**Le radical unipotent du groupe de Galois motivique d'un 1-motif**

# Le radical unipotent du groupe de Galois motivique d'un 1-motif

Cristiana Bertolin



## Introduction

Soient $M$ un 1-motif defini sur un corps $k$ de caractéristique nulle et $\langle M\rangle^{\otimes}$ la catégorie tannakienne engendrée par $M$ (dans une catégorie des systèmes de réalisations). Le produit tensoriel de la catégorie $\langle M\rangle^{\otimes}$ permet de définir la notion d'algèbre de Hopf commutative dans la catégorie $\mathrm{Ind}\langle M\rangle^{\otimes}$ des Ind-objets de $\langle M\rangle^{\otimes}$. La catégorie des schémas en groupes affines motiviques est l'opposée de la catégorie des algèbres de Hopf commutatives de $\mathrm{Ind}\langle M\rangle^{\otimes}$.

Le groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ de $M$ est le groupe fondamental de la catégorie tannakienne $\langle M\rangle^{\otimes}$ engendrée par $M$, i.e. le schéma en groupes affine motivique $\mathrm{Sp}(\Lambda)$, où $\Lambda$ est l'élément de $\langle M\rangle^{\otimes}$ universel pour la propriété suivante: pour tout $X$ dans $\langle M\rangle^{\otimes}$, il existe un morphisme $\lambda_X : X^{\vee}\otimes X \longrightarrow \Lambda$ fonctoriel en $X$. Ces morphismes $\{\lambda_X\}$, qui peuvent se reécrire sous la forme $X \longrightarrow X\otimes\Lambda$, définissent une action du groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ sur chaque élément $X$ de $\langle M\rangle^{\otimes}$. Puisque la définition de groupe de Galois motivique ne dépend que de la catégorie tannakienne engendrée par le 1-motif $M$ et puisque deux 1-motifs isogènes engendrent la même catégorie tannakienne, le groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ est définie à isogénie près.

---

*Math. classification:* 14A99 - 18A99 - 11G99

La filtration par le poids $W_*$ du 1-motif $M$ induit une filtration croissante $W_*$ en trois crans sur $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$. En particulier, le cran $W_{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le radical unipotent du groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$. Le résultat principal de cet article est un théorème de P. Deligne (théorème principal 0.1 infra) qui affirme que *le radical unipotent de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ est la variété semi-abélienne définie par l'action adjointe de l'algèbre de Lie $\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{W}}(\mathrm{W}_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M})))$ sur elle-même.* P. Deligne a esquissé la preuve de ce théorème dans une lettre qu'il a envoyé à l'auteur à la suite d'une question de celle-ci, à propos du radical unipotent du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs. En suivant ses indications (cf. [D01]), dans cet article on se propose de donner une preuve complète de ce résultat.

L'idée de la démonstration de ce théorème principal est la suivante: Soit

$$E = W_{-1}(\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Gr}_*^W(M)))$$

le 1-motif scindé de poids -1 et -2 obtenu à partir des endomorphismes du gradué $\mathrm{Gr}_*^W(M)$ de $M$. L'antisymétrisé du produit

$$P : E \otimes E \longrightarrow E$$

défini par la composition des endomorphismes, munit $E$ d'une structure d'algèbre de Lie, $(E, [\ ,\ ])$. L'action de $E$ sur le gradué $\mathrm{Gr}_*^W(M)$ est décrite par un morphisme

$$E \otimes \mathrm{Gr}_*^W(M) \longrightarrow \mathrm{Gr}_*^W(M)$$

qui munit le 1-motif $\mathrm{Gr}_*^W(M)$ d'une structure de $(E, [\ ,\ ])$-module de Lie.
La donnée d'une structure de Lie sur le 1-motif $E$ est équivalente à la donnée d'un $\Sigma$-torseur $d^*\mathcal{B}$ sur la variété abélienne $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{E})$. Grâce à ce $\Sigma$-torseur $d^*\mathcal{B}$, on peut caractériser le 1-motif $M$: se donner $M$ est équivalent à se donner le gradué $\mathrm{Gr}_*^W(M)$, un point $k$-rationnel $b$ sur la variété abélienne $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{E})$, et un point $k$-rationnel $\widetilde{b}$ dans la fibre du $\Sigma$-torseur $d^*\mathcal{B}$ au dessus du point $b$.
Soient $B$ la sous-variété abélienne de $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{E})$ et $Z(1)$ le sous-tore de $\mathrm{Gr}_{-2}^{\mathrm{W}}(\mathrm{E})$ tels que $(B, Z(1), [\ ,\ ])$ est la plus petite sous-algèbre de Lie de $(E, [\ ,\ ])$ dans laquelle vit $\widetilde{b}$. Via le morphisme $E \otimes \mathrm{Gr}_*^W(M) \longrightarrow \mathrm{Gr}_*^W(M)$, cette sous-algèbre de Lie agit sur le gradué $\mathrm{Gr}_*^W(M)$. De plus, $(B, Z(1), [\ ,\ ])$ est la plus petite sous-algèbre de Lie de $(E, [\ ,\ ])$ qui caractérise la catégorie $\langle M \rangle^{\otimes}$ au moyen de son action sur $\mathrm{Gr}_*^W(M)$: plus précisement, le foncteur "prendre le gradué"

$$\mathrm{Gr}_*^W : \langle M \rangle^{\otimes} \longrightarrow \langle \mathrm{Gr}_*^W(M) \rangle^{\otimes}$$

induit une équivalence de la catégorie $\langle M \rangle^{\otimes}$ avec la catégorie des objets de $\langle \mathrm{Gr}_*^W(M) \rangle^{\otimes}$ munis de l'action de l'algèbre de Lie $(B, Z(1), [\ ,\ ])$ (théorème 3.8). D'un autre côté, si on applique le théorème 8.17 [D90] à ce foncteur $\mathrm{Gr}_*^W$ : $\langle M \rangle^{\otimes} \longrightarrow \langle \mathrm{Gr}_*^W(M) \rangle^{\otimes}$, on obtient que la catégorie $\langle M \rangle^{\otimes}$ est équivalente à la catégorie des objets de $\langle \mathrm{Gr}_*^W(M) \rangle^{\otimes}$ munis d'une action de $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M})) + \mathrm{Gr}_{-2}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M}))$. Grâce à la propriété universelle du groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$, on conclut que $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M}))$ est la variété abélienne $B$

et $W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le tore $Z(1)$ (corollaire 3.10). Avec ces notations on peut énoncer:

**0.1. Théorème principal**
*Le radical unipotent* $W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ *de l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique de* $M$ *est la variété semi-abélienne extension de* $B$ *par* $Z(1)$

$$0 \longrightarrow Z(1) \longrightarrow W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) \longrightarrow B \longrightarrow 0 \tag{0.1.1}$$

*définie par l'action adjointe de l'algèbre de Lie* $(B, Z(1), [\,,\,])$ *sur* $B + Z(1)$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est le calcul de la dimension de l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ d'un 1-motif:

**0.2. Corollaire**

$$\dim \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M) = \dim B + \dim Z(1) + \dim \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{W}}\mathrm{M}),$$

*où on a clairement que* $\dim \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{W}}\mathrm{M}) = \dim \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}\mathrm{M})$ *si* $\mathrm{Gr}_{-1}^{W} M \neq 0$, *et que* $\dim \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{W}}\mathrm{M}) = 1$ *si* $\mathrm{Gr}_{-1}^{W} M = 0$ *et* $\mathrm{Gr}_{-2}^{W} M \neq 0$.

Pour définir le groupe de Galois motivique d'un 1-motif $M$ et pour pouvoir appliquer le théorème 8.17 de [D90], on a besoin de savoir que $M$ engendre une catégorie tannakienne. Actuellement, la seule façon d'obtenir ce résultat est d'identifier la catégorie des 1-motifs à une sous-catégorie de la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations. La définition de groupe de Galois motivique et l'application du théorème 8.17 de [D90], sont la raison pour laquelle on est obligé de supposer que le coprs $k$ est de caractéristique nulle (rappelons que la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations n'est défini que pour $k$ de caractéristique nulle).

Par contre, la définition de l'algèbre de Lie $(E, [\,,\,])$ ainsi que celle de son action sur le gradué $\mathrm{Gr}_*^{W}(M)$ ne requièrent pas l'hypothèse que le corps de définition de $M$ soit de caractéristique nulle: pour la construction de l'algèbre de Lie $(E, [\,,\,])$ et de son action $E \otimes \mathrm{Gr}_*^{W}(M) \longrightarrow \mathrm{Gr}_*^{W}(M)$, on se place dans la catégorie des 1-motifs (i.e. dans un cadre tout à fait géometrique) et non dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations. En particulier, on n'identifie pas les morphismes et les objets de la catégorie des 1-motifs aux réalisations correspondantes, mais on définit au fur et à mesure les produits tensoriels et les morphismes dont on a besoin: on va essentiellement tensoriser des motifs par des motifs purs de poids 0, et comme morphismes on va utiliser les projections et les biextensions. Remarquons que *les biextentions de deux 1-motifs par un tore sont l'interprétation géométrique des morphismes* $M_1 \otimes M_2 \longrightarrow Y(1)$ *du produit tensoriel de deux 1-motifs vers un tore.* Le référé m'a signalé qu'on peut généraliser cette dernière interprétation pour définir les morphismes $M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_3$ du produit tensoriel de deux 1-motifs vers un troisième 1-motif.

Pour chaque foncteur fibre $\omega$ de $\langle M\rangle^{\otimes}$ sur un $k$-schéma $S$, le $S$-schéma $\omega(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) := \mathrm{Spec}(\omega(\Lambda))$ est le $S$-schéma en groupes affines $\underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega)$, qui représente le foncteur qui à tout $S$-schéma $T$, $u : T \longrightarrow S$, associe le groupe des automorphismes de $\otimes$-foncteurs du foncteur fibre $u^*\omega$. En particulier, si $\omega_H$ est le foncteur fibre "réalisation de Hodge", $\omega_H(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le groupe de Mumford-Tate du 1-motif $M$: en d'autres termes, *le groupe de Galois motivique de $M$ est l'interprétation géométrique du groupe de Mumford-Tate de $M$*. Ce papier complète donc l'étude de la structure du groupe de Mumford-Tate de $M$ que l'auteur avait entreprise dans §1 [B02]: le théorème principal 0.1 est la version complète et motivique du lemme structural 1.4 [B02].

La notion de groupe fondamental d'une catégorie tannakienne (et donc, en particulier, la notion de groupe de Galois motivique) a été introduite par P. Deligne dans [D89] et [D90], où le lecteur trouvera toutes les propriétés de base de ce groupe. Dans [M94], J. S. Milne étudie le groupe de Galois motivique des motifs définis sur un corps fini. De plus, toujours dans cet article, il démontre que le groupe de Galois motivique des motifs de type CM sur un corps de caractéristique nulle, est le groupe de Serre. Pour le moment, ceci sont les seules résultats publiés sur les groupes de Galois motiviques.

Dans la première section on rappelle rapidement des notions de base sur les 1-motifs définis sur $k$ et sur leur groupe de Galois motivique. Après un survol sur les $\Sigma$-torseurs, dans la deuxième section on démontre que la donnée d'un $\Sigma$-torseur sur une variété abélienne est équivalente à la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur un 1-motif. On termine cette section en construisant un exemple de $\Sigma$-torseur et en explicitant le crochet de Lie qui lui correspond. Dans la section 3 on calcule les gradués $\mathrm{Gr}_{-1}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M}))$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{M}))$ de l'algébre de Lie du groupe de Galois motivique d'un 1-motif $M$ et enfin dans la section 4 on démontre le théorème principal.

*Remerciements*: Je suis très reconnaissante envers Pierre Deligne pour avoir éclairé d'un jour nouveau les résultats de ma thèse de doctorat (cf. [D01]). Je tiens aussi à le remercier pour les corrections et les commentaires qu'il a apportés à ce texte. Je remercie Lawrence Breen pour avoir mis en évidence le rôle des $\Sigma$-torseurs dans la lettre de P. Deligne, et Daniel Bertrand, Uwe Jannsen et Jean-Pierre Wintenberger pour les discussions que nous avons eues sur les 1-motifs. Je tiens à remercier aussi le référé pour ses commentaires et ses questions. Enfin, je suis très reconnaissante envers Michel Waldschmidt qui n'a jamais cessé de m'encourager et de me soutenir dans ma recherche.
J'ai rédigé ce papier pendant un séjour à l'université de Münster et à l'université de Strasbourg: je tiens à les remercier pour leur hospitalité.

Dans cette article, $k$ est un corps de caractéristique nulle et de clôture algébrique $\overline{k}$, et $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur $k$.

## 1. Rappels sur les 1-motifs et leur groupe de Galois motivique

1.1. D'après [D75] (10.1.10), *un 1-motif* $M = [X \xrightarrow{u} G]$ *sur* $k$ consiste en

(a) un schéma en groupes $X$ sur $k$, qui pour la topologie étale est un schéma en groupes constants défini par un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini;

(b) une variété semi-abélienne définie sur $k$, i.e. une extension d'une variété abélienne $A$ par un tore $Y(1)$ de groupe de cocaractères $Y$,

(c) un morphisme $u : X \longrightarrow G$ de schémas en groupes sur $k$.

On doit penser à $X$ comme au groupe des caractères d'un tore défini sur $k$, i.e. comme à un $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module de type fini. On identifie $X(\overline{k})$ à un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, qu'on note $\mathbb{Z}^{\mathrm{rg} X}$. La donnée (c) est équivalente à la donnée de l'homomorphisme

$$u : X(\overline{k}) \longrightarrow G(\overline{k})$$

$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant. On note $X$ (resp. $A$, $Y(1)$) le 1-motif $[X \longrightarrow 0]$ (resp. $[0 \longrightarrow A]$, $[0 \longrightarrow Y(1)]$).

Une isogénie entre deux 1-motifs $f = (f_X, f_G) : [X_1 \xrightarrow{u_1} G_1] \longrightarrow [X_2 \xrightarrow{u_2} G_2]$ est un morphisme de complexes de schémas en groupes, tel que $f_X : X_1 \longrightarrow X_2$ est injectif et de conoyau fini, et $f_G : G_1 \longrightarrow G_2$ est surjectif et de noyau fini. On définit sur $M = [X \xrightarrow{u} G]$ une filtration croissante $W_*$, dite *filtration par le poids*:

$$\begin{aligned} W_0(M) &= M, \\ W_{-1}(M) &= [0 \longrightarrow G], \\ W_{-2}(M) &= Y(1). \end{aligned}$$

Si on pose $\mathrm{Gr}_n^W \stackrel{\text{déf}}{=} W_n/W_{n-1}$, on a $\mathrm{Gr}_0^W(M) = X, \mathrm{Gr}_{-1}^W(M) = A$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^W(M) = Y(1)$.

La notion de biextension permet de donner une description plus symétrique des 1-motifs: considérons le 7-uplet $(X, X^*, A, A^*, v, v^*, \psi)$ où

- $X$ et $X^*$ sont deux schémas en groupes sur $k$, qui pour la topologie étale sont des schémas en groupes constants définis par des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini,

- $A$ et $A^*$ sont deux variétés abéliennes en dualité définies sur $k$,

- $v : X \longrightarrow A$ et $v^* : X^* \longrightarrow A^*$ sont deux morphismes de schémas en groupes sur $k$ (ou, ce qui est équivalent, $v : X(\overline{k}) \longrightarrow A(\overline{k})$ et $v^* : X^*(\overline{k}) \longrightarrow A^*(\overline{k})$ sont deux homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants), et

- $\psi$ est une trivialisation $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariante de l'image réciproque par $(v, v^*)$ de la biextension de Poincaré de $(A, A^*)$.

A partir de ce 7-uplet $(X, X^*, A, A^*, v, v^*, \psi)$ on peut reconstruire le 1-motif $M = [X \xrightarrow{u} G]$: $X^*$ s'identifie au groupe des caractères du tore $Y(1)$, $v^*$ définit l'extension $G$ de $A$ par $Y(1)$, et $v$ et $\psi$ fournissent l'homomorphisme $u$ (cf. [R94] 2.4.1).

1.2. Soient $\mathcal{M}_{\leq 1}(k)$ la catégorie des 1-motifs sur $k$ et $SR(k)$ la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations (pour les cycles de Hodge absolus) sur $k$ définie par Jannsen dans [J90] I 2.1. D'après [D75] §10 et [R94] 3.1 on a le foncteur pleinement fidèle

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\leq 1}(k) &\longrightarrow SR(k) \\ M &\longmapsto (\mathrm{T}_\sigma(M), \mathrm{T}_{\mathrm{dR}}(M), \mathrm{T}_\ell(M), I_{\sigma,\mathrm{dR}}, I_{\overline{\sigma},\ell})_{\substack{\sigma:k\to\mathbb{C},\ \overline{\sigma}:\overline{k}\to\mathbb{C} \\ \ell \text{ nombre premier}}} \end{aligned}$$

qui à chaque 1-motif $M$ associe ses réalisations de Hodge $\mathrm{T}_\sigma(M)$, de de Rham $\mathrm{T}_{\mathrm{dR}}(M)$, $\ell$-adique $\mathrm{T}_\ell(M)$, et les isomorphismes de comparaison $I_{\sigma,\mathrm{dR}} : \mathrm{T}_\sigma(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes_k \mathbb{C}$ et $I_{\overline{\sigma},\ell} : \mathrm{T}_\sigma(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(M)$. On peut donc identifier la catégorie $\mathcal{M}_{\leq 1}(k)$ à une sous-catégorie de $SR(k)$, qu'on notera encore $\mathcal{M}_{\leq 1}(k)$. Soit $\mathcal{M}(k)$ la sous-catégorie tannakienne de la catégorie $SR(k)$ engendrée par $\mathcal{M}_{\leq 1}(k)$. L'objet unité de $\mathcal{M}(k)$ est le 1-motif $\mathbb{Z}(0) = [\mathbb{Z} \longrightarrow 0]$. On note $M^\vee \cong \underline{\mathrm{Hom}}(M, \mathbb{Z}(0))$ le dual du 1-motif $M$ et $ev_M : M \otimes M^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$ et $\delta_M : \mathbb{Z}(0) \longrightarrow M^\vee \otimes M$ les morphismes de $\mathcal{M}(k)$ qui le caractérisent (cf. [D90] (2.1.2)). Le dual de Cartier de $M$ est le 1-motif

$$M^* = M^\vee \otimes \mathbb{Z}(1). \tag{1.2.1}$$

*La sous-catégorie tannakienne* $\langle M \rangle^\otimes$ *engendrée par* $M$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(k)$ d'objets les sous-quotients des sommes de $M^{\otimes n} \otimes M^{\vee \otimes m}$ et de foncteur fibre la restriction du foncteur fibre de $\mathcal{M}(k)$ à $\langle M \rangle^\otimes$.

D'après [By83] (2.2.5), pour chaque plongement $\sigma : k \longrightarrow \mathbb{C}$ de $k$ dans $\mathbb{C}$, le foncteur correspondant de la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ vers la catégorie des structures de Hodge mixtes est pleinement fidèle.

1.3. Dans la catégorie $\mathcal{M}(k)$, un *morphisme* $M_1 \otimes M_2 \longrightarrow Y(1)$ du produit tensoriel de deux 1-motifs vers un tore est une classe d'isomorphismes de biextensions de $(M_1, M_2)$ par $Y(1)$ (cf. [D75] (10.2.1)). On pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(k)}(M_1 \otimes M_2, Y(1)) = \mathrm{Biext}^1(M_1, M_2; Y(1)) \tag{1.3.1}$$

où $\mathrm{Biext}^1(M_1, M_2; Y(1))$ est le groupe des classes d'isomorphismes de biextensions de $(M_1, M_2)$ par $Y(1)$. En particulier, la classe de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$ par $\mathbb{Z}(1)$ est l'accouplement de Weil

$$P_{\mathcal{P}} : A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1).$$

Rappelons que dans [D75] §10.2, sous l'hypothèse que $k$ est algébriquement clos Deligne prouve que cette définition est compatible aux réalisations de Hodge, $\ell$-adique et de de Rham.

Soit $M$ un 1-motif de $\mathcal{M}(k)$. *Une biextension symétrique* $(B, \xi_B)$ de $(M, M)$ par $Y(1)$ est une biextension $B$ de $(M, M)$ par $Y(1)$ (cf. [D75] (10.2.1)) munie d'un morphisme de biextensions $\xi_B : s^*B \longrightarrow B$, où $s^*B$ est l'image inverse de $B$ par le morphisme $s : M \times M \longrightarrow M \times M$ qui permute les facteurs, tel que la restriction $d^*\xi_B$ de $\xi_B$ par le morphisme diagonal $d : M \longrightarrow M \times M$ coïncide avec l'isomorphisme

$$\nu_B : d^*s^*B \longrightarrow d^*B \tag{1.3.2}$$

découlant de l'identité $s \circ d = d$. Le morphisme $\xi_B$ est involutif, dans le sens que le morphisme composé $\xi_B \circ s^*\xi_B : s^*s^*B \longrightarrow s^*B \longrightarrow B$ s'identifie à l'identité de $B$ (cf. [Br83] 1.7). *La symétrisée* d'une biextension $B$ de $(M, M)$ par $Y(1)$ est la biextension symétrique $(B \wedge s^*B, \xi_{B\wedge s^*B})$, où le morphisme $\xi_{B\wedge s^*B}$ est donnée canoniquement par le morphisme composé

$$\xi_{B\wedge s^*B} : s^*B \wedge s^*s^*B \longrightarrow s^*B \wedge B \stackrel{\tau}{\longrightarrow} B \wedge s^*B \tag{1.3.3}$$

où la première flèche provient de la relation $s \circ s = \mathrm{id}$ alors que la seconde est le morphisme $\tau : s^*B \wedge B \longrightarrow B \wedge s^*B$ qui permute les facteurs du produit contracté.

*Un morphisme antisymétrique* $M \otimes M \longrightarrow Y(1)$ est une classe d'isomorphismes de biextensions symétriques de $(M, M)$ par $Y(1)$.

1.4. Remarque:

(1) Antisymétriser un morphisme $M \otimes M \longrightarrow Y(1)$ équivaut donc à symétriser la biextension correspondante.

(2) Soient $B$ une biextension de $(M_1, M_2)$ par $Y(1)$ et $b : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow Y(1)$ le morphisme qui lui correspond via (1.3.1). D'après une généralisation aux 1-motifs de [D75] (10.2.4), l'image inverse $s^*B$ de $B$ par le morphisme $s : M_2 \otimes M_1 \longrightarrow M_1 \otimes M_2$ qui permute les facteurs, correspond au morphisme

$$-b \circ s : M_2 \otimes M_1 \longrightarrow Y(1).$$

1.5. *La catégorie des schémas affines motiviques en* $\langle M \rangle^{\otimes}$ est la catégorie opposée de celle des anneaux commutatifs à unité de la catégorie $\mathrm{Ind}\langle M \rangle^{\otimes}$ des Ind-objets de $\langle M \rangle^{\otimes}$ (cf [D89] §5). L'objet final de cette catégorie est le schéma affine motivique $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}(0))$ défini par l'anneau $\mathbb{Z}(0)$ de $\langle M \rangle^{\otimes}$ (rappelons qu'il y a un foncteur canonique pleinement fidèle de la catégorie $\langle M \rangle^{\otimes}$ vers la catégorie $\mathrm{Ind}\langle M \rangle^{\otimes}$). Un schéma en groupes affine motivique est un objet en groupes de la catégorie des schémas affines motiviques. L'algèbre de Lie d'un schéma en groupes affine motivique est un pro-objet $\mathrm{L}$ de $\langle M \rangle^{\otimes}$ muni d'une structure d'algèbre de Lie, i.e. $\mathrm{L}$ est muni d'une application antisymétrique $[\, ,\, ] : \mathrm{L} \otimes \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}$ qui satisfait l'identité de Jacobi.

*Le groupe de Galois motivique* $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ d'un 1-motif $M$ de $\mathcal{M}(k)$ est le schéma en groupes affine motivique $\mathrm{Sp}(\Lambda)$, où $\Lambda$ est l'élément de $\langle M\rangle^{\otimes}$ universel pour la propriété suivante: pour tout $X$ dans $\langle M\rangle^{\otimes}$ il existe un morphisme

$$\lambda_X : X^{\vee} \otimes X \longrightarrow \Lambda \tag{1.5.1}$$

fonctoriel en $X$, i.e. tel que pour tout $f : X \longrightarrow Y$ dans $\langle M\rangle^{\otimes}$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y^{\vee} \otimes X & \stackrel{f^t\otimes 1}{\longrightarrow} & X^{\vee} \otimes X \\ {\scriptstyle 1\otimes f}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \lambda_X} \\ Y^{\vee} \otimes Y & \stackrel{\lambda_Y}{\longrightarrow} & \Lambda \end{array}$$

soit commutatif. La propriété universelle de $\Lambda$ est que pour tout $U$ dans $\mathrm{Ind}\langle M\rangle^{\otimes}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\Lambda, U) &\longrightarrow \{u_X : X^{\vee} \otimes X \longrightarrow U, \quad \text{fonctoriels en } X\} \\ f &\longmapsto f \circ \lambda_X \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

est une bijection. L'existence de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ est demontré dans [D90] 8.4, 8.10, 8.11 (iii). Puisque le groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ ne dépend que de la catégorie tannakienne engendré par le 1-motif $M$, la notion de groupe de Galois motivique est stable par dualité et par isogènies.

Les morphismes (1.5.1), qui peuvent se réecrire sous la forme $X \longrightarrow X \otimes \Lambda$, définissent une action du groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ sur chaque $X$ de $\langle M\rangle^{\otimes}$. En particulier, le morphisme $\Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$ représente l'action de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ sur lui-même par automorphismes intérieurs (cf. [D89] 6.1).

La filtration par le poids de $M$ induit sur le groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ une filtration croissante $W_*$ définie sur $k$ (cf. [S72] Chapitre 2 §2):

$W_0(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = \mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$

$W_{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = \{g \in \mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M) \mid (g - id)M \subseteq W_{-1}(M), (g - id)W_{-1}(M) \subseteq W_{-2}(M), (g - id)W_{-2}(M) = 0\}$,

$W_{-2}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = \{g \in \mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M) \mid (g - id)M \subseteq W_{-2}(M), (g - id)W_{-1}(M) = 0\}$,

$W_{-3}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = 0$.

Il est évident que $W_{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est unipotent. D'après l'analogue motivique de [By83] §2.2, $\mathrm{Gr}_0^W(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_0^W(M)$, par homothéties sur $\mathrm{Gr}_{-2}^W(M)$ et son image dans le groupe des automorphismes de $\mathrm{Gr}_{-1}^W(M)$ est le groupe de Galois motivique de la variété abélienne $\mathrm{Gr}_{-1}^W(M)$. Par conséquent $\mathrm{Gr}_0^W(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est réductif et $W_{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le radical unipotent de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$.

1.6. Si $\omega$ est un foncteur fibre de $\langle M\rangle^{\otimes}$ sur un $k$-schéma $S$, $\omega(\Lambda)$ est l'algèbre de Hopf dont le spectre $\mathrm{Spec}(\omega(\Lambda))$ est le $S$-schéma affine $\underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega)$ qui représente le foncteur qui à tout $S$-schéma $T$, $u : T \longrightarrow S$, associe le groupe des automorphismes de $\otimes$-foncteurs du foncteur $X \longmapsto u^*\omega(X)$ de $\langle M\rangle^{\otimes}$ dans les faisceaux localement libres de rang fini sur $T$ (cf. [D90] (8.13.1)).

D'après le formalisme de [D89] 5.11, le groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ correspond à la donnée, pour tout foncteur fibre $\omega$ sur tout $k$-schéma $S$, du $S$-schéma en groupes affine $\underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega)$, de formation compatible à tout changement de base $S'/S$, i.e. $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ correspond à $\{\omega \longmapsto \underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega)\}$.

1.7. Exemples:
(1) Le groupe de Galois motivique de l'objet unité $\mathbb{Z}(0)$ de $\mathcal{M}(k)$ est le schéma affine motivique $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}(0))$. Si $\omega_H$ est le foncteur fibre "réalisation de Hodge", on a que $\omega_H\big(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathbb{Z}(0))\big) := \mathrm{Spec}\big(\omega_H(\mathbb{Z}(0))\big) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, qui est le groupe de Mumford-Tate de $\mathbb{Z}(0)$.
(2) L'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique du tore $\mathbb{Z}(1)$ est le tore lui-même, i.e. $\mathrm{Lie}\big(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\mathbb{Z}(1))\big) = \mathbb{Z}(1)$. Si on applique le foncteur fibre "réalisation de Hodge", on obtient que l'algèbre de Lie du groupe de Mumford-Tate de $\mathbb{Z}(1)$ est la structure de Hodge de Tate.

## 2. Les $\Sigma$-torseurs et les algèbres de Lie

2.1. Soient $P$ et $G$ deux groupes abéliens dans un topos quelconque et $L$ un $G$-torseur sur $P$. Notons $m : P\times P \longrightarrow P$ la loi de groupe de $P$ et $s : P\times P \longrightarrow P\times P$ le morphisme qui permute les facteurs. On pose

$$\Lambda(L) = m^*L \wedge p_1^*L^{-1} \wedge p_2^*L^{-1}.$$

où $p_i : P \times P \longrightarrow P$ désigne la projection canonique sur le $i$-ème facteur. C'est un torseur sur $P \times P$ muni d'un isomorphisme canonique $\xi_L : s^*\Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(L)$ qui est défini par la commutativité de la loi de groupe de $P$, et dont l'image inverse par le morphisme diagonal est l'isomorphisme $d^*s^*\Lambda(L) \longrightarrow d^*\Lambda(L)$ défini par la relation $s \circ d = d$. On note

$$\theta(L) = m_{123}^*L \wedge m_{12}^*L^{-1} \wedge m_{13}^*L^{-1} \wedge m_{23}^*L^{-1} \wedge p_1^*L \wedge p_2^*L \wedge p_3^*L$$

où $m_{123} : P^3 \longrightarrow P$ (resp. $m_{ij} : P^3 \longrightarrow P$) est la flèche définie par $m_{123}(x_1, x_2, x_3)$ $= x_1 + x_2 + x_3$ (resp. $m_{ij}(x_1, x_2, x_3) = x_i + x_j$) et $p_i : P \times P \times P \longrightarrow P$ désigne la projection canonique sur le $i$-ème facteur. Si on confronte les fibres de $\theta(L)$ et $(m \times 1)^*\Lambda(L) \wedge p_{13}^*\Lambda(L)^{-1} \wedge p_{23}^*\Lambda(L)^{-1}$ au dessus du point général $(x, y, z)$ de $P\times P\times P$, on observe que les morphismes contraction $\underline{0} \longrightarrow L_z^{-1}L_z$ et $\underline{0} \longrightarrow L_x^{-1}L_x$ définissent les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\chi_1 :&\theta(L) \longrightarrow (m \times 1)^*\Lambda(L) \wedge p_{13}^*\Lambda(L)^{-1} \wedge p_{23}^*\Lambda(L)^{-1},\\ \chi_2 :&\theta(L) \longrightarrow (1 \times m)^*\Lambda(L) \wedge p_{12}^*\Lambda(L)^{-1} \wedge p_{13}^*\Lambda(L)^{-1}.\end{aligned}$$

*Un $G$-torseur cubiste* $(L,(B,\xi_B),\alpha)$ sur $P$ est un $G$-torseur $L$ sur $P$ muni d'une biextension symétrique $(B,\xi_B)$ de $(P,P)$ par $G$ et d'un morphisme de torseurs $\alpha : B \longrightarrow \Lambda(L)$, tel que $\xi_L \circ s^*\alpha = \alpha \circ \xi_B$ et tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(m\times 1)^*B \wedge p_{13}^*B^{-1} \wedge p_{23}^*B^{-1} & \longrightarrow & (m\times 1)^*\Lambda(L) \wedge p_{13}^*\Lambda(L)^{-1} \wedge p_{23}^*\Lambda(L)^{-1} \\
{\scriptstyle \psi_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_L} \\
(1\times m)^*B \wedge p_{12}^*B^{-1} \wedge p_{13}^*B^{-1} & \longrightarrow & (1\times m)^*\Lambda(L) \wedge p_{12}^*\Lambda(L)^{-1} \wedge p_{13}^*\Lambda(L)^{-1}
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont induites par $\alpha$, $\psi_L = \chi_1^{-1} \circ \chi_2$ et $\psi_B = s_2 \circ s_1^{-1}$ où $s_2$ et $s_1$ sont les sections qui définissent les deux lois de composition partielles sur la biextension $B$. Le morphisme $\alpha : B \longrightarrow \Lambda(L)$ impose, par transfert de structure, une structure de biextension à $\Lambda(L)$ qui est automatiquement une structure de biextension symétrique, à cause de l'existence de l'isomorphisme canonique $\xi_L : s^*\Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(L)$.

2.2. *Un $G$-torseur symétrique* $(L,\lambda)$ sur $P$ est un $G$-torseur $L$ sur $P$ muni d'un isomorphisme de torseurs $\lambda : inv^*L \longrightarrow L$, où $inv : P \longrightarrow P$ est la loi d'inverse de $P$.

Puisque $\mathrm{Biext}^1(P_1,P_2;G)$ est additif en les variables $P_1$ et $P_2$, si $B$ est une biextension de $(P,P)$ par $G$, on a l'isomorphisme de biextension

$$(p_1\times p_3)^*B \wedge (p_1\times p_4)^*B \wedge (p_2\times p_3)^*B \wedge (p_2\times p_4)^*B \longrightarrow (m\times m)^*B$$

où $p_i : P\times P\times P\times P \longrightarrow P$ est la projection canonique sur le $i$-ème facteur. Cet isomorphisme fournit le morphisme $(p_1\times p_4)^*B \wedge (p_2\times p_3)^*B \longrightarrow (m\times m)^*B \wedge (p_1\times p_3)^*B^{-1} \wedge (p_2\times p_4)^*B^{-1}$, dont l'image inverse par le morphisme diagonal $P^2 \longrightarrow P^2\times P^2$ est le morphisme

$$\gamma_B : B \wedge s^*B \longrightarrow \Lambda(d^*B). \tag{2.2.1}$$

*Un $\Sigma - G$-torseur* $((L,\lambda),(B,\xi_B),\alpha,\beta)$ sur $P$ consiste en un $G$-torseur cubiste $(L,(B,\xi_B),\alpha)$ dont le $G$-torseur sous-jacent est symétrique $(L,\lambda)$, et en un morphisme de torseurs $\beta : d^*B \longrightarrow L^2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B^2 & & \\
 & {\scriptstyle c_B}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \alpha^2} & \\
\Lambda(d^*B) & & \xrightarrow{\Lambda(\beta)} & & \Lambda(L^2)
\end{array}$$

où $c_B : B^2 \xrightarrow{1\wedge\xi_B^{-1}} B \wedge s^*B \xrightarrow{\gamma_B} \Lambda(d^*B)$. Le morphisme $\beta$ exprime la compatibilité entre la structure symétrique et la structure cubiste de $L$. Heuristiquement, ceci s'explique ainsi: si $\Delta_1 : P^2 \longrightarrow P^3$ est le morphisme défini par $\Delta_1(x,y) = (x+y,-x,-y)$, alors il existe un isomorphisme

(2.2.2) $$\Delta_1^*\theta(L) \longrightarrow \Lambda(L)\wedge\Lambda(inv^*L)^{-1}.$$

La structure cubiste sur $L$ munit $\Lambda(L)$ d'une structure de biextension, qui par les applications $\chi_i$ et $\Delta_1$ nous fournit une section de $\Delta_1^*\theta(L)$. L'isomorphisme (2.2.2) fait correspondre à cette section le morphisme de torseurs $\ell_L : \Lambda(inv^*L) \longrightarrow \Lambda(L)$. Dire que la structure cubiste de $L$ est compatible à la structure symétrique de $L$ signifie que $\ell_L$ coïncide avec le morphisme $\Lambda(\lambda) : \Lambda(inv^*L) \longrightarrow \Lambda(L)$.

2.3. Dans SGA7 I exposé VII §3, Grothendieck prouve que $\mathrm{Biext}^1(P,P;G) \cong \mathrm{Ext}^1(P\otimes^{\mathbb{L}} P,G)$. De façon analogue, dans [Br83] §8 Breen fournit l'interprétation homotopique des biextensions symétriques, des torseurs cubistes et des $\Sigma$-torseurs.

Grâce à cette intepretation, on a l'analogie suivant:

- une biextension $B$ de $(P,P)$ par $G$ est l'analogue d'une application $f : P\otimes P \longrightarrow G$;

- la biextension symétrisée $B\wedge s^*B$ de $B$ est l'analogue de l'application symétrisée $f(p,p')+f(p',p)$ de $f(p,p')$;

- imposer une structure de biextension sur $\Lambda(L) = m^*L\wedge p_1^*L^{-1}\wedge p_2^*L^{-1}$ est analogue à imposer à la première différence de $q : P \longrightarrow G$, $Q(p,p') = q(p+p')-q(p)-q(p')$ d'être bilinéaire, i.e. les torseurs cubistes sont les analogues des applications de degré 2;

- un $G$-torseur symétrique $L$ sur $P$ est l'analogue d'une application $q : P \longrightarrow G$ tel que $q(p) = q(-p)$ pour chaque $p$ dans $P$;

- imposer la compatibilité entre la structure cubiste de $L$ et la structure de symétrie de $L$ est analogue à imposer que $q : P \longrightarrow G$ soit de degrés 2 et que $q(p) = q(-p)$ pour chaque $p$ dans $P$, i.e. les $\Sigma$-torseurs sont les analogues des applications quadratiques.

2.4. Après ce rappel sur les $\Sigma$-torseurs, on va maintenant démontrer que la donnée d'un $\Sigma$-torseur sur une variété abélienne est équivalente à la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur un 1-motif.

Soit $M = [0 \longrightarrow G]$ un 1-motif de $\mathcal{M}(k)$, où $W_{-1}(M) = G$ est une extension d'une variété abélienne $A$ par un tore $Y(1)$. Notons $d : A \longrightarrow A\times A$ le morphisme diagonal de $A$.

2.5. **Proposition**

*La donnée d'un $\Sigma - Y(1)$-torseur $((L,\lambda),(B,\xi_B),\alpha,\beta)$ sur $A$ équivaut à la donnée d'une structure d'algèbre de Lie $[\,,\,] : M\otimes M \longrightarrow M$ sur $M$.*
*Plus précisement, le crochet de Lie $[\,,\,]$ et la biextension symétrique $(B,\xi_B)$ se définissent mutuellement via (1.3.1), et le $\Sigma - Y(1)$-torseur correspondant au crochet de Lie $[\,,\,]$ est la restriction $d^*B$ de la biextension symétrique $B$ .*

PREUVE: Soit $((L,\lambda),(B,\xi_B),\alpha,\beta)$ un $\Sigma - Y(1)$-torseur sur $A$. Par définition, la biextension symétrique $(B,\xi_B)$ définit une application bilinéaire antisymétrique

$[\,,\,] : A\otimes A \longrightarrow Y(1)$. Cette application se relève en un morphisme $[\,,\,] : G\otimes G \longrightarrow Y(1)$ bilinéaire antisymétrique, qui à cause des poids est la seule composante non nulle d'un morphisme $[\,,\,] : M\otimes M \longrightarrow M$. Pour chaque $x$ et $y$ dans $M = W_{-1}(M)$, le produit $[x, y]$ est dans $W_{-2}(M) = Y(1)$ et donc le produit $[[x, y], z]$ est nul pour chaque $z$ dans $M$. L'application $[\,,\,]$ vérifie donc trivialement l'identité de Jacobi.

Soit $[\,,\,] : M \otimes M \longrightarrow M$ une structure d'algèbre de Lie sur $M$. A cause des poids, elle a pour seule composante non nulle $[\,,\,] : G \otimes G \longrightarrow Y(1)$. Puisque $Y(1) \otimes Y(1)$ est un motif de poids -4, ce dernier morphisme se factorise par un morphisme $A\otimes A \longrightarrow Y(1)$ toujours bilinéaire et antisymétrique, et qui via (1.3.1) définit une biextension symétrique $(B, \xi_B)$ de $(A, A)$ par $Y(1)$. D'après [Br83] 5.7 la restriction $d^*B$ de $B$ par le morphisme diagonal $d : A \longrightarrow A \times A$ est muni d'une $\Sigma$-structure canonique $((d^*B, (-1)), (B \wedge s^*B, \xi_{B\wedge s^*B}), \gamma_B, 1 \wedge \nu_B)$.

2.6. Appliquons cette proposition aux $\Sigma$-torseurs obtenus à partir de biextensions: Soit $\mathcal{B}$ une biextension de $(A, A)$ par $Y(1)$. La restriction $d^*\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$ par le morphisme diagonal $d : A \longrightarrow A \times A$ est un $Y(1)$-torseur symétrique dont la structure de symétrie est donnée par l'isomorphisme de torseurs $-1 : (-1)^*d^*\mathcal{B} \longrightarrow d^*\mathcal{B}$, où $-1 : A \longrightarrow A$ est la loi d'inverse de la variété abélienne $A$. De plus, d'après [Br83] 5.7 ce torseur est de façon canonique un $\Sigma - Y(1)$-torseur sur $A$ : sa $\Sigma$-structure canonique est donnée par le quadruplet

$$((d^*\mathcal{B}, -1), (\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}, \xi_{\mathcal{B}\wedge s^*\mathcal{B}}), \gamma_{\mathcal{B}}, 1 \wedge \nu_{\mathcal{B}})$$

où $\gamma_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B} \longrightarrow \Lambda(d^*\mathcal{B})$ et $1 \wedge \nu_{\mathcal{B}} : d^*(\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}) \longrightarrow (d^*\mathcal{B})^2$ (cf. (1.3.2), (1.3.3) et (2.2.1)).

2.7. **Corollaire**

*La donnée du $\Sigma - Y(1)$-torseur $d^*\mathcal{B} = ((d^*\mathcal{B}, -1), (\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}, \xi_{\mathcal{B}\wedge s^*\mathcal{B}}), \gamma_{\mathcal{B}}, 1 \wedge \nu_{\mathcal{B}})$ sur $A$ équivaut à la donnée du crochet de Lie $[\,,\,] : M \otimes M \longrightarrow M$ correspondant à la biextension symétrique $(\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}, \xi_{\mathcal{B}\wedge s^*\mathcal{B}})$ via (1.3.1).*

PREUVE: Puisque $s\circ d = d$, on observe que $d^*(\mathcal{B}\wedge s^*\mathcal{B}) = 2\, d^*\mathcal{B}$. A partir de cette remarque, il suffit d'appliquer la proposition 2.5 et de se rappeler qu'en travaillant modulo isogènie, on peut inverser le 2.

2.8. Exemple: Soient $x$ et $y$ deux entiers non nuls. A partir de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}^*$ de $(A^*, A)$, on va construire de façon explicite une biextension $\mathbb{P}$ de $(A^x + (A^*)^y, A^x + (A^*)^y)$ par $\mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$, et le crochet de Lie sur le 1-motif scindé $(A^x + (A^*)^y) + \mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$ défini par le $\Sigma - \mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$-torseur $d^*\mathbb{P}$, où $d$ est le morphisme diagonal de $A^x + (A^*)^y$.

Considérons $(x \cdot y)$-copies de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$, $(x \cdot y)$-copies de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}^*$ de $(A^*, A)$, $x^2$-copies de la biextension trivial $\underline{0}_A = A \times A \times \mathbb{G}_m$ de $(A, A)$ par $\mathbb{G}_m$ et $y^2$-copies de la biextension trivial $\underline{0}_{A^*} = A^* \times A^* \times \mathbb{G}_m$ de $(A^*, A^*)$ par $\mathbb{G}_m$. Parce que la catégorie $\mathrm{Biext}^1(A, A^*; \mathbb{G}_m)$ est additive en les variables $A$ et $A^*$ (voir SGA 7 I Exposé VII (2.4.2)), à partir de ces $(x+y)^2$-biextensions on obtient une biextension $\mathbb{B}$ de $(A^x+(A^*)^y, A^x+(A^*)^y)$ par $\mathbb{G}_m$ qui a la propriété suivante:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{B}_{|(0\times\ldots0\times A\times0\ldots\times0,0\times\ldots0\times A^*\times0\ldots\times0)} = \mathcal{P}\\
&\mathbb{B}_{|(0\times\ldots0\times A^*\times0\ldots\times0,0\times\ldots0\times A\times0\ldots\times0)} = \mathcal{P}^*\\
&\mathbb{B}_{|(0\times\ldots0\times A^*\times0\ldots\times0,0\times\ldots0\times A^*\times0\ldots\times0)} = \underline{0}_{A^*}\\
&\mathbb{B}_{|(0\times\ldots0\times A\times0\ldots\times0,0\times\ldots0\times A\times0\ldots\times0)} = \underline{0}_{A}
\end{aligned}
\tag{2.8.1}
$$

De façon explicite, $\mathbb{B}$ se construit ainsi (cf. SGA7 I exposé VII 2.4 ou [Br83] (1.2.3)): soient $pr_i^A : A^x+(A^*)^y \longrightarrow A$ et $pr_j^{A^*} : A^x+(A^*)^y \longrightarrow A^*$ les projections canoniques respectivement sur le $i$-ème et le $x+j$-ème facteur pour $i=1,\ldots,x$ et $j=1,\ldots,y$. Les biextensions

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}_1 &= \Big(\bigwedge_{i=1}^{x}(pr_i^A \times id_A)^*\underline{0}_A\Big)\bigwedge\Big(\bigwedge_{j=1}^{y}(pr_j^{A^*} \times id_A)^*\mathcal{P}^*\Big)\\
\mathbb{B}_2 &= \Big(\bigwedge_{i=1}^{x}(pr_i^A \times id_{A^*})^*\mathcal{P}\Big)\bigwedge\Big(\bigwedge_{j=1}^{y}(pr_j^{A^*} \times id_{A^*})^*\underline{0}_{A^*}\Big)
\end{aligned}
\tag{2.8.2}
$$

sont respectivement des biextensions de $(A^x+(A^*)^y, A)$ par $\mathbb{G}_m$ et $(A^x+(A^*)^y, A^*)$ par $\mathbb{G}_m$. Avec ces notations on a

$$
\mathbb{B} = \Big(\bigwedge_{i=1}^{x}(id_{A^x+(A^*)^y} \times pr_i^A)^*\mathbb{B}_1\Big)\bigwedge\Big(\bigwedge_{j=1}^{y}(id_{A^x+(A^*)^y} \times pr_j^{A^*})^*\mathbb{B}_2\Big).
\tag{2.8.3}
$$

A partir de $(x\cdot y)$-copies de la biextension $\mathbb{B}$, en utilisant la propriété d'additivité de la catégorie $\mathrm{Biext}^1(A^x+(A^*)^y, A^x+(A^*)^y;\mathbb{G}_m)$ cette fois par rapport à l'argument $\mathbb{G}_m$, on construit une biextension $\mathbb{P}$ de $(A^x+(A^*)^y, A^x+(A^*)^y)$ par $\mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$: pour $l=1,\ldots,x\cdot y$, soient $s_l : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$ les sections qui décrivent $\mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$ comme somme directe de ses facteurs. La biextension $\mathbb{P}$ est le produit contracté des images directes de la biextension $\mathbb{B}$ par les sections $s_l$:

$$
\mathbb{P} = \bigwedge_{l=1}^{x\cdot y}(s_l)_*\,\mathbb{B}.
$$

Posons $C = A^x+(A^*)^y, W(1) = \mathbb{Z}^{x\cdot y}(1)$ et notons

$$
N = C + W(1)
$$

le 1-motif scindé de seules composantes non nulles $W_{-1}(N) = C$ et $W_{-2}(N) = W(1)$. Soit $d : C \longrightarrow C \times C$ le morphisme diagonal de $C$. La restriction $d^*\mathbb{P}$

de la biextension $\mathbb{P}$ de $(C, C)$ par $W(1)$, est munie d'une structure de $\Sigma - W(1)$-torseur sur $C$. D'après le corollaire 2.7 la donnée de ce $\Sigma - W(1)$-torseur est équivalente à la donnée du crochet de Lie $[\,,\,] : N \otimes N \longrightarrow N$ correspondant à la biextension symétrique $(\mathbb{P} \wedge s^*\mathbb{P}, \xi_{\mathbb{P}\wedge s^*\mathbb{P}})$ via (1.3.1). Par construction ce crochet de Lie $[\,,\,] : N \otimes N \longrightarrow N$ s'explicite ainsi

$$
\begin{aligned}
& [\,,\,]_{|A^x \otimes A^x} = 0 \\
& [\,,\,]_{|(A^*)^y \otimes (A^*)^y} = 0 \\
(2.8.4) \qquad & [\,,\,]_{|A^x \otimes (A^*)^y} : A^x \otimes (A^*)^y \longrightarrow \mathbb{Z}^{x\cdot y}(1) \\
& (a_1, \ldots, a_x), (b_1, \ldots, b_y) \longmapsto (< a_i, b_j >)_{i,j}
\end{aligned}
$$

où $<\,,\,>: A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$ est l'accouplement de Weil défini via (1.3.1) par la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$, qui est une biextension symétrique. Par conséquent le produit $[\,,\,] : N \otimes N \longrightarrow N$, de seule composante non nulle $[\,,\,] : C \otimes C \longrightarrow W(1)$, s'idéntifie à $(x \cdot y)$-copies de l'accouplement de Weil $<\,,\,>: A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$.

2.9. Remarque: Si on identifie $A$ et $A^*$ avec $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A^*, \mathbb{G}_m)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m)$ respectivement, un point dans la fibre $(d^*\mathbb{P})_c$ de $d^*\mathbb{P}$ au dessus d'un point $c = (c_1, c_2)$ de $A^x \times (A^*)^y(k)$, correspond à un 1-motif $N_c$ tel que

(i) $W_{-2}(N_c) = \mathbb{Z}^y(1)$, et

(ii) $W_{-1}(N_c)$ est parametrisé par le point $c_1$ de $A^x$ et $(W_0/W_{-1}(N_c))^*$ est paramétrisé par le point $c_2$ de $(A^*)^y$ (ou si on préfère $W_0/W_{-2}(N_c) = [\mathbb{Z}^x \xrightarrow{c_1} A]$ et $W_0/W_{-2}(N_c^*) = [\mathbb{Z}^y \xrightarrow{c_2} A^*]$). On peut résumer la situation avec le diagramme suivant

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}^{x\cdot y}(1) & - & d^*\mathbb{P} & \longrightarrow & A^x \times (A^*)^y & \longrightarrow 0 \\
= & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbb{Z}^{x\cdot y}(1) & - & (d^*\mathbb{P})_c & \longrightarrow & [\mathbb{Z}^x \xrightarrow{c_1} A] + [\mathbb{Z}^y \xrightarrow{c_2} A^*] & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

où on a identifie le point $c$ de $A^x \times (A^*)^y(k)$ avec le 1-motif $[\mathbb{Z}^x \xrightarrow{c_1} A] + [\mathbb{Z}^y \xrightarrow{c_2} A^*]$ et où les traits horizontaux désignent le fait que $d^*\mathbb{P}$ est un $W(1)$-torseur.

## 3. Etude de $\mathrm{Gr}_*^W(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$.

3.1. Soient $M = [X \xrightarrow{u} G]$ un 1-motif de $\mathcal{M}(k)$ de gradué $\widetilde{M} = X + A + Y(1)$ (i.e. $\widetilde{M} \cong \mathrm{Gr}_*^W(M)$), et $\langle M \rangle^{\otimes}$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{M}(k)$ engendrée par $M$. Dans cette section on va calculer de façon explicite les crans $\mathrm{Gr}_{-1}^W$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^W$ de l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique de $M$.

On pose

$$E = W_{-1}(\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M})).$$

Le dual de $\widetilde{M}$ est le 1-motif $\widetilde{M}^\vee = Y^\vee(-1) + A^\vee + X^\vee$, où $Y^\vee(-1), A^\vee$ et $X^\vee$ sont des motifs purs de poids respectifs 2, 1 et 0. Puisque $\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M}^\vee \otimes \widetilde{M}$, on observe que $E$ est le 1-motif scindé, de poids $\leq -1$, de seules composantes non nulles

$$\begin{aligned} E_{-1} &= X^\vee \otimes A + A^\vee \otimes Y(1) \\ E_{-2} &= X^\vee \otimes Y(1) \end{aligned}$$

de poids respectifs -1 et -2. D'après (1.2.1) le 1-motif $A^\vee \otimes Y(1)$ est isomorphe au 1-motif $A^* \otimes Y$. De plus, $A^* \otimes Y(\overline{k}) = (A^*)^{\mathrm{rg} Y}(\overline{k})$ et $X^\vee \otimes A(\overline{k}) = A^{\mathrm{rg} X^\vee}(\overline{k})$.

La composition des endomorphismes définit un produit

$$P : E \otimes E \longrightarrow E$$

sur $E$ de seule composante non nulle le morphisme $E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}$ de $\langle M \rangle^\otimes$ qui s'explicite ainsi:

$$E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow (X^\vee \otimes A) \otimes (A^* \otimes Y) \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \otimes X^\vee \otimes Y = E_{-2}$$

où la première flèche est la projection de $E_{-1} \otimes E_{-1}$ sur le facteur $(X^\vee \otimes A) \otimes (A^* \otimes Y)$ et la deuxième flèche provient du morphisme $P_{\mathcal{P}} : A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$ défini par la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$ par $\mathbb{Z}(1)$ (cf. (1.3.1)). Ce produit $P : E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}$ munit $E$ d'une structure d'anneau. L'action de $E = W_{-1}(\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}))$ sur $\widetilde{M}$ est décrite par le morphisme $E \otimes \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ de $\langle M \rangle^\otimes$ défini par

$$(3.1.1) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &: (X^\vee \otimes A) \otimes X \longrightarrow A \\ \alpha_2 &: (A^* \otimes Y) \otimes A \longrightarrow Y(1) \\ \gamma &: (X^\vee \otimes Y(1)) \otimes X \longrightarrow Y(1) \end{aligned}$$

où la première et la dernière flèche se déduisent du morphisme évaluation $ev_{X^\vee} : X^\vee \otimes X \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$, tandis que la deuxième provient de l'accouplement de Weil $P_{\mathcal{P}} : A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$. Les morphismes $\alpha_1$ et $\gamma$ sont donc des projections.
Le morphisme $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) : E \otimes \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ munit le 1-motif $\widetilde{M}$ d'une structure de $E$-module.

3.2. D'après (1.3.1) le produit $P : E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}$ définit une biextension $\mathcal{B}$ de $(E_{-1}, E_{-1})$ par $E_{-2}$. Si $d : E_{-1} \longrightarrow E_{-1} \times E_{-1}$ désigne le morphisme diagonal de $E_{-1}$, d'après le corollaire 2.7 le $\Sigma - X^\vee \otimes Y(1)$-torseur

$$d^*\mathcal{B} = ((d^*\mathcal{B}, -1), (\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}, \xi_{\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}}), \gamma_{\mathcal{B}}, 1 \wedge \nu_{\mathcal{B}})$$

munit le 1-motif $E$ du crochet de Lie $[\,,\,] : E \otimes E \longrightarrow E$, de seule composante non nulle

$$[\,,\,] : E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}.$$

Ce crochet $[\,,\,]$, qui correspond via (1.3.1) à la biextension symétrisée $\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}$, est l'antisymétrisé du produit $P : E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}$ (cf. remarque 1.4). Le 1-motif $E$, muni de ce crochet de Lie, est une algèbre de Lie $(E, [\,,\,])$.

Puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_{-1} \otimes E_{-1} \otimes X \arrow[r, "id_{E_{-1}} \otimes \alpha_1"] \arrow[dr, "{[\,,\,] \otimes id_X}"'] & E_{-1} \otimes A \arrow[r, "\alpha_2"] & Y(1) \\
& E_{-2} \otimes X \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, le morphisme $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) : E \otimes \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ est compatible au crochet de Lie $[\,,\,] : E_{-1} \otimes E_{-1} \longrightarrow E_{-2}$ et donc $\widetilde{M}$ est un $(E, [\,,\,])$-module de Lie. On a démontré

3.3. **Lemme**

*(1)* $E = W_{-1}(\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}))$ *est muni d'une structure d'algèbre de Lie,* $[\,,\,] : E \otimes E \longrightarrow E$, *qui équivaut via 2.7 à la donnée du* $\Sigma - X^\vee \otimes Y(1)$*-torseur* $d^*\mathcal{B} = ((d^*\mathcal{B}, -1), (\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}, \xi_{\mathcal{B} \wedge s^*\mathcal{B}}), \gamma_{\mathcal{B}}, 1 \wedge \nu_{\mathcal{B}})$*;*

*(2)* $\widetilde{M}$ *est muni d'une structure de* $(E, [\,,\,])$*-module de Lie.*

3.4. Remarques:

(1) La donnée des flèches $\alpha_1$ et $\gamma$ est équivalente à la donnée des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants $\alpha_1 : A^{\mathrm{rg} X^\vee}(\overline{k}) \otimes X(\overline{k}) \longrightarrow A(\overline{k})$ et $\gamma : Y(1)^{\mathrm{rg} X^\vee}(\overline{k}) \otimes X(\overline{k}) \longrightarrow Y(1)(\overline{k})$ respectivement.

(2) La donnée du morphisme $\alpha_2 : (A^* \otimes Y) \otimes A \longrightarrow Y(1)$ est équivalente à la donnée de l'homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant $\alpha_2 : (A^*)^{\mathrm{rg} Y}(\overline{k}) \otimes A(\overline{k}) \longrightarrow Y(1)(\overline{k})$ qui s'identifie à $\mathrm{rg}(Y)$-copies de l'accouplement de Weil $P_{\mathcal{P}} : A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$. Par conséquent, sur $\overline{k}$ la biextension $\mathcal{B}$ est la biextension $\mathbb{P}$ construite de façon explicite dans l'exemple 2.8 et le crochet de Lie $[\,,\,] : E \otimes E \longrightarrow E$ est décrit par les formules (2.8.4) (il suffit de prendre $x = \mathrm{rg} X^\vee$ et $y = \mathrm{rg} Y$).

(3) Le dual de Cartier de $\widetilde{M}$ est le 1-motif scindé $\widetilde{M}^* = Y^\vee + A^* + X^\vee(1)$. D'après (1.2.1), on observe que

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}^*) \cong (\widetilde{M}^*)^\vee \otimes \widetilde{M}^* &= (\widetilde{M}^\vee(1))^\vee \otimes \widetilde{M}^\vee(1) \\
&= \widetilde{M}(-1) \otimes \widetilde{M}^\vee(1) \\
&= \widetilde{M} \otimes \widetilde{M}^\vee \cong \underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}).
\end{aligned}$$

Par conséquence, le 1-motif $E$ s'identifie avec $W_{-1}(\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{M}^*))$ et son action $E \otimes \widetilde{M}^* \longrightarrow \widetilde{M}^*$ sur $\widetilde{M}^*$ est décrite par les flèches de $\langle M \rangle^\otimes$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2^* :(A^* \otimes Y) \otimes Y^\vee \longrightarrow A^* \\
(3.4.1) \qquad &\alpha_1^* :(X^\vee \otimes A) \otimes A^* \longrightarrow X^\vee(1) \\
&\gamma^* :(X^\vee \otimes Y(1)) \otimes Y^\vee \longrightarrow X^\vee(1)
\end{aligned}
$$

où $\alpha_2^*$ et $\gamma^*$ sont des projections tandis que $\alpha_1^*$ est donnée par la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$.

3.5. Soit $(X, Y^\vee, A, A^*, v : X \longrightarrow A, v^* : Y^\vee \longrightarrow A^*, \psi : X \otimes Y^\vee \longrightarrow (v \times v^*)^*\mathcal{P})$ le 7-uplet qui définit le 1-motif $M = [X \xrightarrow{u} G]$ (cf. 1.1). Le $\Sigma - X^\vee \otimes Y(1)$-torseur $d^*\mathcal{B}$ défini en 3.2, permet d'interpreter les données $v, v^*$ et $\psi$ en termes de points:

Grâce aux morphismes $\delta_{X^\vee} : \mathbb{Z}(0) \longrightarrow X \otimes X^\vee$ et $ev_X : X \otimes X^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$, la donnée du morphisme $v : X \longrightarrow A$ est équivalente à la donnée du morphisme

$$V : \mathbb{Z}(0) \xrightarrow{\delta_{X^\vee}} X \otimes X^\vee \xrightarrow{v \otimes Id_{X^\vee}} A \otimes X^\vee.$$

De façon analogue, le morphisme $v^* : Y^\vee \longrightarrow A^*$ équivaut au morphisme

$$V^* : \mathbb{Z}(0) \xrightarrow{\delta_Y} Y^\vee \otimes Y \xrightarrow{v^* \otimes Id_Y} A^* \otimes Y.$$

Par conséquent se donner les homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants $v : X(\overline{k}) \longrightarrow A(\overline{k})$ et $v^* : Y^\vee(\overline{k}) \longrightarrow A^*(\overline{k})$ est équivalent à se donner un point $b = (b_1, b_2)$ de $E_{-1}(k) = A \otimes X^\vee(k) + A^* \otimes Y(k)$.

La trivialisation $\psi$ de l'image réciproque par $(v \times v^*)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$ correspond à un point $\widetilde{b}$ dans la fibre de $d^*\mathcal{B}$ au dessus de $b = (b_1, b_2)$ : Le groupe des caractères du tore $X^\vee \otimes Y(1)$ est le $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module $X \otimes Y^\vee$. Fixons un élément $(x, y^\vee)$ de $X \otimes Y^\vee(\overline{k})$. Par définition du point $b$, il existe un élément $s$ de $X(\overline{k})$ et un élément $t$ de $Y^\vee(\overline{k})$ tels que $v(x) = \alpha_1(b_1, s) \in A(k)$ et $v^*(y^\vee) = \alpha_2^*(b_2, t) \in A^*(k)$. Notons $i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B}$ la restriction de $d^*\mathcal{B}$ par l'inclusion $i_{x,y^\vee} : \{(v(x), v^*(y^\vee))\} \longrightarrow E_{-1}$ dans $E_{-1}$ de la sous-variété abélienne engendrée par le point $(v(x), v^*(y^\vee))$ de $E_{-1}(k)$. L'image directe $(x, y^\vee)_* i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B}$ de $i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B}$ par le caractère $(x, y^\vee) : X^\vee \otimes Y(1) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$ est un $\Sigma - \mathbb{Z}(1)$-torseur sur $\{(v(x), v^*(y^\vee))\}$ :

$$
\begin{array}{ccccc}
(x, y^\vee)_* i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B} & \longleftarrow & i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B} & \longrightarrow & d^*\mathcal{B} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{(v(x), v^*(y^\vee))\} & = & \{(v(x), v^*(y^\vee))\} & \xrightarrow{i_{x,y^\vee}} & E_{-1}
\end{array}
$$

D'après la remarque 3.4 (2), le point $\psi(x, y^\vee)$ correspond à un point $(\widetilde{b})_{x,y^\vee}$ de $(x, y^\vee)_* i^*_{x,y^\vee} d^*\mathcal{B}$ au dessus de $(v(x), v^*(y^\vee))$. Puisque la connaissance de la famille de points $\{(\widetilde{b})_{x,y^\vee}\}_{x,y^\vee}$ équivaut à la connaissance d'un point $k$-rationnel $\widetilde{b}$ de $d^*\mathcal{B}$ au dessus du point $b$ de $E_{-1}(k)$, la donnée de la trivialisation $\psi$ équivaut à la donnée du point $\widetilde{b}$ de $d^*\mathcal{B}$.

On peut donc conclure:

3.6. **Lemme**
*La donnée du 1-motif* $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$ *est équivalente aux données*

(a) *du gradué* $\widetilde{M} = X + A + Y(1)$ *de* $M$*;*

(b) *d'un point* $b = (b_1, b_2)$ *dans* $E_{-1}(k) = X^\vee \otimes A(k) + A^* \otimes Y(k)$*;*

(c) *d'un point* $k$*-rationnel* $\widetilde{b}$ *dans la fibre de* $d^*\mathcal{B}$ *au dessus du point* $b$ *de* $E_{-1}$*.*

3.7. Avant de caractériser la catégorie tannakienne engendrée par le 1-motif $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$, on a besoin d'introduire quelques notations:

- Soit $B$ la plus petite sous-variété abélienne (à isogenie près) de $X^\vee \otimes A + A^* \otimes Y$ contenant le point $b = (b_1, b_2) \in X^\vee \otimes A(k) \times A^* \otimes Y(k)$. La restriction $i^*d^*\mathcal{B}$ de $d^*\mathcal{B}$ par l'inclusion $i : B \longrightarrow E_{-1}$ de $B$ dans $E_{-1}$, est un $\Sigma - X^\vee \otimes Y(1)$-torseur sur $B$.

- Notons $Z_1$ le plus petit sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module de $X^\vee \otimes Y$ tel que le tore $Z_1(1)$, qu'il défini, contienne l'image du crochet de Lie $[\,,\,] : B \otimes B \longrightarrow X^\vee \otimes Y(1)$. L'image directe $p_*i^*d^*\mathcal{B}$ du $\Sigma - X^\vee \otimes Y(1)$-torseur $i^*d^*\mathcal{B}$ par la projection $p : X^\vee \otimes Y(1) \longrightarrow (X^\vee \otimes Y/Z_1)(1)$ est alors un $\Sigma - (X^\vee \otimes Y/Z_1)(1)$-torseur trivial sur $B$, i.e. $p_*i^*d^*\mathcal{B} = B \times (X^\vee \otimes Y/Z_1)(1)$. On note

$$\pi : p_*i^*d^*\mathcal{B} \longrightarrow (X^\vee \otimes Y/Z_1)(1)$$

la projection canonique et $s : B \longrightarrow p_*i^*d^*\mathcal{B}$ la section canonique. On peut résumer la situation avec le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
X^\vee \otimes Y(1) & = & X^\vee \otimes Y(1) & \stackrel{p}{\longrightarrow} & (X^\vee \otimes Y/Z_1)(1) \\
| & & | & & \uparrow^{\pi} \\
d^*\mathcal{B} & \longleftarrow & i^*d^*\mathcal{B} & \longrightarrow & p_*i^*d^*\mathcal{B} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\uparrow^{s} \\
E_{-1} & \stackrel{i}{\longleftarrow} & B & = & B \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où les traits verticaux désignent le fait que $d^*\mathcal{B}$ est un $X^\vee \otimes Y(1)$-torseur.
D'après 3.6 le relèvement $u : X \longrightarrow G$ du morphisme $v : X \longrightarrow A$ est équivalent à la donnée du point $\widetilde{b}$ de $d^*\mathcal{B}$ au dessus du point $b$. Notons encore $\widetilde{b}$ les points de $i^*d^*\mathcal{B}$ et de $p_*i^*d^*\mathcal{B}$ au dessus du point $b$ de $B$.

- Soit $Z$ le plus petit sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module de $X^\vee \otimes Y$ contenant $Z_1$ et tel que le sous-tore $(Z/Z_1)(1)$ de $(X^\vee \otimes Y/Z_1)(1)$ contienne $\pi(\widetilde{b})$. Le tore $Z(1)$ est donc le plus petit sous-tore de $X^\vee \otimes Y(1)$ contenant $Z_1(1)$ et le point $\pi(\widetilde{b})$.

A partir du 1-motif $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$ on a donc construit la plus petite sous-algèbre de Lie $(B, Z(1), [\,,\,])$ de $(E, [\,,\,])$ qui contient toutes les données pour définir $\widetilde{b}$. De plus d'après 3.3, via la restriction des morphismes (3.1.1) à $B$ et $Z(1)$, $\widetilde{M}$ est un $(B, Z(1), [\,,\,])$-module de Lie.

3.8. **Théorème**
*Le foncteur "prendre le gradué" $\mathrm{Gr}_*^W : \langle M \rangle^{\otimes} \longrightarrow \langle \widetilde{M} \rangle^{\otimes}$ induit une équivalence de $\langle M \rangle^{\otimes}$ avec la catégorie des objets de $\langle \widetilde{M} \rangle^{\otimes}$ munis de l'action de l'algèbre de Lie $(B, Z(1), [\,,\,])$ définie via (3.1.1).*

PREUVE: Il suffit de prouver qu'à partir de l'action de $(B, Z(1), [\,,\,])$ sur $\widetilde{M}$ on peut construire un quelconque $\otimes$-générateur de la catégorie $\langle M \rangle^{\otimes}$.

Le gradué $\widetilde{M} = X + A + Y(1)$ fournit le quadruplet $(X, Y^{\vee}, A, A^*)$, où $Y^{\vee}$ est le groupe des caractères du tore $Y(1)$.

Soient $\{e_i\}_i$ une base de $X(\overline{k})$ et $\{f_j^*\}_j$ une base de $Y^{\vee}(\overline{k})$. Choisissons un point $P$ de $B \cap X^{\vee} \otimes A(k)$ et un point $Q$ de $B \cap A^* \otimes Y(k)$ tels que la sous-variété abélienne de $X^{\vee} \otimes A + A^* \otimes Y$ qu'ils engendrent, soit isogène à $B$. Soient $\overline{v} : X(\overline{k}) \longrightarrow A(\overline{k})$ et $\overline{v}^* : Y^{\vee}(\overline{k}) \longrightarrow A^*(\overline{k})$ les homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants définis par

$$\overline{v}(e_i) = \alpha_1(P, e_i),$$
$$\overline{v}^*(f_j^*) = \alpha_2^*(Q, f_j^*).$$

Comme dans 3.7, notons $Z_1(1)$ le plus petit sous-tore de $Z(1)$ qui contient $[B, B]$. Choisissons un point $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_{\mathrm{rg}\,(Z/Z_1)})$ de $(Z/Z_1)(1)(k)$ tel que les points $q_1, \ldots, q_{\mathrm{rg}\,(Z/Z_1)}$ soient multiplicativement indépendants.

Soit $\Gamma : Z(1)(\overline{k}) \otimes X \otimes Y^{\vee}(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)(\overline{k})$ l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant obtenu à partir des flèches $\gamma : (X^{\vee} \otimes Y(1)) \otimes X \longrightarrow Y(1)$ et $ev_Y : Y \otimes Y^{\vee} \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$. Notons $\overline{\psi} : X \otimes Y^{\vee}(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)(\overline{k})$ l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant défini par

$$\overline{\psi}(e_i, f_j^*) = \Gamma([P, Q], \vec{q}, e_i, f_j^*).$$

D'après la remarque 3.4 (2), le point $\overline{\psi}(e_i, f_j^*)$ fournit un point dans la fibre, au dessus de $(e_i, f_j^*)$, de l'image réciproque par $(\overline{v} \times \overline{v}^*)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$. On a donc que $\overline{\psi}$ est une trivialisation $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant de $(\overline{v} \times \overline{v}^*)^* \mathcal{P}$.

Les morphismes $\overline{v}, \overline{v}^*$ et $\overline{\psi}$ définissent un 1-motif $(X, Y^{\vee}, A, A^*, \overline{v}, \overline{v}^*, \overline{\psi})$, qui par construction, engendre la même catégorie tannakienne de $M$.

3.9. Remarques:

(1) Les points $k$-rationnels $P, Q, \vec{q}$ choisis dans cette démonstration permettent seulement de fixer un $\otimes$-générateur de la catégorie tannakienne $\langle M \rangle^{\otimes}$ et ne permettent pas de retrouver le 1-motif $M$. En effet, considérons l'exemple suivant: soit $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^3]$ le 1-motif de $\mathcal{M}(k)$ défini par $u(1) = (q_1, q_2, 1)$ avec $q_1, q_2$ deux éléments de $\mathbb{G}_m(k) - \mu_{\infty}$ multiplicativement indépendants ( $\mu_{\infty}$ est le groupe des racines de l'unité dans $\overline{k}$). On a alors que $Z(1) = \mathbb{G}_m^2$ et que la catégorie

tannakienne engendrée par $M$ est la même que celles engendrées par les 1-motifs suivants:

- $[\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^2]$ avec $u(1) = (p_1, p_2)$, $p_1$ et $p_2$ deux éléments de $\mathbb{G}_m(k) - \mu_\infty$ multiplicativement indépendants qui appartiennent au groupe multiplicatif engendré par $q_1$ et $q_2$;

- $[\mathbb{Z}^4 \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ avec $u(1,0,0,0) = r_1$, $u(0,1,0,0) = r_1^3$, $u(0,0,1,0) = 1$ $u(0,0,0,1) = r_2$, $r_1$ et $r_2$ deux éléments de $\mathbb{G}_m(k) - \mu_\infty$ multiplicativement indépendants qui appartiennent au groupe multiplicatif engendré par $q_1$ et $q_2$.

(2) Grâce à ce théorème, on peut conclure que $(B, Z(1), [\,,\,])$ est la plus petite sous-algèbre de Lie de $(E, [\,,\,])$ qui a la propriété de caractériser la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ au moyen de son action sur le gradué $\widetilde{M}$ de $M$.

3.10. **Corollaire**
*Le gradué par le poids* $\mathrm{Gr}_*^W(\mathrm{Lie}\, W_{-1}\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ *de l'algèbre de Lie du radical unipotent du groupe de Galois motivique de* $M$ *est l'algèbre de Lie* $(B, Z(1), [\,,\,])$.
*En particulier,* $\mathrm{Gr}_{-1}^W(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = (B, [\,,\,])$ *et* $W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) = (Z(1), [\,,\,])$.

PREUVE: Le foncteur "prendre le gradué" $\mathrm{Gr}_*^W : \langle M \rangle^\otimes \longrightarrow \langle \widetilde{M} \rangle^\otimes$ fournit l'inclusion de schémas motiviques

$$\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\widetilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_*^W(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$$

qui traduit le fait que le groupe de Galois motivique du gradué $\widetilde{M}$ est le quotient $\mathrm{Gr}_0^W$ du groupe de Galois motivique de $M$.
Si on applique le théorème 8.17 [D90] à ce foncteur $\mathrm{Gr}_*^W$, on obtient que la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ est équivalente à la catégorie des objets de $\langle \widetilde{M} \rangle^\otimes$ munis d'une action de $\mathrm{Gr}_*^W(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ factorisant l'action de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(\widetilde{M}) = \mathrm{Gr}_0^W(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$. En passant aux algèbres de Lie, la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ est donc équivalente à la catégorie des objets de $\langle \widetilde{M} \rangle^\otimes$ munis d'une action de

$$\mathrm{Gr}_{-1}^W(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) + W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)).$$

D'un autre côté, d'après le théorème 3.8 la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ est équivalente à la catégorie des objets de $\langle \widetilde{M} \rangle^\otimes$ munis de l'action de l'algèbre de Lie

$$(B, Z(1), [\,,\,])$$

décrite en (3.1.1). La propriété universelle (1.5.2) de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ nous fournit alors l'inclusion

$$\mathrm{Gr}_{-1}^W(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) + W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) \longrightarrow (B, Z(1), [\,,\,]).$$

Mais d'après la remarque 3.9 (2), $(B, Z(1), [\,,\,])$ est la plus petite sous-algèbre de Lie qui a la propriété de caractériser la catégorie $\langle M \rangle^\otimes$ au moyen de son action sur le gradué $\widetilde{M}$, et donc on peut conclure que cette inclusion est en réalité un isomorphisme, i.e.

$$\mathrm{Gr}^W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) + W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)) \cong (B, Z(1), [\,,\,]).$$

3.11. Remarques:

(1) Si le 1-motif $M$ est quasi-déficient, i.e. si $W_{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est abélien (cf. [B02]), la variété abélienne $B$ correspond à la variété abélienne isotrope maximale introduite par D. Bertrand dans la preuve du théorème 1 [Be98].

(2) D'après l'analogue motivique de 1.4 et (1.3.1) [B02], le sous-tore $Z_1(1)$ de $W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le groupe dérivé de $W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$.

## 4. Preuve du théorème principal

4.1. Grâce aux résultats du paragraphe 3, on peut finalement prouver que le radical unipotent $W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ de l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique de $M$ est la variété semi-abélienne extension de $B$ par $Z(1)$ définie par l'action adjointe de l'algèbre de Lie $(B, Z(1), [\,,\,])$ sur $B + Z(1)$. Pour faire ceci, on doit d'abord généraliser la preuve du théorème 3.8.

Soit $(C+W(1), [\,,\,])$ une algèbre de Lie de $\mathcal{M}(k)$, où $C$ est une variété abélienne et $W(1)$ un tore. D'après la proposition 2.5, le crocher de Lie $[\,,\,]$ fournit un $\Sigma - W(1)$-torseur $\mathcal{D}$ sur $C$.

4.2. **Lemme**

*Soient $c$ un point de $C(k)$ et $\widetilde{c}$ un point $k$-rationnel dans la fibre de $\mathcal{D}$ au dessus de $c$.*

*Une action fidèle de l'algèbre de Lie $(C+W(1), [\,,\,])$ sur un 1-motif $\widetilde{N}$ de filtration par le poids scindée, fournit un 1-motif $N$ de gradué $\widetilde{N}$.*

PREUVE: Soit $\widetilde{N} = X + A + Y(1)$ un 1-motif de $\mathcal{M}(k)$ de filtration par le poids scindée.

Puisque l'action est fidèle, le 1-motif $C + W(1)$ s'injecte dans le motif $\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{N}) \cong \widetilde{N}^{\vee} \otimes \widetilde{N}$ et donc $C$ est une sous-variété abélienne de $X^{\vee} \otimes A + A^* \otimes Y$ et $W(1)$ est un sous-tore de $X^{\vee} \otimes Y(1)$.

L'action de l'algèbre de Lie $(C+W(1), [\,,\,])$ sur $\widetilde{N}$ est définie par la restriction à $C$ et à $W(1)$ des flèches de $\langle \widetilde{N} \rangle^{\otimes}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: (X^{\vee} \otimes A) \otimes X \longrightarrow A \\ \alpha_2 &: (A^* \otimes Y) \otimes A \longrightarrow Y(1) \\ \gamma &: (X^{\vee} \otimes Y(1)) \otimes X \longrightarrow Y(1). \end{aligned}$$

où la première et la dernière flèche se déduisent du morphisme évaluation $ev_{X^{\vee}}$ : $X^{\vee} \otimes X \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$, tandis que la deuxième provient de l'accouplement de Weil $P_{\mathcal{P}} : A \otimes A^* \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$. Les morphismes $\alpha_1$ et $\gamma$ sont donc des projections.

Le dual de Cartier de $\widetilde{N}$ est le 1-motif $\widetilde{N}^* = Y^\vee + A^* + X^\vee(1)$. Comme on l'a déjà remarqué en 3.4 (3), les motifs $\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{N}^*)$ et $\underline{\mathrm{End}}(\widetilde{N})$ sont isomorphes, et donc l'algèbre de Lie $(C + W(1), [\,,\,])$ agit aussi sur $\widetilde{N}^*$ via les flèches

$$\begin{aligned}
\alpha_2^* &:(A^* \otimes Y) \otimes Y^\vee \longrightarrow A^* \\
\alpha_1^* &:(X^\vee \otimes A) \otimes A^* \longrightarrow X^\vee(1) \\
\gamma^* &:(X^\vee \otimes Y(1)) \otimes Y^\vee \longrightarrow X^\vee(1)
\end{aligned}$$

où $\alpha_2^*$ et $\gamma^*$ sont des projections tandis que $\alpha_1^*$ est donnée par la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$.

Soient $c_1$ et $c_2$ les projections du point $c$ dans $A \otimes X^\vee(k)$ et $A^* \otimes Y(k)$ respectivement et notons $V : \mathbb{Z}(0)(\overline{k}) \longrightarrow A \otimes X^\vee(\overline{k})$ et $V^* : \mathbb{Z}(0)(\overline{k}) \longrightarrow A^* \otimes Y(\overline{k})$ les homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants définis par $c_1$ und $c_2$. Grâce aux flèches évaluations $ev_X : X \otimes X^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$ et $ev_Y : Y \otimes Y^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$, à partir de $V$ et $V^*$ on obtient des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariants $v : X(\overline{k}) \longrightarrow A(\overline{k})$ et $v^* : Y^\vee(\overline{k}) \longrightarrow A^*(\overline{k})$. On a donc construit le 6-uplet $(X, Y^\vee, A, A^*, v, v^*)$.

Prouvons maintenant que la donnée du point $\widetilde{c}$ correspond à une trivialisation $\psi$ de de l'image réciproque par $(v \times v^*)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$. Le point $\widetilde{c}$ de $\mathcal{D}$ est défini par le point $c$ de $C(k)$ et par un point $\vec{z}$ de $W(1)(k)$. Soit $\Gamma : W(1)(\overline{k}) \otimes X \otimes Y^\vee(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)(\overline{k})$ l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant obtenu à partir des flèches $\gamma : W(1) \otimes X \longrightarrow Y(1)$ et $ev_Y : Y \otimes Y^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}(0)$. Notons $\psi : X \otimes Y^\vee(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)(\overline{k})$ l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant défini par

$$\psi(s,t) = \Gamma(\vec{z}, s, t)$$

pour chaque élément $(s,t)$ de $X \otimes Y^\vee(\overline{k})$. D'après la remarque 3.4 (2), le point $\psi(s,t)$ fournit un point dans la fibre, au dessus de $(s,t)$, de l'image réciproque par $(v \times v^*)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^*)$, i.e. $\psi$ est une trivialisation $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant de $(v \times v^*)^*\mathcal{P}$. On a donc construit un 1-motif $N = (X, Y^\vee, A, A^*, v, v^*, \psi)$ dont le gradué est $\widetilde{N}$.

4.3. A partir de maintenant on va reprendre les notations de 3.7. D'après le corollaire 3.10, $\mathrm{Gr}_{-1}^W(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est la plus petite sous-variété abélienne $B$ de $X^\vee \otimes A + A^* \otimes Y$ contenant le point $k$-rationnel $b = (b_1, b_2)$ et $W_{-2}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))$ est le plus petit sous-tore $Z(1)$ de $X^\vee \otimes Y(1)$ contenant les données necéssaires pour définir le point $k$-rationnel $\tilde{b}$ dans la fibre de $d^*\mathcal{B}$ au dessus du point $b$.

4.4. PREUVE du théorème principal:
D'après 3.10 il est clair que la suite (0.1.1) est exacte. Les morphismes (1.5.1) définissent une action du groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ sur chaque élément de $\langle M \rangle^\otimes$. Par passage aux Ind-objets, on obtient une action de $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ sur tout schéma affine motivique en $\langle M \rangle^\otimes$. En particulier, $\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M)$ agit sur lui-même par automorphismes intérieurs (cf. [D89] 6.1) et donc $(B, Z(1), [\,,\,])$ agit sur $B + Z(1)$ par

action adjointe. Si on applique le lemme 4.2 à cette action et au point $b$ de $B(k)$ on obtient le 1-motif $[0 \longrightarrow W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))]$.

4.5. Remarque: Le dual de Cartier du 1-motif $[0 \longrightarrow W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))]$ peut se construire de façon explicite:
Le dual de Cartier de $B+Z(1)$ est le 1-motif $Z^{\vee}+B^*$, où $Z^{\vee}$ est le sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module de $X \otimes Y^{\vee}$ qui correspond au tore $Z(1)$ et $B^*$ est la sous-variété abélienne de $X \otimes A^* + A \otimes Y^{\vee}$ duale de $B$. Puisque $\underline{\mathrm{End}}(B+Z(1)) \cong \underline{\mathrm{End}}(Z^{\vee}+B^*)$, l'algèbre de Lie $(B, Z(1), [\,,\,])$ agit aussi sur $Z^{\vee}+B^*$. Cette action duale a pour seule composante non nulle la restriction $\beta^*_{|B,Z^{\vee}} : B \otimes Z^{\vee} \longrightarrow B^*$ à $B$, $B^*$ et $Z^{\vee}$ de la flèche

$$\beta^* : (X^{\vee} \otimes A + A^* \otimes Y) \otimes X \otimes Y^{\vee} \longrightarrow A \otimes Y^{\vee} + X \otimes A^*$$

qui est la composée des flèches

$$\begin{aligned} \beta^*_1 &: (X^{\vee} \otimes A) \otimes X \otimes Y^{\vee} \longrightarrow A \otimes Y^{\vee} \\ \beta^*_2 &: (A^* \otimes Y) \otimes X \otimes Y^{\vee} \longrightarrow X \otimes A^* \end{aligned}$$

où $\beta^*_1$ s'identifie à $\mathrm{rg}(Y^{\vee})$-copies de la projection $\alpha_1 : (X^{\vee} \otimes A) \otimes X \longrightarrow A$ introduite en (3.1.1) et $\beta^*_2$ s'identifie à $\mathrm{rg}(X)$-copies de la projection $\alpha^*_2 : (A^* \otimes Y) \otimes Y^{\vee} \longrightarrow A^*$ introduite en (3.4.1). On a donc que aussi

$$\beta^* = (\beta^*_1, \beta^*_2) : (A^{\mathrm{rg} X^{\vee}} \otimes X)^{\mathrm{rg}\, Y^{\vee}} + ((A^*)^{\mathrm{rg} Y} \otimes Y^{\vee})^{\mathrm{rg}\, X} \longrightarrow A^{\mathrm{rg}\, Y^{\vee}} + (A^*)^{\mathrm{rg}\, X}$$

est une projection: c'est la projection qui représente l'action adjointe de l'algèbre de Lie $(B, Z(1), [\,,\,])$ sur $Z^{\vee}+B^*$. A partir de cette flèche $\beta^*_{|B,Z^{\vee}}$, on définit l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : Z^{\vee}(\overline{k}) &\longrightarrow B^*(\overline{k}) \\ z &\longmapsto \beta^*_{|B,Z^{\vee}}(b,z) = (\beta^*_1(b_1,z), \beta^*_2(b_2,z)) \end{aligned}$$

Par construction, le 1-motif $[\mathcal{V} : Z^{\vee} \longrightarrow B^*]$ est le dual de Cartier du 1-motif $[0 \longrightarrow W_{-1}(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathrm{mot}}(M))]$.

## Bibliographie


[B02] C. Bertolin, *The Mumford-Tate group of 1-motives,* Ann. de l'Inst. Fourier 52 (2002).
[Be98] D. Bertrand , *Relative splitting of one-motives*, Number Theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math. 210 Amer. Math. Soc. (1998).
[Br83] L. Breen, *Fonctions thêta et théorème du cube*, LN 980 (1983).
[By83] J.-L. Brylinski, *1-motifs et formes automorphes (théorie arithmétique des domaines des Siegel)*, Pub. Math. Univ. Paris VII 15 (1983).

[D75] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. de l'I.H.E.S. 44 (1975).
[D89] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois group over $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Pub. 16 (1989).
[D90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift II, Birkhäuser 87 (1990).
[D01] P. Deligne, lettre à l'auteur (2001).
[J90] U. Jannsen, *Mixed motives and algebraic K-theory*, LN 1400 (1990).
[M94] J.S. Milne, *Motives over finite fields*, Motives, Proc. of Symp. in Pure Math. 55 (1994).
[R94] M. Raynaud, *1-motifs et monodromie géométrique*, Astérisque 223 (1994).
[S72] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, LN 265 (1972).
SGA7 I: Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, LN 288 (1972).

Bertolin Cristiana
NWF I - Mathematik
Universität Regensburg
D-93040 Regensburg
Germany

Email: cristiana.bertolin@mathematik.uni-regensburg.de