Parlare di tempo e movimento in matematica per introdurre il concetto di funzione

(Article begins on next page)

Parlare di tempo e movimento in matematica per introdurre il concetto di funzione

Francesca Ferrara, Giulia Ferrari
Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino

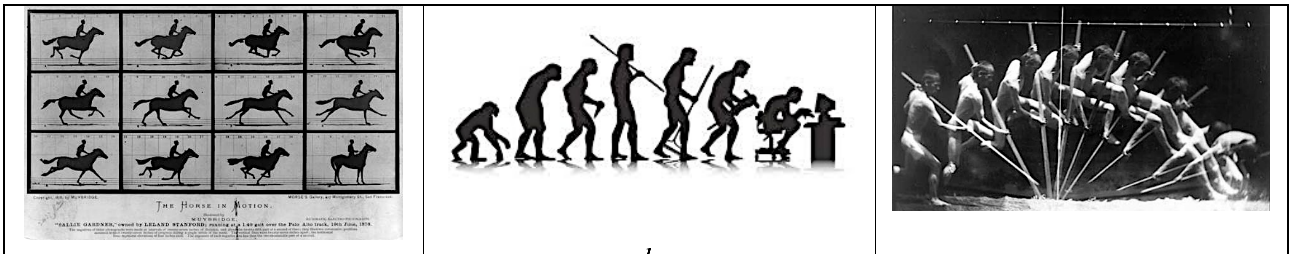
In questo articolo, presentiamo riflessioni su una proposta didattica che ha coinvolto una classe prima di scuola secondaria di secondo grado in un approccio grafico al concetto di funzione, basato sullo studio di relazioni spazio-tempo nella modellizzazione del movimento. Le attività in oggetto rientrano in un progetto di ricerca che mira a introdurre in classe la console di gioco Wii e i suoi dispositivi come risorse per la didattica della matematica, sfruttando le possibilità di tipo cinestetico e propriocettivo messe a disposizione da tali tecnologie (possibilità significative per la comprensione in matematica, secondo la ricerca). A tale scopo, gli studenti hanno fatto uso di un software, chiamato WiiGraph, il quale elabora grafici di vario tipo catturando la posizione nel tempo di due Wiimote, i telecomandi con cui si gioca alla Wii, mentre questi sono in movimento di fronte a un sensore. In tal modo, è stato possibile iniziare a parlare di tempo e movimento (aspetti che hanno anche risvolti storici e trasversali interessanti), con particolare attenzione al ruolo del tempo nei vari grafici e alla distinzione tra legge oraria e traiettoria. Modalità di lavoro di tipo sia collaborativo sia competitivo sono state sfruttate in aula grazie alle esperienze che la tecnologia scelta permette di sperimentare.

Premessa: parlando di tempo e movimento

In questo articolo vogliamo raccontare la storia di una sperimentazione didattica che è stata incentrata sulla modellizzazione del movimento e sul ruolo del tempo, per introdurre il concetto di funzione in un primo anno della scuola secondaria di secondo grado. L'utilizzo di software opportuni ci mette infatti nelle condizioni di modellizzare il fenomeno fisico del movimento per via grafica e di basare un approccio alle nozioni fondamentali dell'analisi elementare sullo studio delle relazioni spazio-temporali che sono coinvolte nel fenomeno e ne permettono una sua descrizione matematica. La storia è tuttavia ben più significativa di quella che sembra apparire a un primo sguardo se si pensa al ruolo cruciale e delicato giocato da sempre da spazio, tempo e movimento in ambiti diversi. Partendo da lontano ad esempio, nel passo della *Genesi* riguardante la creazione, si legge:

Nel principio Iddio creò i cieli e la terra. E la terra era informe e vuota, e le tenebre coprivano la faccia dell'abisso, e lo spirito di Dio aleggiava sulla superficie delle acque. E Dio disse: 'Sia la luce!' E la luce fu. (...) e Dio separò la luce dalle tenebre. (...) Così fu sera, poi fu mattina: e fu il primo giorno. Poi Dio disse: 'Ci sia una distesa tra le acque che separi le acque dalle acque'. E Dio fece la distesa e separò le acque ch'erano sotto la distesa, dalle acque ch'erano sopra la distesa. E così fu. (...) Così fu sera, poi fu mattina: e fu il secondo giorno. (Genesi 1: 1,2)

da cui si nota in modo sorprendente la presenza sia di una dimensione spaziale sia di una dimensione temporale nell'idea del cambiamento che fu: "Così fu sera, poi fu mattina", "il primo giorno", "il secondo giorno" e, in relazione allo spazio, "sotto la distesa" e "sopra la distesa".
Altro esempio importante, in cui sono racchiuse relazioni tra spazio e tempo, è dato dalla nascita della fotografia del movimento, di cui fu tra i pionieri Eadweard Muybridge, fotografo inglese vissuto tra il 1830 e il 1904. Una delle sue opere più famose, il *Cavallo in movimento* del 1878, raffigura una sequenza di fotografie scattate a istanti diversi da più macchine disposte parallelamente lungo il tracciato seguito da un cavallo al galoppo (Figura 1a). La successione così ottenuta cattura, seppur tramite un'illusione, la corsa del cavallo, permettendo anche di riconoscere momenti in cui le zampe sono tutte sollevate da terra.



a *b* *c*

Figura 1. Cattura del movimento in diverse forme

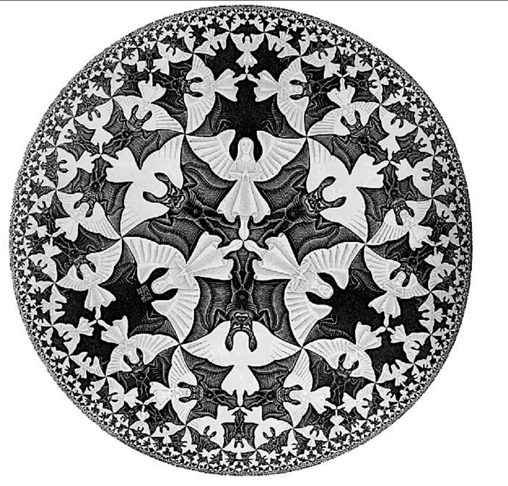
Il lavoro di Muybridge permise passi importanti nel precorrere la biomeccanica e la meccanica degli atleti. La cattura e la riproduzione del movimento, o del cambiamento, iniziò a essere realizzata in modi diversi, dando luogo a immagini di evoluzioni temporali e spaziali, come mostrano le Figure 1b e 1c. Questo discorso non può poi che richiamare la nascita della cinematografia, originariamente intesa proprio come proiezione di immagini in movimento e in riferimento a cui non si possono non citare i famosi zootropi, di cui è facile aver incontrato almeno un esemplare (tra l'altro nati prima del lavoro di Muybridge).
Non è forse un caso che, dunque, in musica si utilizzi il termine "adagio", espressione tra le altre di movimento, o di andamento nel senso di "a poco a poco", per indicare il tempo di una composizione. Possiamo avere un adagio o un adagio sostenuto in contrapposizione, ad esempio, a un largo e, in ogni caso, per riferirsi a un tempo di esecuzione lento. La musica come arte del tempo è stata a lungo contrapposta alla pittura, invece pensata come arte dello spazio. Interessanti sono perciò il connubio spazio-tempo e l'idea di movimento che si ritrovano nelle famose composizioni di Vasilij Kandinskij (1866-1944). Nella sua opera *Punto, linea e superficie*, che tanto 'sa' di matematica, il pittore sottolinea come, per dare vita ai suoi dipinti, facesse uso di punti e linee, pensando il punto come "la forma più concisa dal punto di vista del tempo" e la linea dinamica come generata dal punto ed espressione di movimento (si vedano i due esempi in Figura 2).

Figura 2. Due noti dipinti di Kandinskij

Leggendo poi *Passi verso l'infinito*, in *Escher* (Locher, 1978), si trova il seguente passo che fa riferimento alla staticità e all'assenza di tempo e movimento nelle opere, una volta concluse, sebbene il trascorrere del tempo ne abbia segnato la creazione:

Chiunque desideri creare un universo su di una superficie bidimensionale si accorgerà che il tempo trascorre mentre lui lavora alla propria creazione. Tuttavia, quando ha terminato e osserva ciò che ha fatto, vede qualcosa che è statico e senza tempo, nella sua opera non vi è ticchettio di orologio, ma soltanto una superficie piatta.

Il passo è estremamente affascinante perché richiama la presenza virtuale del movimento, incapsulata nel prodotto finale. Le xilografie "Limite del cerchio IV" (Figura 3a) e "Limite del quadrato" (Figura 3b), tra le opere più famose di M.C. Escher, solo per dare due esempi, racchiudono il processo al limite attraverso cui ci si avvicina, nel primo caso, al bordo a partire dal centro, nel secondo caso, a un lato a partire dal lato opposto.



a. "Limite del cerchio IV (Angeli e diavoli) "

b. "Limite del quadrato"

Figura 3. Le due celebri xilografie di M.C. Escher

Ma che cosa è un processo al limite se non un movimento? Ecco che si aprono innumerevoli legami con la matematica anche raffinata che si può fare e toccare parlando di tempo e movimento. Proprio nel limite del quadrato, nel processo con cui ci si avvicina al bordo, possiamo ritrovare il procedimento con cui Zenone di Elea (500 a.C.) sosteneva uno dei suoi famosissimi paradossi, guarda caso contro il moto, e utilizzarlo per discutere del fatto che il paradosso sia superabile. Si tratta del "paradosso dello stadio", un paradosso sullo spazio che può essere enunciato nel modo seguente:

Non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma una volta raggiunta la metà si dovrà raggiungere la metà della metà rimanente e così via, senza quindi mai riuscire a raggiungere l'estremità dello stadio.

I restanti sono il paradosso più famoso "di Achille e la tartaruga", il quale chiama in causa il fatto che, tra due corridori di cui uno parta avvantaggiato pur essendo più lento, questo non sarà mai raggiunto dall'altro corridore, e i paradossi "della freccia" e "delle due masse", che riguardano rispettivamente l'impossibilità del movimento e l'equivalenza tra la metà e il doppio del tempo. Tempo e movimento hanno insomma parecchio a che fare con la nostra disciplina. Ma tempo e movimento sono sempre stati controversi anche rispetto alla visione della matematica. Aristotele e con lui molti altri (tra cui possiamo citare Euclide, Leibniz, Frege, Russell) avevano una visione dualistica che contrapponeva la matematica alla realtà del mondo fisico, riconoscendo dunque una matematica de-temporalizzata e, nel contempo, de-contestualizzata e de-personalizzata, come ci insegna Balacheff (1988). Diverso era il modo di vedere di Pitagora, Archimede, Newton, Cavalieri, Poncelet, per esempio, i quali tendevano a non contrapporre matematica e fisica. Proprio Newton (1642-1727) dobbiamo richiamare pensando a come il tempo sia stato dibattuto rispetto al movimento. Newton infatti assolutizzava il tempo. Nella sua trattazione su fluenti e flussioni, il tempo era inteso come variabile indipendente rispetto a cui le altre fluenti fluiscono con certe flussioni, cioè quella mediante cui gli fu possibile definire la flussione di una data fluente, che noi oggi chiameremmo la derivata di una funzione. Newton affermava:

considero il tempo come fluente o crescente per flusso continuo e le altre quantità come fluenti continuamente nel tempo e dal flusso del tempo io do il nome di flussione alle velocità con cui tutte le altre quantità crescono.

Il dibattito continuò, per arrivare poi alla relativizzazione del tempo da parte di Einsten (1879-1955) con la sua teoria della Relatività Ristretta, uscita nel 1905, curiosamente per quanto riguarda il nostro discorso, un solo anno dopo la morte di Muybridge. E non si può dire che non vi sia un legame tra tempo e movimento e l'utilizzo di strumenti in matematica. Prendiamo da un lato le corde vibranti, il compasso, il regolo, la riga dentellata (tecnologie antiche), che tutte implicano movimento, e dall'altro lato le tecnologie moderne come la carta e l'algebra, che tali si possono considerare. Se le tecnologie della matematica pre-moderna sono temporalmente dinamiche nel loro essere orientate alla performance e le tecnologie matematiche moderne come la scrittura e l'algebra sono anti-dinamiche nei loro sforzi di incapsulare, distillare, astrarre e de-temporalizzare "il tempo", invece le tecnologie post-moderne—in gran parte digitali—permettono la reiscrizione letterale, la riproduzione e la trasformazione di fenomeni basati sul tempo. Esse sono letteralmente (e metaforicamente) dinamiche. Il discorso diviene ancora più interessante in riferimento ai numerosi studi che provengono dalla ricerca. Ad esempio, nel campo delle scienze cognitive, Seitz (2000) sosteneva l'idea del "Mi muovo quindi penso", mentre Talmy (1996) del fatto che pensiamo muovendo i nostri corpi e imponendo il movimento su altri oggetti. Berthoz (1997), dal canto suo, vedeva il movimento come un sesto senso. In psicologia, Sheets-Johnston (2009) ha poi messo in luce che il movimento è anche emozione o, usando la sua terminologia, "animazione". Dalle ricerche in didattica della matematica sappiamo che propriocezione e chinestesia sono parte della comprensione matematica (Nemirovsky, 2003) e che i modi di muoversi sono anche modi di sentire e modi di pensare, o di comunicare, nella prospettiva di Sfard (2008), come più di recente sostengono gli studi di Elizabeth de Freitas e Nathalie Sinclair (de Freitas & Sinclair, 2014; Sinclair, 2014). Inoltre, sappiamo che le tecnologie digitali permettono di (ri)iniettare il tempo e il movimento nella matematica, richiamando una visione non aristotelica della disciplina e dando spazio a nuovi muovi di muoversi e di agire, quindi, di pensare.
In quest'ottica eterogenea, la quale richiama momenti, ambiti, aspetti collaterali e nozioni, riteniamo il parlare di tempo e movimento un punto di partenza per lo studio del concetto di funzione nella scuola secondaria di secondo grado, oltre che un modo di favorire collegamenti interdisciplinari (con l'arte, con la musica, con la storia del cinema, con la filosofia, e così via). La prossima sezione presenta la nostra proposta didattica e come essa si collega ad alcune di queste riflessioni.

Una sperimentazione sul concetto di funzione

Come detto in apertura, la sperimentazione didattica in oggetto riguarda la modellizzazione di fenomeni di movimento e il ruolo del tempo ed è stata progettata per un approccio grafico al concetto di funzione. Tale scelta non è casuale, al contrario è ben inserita nel contesto istituzionale di riferimento.

Contesto Istituzionale

Poiché le attività hanno coinvolto nell'anno scolastico 2014/15 una classe prima di un Liceo Scientifico, consideriamo le Indicazioni nazionali per i Licei (MIUR, 2010), tra le cui linee guida e competenze si trova scritto che, al termine del percorso liceale:

lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico

e poi ancora:

avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico [tra cui in particolare, per quanto ci interessa] il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico.

Una "buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi", le "nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale" e la "costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo" sono tutti aspetti basilari richiamati nelle Indicazioni. Accanto a ciò è espressa l'importanza metodologica degli strumenti informatici oggi disponibili, poiché essi sono in grado di offrire "contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici" e il loro uso "è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi". Nello specifico dei contenuti per il nucleo *Relazioni e funzioni* poi, troviamo esplicito riferimento tra gli obiettivi specifici di apprendimento sia al movimento e al cambiamento, sia alla nozione di modello. In particolare, il primo biennio considera il linguaggio delle funzioni

anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.

Per il secondo biennio invece, le indicazioni auspicano che lo studente impari ad

analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e [a] operare su funzioni composte e inverse [oltre al fatto che un] tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Per quanto concerne il quinto anno infine, leggiamo:

Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura.

Le interpretazioni di situazioni mediante modelli matematici sono anche state oggetto delle simulazioni della nuova prova di maturità, la quale, come si legge in un articolo che è apparso sul Corriere della Sera il 23 aprile 2015 (dal titolo "Curve Nord e vasi da fiori: ecco la nuova prova di matematica"):

subisce un primo «restyling» per andare incontro alle nuove indicazioni nazionali che prevedono un approccio meno astratto, più incentrato sul cosiddetto «problem solving», ovvero sulla soluzione di problemi concreti. (...) Dietro queste «invenzioni» (...) «è in gioco una nuova didattica della matematica incentrata non più solo sulle conoscenze ma anche sulle competenze intese come quello che uno sa fare con quello che sa».

Ad esempio, la prova del 25 febbraio 2015 presentava come primo problema "Una collisione tra meteoriti" che coinvolgeva, nel contesto di una simulazione della collisione tra due meteoriti, la traiettoria di un meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo (Figura 4a). Nella prova successiva del 22 aprile, nel problema "Curva Nord" era invece presente un grafico con il numero massimo di spettatori in uno stadio in funzione del tempo (Figura 4b).
La centralità dei concetti di funzione e di modello matematico insomma è uno degli aspetti portanti delle Indicazioni nazionali per il secondo ciclo di istruzione, così come del nuovo Esame di Stato di matematica. Le esperienze di cui tratta questo articolo si inseriscono nell'ottica di lavorare su tali

concetti sin dal primo anno della scuola secondaria di secondo grado, in modo da concorrere a uno sviluppo il più possibile radicato degli obiettivi e delle competenze richieste.

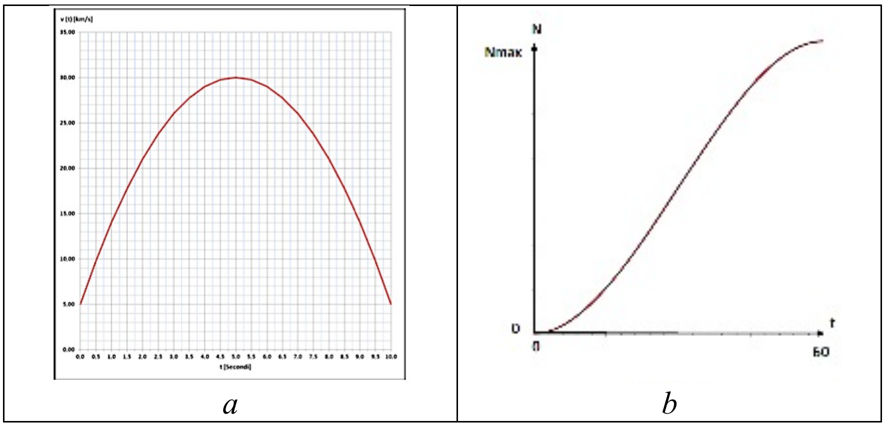


Figura 4. Grafici presenti nelle simulazioni del 25 febbraio e del 22 aprile 2015

Partecipanti e metodologia

La sperimentazione ha coinvolto i 30 alunni (20 maschi e 10 femmine) di una classe prima di Liceo Scientifico (la IA dell'Istituto "Edoardo Agnelli" di Torino) e il loro insegnante di matematica in una serie di incontri nei quali gli studenti hanno lavorato sulla modellizzazione matematica di loro movimenti al fine di introdurre significati per il concetto di funzione mediante lo studio delle relazioni spazio-temporali coinvolte. In totale, sono stati progettati 9 incontri della durata di 2 ore ciascuno, i quali hanno avuto luogo tra dicembre 2014 e febbraio 2015. Gli incontri sono stati aperti e chiusi da due questionari, che miravano a indagare le conoscenze in entrata su grafico e funzione da parte degli allievi e le competenze acquisite durante le esperienze. Tutte le attività sono state progettate dalle due autrici, che hanno anche avuto il ruolo di osservatrici, cameramen e orchestratrici degli incontri. Gli studenti non hanno lavorato nella normale aula della lezione, ma nell'aula di matematica, una speciale aula della scuola adibita a laboratorio, secondo il modello metodologico del laboratorio di matematica fornito dall'UMI (Anichini *et al*., 2004). Le modalità di lavoro sono state strutturate attraverso schede individuali, attività di gruppo (con dieci gruppi composti da tre studenti ciascuno), sfide tra coppie di gruppi e discussioni collettive condotte da una delle autrici. I gruppi, una volta formati, sono rimasti gli stessi per l'intera durata della sperimentazione. Ciò ha comportato la preparazione di otto schede, tra individuali e di gruppo, più una verifica finale. Le schede erano tutte composte da due a sei domande e, mentre quelle di gruppo erano solitamente affrontate in aula, quelle individuali erano invece lasciate come compito a casa attraverso l'utilizzo di una piattaforma online. Poiché le attività rientravano in un progetto di ricerca didattica, sono state filmate nelle varie fasi da due videocamere, entrambe mobili, in modo che i video così ottenuti fossero utilizzabili per una successiva analisi da parte delle autrici, assieme alle produzioni scritte degli studenti. Durante i momenti di lavoro di gruppo, una delle due videocamere ha sempre ripreso lo stesso gruppo dall'inizio alla fine del progetto, mentre l'altra girava tra i gruppi restanti.

Il progetto: la Wii come risorsa per la didattica della matematica

Come appena accennato, la sperimentazione rientra in un progetto di ricerca che prevede di sfruttare le potenzialità di una specifica tecnologia a favore della didattica della matematica. Prima di capire come abbiamo utilizzato tale tecnologia vediamo che cosa mette a disposizione. La tecnologia in questione è la console *Wii* della Nintendo. Si tratta di una console che esce sul mercato non molti anni orsono, nel 2006, come portatrice di una generazione di gioco nuova e innovativa basata su due aspetti principali: il movimento, da un lato, e il coinvolgimento propriocettivo e cinestetico dei suoi utilizzatori, dall'altro lato. Le situazioni messe a disposizione dalla *Wii* possono infatti essere affrontate mediante spostamenti del corpo dei giocatori, che permettono di controllare le azioni di gioco, richiedendo l'uso di dispositivi specifici, come i telecomandi *Wiimote*, anche detti *controller*, e la pedana *Balance Board*. I primi sembrano comuni telecomandi da televisione e rappresentano la maggiore innovazione degli ultimi venti anni nell'ambito delle console. Grazie a un accelerometro integrato possono percepire l'inclinazione e la rotazione rispetto allo schermo di gioco, mentre il puntamento verso lo schermo avviene mediante tecnologia a infrarossi incorporata in una barra sensore (ulteriore dispositivo richiesto dal funzionamento della console). La *Balance Board* invece è uno strumento più recente (è uscita nel 2008), simile a una bilancia, che permette di misurare l'indice di massa corporea e di analizzare il baricentro e il peso corporeo. Entrambi i dispositivi comunicano via wireless con la *Wii*. Mentre la pedana richiede la presenza di un singolo giocatore in una data situazione, due o più controller permettono possibilità di sfida tra due o più giocatori. La cosa interessante è che, in corrispondenza di movimenti dei telecomandi o sulla bilancia, i giocatori ottengono un feedback in tempo reale che permette loro di valutare decisioni e strategie sulle modalità con le quali rapportarsi al gioco.

La *Wii* non è certo uno strumento progettato per la didattica della matematica. Tuttavia, induce comportamenti (inter)attivi che coinvolgono propriocezione e movimento, mettendo al centro della situazione i giocatori e il loro coinvolgimento. Ciò è particolarmente interessante nell'ottica della *gamification*, che sostiene l'applicazione di meccaniche e dinamiche di gioco a contesti e attività che non hanno a che fare in modo diretto con il gioco, allo scopo di favorire la partecipazione e l'interesse da parte degli utilizzatori. È inoltre interessante dal punto di vista della ricerca didattica (di cui una parte è già stata citata), che negli ultimi dieci anni ha abbracciato la tesi secondo cui il coinvolgimento corporeo, nello specifico, attività percettivo-motorie, propriocezione e chinestesia, è parte costitutiva dei processi di pensiero e di comprensione in matematica (si vedano, ad esempio, Nemirovsky et al., 2013; de Freitas & Sinclair, 2014; Radford, 2013).

Tale prospettiva motiva la nostra idea di utilizzare la console come una risorsa per la didattica della matematica, consapevoli del fatto che le esperienze di gioco, mediante l'utilizzo dei telecomandi e della bilancia, presuppongono e insieme implicano il movimento e la propriocezione.

Nella nostra sperimentazione abbiamo voluto sfruttare le potenzialità fornite sia dai *Wiimote* sia dalla *Balance Board*. Per fare ciò, siamo ricorse a due specifici software, utilizzabili rispettivamente con i telecomandi e con la bilancia, chiamati *WiiGraph* e *DarwiinRemote*. Entrambi forniscono dei grafici in piani Cartesiani, ma mentre il primo funziona in relazione al movimento contemporaneo di due telecomandi e alla cattura della loro posizione, il secondo rileva la proiezione orizzontale del movimento del baricentro di una sola persona che si trovi sulla bilancia, restituendo un grafico della traiettoria piana seguita dal baricentro. Tra i grafici ottenibili non ci sono dunque necessariamente grafici di funzione e ciò rende possibile anche discorsi riguardanti la distinzione, sempre delicata e interdisciplinare, tra leggi orarie e traiettorie. Per questioni di spazio, in questo articolo tralasciamo le particolarità di *DarwiinRemote* (che è un software libero, scaricabile dalla rete) e ci focalizziamo su *WiiGraph*, limitandoci a parlare di alcune delle esperienze svolte nella prima parte del percorso. A tale scopo, dobbiamo spiegare come è stato organizzato lo spazio dell'aula di matematica e il funzionamento e le potenzialità offerte dal software.

L'aula di matematica e WiiGraph

L'aula di matematica della scuola è un'aula grande che contiene ai lati alcuni tavoli spaziosi, sui quali è possibile far lavorare agevolmente gruppi di studenti, e uno spazio vuoto centrale, piuttosto grande, nel quale si possono organizzare attività ed esperienze di vario tipo per gli studenti. Al fondo dell'aula, sono inoltre a disposizione, lungo una stessa parete, una lavagna bianca tradizionale e una interattiva multimediale (o LIM) sulla quale è anche possibile proiettare lo schermo di un computer che sia collegato. Di fronte alle lavagne si trova poi un ampio tavolo, che può servire da cattedra all'occorrenza.

Durante gli incontri, i tavoli erano solitamente utilizzati dai gruppi per il completamento delle schede, mentre per il resto del tempo gli studenti sedevano lungo file di sedie, disposte in file parallele o a semicerchio, secondo quanto era più funzionale al momento. Uno spazio di interazione al centro, di fronte alle lavagne, copriva un corridoio ci circa 2 metri per 6. Questo spazio è stato utilizzato per i movimenti degli studenti con i *Wiimote*. Poiché *WiiGraph* per funzionare richiedere soltanto due telecomandi e la barra sensore, quest'ultima è stata posizionata proprio davanti al corridoio di interazione, sul ciglio della cattedra, su cui abbiamo sistemato anche un portatile con sistema operativo Windows 7, dove era installato il software e il cui schermo era proiettato sulla LIM. Abbiamo invece usato la lavagna tradizionale come superficie per le spiegazioni scritte degli studenti durante le discussioni. Attraverso uno specifico adattatore *Bluetooth* con entrata USB, i due *controller* erano collegati al software, che era in grado di rilevare la loro posizione dal sensore, con il vincolo che ciascun telecomando fosse puntato verso la barra in modo che la sua camera a infrarossi fosse diretta verso il sensore. Quando il software è in funzione, il puntamento dei telecomandi è corretto quando, per ciascuno di essi, un cerchio diffuso appare sullo schermo. Solo in tale condizione si riesce a eseguire una sessione di lavoro che fornisce un grafico in corrispondenza del movimento del telecomando. A ciascun *Wiimote* è associato un colore (di default si hanno fucsia e azzurro; si veda la Figura 5a, che mostra la schermata iniziale di *WiiGraph*). Il colore è lo stesso del cerchio e dell'eventuale grafico prodotto a schermo. Se i telecomandi sono puntati correttamente verso la barra, il software è infatti in grado di rilevare istante per istante la loro posizione, mediante la loro distanza dal sensore, e dà un feedback in tempo reale di tale posizione, creando, nella situazione di default, due grafici, uno per ciascun controller, della posizione in funzione del tempo (alle due posizioni sono attribuite le due variabili *a* e *b* mostrate in Figura 5a).

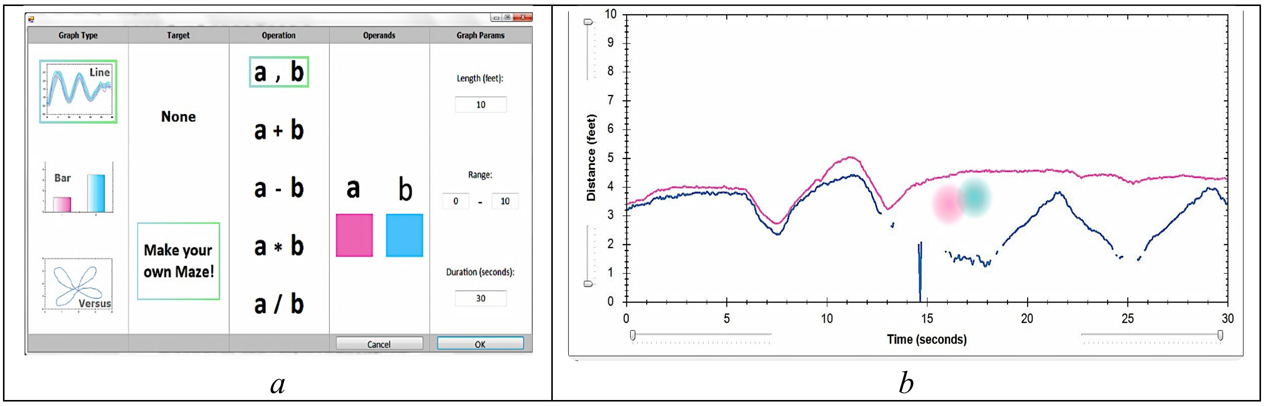


Figura 5. Finestra iniziale di *WiiGraph* e un esempio di due grafici associati ad $a(t)$ e $b(t)$

WiiGraph è stato progettato da un gruppo di ricercatori americani del Centro di Ricerca in Didattica della Matematica e delle Scienze dell'Università statale di San Diego, tra cui il già citato Ricardo Nemirovsky. Come lascia intuire il discorso appena fatto, il software permette un accesso grafico e interattivo alla modellizzazione matematica del movimento dei due telecomandi di fronte alla barra sensore, grazie alla cattura e alla successiva elaborazione delle relazioni spazio-temporali associate al movimento.

Dalla finestra iniziale (Figura 5a), è possibile scegliere opzioni e modalità diverse, con cui avere svariati tipi di grafici, sfide e operazioni tra funzioni. Le due classiche opzioni per i tipi di grafici si chiamano *Line* e *Versus* (prima colonna a sinistra). Con entrambe è possibile decidere di avere o meno un target, vale a dire un grafico obiettivo (che può essere attivato e costruito mediante la modalità *Make your own Maze!*: seconda colonna, in basso). La terza colonna della schermata presenta le classiche operazioni, con la quali si può lavorare solo avendo selezionato l'opzione *Line*, mentre di default si ottengono i due grafici associati ad $a(t)$ e $b(t)$, di cui compare un esempio in Figura 5b. Il tipo di grafico ottenibile con *Versus* invece 'nasconde' il tempo considerando coppie di punti del tipo (b, a), che dunque danno origine a un grafico solo spaziale (Figura 6b).

Sono almeno tre i punti di forza presentati dal software rispetto ad attività di modellizzazione più tradizionali. Il primo punto è legato alle diverse modalità di lavoro con cui si possono coinvolgere coppie di studenti in nuove esperienze di movimento. Grazie alle tipologie di grafici e di situazioni possibili, infatti, gli utenti possono interagire in compiti di tipo collaborativo o mediante esperienze di tipo competitivo. Non entriamo qui nel dettaglio, ma lo faremo nel caso degli episodi di classe della sezione che segue. Tuttavia, esempi sono forniti da attività che riguardano il tracciamento di date forme (diciamo un rettangolo oppure una circonferenza, usando *Versus* per il tipo di grafico, come mostra la Figura 6b) oppure la riproduzione di un grafico deciso a priori (con la modalità *Make your own Maze!* attiva per l'opzione *Line*).

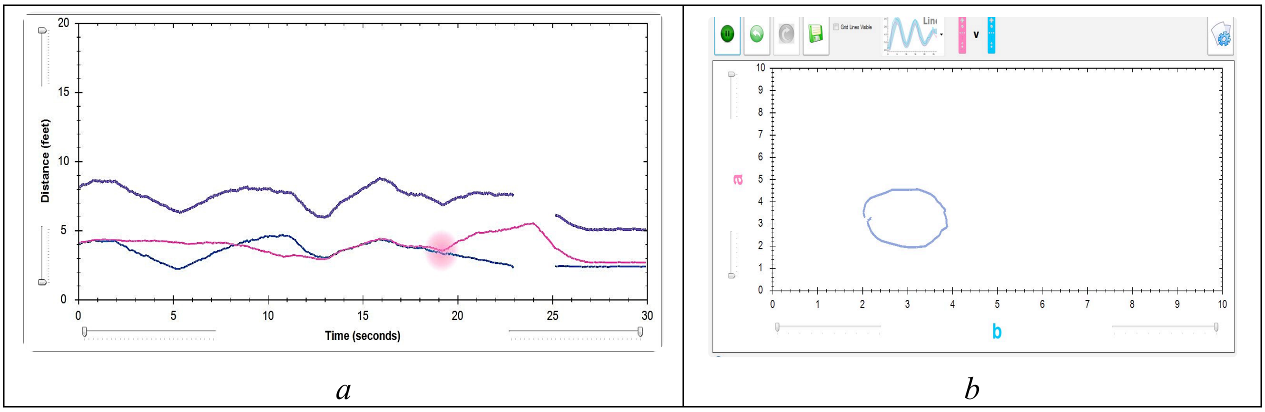


Figura 6. L'opzione *a+b* in *Line* e l'opzione *Versus*

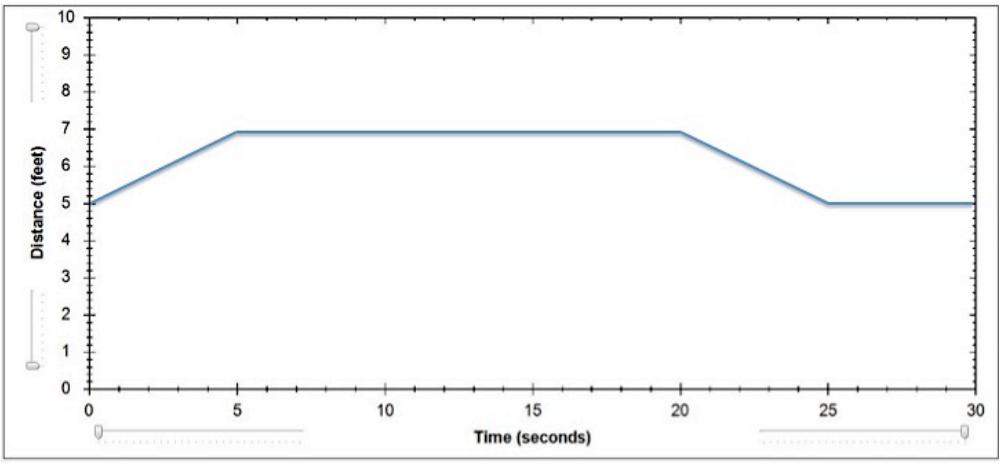
Il secondo punto di forza risiede nel fatto che *WiiGraph*, per opportune opzioni, lavora in tempo reale, presentando *almeno* due grafici sullo stesso piano cartesiano con assi di posizione e tempo (nel caso di *Line*, i due grafici delle posizioni dei telecomandi nel tempo, in termini della loro distanza dalla barra sensore: Figura 5b; con la modalità *a+b* attiva, ad esempio, è aggiunto un terzo grafico con un nuovo colore, associato alla funzione $(a+b)(t)$: Figura 6a). Ciò rende possibile un confronto immediato tra i grafici e quindi tra gli studenti coinvolti e, in ogni caso, una vicendevole influenza dell'uno sull'altro (che può essere interessante spunto di discussione), con un tempo e uno spazio condivisi grazie all'esperienza. Il terzo e ultimo punto riguarda infine il feedback simultaneo e immediato che gli studenti hanno in tempo reale ai propri movimenti e che permette loro di ragionare sulla bontà di un movimento, ad esempio rispetto a eventuali obiettivi prefissati, quale può essere un grafico di data forma.
Concludiamo la nostra trattazione con alcuni episodi tratti dalle attività in aula, con cui intendiamo mostrare come le esperienze vissute dagli studenti favoriscono la loro capacità di parlare di tempo e di movimento e di costruire significati sulle relazioni spazio-temporali descrittive di un movimento, dunque per il concetto di funzione. Con questo in mente, ci concentriamo sui tre aspetti principali che sono stati oggetto degli incontri: la variabile tempo, l'essere collaborativi/competitivi e, infine, la 'sparizione' del tempo.

Parlare di tempo e movimento: alcune esperienze in aula

Rob e Bob

Una delle prime schede che sono state consegnate ai gruppi di studenti subito dopo aver incontrato la modalità *Line* di default raccontava di Rob e Bob, due robottini che si immaginavano muoversi di fronte alla barra sensore, al posto di due studenti. Di uno dei due era fornito il grafico ottenibile con *WiiGraph*, mentre si chiedeva di ragionare sul grafico corrispondente al movimento dell'altro, note le caratteristiche di tale movimento rispetto a quelle dell'altro. La Figura 7 mostra la consegna data agli studenti.

a) Rob e Bob sono due robottini che possono essere istruiti a muoversi in modo molto preciso di fronte al sensore. Supponete che, in corrispondenza di un movimento di Rob, WiiGraph produca un grafico come quello qui sotto:



Immaginate che anche Bob si sia mosso: è partito assieme a Rob, alla stessa distanza dal sensore, ma si è mosso a velocità doppia e nel verso opposto.

1) Secondo voi, quale grafico mostrerebbe WiiGraph per il movimento di Bob?
2) Rob e Bob, una volta partiti, si sono incontrati ancora?

Motivate le vostre risposte.

Figura 7. La scheda su Rob e Bob

È interessante notare le differenze tra i grafici che sono stati prodotti dai diversi gruppi, rispetto al grafico atteso (Figura 8a). Le Figure 8b, 8c e 8d presentano le tre tipologie fornite, che etichettiamo per comodità di scrittura in riferimento a tre gruppi: gruppo 1, gruppo 2 e gruppo 3 rispettivamente.

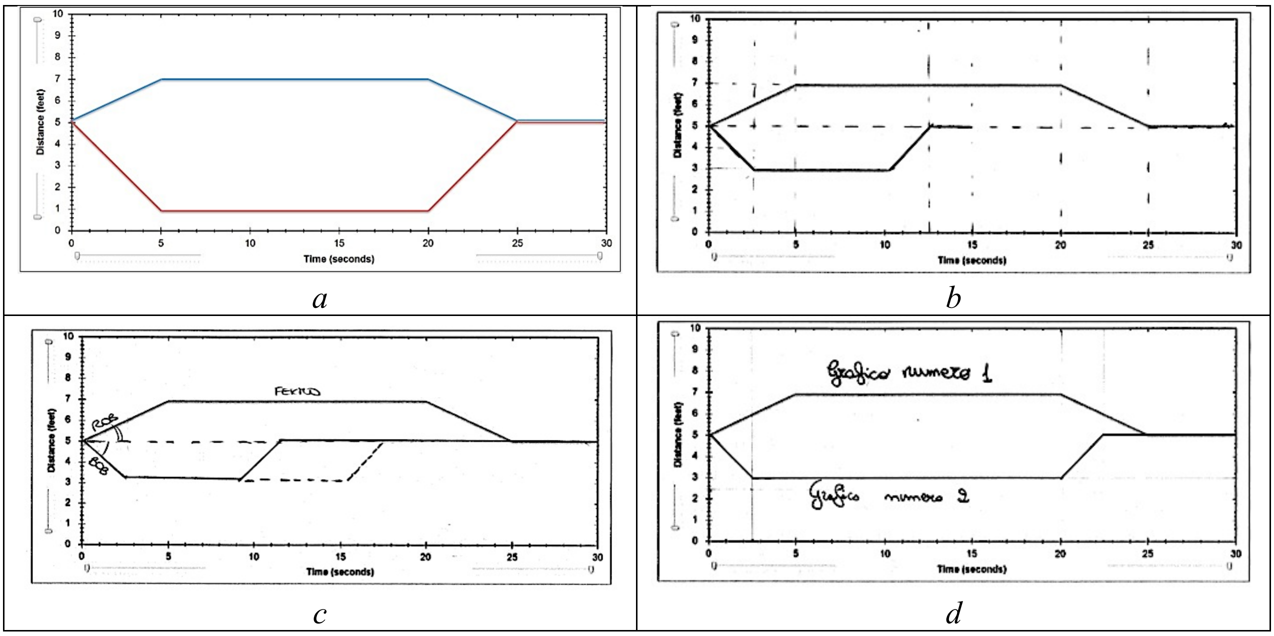


Figura 8. Il grafico atteso e i grafici prodotti da gruppo 1, gruppo 2 e gruppo 3

Prendiamo in esame le spiegazioni scritte che i tre gruppi hanno associato a tali grafici, in modo da comprendere meglio le interpretazioni date dagli studenti al testo della consegna e i punti di forza e di debolezza dei loro ragionamenti (le parole che compaiono sottolineate sono le più significative).
Il gruppo 1 scrive:

La linea che abbiamo rappresentato è la metà della linea di Rob. Le linee sono più inclinate perché la velocità è raddoppiata e Bob si è mosso più velocemente e in maniera opposta a Rob. Il grafico termina a 15 perché Bob essendosi mosso a velocità doppia ha terminato alla metà di 30.
(spiegazione del gruppo 1, grafico in Figura 8b)

Il gruppo 2 scrive:
*Bob va alla velocità doppia di Rob quindi finisce "il giro" prima di Rob. Il resto del percorso è stato fermo e alla fine si è incontrato con Rob. Tra il percorso di Bob e Rob cambia la velocità, infatti Bob deve percorrere lo stesso spazio al contrario impiegando la metà del tempo. Nel grafico rispetto a Rob cambia l'inclinazione [*Figura 8*] delle spezzate perché deve fare lo stesso percorso ma dalla parte opposta e più velocemente.*
(spiegazione del gruppo 2, grafico in Figura 8c)

Il gruppo 3 scrive:
Inoltre i movimenti di Bob sono stati fatti in senso opposto rispetto ai movimenti di Rob. Le due raffigurazioni sono diverse, infatti variano anche le inclinazioni dal momento che variano i tempi. Rob è più lento. Quindi, percorrendo lo stesso spazio, in diverso tempo, ci sarà una maggiore inclinazione.
(spiegazione del gruppo 3, grafico in Figura 8d)

Dalle argomentazioni dei gruppi, appare evidente quanto sia cruciale il ruolo giocato dalla variabile tempo nella modellizzazione dei due movimenti di Rob e Bob.
Nessuno dei tre gruppi produce per Bob un grafico corretto. Eppure tutti e tre fanno considerazioni corrette in merito alla "inclinazione" delle linee o "spezzate" nel nuovo grafico (intendendo quelle a pendenza non nulla): "Le linee sono più inclinate" (gruppo 1), "cambia l'inclinazione delle spezzate" (gruppo 2) e "variano anche le inclinazioni" (gruppo 3). Che poi la diversa inclinazione corrisponda alla diversa velocità (doppia, per l'esattezza) del movimento di Bob è un altro aspetto che tutti e tre i gruppi riconoscono correttamente ("la velocità è raddoppiata", "cambia la velocità", "Rob è più lento"). Tuttavia, il problema si ha sulle considerazioni legate al tempo, considerazioni probabilmente indotte dalla consegna. Tutti i gruppi infatti considerano una variazione di tempo o su intervalli locali o sull'intero intervallo dei 30 secondi, ragionando sul fatto che lo spazio che Bob deve coprire sia necessariamente "lo stesso" coperto da Rob (ciò si riscontra bene nell'ampiezza dei tre grafici prodotti): "il giro", "lo stesso spazio", "lo stesso percorso". Questo ragionamento porta a considerare la velocità come una variazione di tempo rispetto a un dato spazio, invece che come una variazione di spazio in un dato tempo. Esso ha due possibili conseguenze per i nostri studenti. Da un lato, come avviene nel caso del gruppo 1, si contempla la possibilità che il secondo robottino impeghi esattamente la metà del tempo per coprire il percorso e dunque si fermi dopo 15 secondi, slegando così il grafico dal suo dover catturare un'esperienza con il software che si sa durare per 30 secondi (il tempo insomma non si può 'fermare' a 15). L'altra possibilità è quella in cui incappano i gruppi 2 e 3, per cui, mettendoci meno tempo di Rob, Bob si ferma prima e sta fermo di più sino alla fine dei 30 secondi. C'è però ancora una differenza tra gli ultimi due grafici. Infatti, il gruppo 3 presuppone che il movimento del secondo robottino sia dettato dal movimento del primo e che, perciò, Bob sia costretto, una volta fermo, ad aspettare che Rob riprenda il suo movimento così da muoversi in verso opposto e con velocità doppia rispetto a lui per coprire "lo stesso spazio", come si vede nitidamente dalla Figura 8d.

Durante una discussione collettiva, sono ripresi e messi a confronto i tre tipi di grafici e gli studenti dicono la loro per sostenere tesi a favore delle scelte del proprio gruppo. È interessante riprendere alcune delle spiegazioni che sono fornite da componenti dei gruppi 1, 2 e 3 (seppur i restanti gruppi abbiano prodotto un grafico analogo a uno dei 3). In tal modo, possiamo infatti mettere in relazione le argomentazioni scritte date da un gruppo con il pensiero individuale di uno o più tra i suoi membri. Ecco che Lorenzo, componente del gruppo 1 (il cui grafico è in Figura 8b, lo ripetiamo per comodità), afferma che nel gruppo hanno rappresentato il grafico di Rob "che finiva a 15", poiché "muovendosi a velocità doppia, la distanza rimaneva costante, anche se era opposta, rimaneva costante, però, magari, se un movimento Rob lo faceva in 10 secondi Bob lo faceva in 5 secondi perché la velocità era doppia". Nella spiegazione di Lorenzo ritroviamo riferimento esplicito alle espressioni "metà della linea di Rob" e "metà di 30", che caratterizzano il protocollo scritto del suo gruppo, assieme al fatto di avere una velocità doppia dell'altra. In una fase successiva tuttavia, Lorenzo aggiunge la seguente considerazione: "Quando finiva a 15 il movimento, o stava fermo finché non arrivava alla fine oppure si fermava a 15 senza più continuare". Possiamo notare che mentre la seconda possibilità richiama ancora la caratteristica del grafico di Bob di potersi fermare a 15 secondi, l'altra possibilità invece contempla che Bob stia fermo sino alla fine (della cattura, quindi dei 30 secondi), richiamando la situazione descritta dal grafico prodotto invece dal gruppo 2 (Figura 8c). Proprio a questo punto, nel dialogo interviene Andrea, parte del gruppo 3, sostenendo che il grafico di Bob "occupava lo stesso tempo, perché, muovendosi contemporaneamente, magari, nel momento in cui si muovevano, uno ci metteva di meno rispetto a un altro per fare lo stesso spazio, per muoversi nello stesso spazio, però poi rimaneva fermo fino a quando anche l'altro non si muoveva di nuovo". La considerazione di Andrea sottolinea il fatto che i due robottini debbano percorrere lo stesso spazio, ma rende assieme esplicita l'idea che il secondo debba conoscere il movimento del primo per sapere come muoversi dopo essersi fermato, come conseguenza di due movimenti contemporanei. Questo pensiero è ripreso da Giulio, anche lui parte del gruppo 3, che lo trasforma nell'immagine dell'attesa da parte di uno dei due robot, argomentando così l'impossibilità che il grafico di Rob termini dopo soli 15 secondi: "Ma mica Rob poteva sapere i movimenti di Bob in anticipo, quindi non può finire a 15, deve aspettarlo per fare il suo stesso movimento ma opposto, perché noi l'avevamo visto il grafico di Bob, ma se si muovono contemporaneamente vuol dire che uno non può fare, anticipare i movimenti e quindi non può finire a 15 secondi". Sebbene Giulio finisca per scambiare i ruoli a Rob e Bob, l'accento della sua spiegazione sul conoscere "in anticipo" il movimento dell'altro robottino è davvero calzante rispetto all'importanza del contesto fornito dalla situazione, che impone, per lo studente, il fatto che i robottini non stiano avendo alcun feedback da parte del software (a differenza di quanto invece sia sempre avvenuto nelle loro esperienze: "noi l'avevamo visto il grafico di Bob").

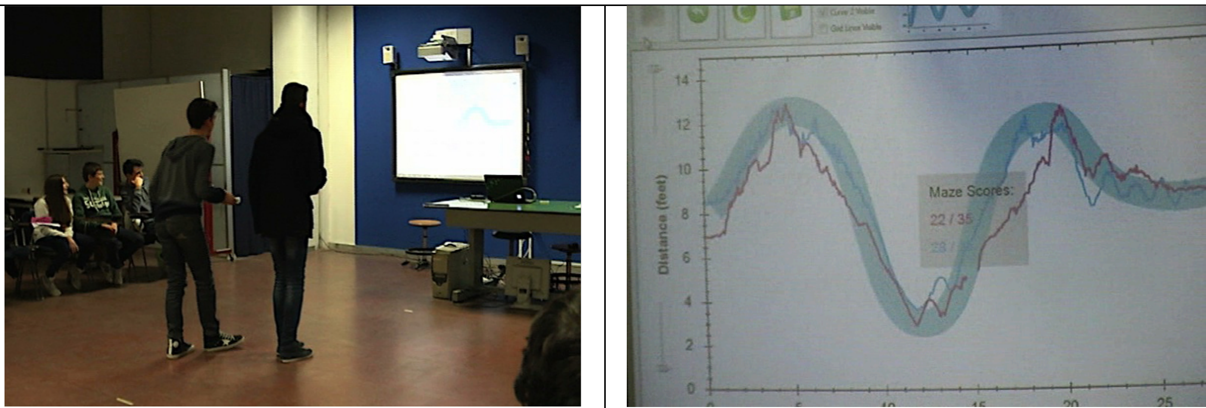
Questo primo episodio mostra in modo evidente quanto sia delicato per gli studenti ragionare sulla variabile tempo in relazione a informazioni sulla velocità. Dire "velocità doppia" significa per loro semplicemente essere più veloci e, di conseguenza, impiegare meno tempo, dando per scontato che lo spazio da percorrere sia sempre costante, invece che pensare al fatto che in uno stesso tempo sia possibile coprire più spazio. Questa assunzione aggiuntiva deriva probabilmente dall'esperienza quotidiana degli studenti, per i quali la situazione più comune è quella in cui ci si deve spostare da un luogo ad un altro prefissato e, per raggiungere il secondo, si impiegherà meno tempo (la metà) se ci si muove a velocità doppia.

Passiamo ora a considerare un secondo episodio, che riguarda nello specifico attività in cui si hanno grafici obiettivo sin dall'inizio.

Grafici obiettivo

Come anticipato nella sezione su *WiiGraph*, le varie opzioni messe a disposizione dal software permettono di elaborare compiti per gli studenti che abbiano diversa natura, sia essa competitiva o collaborativa. Questi prevedono ad esempio il confronto tra coppie di studenti che si sfidano per raggiungere lo stesso obiettivo oppure che devono interagire in modo costruttivo per ottenerne uno

comune, confrontandosi con la matematica che si cela dietro tali consegne. Sempre nell'ottica della *gamification*, il fatto di recuperare dinamiche di gioco durante le attività consente di parlare anche di strategie, come accaduto quando i gruppi hanno sperimentato la modalità *Make your own Maze!*.
Infatti, questa modalità prevede che sia costruito un grafico target (obiettivo) con una certa forma, tramite opportuni punti di flesso, che possono essere più o meno numerosi e la cui posizione può essere variata, e la scelta di un'ampiezza e di una tensione per la curva. La forma, quando impostata, compare nella finestra grafica di *WiiGraph* come una traccia di colore azzurro chiaro. L'obiettivo per ciascun giocatore è di riprodurre il più fedelmente possibile la traccia data, ovvero, muovendosi opportunamente nello spazio di interazione, far sì che il grafico spazio-tempo associato al proprio telecomando rimanga all'interno della traccia. In base al tipo di grafico che si è costruito in origine, il software genera un livello di difficoltà (ad esempio, minore è l'ampiezza della curva obiettivo, maggiore è la difficoltà assegnata), che rappresenta anche il punteggio massimo raggiungibile da parte del giocatore, punteggio che compare a schermo al termine della sessione.
Durante uno degli incontri, coppie di gruppi (tramite un loro rappresentante) si sono sfidate usando questa modalità per ottenere grafici di difficoltà crescente. Nell'episodio che vogliamo considerare, Emanuele e Oliver (Figura 9a) si sono contrapposti avendo come grafico obiettivo quello in Figura 9b. La stessa figura mostra che tale grafico aveva una difficoltà pari a 35. Dopo aver 'giocato', Emanuele ha ottenuto un punteggio di 28/35, mentre Oliver ha totalizzato 22/35 (la sua curva è infatti quella che 'esce' maggiormente dalla fascia del grafico obiettivo).



a *b*

Figura 9. Emanuele e Oliver e il *Make your own Maze!*

Dopo essersi sfidati tutti e aver condiviso in fase di discussione collettiva alcune difficoltà legate al tipo di interazione con il software, i gruppi prima rivali hanno poi lavorato insieme alla risoluzione di una scheda, la cui prima parte era così formulata:

Avete provato a muovervi, sfidandovi tra di voi, per riuscire a essere fedeli il più possibile a un grafico dato a schermo. Avete anche ottenuto una misura del vostro grado di 'fedeltà' (vale a dire, di precisione, rispetto alle difficoltà che il grafico presenta). Riportate quali sono state le vostre reazioni e sensazioni a caldo dopo la sfida (distinguete tra le voci dei due gruppi).

Nella Figura 10 è riportata la risposta dei gruppi di Oliver (colonna di sinistra) e di Emanuele (colonna di destra). I due gruppi fanno osservazioni simili, mettendo in luce le difficoltà avute nel riprodurre correttamente le parti di grafico con le "curve", ovvero i punti/ momenti associati a un cambiamento più o meno repentino di velocità. Inoltre, osservano anche come individuare il punto di partenza corretto risulti essere un elemento importante ai fini del punteggio finale, e che questo va determinato in modo "sicuro". È interessante osservare come il gruppo di Emanuele (che ha vinto la sfida) osservi fin da subito che le difficoltà riscontrate siano "state minime" (Figura 10), probabilmente essendo più soddisfatti del risultato ottenuto durante l'esperienza.

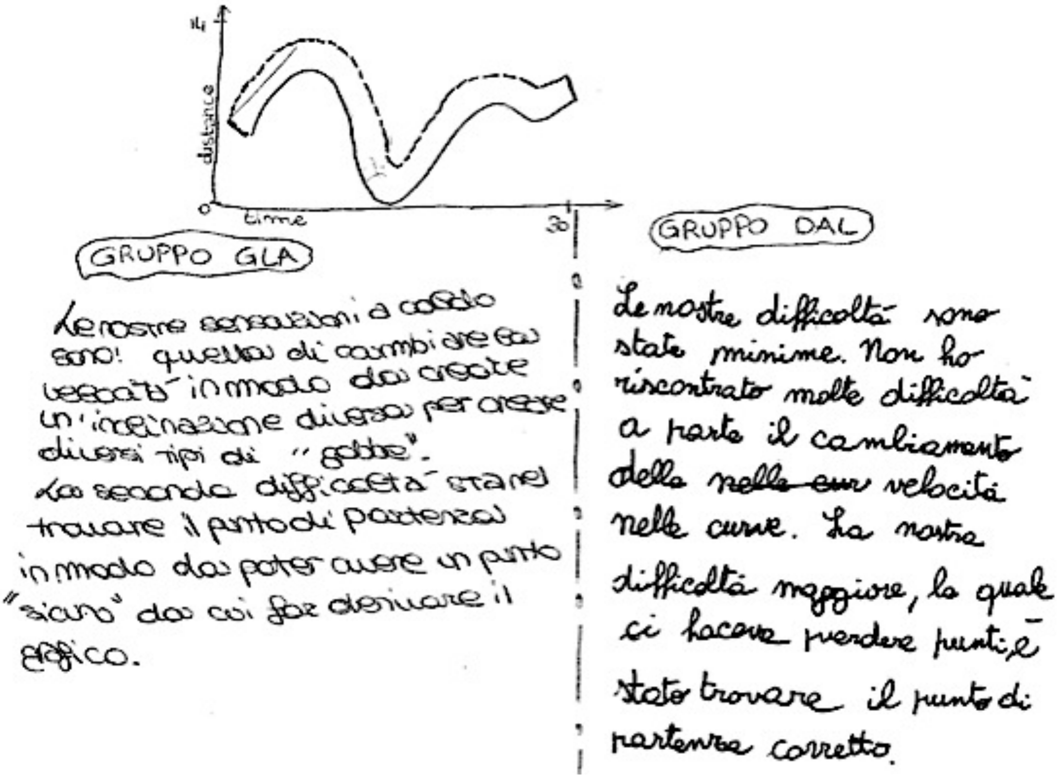


Figura 10. Parte del protocollo dei due gruppi

In realtà, non si tratta di una sfida semplice, infatti ciò che realmente è difficile in questa particolare modalità è non tanto il confronto con il compagno ma il confronto con il tempo, che scorre 'senza poter essere controllato' (vale a dire in modo uniforme). Questo è un aspetto cruciale, legato al concetto di funzione, per quanto riguarda il comportamento proprio della variabile indipendente che, nel caso della modellizzazione di un movimento, è il tempo. Non potendo controllare il tempo, la sfida consiste a tutti gli effetti nell'avere la velocità opportuna negli opportuni intervalli di tempo. Qui, il fatto che spazio e tempo siano entrambi condivisi, ossia che la sessione si svolga con due ragazzi che si muovono in contemporanea e nello stesso spazio di interazione, risulta un vantaggio per i due giocatori: non solo possono sfruttare il feedback che il software fornisce per il proprio movimento, ma anche quello del compagno! Ecco così che, ad esempio, dopo aver risposto alla domanda successiva della scheda, che chiedeva di dare *consigli* a un amico per competere in questa modalità e di elaborare *tattiche* per raggiungere il miglior punteggio possibile, trovandosi di nuovo a confronto con il software per testare la *strategia* formulata, l'interazione tra Emanuele e Oliver si trasforma. Nel riprovare a ottenere il grafico obiettivo, i ragazzi si muovono ora davanti al sensore in modo silenzioso e coordinato, ciascuno parallelamente all'altro e con i telecomandi tenuti vicini, nel tentativo di produrre lo stesso movimento, sfruttando il feedback della schermata grafica e i suggerimenti del compagno. Tutto fa pensare non più alla sfida iniziale che di per sé rende rivali i due studenti, bensì al loro diventare collaborativi nell'essere 'assieme' in movimento. Tanto è vero che, alla domanda di una delle autrici: "Ma non siete in competizione? ", Oliver risponde in modo deciso: "No, no, in collaborazione!".
Questo secondo episodio mostra la rilevanza delle dinamiche di gioco e di sfida che *WiiGraph* può mettere in campo per gli studenti, non solo in termini motivazionali e di interesse rispetto alle attività, ma piuttosto in relazione alla ricerca di strategie ottimali, che favoriscono la collaborazione

tra gli studenti coinvolti, andando oltre alla competizione stabilita tra loro sin dal principio e, in ogni caso, rendendoli competitivi nell'ottica di 'battere il software'.

Dove lo trovo il tempo?

Abbiamo già visto come sono stati affrontati temi delicati riguardanti questioni legate a tempo, movimento e velocità in alcune attività della sperimentazione. Ci interessa entrare nel dettaglio di un aspetto ulteriore che è emerso durante una discussione collettiva, legato al tempo in matematica.

Per fare questo, dobbiamo fare un 'salto temporale' nella sperimentazione fino al nono e ultimo incontro, che ha seguito la verifica scritta svolta individualmente nelle ore curricolari di lezione. In tale occasione, sono state riprese alcune domande del compito per affrontare nuovamente basilari riflessioni sulla differenza tra la legge oraria e la traiettoria di un movimento. Infatti, oltre ad aver lavorato con grafici spazio-tempo, così come è permesso dalla modalità *Line*, gli studenti si sono confrontati con la modalità *Versus*. In tale ambiente, è possibile lavorare con grafici che non siano prettamente grafici di funzioni: in particolare, il grafico della funzione $b(a)$, dove $a(t)$ e $b(t)$ sono, come in precedenza, le due funzioni della distanza dei telecomandi dal sensore nel tempo. Le due componenti spaziali così possono essere pensate come le componenti di un moto piano e permettono di avere una traiettoria, anche chiusa. I grafici che gli studenti possono sperimentare in questa nuova finestra grafica sono piuttosto diversi da quelli che in un primo momento *WiiGraph* aveva messo a loro disposizione. Esistono dunque relazioni e differenze che è bene mettere in luce e che riguardano appunto le distinzioni e i collegamenti esistenti tra i concetti di legge oraria di un movimento e la sua traiettoria. Ad esempio, una possibilità (esplorata nella sperimentazione) è quella di lavorare con *Versus* in modo da ottenere una circonferenza–per quanto complessa sia la sua realizzazione–che implica un opportuno movimento coordinato per i due studenti che impugnano un telecomando. Poi, cambiando modalità in *WiiGraph*, si possono osservare le funzioni sinusoidali che si ottengono invece nella modalità *Line* per gli stessi movimenti. Nell'episodio che qui presentiamo, è stato discusso proprio questo caso, che era anche oggetto della verifica.

Durante la discussione collettiva, su una lavagna, uno studente ha disegnato due piani cartesiani, ciascuno dei quali riproduceva gli assi presenti nelle due modalità di cui abbiamo discusso finora. Nel piano cartesiano con sole componenti spaziali era stata anche disegnata una circonferenza. Nell'altro, l'obiettivo era dunque quello di disegnare le leggi orarie associate a quella traiettoria. Dobbiamo osservare che, in *Versus*, dove le componenti sono solo spaziali (a e b), il tempo sembra 'essere sparito' perché non esplicitamente presente sugli assi cartesiani. Una delle due autrici (A), che sta guidando la discussione, pone quindi esplicitamente la domanda:
(nel dialogo riportato: G= Giulio, L= Lorenzo, F= Federico)

1. A: Che differenza c'è, da essere sulla circonferenza qui o essere qua? (*indica due punti distinti sulla circonferenza sulla lavagna*)
2. G: Le coordinate
3. A: O qui, o qua? (*indica altri punti, di nuovo sulla circonferenza*) Le coordinate, ok, chi l'ha detto? (*Giulio alza la mano*) ok, e quindi?
4. G: Quindi la distanza dal sensore di b e di A
5. A: Ok. E io posso essere contemporaneamente qui e qui [*indica i punti considerati all'inizio, sulla circonferenza*] quando produco la traiettoria? (*con il pugno, mima la circonferenza, parallelamente alla superficie della lavagna*) o quando sto
6. L: Contemporaneamente no
7. A: Contemporaneamente no. E quindi cosa cambia?
8. L: Cambia anche il momento in cui ci si trova
9. A: Ah, ok, quindi in questo grafico qua (*indica la lavagna*) in realtà il tempo c'è!
10. L: Indirettamente c'è, cioè non direttamente però dipende anche dal tempo
11. A: Ok, e che cos'è che dipende direttamente dal tempo invece?

12. L: L'altro, l'altro grafico (*indica il piano cartesiano con assi tempo-distanza, ruotando la mano destra verso destra*)
13. A: Sì certo, ma qui [sul piano cartesiano dove si trova la circonferenza], se c'entra il tempo, vuol dire che da qualche parte…
14. F: L'istante in cui punta, mette il puntino, perché ogni tot pubblica un puntino

Il breve estratto riportato descrive un passaggio della discussione in cui è esplicitato il ruolo del tempo, così come la sua influenza sul grafico di cui gli studenti stanno parlando. Infatti, in questo grafico tale grafico è proprio legato al fatto che all'istante t il software restituisce a schermo il punto di coordinate $(a(t)\ ,\ b(t))$ come mette in luce Federico dicendo "ogni tot pubblica un puntino" [14]. La frase di Federico è risolutiva e convince i compagni. Il ruolo giocato dal tempo emerge però gradatamente, in primo luogo è Giulio a osservare che la differenza tra due punti sulla circonferenza consiste in differenti coordinate per i due punti e quindi differenti distanze dei telecomandi dal sensore (in [2], [4]). Questa seconda osservazione riporta prepotentemente in gioco l'esperienza con il software, che è ripresa da Lorenzo, nell'osservare che i punti sulla circonferenza sono distinti in termini di distanza ma anche di tempo, perché "[c]ambia anche il momento in cui ci si trova" (in [8]), ovvero l'istante di tempo considerato gioca un ruolo centrale nella comprensione del grafico. In questa circostanza, gli studenti, guidati dalle domande dell'autrice che mirano a prestare attenzione al grafico, con molte espressioni e gesti deittici riferiti alla circonferenza e osservazioni provocatorie (come in [9], "quindi in questo grafico qua in realtà il tempo c'è!") hanno a che fare con la 'presenza invisibile' del tempo, cruciale passaggio per collegare la traiettoria alle leggi orarie a essa associate. In particolare, a segnare il passaggio è proprio l'avverbio "indirettamente" usato da Lorenzo, che ha riconosciuto che la presenza del tempo è invece 'esplicita' nell'"altro grafico" ([12]). Quest'ultimo episodio è significativo per i discorsi sul tempo sì, ma persino nell'ottica di una didattica di tipo elicoidale, poiché un tale approccio permette di iniziare a parlare di funzioni parametriche, gettando dei ponti per collegamenti interdisciplinari con la fisica, e nel contempo permette di introdurre le funzioni sinusoidali contestualmente a traiettorie circolari.

Conclusioni

Gli episodi che abbiamo presentato sopra mostrano solo alcune delle possibili esperienze che l'uso di *WiiGraph* rende progettabili e attuabili in classe allo scopo di introdurre significati per il concetto di funzione. Attraverso di essi abbiamo inoltre messo in luce alcuni degli aspetti cruciali che diviene possibile discutere con allievi di un primo anno di scuola secondaria di secondo grado. Tali aspetti sono tutti legati alla modellizzazione del movimento e allo studio per via principalmente grafica delle relazioni spazio-temporali associate. Essi riguardano ad esempio il ruolo delicato che il tempo assume come variabile indipendente nei grafici spazio-tempo o riguardo alle variazioni di spazio, ossia alla velocità, ma coinvolgono anche le diverse modalità di lavoro, sia collaborative sia competitive, con cui gli studenti possono cimentarsi in attività sempre nuove, ragionando sulle strategie opportune per il raggiungimento di un dato obiettivo. Non è infine banale, quando si ha a che fare con modelli legati a situazioni di movimento, anzi assume un posto di primo piano, la distinzione tra leggi orarie e traiettorie, la quale costringe ad affrontare nuovi discorsi legati al ruolo del tempo anche laddove questo sembri 'sparire'.

Nell'ambito del progetto di ricerca in cui si inseriscono le attività di cui abbiamo parlato in questo articolo, la centralità del movimento è uno degli aspetti principali dal punto di vista non soltanto pedagogico bensì anche cognitivo, secondo quegli studi di ricerca didattica che sostengono come la chinestesia e la propriocezione siano costitutive dei processi di pensiero in matematica. Proprio tale punto di partenza ha determinato la nostra scelta della console Wii e dei suoi dispositivi come risorsa didattica nell'ambito del progetto, forti del loro favorire il coinvolgimento corporeo di chi ne faccia uso. Ci rendiamo conto di non essere certamente state esaustive nel raccontare della nostra sperimentazione, ma confidiamo che questo possa essere almeno un inizio, foriero di interesse nei confronti di un percorso che riteniamo non solo estremamente utile ma anche profondamente affascinante.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Berthoz, A. (1997). *Le Sens du mouvement*. Paris: Odile Jacob.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. New York, NY: Cambridge University Press.

Locher J.L. (a cura di) (1978). *Il mondo di Escher*. Milano: Garzanti.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*. D.M. 15 marzo 2010. Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–135). Honolulu, HI: PME.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Radford, L. (2013). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141-162). New York, NY: Springer.

Seitz, J.A. (2000). The bodily basis of thought. *New Ideas in Psychology: An International Journal of Innovative Theory in Psychology, 18*(1), 23-40.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sheets-Johnstone, M. (2009). Animation: the fundamental, essential, and properly descriptive concept. *Continental Philosophy Review, 42*(3), 375-400.

Sinclair, N. (2014). Generations of research on new technologies in mathematics education. *Teaching Mathematics and Its Applications, 33*(3), 166-178.

Talmy, L. (1996). Fictive motion in language and 'ception'. In: P. Bloom, M. Peterson, L. Nadel & M. Garrett (Eds.), *Language and space*. Cambridge, MA: MIT Press.

Torino, 30 aprile 2015