & 8\,[\int_1^{e^2} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^{e^2} \frac{2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t] \\
= {} & 8\,[\frac{(1+t)^{-1}}{-1} - 2\frac{(1+t)^{-2}}{-2}]_1^{e^2} \\
= {} & 8\,[-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}]_1^{e^2} \\
= {} & 8\,[-\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{(1+e^2)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}] \\
= {} & 8\,[\frac{1}{4} + \frac{-1-e^2+1}{(1+e^2)^2}] \\
= {} & 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}.
\end{aligned}$$

L'aire de la région en question est de $2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}$.

Il s'agit de calculer l'aire d'une région délimitée par une courbe sur un intervalle. La question est ouverte ; aucune indication sur la méthode n'est donnée. Il s'agit de calculer l'aire sous la courbe de f'', à l'aide du calcul intégral. La question est dans le cadre géométrique, mais seul le cadre fonctionnel permet de résoudre le problème. L'élève doit dans un premier temps repérer sur le graphique la zone en question et ensuite passer au cadre fonctionnel en utilisant le définition de l'intégrale d'une fonction positive comme l'aire sous la courbe. Le mise en fonctionnement de cette définition est supposée disponible en tant qu'objet. Deux méthodes de résolution sont ensuite possibles.

La première, correspondant à la réponse 1, est une application du théorème fondamental du calcul intégral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$, avec G une primitive de g, qui est une connaissance nouvelle. Cependant la fonction en jeu est f'', l'élève doit donc faire un travail de reconnaissance pour utiliser le théorème et ensuite identifier la primitive comme étant f'. Il y a des changements de points de vue sur les fonctions mises en jeu : la dérivée de f est ici vue comme la primitive de f''. L'élève doit ensuite utiliser l'expression algébrique de f', calculée dans la question précédente, pour ensuite conclure. Le cadre de travail est en analyse algébrisée. Le niveau de mise en fonctionnement du théorème sur la primitive est supposé disponible en tant qu'outil pour identifier l'utilité de cette formule dans ce contexte ; le choix de l'utilisation du théorème est à la charge de l'élève, de plus des adaptations sont à faire. La primitive de f'', c'est-à-dire f', est utilisée en tant qu'outil pour le calcul de l'aire.
La deuxième méthode est dans le cadre de travail d'analyse algébrisée. L'élève doit d'abord repérer l'expression algébrique de la fonction à intégrer f'', en dérivant la fonction f'. D'abord, il doit écrire $f'(x)$, calculé à la question 3., avec les valeurs de a et b trouvées (ou même indiquées). Il s'agit de la dérivée d'un quotient, qui se présente sans paramètre. La seule adaptation à faire pour l'élève semble être la reconnaissance des fonctions du numérateur et du dénominateur, pour appliquer la formule de dérivation d'un quotient. Cependant, l'élève doit faire intervenir la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto u(x)^2$ où $u(x) = 1 + e^{2-x}$, en combinant à la fois la formule de la dérivée d'une puissance, d'une somme et d'une exponentielle. Les formules de dérivation et les opérations, connaissances nouvelles, sont supposées disponibles en tant qu'objets. Dans une seconde étape, l'élève doit calculer l'intégrale de l'expression de $f''(x)$ trouvée. Les formules d'intégration et les opérations algébriques, connaissances nouvelles, sont supposées disponibles comme objets ; il y a beaucoup d'adaptations à faire. La première est l'introduction du changement de variable $t = e^{2-x}$, qui est un intermédiaire. Cela amène ensuite à déterminer la nouvelle intégrale à calculer. La deuxième étape, non indispensable, consiste à mettre les nouvelles bornes par ordre croissant et donc de les intervertir. L'élève doit échanger les bornes, sans oublier de changer le signe de l'intégrale. La troisième adaptation est le calcul de la décomposition en éléments simples, sous la forme $\dfrac{A_i}{(1+t)^i}$ où $i = 1, 2, 3$, de l'expression rationnelle à intégrer. Cette technique, dans un cadre de travail purement algébrique, est vue en classe mais sur un nombre limité d'exemples, donc la mise en fonctionnement de décomposition en éléments simples de l'expression à intégrer, connaissance nouvelle, est supposée disponible comme outil. De plus, elle fait intervenir le concept d'unicité de décomposition d'un polynôme, qui peut représenter une autre difficulté. Une fois cette étape intermédiaire terminée, la fonction à intégrer s'écrit comme somme de fonctions rationnelles simples. Avant de pouvoir utiliser des formules d'intégration connues, l'élève doit introduire une écriture intermédiaire : $\frac{1}{(1+t)^n} = (1+t)^{-n}$. Ensuite, l'élève peut conclure, en appliquant la formule d'intégration de la fonction composée $x \longmapsto f(x)^n$ où $f(x) = (1+t)$ et $n = -1, -2$. L'utilisation de ces formules est supposée disponible comme objet. Les deux grandes étapes analysées (le calcul de la dérivée la fonction f' et le calcul intégral du résultat) ne sont que les opérations inverses l'une de l'autre, mais nous pensons qu'un élève peut suivre un raisonnement de ce type sans se rendre compte de la lourdeur de cette démarche. Nous supposons qu'un élève au lycée peut rencontrer des difficultés à concevoir l'intégration comme opération inverse de la dérivation et la question ici peut justement permettre un contrôle sur le niveau d'appropriation de ces notions par l'élève.
Le changement de variable et la décomposition en éléments simples n'étant pas au programme de terminale S, un élève français ne pourrait utiliser pas la réponse 2. En partant dans un calcul d'intégrale, il ne saurait conclure. Aussi, nous pouvons ajouter le fait que la manipulation de la dérivée seconde f'' en France n'est pas courante contrairement qu'en Italie.

Type de tâche	Calculer une aire, en passant par une intégrale.
Degré d'ouverture	Ouvert
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Le mise en fonctionnement de la définition d'intégrale comme l'aire sous une courbe est supposée disponible en tant qu'objet. Réponse 1 : Le niveau de mise en fonctionnement du théorème sur la primitive est supposé disponible comme outil. Réponse 2 : Les changements de variable, la décomposition en éléments simples sont supposés disponibles comme outils. Les formules d'intégration et de dérivation sont supposées disponibles comme objets.
Outil/objet	La primitive de f'', c'est-à-dire f', est utilisée en tant qu'outil pour calculer l'intégrale.
Perspectives	Globale sur f'' et ponctuelle sur f'
Cadre	Géométrique $\rightarrow$ Fonctionnel
Cadres de travail	Graphique $\rightarrow$ d'analyse algébrisée ; Algébrique
Registres	Question : Langue naturelle, figure géométrique Réponse : Expression d'analyse algébrisée, expression algébrique, langue naturelle

3.3.2 Bilan sur le problème 1

Les données de chaque question ont été compilées dans des tableaux récapitulatifs (cf Annexe F) sur lesquels nous nous appuyons pour faire le bilan suivant. Les pourcentages indiqués ci-dessous sont extraits de ces tableaux.
Dans ce problème, l'élève s'intéresse à une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''. Le travail qu'il effectue est centré successivement sur l'une ou l'autre des fonctions. L'étude n'est pas seulement concentrée sur la fonction f et ses propriétés. A chaque question, la fonction objet d'étude change et donc les rôles des trois fonctions en jeu sont différents. Cette remarque illustre la richesse des multiples points de vue en jeu dans ce problème. Les types de tâches rencontrés dans ce problème sont variés. Le spectre des tâches évaluées est étendu. Nous avons partagé la première question en trois sous-questions. Nous remarquons qu'avec ce découpage, deux questions sont quasi fermées et les quatre autres sont ouvertes. Aucune aide ou indication n'est donnée dans tout le problème. Nous trouvons deux moyens de contrôle interne (dans les deux questions quasi fermées). L'expression de f donnée à la question 3 entraîne un moyen de contrôle externe pour la question 1. La mise en fonctionnement des connaissances est toujours du niveau disponible, aussi bien en tant qu'objet qu'en tant qu'outil, et toutes les connaissances en jeu, mis à part le calcul du coefficient directeur et la résolution du système d'équations exponentielles, sont nouvelles. Beaucoup de changements de points de vue et d'adaptations sont attendus de l'élève, en particulier l'introduction d'étapes et d'intermédiaires dans toutes les questions, entièrement à la charge de l'élève. On en déduit qu'un grand degré de disponibilité est attendu (connaissances supposées disponibles plus comme outil que comme objet), avec une très forte place à l'autonomie de l'élève dans la résolution. Les fonctions en jeu sont travaillées à plus de la moitié du temps (62,5% des fois) avec un statut d'outil plutôt qu'un statut d'objet : nous remarquons un mélange au sein même d'une question (une fonction est objet et les autres sont outils pour la résolution). Seules les perspectives ponctuelles et globales sont utilisées ici, un nombre de fois quasi identique. La perspective locale n'est pas du tout mise en jeu. Les activités attendues des élèves sont dans le cadre fonctionnel, avec la présence du cadre géométrique dans la question 4. Nous rencontrons cinq cadres de travail différents avec une prédominance du travail

graphique et fonctionnel. Le cadre de travail graphique est un point de départ pour des jeux de cadres avec soit le travail fonctionnel, soit le travail d'analyse algébrisée, dans plusieurs questions. Dans l'énoncé, les registres sont la langue naturelle, la représentation graphique et l'expression algébrique. Nous avons identifié fréquemment des changements de registres entre la question et la réponse. Tous ces changements de cadres et registres sont laissés à la charge de l'élève, notamment l'élève peut utiliser plusieurs fois le registre tableau. Nous concluons en mettant en avant la place importante laissée à l'autonomie de l'élève dans son activité mathématique.

3.3.3 Analyse a priori du problème 2

Question 1. Étudier f et tracer son graphique γ dans un repère orthonormé Oxy ; sachant que γ admet un point d'inflexion et un minimum, calculer, à l'aide de la calculatrice, l'abscisse des ces deux points, arrondi à trois chiffres décimaux.

Réponse :

1. Étude du domaine de définition de la fonction f :
   $D_f =]0;+\infty[$ car la fonction $x \longmapsto \ln x$ est définie seulement pour les réels strictement positifs.

2. Étude de l'éventuelle parité de la fonction f :
   Il suffit d'observer que le domaine de définition n'est pas symétrique donc la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

3. Éventuelles intersections de γ avec l'axe des abscisses x et l'axe des ordonnées y :
   f n'est pas définie en 0 donc γ ne peut pas avoir d'intersection avec l'axe des ordonnées y.
   Pour trouver les intersections avec l'axe des abscisses x, nous allons résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ y & = & x^3 \ln x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x^3 \ln x & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & 0 \quad ou \quad \ln x \; = \; 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & 0 \quad ou \quad x \; = \; 1 \end{array}\right.$$

   Donc le seul point d'intersection avec l'axe x est $A(1,0)$, car la solution $(0,0)$ n'est pas compatible avec le domaine de définition de f.

4. Étude du signe de $f(x)$:

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \ln x \geqslant 0$$

x	0		1		$+\infty$
x^3		$+$		$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
f		$-$	0	$+$	

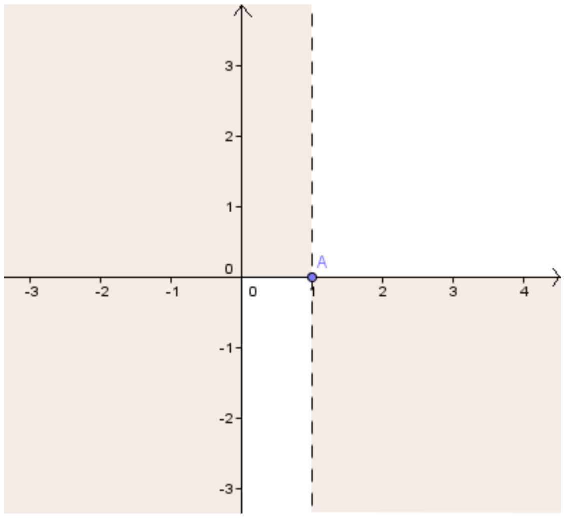


FIGURE 6 – Premier graphique reprenant les informations obtenues

5. Étude des limites et asymptotes :
   * Éventuelle asymptote verticale pour $x \to 0^+$:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = [0 \cdot \infty] \quad \text{F.I. (forme indéterminée)}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{F.I.}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-3\cdot x^{-4}} \quad \text{(d'après la règle de l'Hôpital)}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3} = \frac{0^+}{-3} = 0^-\end{aligned}$$
   Nous pouvons conclure qu'il n'y a pas d'asymptote verticale, mais que la fonction est négative au voisinage de 0 (à droite).

   * Éventuelle asymptote horizontale pour $x \to +\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \ln x = +\infty$$
   Nous pouvons conclure qu'il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

* Éventuelle asymptote oblique pour $x \to +\infty$:
  Si une asymptote oblique existe, elle a pour équation $y = mx + q$, avec

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

  et

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

  avec m et q finis et $m \neq 0$.

  Dans notre cas,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

  Nous pouvons conclure qu'il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

6. Étude des variations de la fonction f :
   Nous devons étudier le signe de la dérivée f' de f. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1)$$

   D'où,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq e^{-1/3}$$

x	0		$e^{-1/3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

   Donc, f admet un minimum en $x = e^{-1/3}$. Le minimum M a pour coordonnées $(e^{-1/3}; f(e^{-1/3}))$, c'est-à-dire $M(e^{-1/3}; -\frac{1}{3}e)$.

7. Étude de la concavité de la fonction f :
   Nous devons étudier le signe de la dérivée seconde f'' de f. Pour tout $x \in D_f$,

$$f''(x) = 2x(3 \ln x + 1) + x^2 \frac{3}{x} = 2x(3 \ln x + 1) + 3x = x(6 \ln x + 5)$$

   Donc,

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(6 \ln x + 5) \geq 0$$

et, comme $x \in D_f =]0;+\infty[$, x est toujours positif,

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6\ln x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{5}{6} \Leftrightarrow x \geq e^{-5/6}$$

.

x	0	$e^{-5/6}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Donc f est concave sur $\left]0; e^{-5/6}\right]$ et convexe sur $\left[e^{-5/6}; +\infty\right[$.

Donc, γ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = e^{-5/6}$. Le point d'inflexion F a pour coordonnées $(e^{-5/6}; f(e^{-5/6}))$, c'est-à-dire $F(e^{-5/6}; -\frac{5}{6}e^{-5/6})$.

8. Représentation graphique γ de la fonction f (Fig. 7) :
A l'aide de la calculatrice (non programmable), nous pouvons donner la valeur approchée, à 10^{-3} près, de l'abscisse du minimum $M(e^{-1/3}, -\frac{1}{3}e)$ et du point d'inflexion $F(e^{-5/6}, -\frac{5}{6}e^{-5/6})$.

$$x_M = e^{-1/3} \approx 0,717 \quad \text{et} \quad x_F = e^{-5/6} \approx 0,435.$$

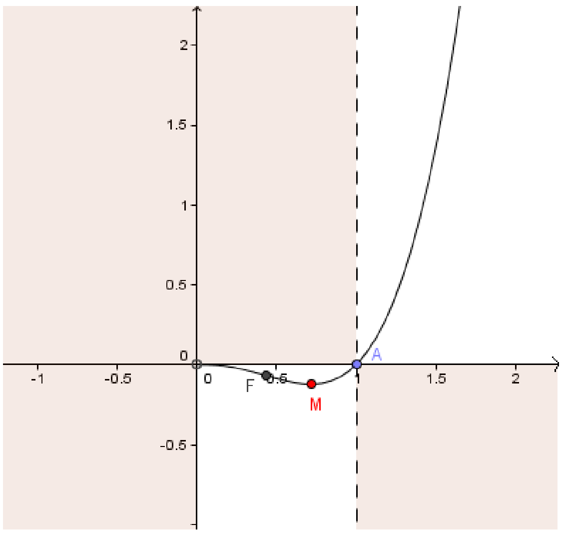


FIGURE 7 – Représentation graphique de f

Il s'agit d'une étude de fonction "classique", dont l'expression algébrique est donnée. La question est quasi ouverte. L'énoncé explicite qu'une partie du travail demandé est la représentation graphique de la fonction. Aucune indication sur la méthode n'est donnée, cependant il s'agit d'un type de tâche typique qui suppose une technique qu'un élève de dernière année de lycée a rencontré à plusieurs reprises au cours de l'année. L'élève dispose d'un moyen de contrôle (partiel) interne, car l'énoncé dit que γ admet un point d'inflexion et un minimum. La connaissance des différents points à étudier dans l'étude de la fonction est supposée disponible en tant que méthode. Certains aspects sont des connaissances anciennes (comme l'étude du domaine de définition, du signe, des zéros, de la parité,...) et d'autres sont nouvelles (comme l'étude des variations, des asymptotes, de la concavité,...). Cependant, chaque étape doit être introduite par l'élève qui prend en charge leur mise en œuvre. L'ordre de ces étapes joue un rôle dans la cohérence de l'étude.

1. La première étape consiste à déterminer le domaine de définition de la fonction. L'élève doit identifier la fonction f comme produit de deux fonctions usuelles : $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln x$. La connaissance du domaine de définition de ces deux fonctions est supposée disponible en tant qu'objet. Le cadre de travail est ici fonctionnel. On observe que le domaine est déjà mentionné dans l'énoncé préliminaire ("Soit f la fonction définie pour tout x positif par..."), ce qui représente un autre moyen de contrôle (externe, dans l'énoncé général) pour l'élève. La conversion de cette information fonctionnelle dans le registre numérique (intervalle de $\mathbb{R}$) à un registre graphique revient à l'effacement du demi-plan à gauche de l'axe des ordonnées (axe compris)(cf Fig. 6).

2. La deuxième étape vérifie la parité ou imparité de la fonction, mais ici il suffit de remarquer que le domaine n'est pas symétrique. Cependant, un élève, qui voudrait utiliser la démarche algébrique pour étudier la parité, écrirait $f(-x) = -x^3 \ln(-x)$ qui n'est ni égal à $f(x)$, ni à $-f(x)$ (et même qui n'existe pas si x est positif).

3. La troisième étape consiste à déterminer les éventuelles intersections avec les axes. Par une changement de points de vue, trouver le point de la courbe qui intersecte l'axe des ordonnées, s'il existe, c'est trouver le point de la courbe d'abscisse 0 et donc pour trouver l'ordonnée, il faut calculer $f(0)$. Ici, il suffit de remarquer que 0 n'appartient pas au domaine de définition, donc la fonction ne peut pas avoir d'intersection avec l'axe des ordonnées. Si l'élève ne fait pas le lien avec les étapes précédentes, il peut essayer de calculer $f(0)$, et s'apercevoir que "$f(0) = 0 \ln 0$" (qui n'existe pas !). Pour les intersections avec l'axe des abscisses, l'élève fait un travail algébrique en résolvant le système de deux équations et deux inconnues avec $y = 0$, équation de l'axe des abscisses, et $y = x^3 \ln x$, équation de f. Il y a ici une adaptation à faire. Il doit alors résoudre l'équation non linéaire $0 = x^3 \ln x$. La règle d'annulation du produit est une connaissance ancienne, supposée de niveau disponible en tant qu'objet à ce niveau scolaire. L'utilisation de cette propriété donne les deux équations $x^3 = 0$, qui implique la solution $x = 0$ impossible pour le domaine, et $\ln x = 0$, équation logarithmique qui implique $x = e^0 = 1$, en appliquant la relation $\log_a(b) = c \Leftrightarrow b = a^c$. Cette relation est apprise en classe avec le *log* (la plupart du temps, elle n'est pas donnée spécifiquement pour *ln*), il faut donc procéder à une adaptation en repérant que $ln = log_e$. Cette relation (et cette adaptation) rentre dans les connaissances anciennes de l'élève et est supposée disponible en tant qu'outil ici pour résoudre l'équation. La conversion au registre graphique de cette information dans un registre algébrique est le fait que la représentation graphique de f passe par le point A de coordonnée $(1, 0)$. Ce passage au registre graphique n'est pas explicitement demandé, cependant toutes les conversions aux registres graphiques (il y en a d'autres après) sont travaillées en classe et attendues implicitement.

4. La quatrième étape consiste à déterminer le signe de la fonction. C'est un travail dans le cadre algébrique et fonctionnel. L'élève peut par exemple résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^3 \ln x \geqslant 0$. Pour aboutir au résultat, l'élève doit de nouveau étudier séparément les deux fonctions qui composent f et ensuite en déduire le signe de leur produit, à l'aide d'un tableau de signes ou non. L'élève doit repérer que le signe de f est déterminé par le signe de la fonction $x \mapsto \ln x$, car la fonction $x \mapsto x^3$ est toujours positive sur le domaine de définition. La connaissance du signe des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln x$ est supposée ici disponible en tant qu'objet, dans le sens où le fait d'étudier le signe de chaque membre du produit est supposé disponible en tant que méthode. La conversion dans le registre graphique de cette information (dans le registre tableau ou algébrique) est l'effacement de la région de plan au-dessus de l'axe des abscisses, pour les valeurs de x telles que $f(x)$ est négative, soit l'intervalle $]0; 1]$, et l'effacement de la région de plan en-dessous de l'axe des abscisses, pour les valeurs de x telles que $f(x)$ est positive, soit l'intervalle $[1, +\infty[$.

5. La cinquième étape consiste à étudier les éventuelles asymptotes verticales, horizontales ou obliques de f. Pour cela, l'élève doit calculer les limites adéquates quand $x \to 0^+$ et $x \to +\infty$, ceci est supposé disponible en tant que méthode. Pour l'asymptote verticale, l'élève doit se concentrer sur l'extrémité de l'intervalle de définition où la fonction n'est pas définie, soit $x = 0$. Il faut changer de point de vue : chercher une asymptote verticale revient à chercher si la limite de f en 0 est infinie ou non. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 amène à la forme indéterminée $[0 \cdot \infty]$. L'élève doit alors changer de point de vue sur l'expression de la fonction pour faire apparaître une forme indéterminée de la forme $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, qui permette ensuite d'appliquer la règle de l'Hôpital (au programme en Italie). Pour cela, le quotient doit se réécrire en utilisant la propriété des puissances $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$, connaissance ancienne qui est supposée disponible en tant qu'outil. L'expression de $f(x)$ passe d'un produit à un quotient et permet alors d'appliquer la propriété voulue. Il y a donc plusieurs adaptations à faire ici : il faut reconnaître, à l'avance, que l'on pourrait utiliser la règle de l'Hôpital, se mettre dans les bonnes conditions et ensuite l'appliquer. La règle de l'Hôpital, connaissance nouvelle, est supposée disponible en tant qu'outil. Pour appliquer cette propriété, l'élève doit dériver le numérateur et le dénominateur via des formules de dérivées usuelles, connaissances nouvelles, supposées disponibles en tant qu'objets pour l'application de la règle de l'Hôpital. Et après, pour conclure, l'élève doit effectuer des manipulations algébriques en utilisant à nouveau les propriétés sur les puissances, puis conclure par les propriétés des limites, connaissances anciennes-nouvelles ici car il s'agit d'une fonction puissance, supposées disponibles en tant qu'objets à ce moment du travail. Il faut noter que le comportement à l'infini des fonctions puissances, par exemple, est connu des élèves avant la cinquième année de lycée, mais sans la notion de limite. Ce résultat va, enfin, s'interpréter dans le registre graphique, en termes de comportement de la fonction : la courbe prend des valeurs proches de 0 et négatives au voisinage à droite de 0.
Ensuite pour les asymptotes horizontales, l'élève doit s'intéresser seulement au voisinage de $+\infty$. Il y a un changement de point de vue à effectuer. Chercher une asymptote horizontale revient à chercher si la limite de f en $+\infty$ est finie ou non (méthode). L'élève doit connaître le comportement en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln x$, connaissances anciennes (cf remarque ci-dessus), supposées disponibles en tant qu'objets. Comme il n'y a pas d'asymptotes horizontales, il est alors attendu des élèves de considérer une asymptote

oblique.
L'élève doit procéder à un raisonnement par l'absurde, qui est une adaptation forte. Si une asymptote oblique existe, c'est une droite et donc son équation a une forme spécifique : $y = mx + p$ (connaissance ancienne, supposée disponible en tant qu'objet). La connaissance de l'utilisation de limites pour déterminer le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine q est supposée disponible en tant qu'outil. Les opérations sur les limites et les propriétés sur les limites usuelles sont supposées disponibles comme objets.

6. / 7. La sixième étape est l'étude des variations de f et la septième étape est l'étude de la concavité de f. Dans ces deux étapes, l'élève doit étudier le signe de la dérivée f' (étape 6) et de la dérivée seconde f'' (étape 7). Il doit appliquer, dans les deux cas, d'abord la formule de dérivation d'un produit et celle de dérivation de $x \mapsto x^n$ et de $x \mapsto \ln x$. Ce sont des connaissances nouvelles supposées disponibles en tant qu'objets. Il faut ensuite, dans les deux étapes, résoudre une inéquation logarithmique, en utilisant l'équivalence logarithmique-puissance $\log_a(b) > x \Leftrightarrow a^x > b$ si $a > 1$: connaissance ancienne qui est supposée disponible en tant qu'outil, avec la même adaptation que précédemment. Ensuite l'élève doit faire le lien entre le signe de la dérivée première et les variations de la fonction et entre le signe de la dérivée seconde et la concavité de la fonction (adaptation). Ces propriétés, nouvelles, sont supposées disponibles en tant qu'objets : ce sont des théorèmes à appliquer, dans le cadre d'étapes où la méthode est supposée disponible.
Il déduit ensuite qu'il y a un point de minimum M, à l'aide du tableau de variation, et un point d'inflexion F, à l'aide d'un changement de point de vue sur le fait que la dérivée seconde s'annule. Les abscisses de ces points ont déjà été déterminées. Pour calculer la valeur de l'ordonnée de ces points, il faut passer à un travail numérique et adopter une perspective ponctuelle sur la fonction f, en remplaçant x dans l'expression de $f(x)$. Pour placer les points dans le plan cartésien, l'élève peut utiliser la calculatrice (non programmable) et déterminer leurs coordonnées arrondies. Dans l'énoncé, il est demandé d'arrondir les abscisses à trois chiffres après la virgule. La règle pour arrondir une valeur numérique est supposée de niveau technique.

8. Quand toutes les informations collectées ont été traduites graphiquement (cela peut être fait seulement mentalement), il faut tracer une courbe $\gamma : y = f(x)$ qui respecte toutes les caractéristiques trouvées.

La résolution des différentes tâches est dans le cadre fonctionnel. On peut remarquer la présence de plusieurs jeux de cadres de travail, notamment entre le travail fonctionnel, algébrique et d'analyse algébrisée, d'un côté, et le cadre de travail graphique, de l'autre. Dans cette conversion des informations dans le registre graphique, le cadre de travail numérique intervient aussi pour déterminer les coordonnées arrondies des points particuliers de la fonction. Dans ce travail, les fonctions f' et f'' sont utilisées en tant qu'outils pour étudier la fonction f comme objet. Il y a aussi de fréquents changements de perspective sur les fonctions en jeu. Sur f, on retrouve une perspective ponctuelle lors de la recherche des points d'intersections et de la détermination des coordonnées du point d'inflexion et du minimum ; une perspective locale, dans l'étude des limites ; une perspective globale, dans l'étude du domaine, du signe, de la parité, des variations, de la concavité et de la représentation graphique. Sur f' et f'', l'étude du signe est globale, tandis que la recherche des zéros est ponctuelle.

Nous commenterons simplement en remarquant qu'en France, un travail beaucoup moins complet serait attendu d'un élève de terminale pour l'étude d'une fonction - les études d'asymptotes obliques et la convexité étant des notions hors programme. De plus, il est clair que ce type de question "Etudier la fonction" ne serait jamais posé tel quel en France (notamment au baccalauréat) mais plutôt divisé en sous-questions. Les élèves italiens apprennent des méthodes très structurées pour résoudre ce type de tâches, dans lequel ils sont ensuite laissé entièrement autonomes.

Types de tâche	Faire une étude de fonction et tracer sa courbe représentative. Arrondir des valeurs numériques.
Degré d'ouverture	Quasi ouvert.
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Disponibles pour l'ensemble des connaissances en jeu, en tant qu'outils ou objets suivant les cas. Seule la règle pour arrondir une valeur numérique est supposée de niveau technique.
Outil/objet	Les fonctions f' et f'' sont utilisées en tant qu'outil pour étudier la fonction f, utilisée en tant qu'objet.
Perspectives	Ponctuelle, locale et globale sur f ; globale et ponctuelle sur f' et f''
Cadre	Fonctionnel
Cadres de travail	Fonctionnel, algébrique, analyse algébrisée et numérique $\rightarrow$ graphique
Registres	Question : Expression algébrique, langue naturelle Réponse : Expression algébrique, expression d'analyse algébrisée, tableau, langue naturelle, représentation graphique

Question 2. Soit P le point de γ qui intercepte l'axe x. Trouver l'équation de la parabole, avec un axe de symétrie parallèle à l'axe y, passant par l'origine et tangente à γ en P.

Réponse :
La parabole qui représente la fonction g, ayant pour axe de symétrie un axe parallèle à l'axe des ordonnées, admet une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, où les nombres réels a, b, c sont à déterminer. Afin que la parabole soit tangente à la courbe γ en P, elles doivent avoir la même tangente en P, c'est-à-dire qu'au point d'abscisse $x = 1$, la dérivée de g, avec $g(x) = ax^2 + bx + c$, doit être égale à la dérivée de f, avec $f(x) = x^3 \ln x$:

$$g'(1) = f'(1) \Leftrightarrow 2a \cdot 1 + b = 1 \cdot (3 \ln 1 + 1) \Leftrightarrow 2a + b = 1. \quad (1)$$

En imposant les conditions suivantes : la parabole passe par le point P et par l'origine et l'équation (1) est vérifiée, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}0=a\cdot 1+b\cdot 1+c\\0=a\cdot 0+b\cdot 0+c\\2a+b=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+b+c=0\\c=0\\b=1-2a\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+1-2a=0\\c=0\\b=1-2a\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\c=0\\b=1-2a\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\c=0\\b=-1\end{array}\right.$$

Donc, la parabole représentative de la fonction g a pour équation $y=x^2-x$.

Il s'agit de déterminer l'équation d'une parabole qui satisfait certaines conditions géométriques données. L'énoncé est formulé de façon ouverte dans le cadre géométrique : il se réfère à une courbe (parabole) qui passe par deux points du plan et qui est tangente à la courbe γ, étudiée dans la question précédente (question 1). Cependant, il est demandé de "trouver l'équation" de cette courbe (parabole), donc un travail algébrique semble suggéré par l'énoncé. La parabole en question, dans le cadre géométrique, doit être vue comme la représentation graphique d'une fonction du second degré, donc dans le cadre fonctionnel. Il est nécessaire d'introduire des intermédiaires : notamment nommer la fonction représentée par la parabole (g pour nous) et les réels a, b et c, coefficients de l'équation de la parabole : $y=g(x)$ avec $g(x)=ax^2+bx+c$. La connaissance de l'équation d'une parabole est ancienne et supposée disponible en tant qu'objet. Une fois les valeurs de ces paramètres déterminées, l'équation de la courbe sera trouvée. Repérant qu'il y a trois inconnues à déterminer, l'élève doit déduire qu'il a besoin de trois équations en a, b et c. Le fait de reconnaître qu'il faut introduire un système est supposé disponible en tant qu'objet. Ensuite, c'est le cadre de travail algébrique qui permet de traduire les conditions géométriques données de façon à aboutir au résultat. Il y a donc des changements de points de vue. L'élève doit traduire les trois conditions géométriques données en trois équations algébriques. La première équation traduit le fait que la parabole passe par P. Le point P a déjà été étudié à la question précédente (mais pas sous le nom de P, ce qui nécessite une adaptation de la part de l'élève), et si cela n'a pas été fait, l'élève peut faire ici l'étape 4 de la question 1. Il s'agit de $A(1,0)$, avec nos notations. A travers un changement de point de vue, l'élève doit imposer $g(1)=0$. De la même façon, la deuxième équation correspond au fait que la parabole passe par l'origine $(0,0)$, et par un même changement de point de vue est traduit par $g(0)=0$. L'élève doit ensuite remplacer $g(1)$ et $g(0)$ à l'aide de l'expression introduite de g. La traduction algébrique du passage d'une courbe par un point, connaissance ancienne, est supposée de niveau disponible en tant qu'outil. En revanche, la troisième condition n'entraîne pas immédiatement une équation algébrique. Il faut d'abord rappeler que deux courbes sont tangentes si elles ont la même tangente en un même point. Cette définition est une connaissance nouvelle, supposée disponible en tant qu'objet. A travers un premier changement de point de vue, il faut que les deux tangentes, et en fait il suffit que les deux coefficients directeurs des deux tangentes, coïncident au point de tangence P. Par un deuxième changement de point de vue, l'élève doit donc imposer l'égalité du nombre dérivé des deux fonctions représentées par les deux courbes en question, c'est-à-dire f pour γ et g pour la parabole, en $x = 1$. Pour cela, l'élève doit connaître le lien entre le coefficient directeur de la tangente et le nombre dérivé de la fonction correspondante à la courbe à l'abscisse du point de tangence. Cette propriété fait partie des nouvelles connaissances de l'élève et elle est supposée disponible en tant qu'outil. Il faut, donc, dériver g (tandis que $f'(x)$ a déjà été calculée dans la question 1). Pour cela, l'élève a besoin de la formule de dérivation de la fonction puissance, connaissance nouvelle, qui dans ce contexte est supposée disponible en tant qu'objet. Après, en remplaçant x par 1 dans les expressions de $g'(x)$ et de $f'(x)$, il obtient la troisième équation : $g'(1) = f'(1)$. Le fait de faire intervenir les dérivées g' et f' pour établir le système est supposé disponible en tant qu'outil. Il faut alors résoudre ce système pour déterminer les valeurs de a, b et c. Ce travail est fait entièrement dans le cadre de travail algébrique. Tout ce qui concerne la résolution du système est supposée disponible comme objet. On obtient alors l'expression algébrique de $g(x)$, en rappelant que a, b et c ont joué le rôle d'intermédiaires.

La fonction g a le statut d'objet, mais aussi d'outil, ainsi que f' et g', car leurs expressions algébriques sont utilisées comme outils pour déterminer les équations et établir le système. Sur g, on adopte une perspective ponctuelle, quand on impose le passage par le point P et par l'origine de la parabole. Sur les deux fonctions f et g, la perspective n'est jamais locale, même lorsqu'on doit traduire la tangence en P : cela donne plutôt une condition ponctuelle sur f' et sur g'.

La notion de deux courbes tangentes est peu rencontrée par les élèves français, cependant ce type de tâches pourrait être traité.

Types de tâche	Déterminer l'équation d'une parabole qui satisfait certaines conditions données, parmi lesquelles la condition de tangence à une autre courbe.
Degré d'ouverture	Ouvert.
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	La connaissance de l'équation d'une parabole, de la définition de la tangence de deux courbes et de la formule de dérivation de la fonction puissance sont supposées disponibles en tant qu'objets. Le fait de reconnaître qu'il faut introduire un système et puis de le résoudre est supposé disponible comme objet. La traduction algébrique du passage d'une courbe par un point est supposée disponible en tant qu'outil. Le lien entre le coefficient directeur de la tangente et la dérivée première de la fonction correspondante à la courbe, à l'abscisse du point de tangence est supposée disponible en tant qu'outil. Le fait de faire intervenir les dérivées g' et f' pour établir le système est supposé disponible en tant qu'outil.
Outil/objet	La fonction g a le statut d'objet, mais aussi d'outil, ainsi que f' et g' (pour déterminer les équations et établir le système).
Perspective	Ponctuelle sur g, f' et g'
Cadre	Géométrique $\rightarrow$ fonctionnel
Cadre de travail	Algébrique
Registres	Question : Langue naturelle Réponse : Langue naturelle, expression algébrique

Question 3. Soit R la région délimitée par γ et l'axe x sur l'intervalle $]0;1]$. Calculer l'aire de R , en expliquant le raisonnement suivi et l'exprimer en mm^2 en supposant que l'unité de mesure est 1 décimètre.

Réponse :
L'aire de R correspond à l'intégrale suivante (car f est négative sur cet intervalle) :

$$Aire_R = -\int_0^1 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = -\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x.$$

On applique la formule d'intégration par parties :

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

où

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = x^3 \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^4}{4}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
Aire_R &= -\lim_{t\to 0^+}\Big(\Big[\frac{x^4}{4}\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 \frac{1}{x}\frac{x^4}{4}\,\mathrm{d}x\Big) = -\lim_{t\to 0^+}\Big(-\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{1}{4}\int_t^1 x^3\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= -\lim_{t\to 0^+}\Big(-\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{1}{4}\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_t^1\Big) = -\lim_{t\to 0^+}\Big(-\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{1}{16}(1-t^4)\Big)\\
&= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+} t^4\ln t + \frac{1}{16}\lim_{t\to 0^+}(1-t^4) = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+} t^4\ln t + \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

La limite $\lim\limits_{t\to 0^+} t^4\ln t$ donne une forme indéterminée $[\infty\cdot 0]$. Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} t^4\ln t &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-4}} = \Big[\frac{\infty}{\infty}\Big] \quad \text{F.I.}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{-1}}{-4t^{-5}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^4}{-4} = \frac{0^+}{-4} = 0^- \quad \text{(d'après la règle de l'Hôpital)}
\end{aligned}$$

On obtient alors que $Aire_R = \frac{1}{16}\,dm^2 = 0,0625\,dm^2 = 625\,mm^2$.

Il s'agit de calculer l'aire d'une région de plan délimitée par une courbe sur un intervalle non borné, à l'aide d'un calcul d'intégrale impropre. L'énoncé est formulé dans le cadre géométrique et de façon ouverte. Il n'y a aucune indication sur la méthode à utiliser, en revanche, il est demandé d'expliquer le raisonnement suivi pour aboutir au résultat. La définition de l'intégrale d'une fonction comme l'aire sous la courbe est supposée disponible en tant qu'objet. Au cours de l'écriture et du calcul de l'intégrale, plusieurs adaptations sont à faire, toutes laissées à la charge de l'élève. D'abord, il faut reconnaître que l'aire de la région demandée est délimitée par une fonction négative, donc l'aire est égale à l'opposé de l'intégrale de f sur $]0;1]$. Il faut aussi remarquer que l'intervalle donné est ouvert à gauche car la fonction f, représentée par γ, n'est pas définie en 0. Cela entraîne que l'intégrale est impropre, donc il faut adapter l'outil intégrale, avec l'introduction d'une limite (en remarque : l'intégrale impropre est peu travaillée au lycée). Calculer l'intégrale en question se fait à l'aide de deux autres adaptations par l'élève. Il est nécessaire d'introduire un intermédiaire t, tel que $0 < t < 1$, et il faut ensuite faire le calcul en deux grandes étapes : d'abord, résoudre l'intégrale propre entre t et 1 et, ensuite, faire tendre t vers 0^+. L'élève peut effectuer les deux étapes séparément ou bien indiquer la deuxième avec un signe de limite (pour $t\to 0^+$) devant le signe d'intégrale.
Afin de résoudre l'intégrale entre t et 1, l'élève doit rappeler la formule d'intégration par parties, qui est supposée disponible en tant qu'outil. Une autre adaptation est attendue, car il faut, pour appliquer la formule, reconnaître les fonctions f et g', c'est-à-dire choisir laquelle des fonctions dériver et laquelle intégrer. Les formules de dérivation et d'intégration, ainsi que la linéarité de l'intégrale, sont supposées disponibles en tant qu'objets.
La limite obtenue donne une forme indéterminée $[\infty\cdot 0]$, que l'élève peut calculer en appliquant la règle de l'Hôpital, en mettant en œuvre les mêmes adaptations qu'à la question 1. La règle de l'Hôpital est supposée disponible comme outil. Toutes ces étapes sont faites dans le cadre fonctionnel avec, en particulier, un passage du cadre de travail graphique au cadre de travail d'analyse algébrisée. Pour finir, l'énoncé propose de retourner vers un cadre géométrique avec un travail numérique de conversion d'unités pour passer de dm^2 en mm^2. Le niveau de mise en fonctionnement de la règle pour convertir une mesure est supposé technique.
La fonction f est ici vue comme objet, dans une perspective globale, quand on considère l'aire

de la région de plan délimitée par une courbe dans un intervalle donné, mais aussi locale, quand on introduit la limite pour surmonter le fait que f n'est pas définie en 0.
Les intégrales impropres ne sont pas étudiées en France en calcul intégral (seulement un peu en probabilité).

Types de tâche	Calculer l'aire d'une région de plan délimitée par une courbe, dans un intervalle donné, à l'aide d'une intégrale impropre. Convertir une mesure de dm^2 à mm^2.
Degré d'ouverture	Ouvert.
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	La définition de l'intégrale d'une fonction comme l'aire sous la courbe est supposée disponible en tant qu'objet. Les formules de dérivation et d'intégration sont supposées disponibles en tant qu'objets. La formule d'intégration par parties et la règle de l'Hôpital sont supposées disponibles en tant qu'outils. La règle pour convertir une mesure est supposée de niveau technique.
Outil/objet	L'intégrale de f a le statut d'outil.
Perspectives	Globale et locale sur f.
Cadre	Géométrique $\to$ fonctionnel $\to$ géométrique
Cadres de travail	Graphique $\to$ d'analyse algébrisée ; Numérique
Registres	Question : Langue naturelle Réponse : Expression d'analyse algébrisée, expression numérique

Question 4. Tracer la courbe symétrique à γ par rapport à l'axe y et écrire son équation. De façon similaire, tracer la courbe symétrique à γ par rapport à la droite $y = -1$.

Réponse :
La courbe symétrique à γ par rapport à l'axe des ordonnées y est représentée graphiquement en Fig. 8. Son équation est $y = h(x)$ avec $h(x) = f(-x) = -x^3 \ln(-x)$, pour $x \in]-\infty; 0[$.
La courbe symétrique à γ par rapport à la droite $y = -1$ est représentée graphiquement en Fig. 9. Son équation est $y = -f(x) - 2 = -x^3 \ln x - 2$, pour $x \in]0; +\infty[$.

Il s'agit de tracer deux symétries axiales de γ (courbe tracée à la question 1), par rapport à l'axe des ordonnées, dans un premier temps, et par rapport à la droite d'équation $y = -1$, dans un second temps, puis de déterminer l'équation de ces courbes. L'énoncé est ouvert et divisé en deux sous-tâches que l'on vient de décrire, dans le cadre géométrique. La première partie de l'énoncé "tracer la courbe symétrique à γ..." semble pouvoir être une étape pour aider à la détermination des équations, cependant, ce n'est pas une suggestion explicitée : l'élève peut s'en servir pour arriver à l'équation, mais le lien entre la transformation géométrique et l'équation est à sa charge.
Pour ce qui concerne la première sous-tâche, l'élève doit tracer les symétriques de la courbe γ par rapport à un axe donné : vertical (l'axe des ordonnées) et horizontal (la droite $y = -1$). C'est un travail géométrique de tracé de symétrique (technique), où chaque point M de la courbe γ

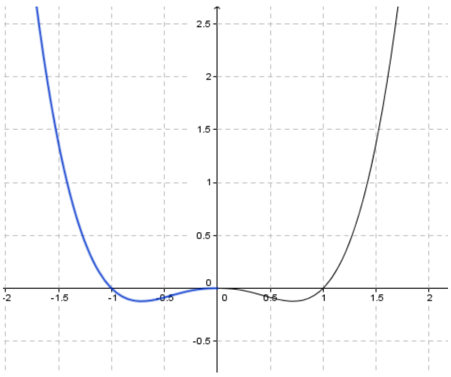


FIGURE 8 – Courbe symétrique à γ en rapport à l'axe y

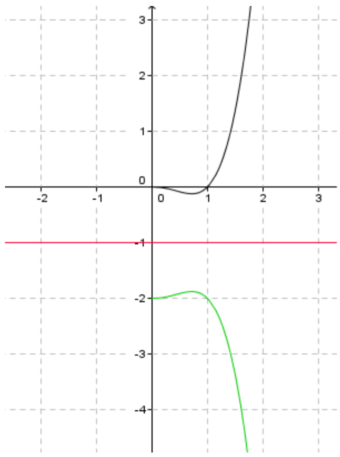


FIGURE 9 – Courbe symétrique à γ par rapport à la droite $y = -1$

doit être reporté à équidistance de l'axe de symétrie suivant la perpendiculaire à l'axe (effet de "miroir"). Les techniques géométriques pour tracer le symétrique d'une courbe donnée sont des connaissances anciennes, qui sont supposées de niveau technique. Ensuite, pour déterminer les équations, un changement de registre est demandé par l'énoncé et un passage au cadre fonctionnel, en s'appuyant sur l'expression algébrique de f, est nécessaire. Deux façons de faire sont envisageables. L'élève peut s'appuyer sur le graphique. Il peut retrouver, à l'aide du graphique, que le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est la courbe d'équation $y = f(-x)$ et que la courbe d'équation $y = -f(x) - 2$ correspond au symétrique par rapport à l'axe des abscisses, suivie d'une translation verticale vers le bas de "-2". En faisant un raisonnement inverse (il y a une adaptation à faire), l'élève peut déterminer l'équation. Ce sont des connaissances anciennes, ici supposées disponibles comme objets.
L'élève peut aussi ne pas prendre appui sur le début de la question (donc sur le tracé de la courbe, par rapport à γ) et directement appliquer les équations des transformations, apprises par cœur.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x \\ y' & = & y \end{array} \right. , \tag{2}$$

quand l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées, et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & 2y_0 - y \end{array} \right. . \tag{3}$$

quand l'axe de symétrie est une droite horizontale d'équation $y = y_0$ (dans notre cas, $y_0 = -1$ est l'adaptation à faire).
Les équations (2) et (3) sont des connaissances anciennes et sont supposées disponibles en tant qu'objets. L'élève doit mettre en évidence x et y, puis il doit remplacer x et y dans l'équation de f avec les expressions trouvées.
Dans les deux cas, pour ce qui concerne cette deuxième sous-tâche, le cadre est fonctionnel avec un travail algébrique, car il faut faire un travail de remplacement et manipulation des variables sur l'expression de f. Cependant, avec la première méthode, on remarque un jeu entre le cadre de travail graphique, utilisé dans la première partie de l'exercice, et le cadre de travail algébrique. L'élève doit traduire les transformations géométriques faites sur le graphique en

termes de transformations faites sur l'expression de f ($f(x) \to f(-x)$ et $f(x) \to -f(x) - 2$). Dans la deuxième méthode, il y a une distinction entre la première sous-tâche de la question et la seconde : on abandonne le travail géométrique fait dans le première partie, pour se concentrer sur le travail algébrique.
La fonction f est travaillée en tant qu'objet et outil, dans une perspective globale, car on s'intéresse au graphique globale et à l'expression pour tout x du domaine de définition.

Types de tâche	Tracer le symétrique d'une courbe par rapport à l'axe y et par rapport à une droite horizontale. Écrire l'équation des deux nouvelles courbes tracées.
Degré d'ouverture	Ouvert
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Le tracé géométrique des symétries axiales est supposé de niveau technique. Retrouver les équations à l'aide du graphique est supposé disponible en tant qu'objet / Les équations des transformations géométriques dans le plan sont supposées disponibles en tant qu'objets.
Outil/objet	La fonction f a le statut d'objet et d'outil.
Perspectives	Globale sur f.
Cadre	Géométrique $\to$ fonctionnel
Cadres de travail	Géométrique ; Graphique $\to$ Algébrique
Registres	Question : Langue naturelle Réponse : Graphique $\to$ expression algébrique

3.3.4 Bilan sur le problème 2

Les données de chaque question ont été compilées dans des tableaux récapitulatifs (cf Annexe G) sur lesquels nous nous appuyons pour faire le bilan suivant. Les pourcentages indiqués ci-dessous sont extraits de ces tableaux.
Dans ce problème, l'élève s'intéresse à une fonction f (ou bien g, dans la question 2) comme objet et à ses dérivées première ou seconde comme outils pour l'étudier (ou déterminer une équation). Le problème est assez centrée sur la fonction f (ou g) et ses propriétés. C'est une approche plus "traditionnelle" de l'étude de fonction. Cependant, les types de tâches rencontrés dans ce problème restent très variés. Le spectre des tâches évaluées est étendu et certaines connaissances mises en jeu dans les différentes questions sont assez anciennes. Dans la question 2, par exemple, l'objet d'étude est une parabole tangente à la courbe représentative de f en un point donné. En faisant intervenir une parabole, la tâche reprend une connaissance apprise en 2ème année de lycée. La question 3 porte sur un calcul intégral (avec une intégrale impropre), mais la tâche de convertir la mesure de l'aire est une connaissance très ancienne. Dans la quatrième question, enfin, on rencontre un travail géométrique de transformations et d'équations correspondantes que l'élève a vu avant la dernière année de lycée. Nous remarquons que ces connaissances anciennes sont mises en fonctionnement au niveau disponible en tant qu'outil ou objet, sauf pour le tracé de symétrique, qui est considéré au niveau technique. La plupart des connaissances à utiliser pour résoudre les tâches restent tout de même nouvelles et sont supposées disponibles au niveau de la mise en fonctionnement, avec un caractère objet de disponibilité dans une majorité (environ 63%) des cas. On remarque aussi un considérable degré d'ouverture de l'énoncé ; les quatre questions sont ouvertes ou quasi-ouverte pour la première. En effet, il n'y a aucune aide ou indication de

méthode dans tout le problème. L'élève peut seulement s'appuyer sur deux (minuscules) moyens de contrôle pour la question 1 (un interne, un externe). Beaucoup de changements de points de vue et d'adaptations sont attendus de l'élève dans toutes les questions, entièrement à sa charge. On en déduit qu'un grand degré de disponibilité des connaissances est attendu (connaissances disponibles en tant qu'objet mais aussi en tant qu'outil), avec une très grande place laissée à l'autonomie de l'élève dans la résolution. Les perspectives ponctuelle et globale sont les plus travaillées ici, cependant la perspective locale, particulièrement dans les calculs de limite, n'est pas négligeable (elle se présent dans deux occasions). Les cadres rencontrés dans le problème sont le cadre fonctionnel et le cadre géométrique, avec de nombreux jeux entre ces cadres. Dans trois questions sur quatre, l'énoncé est formulé dans le cadre géométrique, mais la résolution est attendue à l'aide du cadre fonctionnel. Nous rencontrons six cadres de travail différents avec une prédominance du travail graphique et algébrique. Le cadre de travail graphique est souvent un point de départ pour des jeux de cadres de travail avec soit le travail fonctionnel ou soit le travail d'analyse algébrisée, dans plusieurs questions. Dans l'énoncé, les registres sont la langue naturelle et l'expression algébrique. D'autres registres sont mobilisés dans la résolution : l'expression d'analyse algébrisée, la représentation graphique, l'expression numérique et aussi les tableaux, au choix de l'élève. Nous avons identifié des changements de registres entre la question et la réponse, dans tous les cas. Tous ces changements de cadres et registres sont laissés à la charge de l'élève, notamment l'élève doit s'appuyer plusieurs fois sur un travail graphique et convertir les informations trouvées dans le registre algébrique, pour faire un travail algébrique sur les fonctions en jeu. Nous concluons en mettant en avant la place importante laissée à l'autonomie de l'élève dans son activité mathématique dans ce problème.

3.3.5 Bilan sur les deux problèmes italiens

Sans revenir sur tout ce qui a été dit ci-dessus, nous pensons que ce qui est très caractéristique de ces deux problèmes italiens, c'est le petit nombre de questions (quatre dans les deux) et pour autant un travail conséquent attendu. Les questions sont pratiquement toujours ouvertes (ou quasi ouvertes) et laissent une place considérable à l'autonomie de l'élève dans sa démarche. Les tâches traitées sont variées dans les deux problèmes et différentes. Tout cela est en résonance avec la modalité de déroulement de l'épreuve. Nous rappelons que le candidat doit traiter seulement l'un des deux problèmes. Il est supposé avoir acquis la «maturité» pour mener à bien ce type de problème, avec des connaissances acquises pendant tout le parcours scolaire. Le niveau de disponibilité des connaissances est toujours disponible, autant en tant qu'outil qu'en tant qu'objet.

3.4 Bilans comparatifs

3.4.1 Bilan comparatif entre l'exercice français et le problème 1 italien

Après avoir analysé séparément l'exercice 2 de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat scientifique de Métropole de juin 2013 et le problème 1 de l'épreuve de mathématiques de la *maturità* du parcours scientifique expérimental de juin 2013, nous pouvons faire un bilan sur les similitudes et les différences entre les activités attendues des élèves au niveau de ses examens finaux. Les tâches évaluées sont aussi variées dans l'un que dans l'autre des sujets et pour certaines questions les types de tâches sont similaires. Les connaissances en jeu sont semblables : calcul de dérivée, calcul intégral, utilisation des propriétés liant les variations d'une fonction avec le signe de sa dérivée,... Nous avons repéré une variété des cadres de travail et registres rencontrés, avec des changements et des jeux de cadres et de registres. Les cadres de travail sont similaires, avec un équilibre entre les différents types de travail, avec tout de même une plus forte présence

du travail graphique dans le problème italien. Les registres utilisés sont aussi identiques, mis à part au niveau de l'utilisation de la calculatrice : le calculatrice graphique est interdite pour le sujet italien, contrairement à celui de France, où la calculatrice graphique est un outil qui peut être utile. Au niveau des perspectives, nous avons observé l'absence totale du local dans les deux sujets (mis à part sur le calcul de limites dans le baccalauréat). La perspective locale, pourtant introduite en Italie de façon plus poussée qu'en France, ne fait pas l'objet d'une évaluation dans ce problème.
Malgré ces ressemblances, nous pouvons mettre en avant de véritables différences. Les connaissances mises en jeu sont entièrement nouvelles (à deux exceptions) pour le problème italien alors qu'en France, beaucoup plus de notions sont anciennes, ceci est notamment lié au fait que les propriétés liées à la dérivation sont introduites en première (mais aussi revues en terminale). En France, les fonctions mises en jeu ont un statut d'objet en majorité, à l'inverse de l'Italie, où les fonctions ont plus souvent un statut d'outil. De plus, dans le sujet du Baccalauréat, la fonction f est la fonction centrale du sujet, toutes les questions tournent autour d'elle et de ses propriétés (bien que le graphique de cette fonction soit donné dans l'énoncé). Alors que, dans le problème 1 de la *maturità*, toutes les fonctions, à tour de rôle, prennent la place d'objet d'étude. Les questions posées sont en majorité ouvertes dans le problème italien, alors qu'elles sont fermées ou quasi fermées pour l'exercice français. Dans les deux sujets, nous avons observé des adaptations : pour le baccalauréat, plutôt dans l'utilisation de résultats précédents, et pour la *maturità*, dans l'introduction d'étapes et d'intermédiaires et beaucoup de changements de points de vue sont à mobiliser. Nous remarquons une véritable différence dans l'autonomie attendue des élèves dans la résolution des questions. Dans l'exercice français, les étapes sont introduites dans l'énoncé sous forme de sous-questions et plusieurs indications ou aides sont présentes, alors que, dans le problème italien, toutes les étapes sont à la charge de l'élève et aucune indication n'est donnée. Nous avons repéré beaucoup plus de moyens de contrôle, la plupart externes, dans le sujet de baccalauréat. Un exemple permet d'illustrer ces propos : regardons la question 1 dans sa globalité du baccalauréat et la question 3 de la *maturità*. Dans les deux cas, on s'intéresse à la détermination de l'expression algébrique de la fonction en jeu. Des étapes similaires sont attendues et pour autant les activités attendues des élèves sont différentes. Pour le sujet français, les étapes sont introduites par l'énoncé (sous-questions), l'utilisation des résultats précédents est indiquée et des moyens de contrôle existent dans les étapes intermédiaires, alors que dans le sujet italien, un moyen de contrôle final est présent mais aucune indication d'introduction d'étapes, d'utilisation de résultats précédents n'est donnée. Enfin, le niveau de mise en fonctionnement des différentes connaissances mises en jeu sont majoritairement disponibles pour les deux, mais ce ne sont pas les mêmes disponibilités qui sont supposées à l'œuvre : il y a beaucoup de disponibilités "objets" (essentiellement associées à la mémoire) dans le sujet français alors qu'en Italie, il y a beaucoup plus de disponibilité "outil" que de disponibilité "objet", souvent même à combiner, à interpréter en changeant de points de vue au sein d'une même question. Pour conclure, tous ses indicateurs vont dans le même sens, pour mettre en avant le fait que les types de tâches dans les deux pays sont semblables mais pour autant la façon de les traiter est très différente. Le sujet français est cloisonné, laissant très peu d'autonomie à l'élève, contrairement au sujet italien qui laisse tout à la charge de l'élève. Le texte français ne permet, globalement, que de tester des disponibilités "objets", directement liées à une bonne connaissance des propriétés énoncées dans le cours.

3.4.2 Bilan comparatif entre l'exercice français et le problème 2 italien

Si nous comparons maintenant l'exercice français et le problème 2 de la *maturità*, nous allons retrouver des points communs à ce qui vient d'être dit, notamment la différence d'autonomie laissée aux élèves : grande en Italie, et presque absente en France. Nous repérons aussi la présence d'adaptations, mais de types différents dans les deux sujets (voir le paragraphe précédent). A part cela, les tendances changent par rapport à la comparaison précédente. Les tâches évaluées sont toujours variées dans les deux sujets mais ne sont pas similaires mis à part l'étude de fonction (qui est cependant beaucoup plus poussée et beaucoup moins guidée en Italie). Il y a aussi un calcul d'aire dans les deux, mais sur un domaine non borné dans le problème 2. Or en France, les intégrales impropres ne sont pas au programme de terminale. Les deux autres questions du sujet italien pourraient être traitées par un élève français, bien que ce ne soient pas des tâches courantes en terminale. Des ressemblances entre ces deux sujets sont présentes, contrairement à la comparaison précédente. Au niveau des cadres et des registres, nous retrouvons les mêmes. Pour les perspectives rencontrées, dans les deux exercices, la perspective locale n'est présente que dans le calcul de limites. Cependant, dans le sujet italien il faut introduire une limite au sein d'un calcul d'une aire, tandis que dans le sujet français les limites à calculer sont données dans l'énoncé. Les connaissances mobilisées dans la résolution sont nouvelles, mais aussi assez souvent anciennes (voire très anciennes). Le niveau de mise en fonctionnement est majoritairement disponible, et souvent dans un caractère "objet". Les fonctions en question dans les deux sujets ont un statut objet dans la plupart des cas, bien que celles-ci soient parfois utilisées en tant qu'outil. La fonction "f" est centrale dans le problème 2, contrairement au problème 1 de la *maturità*. Cependant une particularité est le fait que dans les questions 2, 3 et 4, f est utilisée pour avoir des informations sur d'autres fonctions et pas sur f même. Pour conclure, ici, les types de tâches sont vraiment différents et nous remarquons à nouveau le contraste dans le travail attendu des élèves au niveau de l'autonomie.

4 Conclusions et perspectives

Notre analyse de programmes, nous a permis de repérer les différences présentes dans l'apprentissage des fonctions dans le secondaire en France et en Italie. Nous avons notamment remarqué un enseignement quasi exclusif de l'analyse en dernière année de lycée italien, ce qui n'est pas le cas en France. Cette dernière année, en Italie, permet l'introduction "rigoureuse" de la notion de limite, de nombre dérivé, de continuité. En France, des choix différents sont faits, et l'intuition prime sur la rigueur mathématique. Cependant l'analyse des sujets de baccalauréat et *maturità*, nous permettent de moduler cette impression. Car, bien que ces notions de limite, nombre dérivé, continuité, qui mettent en avant la perspective locale d'une fonction, soient abordées plus rigoureusement en Italie, nous ne les retrouvons pas sous cet angle dans les sujets d'examens. En Italie, tout comme en France, la perspective locale n'apparait que pour le calcul de limites, mais dans un travail d'analyse algébrisée (donc peu révélateur du local). Les problèmes de la *maturità* portent seulement sur les fonctions, car c'est ce qui est central dans le programme, tandis qu'en France, les exercices (tous à faire) sont variés au niveau des domaines mathématiques. La véritable différence que nous avons observée dans les sujets d'examen, n'est pas vraiment dans les contenus mathématiques mais dans le travail mathématique attendu des élèves : avec un travail totalement "mâché" en France et un travail autonome, sans indications, en Italie. Des résultats similaires ont été repéré par Valentina Celi (2002), dans sa thèse intitulée *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans : effets sur leur formation*.
Il pourrait donc être intéressant de poursuivre ce travail en essayant de voir comment réagiraient des élèves français face à un sujet italien et inversement. Les difficultés ne devraient pas venir des connaissances mathématiques mais du manque d'habitude à les mobiliser dans ce contexte (guidé ou non). Il serait aussi envisageable de poursuivre ces comparaisons en analysant les manuels français et italiens.

Bibliographie

[1] Arsac, G. (1999), Variations et vairables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques* 19(3), p. 357-390.

[2] Celi, V. (2002), *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans : effets sur leur formation*, Didactique des mathématiques, Paris : Université Paris Diderot.

[3] *Document pour la formation, IREM P7*, 2007, nº 9 : « Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée. Quelques exemples. », par Chappet-Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E. & Rogalski, M..

[4] Chevallard, Y. (1991), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La pensée sauvage.

[5] Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), p. 73-112.

[6] Dorier, J.-L., Harel, G., Hillel, J., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La pensée sauvage.

[7] Douady, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherche en didactique des mathématiques* 7(2), p. 5-32.

[8] Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, p. 37-65.

[9] Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* Peter Lang Berne.

[10] Robert, A. (1988), Réflexion sur l'analyse des textes d'exercices des manuels, *IREM Université Paris VII. Cahier de didactique des mathématiques* nº 51.

[11] Robert, A. (1995), *L'épreuve sur dossier à l'oral de CAPES de mathématiques I - Géométrie*, Paris : Ellipses.

[12] Robert, A. (1998), Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), p. 139-189.

[13] Robert, A. (2003), Tâches mathématiques et activités des élèves. Une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège, *Petit x* nº 62.

[14] Robert, A. & Rogalski, M. (2004), Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repères IREM* nº 54, p. 77-109.

[15] Robert, A. (2008), Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck (ed.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octares.

[16] Vandebrouck, F. (2011), Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 16, p. 149-185.

[17] *Repères et références statistiques des enseignements, de la formation et de la recherche [RERS 2013]*, France, Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie, Direction de la programmation et du développement.

[18] *Noi Italia 2013. 100 statistiche per capire il Paese in cui viviamo*, Italie, Istat, site : http ://noi-italia.istat.it.

[19] *Focus sulle iscrizioni alla scuola secondaria di II grado. A.s. 2011/2012*, Italie, Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca, Servizio Statistico, site : http ://www.istruzione.it.

[20] *Risultati indagine 2013* sur le site www.matmedia.it.

[21] *Profilo dei diplomati 2013*, Italie, Associazione AlmaDiploma, site : http ://www.almadiploma.it/scuole/profilo/profilo2013.

[22] *Profilo dei laureati 2011*, Italie, Consorzio Interuniversitario AlmaLaurea, site : http ://www.almalaurea.it/universita/profilo/profilo2011.

[23] *Relazione dati statistici, Laurea Triennale in Matematica. Analisi dati a.a. 2009-10*, Italie, Turin, site : http ://www.matematica.unito.it.

[24] *Rapporto AlmaDiploma sulla condizione occupazionale e formativa dei diplomati di scuola secondaria superiore a uno, tre e cinque anni dal diploma*, Italie, Associazione AlmaDiploma, 2013, site : http ://www.almalaurea.it/informa/news/salastampa/comunicati.

Annexes

A Quelques références statistiques sur l'enseignement supérieur en Italie

D'après l'enquête dans *Profilo dei Diplomati 2013* par AlmaDiploma ([21]), 58% des élèves ayant obtenu la *maturità* en 2013 déclarent avoir l'intention de poursuivre les études à l'université, mais selon AlmaLaurea ([22]), seulement 29% des jeunes de 19 ans s'inscrivent effectivement à l'université. Parmi les élèves ayant obtenu la *maturità* en 2011 : 20% ont choisi des études socio-économiques, 20% en sciences humaines et 19% en ingénierie ou architecture. Cependant, après une année d'étude, 6% ont abandonné l'université et 6% ont changé de parcours universitaire.
Nous remarquons qu'en Italie le parcours suivi à l'école secondaire ne limite pas le choix de l'orientation universitaire, mais l'influence tout de même. Les modalités de sélection varient d'une université à l'autre. En particulier, pour avoir une idée de la situation de la Licence en mathématiques, nous pouvons prendre l'exemple de l'Université de Turin. D'après le rapport de l'Université de Turin de l'année 2009/2010 ([23]), parmi les étudiants de la Licence de mathématiques, 70% a la *maturità* scientifique, 11% a la *maturità* technique, 10% a la *maturità* littéraire et 9% a un autre type de *maturità*. Les étudiants qui veulent s'inscrire à la Licence en mathématiques doivent faire un test, appelé TARM (*Test di Accertamento dei Requisiti Minimi*, évaluation des prérequis minimaux), comportant 70 questions ainsi réparties :

- 6 questions en compréhension de texte ;
- 40 questions en mathématiques ;
- 7 questions en physique ;
- 7 questions en chimie ;
- 10 questions en anglais.

Les questions de mathématiques portent surtout sur des notions et des exercices simples d'algèbre élémentaire, de géométrie, de représentations graphiques de fonctions de référence et de probabilités. Les questions du test sont identiques pour tous les étudiants quelque soit leur parcours scolaire dans le secondaire. Selon le résultat à ce test, un cours préliminaire est indiqué comme non nécessaire, recommandé ou obligatoire à l'étudiant. Ce cours préliminaire consiste à 20 heures de cours magistraux et 20 heures d'exercices, pendant les deux semaines qui précèdent le début de l'année.
En 2009/2010 l'Université de Turin a enregistré une proportion d'échec de 27% en première année et de 9% en deuxième année. La proportion de diplômés en troisième année de Licence est de 39% sur le nombre initial d'inscrits en première année et de 56% sur le nombre d'inscrits en troisième année en 2009/2010.

B Quelques approfondissements théoriques (par Aline Robert)

Dans toutes les analyses qui utilisent les catégories définies ci-dessous, on est amené à les adapter au contexte et aux types de données. Par exemple, selon qu'on analyse un programme d'enseignement, un manuel, un sujet d'examen, des copies d'élèves ou des vidéos, le travail du chercheur dépend de la place de ces analyses dans sa problématique. Ainsi, les productions d'élèves peuvent enrichir des analyses a priori. De plus, ces catégories sont relatives aux niveaux de scolarités. En particulier, les connaissances anciennes et nouvelles varient au fur et à mesure de la scolarité ainsi que les adaptations à prendre en compte.

Outil/objet/cadre

Régine Douady (1986 [7]) a introduit les caractères objet et outil des notions à enseigner : cela permet de distinguer d'une part les propriétés décontextualisées d'une notion (objet) et d'autre part ce qui est à l'œuvre lorsqu'on l'utilise dans un contexte, de manière souvent partielle (outil). Elle a aussi mis en évidence l'intérêt de parler de cadre, qui peut se traduire en “ domaine de travail ”, une notion étant souvent susceptible d'être travaillée dans plusieurs cadres (numérique, graphique, algébrique, géométrique avec mesures, sans mesure. . .).

Régine Douady a mis au point des séquences, notamment d'introduction de notions fondamentales en primaire, basées sur une dialectique à faire vivre aux élèves, à partir d'un problème soigneusement mis au point. Dans ce problème, les élèves peuvent utiliser de manière nouvelle une connaissance déjà enseignée dans un contexte moins général, comme un outil encore implicite en quelque sorte, grâce à un jeu sur les cadres mélangeant connu et inconnu (cf. déséquilibre/rééquilibration). La différence des connaissances entre cadres a un rôle moteur. Charge ensuite à l'enseignant de s'appuyer sur ce travail pour dégager la notion nouvelle comme objet. Ces introductions, appelées “ dialectique outil/objet ” doivent être suivies de réinvestissement, et semblent très adaptées à certaines notions généralisant les connaissances anciennes sans ruptures, de manière à ce que les élèves aient l'idée de “ faire pareil ” et que cette intuition soit correcte. Le jeu de cible (Douady, 1986 [7]) en est un exemple typique, qui amène les élèves à la division euclidienne à partir d'un jeu matériel.

Les registres sémiotiques

Raymond Duval (1995 [9]), travaillant sur les écritures mathématiques et les représentations des objets a proposé la notion de registres pour qualifier différentes écritures des mêmes objets. L'intérêt de cette distinction est de repérer qu'il y a des registres “ non congruents ”, c'est-à-dire que le travail dans chacun d'eux n'est pas isomorphe en quelque sorte, ce qui est à la source de difficultés si rien n'est fait pour y préparer les élèves.

Différents points de vue

Plus flous que les cadres ou registres, les points de vue permettent d'indiquer différentes manières d'aborder la même propriété par exemple. Changer de point de vue pour faire une démonstration revient à adopter une certaine flexibilité (cf littérature anglo-saxonne).

Classiquement (cf Robert, 1995 [11]), pour traduire la concourance de trois droites on peut prendre le point de vue du point appartenant aux trois droites, ou du point d'intersection de deux d'entre elles qui appartient à la troisième, ou reconnaître trois hauteurs ou médianes d'un triangle, ou encore chercher trois droites concourantes dont les droites données sont l'image par une transformation.

Pour démontrer une égalité, on peut commencer par transformer le terme de gauche, ou celui de droite, ou transformer les deux. Ainsi symétriser ou di-symétriser un énoncé est une source de changement de point de vue fréquents. Par exemple, selon que l'on énonce les droites (D) et (D') sont perpendiculaires ou (D) est perpendiculaire à (D'), les théorèmes ou associations d'idées qui viennent spontanément à l'esprit sont différents.

Il se peut que certains changements de points de vue amènent à perdre une partie de l'information, ce qui peut en expliquer aussi la difficulté – par exemple, passer du point de vue triangle rectangle au point de vue droites perpendiculaires fait « oublier » pour un temps le troisième côté du triangle...

Enfin certains changements de points de vue amènent à jouer sur le passage du local au global : ainsi la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment (point de vue des points) ou la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de $[AB]$ (point de vue de la droite, global).

Local/global/ponctuel

Dans le même ordre d'idées, une autre distinction, assez délicate (Chappet-Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi, Rogalski M., 2007 [3]), peut intervenir pour éclairer les différents théorèmes ou énoncés mathématiques : c'est, notamment en analyse, le fait que des propriétés concernent un point (on évoquera une propriété ponctuelle), un voisinage du point (propriété locale –) ou un intervalle, voire l'ensemble entier (propriété globale). Un des enjeux de l'analyse est justement le passage entre ces trois aspects – souvent la présence de quantificateurs, implicite ou non, modifie encore la nature des énoncés.

Les niveaux de conceptualisation, associés aux découpages des programmes

Plusieurs domaines mathématiques sont introduits au cours de la scolarité. Les statistiques en sont un exemple assez récent, mais aussi l'algèbre élémentaire, la géométrie vectorielle (essentiellement au lycée jusqu'à récemment) - même si c'est en partie caché, les fonctions à partir de la troisième et l'analyse à partir de la première en sont d'autres.

L'idée de niveau de conceptualisation permet de décrire des domaines de travail très gros, ayant une cohérence mathématique, pouvant comporter plusieurs cadres, et qui existent souvent à certaines étapes du développement historique.

Cette catégorisation permet notamment de réfléchir aux fondements qui sont à l'œuvre, même s'ils sont implicites, aux cohérences nécessaires au développement des notions dans le niveau et aux notions non encore formalisées qui sont utilisées « malgré tout» (cf. ci-dessous). C'est une distinction qui permet de mettre en évidence une certaine relativité en mathématiques – relativité de la rigueur, des démonstrations notamment (cf Arsac, 1999 [1]).

Un niveau de conceptualisation (cf Robert, 1995 [11], Dorier, 1997 [6], Robert, 1998 [12]) désigne un domaine mathématique assez important, relativement auto-consistant, cohérent, enseigné (ou pouvant être enseigné) au moins en partie : il est spécifié par

- des fondements (axiomes, originaux ou empruntés à d'autres champs mathématiques comme le numérique ou l'ensembliste) – fondements qui peuvent rester implicites mais qui peuvent tout de même être dégagés,
- un corps de définitions [1] (objets, notions, concepts – avec les cadres et registres de repré-

1. Même si ces définitions ne sont pas correctes à nos yeux, comme chez Euclide.

sentations impliqués,
- un corps de théorèmes, de propositions (c'est ce que nous appellerons l'arsenal du niveau),
- des modes de raisonnements, des démarches et la rigueur correspondante,
- un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein, qui permettent de dégager l'enjeu du domaine.

Le travail dans un même niveau de conceptualisation peut se faire dans plusieurs cadres, par exemple en géométrie : ponctuel, vectoriel, numérique, analytique, cadre de la figure, en utilisant plusieurs registres.

La cohérence indique qu'on pourrait dérouler les démonstrations nécessaires à établir l'arsenal du domaine en se référant aux seuls fondements et définitions initiales sans qu'il y ait de « trous » (sans pour autant l'expliciter aux les élèves !) et qu'on peut résoudre les problèmes du champ avec cet arsenal mis en place.

Les relations entre niveaux de conceptualisation ne sont pas de simples inclusions : c'est une autre organisation des savoirs qui est en place, et selon les cas, il s'agit de généralisation ou d'un changement des fondements par exemple.

Notions non encore formalisées

Dans le temps de l'enseignement, avant même d'avoir été définies, des notions sont manipulées par le biais de leurs propriétés opératoires. Ainsi par exemple, les longueurs et les aires des polygones ou même de figures courbes (les cercles, par exemple) sont un des objets récurrents des enseignements primaire et secondaire alors qu'aucune définition complète n'est accessible à ces niveaux. Cela n'empêche aucunement d'en parler, d'utiliser leurs propriétés de positivité ou d'additivité et d'établir des théorèmes à leur sujet. Il en va de même pour les nombres réels, jusqu'à la fin du secondaire où l'on admet – en l'explicitant enfin – la propriété de la borne supérieure. Dans une telle situation, on parlera de notion *non encore formalisée*.

Il arrive également que plusieurs états formalisés – ou partiellement formalisés - d'une même notion se succèdent dans le cours de l'enseignement, sans s'infirmer les uns les autres, par un processus d'extensions successives. Ainsi pour l'aire (des formules de l'école élémentaire aux parties quarrables puis à la théorie de la mesure).

Certaines notions enfin ont parfois plusieurs formalisations qui co-existent dans des cadres différents. Le même nom donné à l'objet dans les différents cadres constitue souvent une trace de cette co-existence. Le cosinus, par exemple, intervient en géométrie dans le triangle rectangle, dans le produit scalaire de deux vecteurs, et par le biais de la fonction cosinus (celle de la calculatrice). Le nombre π intervient dans la formule de la longueur du cercle, dans celle de l'aire du disque et dans l'égalité $exp(i\pi) = -1$ et l'on s'assure rarement dans les cursus d'enseignement que c'est bien du même nombre qu'il s'agit dans les trois occurrences. On peut aussi penser à différentes facettes de la proportionnalité.

La plupart du temps, on fait opérer des notions non encore formalisées en cachant le fait qu'elles ne le sont pas (ou pas encore). Cette démarche est nécessaire – imaginerait-on de construire les nombres entiers à l'école élémentaire avant même de s'en servir ! – et n'est pas en contradiction avec le fonctionnement propre des mathématiques du chercheur [2]. On définit *a posteriori* des objets que l'on manipule depuis longtemps – au risque de malentendus. Dans tous les cas, à partir du moment où une notion a été définie (formalisée), on ne fait plus référence à elle que par cette définition du moins en l'attente d'extensions. Si la définition est pertinente (consistante), elle est suivie d'un corpus de théorèmes qui en légitiment le fonctionnement *a*

2. Les mathématiques ont de tout temps une double progression : vers « l'avant » et vers ses fondements.

priori, alors que la notion n'était pas encore formalisée ; on pourrait d'ailleurs comparer cette démarche à celle de la modélisation au sein d'autres sciences. Souvent, les modes opératoires qui posent les exigences d'une formalisation suffisent à caractériser les objets qu'on cherche à définir, par un théorème d'unicité (nombres réels ou mesure de Lebesgue, par exemple) ; mais cela n'est pas toujours aussi limpide, comme le montre la notion de fonction continue (on peut considérer les discontinuités de seconde espèce comme une sorte d'avatar de la formalisation consensuelle de continuité).

Pour conclure, en quelque sorte, à quelque moment du cursus scolaire, on révèle la notion cachée par une formalisation et des énoncés qui en découlent. Dans le cas de la co-existence de plusieurs formalisations appartenant à des cadres distincts, révéler les relations entre elles relève de l'organisation des connaissances. La conscience des mécanismes de formalisation, de l'existence de notions cachées et de leur détection influe sur l'organisation et la cohérence des notions sur le long terme et permet de prendre en compte la dualité entre intuition et rigueur qui lie l'objet « vraiment pensé » (conceptualisé ?) à son statut logique.

« Valeur ajoutée » des notions nouvelles en relation avec l'ancien et le travail des élèves

Un des enjeux ici est de comprendre, au niveau des notions à enseigner, le rapport entre ce qui est nouveau et ce que les élèves ont déjà travaillé et en particulier d'en inférer des modes d'introduction de ce nouveau adaptés aux caractéristiques analysées, évidemment compte tenu des programmes scolaires. Une notion peut relever de plusieurs introductions.

Ici nous nous centrons sur un certain nombre de caractères que les nouvelles notions (ou nouveaux objets, ou nouveaux cadres, etc.) présentent par rapport aux anciennes et qui vont amener un travail spécifique des élèves, tout en analysant la fonction que la notion remplit dans le paysage mathématique dans lequel elle est introduite. C'est la combinaison de plusieurs de ces caractères qui va permettre de définir ces types de notions dont nous allons faire l'hypothèse qu'ils sont susceptibles d'être introduits de manière différente et spécifique.

Le **caractère généralisateur** apparaît quand ce qui est nouveau a une portée plus grande que ce que les élèves ont déjà à leur disposition : le nouveau étend l'ancien, que ce soit par extension du domaine d'application ou autrement, en introduisant de la généralité là où il y avait du particulier par exemple.
Par exemple le produit scalaire, le barycentre dans l'espace généralisent le produit scalaire, le barycentre dans le plan. La notion de corps généralise les structures des nombres réels et complexes.

Le **caractère formalisateur** se signale par l'introduction d'un formalisme nouveau – qui peut être ou non déjà utilisé mais de manière alors réduite.
Par exemple le formalisme du cadre de l'algèbre élémentaire est nouveau, à cause du x, mais il comprend les signes anciens comme le signe =, le +, etc. De plus l'utilisation de ces signes n'est pas la même en algèbre et en arithmétique élémentaire : il y a « accident », rupture, fausse continuité, faux-amis...
Le rapport entre intégrales et primitives peut être introduit comme formalisant ce qui permet de calculer l'aire sous une courbe – il y a aussi dans cette notion un caractère unificateur, même s'il n'est pas toujours mis en évidence (cf Robert et Rogalski, 2004 [14]).

Le caractère **unificateur** indique en effet que ce qui est nouveau remplace plusieurs éléments anciens, traités jusqu'ici « chacun pour soi ».
Quant aux fonctions des notions introduites, elles correspondent souvent ou à un nouvel objet dont on va avoir besoin (caractère outil) ou à une propriété générale, nouvelle.

Différents types de notions

Nous distinguons très généralement trois types de notions : les extensions de concepts sans « accidents » ou avec accidents, les notions RAP (réponses à un problème) et les notions FUG (formalisatrices, unificatrices, généralisatrices), et nous allons discuter de leurs introductions respectives.

Ainsi certaines notions (objets, théorèmes, etc.) sont des extensions de notions anciennes, que ce soit parce qu'elles ont un caractère généralisateur ou qu'elles se traduisent par un formalisme qui étend un formalisme antérieur.

Mais il y a des extensions « sans accident », où il y a congruence du travail entre le nouveau et l'ancien, et des extensions « avec accidents », où quelque chose change dans le travail à faire dans le nouveau et dans l'ancien.

Par exemple l'addition des décimaux est une extension de celle des entiers, sans accidents au niveau du sens, mais qui peut être jugée différente au niveau de l'algorithme opératoire. Le produit scalaire dans l'espace est une extension sans accident de celui dans le plan. En revanche passer, pour la relation d'ordre, des nombres entiers aux nombres rationnels comporte un accident, alors même que c'est une extension : on perd l'existence d'un « successeur ».

D'autres notions ont deux caractères, généralisateur et unificateur par exemple, ou unificateur et formalisateur. Il en va ainsi de l'intégrale, vue comme aire sous la courbe (cf Robert et Rogalski, 2004 [14]).

Enfin certaines notions ont les trois caractères à la fois : ce sont les FUG (elles permettent d'introduire plus de généralité en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme). Souvent ces notions simplifient la résolution des problèmes, apportent une certaine économie, le prix à payer étant d'adopter le nouveau formalisme.

Quelques précisions sur l'utilisation du mot disponible

Une connaissance (propriété, définition, formule, méthode, exemple. . .) est supposée disponible si les élèves réussissent à l'utiliser à bon escient sans qu'une indication, même indirecte, ne leur ait été donnée à ce sujet.

On peut supposer qu'il y a **plusieurs niveaux de disponibilité (objet, outil)** : par exemple il se peut que l'élève sache (directement ou indirectement) qu'il faut utiliser une certaine formule, non indiquée, et que cette utilisation se fait pour travailler directement la notion en jeu, il reste à l'élève à retrouver l'expression précise (peut-être ancienne) et à l'utiliser à bon escient : c'est donc une disponibilité plutôt « objet ». Par exemple, retrouver la formule précise d'une aire ou d'un volume et réussir à l'appliquer dans le cas particulier travaillé pour faire le calcul d'une aire ou d'un volume.

Si en revanche il faut à la fois reconnaître qu'une certaine connaissance non indiquée est à utiliser pour résoudre quelque chose qui porte sur autre chose, l'exprimer puis l'utiliser et revenir au problème initial, on a affaire à une disponibilité « outil » - qui présuppose la disponibilité objet.

Autrement dit, dès qu'on suppose une disponibilité outil, elle est aussi objet et ce n'est pas la peine d'ajouter « objet ». . .

Attention : ces qualificatifs attachés à la disponibilité supposée (ou visée) ne sont pas « absolus » - ils dépendent du contexte précis. Dans certains cas le chercheur appréciera qu'une utilisation attendue d'une formule non indiquée consiste seulement à mobiliser une connaissance du cours – par exemple si celle-ci est récente, si les élèves y ont accès facilement, . . . En revanche dans un examen où aucune formule n'est consultable peut-être le chercheur appréciera-t-il qu'il s'agit de disponibilité objet...

Pourquoi distinguer le caractère disponible d'une notion ?

Rappelons que c'est à **la conceptualisation des notions que nous référons les apprentissages**. Conceptualisation qui se décline éventuellement en **niveaux de conceptualisation** attachés à un ensemble de tâches à pouvoir résoudre, prédéterminé (y compris par les programmes), accompagné d'un ensemble de théorèmes, propriétés, exemples, démonstrations, faisant appel à des cadres, registres, types de raisonnement et niveaux de rigueur précisés.

La conceptualisation est associée d'une part à un **« produit » de l'enseignement** qui se « mesure » à la disponibilité des notions visées sur cet ensemble de tâches (et à leur réorganisation dans les connaissances antérieures) ; mais la conceptualisation a aussi un aspect **« processus », associé à l'apprentissage**, à court, moyen voire long terme, et s'obtient à travers des activités des élèves variées pour lesquelles le choix et le déroulement, à la charge des enseignants, sont cruciaux... Interviennent dans ces choix des aspects globaux (scénario, introduction, variété et quantité des tâches, ordre ente cours et exercices, évaluations...) et des aspects locaux – énoncés précis et déroulements, ces derniers garantissant plus ou moins la proximité des activités attendues et possibles...

Pour apprécier cette variété (et éventuellement la provoquer), nous utilisons les sous-types d'activités, en relation avec les adaptations des connaissances à mettre en fonctionnement, que nous supposons participer au processus de conceptualisation (toutes).

Ainsi distinguons-nous en particulier

– des (sous)-activités de reconnaissance d'outils ou d'objets mathématiques à mettre en fonctionnement : ce sont les théorèmes ou propriétés concernés, supposés disponibles [3] ou non, ou/et l'identification des modalités d'applications de ces théorèmes ou propriétés à mettre en fonctionnement. Cela peut comprendre des choix de connaissances, forcés ou non, selon les alternatives existantes
– des (sous)-activités d'organisation du raisonnement global : il s'agit de repérer les différents raisonnements précis à mener, avec les étapes éventuelles et leur ordre, les reprises de questions précédentes, les interprétations [4].
– des (sous)-activités de traitement interne : il s'agit des constructions de figure, des calculs à effectuer, du travail sur les formules, simple remplacement des données par leurs valeurs ou transformations, équivalences, implications, mais aussi de l'introduction d'intermédiaires, notations ou expressions, des changements de registres ou de points de vue (imposés ou choisis) et des mélanges de cadres éventuels (imposés ou choisis) [5].

Les énoncés où une notion est supposée disponible comme objet ou comme outil sont associés à un travail des élèves supposé les rapprocher de l'acquisition de la disponibilité ou destinés à évaluer cette disponibilité. Ils appartiennent aux exercices pour lesquels on pourra dire qu'on travaille à un niveau de fonctionnement disponible... cela ne présuppose pas une réussite certaine mais un engagement suffisant pour que la correction serve à quelque chose (aide constructive).

Nous faisons l'hypothèse que si de tels énoncés ne sont pas proposés aux élèves, et, même s'ils sont proposés, si l'enseignant ne donne pas les moyens aux élèves d'y développer effectivement des sous-activités du premier type, même pas terminées (au début notamment), mais vraiment travaillées, ce sera plus incertain pour les élèves d'accéder à la conceptualisation visée. Si en

3. Sans indication explicite dans l'énoncé.
4. Cela réfère aux adaptations A4 (étapes et raisonnements) et A5 (utilisation de questions antérieures).
5. Cela réfère aux adaptations A2 et A3 (introduction d'intermédiaires, mélanges de cadres et registres, travail interne).

revanche les élèves s'y engagent, alors l'enseignant pourra contribuer à les faire avancer, par le biais d'aides peut-être même d'abord procédurales (mais adaptées, ne supprimant pas la tâche) puis constructives.

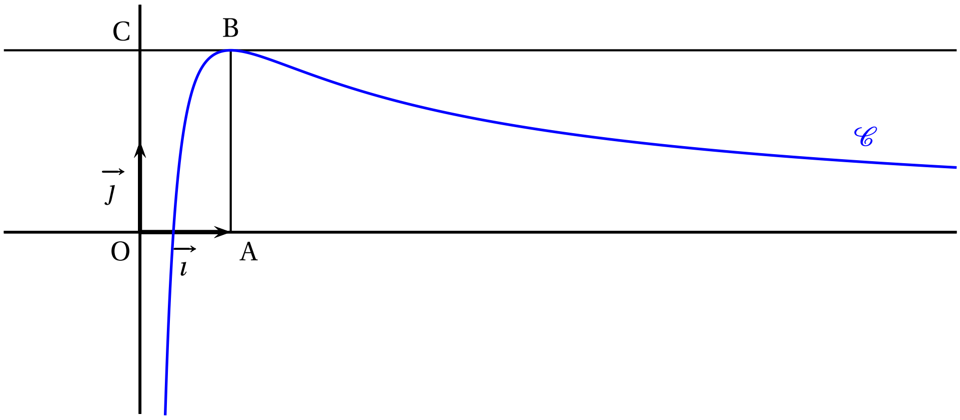
Les sujets de bac français n'engagent pas à proposer de tels exercices...

C Baccalauréat scientifique Métropole 20 juin 2013

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;

— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

D Baccalauréat - exercice 2 : tableaux récapitulatifs et proportions

	Questions	1			2			3		5		Proportions et commentaires
		1.a	1.b	1.c	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	5.a	5.b	
Degré de ouverture	**Fermé**										x	7/10 questions fermées ou quasi fermées
	Quasi fermé	x	x		x		x	x		x		
	Quasi ouvert			x		x						3/10 questions quasi ouvertes ou ouvertes
	Ouvert								x			
	Aides/indications	x				x				x	x	4/10 questions avec indications
Niveau de mise en fonctionnement	**Technique**	x					x					La plupart des connaissances sont supposées disponibles :
	Mobilisable											
	Disponible *comme objet*	x	x	x	x	x	xx	x		x	x	disponibilité comme objet : 77% des cas
	Disponible *comme outil*			x					x	x		disponibilité comme outil : 23% des cas
Fonctions en jeu	**Travail sur f**	x		x		x	x	x	x	x	x	7/10 questions seulement sur f
	Travail sur f'	x	x	x	x		x					1/10 seulement sur f', 3/10 sur les deux
	Statut	*objet* : 75%					*outil* : 25%					
	Perspective	*ponctuelle* : 36,5% *ponct. univ.* : 9% (1 fois)					*globale* : 45,5% *locale* : 9% (1 fois)					

TABLE 1 – Exercice 2 du Baccalauréat scientifique Métropole 2013 - Tableau récapitulatif et proportions

Cadres ↱	**Fonctionnel**	**Géométrique**	*Cadre unique*	*Cadre de départ*	**Commentaires**
Fonctionnel	1.a/1.b/1.c/2.a/2.b/ 2.c/3.a/3.b/5.b		*9 fois*	*0 fois*	Le cadre fonctionnel est présent dans toutes les questions : 9 fois sur 10 en cadre unique et 1 fois comme cadre d'arrivée, dans le changement de cadre partant du cadre géométrique (seule fois où ce cadre apparait).
Géométrique	5.a		*0 fois*	*1 fois*	
Cadre d'arrivée	*1 fois*	*0 fois*			

TABLE 2 – Exercice 2 du Baccalauréat scientifique Métropole 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres et changements de cadres

Cadres de travail ↱	**Algébr.**	**Fonct.**	**Numér.**	**Graph.**	**An. alg.**	**Calc.**	*CdT unique*	*CdT de départ*	**Commentaires**
Algébrique	1b/1c/2a						*3 fois*	*0 fois*	Un changement et un jeu de cadres de travail. Le CdT algébrique est présent dans 4 questions sur 10 et le CdT fonctionnel dans 3/10. Les autres sont dans 2/10, sauf la calculatrice (1/10).
Fonctionnel		2a/2c/3a					*3 fois*	*0 fois*	
Numérique			3b	1a			*1 fois*	*1 fois*	
Graphique	5a		(1a)				*0 fois*	*1 fois*	
Analyse algébrisée					2b/5b		*2 fois*	*0 fois*	
Calculatrice						3b	*1 fois*	*0 fois*	
CdT d'arrivée	*1 fois*	*0 fois*	*0 fois*	*1 fois*	*0 fois*	*0 fois*			

TABLE 3 – Exercice 2 du Baccalauréat scientifique Métropole 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres de travail et changements de cadres de travail

Registres Q (question) R (réponse)	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	5a	5b	*Introduit dans R*	**Commentaires**
Langue naturelle	Q R			Q R	Q	Q	Q R	Q	Q R	Q R	*0 fois*	8Q et 5R sur 10
Exp. Algébrique		Q R	Q R	Q R	Q			Q	Q R	Q	*0 fois*	7Q et 4R sur 10
Exp. d'analyse alg.					R				Q R	R	*2 fois*	1Q et 3R sur 10
Repr. graphique	Q								Q		*0 fois*	2Q et 0R sur 10
Tableau						R		R			*2 fois*	0Q et 2R sur 10
Exp. numérique								R			*1 fois*	0Q et 1R sur 10
Fig. géométrique									Q		*0 fois*	1Q et 0R sur 10
Changement de registres					x	x		x		x		4/10 questions

TABLE 4 – Exercice 2 du Baccalauréat scientifique Métropole 2013 - Tableau récapitulatif sur les registres utilisés dans l'énoncé et la réponse de chaque question.

E *Maturità* - Examen national du lycée scientifique, cours expérimental P.N.I. 2013

Texte original

Traduction partielles (Problèmes 1 et 2 et questions 2, 3, 8 et 10)

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

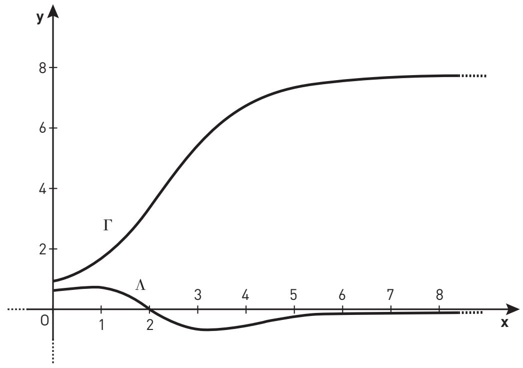
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario[1].

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$, passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.

1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?

2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



3. Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.

4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0, 2]$.

[1] Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.

2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.

3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0, 1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.

4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge "*se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

8. Si mostri, senza usare il teorema di *l'Hôpital*, che:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{sen\,x} - e^{sen\,\pi}}{x - \pi} = -1.$$

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

10. Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0, 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

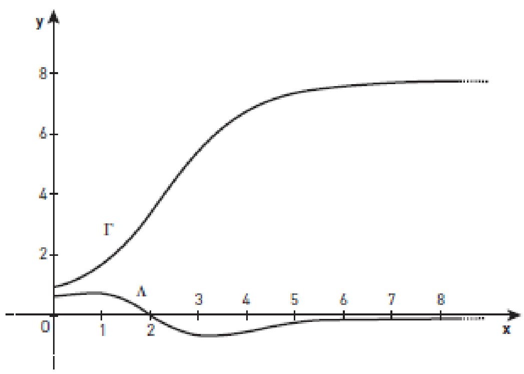
Traduction de "Esame di stato di liceo scientifico corso sperimentale P.N.I. 2013"

Examen national du lycée scientifique cours expérimental P.N.I. 2013

Le candidat doit résoudre un des deux problèmes et répondre à 5 questions du questionnaire.

Problème 1

Une fonction $f(x)$ est définie et dérivable, ainsi que ses dérivées première et seconde, sur $[0;+\infty[$ et la figure ci-dessous désigne le graphique Γ et Λ de $f(x)$ et de sa dérivée seconde $f''(x)$. La tangente à Γ au point d'inflexion, de coordonnées $(2;4)$, passe par $(0;0)$, et les droites $y = 8$ et $y = 0$ sont les asymptotes horizontales pour Γ et Λ, respectivement.



1. Démontrer que la fonction $f'(x)$, la dérivée de $f(x)$, a un maximum et déterminer ses coordonnées. On suppose que pour tout x du domaine de définition : $f''(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$, donner une représentation graphique possible de f'.
2. On suppose que $f(x)$ modélise, évidemment avec des unités de mesure adaptées, la croissance d'un certain type de population. Quelles informations sur son évolution peut-on déduire des graphiques et en particulier du fait que Γ admette une asymptote horizontale et un point d'inflexion ?
3. Si Γ est le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, prouver que $a = 8$ et $b = 2$.
4. Avec les hypothèses du point 3., calculer l'aire de la région du plan délimitée par Λ et l'axe x sur l'intervalle $[0;2]$.

Problème 2

Soit f la fonction définie pour tout x positif par $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Étudier f et tracer son graphique γ dans un repère orthonormé Oxy ; sachant que γ admet un point d'inflexion et un minimum, calculer, à l'aide de la calculatrice, l'abscisse des ces deux points, arrondi à trois chiffres décimaux.
2. Soit P le point de γ qui intercepte l'axe x. Trouver l'équation de la parabole, avec un axe de symétrie parallèle à l'axe y, passant par l'origine et tangente à γ en P.
3. Soit R la région délimitée par γ et l'axe x sur l'intervalle $]0;1]$. Calculer l'aire de R , en expliquant le raisonnement suivi et l'exprimer en mm^2 en supposant que l'unité de mesure est 1 décimètre.
4. Tracer la courbe symétrique à γ par rapport à l'axe$y$ et écrire son équation. De façon similaire, tracer la courbe symétrique à γ par rapport à la droite $y = -1$.

Questionnaire

1.
2. Si la fonction $f(x) - f(2x)$ a pour nombre dérivé 5 en $x = 1$ et pour nombre dérivé 7 et $x = 2$, quel est le nombre dérivé de $f(x) - f(4x)$ en $x = 1$?
3. Considérer, dans le plan cartésien, les points $A(2; -1)$ et $B(-6; -8)$. Déterminer l'équation de la droite passant par B qui maximise la distance au point A.
4.
5.
6.
7.
8. Démontrer, sans utiliser le théorème de l'Hôpital, que :

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = 1.$$

9.
10. Déterminer pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2(3 - x) = k$ admet deux solutions distinctes appartenant à l'intervalle $[0; 3]$. Pour $k = 3$, approcher à deux chiffres décimaux la plus grande des solutions, en appliquant une des méthodes itératives étudiées.

F *Maturità* - problème 1 : tableaux récapitulatifs et proportions

	Questions	1(a)	1(b)	2	3	4	Proportions et commentaires
Degré de ouverture	**Fermé**						
	Quasi fermé	x			x		2/6 questions quasi fermées
	Quasi ouvert						
	Ouvert	x	x	x		x	4/6 questions ouvertes
	Aides/indications						Aucune indication
Niveau de mise en fonctionnement	**Technique**						Les connaissances à utiliser sont toutes supposées disponibles, plus en tant qu'outil qu'en tant qu'objet : on a une disponibilité comme objet dans 25% des cas et comme outil dans 75% des cas (ou bien 31% et 69%, si on considère la réponse 2 pour la question 4)
	Mobilisable						
	Disponible comme objet				xx	x(xx)	
	Disponible comme outil	xxx	xx	x	x	xx(xx)	
Fonctions en jeu	**Travail sur** f	x	x	x	x		Mis à part la question 2, les questions ne traitent jamais seulement de f, mais aussi de f' et f''. Le statut outil des fonctions est beaucoup plus représenté.
	Travail sur f'	x	x		x	x	
	Travail sur f''	x	x			x	
	Statut	*objet* : 37,5%			*outil* : 62,5%		
	Perspective	*ponctuelle* : 44,5%			*globale* : 44,5%		
		ponct. univ. : 11% (1 fois)			*locale* : 0%		

TABLE 1 – Problème 1 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif et proportions

Cadres ↱	**Fonctionnel**	**Géométrique**	*Cadre unique*	*Cadre de départ*	**Commentaires**
Fonctionnel	1a/1b/2/3		*4 fois*	*0 fois*	Le cadre fonctionnel est présent dans toutes les questions : 4 fois sur 5 en cadre unique et 1 fois comme cadre d'arrivée, dans le jeu de cadre partant du cadre géométrique (seule fois où ce cadre apparait).
Géométrique	4		*0 fois*	*1 fois*	
Cadre d'arrivée	*1 fois*	*0 fois*			

TABLE 2 – Problème 1 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres et changements de cadres

Cadres de travail ↱	**Algébr.**	**Fonct.**	**Numér.**	**Graph.**	**An. alg.**	*CdT unique*	*CdT de départ*	**Commentaires**
Algébrique	3/4					*2 fois*	*0 fois*	Un changement et trois jeux de cadres de travail. Les plus utilisés sont les CdT graphique (4 questions sur 5) et fonctionnel (3/5). Les CdT algébrique et numérique sont utilisés 2 fois 5. Le moins utilisé est le CdT d'analyse algébrisée (1/5).
Fonctionnel				1a/1b		*0 fois*	*2 fois*	
Numérique			1a/3			*2 fois*	*0 fois*	
Graphique		1a/1b/2			4	*0 fois*	*4 fois*	
Analyse algébrisée						*0 fois*	*0 fois*	
Calculatrice						*0 fois*	*0 fois*	
CdT d'arrivée	*0 fois*	*3 fois*	*0 fois*	*2 fois*	*1 fois*			

TABLE 3 – Problème 1 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres de travail et changements de cadres de travail

Registres Q (question) R (réponse)	1(a)	1(b)	2	3	4	*à introduire dans la R*	**Commentaires**
Langue naturelle	Q R	Q (R)	Q R	Q R	Q R	*0 fois*	dans toutes les Q/R
Exp. Algébrique		Q		Q R	R	*1 fois*	2Q et 2R sur 5
Exp. d'analyse alg.					R	*1 fois*	1R sur 5
Repr. graphique		R	Q			*1 fois*	1Q et 1R sur 5
Tableau	R	R				*2 fois*	2R sur 5
Exp. numérique	R					*1 fois*	1R sur 5
Fig. géométrique					Q	*0 fois*	1Q sur 5
changement de registres	x	x			x		3/5 questions

TABLE 4 – Problème 1 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les registres utilisés dans l'énoncé et la réponse de chaque question.

G *Maturità* - problème 2 : tableaux récapitulatifs et proportions

	Questions	1	2	3	4	Proportions et commentaires
Degré de ouverture	**Fermé**					Les questions sont toutes ouvertes ou quasi ouvertes, notamment : 1/4 question quasi ouverte 3/4 questions ouvertes
	Quasi fermé					
	Quasi ouvert	x				
	Ouvert		x	x	x	
	Aides/indications					Aucune indication
Niveau de mise en fonctionnement	**Technique**	x		x	x	Mis à part trois connaissances de niveau technique, les autres connaissances à utiliser sont toutes supposées disponibles, plus comme objets (63% des cas) que comme outils (37% des cas).
	Mobilisable					
	Disponible *comme objet*	xxxxx xxxx	xxxx	xxx	x(x)	
	Disponible *comme outil*	xxxxx	xxx	xx		
Fonctions en jeu	**Travail sur** f	x	x	x	x	Toutes les questions concernent une fonction f (ou g), 2 sur 4 sa dérivée et seulement 1 la dérivée seconde. Le statut outil est aussi bien travaillé que le statut objet. On remarque qu'une partie pas négligeable du travail est locale.
	Travail sur f'	x	x			
	Travail sur f''	x				
	Statut	*objet* : 43%		*outil* : 57%		
	Perspective	*ponctuelle* : 28,5% *ponct. univ.* : 0%		*globale* : 43% *locale* : 28,5% (2 fois)		

TABLE 1 – Problème 2 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif et proportions

Cadres ↱	**Fonctionnel**	**Géométrique**	*Cadre unique*	*Cadre de départ*	**Commentaires**
Fonctionnel	1	3	*1 fois*	*1 fois*	Le cadre fonctionnel est présent dans toutes les questions : 1 fois sur 4 en cadre unique et 3 fois comme cadre d'arrivée, dans le changement de cadre partant à chaque fois du cadre géométrique (qui donc apparait dans 3 questions sur 4).
Géométrique	2/3/4		*0 fois*	*3 fois*	
Cadre d'arrivée	*3 fois*	*1 fois*			

TABLE 2 – Problème 2 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres et changements de cadres

Cadres de travail ↱	**Algébr.**	**Fonct.**	**Numér.**	**Graph.**	**An. alg.**	**Géom.**	*CdT unique*	*CdT de départ*	**Commentaires**
Algébrique	2			1			*1 fois*	*1 fois*	Jeux de CdT dans chaque question, sauf la 2. Les plus fréquents sont : graphique (toutes les questions), fonctionnel et algébrique (3 questions sur 4). Le CdT d'analyse algébrisée est présent dans la moitié des questions, ainsi que le numérique. Seule une question comporte un travail géométrique.
Fonctionnel				1			*0 fois*	*1 fois*	
Numérique			3	1			*1 fois*	*1 fois*	
Graphique	4				3		*0 fois*	*2 fois*	
Analyse algébrisée				1			*0 fois*	*1 fois*	
Géométrique						4	*1 fois*	*0 fois*	
CdT d'arrivée	*1 fois*	*0 fois*	*0 fois*	*4 fois*	*1 fois*	*0 fois*			

TABLE 3 – Problème 2 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les cadres de travail et changements de cadres de travail

Registres Q (Question) R (réponse)	1	2	3	4	*à introduire dans la R*	**Commentaires**
Langue naturelle	Q R	Q R	Q	Q	*0 fois*	4Q et 2R sur 4
Exp. Algébrique	Q R	R		R	*2 fois*	1Q et 3R sur 4
Exp. d'analyse alg.	R		R		*2 fois*	2R sur 4
Repr. graphique	R			R	*2 fois*	2R sur 4
Tableau	R				*1 fois*	1R sur 4
Exp. numérique			R		*1 fois*	1R sur 4
changement de registres	x	x	x	x		toutes les questions

TABLE 4 – Problème 2 de la *Maturità scientifica* P.N.I. 2013 - Tableau récapitulatif sur les registres utilisés dans l'énoncé et la réponse de chaque question.