Matepraticamente, attività con le mani e con la mente

MATEPRATICAMENTE, ATTIVITÀ CON LE MANI E CON LA MENTE

Chiara Tallone[1], Riccardo Minisola[2], Francesca Olivero[2], Andrea Pala[2], Elisa Pillone[3], Margherita Raspitzu[4], Adele Scaletta[2]
[1] Collegio San Giuseppe, Torino
[2] Dipartimento di Matematica, Università di Torino
[3] Liceo statale Giolitti-Gandino, Bra
[4] IIS Umberto I, Alba
matepraticamente.info@gmail.com

Abstract
Matepraticamente è un progetto didattico avviato da un gruppo di studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino e successivamente riconosciuto dal Piano nazionale Lauree Scientifiche. Tale iniziativa persegue lo scopo di coinvolgere i ragazzi delle scuole secondarie in attività laboratoriali, stimolare il pensiero critico e la creatività degli studenti attraverso esperienze concrete, promuovere un approccio alla matematica diverso e, aspetto da non sottovalutare, divertente. In linea con i temi trattati durante il workshop, verranno qui presentati la storia del progetto, la sua evoluzione e la metodologia seguita nelle attività proposte. In particolare, verrà analizzata l'attività "S-Pieghiamo la parabola": un incontro tra materiali poveri, GeoGebra e rigore matematico.

Parole chiave
Parabola, piegatura, GeoGebra, tangenti, laboratorio.

INTRODUZIONE

La matematica è noiosa, la matematica non serve a niente, la matematica è difficile… chi, tra gli insegnanti, non si è mai scontrato con la difficoltà di far capire ai ragazzi il valore di quello che la scuola, quotidianamente, cerca di insegnare loro? Come possiamo fare per renderla più accessibile, più appetibile, più divertente agli occhi degli alunni? È per rispondere a queste domande che, nel 2014, un primo nucleo di studenti della Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Torino, indirizzo Storico-Didattico, si riunisce per gettare le fondamenta del progetto didattico *Matepraticamente* (Tallone *et al.*, 2017).

COS'È MATEPRATICAMENTE?

La storia del progetto Matepraticamente

Matepraticamente è un progetto didattico avviato nel 2014 da un gruppo di studenti dell'Università di Torino, Laurea Magistrale in Matematica, indirizzo Storico-Didattico: raccoglie in sé le idee sulla didattica innovativa nate principalmente seguendo i corsi di Didattica della Matematica. I video didattici realizzati per il canale YouTube *Didattica della matematica Ornella Robutti* (Robutti *et al.*, 2015) e la partecipazione allo stage Math 2015 di Bardonecchia organizzato dall'Associazione Subalpina Mathesis, sono stati il seme dal quale è poi germogliata l'idea di Matepraticamente: sperimentare in prima persona le attività e le metodologie didattiche ha stimolato in noi, allora studenti, la creatività e la voglia di metterle in atto al di fuori dell'ambiente accademico. La spinta finale per la realizzazione del progetto è arrivata da un incontro casuale della responsabile del progetto Chiara Tallone, allora studentessa universitaria, con il dirigente scolastico dell'ITC Bonelli di Cuneo, Paolo Romeo. L'idea di portare all'interno delle mura scolastiche alcune delle attività presentate nei video è stata accolta con interesse ed entusiasmo da alcuni corsisti di Didattica della Matematica 1, che hanno dato vita al primo nucleo di *Matepratici*. La prima edizione di Matepraticamente si è svolta l'11 aprile 2015, coinvolgendo circa 180 ragazzi di otto classi seconde e i loro insegnanti. Grazie al successo riscosso e al riconoscimento ufficiale del Piano nazionale Lauree Scientifiche del MIUR nel 2016, nel corso degli anni il progetto ha visto un'espansione in nuove province (Torino e Asti) e in nuovi istituti.

Ad oggi il gruppo dei Matepratici è composto da figure istituzionali diverse quali insegnanti, laureati e studenti universitari (nuovi corsisti di Didattica della Matematica 1) che lavorano in collaborazione apportando contributi originali ed esperienze differenti. Le scuole possono mettersi in contatto con noi sia tramite il PLS, sia tramite la posta elettronica o la pagina Facebook "Matepraticamente", con la quale promuoviamo gli eventi legati al progetto, raggiungendo anche un pubblico più vasto ed eterogeneo.

Come funziona Matepraticamente

L'obiettivo principe del progetto è quello di avvicinare la matematica ai ragazzi rendendola accessibile a tutti (e non solo alle eccellenze) presentandola in maniera alternativa e divertente, mettendo a disposizione le competenze acquisite durante gli studi universitari.

La maggior parte delle attività di Matepraticamente, di argomento curricolare o extracurricolare, trae spunto dalle risorse offerte dal progetto m@t.abel, che vengono rielaborate e adattate alle esigenze del nostro laboratorio, mentre altre nascono dalla creatività dei formatori. Nella progettazione delle attività, accanto all'aspetto ludico-pratico, si mira al potenziamento delle competenze richieste dalle prove INVALSI, dalle Linee Guida per gli istituti tecnici (2010) e dalle Indicazioni Nazionali per i licei (2012).

Come funziona, quindi, il laboratorio? Invece della classica aula scolastica, le nostre attività si svolgono nella palestra dell'istituto ospitante, per accogliere i ragazzi in un ambiente in cui sono soliti fare attività pratica, ma questa volta *matematica pratica*. I ragazzi sono suddivisi in gruppi composti da 10-12 persone. Nel corso delle diverse edizioni abbiamo appurato come l'eterogeneità dei gruppi di lavoro costituisca una ricchezza. Infatti, rompendo quelle che sono le dinamiche di classe, gli studenti si sentono tutti alla pari di fronte ai problemi matematici proposti, risultando così più propensi a mettersi in gioco. I docenti curricolari stessi abbandonano il loro ruolo tradizionale lasciandosi coinvolgere nel progetto e partecipando con curiosità alle varie attività. L'assenza di valutazione, l'approccio ludico e le dimensioni contenute dei gruppi favoriscono il coinvolgimento individuale degli studenti, che si sentono a loro agio nello svolgimento dell'attività. In palestra vengono allestiti quattro stand, uno per ogni nucleo di riferimento: Numeri, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni. In ogni postazione, diretta da uno o due Matepratici, sono presenti principalmente materiali poveri, sebbene talvolta si utilizzi il computer per la modellizzazione del problema su GeoGebra oppure per integrare l'attività con filmati presenti sul canale "Didattica della matematica Ornella Robutti".
Durante la mattinata ogni ragazzo partecipa alle quattro attività, ciascuna della durata di una ventina di minuti, ruotando tra gli stand.

ESEMPIO DI ATTIVITÀ: *S-PIEGHIAMO LA PARABOLA*

Vediamo ora l'attività proposta durante il workshop riguardante il nodo concettuale *Parabola* all'interno del nucleo *Spazio e Figure*. L'attività è propedeutica all'introduzione della parabola, ma può anche essere trattata in un secondo momento come approfondimento.

Il luogo geometrico

Def.: *La parabola é il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta detta direttrice e da un punto detto fuoco.*
La maggior parte degli studenti si trova spesso a ripetere in modo mnemonico questa definizione senza comprenderne appieno il significato. Grazie alla piegatura della carta possiamo, invece, toccare con mano la relazione che lega ciascun punto della parabola al fuoco e alla direttrice.
Iniziamo tracciando un punto e una retta sul foglio, che saranno rispettivamente il fuoco F e la direttrice d della nostra parabola. Con la prima piegatura individuiamo la perpendicolare a d passante per F piegando la retta d su se stessa in modo che la piegatura passi per F, così facendo abbiamo trovato l'*asse di simmetria* della parabola (Fig. 1). Sia P il piede della perpendicolare, pieghiamo il foglio affinché P coincida con F. Ora, ricaviamo facilmente il

vertice V della parabola come il punto di intersezione delle due pieghe appena realizzate (Fig. 2).
Vediamo, quindi, come costruire altri punti del luogo geometrico in questione:

- Consideriamo un punto P_1 sulla direttrice, diverso da P, e ricaviamo la perpendicolare a d per questo punto piegando la direttrice su se stessa in modo che la piegatura passi per P_1 (Fig. 3).
- Ripieghiamo il foglio facendo coincidere P_1 con F, otteniamo così una nuova piegatura la cui intersezione con la precedente genera il punto A della parabola (Fig. 4).
- Individuiamo il simmetrico di A: pieghiamo il foglio lungo l'asse di simmetria della parabola, sul retro del foglio segniamo con un pennarello il punto A visto in trasparenza, riaprendo il foglio sul fronte scopriremo che l'alone lasciato dal pennarello indica il punto A' simmetrico di A (Fig. 5).

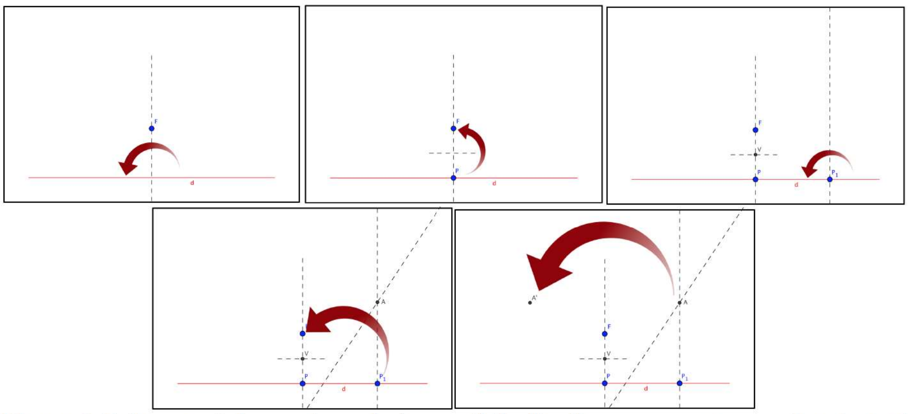

Figure 1-5. Passaggi da seguire nel piegare il foglio di carta per ottenere alcuni punti della parabola. Le linee tratteggiate indicano le piegature e le frecce il verso.

Inviluppo di una famiglia di rette

Una seconda costruzione della parabola si ottiene considerando essa come inviluppo delle tangenti. Si considera, per semplicità, il bordo del foglio come direttrice e si segna un punto F qualsiasi rappresentante il fuoco. Per ricavare le tangenti alla parabola con fuoco e direttrice indicati, si consideri un punto T sulla direttrice e si pieghi il foglio in modo che T coincida con F. Si ripeta questo procedimento più volte considerando altri punti T_i sulla direttrice diversi dal precedente (Fig. 6-7).

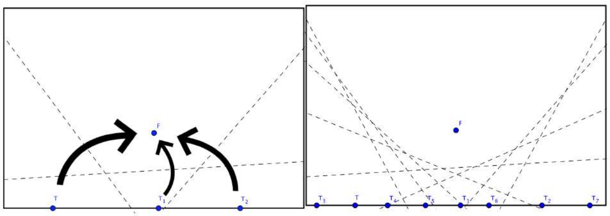

Figure 6-7. Costruzione delle tangenti alla parabola di fuoco F e direttrice il bordo inferiore del foglio.

Attività con GeoGebra

Il nostro obiettivo è andare a capire qualcosa di più sugli assi tra fuoco e punti della direttrice. Per fare questo ci serviamo di GeoGebra.
Per prima cosa andiamo a definire un punto F, fuoco della parabola, ed una retta d che sarà la nostra direttrice, utilizzando la barra dei comandi posta in alto nella finestra o la barra di inserimento di GeoGebra. Per semplicità prendiamo una direttrice parallela all'asse x (esempio y=1). Dopodichè andiamo a creare uno *slider* numerico, con l'apposito comando, selezionando intervallo di variazione ed incremento in base alle preferenze. Utilizzando la variabile data dallo slider, che nominiamo *ascissa*, definiamo quindi un punto generico A sulla direttrice (esempio A=(ascissa,1)). Tale punto potrà essere spostato sulla retta utilizzando lo slider. Usiamo ora il comando *asse di un segmento* selezionando i punti A ed F ottenendo così l'asse dei due punti. Con il tasto destro sulla retta andiamo a selezionare l'opzione *Traccia attiva* ed infine clicchiamo lo slider, sempre con il tasto destro, scegliendo l'opzione *Animazione attiva*. In questo modo l'asse, che si muove insieme al punto A, andrà a tracciare sullo schermo delle rette che sembrano effettivamente disegnare la parabola di fuoco F e direttrice d (Fig. 8).

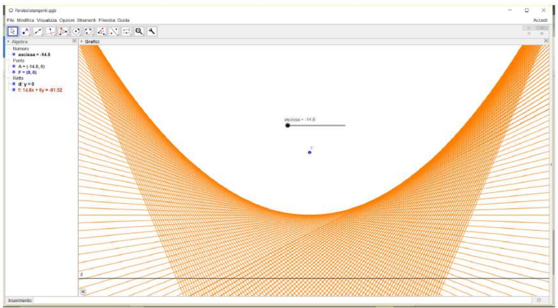

Figura 8. Costruzione della parabola come inviluppo delle tangenti su GeoGebra

La nostra congettura "gli assi tra il fuoco della parabola ed i punti sulla direttrice formano l'inviluppo delle tangenti della parabola stessa" risulta rafforzata, ma da buoni matematici questo non ci basta, è necessario dimostrarlo.

Dimostrazione

Per provare che la costruzione ottenuta è una parabola, occorre dimostrare che l'asse t del segmento FA è una retta tangente alla parabola di fuoco F e direttrice d, con A $\in$ d.

Tesi: Esiste un unico punto di intersezione tra la retta t e la parabola di fuoco F e direttrice d.

Esistenza: Sia r la retta perpendicolare a d passante per A. Esiste il punto Q di intersezione tra r e t (Fig. 9). Infatti se r e t fossero parallele, r dovrebbe essere perpendicolare a FA ed è passante per A. Per unicità della retta perpendicolare passante per un punto si dovrebbe avere F $\in$ d. Contraddizione.

I segmenti FQ e AQ sono congruenti per la proprietà dell'asse del segmento, allora Q è un punto della parabola avente fuoco F e direttrice d.

Unicità: Per assurdo, sia Q_1 un punto di intersezione, diverso da Q, tra l'asse t e la parabola di fuoco F e direttrice d (Fig. 10). Sia r_1 la retta perpendicolare a d passante per Q_1. Esiste il punto A_1 di intersezione tra r_1 e d. Poiché Q_1 è un punto della parabola, allora $FQ_1 \cong A_1Q_1$. Inoltre, i segmenti FQ_1 e AQ_1 sono congruenti per proprietà dell'asse di un segmento. Per la proprietà transitiva della congruenza, si ha $AQ_1 \cong A_1Q_1$. Ma AQ_1 è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AQ_1A_1 e risulta congruente al cateto A_1Q_1. Assurdo.

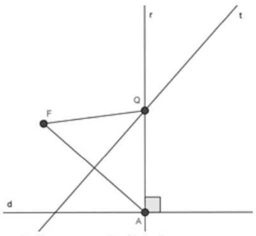

Figura 9. Esistenza.

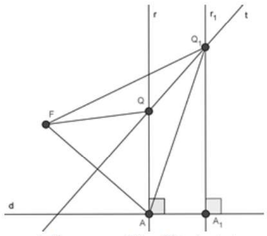

Figura 10. Unicità.

ALTRE ATTIVITÀ

La precedente attività fa parte del nostro repertorio relativo al nucleo *Spazio e Figure*. Come detto in precedenza, i ragazzi durante la mattinata hanno la possibilità di confrontarsi con tutti e quattro nuclei di riferimento, vediamo dunque altri esempi di laboratori proposti.

La seconda attività presentata appartiene al nucleo *Relazioni e Funzioni*. Cosa succede se pensiamo di piegare un foglio di giornale 40 volte? Quale sarà il suo spessore finale? Per rispondere a queste domande è necessario ricorrere al concetto di *Crescita esponenziale*, che spesso risulta di difficile comprensione da parte degli studenti. Invece, attraverso un semplice procedimento di piegatura di un foglio di quotidiano, si riesce a visualizzare concretamente quanto possa aumentare velocemente una grandezza che cresce in modo esponenziale. L'attività è tratta dall'omonimo video "Crescita esponenziale" presente sul canale YouTube già citato, che viene anche mostrato ai ragazzi durante il laboratorio.

L'attività "2+2 fa sempre 4?", afferente al nucleo *Numeri*, è un esempio di attività a carattere extracurricolare. Essa prende spunto dalla proposta *m@t.abel* "Numeri primi e poligoni stellati". Dopo aver introdotto in modo intuitivo l'aritmetica dell'orologio (*aritmetica in modulo 12*), si passa a riflettere sulla generalizzazione a moduli differenti che si possono incontrare nella vita quotidiana, come i sette giorni della settimana, le ventiquattro ore della giornata, ecc. Viene posta particolare attenzione al *mod n* con $n \leq 3$: in questo contesto non è più "vero" che 2+2 = 4, infatti

$$(2+2) \bmod 3 = 1 \bmod 3.$$

Si passa quindi a un'applicazione alla Crittografia, l'arte di cifrare e decifrare messaggi. Questa fase affascina molto i ragazzi: sono loro i primi a chiedere informazioni in merito. Tale disciplina è oramai entrata nel nostro quotidiano, grazie alle nuove *App* di messaggistica che ne fanno uso in chiaro, cioè informando il cliente con messaggi o avvisi, ad esempio è possibile visualizzare nelle chat di *Whatsapp* tale dicitura: «I messaggi che invii in questa chat e le chiamate sono ora protetti con la crittografia *end-to-end*». Per la sua complessità, si tralascia questo protocollo per dedicarsi al cifrario a sostituzione monoalfabetica di Cesare, uno dei primi metodi utilizzati per inviare messaggi comprensibili al solo destinatario. In esso ogni lettera del testo da cifrare viene sostituita con quella che la segue di n posizioni nell'alfabeto. In realtà i manufatti utilizzati in questa attività rispecchiano la struttura del disco cifrante dell'esercito confederato usato nella Guerra civile americana.

Anche la quarta attività presentata trae spunto dall'applicazione della matematica nella vita quotidiana, che in questo caso assume un valore sociale: "Più gioco e più vinco?" è il suo nome e afferisce al nucleo *Dati e Previsioni*. Tratta dal progetto *Bet on Math* del Politecnico di Milano (Andrà *et al.*, 2016), grazie ad essa si cerca di sfatare il mito del gioco d'azzardo che presenta slogan come appunto "più giochi, più vinci!". Come? Dopo aver introdotto il concetto di *probabilità* e la *legge dei grandi numeri* con carte e dadi, si cerca di rispondere alla domanda iniziale. Grazie all'ausilio di un mazzo di 52 carte e di un righello riusciamo a capire che la probabilità di indovinare i sei numeri estratti al *SuperEnalotto* è la stessa di estrarre una determinata carta da un mazzo di carte che ne contiene 622.614.630 (numero delle schedine giocabili ovvero tutte le combinazioni possibili di 6 numeri su 90). Misurando l'altezza del mazzo di 52 carte ed impostando la seguente proporzione

$$h_{carte\_SuperEnalotto}:n_{carte\_mazzo}=h_{carte\_mazzo}:n_{carte\_SuperEnalotto}$$

è possibile determinare l'altezza dell'ipotetico mazzo di carte contenente tutte le schedine possibili del SuperEnalotto, da cui vorremmo estrarre la nostra schedina vincente. Siccome ci si trova a lavorare con numeri molto grandi ci aiutiamo a visualizzarli paragonandoli con altezze note. Nel nostro esempio, $h_{carte\_superenalotto} \approx 239{,}5km$ ovvero più di 27 volte l'Everest! I ragazzi rimangono sempre impressionati da questo risultato e speriamo che dallo stupore nasca un maggiore senso critico, perchè la matematica possa essere sempre di più uno strumento della cittadinanza attiva.

CONCLUSIONI

Una matematica a scuola più pratica e divertente è difficile ma non impossibile: speriamo che il nostro laboratorio porti questa esperienza di fronte agli occhi non solo dei singoli ragazzi, che ne usciranno arricchiti di nuove prospettive, ma anche dei docenti che potrebbero decidere di tentare nuovi approcci nelle proprie classi e diventare i nuovi motori del cambiamento.

BIBLIOGRAFIA

AA.VV. (2016). *PON Matematica (m@t.abel). Attuazione, risultati e prospettive.* Firenze: INDIRE.

Andrà, C., Parolini, N., & Verani, M. (2016). *BetOnMath. Azzardo e matematica a scuola.* Milano: Springer.

MIUR. (2010a). Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali. d.P.R. 15 marzo 2010. *Gazzetta Ufficiale*, Roma.

MIUR. (2010b). Istituti tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento. d.P.R. 15 marzo 2010. *Gazzetta Ufficiale*, Roma.

Robutti, O. (s.d.). *Didattica della Matematica Ornella Robutti.* Tratto da https://www.youtube.com/user/DIFIMARobutti

Robutti, O., Floris, F., Magonara, F., & Tallone, C. (2015). La didattica della Matematica e YouTube. In F. Ferrara, L. Giacardi, & M. Mosca (A cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2014-2015* (p. 141-154). Torino: Kim Williams Books.

Tallone, C., Minisola, R., Olivero, F., & Raspitzu, M. (2017). Matepraticamente: una palestra per la mente. In L. Giacardi, M. Mosca, & C. Sabena (A cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (p. 265-284). Savigliano: L'artistica Editrice.