Périodes des 1-motifs et transcendence

Published version:

DOI:10.1016/S0022-314X(02)00002-1

ACADEMIC PRESS

Journal of Number Theory 97 (2002) 204–221

JOURNAL OF Number Theory

www.academicpress.com

Périodes de 1-motifs et transcendance

Cristiana Bertolin*

Département de Mathématique, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France

Received 23 February 2001; revised 17 December 2001
Communicated by G. Wustholz

Abstract

The generalized Grothendieck's conjecture of periods $(\mathrm{CPG})_K$ predicts that if M is a 1-motive defined over an algebraically closed subfield K of $\mathbb{C}$, then $\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geqslant \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}})$. In this article we propose a conjecture of transcendance that we call *the elliptico-toric conjecture* (CET). Our main result is that (CET) is equivalent to $(\mathrm{CPG})_K$ applied to 1-motives defined over K of the kind $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$. (CET) implies some classical conjectures, as the Schanuel's conjecture or its elliptic analogue, but it implies new conjectures as well. All these conjectures following from (CET) are equivalent to $(\mathrm{CPG})_K$ applied to well chosed 1-motives: for example the Schanuel's conjecture is equivalent to $(\mathrm{CPG})_K$ applied to 1-motives of the kind $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^s]$.

MSC: 11J81; 11J95; 11G99

Introduction

Notons $\bar{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et K un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$, non nécessairement algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Soit X une variété algébrique projective lisse définie sur K. Dans [8], Grothendieck prouve que l'intégration des formes différentielles fournit un isomorphisme canonique $\mathfrak{P}: \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_K \mathbb{C} \to \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), K) \otimes_K \mathbb{C}$ entre la cohomologie de de Rham algébrique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$ et la cohomologie singulière

*Current address: Universität Regensburg, NWFI-Mathematik, Regensburg 93040, Germany.

E-mail address: cristiana.bertolin@mathematik.uni-regensburg.de.

0022-314X/02/$ - see front matter
PII: S0022-314X(02)00002-1

$\mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}),K) = \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K$ de X. *Les périodes de* X sont les coefficients de la matrice de cet isomorphisme $\mathfrak{P}$ relative à des K-bases de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$ et $\mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}),K)$ quelconques fixées. Toujours dans [8] *note* 10, il fait allusion à une conjecture générale de transcendance pour ces périodes de X, mais c'est seulement dans [9] *note historique* p. 43, que cette conjecture apparaît de manière explicite pour la première fois. Si on introduit la notion de *groupe de Galois motivique de X*, $G_{\mathrm{mot}}(X)$ (i.e. le sous-groupe de $(\prod_i \mathbf{GL}(\mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))) \times \mathbf{GL}(\mathbb{Q}(1))$ qui fixe les classes fondamentales des cycles algébriques sur les puissances de X), cette conjecture peut aussi se formuler sous la forme plus explicite suivante (cf. [3] 1.8):

Conjecture des périodes de Grothendieck. *Si X est une variété algébrique projective lisse définie sur* $\bar{\mathbb{Q}}$, *alors*

$$\text{deg.transc}_{\bar{\mathbb{Q}}}\, \bar{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(X)) = \dim_{\mathbb{Q}} G_{\mathrm{mot}}(X). \tag{CP}$$

Dans [3, §2], on propose une généralisation de cette conjecture aux motifs mixtes définis sur un sous-corps de $\mathbb{C}$, non nécessairement algébrique. Toutefois il y a un problème de définition du groupe de Galois motivique. Nous allons donc nous limiter aux 1-motifs, et remplacer, faute de mieux, le groupe de Galois motivique par le groupe de Mumford-Tate, suivant [3] 2.2:

Conjecture des périodes généralisée pour les 1-motifs (André). *Si M est un* 1-*motif défini sur K*, *sous-corps de* $\mathbb{C}$ *non nécessairement algébrique*, *alors*

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geqslant \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}). \tag{CPG$_{\mathrm{K}}$}$$

Remarquons que $(\mathrm{CPG})_{\bar{\mathbb{Q}}}$ s'écrit avec une égalité car d'après [3] 2.1 on a toujours l'inégalité $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) + \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K$.

Dans [4, §4] conjecture 2, D. Bertrand donne une minoration conjecturale du terme de gauche de $(\mathrm{CPG})_{\bar{\mathbb{Q}}}$ en fonction des représentations galoisiennes attachées à M. L'extension aux 1-motifs de la conjecture de Mumford-Tate permettrait d'établir l'équivalence de la conjecture 2 de Bertrand avec $(\mathrm{CPG})_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

Dans cet article, on propose une conjecture de transcendence, qu'on appelle *conjecture elliptico-torique* (CET), et notre résultat principal (Théorème 1.2) est que (CET) *est équivalente à* $(\mathrm{CPG})_K$, *appliquée aux* 1-*motifs de la forme* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$, *où les* $\mathscr{E}_j$ *sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes*. Notre conjecture (CET) implique des conjectures de transcendance "classiques", parmis lesquelles les plus fameuses sont les suivantes: la conjecture de Schanuel, l'analogue elliptique de la conjecture de Schanuel, une conjecture modulaire qui généralise un théorème de Nesterenko (voir [12]), ... Mais à partir de (CET), on peut aussi construire d'autres conjectures de transcendance, qui, à ma connaissance, ne se trouvent pas dans la littérature (voir Remarque 1.4). Chacune de ces conjectures, qui peuvent se déduire de (CET), est équivalente à $(\mathrm{CPG})_K$ appliquée à un 1-motif bien choisi: par exemple, la conjecture de Schanuel est équivalentes à $(\mathrm{CPG})_K$ appliquée à des 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^s]$ (Corollaire 1.3).

La démonstration du Théorème 1.2 repose essentiellement sur deux calculs: le calcul de la matrice des périodes de M et le calcul de la dimension sur $\mathbb{Q}$ du groupe de Mumford-Tate de $M_{\mathbb{C}}$. Voici comment est organisé ce travail: Dans la première section, on énonce la conjecture (CET). Dans la Section 2, on fait quelques rappels sur les 1-motifs, leurs réalisations et leurs groupe de Mumford-Tate. Dans la Section 3, on prouve que $(\mathrm{CPG})_K$ appliquée aux 1-motifs sans partie abélienne est équivalente à la conjecture de Schanuel (Corollaire 1.3). Même si ce résultat peut être vu comme un corollaire du théorème principal, on en donnera une autre preuve qui met en évidence le fait qu'on ne fait pas un simple décompte sur les degrés de transcendance, mais qu'il faut vraiment entrer dans la structure du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs (cf. 3.4 et 5.4). Les Sections 4 et 5 sont les plus techniques: elles contiennent le calcul de la matrice des périodes et du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs dont l'extension sous-jacente est triviale. Dans la dernière section, on démontre notre résultat principal (Théorème 1.2).

Ce travail correspond à un chapitre de ma thèse de doctorat faite sous la direction de Yves André. Je suis très reconnaissante envers Daniel Bertrand des diverses discussions que nous avons eues sur ce sujet. Je tiens aussi à remercier Gisbert Wüstholz pour ses nombreux commentaires sur ce travail.

Dans tout l'article, $\bar{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et K un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$, non nécessairement algébrique sur $\mathbb{Q}$.

1. La conjecture elliptico-torique

1.1. Pour énoncer notre conjecture elliptico-torique, on a besoin de quelques notations. Si $\mathscr{E}$ est une courbe elliptique, on note $j(\mathscr{E})$ son invariant modulaire, ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) ses périodes (resp. ses quasi-périodes) et $k = \mathrm{End}(\mathscr{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ son corps des endomorphismes. Si P est un point de $\mathscr{E}(\mathbb{C})$, p (resp. d) désigne une intégrale elliptique de première (resp. de deuxième) espèce associée à P.

Conjecture elliptico-torique. *Soient $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ des courbes elliptiques deux à deux non isogènes. Si $q_1, \ldots, q_s$ sont des points de $\mathbb{C}^*$ et $P_{1j}, \ldots, P_{r_j j}$ des points de $(\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, alors*

$$\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}(2i\pi, q_l, \log q_l, j(\mathscr{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,s}\ i=1,\ldots,r_j}$$
$$\geqslant \mathrm{rang}\langle q_l \rangle_l + \sum_{j=1}^{n} 2\dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4\sum_{j=1}^{n} \left(\dim_{\mathbb{Q}} k_j\right)^{-1} - n + 1, \qquad \text{(CET)}$$

où $\langle q_l \rangle_l$ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par les $\{q_l\}_{l=1,\dots,s}$, et $I(\mathscr{E}_j)$ est le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}/k_j\,\omega_{1j} + k_j\,\omega_{2j}$ engendré par les $\{p_{ij}\}_{i=1,\dots,r_j}$.

1.2. Théorème. *Pour les* 1*-motifs de la forme* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$, $(\mathrm{CPG})_K$ *est équivalente à* (CET).

1.3. Corollaire. *Pour les* 1*-motifs sans partie abélienne*, $(\mathrm{CPG})_K$ *est équivalente à la conjecture de Schanuel* (CS).

1.4. Remarque. (1) On rapprochera l'expression $4\sum_{j=1}^n(\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1$ qui apparaît dans la conjecture (CET), aux résultats obtenus par Wüstholz, dans [14] Prop. 2 et [15] th. 5, sur la dimension du $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel engendré par $2i\pi$, les périodes et les quasi-périodes de n courbes elliptiques.

(2) La conjecture (CET) implique des conjectures de transcendance "classiques" comme la conjecture de Schanuel, l'analogue elliptique de la conjecture de Schanuel, ... Mais à partir de (CET), le lecteur peut s'amuser à "construire" d'autres conjectures, qui ne se trouvent pas dans la littérature. Voici par exemple deux nouvelles conjectures qui peuvent se déduire de (CET):

- Conjecture elliptique: Soient $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n$ des courbes elliptiques deux à deux non isogènes. Si $P_{1j}, \dots, P_{r_j j}$ sont des points de $\mathscr{E}_j(\mathbb{C})$, alors

$$\deg.\mathrm{transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathscr{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,r_j}} \geqslant \sum_{j=1}^n 2\dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4\sum_{j=1}^n (\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1, \qquad \text{(CE)}$$

  où $I(\mathscr{E}_j)$ est le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}/k_j\,\omega_{1j} + k_j\,\omega_{2j}$ engendré par les $\{p_{ij}\}_i$.
- Conjecture modulaire: Soient $q_1, \dots, q_n$ des points de $\mathbb{C}^*$ tels que $|q_j| < 1$ pour $j = 1, \dots, n$. Notons $J(q_j) = \frac{1}{q_j} + 744 + \cdots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q_j^{\mathbb{Z}}$ et $\mathscr{E}_j$ une courbe elliptique d'invariant modulaire $J(q_j)$. Supposons que les courbes elliptiques $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n$ soient deux à deux non isogènes. Alors

$$\deg.\mathrm{transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_j, J(q_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j})_{j=1,\dots,n} \geqslant \mathrm{rang}\langle q_j \rangle_j + 4\sum_{j=1}^n (\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1, \qquad \text{(CM)}$$

  où $\langle q_j \rangle_j$ désigne le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par les $\{q_j\}_j$.

(3) J. Ax a conjecturé *une version formelle de la conjecture de Schanuel*: Si $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_m]]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n, e^{y_1}, \dots e^{y_n}) \geqslant n + \text{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Dans [1], il démontre que cette version formelle de la conjecture de Schanuel est équivalente à la conjecture de Schanuel et il en vérifie un cas particulier.

Signalons aussi que dans [5] Coleman a prouvé, en s'inspirant de [1], le théorème suivant: Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\bar{\mathbb{Q}}$ et E le corps des fractions de $\mathcal{O}[[t_1, \dots, t_m]]$. Si $y_1, \dots, y_n \in \bar{\mathbb{Q}}[[t_1, \dots, t_m]]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\text{deg.transc}_E\, E(y_1, \dots, y_n, e^{y_1}, \dots e^{y_n}) \geqslant n.$$

1.5. Exemples. (1) Soient $q \in \mathbb{C}^*$ et K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q)$. Considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ avec $u(1) = q \in \mathbb{G}_m(K)$. Si on applique $(\text{CPG})_K$ à M on a

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathrm{K}(\log q, 2i\pi) \geqslant \begin{cases} 2 & \text{si } q \notin \mu_\infty, \\ 1 & \text{si } q \in \mu_\infty. \end{cases}$$

D'autre part, posons $x_1 = \log q$ et $x_2 = 2i\pi$. La conjecture de Schanuel appliquée à x_1 et x_2, nous dit que si $\log q$ et $2i\pi$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants (i.e. si q n'est pas une racine de l'unité), alors

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\log q, 2i\pi, q) \geqslant 2.$$

Par conséquent, dans le cas où q n'est pas une racine de l'unité, la conjecture $(\text{CPG})_K$ appliquée à $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ est équivalente à la conjecture de Schanuel appliquée à x_1 et x_2.

(2) Soit $\mathscr{E}$ une courbe elliptique pas de type CM. Considérons le 1-motif $M = [0 \xrightarrow{0} \mathscr{E}]$ qui est défini sur K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(j(\mathscr{E}))$. Notons ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathscr{E}$. Si on applique $(\text{CPG})_K$ à $M = [0 \xrightarrow{0} \mathscr{E}]$, on obtient la conjecture suivante

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathscr{E}), \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) \geqslant 4,$$

i.e. quatre au moins des cinq nombres $j(\mathscr{E}), \omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En particulier, si la courbe elliptique est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on retrouve la conjecture des périodes de Grothendieck (CP)

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) = 4.$$

(3) Soient $\mathscr{E}$ une courbe elliptique pas de type CM et P un point de $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ d'ordre infini. Considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathscr{E}]$ avec $u(1) = P$, qui est défini sur K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(j(\mathscr{E}), P)$. Notons ω_1, ω_2 les périodes de $\mathscr{E}$ et p un logarithme elliptique de P. La conjecture $(\text{CPG})_K$ appliquée à

$M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E}]$, nous fournit la conjecture suivante

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, P, p) \geqslant 3,$$

i.e. trois au moins des cinq nombres $j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, P$ et p sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

(4) Soit $M = [0 \xrightarrow{0} \mathcal{E}]$ avec $\mathcal{E}$ une courbe elliptique de type CM. Notons ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathcal{E}$. Si on applique $(\text{CPG})_{\bar{\mathbb{Q}}}$ à $M = [0 \xrightarrow{0} \mathcal{E}]$, on trouve le théorème de Chudnovsky

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) = 2.$$

(5) Soient $\mathcal{E}$ une courbe elliptique de type CM et P un point de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ d'ordre infini. Considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E}]$ avec $u(1) = P$, qui est défini sur K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(P)$. Notons ω_1, ω_2 les périodes de $\mathcal{E}$ et p un logarithme elliptique de P. La conjecture $(\text{CPG})_K$ appliquée à $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E}]$, nous fournit la conjecture

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, P, p) \geqslant 2,$$

i.e. deux au moins des trois nombres ω_1, P et p sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

(6) Soient $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$, $J(q) = \frac{1}{q} + 744 + \cdots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, et $\mathcal{E}$ une courbe elliptique de type CM d'invariant modulaire $J(q)$. Notons ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) ses périodes (resp. ses quasi-périodes). Considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E} \times \mathbb{G}_m]$ avec $u(1) = (0, q)$, qui est défini sur K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q, J(q))$. Si on applique $(\text{CPG})_K$ à $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E} \times \mathbb{G}_m]$, on trouve un théorème de Y. Nesterenko (voir [12]):

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \bar{\mathbb{Q}}(q, \omega_1, 2i\pi) = 3.$$

2. Rappels sur les 1-motifs

2.1. *Un 1-motif $M = [X \xrightarrow{u} G]$ sur K* consiste en

(a) un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini X,
(b) une extension G d'une variété abélienne A par un tore T, définie sur K,
(c) un homomorphisme $u : X \to G(K)$.

On désigne par $M_{\mathbb{C}}$ le 1-motif sur $\mathbb{C}$ $(X, A_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}}, u)$. On peut associer à $M = [X \xrightarrow{u} G]$ sa réalisation de Hodge, sa réalisation de de Rham et son groupe de Mumford-Tate:

- Réalisation de Hodge de M: Désignons par $T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})$ le produit fibré de $\text{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ et X au dessus de $G_{\mathbb{C}}$: $T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}}) = \{(g, x) \in \text{Lie}(G_{\mathbb{C}}) \times X \mid \exp(g) =$

$u(x)\}$, où exp : $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) \to G_{\mathbb{C}}$ est l'application exponentielle. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) = T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est *la réalisation de Hodge* du 1-motif M. On définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})$ de la façon suivante: $W_0(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) = T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})$, $W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) = \mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$, $W_{-2}(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) = \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$. On a évidamment $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) \cong X$, $\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) \cong \mathrm{H}_1(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^W(T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}})) \cong \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$. Sur $T_{\mathbb{C}}(M_{\mathbb{C}}) = T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ est définie une filtration décroissante $F^\bullet$ et le triplet $(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}), W_\bullet, F^\bullet)$ que l'on obtient ainsi, est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge mixte sans torsion, de niveau $\leqslant 1$, de type $\{(0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1)\}$, et telle que $\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$ soit polarisable. (cf. [6] (10.1.3)).

- Réalisation de de Rham de M: Plaçons-nous dans la catégorie des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie fppf et considérons M comme un complexe concentré en degrés -1 et 0. D'après [6] (10.1.7) (a), (b) et (c), $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a)$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{G}_a) = 0$. Donc grâce aux résultats de [10] chap.1 (1.7) éténdus aux complexes de faisceaux abéliens, on peut conclure qu'il existe une extension universelle vectorielle de M par le groupe vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a), \mathbb{G}_a)$. On note cette extension $M^\natural = [X \to G^\natural]$. Le K-espace vectoriel $T_{dR}(M) = \mathrm{Lie}(G^\natural)$ est *la réalisation de De Rham* du 1-motif M. Comme pour la réalisation de Hodge, on définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $T_{dR}(M)$: $W_0(T_{dR}(M)) = T_{dR}(M)$, $W_{-1}(T_{dR}(M)) = T_{dR}(G)$, $W_{-2}(T_{dR}(M)) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)^\vee \otimes K$, où $T_{dR}(G)$ est l'algèbre de Lie de l'extension universelle vectorielle de G par le groupe vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a), \mathbb{G}_a)$.
- Groupe de Mumford-Tate de M: Désignons par $\langle (T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}), W_\bullet, F^\bullet) \rangle^\otimes$ la sous-catégorie tannakienne neutre de la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes engendrée par $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$. Cette sous-catégorie est munie du foncteur fibre ω qui associe à chaque objet H de $\langle (T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}), W_\bullet, F^\bullet) \rangle^\otimes$ son $\mathbb{Q}$-espace vectoriel sous-jacent. D'après [7] 2.11, le foncteur $\mathrm{Aut}^\otimes(\omega)$ est représentable par un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique fermé P de $\mathbf{GL}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$ et ω définit une équivalence de catégories tensorielles $\langle (T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}), W_\bullet, F^\bullet) \rangle^\otimes \to (\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(P), \otimes)$, oú $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(P)$ est la catégorie des représentations de dimension finie de P sur $\mathbb{Q}$. On appelle *P le groupe de Mumford-Tate de M*. Dans la suite on le notera $MT(M_{\mathbb{C}})$. D'après [13] Chapitre 2 §2, $MT(M_{\mathbb{C}})$ est muni d'une filtration croissante, $W_\bullet$, définie sur $\mathbb{Q}$:

$$W_0(MT(M_{\mathbb{C}})) = MT(M_{\mathbb{C}}),$$

$W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}})) = \{g \in MT(M_{\mathbb{C}}) \mid (g - id)T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}), (g - id)\mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}), (g - id)\mathrm{H}_1(T, \mathbb{Q}) = 0\}$,

$W_{-2}(MT(M_{\mathbb{C}})) = \{g \in MT(M_{\mathbb{C}}) \mid (g - id)T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}), (g - id)\mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = 0\}$.

Si on pose $\mathrm{Gr}_0^W(MT(M_{\mathbb{C}})) = W_0/W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}}))$, d'après [B83, §2.2] on sait que

- $\mathrm{Gr}_0^W(MT(M_{\mathbb{C}}))$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$ et par homothéties sur $\mathrm{Gr}_{-2}^W(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$;
- l'image de $\mathrm{Gr}_0^W(MT(M_{\mathbb{C}}))$ dans $\mathbf{GL}(\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})))$ est le groupe de Mumford-Tate de A, noté $MT(A_{\mathbb{C}})$.

2.2. Dans [6] (10.1.8), Deligne prouve que l'intégration des formes différentielles fournit un isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathfrak{P}:\ \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)\otimes_K \mathbb{C} \to \mathrm{H}_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

où $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M) = \mathrm{Hom}(T_{\mathrm{dR}}(M), K)$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Hom}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}), \mathbb{Q})$. On appelle *matrice des périodes de M* la matrice de l'isomorphisme $\mathfrak{P}$ relative à des K-bases de $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})\otimes_{\mathbb{Q}} K$ quelconques fixées. Le corps K(périodes(M)) engendré sur K par les coefficients d'une telle matrice, est indépendant du choix des K-bases.

2.3. Remarque. Puisque le théorème [6] (10.1.3) est vrai à isogénie près, deux 1-motifs isogènes ont les mêmes périodes et le même groupe de Mumford-Tate. On va donc pouvoir travailler à isogénie près.

3. Cas des 1-motifs sans partie abélienne

3.1. Soit $M = [X \xrightarrow{u} T]$ un 1-motif défini sur K sans partie abélienne. On peut supposer $X = \mathbb{Z}^r$ pour un certain entier $r \geqslant 0$, et puisque K est algébriquement clos, on a que $T \cong \mathbb{G}_m^s$ pour un certain entier $s \geqslant 0$. Notons $\{z_i\}$ une base de $\mathbb{Z}^r$ et $\{x_l\}$ une base du groupe de caractères du tore $\mathbb{G}_m^s$, $X^*(\mathbb{G}_m^s)$. Si $\Psi : \mathbb{Z}^r \times X^*(\mathbb{G}_m^s) \to \mathbb{G}_m(K)$ est la forme bilinéaire induite par u, on pose $q_{il} = \Psi(z_i, x_l)$, de sorte que $u(z_i) = (q_{i1}, \ldots, q_{is}) \in \mathbb{G}_m^s(K)$ pour $i = 1, \ldots, r$.

3.2. Lemme. *Une matrice des périodes du* 1*-motif* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^s]$ *a la forme suivante*:

$$\begin{pmatrix} & \log q_{11} & \cdots & \log q_{1s} \\ \mathrm{Id}_{r\times r} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \log q_{r1} & \cdots & \log q_{rs} \\ 0 & & 2i\pi \mathrm{Id}_{s\times s} & \end{pmatrix}$$

Preuve. Puisque M n'a pas de partie abélienne, on observe d'après [6] (10.1.7) (b) que $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{G}_a)$ De plus puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_a) = 0$, l'extension universelle vectorielle de M est canoniquement scindée, i.e. $(\mathbb{G}_m^s)^\natural = \mathbb{G}_m^s \times (\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a))^\vee$. Par définition de réalisation de de Rham, on a alors que $T_{\mathrm{dR}}(M) = T_{\mathrm{dR}}(\mathbb{G}_m^s) \times (\mathbb{Z}^r \otimes K)$, i.e. la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \otimes K, K) \to \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{G}_m^s) \to 0$$

est canoniquement scindée. Pour ce qui concerne la réalisation de Hodge, d'après 2.1, elle s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^s, \mathbb{Q}) \to T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Q} \to 0$$

Choisissons maintenant des bases: Notons $\tilde{\gamma}_i$ "un" relèvement de z_i dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ et $\{dz_i\}$ l'image dans $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ de la base de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \otimes K, K)$ qui est duale à $\{z_i\}$. Soit $\{\gamma_l\}$ la base de $\mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^s, \mathbb{Q})$, telle que $\{\frac{\gamma_l}{2i\pi}\}$ soit la base duale de $\{x_l\}$. Avec toutes ces notations on peut conclure que, dans les bases $\{dz_i, \frac{dx_l}{x_l}\}$ de $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ et $\{\tilde{\gamma}_i, \gamma_l\}$ de $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$, la matrice des périodes a la forme désirée. □

3.3. Remarque. Les déterminations des logarithmes complexes, qui apparaissent dans la matrice des périodes, ne sont pas bien définies car elles dépendent du relèvement dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ de la base de $\mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Q}$. Toutefois, le corps K (périodes(M)) étudié dans la conjecture des périodes généralisée se revèle être indépendant du choix de ce relèvement car il contient forcément $2i\pi$.

3.4. Proposition. *Soit $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^s]$ un 1-motif défini sur K, avec $u(z_i) = (q_{i1}, \dots, q_{is}) \in \mathbb{G}_m^s(K)$. Notons $L(T)$ le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ engendré par les $\{\log q_{il}\}_{i,l}$. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} L(T).$$

Preuve. Posons $U(MT(M_{\mathbb{C}})) = \ker[MT(M_{\mathbb{C}}) \to MT(W_{-1}(M_{\mathbb{C}}))]$. Puisque M est sans partie abélienne on observe que $W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}})) = U(MT(M_{\mathbb{C}}))$ et $\mathrm{Gr}_0^W(MT(M_{\mathbb{C}})) = MT(\mathbb{G}_m^s)$. On a donc que

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})). \tag{3.4.1}$$

Soient $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$ la clôture de Zariski de l'image de u dans $\mathbb{G}_m^s$, G' la composante neutre de $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$, et N l'indice de G' dans $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$. Puisque K est algébriquement fermé on a $G' = \mathbb{G}_m^{\bar{s}}$, pour un certain $\bar{s} \leqslant s$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \xrightarrow{id} & \mathbb{Z}^r \\ u \downarrow & & \downarrow Nu \\ \mathbb{G}_m^s & \xrightarrow{N} & \mathbb{G}_m^s \end{array}$$

fournit une isogénie entre M et le 1-motif $[Nu : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{G}_m^s]$, qui est isogène à $\bar{M} = [Nu : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{G}_m^{\bar{s}}] \oplus [0 : 0 \to \mathbb{G}_m^{s-\bar{s}}]$. Mais alors, d'après la Remarque 2.3 on peut travailler avec le 1-motif $\bar{M}$ au lieu du 1-motif de départ M.

Si on pose $M' = [u' = Nu : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{G}_m^{\bar{s}}]$, où $u'(1, \dots, 1) = (\vec{q}'_1, \dots, \vec{q}'_r)$ avec $\vec{q}'_i = (q'_{i1}, \dots, q'_{i\bar{s}}) \in (K^*)^{\bar{s}}$, on remarque facilement que $U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}})) = U(MT(M'_{\mathbb{C}}))$. Puisque u' est dominant, si on applique la proposition 1 de [2] à M', on trouve que

$$\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F(F \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^{\bar{s}}, \mathbb{Q})) \qquad (3.4.2)$$

où $F \cong M_{\bar{s}\times\bar{s}}(\mathbb{Q})$. Pour que le calcul de $\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}}))$ soit indépendant du choix des logarithmes (voir Remarque 3.3), on va travailler modulo $2i\pi$. A partir de $u' : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{G}_m^{\bar{s}}$, construisons un homomorphisme $U' : \mathbb{Q}^r \to (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\bar{s}}$ de la façon suivante

$$\begin{array}{ccccccc} U' : \mathbb{Q}^r & \to & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m^{\bar{s}}) & \to & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m^{\bar{s}})/(2i\pi\mathbb{Q})^{\bar{s}} & \cong (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\bar{s}} \\ ne_i & \mapsto & n \log \vec{q}'_i & \mapsto & n\, \overline{\log}\, \vec{q}'_i & \end{array}$$

où $\{e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)\}$ est la base canonique de $\mathbb{Q}^r$, $\log \vec{q}'_i = (\log q'_{i1}, \dots, \log q'_{i\bar{s}}) \in \mathbb{C}^{\bar{s}}$, et $\overline{\log}\, \vec{q}'_i$ est l'image de $\log \vec{q}'_i$ dans $(\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\bar{s}}$. Désignons par $L(T')$ le sous $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ engendré par les $\{\overline{\log}\, q'_{ij}\}_{i,j}$ et soit $\{\overline{\log}\, q'_{i_l,j_l}\}_{l=1,\dots,\dim_{\mathbb{Q}} L(T')}$ une base de $L(T')$. Puisque l'action de F sur $U'(\mathbb{Q}^r)$ est donnée par la formule

$$F \cdot U'(\mathbb{Q}^r) \to U'(\mathbb{Q}^r)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\bar{s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\bar{s}1} & \cdots & a_{\bar{s}\bar{s}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\log}\, q'_{i1} \\ \vdots \\ \overline{\log}\, q'_{i\bar{s}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}\, \overline{\log}\, q'_{i1} + \cdots + a_{1\bar{s}}\, \overline{\log}\, q'_{i\bar{s}} \\ \vdots \\ a_{\bar{s}1}\, \overline{\log}\, q'_{i1} + \cdots + a_{\bar{s}\bar{s}}\, \overline{\log}\, q'_{i\bar{s}} \end{pmatrix},$$

on trouve que

$$\begin{aligned} F \cdot U'(\mathbb{Q}^r) &= \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(T')} a^{(i_l)}_{1,j_l}\, \overline{\log}\, q'_{i_l,j_l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(T')} a^{(i_l)}_{\bar{s},j_l}\, \overline{\log}\, q'_{i_l,j_l} \end{pmatrix}; \quad a^{(i_l)}_{k,j_l} \in \mathbb{Q} \quad \forall l \text{ et } k \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(T')} F \cdot (\overline{\log}\, q'_{i_l,j_l}\, e_1^t) \end{aligned}$$

où e_1^t est le transposé du premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{Q}^{\bar{s}}$. Les composantes irréductibles du F-module $F \cdot U'(\mathbb{Q}^r)$ sont donc les F-modules $\{F \cdot (\overline{\log}\, q'_{i_l,j_l}\, e_1^t)\}_{l=1,\dots,\dim_{\mathbb{Q}} L(T')}$. Puisque $\mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^{\bar{s}}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong 2i\pi \cdot \mathbb{Q}^{\bar{s}}$ est irréductible, d'après le lemme de Schur, on obtient alors que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{F} \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^{\bar{s}}, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T'). \qquad (3.4.3)$$

Grâce à (3.4.1) et à (3.4.2) on peut conclure. $\square$

3.5. Preuve de 1.3. (A) $(\mathrm{CPG})_K$ implique (CS):

(A1) $2i\pi$ appartient au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $x_1,\dots,x_s$: Supposons que $2i\pi = x_s$. Notons k la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_1,\dots,q_{s-1})$ dans $\mathbb{C}$, oú $q_1 = e^{x_1},\dots,q_{s-1} = e^{x_{s-1}}$, et considérons le 1-motif, défini sur k, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^{s-1}]$ avec $u(1) = (q_1,\dots,q_{s-1}) \in (k^*)^{s-1}$. D'après 3.2, les périodes de M sont les $\log q_1,\dots,\log q_{s-1}, 2i\pi$, et puisque les $x_1,\dots,x_{s-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, grâce à 3.4 on a $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = s$. Si on applique la conjecture des périodes généralisée $(\mathrm{CPG})_k$ à ce 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^{s-1}]$, on obtient l'inégalité

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, k(\log q_1,\dots,\log q_{s-1}, 2i\pi) \geqslant s$$

qui n'est autre que la conjecture de Schanuel appliquée à $x_1,\dots,x_s$.

(A2) $2i\pi$ n'appartient pas au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $x_1,\dots,x_s$: Notons k la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_1,\dots,q_s)$ dans $\mathbb{C}$, oú $q_1 = e^{x_1},\dots,q_s = e^{x_s}$, et considérons le 1-motif, défini sur k, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^{s}]$ avec $u(1) = (q_1,\dots,q_s) \in (k^*)^s$. Grâce à 3.2, les périodes de M sont les $\log q_1,\dots,\log q_s, 2i\pi$, et puisque les $x_1,\dots,x_s$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, d'après 3.4 on a $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = s+1$. La conjecture $(\mathrm{CPG})_k$ appliquée à ce 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^{s}]$, nous dit alors que $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, k(\log q_1,\dots,\log q_s, 2i\pi) \geqslant s+1$ et donc

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_s, e^{x_1},\dots e^{x_s}, 2i\pi) \geqslant s+1.$$

Mais ceci implique que $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_s, e^{x_1},\dots e^{x_s}) \geqslant s$.

(B) (CS) implique $(\mathrm{CPG})_K$:

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ algébriquement fermé, mais qui n'est pas nécessairement algébrique. Considérons un 1-motif $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^s]$ défini sur K, sans partie abélienne et avec $u(1,\dots,1) = (\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_r)$, oú $\vec{q}_i = (q_{i1},\dots,q_{is}) \in (K^*)^s$. D'après 3.2, les périodes de M sont les $\log q_{ij}, 2i\pi$. Soit $P(M)$ le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par ces périodes. Notons d sa dimension et $x_1,\dots,x_d$ une $\mathbb{Q}$-base. Puisque les $x_1,\dots,x_d$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, si on applique la conjecture de Schanuel à $x_1,\dots,x_d$ on trouve que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geqslant \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, \log q_{ij}, q_{ij})_{i,j} \geqslant d$$

Mais d'après 3.4, on sait que $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = d$ et donc on peut conclure que $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geqslant \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}})$. $\square$

4. Calculs de périodes

4.1. Considérons un 1-motif défini sur K de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A \times u_T} \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$, oú $\mathscr{E}_1,\dots,\mathscr{E}_n$ sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes. Notons $\{z_i\}$ une base de $\mathbb{Z}^r$ et $\{x_l\}$ une base du groupe de caractères du tore $\mathbb{G}_m^s$, $X^*(\mathbb{G}_m^s)$. Si $\Psi : \mathbb{Z}^r \times X^*(\mathbb{G}_m^s) \to \mathbb{G}_m(K)$ est la forme bilinéaire induite par u_T, on pose $q_{il} = \Psi(z_i, x_l)$ de sorte que $u_T(z_i) =$

$(q_{i1},\dots,q_{is})\in\mathbb{G}_m^s(K)$. De plus, soit $u_A(z_i)=(P_{i1},\dots,P_{in})\in\Pi_{j=1}^n\mathscr{E}_j(K)$. Désignons par $\{\omega_j,\eta_j\}$ une K-base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E}_j)$ oú ω_j est une forme différentielle de première espèce et η_j une de deuxième espèce, et par $\{\gamma_{1j},\gamma_{2j}\}$ une base de $\mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})$. Enfin notons $\omega_{1j}=\int_{\gamma_{1j}}\omega_j$ et $\omega_{2j}=\int_{\gamma_{2j}}\omega_j$ (resp. $\eta_{1j}=\int_{\gamma_{1j}}\eta_j$ et $\eta_{2j}=\int_{\gamma_{2j}}\eta_j$) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathscr{E}_j$.

Proposition 4.2. *Une matrice des périodes du* 1*-motif* $M=[\mathbb{Z}^r\xrightarrow{u_A\times u_T}\Pi_{j=1}^n\mathscr{E}_j\times\mathbb{G}_m^s]$ *a la forme suivante*:

$$\begin{pmatrix}
 & p_{11} & d_{11} & \cdots & \cdots & p_{1n} & d_{1n} & \log q_{11} & \cdots & \log q_{1s}\\
\mathrm{Id}_{r\times r} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
 & p_{r1} & d_{r1} & \cdots & \cdots & p_{rn} & d_{rn} & \log q_{r1} & \cdots & \log q_{rs}\\
 & \omega_{11} & \eta_{11} & & & & & & & \\
 & \omega_{21} & \eta_{21} & & & 0 & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & 0 & \\
 & & 0 & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & \omega_{1n} & \eta_{1n} & & & \\
0 & & & & & \omega_{2n} & \eta_{2n} & & & \\
 & & & & & & & & 2i\pi\mathrm{Id}_{s\times s} &
\end{pmatrix}$$

oú $p_{ij}=\int_0^{P_{ij}}\omega_j \bmod \mathbb{Q}\,\omega_{1j}+\mathbb{Q}\,\omega_{2j}$ *et* $d_{ij}=\int_0^{P_{ij}}\eta_j \bmod \mathbb{Q}\,\eta_{1j}+\mathbb{Q}\,\eta_{2j}$ *pour* $i=1,\dots,r$ *et* $j=1,\dots,n$.

Preuve. Posons $A=\Pi_{j=1}^n\mathscr{E}_j$, $T=\mathbb{G}_m^s$ et $G=A\times T$. D'après 2.1, la réalisation de de Rham de M s'inscrit dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & T_{\mathrm{dR}}(T) \arrow[d] \arrow[dr, "i_T"] & & & \\
0 \arrow[r] & T_{\mathrm{dR}}(G) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & T_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[r] & \mathbb{Z}^r\otimes K \arrow[r] & 0\\
 & T_{\mathrm{dR}}(A) \arrow[d] \arrow[ur, "i_A"'] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

où la suite exacte verticale est canoniquement scindée car $G = A \times T$. On obtient alors la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \otimes K, K) \to \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{\phi} \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(G) \to 0, \tag{4.2.1}$$

où ϕ est la transposée de i. Vérifions que cette suite exacte est canoniquement scindée. Posons $M_T = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_T} T]$ et $M_A = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A} A]$. Les réalisations de de Rham de M_T et M_A s'inscrivent dans les suites exactes

$$0 \to T_{\mathrm{dR}}(T) \xrightarrow{\iota_T} T_{\mathrm{dR}}(M_T) \to \mathbb{Z}^r \otimes K \to 0 \tag{4.2.2}$$

$$0 \to T_{\mathrm{dR}}(A) \xrightarrow{\iota_A} T_{\mathrm{dR}}(M_A) \to \mathbb{Z}^r \otimes K \to 0 \tag{4.2.3}$$

Montrons que ces deux suites exactes sont canoniquement scindées:

(1) Puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_a) = 0$, l'extension universelle vectorielle de M_T est canoniquement scindée et donc la suite exacte (4.2.2) admet une section canonique $\tau_T : T_{\mathrm{dR}}(M_T) \to T_{\mathrm{dR}}(T)$ i.e. $\tau_T \circ \iota_T = id$.

(2) Soient $M_A^\natural = [X \to G_A^\natural]$ l'extension universelle vectorielle de M_A par le groupe vectoriel $(\mathrm{Ext}^1(M_A, \mathbb{G}_a))^\vee$ et $A^\natural$ l'extension universelle vectorielle de A par le groupe vectoriel $(\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_a))^\vee$. Plaçons-nous dans la catégorie des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie fppf et considérons M_A comme un complexe concentré en degrés -1 et 0. Puisque $\mathrm{Hom}(X[1], \mathbb{G}_a) = 0$, à partir de la suite exacte $0 \to X[1] \to M_A \to A \to 0$, on obtient la suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(M_A, \mathbb{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(X[1], \mathbb{G}_a) \to \cdots$$

La première fléche de cette suite exacte longue nous fournit la flèche α du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ext}^1(M_A, \mathbb{G}_a))^\vee & \longrightarrow & G_A^\natural & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & = \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_a))^\vee & \longrightarrow & A^\natural & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où α et β sont surjectives. En passant aux algèbres de Lie, la surjection β nous définit une section canonique $\tau_A : T_{\mathrm{dR}}(M_A) \to T_{\mathrm{dR}}(A)$ de (4.2.3), i.e. $\tau_A \circ \iota_A = id$ (cette dernière égalité provient du fait que le diagramme est commutatif et que la dernière flèche verticale est l'identité).

Considérons maintenant les homomorphismes de restriction

$$r_A : T_{\mathrm{dR}}(M) \to T_{\mathrm{dR}}(M_A) \quad \text{et} \quad r_T : T_{\mathrm{dR}}(M) \to T_{\mathrm{dR}}(M_T),$$

qui ont les propriétés suivantes: $r_{A\,|\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathrm{dR}}(M))} = id$ et $r_{T\,|\mathrm{Gr}^W_{-2}(T_{\mathrm{dR}}(M))} = id$. On a donc que $\iota_T = r_T \circ i_T$ et $\iota_A = r_A \circ i_A$. Si on note $p_T = \tau_T \circ r_T$ et $p_A = \tau_A \circ r_A$, on observe que $p_T \circ i_T = id$, et $p_A \circ i_A = id$. Mais alors, puisque $i = (i_A, i_T)$, si on pose $p = (p_A, p_T)$ on obtient que $p \circ i = id$, et il suffit de prendre la transposée de p pour obtenir une section canonique de (4.2.1).

Pour ce qui concerne la réalisation de Hodge, d'après 2.1, elle s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \to T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Q} \to 0$$

Choisissons maintenant des K-bases: Notons $\tilde{\gamma}_i$ "un" relèvement de z_i dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ et $\{dz_i\}$ l'image dans $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ de la base de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \otimes K, K)$ qui est duale à $\{z_i\}$. Soit $\{\gamma_l\}$ la base de $\mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^s, \mathbb{Q})$, telle que $\{\frac{\gamma_l}{2i\pi}\}$ soit la base duale de $\{x_l\}$. Enfin notons encore ω_j (resp. η_j, resp. $\frac{dx_l}{x_l}$) l'image de ω_j (resp. η_j, resp. $\frac{dx_l}{x_l}$) dans $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$.

En appliquant la formule de Künneth à A et en se rappelant que G est une extension scindée, on obtient que $\{dz_i, \omega_1, \eta_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \eta_n, \frac{dx_l}{x_l}\}$ est une K-base de $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ et que $\{\tilde{\gamma}_i, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \gamma_l\}$ est une K-base de $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$. Dans ces bases la matrice des périodes a la forme désirée. $\square$

4.3. Remarque. Comme pour le cas sans partie abélienne, les coefficients de la matrice des périodes ne sont pas bien définis car ils dépendent du relèvement dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ de la base de $\mathbb{Z}^r$. Toutefois, le corps K(périodes(M)) étudié dans la conjecture des périodes généralisée, se revèle être indépendant du choix de ce relèvement car il contient forcément $2i\pi$, les périodes et les quasi-périodes de toutes les courbes elliptiques qui définissent A.

5. Calculs de groupes de Mumford-Tate

5.1. Dans cette section on va calculer la dimension du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$. Pour faire celà on aura besoin de quelques lemmes préliminaires.

Soit $M = [X \xrightarrow{u} G]$ un 1-motif défini sur K. Posons

$$U(MT(M_{\mathbb{C}})) = \ker[MT(M_{\mathbb{C}}) \to MT(W_{-1}(M_{\mathbb{C}}))].$$

5.2. Lemme. *Si $M = [X \xrightarrow{u} G]$ est un 1-motif tel que G est une extention scindée, alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}) & \text{si } A_{\mathbb{C}} \neq 0, \\ \quad + \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) & \\ 1 + \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) & \text{si } A_{\mathbb{C}} = 0 \text{ et } T_{\mathbb{C}} \neq 0. \end{cases}$$

Preuve. Selon 2.1 il suffit de vérifier que $W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}})) = U(MT(M_{\mathbb{C}}))$. D'après le lemme 2 de [2], $MT(M_{\mathbb{C}})$ respecte la filtration $W_\bullet$ de $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$. En outre, chaque élément de $MT(M_{\mathbb{C}})$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$ et donc

$$g \in MT(M_{\mathbb{C}}) \Rightarrow (g - id) T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$$

Puisque $G = A \times T$, on a que $W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})) = W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})) \times \mathrm{Gr}_{-1}^{W}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))$ et donc

$$\begin{aligned} g \in U(MT(M_{\mathbb{C}})) &\Leftrightarrow g_{|\mathrm{Gr}_{-1}^{W}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))} = id \quad \text{et} \quad g_{|W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}))} = id \\ &\Leftrightarrow (g - id)\mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \text{ et} \\ &\qquad (g - id)\mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = 0. \end{aligned}$$

Mais alors, par définition de $W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}}))$, on observe qu'un élément appartient à $U(MT(M_{\mathbb{C}}))$ si et seulement si il appartient à $W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}}))$. □

5.3. Soit $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A \times u_T} \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$ un 1-motif défini sur K, avec $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n$ des courbes elliptiques deux à deux non isogènes. Notons $k_j = \mathrm{End}(\mathscr{E}_j) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ le corps des endomorphismes de $\mathscr{E}_j$. De plus soit $\{z_i\}$ une base de $\mathbb{Z}^r$ et posons $u_T(z_i) = (q_{i1}, \dots, q_{is}) \in \mathbb{G}_m^s(K)$ et $u_A(z_i) = (P_{i1}, \dots, P_{in}) \in \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j(K)$.

5.4. Proposition. *Pour le* 1*-motif* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A \times u_T} \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$ *on a que*

$$\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n} 2 \dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) \tag{5.4.1}$$

où $L(T)$ *est le sous* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de* $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ *engendré par les* $\{\log q_{il}\}_{i,l}$*, et* $I(\mathscr{E}_j)$ *est le sous* k_j*-espace vectoriel de* $\mathbb{C}/k_j\,\omega_{1j} + k_j\,\omega_{2j}$ *engendré par les intégrales elliptiques de première espèce* $\{p_{ij}\}_i$ *associées aux points* $\{P_{ij}\}_i$.

Preuve. Posons $G = \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s$. Soient $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$ la clôture de Zariski de l'image de u dans G, G' la composante neutre de $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$, et N l'indice de G' dans $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \xrightarrow{id} & \mathbb{Z}^r \\ u \downarrow & & \downarrow Nu \\ G & \xrightarrow{N} & G \end{array}$$

fournit une isogénie entre M et le 1-motif $[Nu : \mathbb{Z}^r \to G]$. De plus, grâce au lemme de réductibilité complète de Poincaré appliqué aux produits de courbes elliptiques par des tores, on a que $[Nu : \mathbb{Z}^r \to G]$ est isogène à $\bar{M} = [Nu : \mathbb{Z}^r \to G'] \oplus [0 : 0 \to G/G']$. D'après la Remarque 2.3, on peut alors travailler avec le 1-motif $\bar{M}$ au lieu du 1-motif de départ M.

Si on pose $M' = [u' = Nu : \mathbb{Z}^r \to G']$, on remarque que $U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}})) = U(MT(M'_{\mathbb{C}}))$. Puisque u' est dominant, si on applique la proposition 1 de [2] à M', on trouve que $U(MT(M'_{\mathbb{C}})) \cong \mathrm{Hom}_F(F \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$ oú $F = \mathrm{End}(G') \otimes \mathbb{Q}$ et donc

$$\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F(F \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})). \tag{5.4.2}$$

Puisque les courbes elliptiques sont deux à deux non isogènes, d'après le lemme de Goursat on a que

$$G' = \mathbb{G}_m^{\bar{s}} \times \mathscr{E}_{l_1} \times \cdots \times \mathscr{E}_{l_{\bar{n}}}$$

où $\bar{s} \leqslant s$ et $l_j \in \{1, \dots, n\}$ pour $j = 1, \dots, \bar{n}$. Modulo une permutation des indices des courbes elliptiques, on peut supposer que $l_j = j$ pour $j = 1, \dots, \bar{n}$. Posons $T' = \mathbb{G}_m^{\bar{s}}$ et $A' = \Pi_{j=1}^{\bar{n}} \mathscr{E}_j$. Avec ces notations, on a que $u' = u'_{T'} \times u'_1 \times \cdots \times u'_{\bar{n}}$ où $u'_{T'}(z_i) = (q'_{i1}, \dots, q'_{i\bar{s}}) \in (K^*)^{\bar{s}}$ et $u'_{A'}(z_i) = (P'_{i1}, \dots, P'_{i\bar{n}}) \in A'(K)$. Si on applique la formule de Künneth à A', on trouve que $\mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}_1(T'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \oplus (\oplus_{j=1}^{n} \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$. L'égalité (5.4.2) peut alors se réécrire de la façon suivante

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}})) &= \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{F_{T'}}(F_{T'} \cdot u'_{T'}(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(T'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{k_j}(k_j \cdot u'_j(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

où $F_{T'} = \mathrm{End}(T') \otimes \mathbb{Q} \cong M_{\bar{s} \times \bar{s}}(\mathbb{Q})$. Pour que le calcul de $\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\bar{M}_{\mathbb{C}}))$ soit indépendant du choix du relèvement de la base $\{z_i\}$ dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ fait en 4.2 (voir Remarque 4.3), on va travailler modulo $2i\pi\mathbb{Q}$ et modulo les périodes de A'. Pour ce qui concerne la partie torique, d'après (3.4.3) on sait que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}_{T'}}(\mathrm{F}_{T'} \cdot u'_{T'}(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^{\bar{s}}, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T'), \tag{5.4.4}$$

où $L(T')$ est le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ engendré par les $\{\overline{\log q'_{ij}}\}_{i,j}$. Occupons-nous maintenant des courbes elliptiques: pour $j = 1, \dots, \bar{n}$, notons $I'(\mathscr{E}_j)$ le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}/k_j\,\omega_{1j} + k_j\,\omega_{2j}$ engendré par les $\{p'_{ij}\}_i$. Cet espace s'identifie de façon naturelle au sous k_j-espace vectoriel de $\mathscr{E}_j(K) \otimes \mathbb{Q}$ engendré par les $\{P'_{ij}\}_i$. On a donc que $k_j \cdot u'_j(\mathbb{Z}^r)$ est un k_j-espace vectoriel de dimension $\dim_{k_j} I'(\mathscr{E}_j)$.

Supposons que $\mathscr{E}_j$ n'est pas de type CM, i.e. $k_j = \mathbb{Q}$. Puisque $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = 2$ on a alors que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \cdot u'_j(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) = 2 \dim_{\mathbb{Q}} I'(\mathscr{E}_j). \tag{5.4.5}$$

Supposons maintenant que $\mathscr{E}_j$ est de type CM. Alors $\mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ est un k_j-espace vectoriel de dimension 1 et donc

$$\dim_{k_j} \mathrm{Hom}_{k_j}(k_j \cdot u'_j(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) = \dim_{k_j} I'(\mathscr{E}_j).$$

Mais puisque k_j est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$, on obtient que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{k_j}(k_j \cdot u'_j(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1((\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) = 2 \dim_{k_j} I'(\mathscr{E}_j). \tag{5.4.6}$$

Grâce à (5.4.3), pour conclure il suffit d'additioner les termes (5.4.4), (5.4.5) et (5.4.6). □

5.5. Corollaire. *Soit* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A \times u_T} \Pi_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$ *un* 1*-motif défini sur* K*, avec* $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ *des courbes elliptiques deux à deux non isogènes. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n} 2 \dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4 \sum_{j=1}^{n} (\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1$$

Preuve. Puisque les courbes elliptiques $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ sont deux à deux non isogènes, d'après [11, §2] on a que

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(\Pi_{j=1}^n (\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}) = 4 \sum_{j=1}^{n} \left(\dim_{\mathbb{Q}} k_j\right)^{-1} - n + 1. \tag{5.51}$$

Grâce à 5.2, en additionant les termes (5.4.1) et (5.5.1) on peut conclure. □

6. Preuve de 1.2

6.1. $(\mathrm{CPG})_K$ implique (CET). Soient $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ des courbes elliptiques deux à deux non isogènes, $q_1, \ldots, q_s$ des points de $\mathbb{C}^*$ et $P_{1j}, \ldots, P_{r_j j}$ des points de $(\mathscr{E}_j)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Notons K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_l, j(\mathscr{E}_j), P_{ij})_{j=1,\ldots,n \;\, l=1,\ldots,s;\; i=1,\ldots,r_j}$ dans $\mathbb{C}$. Posons $r = \max\{r_j, s\}_{j=1,\ldots,n}$, $P_{ij} = 0$ pour chaque $i > r_j$ et $q_l = 1$ pour chaque $l > s$. Considérons le 1-motif défini sur K, $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m]$ avec $u(1, \ldots, 1) = (\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_r)$, où $\vec{R}_i = (P_{i1}, \ldots, P_{in}, q_i)$. D'après 4.2, les périodes de M sont les $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, d_{ij}, 2i\pi, \log q_i$, et d'après 5.5 la dimension du groupe de Mumford-Tate de M est $\dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^n 2 \dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4 \sum_{j=1}^n (\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1$. Si on applique la conjecture des périodes généralisée à M, on obtient l'inegalité

$$\begin{aligned} &\operatorname{deg.transc}_{\mathbb{Q}} K(2i\pi, \log q_i, \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, q_{ij})_{i,j} \\ &\geqslant \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n} 2 \dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4 \sum_{j=1}^{n} \left(\dim_{\mathbb{Q}} k_j\right)^{-1} - n + 1, \end{aligned}$$

qui n'est autre que la conjecture elliptico-torique.

6.2. (CET) implique $(\mathrm{CPG})_K$. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui n'est pas nécessairement algébrique. Considérons un 1-motif défini sur K, de la forme

$M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$ avec $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ des courbes elliptiques deux à deux non isogènes et $u(1, \ldots, 1) = (\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_r)$ où $\vec{R}_i = (P_{i1}, \ldots, P_{in}, q_{i1}, \ldots, q_{is}) \in \prod_{j=1}^n \mathscr{E}_j(K) \times \mathbb{G}_m^s(K)$. D'après 4.2 les périodes de M sont les $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, d_{ij}, \log q_{il}, 2i\pi$. Si on applique la conjecture elliptico-torique aux courbes elliptiques $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ et aux points P_{ij}, q_{il} on trouve

$$\begin{aligned}
&\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \\
&\quad \geqslant \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_{il}, \log q_{il}, j(\mathscr{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{i,j,l} \\
&\quad \geqslant \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^n 2 \dim_{k_j} I(\mathscr{E}_j) + 4 \sum_{j=1}^n (\dim_{\mathbb{Q}} k_j)^{-1} - n + 1.
\end{aligned}$$

Mais d'après 5.5 ce dernier terme est la dimension du groupe de Mumford-Tate de M et donc on a retrouvé la conjecture des périodes généralisée pour le 1-motif M. $\square$

References

[1] J. Ax, On Schanuel's conjecture, Ann. Math. 93 (1971) 252–268.

[2] Y. Andre, Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part, Compos. Math. 82 (1992) 1–24.

[3] Y. Andre, Quelques conjectures de transcendance issues de la géométrie algébrique, preprint de l'Inst. Math. de Jussieu 121 (1997).

[4] D. Bertrand, Galois representations and transcendental numbers, in: A. Baker (Ed.), New Advances in Transcendence Theory, Durham, 1986, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[5] R. Coleman, On a stronger version of the Schanuel-Ax theorem, Amer. J. Math. 102 (1980) 595–624.

[6] P. Deligne, Théorie de Hodge III, Pub. Math. de l'I.H.E.S. 44 (1975) 6–77.

[7] P. Deligne, J.-S. Milne, Tannakian categories, in: Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 900, Springer, Berlin, 1982.

[8] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math. de l'I.H.E.S. 29 (1966) 351–359.

[9] S. Lang, Transcendental Numbers, Vol. 4176, Addison–Wesley, Reading, MA, 1966.

[10] B. Mazur, W. Messing, Universal extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 170, Springer, Berlin, 1974.

[11] B. Moonen, Notes on Mumford-Tate groups, Notes de cours du centre Emile Borel, N. 19, 1999.

[12] Y. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, Math. Sb. 187 (1996).

[13] N. Saavedra Rivano, Catégories Tannakiennes, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 265, Springer, Berlin, 1972.

[14] G. Wüstholz, Zum Periodenproblem, Invent. Math. 78 (1984) 381–391.

[15] G. Wüstholz, Algebraic groups, Hodge theory, and transcendence, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, 1986.