

DA CASATI A GENTILE

MOMENTI DI STORIA DELL'INSEGNAMENTO SECONDARIO DELLA MATEMATICA IN ITALIA

a cura di

LIVIA GIACARDI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITÀ DI TORINO BIBLIOTECA G. PEANO N. Inv. <u>16502</u> Buono d'ordine n. <u>24 (200 f. - D)</u>



AGORÀ PUBLISHING

ERIKA LUCIANO¹

ARITMETICA E STORIA NEI LIBRI DI TESTO
DELLA SCUOLA DI PEANO

1. *Peano didatta e storico della matematica*

Il profondo interesse di Peano² per la storia e per la didattica della matematica, la sua salda padronanza delle lingue classiche e l'impegno a condurre l'insegnamento con metodo storico affiorano, oltre che dalla fitta rete di corrispondenze documentata dall'Archivio cuneese,³ nelle testimonianze di allievi e collaboratori.⁴

¹ Ricerca eseguita nell'ambito del Progetto MIUR "Storia delle scienze matematiche", Unità di Torino.

² Per le opere di G. Peano e per gli articoli comparsi sulle riviste da lui dirette, le fonti consultate si trovano nei cd-roms *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002 e *Le Riviste di Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, Torino, Dipartimento di Matematica, 2003. Gli scritti di Peano sono qui citati con la relativa sigla del cd-rom *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, consultabile nel sito www.dm.unito.it/collanacdrom/operaomnia/scritti.pdf.

³ Cfr. i carteggi di G. Peano con F. Amodeo, A. Borio, G. Bordiga, E. Bortolotti, U. Cassina, O. Chisini, C. Ciamberlini, M. Cipolla, F. Enriques, F. Gerbaldi, S. Pankurst, P. Quarra, G. Scorza, S. Timpanaro, E. Togliatti, G. Treccani, G. Vacca, E. Viglezio e L. Viriglio nel cd-rom *L'Archivio Giuseppe Peano*, a cura di C. S. Roero, N. Nervo, T. Armano, Torino, Dipartimento di Matematica, 2002.

⁴ M. Gliozzi e U. Cassina conservano vivo il ricordo delle conversazioni settimanali "di tutte le cose e di altro ancora" a casa di Peano.

L'impegno profuso da Peano nel campo della didattica e della storia della matematica si concretizza non solo nella sua lunga docenza all'Università di Torino, sulle cattedre di Calcolo Infinitesimale, di Analisi Superiore e, dal 1924-25, su quella di Matematiche Complementari, ma si esplica anche in alcuni ambiziosi progetti editoriali, promossi con entusiasmo: il *Formulario di Matematica*, apparso in cinque edizioni (1894-1908), la «Rivista di Matematica» [nel seguito abbreviata con la sigla «RdM»], di cui sono pubblicati otto volumi fra il 1891 e il 1906 e il *Dizionario di Matematica*.⁵ Si tratta di iniziative volte espressamente a favorire i contatti fra il mondo dell'Università e quello della scuola, creando "libere palestre" di discussione scientifica. L'invito *Ai lettori* posto in exergo al primo volume della «Rivista di Matematica» ribadisce, ad esempio, che essa dovrà ospitare, accanto ad articoli di ricerca matematica, interventi sulla storia e la didattica e recensioni di libri di testo.⁶

Cfr. U. Cassina, *Su l'opera filosofica e didattica di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo Scientifico, 1953, pp. 16-17 e M. Gliozzi, *Giuseppe Peano (27 agosto 1858 - 20 aprile 1932)*, «Archeion», 14, 1932, p. 255.

⁵ Presentato al Congresso della Mathesis di Livorno del 1901 il *Dizionario di matematica. Parte I, Logica Matematica* (1901h, pp. 1-8, 1901j, pp. 160-172) avrebbe dovuto costituire un palliativo per ovviare al problema della mancante uniformità del linguaggio matematico, spesso prolisso e disseminato di locuzioni oscure, fornendo agli insegnanti una guida per selezionare il lessico da utilizzare nelle spiegazioni. Nonostante l'entusiasmo con cui Peano e alcuni collaboratori, fra cui G. Vailati, perorano l'iniziativa, il progetto del *Dizionario* si arena poco dopo. Peano, tuttavia, continua per lungo tempo ad accarezzare l'idea di proseguirne l'edizione e, nel 1927, pubblica alcuni stralci di un *Vocabolario matematico* (cfr. G. Peano, *Vocabulario Mathematico*, 1927f, pp. 270-272) contenente un elenco di termini matematici, per ognuno dei quali è fornita la definizione, la storia e l'etimologia.

⁶ [G. Peano], *Ai lettori*, «RdM», 1, 1891, p. non numerata.

I contatti con il mondo della scuola, pur coltivati scrupolosamente da Peano fin dal 1891, si rinsaldano dopo il 1910, quando il matematico piemontese vive con amarezza lo scontro in Facoltà con alcuni esponenti della Scuola di Geometria Algebrica, che criticano il suo insegnamento dell'Analisi Superiore, basato sull'utilizzo del *Formulario* come principale libro di testo.⁷ Sollevato da questo incarico, Peano rivolge il suo impegno al mondo della scuola: intensifica la partecipazione alle attività della Mathesis, si rende disponibile come membro nelle commissioni per gli esami di maturità in varie sedi d'Italia e, nel 1914, istituisce con T. Boggio e M. Bottasso le *Conferenze Matematiche Torinesi*. Da questa iniziativa, che proseguirà con successo fino al 1924, traggono origine numerosi articoli didattici e divulgativi⁸ e la pubblicazione delle tavole numeriche.⁹

Le rapsodiche riflessioni di Peano sulla storia della matematica devono essere rintracciate in un vasto zibaldone di scritti, poco noti e talora, a torto, considerati occidui.¹⁰

⁷ Cfr. C. S. Roero, *Giuseppe Peano. Matematica, cultura e società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001, pp. 67-73 e C. S. Roero, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in R. Allio (a cura di), *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento*, Torino, Stamperia artistica nazionale, 2004, pp. 141-143.

⁸ Cfr. ad esempio T. Boggio, *Sui numeri immaginari*, «Bollettino Mathesis», 7, 1, 1915, pp. 42-44; R. Frisone, *Una teoria semplice dei logaritmi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 52, 1917, pp. 846-853; L. Viriglio, *I segni numerali romani*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 52, 1916, pp. 48-54 e *Le parole italiane di matematica derivate dal greco*, «Bollettino di Matematica», 16, 1918, pp. 25-41.

⁹ Cfr. G. Peano, Prefazione e note alle *Tavole numeriche*, 1918b, pp. 1-35.

¹⁰ T. Viola sottolinea invece l'importanza di queste note asserendo (T. Viola, *Giuseppe Peano, Opere scelte*, «Bollettino UMI», s. 3, 16,

Questo comprende i lavori di taglio logico-fondazionale, corredati da introduzioni storiche in cui Peano traccia incisivi affreschi sullo sviluppo del linguaggio ideografico, del calcolo geometrico e dell'analisi infinitesimale,¹¹ gli articoli sulle definizioni e sugli *Elementi* di Euclide, i volumi di dispense per i corsi di Calcolo Infinitesimale e due saggi, ampi ed articolati, in cui illustra le biografie scientifiche di L. Richeri, G. F. Peverone e G. Benedetti, enucleando i loro contributi più rilevanti.¹² Particolarmente interessante per comprendere il programma metodologico di Peano è invece il bel saggio del 1910 *Sui*

1961, pp. 351-352): «non c'è pagina di quelle note che non contenga qualcosa di fortemente originale ed interessante, e frequenti sono gli spunti addirittura divertenti e spiritosi [...]. In questo senso il loro interesse è sommo: segnaliamo per es. le note, già citate, in cui sono ridotti in formule alcuni libri degli *Elementi* d'Euclide, note che oggi e sempre potrebbero utilmente entrare in qualunque corso di matematiche complementari o di storia della matematica».

¹¹ Cfr. G. Peano, *Formules de logique mathématique*, 1900a, pp. 1-41; *Saggio di calcolo geometrico*, 1896d, pp. 952-975 e *Derivata e differenziale*, 1913a, pp. 47-69.

¹² Cfr. G. Peano, *Sui numeri irrazionali*, 1899c, pp. 126-140; *Le definizioni in matematica*, 1911d, pp. 49-70; *Le definizioni per astrazione*, 1915k, pp. 106-120; *Le definizioni in matematica*, 1921d, pp. 175-189; *Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules*, 1890d, pp. 73-74; *Sommario dei libri VII, VIII, IX di Euclide*, 1891d, pp. 10-12; *Sommario del libro X d'Euclide*, 1892c, pp. 7-11; *Sul libro V di Euclide*, 1906c, pp. 87-91; *Definitione de numeros irrationale secundo Euclide*, 1915e, pp. 31-35; *Sommario di Analisi Infinitesimale, Lezioni per il corso di integrazione dettate dal prof. G. Peano, Dispense 1-15*, 1919c, 126 p.; *Un precursore della Logica matematica*, 1894e, p. 120; *Gio. Francesco Peverone ed altri matematici piemontesi ai tempi di Emanuele Filiberto*, in *Studi pubblicati dalla Regia Università di Torino nel IV centenario della nascita di Emanuele Filiberto*, 1928f, pp. 181-189.

fondamenti dell'Analisi,¹³ nel quale egli rivendica il ruolo essenziale del rigore nell'insegnamento pre-universitario e sottolinea l'importanza di fornire agli alunni una chiave di interpretazione dei risultati matematici attraverso la loro contestualizzazione storica.

2. La storia della matematica e gli assunti epistemologici

Gli assunti epistemologici che orientano Peano e la sua Scuola nell'indagine storiografica si possono compendiare in alcune semplici linee guida.

La storia consente, in primo luogo, di fondare una disciplina matura come la matematica, mettendo in risalto le "ragioni storiche e logiche" delle verità matematiche e le connessioni fra le varie teorie, ed evidenziando le modalità con cui l'esigenza di rigore è stata gradualmente soddisfatta dal processo di formalizzazione.¹⁴ L'analisi storica alimenta dunque l'attività di ricerca e fornisce il quadro concettuale in cui inserire i più recenti risultati. Assumono perciò un preciso significato gli accurati studi condotti da Peano, G. Vacca e G. Vailati sulle questioni di priorità e sui cosiddetti "precursori",¹⁵ un termine che,

¹³ G. Peano, *Sui fondamenti dell'Analisi*, 1910a, pp. 31-37. Sulle concezioni didattiche di Peano cfr. anche G. Peano, *Contro gli esami*, 1912o; *Problemi pratici*, 1922f, pp. 88-89 e *Sui libri di testo per l'Aritmetica nelle scuole elementari*, 1924d, pp. 237-242.

¹⁴ Cfr. Viola, *Giuseppe Peano ...*, 1961 cit., pp. 352-355.

¹⁵ Cfr. Peano, *Un precursore ...*, 1894e cit., p. 120; G. Vacca, *Sui precursori della logica matematica*, «RdM», 6, 1899, pp. 121-125, 183-186 e M. Gliozzi, *Francesco Lana precursore de aviazione*, «Schola et Vita» (nel seguito abbreviata «SeV»), 5, 1930, pp. 369-369. Cfr. anche G. Peano, *Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica*, 1898e, pp. 83, 89: «Si

pur carico oggi di valenze negative, costituisce uno degli strumenti metodologici dell'indagine storiografica maggiormente apprezzati nella Scuola di Peano.

Questo particolare registro dell'attività storica, imperniato sulla considerazione del «valore universale ed eterno delle verità matematiche»,¹⁶ richiede lo studio critico comparato delle varie teorie, sulla base delle opere a stampa, dei carteggi e dei manoscritti di differenti civiltà. Diventa allora essenziale poter accedere alle fonti originali grazie a edizioni critiche accurate, che devono integrare la traduzione a fronte, il più possibile aderente al testo, con un dettagliato apparato di note storiche, chiose filologiche, riferimenti bibliografici, raffronti ad altre edizioni e rimandi alle interpretazioni moderne dei singoli risultati. Esempio, in tal senso, risulta l'edizione curata da Vacca del primo libro degli *Elementi* di Euclide,¹⁷ adottata più volte da Peano nel corso di *Matematiche Complementari*, in cui questi elementi sono sapientemente dosati, senza indulgere al commento erudito e sterile.¹⁸

badi poi che le indicazioni storiche contenute nel *Formulario* non pretendono punto di rimontare alla prima origine della Proposizione in questione; ma solo di indicare un Autore ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica»; «... la nota storica d'ogni Proposizione indica il più antico lavoro in cui chi propone la nota incontrò la Proposizione. Una stessa Proposizione può portare più indicazioni storiche, corrispondenti a civiltà diverse, ovvero ad Autori che successivamente la generalizzarono e la perfezionarono. Altrimenti ogni citazione annulla le posteriori».

¹⁶ Viola, *Giuseppe Peano ...*, 1961 cit., p. 353.

¹⁷ G. Vacca, *Euclide. Il primo libro degli Elementi*, Firenze, Sansoni, 1916.

¹⁸ Cfr. le lettere di G. Peano a G. Vacca del 30.11.1914; 24.1.1915; 21.11.1915; 31.1.1916; 9.2.1916; 15.3.1916; 27.4.1916 e del 1.11.1929

L'accuratezza delle trascrizioni e dell'analisi semantica, l'importanza attribuita alle ricostruzioni etimologiche e il legame con le ricerche fondazionali costituiscono dunque i criteri basilari che soggiacciono alle ricerche di storia della matematica condotte nella Scuola torinese. Il materiale raccolto confluisce, in larga misura, nell'apparato storico-critico del *Formulario*, curato per la maggior parte da Vacca¹⁹ e Vailati, che costituisce l'elemento catalizzatore della ricerca storiografica di Peano e dei suoi collaboratori e, nello stesso tempo, ne motiva i principi ispiratori:

Qu'est que c'est l'histoire d'une science? On peut penser que ce soit l'*exposé impartial* des idées scientifiques de ceux qui nous ont précédé. Mais on ne peut pas les exposer toutes. Si l'on veut les exposer toutes avec *impartialité* il faut les reproduire presque en entier. Ce travail *prépare* l'histoire, ce n'est pas encore l'*histoire*. La seule conception

in G. Osimo (a cura di), *Lettere di Giuseppe Peano a Giovanni Vacca*, Milano, Università Bocconi, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., n. 3, 1992, lettere nn. 109, 110, 111, 113, 114, 115, 116 e 127.

¹⁹A Vacca si devono, fra l'altro, le preziose indicazioni sui manoscritti inediti di Leibniz relativi all'aritmetica e alla logica, da lui raccolte ad Hannover nell'estate del 1899. Per quanto concerne la collaborazione fra Peano, Vacca e Vailati per la redazione delle note al *Formulario* cfr. ad es. la lettera di G. Peano a G. Vacca, Cavoretto 15.5.1894, in Osimo (a cura di), *Lettere ...*, 1992 cit., lettera n. 1, e la lettera di G. Vailati a G. Vacca, Siracusa 16.12.1899, in G. Lanaro (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971, p. 169: «Ho avuto il volume del *Formulario*, dove ho trovato una quantità di cose nuove, e lo sto leggendo appunto ora. Vedo con molto piacere che la parte *storicaviene* sempre più in *Vordergrund* e contribuisce ad accrescere non solo l'utilità, ma anche l'*attrattività* dell'opera, che va diventando sempre più classica e unica nel suo genere».

qui permette de *choisir* dans les travaux des anciens c'est de se mettre à *notre* point de vue. Faire l'histoire des vérités d'une science, c'est *chercher* et exposer dans le passé tous les essais qui ont produit successivement les vérités que nous connaissons. [...] L'histoire d'une science est alors l'exposition ordonnée des vérités de cette science suivie d'un nombre ou d'une *date*.²⁰

Se è vero che l'attenzione appare «severamente concentrata nella richiesta di confronto e studio diretto»²¹ delle fonti, occorre tuttavia rilevare che emerge, in relazione al *Formulario*, una concezione dell'indagine storiografica contraddistinta da una spiccata sensibilità per la ricchezza e la correttezza delle informazioni. Essa eserciterà una critica positiva nei confronti di un nutrito filone di studi che, seppure più aperto alla visione globale delle dinamiche del processo storico, non dimostrerà altrettanta precisione per i dettagli.

3. I risvolti didattici

Questi assunti epistemologici si traducono in proposte concrete per migliorare e rinnovare l'insegnamento della matematica, ai vari livelli dell'istruzione scolastica.²²

²⁰ G. Vacca a L. Couturat, [Genova, 12.1901], in P. Nastasi, A. Scimone (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca*, Palermo, Università Bocconi, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., n. 5, 1995, pp. 51-52.

²¹ S. Di Sieno, *Storia e didattica*, in S. Di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, 1998, p. 784.

²² Grazie all'opera di Vailati in seno alla Commissione Reale per l'insegnamento della Matematica trovano concreta attuazione alcune riflessioni di Peano sulla funzione didattica della storia della matematica per "spedantizzare" le esposizioni e sul valore educativo e formativo

Peano raccomanda infatti ai futuri insegnanti di non limitarsi a fornire un arido catalogo di formule, ma li invita a stimolare l'interesse degli alunni, integrando le esposizioni con notizie²³ che alimentino la loro riflessione sulla genesi, sugli sviluppi, sulle applicazioni e sulla fortuna dei singoli concetti.

L'importanza didattica della dimensione storica dell'insegnamento si traduce nella volontà di proporre agli studenti la lettura di alcune pagine significative di Euclide, Archimede o Apollonio - la cui conoscenza diretta è ritenuta «indispensabile [...] da parte di chi si proponga di spingersi innanzi e approfondire qualunque ordine di ricerche scientifiche»²⁴ - conducendone una critica analoga a quella che si effettua sui classici della letteratura e della filosofia.²⁵ Essa emerge, d'altro canto, nell'ambito

della conoscenza storica, come antidoto contro ogni forma di "agnosticismo" e di miopia intellettuale. A questo proposito cfr. F. Arzarello *La Scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica*, in *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Bologna, Pitagora, 1987, pp. 34-35 e L. Giacardi, *Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati e le reazioni dei matematici*, Associazione Subalpina Mathesis, *Conferenze e Seminari 2001-2002*, Torino, 2002, pp. 234, 239-240.

²³ Cfr. Cassina, *Su l'opera filosofica ...*, 1953 cit., pp. 13-14. La presenza di note storiche nei manuali di aritmetica è anche segnalata con apprezzamento nelle recensioni. Per esempio, G. Vivanti, recensendo il manuale di *Aritmetica razionale* di A. Sterza («RdM», 4, 1894, p. 141) sottolinea: «numerose note storico-biografiche [...] danno brevi ma esatte notizie sugli scienziati antichi e moderni menzionati nel testo. Tutto ciò dà al libro un carattere assai più scientifico e meno scolastico di quello della maggior parte delle opere congeneri».

²⁴ G. Vailati, *Idee Pedagogiche di H. G. Wells*, 1906, in M. Quaranta (a cura di), *Giovanni Vailati, Scritti*, Bologna, Forni, 1987, III, p. 294.

²⁵ G. Vacca, *Lo studio dei classici negli scritti matematici di Giuseppe Peano*, «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», XXII, 9-15.10.1932, II, 1933, pp. 97-99: «Mi diceva più di una volta

delle note sulla storia del formalismo matematico, un tema caro a Peano, da lui analizzato in numerosi articoli, volti ad illustrare l'“età”, le varianti dei segni, le trasformazioni subite nel corso dei secoli e i vantaggi o svantaggi che presenta la loro esecuzione tipografica.²⁶

Mirate a stimolare l'approfondimento individuale, le note storiche nei testi didattici devono anche suggerire letture e indicare gli strumenti con cui proseguire in modo autonomo l'indagine storiografica. Di qui discende l'accento posto sulla precisione nei rimandi²⁷ e l'attenzione con cui sono redatte le bibliografie, il più

che avrebbe insegnato volentieri il calcolo prendendo come libro di testo, la *Théorie des Fonctions Analytiques* di Lagrange. [...] Ricordo la prima parte del corso del 1903, iniziato seguendo i metodi della geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri. Ricordo le lezioni sulla teoria dei numeri irrazionali, illustrati col V Libro di Euclide, le lezioni sulla rettificazione delle curve, partendo dalla esposizione di Archimede. Ricordo infine la lettura delle pagine di Galileo e di Torricelli sulla caduta dei gravi, e le lezioni sul calcolo delle variazioni, che interpretavano in forma nuova le classiche memorie di Eulero e di Lagrange».

²⁶ Cfr. G. Peano, *Importanza dei simboli in matematica*, 1915j, pp. 165-173 e *Sulla forma dei segni di algebra*, 1920b, pp. 44-49. Peano intraprende questi studi nel 1891 e li prosegue fino alla morte, come si evince dalla lettura del manoscritto *Signos de Mathematica* (ms. 103063, 1929, cc. 1r-4r nel cd-rom *L'Archivio ...*, 2002 cit.). In questi appunti egli traccia un raffronto puntuale fra le notizie sulla storia del linguaggio matematico inserite nella quinta edizione del *Formulario* e quelle contenute nei volumi di F. Cajori, *A History of Mathematical Notations, vol. I, Notations in elementary mathematics*, London, The Open Court Comp., 1928 e di E. Löffler, *Ziffern und Ziffernsystem der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Leipzig, Teubner, 1912, mostrando di essere aggiornato sulle pubblicazioni più recenti.

²⁷ Cfr. ad es., in proposito, N. Festa, *Prefazione a Vacca, Euclide ...*, 1916 cit., p. III.

possibile vaste e aggiornate, poste in appendice al *Formulario* o inserite nei manuali. Un atteggiamento democratico, quest'ultimo, che emerge nelle riflessioni di Peano e di Vailati:

le citazioni del Formulario portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il passo citato;²⁸

mancano libri che [...] forniscano le opportune indicazioni bibliografiche, che [...] guidino nella scelta delle letture o nell'acquisto dei libri, mettendo in guardia, ad esempio, contro quelli fra essi che non valgono la pena di essere consultati o per essere troppo oscuri o troppo disordinati o troppo prolissi o troppo superficiali etc.²⁹

4. Aritmetica e storia nei libri di testo di Peano

Per analizzare l'impatto culturale delle riflessioni di Peano sul valore didattico della storia risulta particolarmente significativo l'esame dei libri di testo di aritmetica, una disciplina che, per i suoi risvolti fondazionali, è oggetto di studio intenso e metodico nella Scuola torinese di logica. Nonostante il nome di Peano sia universalmente noto per i contributi all'assiomatizzazione dell'aritmetica, la produzione del matematico cuneese in questo settore è ben più ampia, e comprende due manuali didattici: *l'Aritmetica generale e Algebra elementare* e i *Giochi di Aritmetica e problemi interessanti*,³⁰ alcune recensioni di testi di

²⁸ Peano, *Sul § 2 del Formulario ...*, 1898e cit., p. 83.

²⁹ Vailati, *Idee Pedagogiche ...*, 1906 cit., in M. Quaranta (a cura di), *Giovanni Vailati, Scritti*, 1987 cit., III, p. 294.

³⁰ G. Peano, *Aritmetica generale e Algebra elementare*, 1902b; *Giochi di Aritmetica e problemi interessanti*, 1924b.

aritmetica e di algebra³¹ e una caleidoscopica antologia di brevi articoli divulgativi, per lo più in *latino sine flexione*, su argomenti di aritmetica dilettevole e curiosa.³²

Le opinioni di Peano sui tratti salienti che deve possedere un buon manuale di aritmetica emergono efficacemente nel saggio *Sui fondamenti dell'Analisi* e nell'articolo *Sui libri di testo di aritmetica nelle scuole elementari*,³³ pubblicato nel 1924 a ridosso della relazione ministeriale sui libri di testo di aritmetica curata da L. Lombardo Radice e M. Cipolla. Peano stigmatizza con schietta ironia i difetti dei manuali in uso nelle scuole italiane, mentre usa parole di vivo apprezzamento per quello di F. Gerbaldi:

Per limitarci al nostro paese, il prof. Gerbaldi, ora all'Università di Pavia, pubblicò un'aritmetica ad uso delle scuole elementari, di cui l'edizione, che qui presento, è del 1888, che è tutta in simboli. Questa aritmetica, pubblicata per incarico del comune di Roma, dietro consiglio del compianto prof. Cerruti, fu adottata per molti anni, con ottimo successo. Essa rappresenta il rigore assoluto.³⁴

³¹ G. Peano, F. Giudice, *Domenico Amanzio, Elementi di algebra elementare*, 1892d, pp. 14-17; G. Peano a M. Nassò, Torino 12.10.1898 in *Nassò Dott. Marco, Algebra Elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici ...*, «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», s. 3, 1, 1898, pp. 531-532; *Alpinolo Natucci, Il concetto di numero e le sue estensioni*, 1923a, pp. 382-383; *Interessante libro super Calculo numerico*, 1928h, pp. 217-219.

³² Cfr. ad esempio G. Peano, *Calculo super Calendario*, 1922a, pp. 1-3, 6-7; *Quadrato magico*, 1926c, pp. 84-87; *Jocos de Arithmetica*, 1926d, pp. 166-173; *Historia et Reforma de Calendario*, 1927c, pp. 49-55; *Sulla riforma del Calendario*, 1927d, pp. 566-568; *Historia de numeros*, 1928e, pp. 97-100; *Jocos de Arithmetica*, 1931b, pp. 50-51.

³³ Peano, *Sui fondamenti ...*, 1910a cit., pp. 31-37 e *Sui libri di testo ...*, 1924d cit., pp. 237-242.

³⁴ Peano, *Sui fondamenti ...*, 1910a cit., p. 35. Cfr. anche Peano, *Sul § 2 del Formulario ...*, 1898e cit., p. 86 e *Sui libri di testo ...*, 1924d cit., p. 238.

Le Aritmetiche devono essere – secondo Peano – “razionali” e “pratiche”: occorre allora soppiantare le trattazioni farraginose e dogmatiche,³⁵ imperniate sul verbalismo e sull'apprendimento mnemonico, con spiegazioni semplici e chiare, ed accentuare i risvolti applicativi dell'insegnamento. A tal scopo, è utile proporre esempi e quesiti “sensati” sia nell'impostazione che nel risultato, che forniscano gli strumenti matematici necessari per affrontare i problemi della vita quotidiana. È possibile, ad esempio, esercitare gli alunni nelle addizioni e nelle sottrazioni facendoli “viaggiare mentalmente” fra le città e i continenti o abituarli a interpretare i dati statistici.³⁶

Peano non si limita tuttavia a condurre una critica astratta dei libri di testo e, a partire dal 1898, si mostra intenzionato a impegnarsi in prima persona nella redazione di un manuale di aritmetica per gli insegnanti della scuola secondaria, modellato sul *Formulario*³⁷ e contraddistinto dalla medesima impostazione:

³⁵ Cfr. Peano, *Sui libri di testo ...*, 1924d cit., pp. 237-238: «I trattati di Aritmetica variarono di forma ogni secolo. Or sono cinquant'anni si insegnava l'aritmetica sotto forma di catechismo. Il maestro domanda “che cosa è il numero” cui risponde quale eco la voce dolente dell'allievo: “il numero è la riunione di più unità”. Ancora uno dei libri oggi sottoposti al giudizio della commissione è per domande e risposte. Ma poi si soppressero le domande conservando le risposte».

³⁶ Cfr. a questo proposito Peano, *Problemi pratici*, 1922f cit., p. 88 e *Sui libri di testo ...*, 1924d cit., pp. 239-240. Cfr. anche R. Bettazzi, *Le applicazioni della matematica*, «Bollettino della Mathesis», 8, 3, 1903-04, pp. 40-44.

³⁷ In questo stesso periodo, fra l'altro, Peano decide di introdurre il *Formulario* come libro di testo per le lezioni universitarie. Cfr. Peano, *Sul § 2 del Formulario ...*, 1898e cit., p. 86: «Del resto quest'anno mi sono deciso ad introdurre il nuovo Formulario nell'insegnamento superiore, con ottimi risultati. Ho visto gli allievi interessarsi vivamente alla precisione e chiarezza della scrittura ideografica, apprendendola assai più facilmente di quanto mi sarei immaginato».

Il Formulario d'Aritmetica, nello stato attuale, contiene già l'analisi completa delle idee d'Aritmetica. [...] Questa analisi che io ho fatta in massima parte nel citato lavoro del 1889, è ciò che differenzia nella forma e nella sostanza questo Formulario dagli altri libri. Alcuni di questi studii già furono introdotti in trattati scolastici, quali: C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica*, Torino 1898; P. Gazzaniga, *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*,³⁸ Padova, a. 1897; M. Nassò, *Algebra elementare*, Torino 1898. [...] Ma si può tener conto di questi studii anche nell'insegnamento secondario ed elementare, col sopprimere tutte quelle definizioni di numero, e di somma, che sono pure parole [...]. Da alcuni anni meditavo come si potrebbe compilare un libro di Aritmetica elementare, che seguisse fedelmente il mio lavoro del 1889 [...]. Il Formul. §2 potrebbe forse essere usato nelle scuole liceali come libro di consultazione, quali tavole di logaritmi.³⁹

Il progetto di applicare le teorie logiche, ormai sufficientemente mature, per redigere un manuale di aritmetica

³⁸ Risulta molto interessante l'introduzione alla terza edizione di questo manuale, dove l'autore giustifica la sua volontà di riversare nell'insegnamento secondario le ricerche sui fondamenti scrivendo (P. Gazzaniga, *Libro di aritmetica e di algebra elementare*, 3ª ed., Verona, Drucker, 1900, pp. 1, 2): «Riducendo nell'Aritm. i postulati al minimo numero (cosa che in un primo tentativo, come a suo luogo dichiarai, non mi era sembrato opportuno di fare) ho seguito l'ordine di idee dei valorosi cultori del Calcolo logico, al quale devesi il progresso che nei suoi principî fondamentali ha fatto l'insegnamento della matematica elementare in questi ultimi anni. [...] Il metodo in esso seguito, lo riconosco, non è di quelli cosiddetti facili; lo ritengo però particolarmente opportuno per l'insegnamento nei licei, dove, più che negli istituti tecnici, la matematica elementare ha principalmente l'elevatissimo incarico di abituare la mente al ragionamento rigoroso e profondo».

³⁹ Peano, *Sul § 2 del Formulario ...*, 1898e cit., pp. 83-84, 86.

e d'algebra si concretizza quattro anni più tardi, con la pubblicazione, nel 1902, dell'*Aritmetica generale ed Algebra elementare*. Nonostante Peano sottolinei l'aderenza di questo testo ai contenuti previsti nei programmi ministeriali, suggerendo anche possibili percorsi di lettura,⁴⁰ l'*Aritmetica* si configura come libro di rottura nel panorama editoriale per l'uso massiccio del simbolismo, per l'estrema condensazione del testo e per la disposizione dei contenuti. Un elemento di sicura originalità consiste nel ricco apparato di note storico-critiche che «vagliate alla stregua di una critica dotta e rigorosa» costituiscono, come sottolinea Pieri, un «nuovo e singolar pregio dell'opera».⁴¹ Mutuate per lo più dal *Formulario*, le note includono indicazioni bibliografiche puntuali, rimandi alle varie edizioni critiche disponibili dei classici, scoli semantiche e innumerevoli citazioni riportate trascrivendo i passi in lingua originale.⁴² Fra queste meritano di essere citate, perché particolarmente documentate, quella sui

⁴⁰ Cfr. Peano, *Aritmetica ...*, 1902b cit., pp. VI-VII. Per quanto concerne l'addizione Peano scrive ad esempio (p. VI): «Addizione. §+ (p. 8) le prime tre righe. Si tralascino le Prop 1. Si leggano le Prop 2, 3-1-6 (p. 9-12), tralasciando le dimostrazioni. Per uno studio più profondo, si legga tutto il §+ come è scritto».

⁴¹ Cfr. M. Pieri, *G. Peano, Aritmetica generale ed algebra elementare*, «Periodico di Matematica», s. 2, 5, 1903, p. 295.

⁴² Cfr. ad esempio, Peano, *Aritmetica ...*, 1902b cit., p. 33: « $N_1 \supset N_1^2 + N_0^2 + N_0^2 + N_0^2$ {Bachet a. 1621 p. 241: "Omnem autem numerum vel quadratum esse vel ex duobus aut tribus aut etiam quatuor quadratis componi, satis experiendo deprehendis"}»; pp. 50-51: «Questo modo di introdurre i numeri negativi trovasi in: Mac Laurin a. 1748 p. 6: "a Quantity that is to be added is called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative." Cauchy, a. 1821, p. 333: "... on acquiert l'idée de quantité (positive ou négative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant

sistemi di numerazione,⁴³ con interessanti spunti sulla storia dei regoli di Nepero e dell'aritmetica binaria,⁴⁴ e quelle relative alla storia dei logaritmi, delle progressioni aritmetiche e delle unità di misura.⁴⁵

L'uso costante del linguaggio ideografico in sede didattica desta – come è prevedibile – la perplessità di molti insegnanti che fraintendono la natura di un testo che, rivolgendosi non all'allievo, ma al docente, richiede a quest'ultimo di operare una costante e impegnativa attività di «mediazione epistemologico-cognitiva».⁴⁶ Incaricato di curarne la recensione per il «Periodico di Matematica», Pieri individua opportunamente le cause della sua tiepida ricezione da parte del mondo della scuola,⁴⁷ concludendo:

servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce. Pour indiquer cette destination, on représente les grandeurs qui doivent servir d'accroissements par des nombres précédés du signe +, et les grandeurs qui doivent servir de diminutions pas des nombres précédés du signe –.»; p. 63: «L'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ è detta da Euclide "analogia", che si potrebbe tradurre in "eguaglianza di ragioni", e che fu tradotto in "proporzione"».

⁴³ Peano aveva tratteggiato la storia della diadica nella nota *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, 1898m, pp. 47-55.

⁴⁴ Cfr. E. Luciano, C. S. Roero, *La macchina stenografica di Giuseppe Peano*, «Le culture della Tecnica (AMMA)», 15, 2004, pp. 5-28; E. Luciano, C. S. Roero, *Dagli esagrammi di Fu-hi all'aritmetica binaria: Leibniz e Peano*, Associazione Subalpina Mathesis, *Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, 2004, pp. 49-69.

⁴⁵ Cfr. Peano, *Aritmetica ...*, 1902b cit., pp. 20-21, 103, 107-108, 111-113 e 138-141.

⁴⁶ Cfr. P. Freguglia, *Giuseppe Peano e la didattica della matematica*, in *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis, Centenario 1895-1995"*, Una presenza nella cultura e nell'insegnamento, Roma, Palombi, 1996, p. 153.

⁴⁷ Cfr. anche le lettere di G. Vacca a G. Vailati, Genova [30.9.1902-6.11.1902], Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati;

Non c'è troppo da illudersi sull'accoglienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico: ché son troppo noti i motivi, tutti umanissimi e spiegabilissimi, i quali hanno fatto in ogni tempo e faranno sempre ostacolo a certe novità, che toccano la più gelosa delle nostre proprietà intellettuali.⁴⁸

Enrico Nannei esprime invece senza reticenze la sua preoccupazione che il portare nella scuola le discussioni sui fondamenti inaridisca l'insegnamento della matematica e induca la disaffezione degli alunni più giovani che, pur avendo già sviluppato l'attitudine deduttiva, non possono ancora aver coltivato il gusto per la raffinatezza della critica logica.⁴⁹

Il manuale di Peano è tuttavia apprezzato da alcuni autorevoli studiosi: viene citato nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* e nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*⁵⁰ e recensito favorevolmente al-

G. Vailati a G. Vacca, Como 7.11.1902 e G. Vacca a G. Vailati, [Como 8.11.1902] in Lanaro (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario ...*, 1971 cit., pp. 213, 214.

⁴⁸ Pieri, *G. Peano, Aritmetica ...*, 1903 cit., p. 293.

⁴⁹ E. Nannei, *Studiare le cause del poco profitto, che fanno, nello studio della matematica, i giovani delle nostre scuole medie, e proporre i mezzi per ovviarvi* in *Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle scuole medie italiane*, Napoli 14-17.9.1903, Torino, Artigianelli, 1904, pp. 20-24.

⁵⁰ Cfr. L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Milano, Hoepli, 1962, I.1, p. 901; III.2, pp. 95, 124, 126, 145, 153, 173 ed F. Enriques (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 3ª ed., Bologna, Zanichelli, I, 1924-27, p. 286. Particolarmente significativo risulta, nel contesto italiano, l'intervento di G. Sforza, *L'aritmetica generale ed algebra elementare di G. Peano come libro di testo nelle scuole secondarie superiori*, «Bollettino della Mathesis», 1904-05, pp. 30-34 (cit. a p. 30): «Ho adottato quest'anno nella 1ª classe dell'Istituto tecnico la predetta opera insigne, soprattutto perché ho ritenuto estremamente didattica l'ideografia logico-matematica,

l'estero.⁵¹ In Italia è soprattutto S. Catania a raccogliere l'invito di Peano a mettere a frutto della didattica i progressi della logica. Convinto dell'efficacia didattica di questo nuovo strumento, Catania pubblica infatti, nel 1904, un'*Aritmetica* destinata a "volgarizzare" quella di Peano. Il mondo accademico e quello della scuola si scindono in due compagini distinte al suo apparire: accolto con favore e giudicato positivamente da Peano e dalla sua Scuola – in particolare da C. Burali-Forti e M. Pieri⁵² – il libro di Catania riceve invece una decisa

con la quale si ottiene brevità, precisione e possibilità di buone ripetizioni anche da parte di alunni meno che mediocri» e soggiunge in nota: «Il prof. Catania (*Arit. raz.*, 1904) e il prof. Leoncini (*Le operaz. con i num. relativi*, 1904) pure dichiarando che si ispirano ai metodi del Peano, rigettano l'ideografia logico-matematica ritenendola un impaccio didattico; io credo invece che così essi rinuncino alla parte *didatticamente* migliore del libro del Peano».

⁵¹ Cfr. la recensione anonima apparsa sulla rivista belga «Mathesis»: *Aritmetica generale ed algebra elementare di G. Peano ...*, «Mathesis», s. 3, 3, 1903, p. 48.

⁵² C. Burali-Forti, *S. Catania, Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori*, «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche», 7, 1904, p. 91 e M. Pieri, *S. Catania, Aritmetica razionale per le scuole secondarie superiori*, «Periodico di matematica», s. 3, 2, 1905, pp. 47-48. Pieri osserva (p. 47): «Nel fascicolo marzo-aprile 1903 scorrendo sull'*Aritmetica generale ed Algebra elementare* di G. Peano (Torino, Paravia, 1902) auguravo che la bontà di questo trattato [...] inducesse qualche volenteroso docente a sperimentarlo per sé e per la scuola. Un tal desiderio è oggi realizzato in gran parte, mercè l'operetta, che l'egregio prof. S. Catania ha testé pubblicata [...]. Il prof. Catania ha estratto dal libro del prof. Peano (il quale di buon grado assentiva ed incoraggiava) le parti meno elevate dell'aritmetica - quelle insomma, che più interessano la scuola media - e le ha riprodotte fedelmente con la scrittura ordinaria (salvo qualche leggera e inevitabile modificazione) studiandosi di conservare al possibile il loro nativo sapore».

stroncatura da parte di quei settori della cultura italiana che reputavano dannoso, se non pericoloso, introdurre le istanze del rigore logico nell'insegnamento secondario. Ne scaturiscono due vivaci polemiche, che oppongono Catania a G. Castelnuovo e G. Scorza,⁵³ a loro volta inestricabilmente intrecciate al più ampio dibattito sul ruolo del rigore e dell'intuizione che, fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, è oggetto di intense discussioni in Europa.⁵⁴

⁵³ Cfr. C. Mammana, R. Tazzioli, *The mathematical School in Catania at the beginning of the 20th Century and its Influence on Didactics*, in *Proceedings, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique «De la maternelle à l'université»*, U.C.L. Louvain-la-Neuve, 15-18.7.1999, Louvain, 2001, pp. 223-232.

⁵⁴ Il reale oggetto del contendere è un determinato metodo di fare ricerca matematica, che si riflette in una pratica di insegnamento elementare e secondario che mira alla «chiarificazione dei concetti elementari fondamentali delle varie discipline matematiche mediante una adeguata teoria delle definizioni matematiche, con l'utilizzo della tecnica dei controesempi» (Freguglia, *Giuseppe Peano ...*, 1996 cit., p. 153). Come ribadiscono in più circostanze Peano e i sostenitori del metodo assiomatico, non si vuole bandire l'intuizione dall'insegnamento dell'aritmetica, né si mira a impedire l'uso di quegli strumenti – l'abaco e i regoli calcolatori, per esempio – che aiutano i fanciulli ad acquisire familiarità con il concetto di numero. D'altra parte, tuttavia, osservano Catania e Padoa, non è opportuno illudere gli alunni presentando loro finte dimostrazioni, che celano dietro il paravento dell'intuizione l'ignoranza del maestro e l'imprecisione del libro di testo. Converrà quindi, se l'argomento è troppo ostico, omettere alcune dimostrazioni, rinviando a un successivo approfondimento nel corso di studi superiore. Cfr. S. Catania, *Sui metodi d'insegnamento della matematica nelle Scuole medie*, «Bollettino della Mathesis», 4, 1912, pp. 142-143; A. Padoa, *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, «Bollettino della Mathesis», 9, 1910, pp. 86-88 ed anche M. De Franchis, *Geometria elementare*, Milano, Sandron, 1909, pp. V-VI.

Se l'insegnamento dell'aritmetica deve stimolare, in primo luogo, l'intelligenza creativa e critica, non stupisce che Peano attribuisca grande importanza agli indovinelli e ai rompicapi.⁵⁵ Seppure previsti dai programmi per le scuole elementari, i giochi matematici - che addestrano la sagacia e catturano l'attenzione dei fanciulli - sono troppo poco diffusi, secondo Peano, nei libri di testo: di qui nasce la sua decisione di pubblicare, nel 1924, una rassegna di *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. In questo libretto, lodato da L. Berzolari e più volte citato nella sua *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Peano illustra i quadrati e i triangoli magici, le tavole misteriose e i problemi capziosi e, ancora, le operazioni curiose come la moltiplicazione fulminea, i giochi sui numeri sferici, i problemi sul calendario e l'aritmetica parlata. Il libro si presenta atipico, non solo nella forma, ma anche nei contenuti: pur trattandosi di un testo divulgativo per gli insegnanti della scuola elementare, Peano non rinuncia infatti a inserire interessanti spunti di storia della matematica, dichiarando spesso le fonti antiche e moderne da cui sono tratti i vari giochi e, in tal modo, fornisce un compendio sintetico di quella che oggi definiamo la storia della matematica dilettevole e curiosa. A fianco dei rimandi biografici e bibliografici alle opere di numerosi autori, fra cui Teone di Smirne, S. Boezio, L. Fibonacci, N. Tartaglia, Ibn Albanna, C. Bachet, W. Oughtred e J. Houzeau, la rassegna comprende note più estese, che descrivono la storia del sistema di numerazione romano,

⁵⁵ L'efficacia didattica di variare l'esposizione proponendo giochi, sofismi e paradossi è sottolineata anche da A. Padoa nella relazione *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie* in *Atti del II Congresso della "Mathesis"*, Società Italiana di Matematica, Padova, 20-23.9.1909, Padova, Premiata Società Cooperativa, 1909, p. 6.

il funzionamento dell'abaco, i regoli di Nepero e il calendario.⁵⁶

5. Storia e divulgazione

L'interesse di Peano per la storia e la didattica della matematica è condiviso da allievi e collaboratori della sua Scuola. Fra questi, G. Vacca, G. Vailati, U. Cassina e M. Gliozzi⁵⁷ si prodigano per diffondere la storia della matematica e delle scienze tenendo corsi universitari, redigendo articoli e saggi e presentando comunicazioni in numerosi congressi di storia e filosofia delle scienze.

⁵⁶ Cfr. Peano, *Giochi di Aritmetica ...*, 1924b cit., pp. 18, 19-20, 29-30 e 33-51.

⁵⁷ Vacca tiene corsi di Storia delle Matematiche all'Università di Roma dal 1923 al 1936 ed è invitato a redigere per l'*Enciclopedia delle matematiche elementari* il capitolo dedicato alla Storia della Matematica. Vailati promuove l'insegnamento della storia della scienza tenendo dal 1896 al 1899 un corso libero di Storia della Meccanica all'Università di Torino. Cassina cura la pubblicazione dei *Selecta* di Peano nel 1959 e la riedizione del *Formulario Mathematico* nel 1961 e, nel suo insegnamento sulla cattedra di Matematiche Complementari all'Università di Milano, riflette l'impostazione storica e fondazionale di Peano. M. Gliozzi collabora alla redazione della rivista «Schola et Vita» pubblicandovi articoli di divulgazione della fisica e pubblicherà numerosi articoli e libri di storia della fisica. Cfr. E. Carruccio, *Giovanni Vacca, matematico, storico e filosofo della scienza*, «Bollettino UMI», s. 3, 8, 1953, pp. 448-456; F. Skof, *Ugo Cassina* in (a cura di C. S. Roero), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, Tomo II, *I docenti*, Torino, Deputazione Sub. di Storia Patria, 1999, pp. 595-597; C. S. Roero, S. Caparrini, *Mario Gliozzi (1899-1977) storico della scienza*, in *Due studiosi laici: Mario e Giuliano Gliozzi (in occasione dei 100 anni della Fnism)*, Torino, F. Antonicelli, 2003, pp. 11-22.

L'entourage di Peano include però, accanto a questi storici professionisti, noti in ambito nazionale e internazionale, anche numerose studentesse, insegnanti ed assistenti nel corso di Matematiche Complementari, fra cui Piera Chinaglia, Clementina Ferrero, Tina Pizzardo, Paolina Quarra e Luisa Viriglio.⁵⁸ Sotto la direzione di Peano queste ultime discutono tesi⁵⁹ e sottotesi di laurea e pubblicano lavori di carattere storico, didattico, fondazionale e divulgativo.⁶⁰ Seppure di esile originalità, queste note risultano interessanti per ricostruire l'insegnamento di Peano sulla cattedra di Matematiche Complementari. Ad esempio emerge da esse un'atten-

⁵⁸ Cfr. Roero, *Peano e l'altra metà del cielo*, in (a cura di C. S. Roero) *Giuseppe Peano ...*, 2001 cit., pp. 60-77.

⁵⁹ In quest'ambito occorre segnalare, all'Università di Torino, la tesi di laurea di F. Audisio, *Il numero π* , del luglio 1930. Si tratta della prima dissertazione in cui è compiuta un'analisi storico-critica dei contributi aritmetici, geometrici ed analitici concernenti π . Dalla tesi traggono origine gli articoli *Calcolo di π colla serie di Leibniz*, «Atti della R. Accademia dei Lincei», s. 6, Rendiconti, 11, 1930, pp. 1077-1080; *Calcolo di π in Archimede*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 65, 1930, pp. 101-108; *Il numero π* , «Periodico di Matematiche», s. 4, 3, 1931, pp. 11-42 e *Ancora sul numero π* , «Periodico di Matematiche», s. 4, 20, 1931, pp. 149-150. L'ultima nota è redatta in risposta ad un intervento critico di E. Bortolotti sulla determinazione di $\sqrt{3}$ di Archimede.

⁶⁰ Cfr. P. Chinaglia, *Jocos de shah et progressione geometrico*, «Accademia pro Interlingua» (nel seguito abbreviata con la sigla «ApI»), 1926, pp. 45-48; *Super uno definitione de Mathematica*, «ApI», 1926, pp. 94-95; *Numeros*, «ApI», 1927, pp. 102-104; C. Ferrero, *Curiositate de numeros*, «ApI», 1927, pp. 83-85; T. Pizzardo, *Quaestiones de arithmetica in Beda*, «ApI», 1926, pp. 44-45; P. Quarra, *Calcolo delle parentesi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 53, 1917-18, pp. 1044-1047; *Relatione inter medio arithmetico et geometrico*, «Periodico di Matematica», s. 3, 15, 1915, pp. 81-86.

zione costante per la storia dell'aritmetica, che si traduce nella riscoperta di testi di ricreazioni matematiche - fra cui quelli di Beda e di C. Bachet de Meziriac - dai quali attingere giochi e rompicapi per rendere più gradevole l'apprendimento.

6. I manuali di aritmetica nella Scuola di Peano

La produzione di libri di aritmetica per la scuola elementare e secondaria da parte di allievi e collaboratori di Peano è particolarmente vasta e l'impegno nella redazione di questi volumi testimonia la volontà di agire concretamente nei progetti ministeriali di riforma dell'insegnamento della matematica.⁶¹ L'obiettivo di questi testi è dichiaratamente quello di utilizzare gli studi teorici sull'assiomatizzazione dell'aritmetica per evidenziare le lacune, le inesattezze linguistiche e gli errori di concetto e di metodo in numerosi manuali, italiani ed esteri, adottati nelle scuole italiane.⁶² Intenzionati a favorire l'affer-

⁶¹ Cfr. Appendice, pp. 302-303.

⁶² Peano e i suoi collaboratori mostrano di tenersi costantemente aggiornati sui manuali di aritmetica, e sovente li recensiscono. Cfr. ad esempio R. Bettazzi, *Dott. Alpinolo Natucci, Compendio di Aritmetica pratica per le scuole medie*, «Periodico di Matematica», s. 3, 7, 1909, pp. 43-44; C. Ciamberlini, *Aritmetica e Geometria per le scuole complementari*, «Periodico di Matematica», s. 3, 8, 1910 p. 48; C. Burali-Forti, *S. Catania, Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori*, «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche», 7, 1904, p. 91; *Osservazioni al "Trattato di Aritmetica di G. Bertrand"*, «RdM», 1, 1891, pp. 85-87; M. Nassò, *Rodolfo Bettazzi, Aritmetica Razionale ad uso dei Ginnasi*, «Periodico di Matematica», s. 2, 5, 1903, pp. 68-69; A. Padoa, *Note critiche al libro di aritmetica e di algebra elementare di Paolo Gazzaniga*, Pinerolo, Chiantore-Mascarelli, 1899, 17 p.; M. Pieri, *S. Catania, Aritmetica razionale per le*

marsi di una nuova concezione didattica, gli esponenti della Scuola torinese di logica ed alcuni collaboratori “esterni”, fra cui Corrado Ciamberlini e Alpinolo Natucci, trasfondono in essi l’esigenza di rigore nelle esposizioni, le riflessioni sul linguaggio e l’attenzione per il valore operativo delle nozioni, redigendo con particolare cura i paragrafi sul concetto di numero e sulle tecniche dimostrative per ricorrenza.⁶³

Un documento importante per comprendere come gli autori intendano dare attuazione concreta a queste linee guida è fornito dalle “norme per l’insegnamento” che corredano l’*Aritmetica pratica* di C. Burali-Forti e A. Ramorino, un testo estremamente valido dal punto di vista pedagogico, rivisto e aggiornato più volte nel corso degli anni e proposto in numerosi ordini e gradi di scuole. Gli autori focalizzano qui le motivazioni che li hanno guidati nell’esposizione e suggeriscono le strategie più opportune da adottare nella pratica dell’insegnamento. Burali-Forti e Ramorino commentano, fra l’altro, le scelte di illustrare il sistema di numerazione decimale,

scuole secondarie superiori, «Periodico di Matematica», s. 3, 2, 1905, pp. 47-48; G. Vivanti, *Prof. A. Sterza, Aritmetica razionale per il ginnasio superiore*, «RdM», 4, 1894, pp. 141-142.

⁶³ Cfr. ad esempio C. Burali-Forti, A. Ramorino, *Aritmetica e norme...*, Torino, Gallizio, 1898, pp. 1-10. Gli autori analizzano in primo luogo i termini utilizzati per definire il concetto di numero, escludono quelli superflui, e giungono alla sua definizione per postulati, mediante i termini di “numero”, di “unità” e di “successivo”. Commentano i singoli postulati dal punto di vista storico, illustrando le motivazioni che hanno indotto Peano a sostituire lo zero all’uno come origine del sistema dei naturali e giustificano l’ordine nel quale sono inseriti i postulati. Esortano, infine, a introdurre l’induzione, fino ad allora appannaggio della matematica universitaria, come tecnica dimostrativa nelle scuole elementari.

dopo aver dimostrato le principali proprietà dei numeri interi, e non viceversa; di non far precedere il concetto di numero intero da quello di grandezza; e di introdurre i numeri irrazionali, sfruttando il concetto di limite superiore di una classe di razionali, in luogo del metodo delle classi contigue.⁶⁴ Del resto, gli allievi della Scuola di Peano intendono agire anche sulla formazione degli insegnanti, sulle strutture a supporto dell’attività didattica e sull’organizzazione del lavoro scolastico. A questo proposito, gli eserciziari sono ritenuti uno dei principali parametri di valutazione di un testo di aritmetica. Per agevolare la pratica di calcolo degli alunni e coltivare la loro capacità a misurarsi con problemi concreti, gli esempi e gli esercizi devono essere opportunamente strutturati in modo da consolidare le conoscenze teoriche acquisite, stimolare l’allunno a trovare varianti e generalizzazioni di teoremi dimostrati, a individuare controesempi e non richiedere la semplice applicazione di una formula. Il ruolo degli eserciziari è determinante nei manuali per le Scuole Normali. Rivolgendosi infatti ad *allievi* di un istituto destinati a diventare *maestri*, Burali-Forti e Ramorino scelgono di calibrare gli esercizi della loro *Aritmetica* perseguendo un rigido “dualismo di fini”: gli esercizi sono suddivisi in Teoremi e Problemi. I primi servono

⁶⁴ Il manuale di Burali-Forti e Ramorino riceve una recensione particolarmente severa da parte di C. Pacchiani. Quest’ultimo si scaglia con veemenza proprio sulla scelta di introdurre i numeri astratti indipendentemente dalle grandezze che possono rappresentare. Cfr. C. Pacchiani, C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica e norme per l’insegnamento nelle scuole elementari*, «Periodico di Matematica», 13, 1898, pp. 201-202 e la risposta di C. Burali-Forti, C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica e norme per l’insegnamento nelle scuole elementari*, «Periodico di Matematica», 13, 1898, pp. 230-231.

come «ginnastica mentale», per «avvezzare» lo studente al rigore deduttivo e renderlo «sempre più padrone dei concetti appresi nel testo»; i secondi forniscono un repertorio di esercizi cui il futuro maestro potrà attingere per la sua attività didattica.⁶⁵

Seguendo l'esempio fornito dall'*Aritmetica* di Peano, i manuali redatti nell'ambito della sua Scuola prevedono un ricco apparato di note storiche, che integrano la trattazione matematica, fornendo un quadro concettuale poliedrico e di ampio respiro, nel quale lo studio della matematica si coniuga con quello della storia, della filosofia, delle lettere, dell'arte e della tecnica. Pur tenendo conto della differente rilevanza nei vari testi, le note rivelano un'impostazione uniforme, sia nei contenuti che nello stile. L'indagine storica mira soprattutto a rintracciare le linee fondamentali della storia del simbolismo, indicando come sono stati introdotti i segni per le operazioni fondamentali. Eccone un esempio:

Il segno \times della moltiplicazione si trova per la 1^a volta nella *Clavis mathematica* del parroco inglese Guglielmo Oughtred (nato in Eton, contea di Buckingham, in Inghilterra, nel 1574, e morto nel 1660) stampata nel 1631. Fu Renato Descartes (nato a Lahaye, nella Turenna, nel 1596, e morto a Stoccolma in Svezia nel 1650) che propose di mettere un

⁶⁵ Burali-Forti, Ramorino, *Aritmetica e norme ...*, 1898 cit., p. 193. Anche nella redazione dei testi degli esercizi trapela la sensibilità per la storia della matematica. Sono infatti proposti quesiti del tipo: «Isacco Newton nacque il 25 dicembre 1642 a Woolsthorpe e morì il 20 marzo 1727 a Londra. Quanto visse? (Verificare, facendo uso del Calendario perpetuo Gregoriano, che Newton nacque e morì di giovedì.)» (C. Burali-Forti, A. Ramorino, *Lezioni di Aritmetica pratica ...*, Torino, 14^a ed., Petrini, 1925, p. 19).

punto tra un fattore e l'altro: e fu Michele Stifel (1486-1587) che suggerì di scrivere i fattori, uno a destra dell'altro, senza frapporti alcun segno.⁶⁶

Nassò fornisce anche, fra l'altro, nel suo manuale, confronti fra le varie notazioni in uso nelle diverse civiltà:

Nelle opere del matematico indiano Âryabhatta, nato a Pâtaliputra (oggi Patna) nel 476 e morto verso il 550, si trovano per la prima volta i numeri positivi e negativi considerati come esprimenti *avere*, *debito*, lunghezze *verso destra* o *verso sinistra*. Nel secolo XIII i Cinesi scrivevano i numeri positivi in rosso, i negativi in nero. Gli Indiani distinguevano i positivi dai negativi ponendo un punto sopra i negativi.⁶⁷

7. La ricezione

La fortuna dei manuali di aritmetica della Scuola torinese di logica, se da un lato è indiscutibilmente sancita dalle numerose edizioni prodotte, non è tuttavia né immediata, né incontrastata. Improntate allo stile di ricerca che contraddistingue la produzione di Peano e dei suoi allievi, queste *Aritmetiche* suscitano talora la disapprovazione di autorevoli matematici e di esponenti del mondo delle Istituzioni e della scuola.

L'adozione dell'*Aritmetica pratica* di C. Burali-Forti e A. Ramorino è ad esempio osteggiata, nella scuola di Alessandria, da alcuni docenti, e poi vietata per intervento dell'Ispectore ministeriale Amaldi. Si tratta di una sgra-

⁶⁶ M. Nassò, *Aritmetica generale ...*, Torino, 10^a ed., Internazionale 1919, p. 23.

⁶⁷ Nassò, *Aritmetica generale ...*, 10^a ed., 1919 cit., p. 8.

debole vicenda, i cui contorni emergono nel carteggio di Burali-Forti a Vailati del 1907:

Eccoti brevemente un bel fatto i cui particolari mi sono stati affermati e che ho tutte le ragioni per credere esatti. Il prof. Buffa fu mandato l'anno scorso (1905-1906) nella scuola *Tecnica* di Alessandria, ove fece adottare la mia aritmetica che adottava da nove anni nelle altre scuole. Il prof. Amaldi di Bologna, mandato ad Alessandria come ispettore, vietò al Buffa l'uso del mio libro!!!! Al principio dell'anno scolastico 1906-1907 il Buffa ripropose il mio libro, ma il direttore e i 4 colleghi di matematica delle classi aggiunte si opposero: il Buffa richiede una critica scritta, e dopo molti stenti riesce ad ottenerla e farla inserire nel verbale. Ti mando copia dei cinque capi d'accusa, con le mie osservazioni in rosso. [...] 2° È poco accessibile alla mente degli alunni perché fa inutile ed eccessivo sfoggio di simbolismo, presuppone noti e familiari agli alunni concetti, operazioni e teorie che essi non possono sapere, ed il frasario stesso è artificioso ed oscuro.⁶⁸

Con favore è invece accolta la pubblicazione dell'*Algebra elementare* del sacerdote salesiano Marco Nassò, allievo di Peano e professore al Liceo Valsalice di Torino. Ben più tradizionale nei contenuti, il manuale di Nassò riceve ottime recensioni in Italia, Francia, Spagna, Inghilterra, Germania e Polonia⁶⁹ e conosce un notevole successo

⁶⁸ C. Burali-Forti a G. Vailati, Torino 6.1.1907, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati, cc. 2r-2v. Cfr. anche le lettere di C. Burali-Forti a Vailati del 2.5.1906; 15.1.1907; 7.3.1907; 5.9.1907 e del 28.12.1907, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati.

⁶⁹ Il rilievo attribuito alla storia della matematica in questo manuale è ad esempio sottolineato nelle recensioni. Cfr. G. Peano a M.

editoriale, tanto che nel 1919 raggiunge la decima edizione e nel 1925 si rende necessaria una nuova ristampa riveduta e aggiornata, curata, dopo la morte di Nassò, da Agostino Borio, anch'egli allievo di Peano. L'*Aritmetica* di Nassò brilla per chiarezza e semplicità di esposizione ed è corredata da 2300 esercizi e problemi graduati, da 400 esercizi risolti in dettaglio, e da un vasto apparato di note storiche, in parte mutate dai celebri *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* di M. Cantor, che includono indicazioni su testi classici di aritmetica cinesi, indiani e arabi.

Non si possono infine tralasciare i manuali di aritmetica redatti da alcuni studiosi e insegnanti che, pur non facendo propriamente parte della Scuola di Peano,

Nassò, Torino 12.10.1898 in *Nassò Dott. Marco ...*, 1898 cit., p. 531: «Le sue indicazioni storiche sono preziose...»; W. J. Greenstreet, *Algebra elementare*. By M. Nassò, «The Mathematical Gazette», 18, 1899, p. 305: «An interesting feature of the book is the number of purely historical notes»; M. Cantor, *Marco Nassò, Algebra elementare*, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», 44, 1899, p. 122: «Wir empfehlen nochmals aufs wärmste das Buch unseres italienischen Fachgenossen, welches auf uns persönlich auch durch die zahlreichen eingestreuten geschichtlichen Angaben einen angenehmen Eindruck machte»; S. Dickstein, *M. Nassò, Algebra elementare*, (traduzione italiana: «La nota caratteristica di queste opere è il massimo rigore scientifico, una grande chiarezza di esposizione, le numerose note storiche inserite nel testo, ed il grande numero di esercizi e di problemi.»); C. A. Laisant, *M. Nassò, Algebra elementare*, «L'Enseignement mathématique», 1899, 1, pp. 226-227 e G. Teixeira, *Marco Nassò: Algebra elementare*, «Jornal de Ciencias Mathematicas e Astronomicas», 13, 1899, pp. 175-176. Per la redazione dell'apparato storico-critico Nassò si rivolge anche a Vailati e Vacca: cfr. G. Vailati a G. Vacca, Roma 23.3.1909, Bibl. Dipartimento di Filosofia, Milano, Fondo G. Vailati, c.p.

intrattengono con lui contatti epistolari e partecipano alle iniziative editoriali da lui patrocinate. L'*Aritmetica e Geometria* di Ciamberlini, rivolta agli studenti delle Scuole Complementari, è apprezzata nell'ambito della Scuola torinese di logica e recensita con favore da Bettazzi, che ha parole di elogio per la sobrietà di linguaggio e per l'abilità con cui l'autore ha saputo dosare le spiegazioni teoriche e le applicazioni concrete.⁷⁰

Altrettanto positivo è il giudizio espresso da Peano sul libro di Natucci *Il concetto di numero e le sue estensioni*, ritenuto pregevole per le numerose note storiche e bibliografiche:

Ora il prof. Natucci pubblica questo grosso libro, denso di informazioni, di critiche e di citazioni bibliografiche. [...] L'Autore rileva l'importanza degli studi storici relativi alla scienza, e degli studi critici, che servono a perfezionare l'insegnamento. [...] Il libro è corredato da una ricchissima bibliografia in varie appendici, oltre alla citazione di circa 500 autori nel testo.⁷¹

8. Conclusione

L'analisi dei libri di testo di aritmetica consente pertanto di cogliere i valori e i limiti della riflessione sulla storia e la didattica della matematica, di grande modernità, avviata nella Scuola di Peano. Se è vero che Peano non fu uno storico della matematica "professionista", occorre tuttavia rilevare che egli e i suoi collaboratori contribu-

⁷⁰ Cfr. R. Bettazzi, *C. Ciamberlini, Aritmetica ...*, 1910 cit., p. 48.

⁷¹ Peano, *Alpinolo Natucci ...*, 1923a cit., pp. 382, 383.

rono a evidenziare alcune componenti dell'indagine storiografica di importanza indiscutibile, rivolgendo particolare attenzione alla ricerca delle fonti, alle trascrizioni e alle traduzioni, ai repertori bibliografici, alle edizioni critiche accurate e alle antologie dei classici della scienza. La concezione storiografica di Peano rivela tuttavia alcuni limiti oggettivi, ravvisabili in una visione rettilinea del progresso della matematica, che non prevede soste né deviazioni, e che pone l'accento sulle sole "verità" che hanno contribuito al progresso della scienza. Nello stesso tempo, però, Peano e i suoi allievi mostrano di avere una corretta percezione della dimensione storica delle differenti discipline matematiche e, nonostante il rilievo dato al carattere "ludico" della storia della matematica per la didattica, sono attenti a non indulgere in mere considerazioni aneddotiche.

Per quanto riguarda il risvolto più propriamente didattico, la sensibilità della Scuola torinese di Peano per l'insegnamento condotto con metodo storico, largamente condivisa all'epoca e alimentata dal dialogo fecondo con matematici e storici della matematica, trova conferma nelle proposte istituzionali che, a vari livelli, sottolineano l'importanza di bandire una pratica di insegnamento della matematica atemporale e acritica.

L'esigenza scientifica e didattica di intrecciare l'indagine storica alla trattazione matematica si traduce nella richiesta, giunta da più parti, di introdurre corsi di Metodologia e di Storia delle Matematiche nelle Università e nelle Scuole di Magistero⁷² e viene recepita dalla Riforma

⁷² Cfr. Padoa, *Preparazione degli insegnanti di matematica ...*, 1909 cit., p. 4: «A parer nostro, il corso biennale di Metodologia matematica [...] obbligatorio per il conseguimento del Diploma di magistero [...] potrebb'esser frequentato durante il quadriennio di Facoltà o anche

Gentile del 1923 nella quale «si trovano indicate alcune nozioni sopra la Storia delle Scienze di ragionamento e di osservazione».⁷³

All'interno della Scuola di Peano si assiste infine al fiorire di una produzione di manuali di aritmetica e di algebra, che, se da un lato si differenzia sempre più nettamente dal manuale "di riferimento" di J. Bertrand,⁷⁴ dall'altro inaugura una nuova stagione della manualistica italiana per la scuola elementare e secondaria, che riscuote notevoli successi.

Nello stesso tempo, la collaborazione feconda fra docenti universitari e insegnanti della scuola secondaria, la volontà di patrocinare la divulgazione scientifica e l'at-

dopo la Laurea; nel primo caso durante il 2° biennio, perché stimiamo utile far ritornare la mente dei giovani sulle questioni elementari dopo uno stacco, il quale accentua la diversità di intendimenti con cui viene ripreso tale studio (non più soltanto conoscitivo, ma soprattutto critico e storico) [...]. Ed appunto la Storia della matematica – anziché essere svolta a parte, col pericolo di trarne soltanto un faticoso e sterile notiziario biografico e cronologico – dovrebbe compenetrare tutto il nostro corso, mirando soprattutto alla ricostruzione delle varie fasi di sviluppo di ciascuna teoria ed all'indagine dell'azione vicendevole di causa e di effetto tra il progredire di teorie sostanzialmente o formalmente affini».

⁷³ G. Loria, *L'insegnamento della Storia delle Scienze in Italia*, «Archeion», 13, 1931, pp. 474-476.

⁷⁴ Il volume di J. Bertrand è recensito con molta severità da Burali-Forti per la «RdM» (1, 1891, p. 85): «Sul trattato di Aritmetica del sig. Bertrand sono stati modellati tutti i trattati d'aritmetica finora pubblicati; in questi si trovano conservate (anzi il più delle volte aumentate) le inesattezze esistenti nel trattato del Bertrand. Credo cosa non inutile rilevare le principali di queste inesattezze». A partire da questa data, dunque, la manualistica di aritmetica si svincola dalle traduzioni dei manuali europei e, in particolare, dall'impostazione del testo di Bertrand, considerato normativo per oltre tre decenni.

tenzione rivolta al panorama editoriale dei libri di testo si rivelano strategie integranti di un più ampio progetto di promozione e diffusione della cultura matematica, volto a stimolare il dialogo fra la cultura umanistica e quella scientifica e a proporre un insegnamento interdisciplinare. Ne risulta un'originale e modernissima sintesi delle attività di ricerca matematica, storica e didattica che costituisce uno dei lasciti più duraturi della Scuola di Peano nella cultura italiana.

Ringraziamenti

Al termine di questo lavoro desidero esprimere il mio più sentito ringraziamento alla Prof.ssa C. S. Roero che con costante disponibilità e grande pazienza ha diretto questa ricerca, mi ha incoraggiato in tutte le sue fasi ed è stata prodiga di innumerevoli e preziosi suggerimenti. Sono inoltre molto grata alla Prof.ssa L. Giacardi, che mi ha dato l'opportunità di esporre questa ricerca e ne ha discusso con me alcuni interessanti aspetti.

APPENDICE

I manuali di aritmetica della Scuola di Peano citati nell'articolo

- BERSANO C., GILI D., ZAVAGNA I., *Calcolo numerico*, Torino, Paravia, 1924.
- BETTAZZI R., *Aritmetica razionale ad uso dei ginnasi*, Torino, Salesiana, 1902.
- BOGGIO T., AGOSTINELLI C., *Lezioni di Matematica (Algebra, Geometria, Trigonometria)*, 2^a ed., Torino, Gili, 1940.
- BOGGIO T., *Lezioni di algebra per gli Studenti della R. Scuola Sup. di Commercio di Genova*, 2^a ed., Genova, Castello, 1908.
- BURALI-FORTI C., *Aritmetica razionale*, Torino, Bona, 1892.
- BURALI-FORTI C., *Lezioni di Aritmetica pratica ad uso delle scuole secondarie inferiori*, Torino, Petrini, 1897, 14^a ed., Torino, Petrini, 1925.
- BURALI FORTI C., RAMORINO A., *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, Torino, Gallizio, 1898.
- BURALI FORTI C., RAMORINO A., *Elementi di Aritmetica Razionale ad uso della 3^a Classe della Scuola Tecnica*, Torino, Petrini, 1898.
- BURALI-FORTI C., BOGGIO T., *Esercizi di algebra*, Torino, Petrini, 1932.
- CASSINA U., *Calcolo numerico, con numerosi esempi e note storiche originali*, Bologna, Zanichelli, 1928.
- CIAMBERLINI C., *Complemento di Aritmetica razionale ad uso dei Ginnasi*, 2^a ed., Torino, Salesiana, 1905.
- CIAMBERLINI C., *Aritmetica e Geometria per le scuole complementari*, Torino, Paravia, 1909-10.
- NASSÒ M., *Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici (1° biennio)*, Torino, Salesiana, 1898.
- NASSÒ M., *Aritmetica generale ed Algebra*, Torino, Salesiana, 1898, 10^a ed. Torino, Internazionale, 1919.
- NATUCCI A., *Aritmetica pratica*, Palermo, Sandron, 1909.
- NATUCCI A., *Aritmetica ragionata ed Algebra*, Palermo, Sandron, 1909.

- NATUCCI A., *Elementi di Aritmetica ragionata ed Algebra per le scuole medie*, Palermo, Sandron, 1909.
- NATUCCI A., *Il concetto di numero e le sue estensioni*, Torino, Bocca, 1923.
- NATUCCI A., *Aritmetica, geometria e computisteria*, Palermo, Sandron, 1927.
- PADOA A., *Aritmetica intuitiva per le Scuole Medie*, Milano, Sandron, 1923.
- PAGLIERO G., *Algebra per i Ginnasi superiori e i Licei classici*, Torino, Paravia, 1930.
- VIVANTI G., *Aritmetica razionale e algebra per il Corso Magistrale Superiore*, Torino, Lattes, 1928.