Grafici e funzioni in movimento: Riflessioni per la didattica della matematica

Grafici e funzioni in movimento: Riflessioni per la didattica della matematica

Francesca Ferrara, Giulia Ferrari
Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”, Università degli Studi di Torino
francesca.ferrara@unito.it, giulia.ferrari@edu.unito.it

In questo articolo presentiamo alcune riflessioni sulla valenza pedagogica di esperienze didattiche progettate e realizzate per un approccio grafico ai concetti di funzione e di modello nella scuola secondaria di secondo grado. Tali esperienze si caratterizzano, da un lato, per attribuire un ruolo centrale al corpo nell'apprendimento della matematica mediante un coinvolgimento propriocettivo e cinestetico degli studenti. Dall'altro lato, presentano la novità di sfruttare una tecnologia che non nasce per la didattica della matematica ma è molto nota agli studenti in contesti di gioco, al fine di stimolare interesse e curiosità verso una disciplina spesso considerata astratta e niente affatto 'personale'.

Un nuovo strumento per la didattica della matematica

La tecnologia in questione è la famosa console Wii della Nintendo che, negli anni della sua nascita, introduceva una generazione di gioco inedita la quale regalava ai suoi utilizzatori esperienze di gioco principalmente basate sul movimento e sul coinvolgimento del proprio corpo. Gli utenti possono, infatti, affrontare una situazione di gioco muovendo opportunamente (in aria) un telecomando o *controller*, chiamato *Wii Plus*, con cui agire nel contesto, oppure erigendosi su una pedana sensibile alla pressione, chiamata *Balance Board*. Dal punto di vista tecnico, è necessaria inoltre una barra sensore che permette il puntamento del telecomando su schermo, grazie alla tecnologia a infrarossi integrata; inoltre, sia i telecomandi sia la pedana comunicano con la Wii via wireless. Mentre la *Balance Board* è utilizzabile da un'unica persona, due o più giocatori che partecipano tutti allo stesso gioco possono sfidarsi in tempo reale grazie alla possibilità di avere due o più telecomandi *Wii Plus* funzionanti in contemporanea. Ai movimenti del telecomando o ai cambi di pressione sulla pedana corrisponde un feedback nel gioco, che permette agli utilizzatori di prendere decisioni e di adottare strategie istantanee sulle modalità con cui giocare. Pur molto diffusa tra più e meno giovani, la Wii non nasce dunque come uno strumento per la didattica della matematica. Tuttavia, nell'era della cosiddetta *gamification*, diviene interessante progettare l'utilizzo di elementi mutuati dai giochi e dal game design in contesti esterni ai giochi. Prendendo spunto da ricerche che mostrano come persone coinvolte risultino anche più produttive e come la componente ludica possa migliorare la comprensione del mondo e stimolare comportamenti virtuosi, il contesto che ci interessa è quello specifico della classe di matematica. Studi più o meno recenti nel campo della ricerca in didattica della matematica hanno infatti messo in luce che attività percettivo-motorie, di propriocezione e di chinestesia, in generale il coinvolgimento corporeo, sono rilevanti nei processi cognitivi di apprendimento e di comprensione dei concetti matematici (ad esempio, Nemirovsky e Ferrara, 2009; Nemirovsky e colleghi, 2013). Anche Radford (2014) ha evidenziato come la conoscenza e i processi di pensiero in matematica siano multimodali, nel senso che sono costituiti da esperienze di tipo tattile, uditivo, percettivo e motorio che coinvolgono la creazione di gesti, segni, parole, diagrammi. De Freitas e Sinclair (2014) hanno proposto una nuova concettualizzazione del ruolo del corpo nel fare matematica. Si tratta di visioni che hanno in comune l'intento di superare la tradizionale visione aristotelica di una disciplina detemporalizzata e decontestualizzata, del tutto separata dalla realtà del mondo fisico, e che mirano a sostenere che la matematica non sia solo questione di testa e che testa e corpo non possano essere cartesianamente separati nell'attività matematica. Proprio le esperienze che la Wii mette a disposizione dei suoi utenti presentano un carattere percettivo e motorio, grazie all'uso dei telecomandi e

della pedana che presuppongono e, nel contempo, implicano il movimento del corpo e la propriocezione.
Da questo insieme di aspetti concomitanti e da riflessioni sulla nozione di "strumento matematico" introdotta da Nemirovsky e colleghi (2013) mediante lo studio di contesti di matematica al museo, è nata la nostra idea di ludicizzare (gamificare) la Wii in classe. Come è dunque stato possibile rendere tale strumento davvero uno strumento al servizio della didattica della matematica?

Strumenti Matematici e la Wii

Per rispondere alla domanda di cui sopra, prendiamo dapprima in considerazione la nozione di strumento matematico, introdotta da Nemirovsky e colleghi per indicare "un dispositivo semiotico e materiale assieme a un insieme di pratiche incorporate che permettono all'utente di produrre, trasformare o elaborare forme espressive (ad esempio, grafici, equazioni, diagrammi o lo stesso discorso matematico) che sono riconosciute come facenti parte della cultura matematica" (p. 376). Piuttosto interessante è l'utilizzo di questi ricercatori del termine inglese "instrument" invece di "tool" per parlare dello strumento. Tale termine connota, infatti, in modo intenzionale, la cultura musicale, nella quale non si può parlare della "competenza di una violinista come qualcosa di separato dai movimenti veloci delle sue dita sulle corde e dalla danza allenata dei suoi occhi sullo spartito" (p. 377). In modo analogo, sostengono Nemirovsky e i suoi colleghi, non è possibile parlare di competenza matematica senza un "abile coinvolgimento percettivo e motorio con gli strumenti della disciplina" (p. 377). Nel contesto di una mostra di scienze al museo, questi ricercatori hanno studiato l'emergere di fluidità nell'utilizzo di uno strumento matematico come modo per accedere a certa matematica. Per concettualizzare gli strumenti matematici in analogia con quanto avviene per gli strumenti musicali, essi introducono la metafora linguistica del *suonare* gli strumenti, sottolineando che "un uso fluido di uno strumento matematico permette creazioni che sono culturalmente riconoscibili in domini matematici, proprio come gli strumenti musicali permettono ai praticanti di produrre tipi distinti di musica riconosciuti dai membri di comunità musicali" (p. 373). Nemirovsky e colleghi, in tale prospettiva, descrivono la fluidità emergente con lo strumento in termini di un'integrazione percettivo-motoria, vale a dire un fenomeno per cui gli aspetti percettivi e motori legati all'utilizzo di uno strumento matematico sono intrecciati. Dal punto di vista didattico, la questione più importante risiede però nel fatto che, per questi ricercatori, l'integrazione percettivo-motoria è costitutiva dei processi di apprendimento in matematica ed è comune all'utilizzo di un'ampia gamma di strumenti, non soltanto quelli considerati nel loro studio. Tra questi sono richiamati anche i software dinamici di geometria, come GeoGebra, oppure i sensori di movimento. Software dinamici e sensori che anche de Freitas e Sinclair (2014) considerano rilevanti per il loro essere tecnologie digitali che cercano di rendere mobile la matematica iniettando il tempo nel comportamento matematico. Le due ricercatrici scrivono infatti che "in un software di geometria dinamica, un triangolo per esempio non è una rappresentazione del triangolo astratto né tantomeno un esempio di un triangolo specifico. È piuttosto *tutti i* e *ognuno dei* possibili triangoli che l'utilizzatore può produrre trascinando i vertici che lo determinano" (p. 90). In questo modo, sottolineano de Freitas e Sinclair, la mano che va alla ricerca, inizialmente incerta e impacciata, inizia a imparare a muoversi. Nel caso dei dispositivi di cattura del movimento accade qualcosa di simile: "il feedback in tempo reale dello strumento rende i grafici che appaiono sullo schermo dinamici e reattivi a *ogni* e *qualunque* possibile movimento che possa essere prodotto con il corpo dell'utilizzatore oppure con un oggetto. L'esperienza di questo feedback senso-motorio offre nuovi modi di pensare in relazione ai grafici che permettono di modellizzare il movimento" (p. 91). Così, anche il corpo che va alla ricerca impara a muoversi. In tali situazioni, ciò che accade secondo le ricercatrici è che sia la mano sia il corpo guidano le esperienze matematiche

attraverso cui "gli umani re-inscrivono costantemente se stessi nella matematica astratta e idealizzata" (p. 91), punto nodale per l'apprendimento della disciplina. Nel costruire significati matematici entrano dunque in gioco anche le relazioni che chi apprende stabilisce con gli strumenti matematici che utilizza, siano esse determinate dal movimento di un mouse, mediante il tatto su di un touch-screen o su di uno schermo multi-touch, con azioni o movimenti corporei, in termini di feedback visivo, e così via.
Nell'ambito di una tale prospettiva e nell'ottica di favorire la multimodalità di cui abbiamo parlato all'inizio, assume dunque importanza la natura propriocettiva e cinestetica delle esperienze che la Wii può offrire ai suoi utilizzatori, natura che diviene possibile sfruttare ai fini dell'apprendimento. Qui sta la nostra idea di ludicizzare la Wii, trasformandola in uno strumento matematico da far suonare ai nostri studenti. Resta da capire il modo in cui tale trasformazione è stata realizzata in classe e con quali concetti matematici abbia permesso di lavorare, questione che affrontiamo nella sessione che segue.

WiiGraph e il concetto di funzione

Nella nostra sperimentazione abbiamo introdotto la Wii in classe come strumento per la didattica della matematica grazie all'utilizzo di due software il cui funzionamento coinvolge i dispositivi con cui si gioca alla Wii, vale a dire: *controller* da un lato, *Balance Board* dall'altro lato. I due software in questione si chiamano WiiGraph e DarWiinRemote rispettivamente. WiiGraph è un software progettato da un gruppo di ricercatori americani del Centro di Ricerca in Didattica della Matematica e Scienze (CRMSE) di San Diego, tra cui Ricardo Nemirovsky già citato sopra. WiiGraph permette di lavorare per via grafica e in modo interattivo sulla modellizzazione matematica del movimento di due *controller* (Fig. 1a) di fronte alla barra sensore, sfruttando la distanza dei telecomandi dal sensore all'interno di uno spazio di interazione. DarWiinRemote è invece un software *open source* disponibile in rete con cui è possibile modellizzare il movimento del baricentro di una persona sulla *Balance Board* in termini delle sue coordinate proiettate su di un piano orizzontale. Per motivi di spazio, qui ci limitiamo a fare riferimento al nostro uso di WiiGraph con i due telecomandi. WiiGraph permette di operare con il concetto di funzione mediante la cattura e l'interpretazione di relazioni matematiche spazio-temporali associate al movimento dei *controller*. Ciò lo rende particolarmente adatto a introdurre in classe concetti come quelli di funzione e di modello, che sono da considerarsi fondamentali "per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico", competenza essenziale in ambito matematico, così come per l'acquisizione del senso e della portata di uno dei momenti più noti della storia della matematica, vale a dire la rivoluzione scientifica del Seicento che ha condotto alla modellizzazione del mondo fisico dando origine al calcolo infinitesimale. Aspetti, questi, che rientrano entrambi negli obiettivi delle linee generali e competenze delle *Indicazioni Nazionali* per il secondo ciclo di istruzione. Nel documento, tra i gruppi di concetti e metodi attesi per lo studente al termine del suo percorso liceale, si trovano anche numerosi altri riferimenti ai contenuti disciplinari del nostro lavoro, in particolare: "funzioni elementari dell'analisi", "le nozioni elementari del calcolo differenziale", "modelli matematici di classi di fenomeni". Più nello specifico, per il secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado, le Indicazioni auspicano che lo studente impari ad "analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e [sappia] operare su funzioni composte e inverse", oltre a presentare come tema importante di studio "il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione”. Un ulteriore aspetto messo in evidenza riguarda il fatto che, sebbene gli attuali strumenti tecnologici offrano contesti idonei per la manipolazione di oggetti matematici, è necessario introdurli in modo critico, senza limitarli all'essere "un mezzo automatico di risoluzione di problemi". In quest'ottica, WiiGraph ben si presta ad affrontare discorsi di modellizzazione e di studio di nozioni proprie dell'analisi elementare, grazie a una serie di potenzialità che lo contraddistinguono. Discorsi di modellizzazione,

tra le altre cose, che sembrano farla da padrone anche per la nuova prova di matematica per l'Esame di Stato.
Una delle potenzialità del software, enorme dal punto di vista pedagogico e metodologico assieme, è quella di offrire diverse modalità di lavoro con le quali coinvolgere di volta in volta coppie di studenti in esperienze nuove legate al movimento. Possiamo infatti avere parecchi tipi di grafici, sfide e operazioni composte per utilizzatori che esplorino situazioni di moto mediante interazioni di tipo *collaborativo* o compiti di tipo *competitivo*. Esempi sono dati da attività che riguardano il tracciamento di forme oppure la riproduzione di un grafico dato. Una seconda potenzialità di WiiGraph risiede poi nel fatto di fornire in tempo reale due grafici e presentarli entrambi e contemporanei su uno stesso piano cartesiano i cui assi sono di posizione e tempo (i grafici delle due posizioni nel tempo dei telecomandi in termini della loro distanza dalla barra sensore), perlomeno per opportune modalità (Fig. 2a). Questo fa sì che ci sia un confronto immediato e istantaneo tra i due studenti coinvolti e, comunque, una vicendevole influenza dell'uno sull'altro (che può diventare piacevole spunto di discussione, anche collettiva). Una terza potenzialità è legata ancora al feedback che gli studenti ricevono in tempo reale alle proprie azioni e che li spinge in qualche modo a ragionare sulla qualità del loro movimento rispetto a eventuali obiettivi, come un grafico con una specifica forma. Esemplifichiamo allora alcune tipologie di attività con WiiGraph che abbiamo considerato nel nostro studio (che ha coinvolto una classe prima di un Liceo Scientifico torinese), in modo da metterne in luce la valenza didattica e le potenzialità per costruire conoscenza matematica.

Esperienze in classe

DUE MOVIMENTI, ALMENO DUE GRAFICI: IL "TIPO" *LINE*

Come abbiamo accennato nella sessione precedente, esistono diversi "tipi" di grafici che WiiGraph permette di considerare (il software utilizza il termine inglese "*type*" per riferirvisi). I tipi che ci interessano principalmente nel nostro discorso sono *Line* e *Versus*, ciascuno con opzioni specifiche di configurazione dei grafici e con la possibilità di avere un grafico obiettivo (*target*) o meno. Il primo tipo, nella modalità di default senza *target*, restituisce i due grafici delle posizioni dei due telecomandi (Fig. 1a) in funzione del tempo, secondo la loro distanza dal sensore (indicata con le variabili a e b e misurata in piedi, almeno nella versione attuale di WiiGraph) e in un intervallo di tempo che può essere impostato a piacimento (di default, 30 secondi). Si hanno dunque i grafici di $a(t)$ e $b(t)$ (dove t è la variabile tempo), a ciascuno dei quali è associato un colore così da poter discernere in modo immediato la corrispondenza con il rispettivo telecomando, la cui presenza è segnalata con un pallino di colore opportuno sul piano (Figg. 1b, 2a). Anche la distanza massima rilevata dal sensore può essere scelta secondo lo spazio che si ha a disposizione in aula (determinando di conseguenza l'ampiezza dello spazio di interazione dove si svolgono le esperienze di movimento). Noi abbiamo utilizzato questa semplice modalità, oltre che per permettere agli studenti una prima fase di familiarizzare e di esplorazione con il software, per richiedere primi compiti, come quello di ottenere due grafici con date forme (ad esempio, grafici a gobbe, rette orizzontali, rette con pendenza positiva o negativa, e così via) o che soddisfano certe proprietà, come l'essere traslati verticalmente l'uno rispetto all'altro, oppure l'uno con gobbe di stessa ampiezza ma diversa altezza rispetto all'altro.

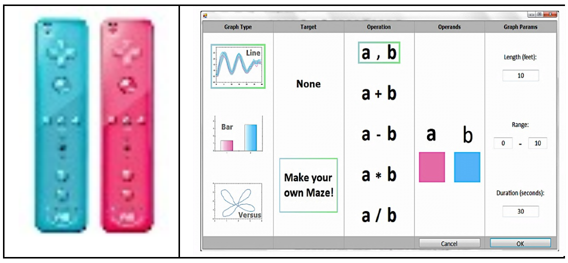

Figura 1. a. *Controller*; b. Finestra grafica di WiiGraph

È inoltre possibile scegliere di lavorare con una delle quattro operazioni tra funzioni (mostrate nella terza colonna della finestra grafica in Fig. 1b), ad esempio *a*+*b*. In questo caso, oltre ai due grafici di *a*(*t*) e *b*(*t*) sul piano cartesiano di riferimento compare anche il terzo grafico (*a*+*b*)(*t*), al quale è dato un colore diverso rispetto agli altri due grafici (Fig. 2b).

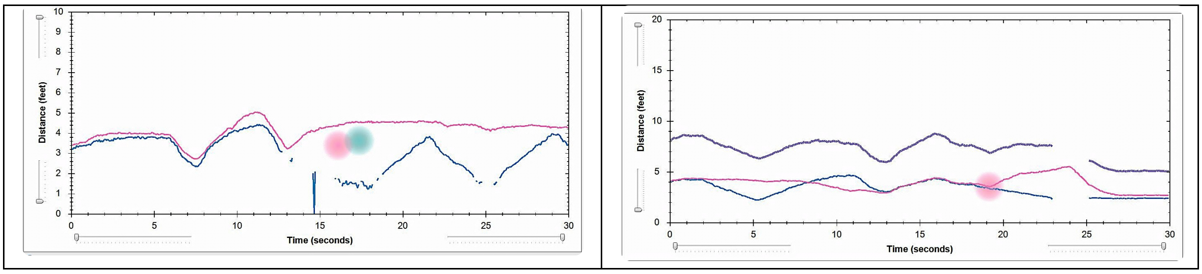

Figura 2. a. Due grafici in *Line*; b. (*a*+*b*)(*t*) in *Line*

Anche qui si possono dare compiti analoghi a quelli suddetti, come quello di ottenere uno specifico grafico somma, supponiamo una retta orizzontale, e impostando l'esplorazione e la discussione degli studenti sui possibili modi in cui un tale grafico è ottenibile (se siano univoci, se ve ne sia più di uno ma siano finiti o infiniti, ecc...).

LAVORARE CON GRAFICI OBIETTIVO: "*MAKE YOUR OWN MAZE!*"

Il tipo *Line* mette a disposizione anche l'interessante modalità di lavoro con *target*, chiamata "*Make your own Maze*!" (tradotto letteralmente "Fai il tuo labirinto!"), nella quale è possibile scegliere un grafico obiettivo e chiedere a coppie di studenti di muoversi in modo tale da riprodurlo opportunamente. La creazione del grafico obiettivo dipende dal numero di cambi di concavità e dalla tensione della curva, parametri che si traducono in una complessità del compito (un esempio è mostrato in Fig. 3a, dove la curva presenta una "difficoltà" pari a 43, con ben 8 punti critici). È inoltre decisa sin dall'inizio un'ampiezza per la curva obiettivo (in figura, è uguale a 4). Maggiore è tale numero più ampia appare la fascia grafica. Gli studenti devono muoversi in modo da produrre un grafico che, nel rispettare l'andamento della curva obiettivo, rimanga anche 'dentro' la fascia. Il software fornisce, alla fine della sessione, un punteggio rapportato alla difficoltà iniziale che dà una misura del "grado di fedeltà", cioè della precisione, di ciascun giocatore.

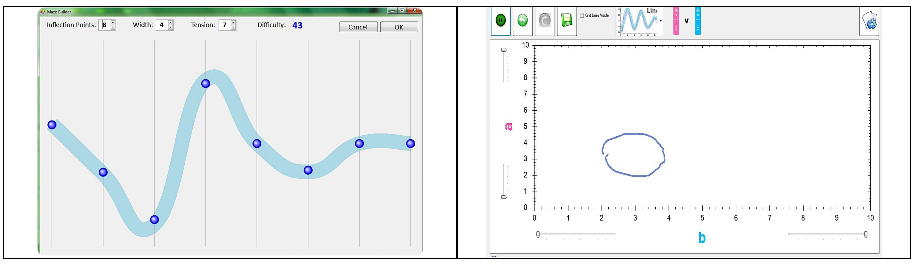

Figura 3. a. "*Make your own Maze!*"; c. Un rettangolo in *Versus*

La cosa particolarmente interessante di "*Make your own Maze!*", che può naturalmente essere attivato anche con le operazioni tra funzioni, è il fatto che un compito con *target* pone gli studenti in una situazione molto più marcatamente di gioco, promuovendo la sfida tra i due che si devono muovere di fronte al sensore, i quali entrano in competizione per produrre un grafico quanto più possibile 'vicino' alla curva obiettivo. Chiaramente la presenza di un punteggio stimola la competizione e stabilisce un criterio oggettivo di confronto tra i giocatori. Una possibilità lasciata da questa modalità di lavoro è poi quella di mettere in sfida tra loro due gruppi di più studenti, nel qual caso ogni gruppo sceglie uno sfidante. La sfida è meno banale di quanto potrebbe sembrare di primo acchito e, oltre a essere una sfida contro il compagno, diviene anche, durante il suo svolgimento, una sfida contro il tempo. Una delle principali difficoltà che gli studenti mettono in luce, infatti, (detto con le loro parole) risiede nella capacità di riuscire a 'riprendersi' dopo essere 'usciti fuori' dall'ampiezza da rispettare, che tradotto ha a che fare con i cambiamenti repentini della velocità catturati nella curva *target* dai flessi. Nelle esperienze che abbiamo fatto in classe, tuttavia, abbiamo anche avuto modo di osservare una dinamica proprio particolare. Nel momento di spiegare le difficoltà incontrate e di provare a migliorare il movimento rispetto alla prima prova, gli studenti tendono a diventare collaborativi, come se la sfida che inizialmente si poneva tra di loro diventasse una sfida tra loro e il software. Non è più importante chi dei due si avvicina di più ma il fatto che entrambi, muovendosi quasi in sincrono, si avvicinino alla curva data.

QUANDO IL TEMPO SCOMPARE: IL "TIPO" VERSUS

Un ultimo tipo di esperienza che vogliamo presentare in questo articolo è quello del grafico *Versus*, che, a differenza dei precedenti, non è un grafico di funzione. Si tratta invece di un grafico solo spaziale, nel quale le variabili sui due assi cartesiani sono le due distanze dei *controller* dalla barra sensore. Il grafico è perciò del tipo *a*(*b*), quindi, pur formandosi in seguito al movimento dei due telecomandi, restituisce la traiettoria del movimento piano composto dalle due variabili di posizione *a* e *b* (Fig. 3b). Di grande interesse, in questa modalità di lavoro, sono compiti che richiedano di produrre figure piane: rettangoli, rombi, circonferenze (che, nell'ottica della modellizzazione, rimandano a moti piani con traiettorie rettangolari, romboidali, circolari). Qui, la modalità implica che i due studenti coinvolti nel movimento dei telecomandi debbano essere altamente collaborativi, facendo attenzione anche a trovare una buona coordinazione dei movimenti. Si ha dunque la tensione verso un obiettivo comune, condiviso sin dall'inizio, per il quale non si può pensare di 'giocare' da soli (a differenza di quanto invece potrebbe accadere nell'essere in sfida per un grafico *target*). In aggiunta, il fatto che il tempo, in *Line* variabile visibile su uno dei due assi, ora scompaia (nel senso di non essere visibile) apre la possibilità di affrontare alcuni aspetti delicati della modellizzazione del movimento in matematica, come la distinzione tra legge oraria e traiettoria o quella tra grafici di funzione e grafici (perché su un piano cartesiano) non di funzione, e altri più propri della disciplina, come i concetti di parametro e variabile. Infine, un discorso che reputiamo piuttosto intrigante dal punto di vista didattico riguarda il modo in cui con *Versus* si possa pensare di introdurre le funzioni sinusoidali, come funzioni parametriche (funzioni del tempo) che descrivono un moto piano con una traiettoria circolare. Anche le Indicazioni, d'altra parte, richiamano le funzioni circolari sia nello studio della geometria sia in quello di relazioni e funzioni per il secondo biennio.

Le esperienze che abbiamo appena discusso sono certamente solo un assaggio delle innumerevoli che abbiamo avuto la possibilità di conoscere e sperimentare grazie all'idea di gamificare la Wii, cercando un modo di renderla uno strumento per la didattica della matematica. Non è stato semplice. Trasformare un'idea proveniente all'inizio dagli studi di ricerca didattica che mettevano in primo piano il ruolo della propriocezione e della chinestesia in matematica. Trasporla nella progettazione e nella creazione di attività in classe che facessero dell'uso della Wii (e dei suoi dispositivi) il punto focale del discorso, per gli studenti e per noi. Ma è stato certamente un percorso lungo, di crescita, che ci ha permesso di riflettere a fondo su come sia possibile approfittare di strumenti che fanno parte della quotidianità degli studenti in contesti extra-scolastici per fare matematica in un modo diverso, curioso e coinvolgente, aprendo strade creative e inaspettate verso lo studio di concetti anche difficili e che stanno alla base della matematica moderna.

Bibliografia

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the Body: Material Entanglements in the Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159-174.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(3), 349-361.