Conferenze e Seminari
dell'Associazione Subalpina Mathesis
2018-2019

Nella collana *Conferenze e Seminari*:

1993-1994
1994-1995
1995-1996
1996-1997
1997-1998
1998-1999
1999-2000
2000-2001
2001-2002
2002-2003
2003-2004
2004-2005
2005-2006
2006-2007
2007-2008
2008-2009
2009-2010
2010-2011
2011-2012
2012-2013
2013-2014
2014-2015
2015-2016
2016-2017
2017-2018

I volumi arretrati si possono richiedere al Presidente:

Prof. Cristina Sabena
c/o Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino
Via Carlo Alberto, 10 10123 Torino
Tel. +39-011-6702825 Fax +39-011-6702878
cristina.sabena@unito.it
http://www.associazionesubalpinamathesis.it/

Si ringraziano per i contributi:

Compagnia di San Paolo
Centro Scienza – Extramuseum
Fondazione CRT
Giovedì Scienza
SSP – Sistema Scienza Piemonte
Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino

Associazione
Subalpina
Mathesis

Seminario di Storia
delle matematiche
"Tullio Viola"

Conferenze e Seminari
dell'Associazione Subalpina Mathesis
2018-2019

Volume redatto a cura di
E. Luciano, M. Oggero, C. Sabena

L'ARTISTICA EDITRICE

Associazione Subalpina MATHESIS
c/o Dipartimento di Matematica Università di Torino
Palazzo Campana
Via Carlo Alberto, 10 - 10123 Torino
Tel. +39-011-6702820/6702825/6702823 - Fax +39-011-6702878

Riproduzione in copertina
Disegno di Leonardo da Vinci per il manoscritto "*De Divina Proportione*"
di Luca Pacioli del 1497

Published by
L'ARTISTICA EDITRICE
Divisione editoriale de L'Artistica Savigliano S.r.l.
Via Torino 197 – 12038 Savigliano (Cuneo)
Tel. +39 0172.22361
Fax +39 0172.21601
editrice@lartisavi.it - www.lartisavi.it

ISBN 978-88-7320-xxx-x

Indice

ASSOCIAZIONE SUBALPINA MATHESIS

Prefazione

Il cammino si fa andando.

Questo volume raccoglie i contributi dei relatori alle Conferenze dell'Associazione Subalpina Mathesis nell'anno accademico 2018-19. Le conferenze si sono svolte come di consueto il giovedì pomeriggio presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano' di Torino e hanno spaziato da temi di più scottante attualità, come i big data, alla storia della matematica, da approfondimenti disciplinari a sperimentazioni didattiche in aula e fuori dall'aula, nella comune prospettiva di una maggiore *conoscenza della* matematica, e *confidenza con* la matematica, a beneficio di studenti e insegnanti. Tutte le conferenze sono state seguite con partecipazione da parte di insegnanti, colleghi matematici e non, giovani ricercatori e studenti, come testimoniato dalle vive discussioni che hanno sempre fatto seguito alle relazioni. Il volume è anche frutto di questo dialogo continuo tra diverse professionalità, che costituisce uno dei pilastri dell'Associazione.

Sempre in continuità con gli anni precedenti, hanno avuto grande successo anche le attività a cura della Sezione Bettazzi e più direttamente rivolte agli studenti della scuola secondaria di secondo grado, come la Festa della Matematica l'8 marzo presso i locali del SERMIG e lo Stage di Matematica, che tra maggio e giugno coinvolge studenti eccellenti in una "tre giorni" intensiva di lavoro matematico, ma anche di divertimento nel Villaggio Olimpico di Bardonecchia. Segnalo in particolare la sempre maggiore apertura internazionale dello Stage, che ha accolto quest'anno anche circa un centinaio di studenti da diversi Paesi stranieri.

Il 15 aprile alle ore 16:30 a Palazzo Campana abbiamo ricordato con affetto a un anno dalla scomparsa Miranda Mosca, socia fondatrice e anima dell'Associazione, attraverso un premio istituito in suo onore e destinato alle migliori tesi di Laurea Magistrale in Didattica della Matematica, negli ultimi cinque anni. La commissione giudicatrice, presieduta dal prof. Franco Pastrone, ha premiato parimerito Federica Broglio, Giulia Ferrari e Pietro Scalzo, cui vanno le nostre congratulazioni.

Dal 2015 l'Associazione Subalpina Mathesis fa parte del Sistema Scienza Piemonte (SSSP), che unisce diverse associazioni torinesi che si occupano di divulgazione scientifica, con il sostegno finanziario della Compagnia di San Paolo. Per una panoramica sulle attività dell'Associazione, vi invito a consultare il sito http://www.associazionesubalpinamathesis.it/, mentre per conoscere più approfonditamente la nostra realtà, l'invito è per le conferenze dell'anno prossimo, che inizieranno nell'ottobre 2019, con qualche novità rispetto alle edizioni precedenti, pur introdotta con prudenza nel rispetto delle tradizioni subalpine.

Come forse sapete, il prof. Franco Pastrone, dopo venticinque anni di servizio come Presidente dell'Associazione, ha rinunciato all'incarico. Ho l'onere ma soprattutto l'onore di subentrargli e di raccogliere il testimone di una realtà bella e complessa, spero di saper essere all'altezza. Ringrazio il Consiglio Direttivo che ha riposto la fiducia in me. Soprattutto ringrazio il prof. Franco Pastrone (Presidente Onorario), per aver accettato di svolgere il gravoso compito di Tesoriere, nonché per guidare i miei primi passi in questo cammino.

I ringraziamenti sarebbero molto lunghi e alcuni, di carattere istituzionale, si trovano nella seconda di copertina. Ringrazio calorosamente il dott. Marco Oggero e la prof.ssa Erika Luciano, per la collaborazione nella cura di questo volume; Erika Luciano e Livia Giacardi per il contributo essenziale all'allestimento del calendario; i revisori dei conti e i molti soci che si adoperano, spesso senza grande visibilità, per il successo delle nostre iniziative. Un ringraziamento particolare al Direttore del Dipartimento di Matematica, prof. Marino Badiale, per il supporto logistico alle attività dell'Associazione. Ringrazio infine esplicitamente il dott. Matteo Bagnasco e la dott.ssa Paola Sabbione della Compagnia di San Paolo, grazie al cui supporto finanziario le attività dell'Associazione hanno potuto realizzarsi.

Cristina Sabena
Torino, 8 agosto 2019

Calendario dell'attività 2018-2019

2018	
8 novembre	Giuseppe Longo, *Algoritmi e Big Data: strumenti per capire o per "governare" il vivente e il mondo…?*
29 novembre	Assemblea dei Soci Samuele Antonini, *Scegliere, argomentare, comprendere: un esempio di laboratorio matematico con la teoria dei giochi*
20 dicembre	Francesca Morselli, *Un progetto a lungo termine per lo sviluppo delle competenze argomentative*

2019	
17 gennaio	Giulia Giovanna Maria Bini, *Gli indivisibili, un viaggio nello spazio e nel tempo da Archimede a Cavalieri*
31 gennaio	Eugenia Taranto, *MOOC e MathCityMap: connubio vincente*
14 febbraio	Erika Luciano, '*Penso sempre a quella piccola Università in esilio': Gustavo Colonnetti e i Campi di internamento svizzeri*
21 febbraio	Carlo Toffalori, *Hilbert e Pirandello. Vite parallele*
28 febbraio	Umberto Cerruti, *Un viaggio nell'affascinante mondo delle sequenze di numeri interi*
7 marzo	Carlo Viola, *Il teorema dei numeri primi*
14 marzo	Aldo Brigaglia, *Matematica per la letteratura e letteratura per la matematica: la corrispondenza tra Simone e André Weil e i 'Rècoltes et semailles' di Grothendieck*
21 marzo	Massimo Borsero e Stefano Boccardo, *Un'attività sul senso del numero a cavallo tra matematica e lingua italiana*
28 marzo	Gemma Carotenuto, Daniele Manzone, Cristina Sabena, *Educazione matematica informale in un contesto socialmente svantaggiato: un'esperienza nel quartiere di Scampia a Napoli*
11 aprile	Luigi Pepe, *I Gesuiti e gli insegnamenti matematici: apprendimento, disciplinamento, mondializzazione*
9 maggio	Gilles Aldon, *Professeurs, chercheurs, comment travailler ensemble dans une perspective de bénéfices mutuels?*

Le Conferenze

Algoritmi e Big Data: strumenti per capire o per "governare" il vivente e il mondo…?

Giuseppe Longo
Centre Cavaillès, CNRS et Ecole Normale Supérieure – Paris
Department of Integrative Physiology and Pathology
Tufts University – Boston

Sunto. *Una originalissima "svolta linguistica" in matematica, motivata dalla crisi delle geometrie non-euclidee, ha segnato l'inizio di nuove discipline e orientato molto il pensiero del XX secolo. Da una parte ci ha dato macchine formidabili, dall'altra ha aperto la strada a nuove forme di scientismo che distorcono la conoscenza e l'azione sul mondo.*

Scienza vs scientismo

La positività del sapere scientifico è stata spesso distorta in una visione piatta della costruzione di conoscenza, una sorta di progressiva occupazione del reale con gli strumenti che si hanno. Inventata la nozione di geodetica, in fisica, splendidamente resa operativa dal metodo variazionale di Hamilton, si è pensato di applicarla ovunque, dall'economia (Walras) alla teoria dell'evoluzione, di poter tutto predire o quanto meno pre-determinare. Poi, proposto il formalismo deduttivo, la regola formale di Hilbert e della logica e della calcolabilità degli anni '30, splendida matematica, si è cominciato a dire che il mondo è governato da regole formali, passi di un calcolo completo che descrivono ogni dinamica. Per fortuna in matematica, o nel gioco fra matematica e fisica, dei "risultati negativi" permettono talvolta di mettere dei limiti all'arroganza scientista.

Vediamo un po' di discutere alcuni passaggi fondamentali, cominciando da quello che fa riferimento à Poincaré. Si osservi prima che la nascita del positivismo ottocentesco, di cui senz'altro Laplace è uno dei personaggi più illustri, è basata su grandi successi: il metodo di Hamilton permette di derivare le equazioni di Newton e dalle equazioni di Newton si derivano le proprietà di Keplero. Così, si fanno previsioni astronomiche, ma Laplace capisce, dopo Newton, che quando ci sono più di due corpi intorno a un Sole si pone il problema dell'interazione fra loro. La legge di gravitazione è universale, quindi le interferenze gravitazionali su due pianeti, possono disturbare le traiettorie. Newton se ne era reso conto e ha dato l'unica risposta a tutt'oggi valida se si vuole la stabilità planetaria *in saecula saeculorum* ed osserva: "*Ogni tanto Dio interviene e rimette le traiettorie e i pianeti in orbita*". Risposta saggissima: Newton ha capito il nodo del problema. Laplace, che è laico, dice invece: "*Non voglio fare l'ipotesi di Dio. Voglio dimostrare, risolvendo il sistema di equazioni, la stabilità del sistema planetario*".

Lì interviene il grande risultato di Poincaré del 1890 che mostra come il sistema di un solo sole e due pianeti non sia integrabile, quasi ovunque, non ammetta approssimazione analitica, e, cosa straordinaria, dà prima un senso geometrico e poi fisico all'assenza di soluzioni. In fisica è molto difficile, in certi casi, dar senso fisico alle soluzioni di un sistema di equazioni – non tutte ce l'hanno. Poincaré dà un senso fisico all'*assenza di soluzioni*; passando per la geometria che si inventa: la geometria dei sistemi dinamici con le nozioni di biforcazione, traiettorie omocline, traiettorie alle intersezioni tra varietà stabili e instabili, tutti luoghi di instabilità in dinamiche non-lineari. Poi capisce che ciò dimostra che la dinamica fisica non è predittibile col sistema di equazioni.

Siamo passati cioè da una ipotesi di completezza delle equazioni rispetto al mondo, l'ipotesi di Laplace, al fatto invece di dimostrare che un sistema determinista relativamente semplice può dar luogo ad un'inpredittibilità intrinseca. Questo, capisce Poincaré nel 1902, è l'aleatorio classico. L'impredittibilità classica è dovuta alla presenza in sistemi non lineari di biforcazioni e traiettorie omocline. La minima fluttuazione al di sotto della migliore delle misure possibili non permette di predire dove va il pianeta o l'oggetto dello studio non lineare.

Si tratta di una sorta di risultato negativo, Poincaré lo definisce così, che però apre, come è già successo – il teorema di Pitagora con l'irrazionalità, la *a*-logos nel logos dei numeri che viene così inventato – a nuova scienza: la geometria dei sistemi dinamici. Le dinamiche non-lineari e la loro geometria da allora in poi sono diventate il cuore della fisica classica.

Ed ecco con Hilbert (1900) di nuovo affacciarsi un'ipotesi di completezza. Per il sistema assiomatico dell'aritmetica ecco di nuovo un teorema negativo: Gödel (1931), ovvero, no, il sistema è incompleto; non posso dimostrare, in una teoria sufficientemente espressiva, tutti gli asserti del sistema o la loro negazione. E questo apre a nuova scienza. La Logica Matematica nasce nel '31, prima ci sono teoremi piuttosto semplici ("compattezza" oppure Lowenheim e Scholem). Dal '31 in poi c'è invece una esplosione di risultati e teorie: calcolabilità, teoria dei modelli, teoria degli insiemi, teoria della prova, ecc. Il risultato negativo, limitativo, apre nuove vie. Una seconda volta quindi un discorso di incompletezza viene provato rispetto ipotesi molto audaci di completezza di una … "scrittura". In fondo, l'idea di Laplace (non era solo, ci sono almeno Lagrange, Fourier), era che la scrittura equazionale è completa rispetto alle dinamiche classiche, cioè, una volta determinate con un sistema di equazioni, è possibile predirle tutte. E qui di nuovo ci si trova nella stessa ipotesi di completezza della scrittura: scrivo un numero finito di assiomi, sequenze finite di lettere, e con essi deduco completamente, all'interno di una teoria assiomatica ogni asserto o la sua negazione. E si andrà ad un altro risultato negativo: il teorema di Gödel.

Abbiamo qui menzionato grandi progetti, poi negati, proposti da grandissimi personaggi. Direi il primo particolarmente giustificato: l'approccio equazionale alla fisica matematica è veramente una grande svolta scientifica che da Newton, Hamilton e poi dopo marcherà tutta la storia della fisica e della fisica matematica. Ed ecco il progetto hilbertiano: la ricerca di coerenza e completezza deduttiva delle teorie interessanti, la nascita di una metamatematica, è un grande momento, forse meno importante di tutto quel grande filone della fisica matematica. Una seconda volta: si dovrebbe cominciare ad essere perplessi...

Poi la terza volta. La scrittura finita del DNA è completa rispetto all'ontogenesi e alla filogenesi. Si prende una scrittura finita, questa volta con quattro lettere, e ci si racconta che con essa determino completamente la dinamica ontogenetica e filogenetica. La terza volta comincia a diventare un po' pesante. E ne sono derivate, soprattutto e come cercherò di dirvi, conseguenze ben più gravi.

Fino ad arrivare poi a certe visioni del mondo, secondo cui con scritture finite si può capire, si può governare il mondo anche senza capire. Siffatta recente aberrazione viene proposta in certi approcci ai Big Data. L'idea, iterata in molti scritti è di poter fare a meno della conoscenza scientifica, dell'interpretazione per agire e predire. Le macchine, esplorando le regolarità sui Big Data, permetterebbero la previsione e l'azione. Per fortuna, si può dimostrare, grazie alla matematica. che ciò è impossibile. Un piccolo articolo che ho fatto con il collega matematico neozelandese, Cristian Calude, ha avuto gran successo: utilizzando dei risultati della Teoria di Ramsey, facciamo vedere come vi sia un errore di fondo nel pensare che le regolarità si "estendono" e possono dire qualcosa sul futuro (Calude & Longo, 2017). E di questo cercherò di parlare.

Ritorniamo alla questione dei fondamenti della matematica perché è un po' sorprendente vedere come una disciplina di ponte fra filosofia e matematica, un interesse di pochi, in realtà abbia marcato il secolo. Non so se quello che è successo da Hilbert in poi sia in realtà solo un sintomo di un processo di fondo oppure se c'è stata una potenza intellettuale del dibattito sui fondamenti della matematica che ha influito sulle altre forme di conoscenza. Questo lo lascio allo storico; non saprei dire. È chiaro che però l'invenzione della Logica Matematica – Frege, Hilbert i grandi padri fondatori – era ben motivata, era una risposta forte ad una crisi dei fondamenti gravissima: la crisi delle geometrie euclidee. Per duemila anni, la matematica è stata fondata sul rapporto diretto fra spazio e geometria di Euclide, poi ambientata in spazi cartesiani; come dice Galileo, si capisce il mondo con in triangoli, i quadrati, i cerchi di Euclide. Era questa certezza dell'identificazione della geometria euclidea in spazi cartesiani con la geometria del mondo che fondava la matematica. È questo quello che crolla con le geometrie non-euclidee, in particolare con la geometria riemanniana. Questo motiva la risposta di Frege-Hilbert, come dicono essi stessi. Frege osserva che "*siamo in una situazione di delirio*" per quello che riguarda il rapporto fra matematica e spazio e tempo. Bisogna allora fondare la matematica sull'aritmetica, luogo di certezza: l'aritmetica con induzione e con le sue proprietà logiche può sola salvare la matematica da questa situazione scioccante che è il crollo del rapporto allo spazio euclideo. E Hilbert continuerà su questa linea, sia pure con una filosofia diversa: il suo primo libro è "*I Fondamenti della geometria*" (1899) in cui dà una assiomatica per tutte le diverse geometrie euclidee e non-euclidee e poi, per via analitica, dà una codifica in aritmetica ponendo quindi nel '900, giustamente (siccome in termini moderni quest'immersione è conservativa), il problema della coerenza dell'aritmetica: dimostriamo in modo finitista la coerenza dell'aritmetica, ne seguirà la coerenza delle altre teorie assiomatiche e noi ci lavoreremo felici, senza più preoccuparci di una questione di certezza di rapporto allo spazio, di senso interpretativo nello spazio: ne posso fare a meno e così lavorare in un paradiso kantoriano, tranquillamente.

Ma entrambi hanno in comune, pur con sguardi molto diversi, un'esigenza di rigore. Frege, introducendo con rigore le proprietà dei quantificatori "*per ogni* " ed "*esiste*", propone una importantissima chiarificazione. La matematica dell'800 è ricchissima ma c'è anche molta confusione. Molti grandissimi han posto teoremi sbagliati: un teorema di Cauchy assicura la continuità della una somma di una serie di funzioni continue, ma sbaglia, se uno guarda la prova, perché inverte il *per ogni* con l'*esiste.* Quindi la chiarificazione di Frege era veramente necessaria.

Il modo di lavorare esigeva questo chiarimento che l'invenzione della Logica Matematica porterà in maniera molto importante. Anche questo ha a che fare con l'aritmetica. Da una certezza del sistema delle equazioni differenziali di Leibniz, di Newton, come strumento di descrizione completa del mondo –

limiti visti da Poincaré – si passa adesso a una certezza della regola del sistema formale, ancorato sull'artimetica formale, che un po' alla volta diventerà lo strumento principale per descrivere questo nuovo grande osservabile del XX secolo che è la nozione di *informazione*, elaborazione dell'informazione (gli anni '30, Gödel, Church, Turing e gli altri), trasmissione dell'informazione (Shannon, Brillouin, immediatamente dopo la guerra). L'informazione sotto la forma di informazione digitale sul discreto, 0 ed 1, e la loro macchina aritmetica, la Logical Computing Machine di Turing, diventa il nuovo grande osservabile intorno al quale si sviluppano due notevolissime scienze: una, dicevo, l'elaborazione dell'informazione, cioè la teoria della calcolabilità, la teoria dei programmi, ecc.; l'altra, la teoria della trasmissione dell'informazione, un altro filone, correlato perché entrambi sono sul discreto, ma che vanno in direzioni diverse, ad esempio trattano l'entropia in maniera duale, comunque entrambi grandi discipline.

Questa aritmetizzazione della conoscenza però viene proiettata sul mondo da molti in un modo del tutto inaccettabile, fino a dire questa scrittura digitale, questa scrittura che permette l'elaborazione della trasmissione dell'informazione è *intrinseca* al mondo. Il punto massimo è raggiunto quando nel 2000 viene decodificato tutto il DNA; ci sarà questo fiorire di proclami altisonanti: abbiamo decrittato il libro scritto da Dio, il programma dell'ontogenesi, l'algoritmo della vita e così via.

Una visione che non è stata neutra nei trenta, quarant'anni in cui questo discorso è diventato egemone. In modo drammatico l'ho imparato a constatare con i miei colleghi a Boston, che sono biologi del cancro, attivi nella ricerca sui perturbatori endocrini, le OGM, e così via. Di questo cercherò di parlare alla fine.

Gödel, Turing e l'andar oltre

Vi dicevo, un ruolo cruciale, che inizia con i risultati negativi, è quello dell'invenzione di una invariante fondamentale: la nozione di funzione calcolabile, un bellissimo invariante matematico. Invariante rispetto a che? Rispetto al sistema formale. Questo è quello che viene dimostrato negli anni '30. Gödel, Church, Turing ed altri inventano diversi sistemi per la calcolabilità diversi ma tutti equivalenti: la nozione di funzione calcolabile è quindi un nuovo invariante matematico. Quel che è interessante dire è che tutti e tre i fondatori, Gödel, Church e Turing lo inventano dimostrando risultati negativi. Cioè il loro scopo è dimostrare che esistono asserti indecidibili, funzioni non calcolabili, numeri reali non calcolabili, caratterizzare i calcolabili distinguendoli dai non calcolabili; cioè per dimostrare risultati negativi, pongono le basi dei sistemi per la calcolabilità e propongono questo nuovo invariante matematico fondamentale che è la nozione di funzione calcolabile.

Attenzione, appunto, perseguendo risultati negativi si apre un dominio matematico di grande rilievo filosofico e pratico ma che conferma il ruolo di un sapere critico scientifico, antiscientista perché è proprio dello scientismo l'avere un metodo, il metodo è ottimo o il metodo formale deduttivo e considerarlo "completo" per applicarlo dappertutto. Le regole formali sono ovunque, certo, ma la Scienza sa costruire insieme allo strumento il limite dello strumento, per andare oltre e inventare altro come ha fatto Poincaré, come hanno fatto i padri fondatori negli anni '30.

Purtroppo i mistici hanno preso questo invariante matematico per un assoluto. Il che è un errore scientifico fondamentale; e così l'Universo, raccontano Wolfram ed altri, è una grande macchina di Turing, come lo è il cervello per molti altri troppo a lungo ed il DNA, programma completo per l'ontogenesi, e così via.

Turing può essere un riferimento per dire il contrario. Turing ha inventato il sistema per la calcolabilità più intuitivo, più efficace facendosi macchina: la Macchina di Turing è un *human computer*. Lo chiama sempre *He*; è uno che fa i calcoli su un quaderno a quadretti e così risponde a Hilbert. Dice: tu vuoi che la matematica sia la meccanica deduzione di segno dopo segno secondo le regole, io mi faccio massimamente *desultory*, perfettamente stupido, faccio un passo alla volta, 0 al posto di 1 e ti faccio vedere che ci sono funzioni ben definite ma non calcolabili.

Poi questo risulterà essere una macchina massimalmente espressiva, la Macchina di Turing, che lui ha chiamato *Logical Computing Machinery* per rispondere a Hilbert.

Poi nel '50 scriverà un articolo: *Un gioco dell'imitazione*, in cui risponde a un altro problema, un altro dramma che vive: essere uomo, essere macchina, essere donna. Si fa macchina per interpretare questo gioco. Però fra le righe fa una bellissima osservazione di tipo fisico-matematico, cioè riprende il discorso di Poincaré ma applicato a un ambito a cui sta lavorando,la morfogenesi, la generazione delle forme, in particolare delle forme del vivente, e mette in evidenza come i sistemi non lineari siano sensibili alle condizioni iniziali. Dice nel '50: *un elettrone che si sposta di un nanometro può causare una valanga e, un anno dopo, la morte di un uomo.* Tutti parlano dell'effetto farfalla di Lorenz che è del '62 formalizzato nel '72, mentre l'effetto elettrone di Turing, che è esattamente la stessa cosa, perché sta parlando di sistemi non lineari a cui sta lavorando, è del '52 ed è portentoso. Poincaré già lo sapeva, ma non ha immagini di questo genere, ma è proprio il lavoro di Poincaré all'origine di questa strada. In realtà è stato ampiamente ignorato, pochissimi vi hanno lavorato. Fino agli anni '50, pochissimi lavorano ai sistemi non lineari con le caratteristiche della geometria dei sistemi lineari. Sarà Kolmogorov che nel '53, con il suo grande teorema, riaprirà la strada alla nuova dinamica, quindi dopo Turing che non poteva conoscerlo, morendo nel '54; inoltre Kolmogorov scrive in russo il primo articolo totalmente incomprensibile – diverrà il teorema KAM nel 1963.

Il nodo però cruciale è capire il ruolo del continuo in Turing. Le dinamiche continue non-lineari, alla Poincaré, sono al cuore dell'articolo del '52 di Turing (Turing, 1952). Un articolo che purtroppo gli informatici non conoscono e che anch'io non conoscevo, salvo il titolo. Un biologo una volta mi disse: *"Sai io sto lavorando sui processi di morfogenesi, con dinamiche non lineari nel continuo, fatte da un certo Alan Turing. Lo conosci?"*. E lui non sapeva niente dei lavori di Turing sulla calcolabilità, come io non sapevo niente del lavoro di Turing sulla morfogenesi. È un articolo splendido in cui Turing, con la stessa semplicità in cui ha inventato la macchina, inventa un sistema semplicissimo di equazioni non lineari che danno una dinamica di azione e reazione e diffusione nel continuo, in cui le idee cruciali sono: le rotture di simmetrie, la sensibilità alle condizioni al contorno, le "transizioni catastrofiche", che sono per noi oggi le transizioni critiche, che la fisica stava appena iniziando a esaminare. Nell'articolo, un hardware, un materiale senza software, genera delle forme. E le applica alla diffusione dei colori sulla pelle degli animali, mentre pensa di poterlo fare anche a altre forme animali. Quindi, lui che ha inventato la distinzione hardware/software, la programmazione come scienza astratta del software, inizia dicendo che il suo modello falsifica la necessità di un disegno predefinito, di un programma. Ovvero, nella costituzione di una forma vivente, nella componente fisica che Turing esamina, azione e reazione e diffusione, in un campo – che può essere di colori, di forme, come la genesi delle forme dei polmoni, del sistema vascolare e così via – in questi campi c'è solamente un hardware senza software in cui *solamente* delle proprietà fisiche permettono di seguire la dinamica della formazione di regolarità nel continuo. Turing, che ha inventato la più importante macchina a stati discreti, che in quegli anni non chiama più *Logical Computing Machine* ma, interessandogli l'aspetto fisico, chiama *Discrete State Machine*, ora ragiona su deformazioni intrinseche della materia molle, continua. Turing è dunque completamente in accordo con quella che René Thom chiamerà "La teoria fondamentale della Matematica: il gioco fra discreto e continuo" e passa da una parte all'altra sapendosi immergere nell'una e nell'altro. Turing si era fatto macchina per inventare la Macchina Logica e così vede le deformazioni materiali nel continuo.

In questo articolo bellissimo, presenta dunque la dinamica come guardandola da dentro. Un po' come fa Einstein che si fa fotone per vedersi sull'onda di luce o Archimede che si vede come un sacco nell'acqua per inventare la Legge di Archimede.

Questo tipico immergersi in una fenomenalità, un saper essere nei fenomeni; ecco è questo che lo scientismo non sa fare. Il prendere uno strumento tecnico, i metodi di ottimo della fisica e piazzarli dappertutto: l'economia, le dinamiche evolutive sarebbero tutti percorsi ottimi, indipendentemente dal fenomeno, dalla storia, non si coglie più nulla della specificità, del senso del fenomeno studiato. E così fan quelli che sanno e conoscono un po' di calcolabilità, spesso non molta, e prendono questa matematica bellissima e la piazzano dappertutto con una miseria scientista che è profondamente antiscientifica.

Macchine a stati discreti e mondo

Ci sono stati ovviamente enormi successi interni dell'Informatica che io adesso non sto ad elencare. Mi è capitato di aver per colleghi degli informatici che hanno contribuito, per esempio, al controllo di sistemi di volo, cioè in cui l'impegno teorico e matematico, come in Sifakis, come per Cousot a Parigi, hanno totalmente cambiato delle realtà importantissime: il volo aereo è oggi controllato da informatica di notevole interesse. Non so se vi siete accorti ma in trent'anni il volo aereo è totalmente cambiato nel senso che gli aerei, per esempio, possono atterrare 50 secondi l'uno dall'altro. Questo grazie ad un'interazione ricchissima uomo-macchina. Questa è informatica classica, nulla a che vedere con l'intelligenza artificiale perché è un dialogo fra uomo e macchina.

Qual è la sfida a cui questi colleghi hanno lavorato: è la questione della correttezza di programmi. Quando ci sono decine di computer su un aereo e sono state scritte, accumulate milioni di linee di programmi, il problema è: sono corretti? Oppure andiamo a "sbattere". Il problema dell'indecidibilità della correttezza dei programmi è una conseguenza il Teorema di Gödel, in realtà è una facile una conseguenza del problema della fermata di Turing. Ci sono diversi metodi per una prova *parziale* di correttezza di programmi: esistono metodi di *abstract interpretation* (Cousot), di *model checking* (di Sifakis), ci sono strumenti che vengono dalla Teoria dei Tipi a cui alcuni torinesi, qui presenti, hanno contribuito, a cui ho lavorato un pochino anch'io, in maniera indiretta e sono ricaduti come strumenti di costruzione di ambienti di programmazione adeguati per l'analisi della correttezza dei programmi. E gli esperti di queste applicazioni li usano tutti: fanno delle riunioni, comparano… "i diversi metodi matematici sono abbastanza solidi per cui, anche se non possiamo dimostrare che questo programma immenso è corretto, però c'è una ragionevole certezza matematica che possa andare". E tutto funziona ragionevolmente bene, sempre però con l'interazione uomo-macchina in cui continuamente il pilota è coinvolto, partecipe, ecc.

Vorrei evocare anche un altro ambito di grande successo dei metodi deduttivi formali: la matematica pura. È impressionante come la *proof assistance* sia diventato uno strumento essenziale a fare la matematica. In geometria algebrica ad esempio, sempre più il buon matematico riesce a isolare il lemma totalmente calcolabile, decidibile, e lo fa provare alla macchina. Ovviamente la scelta è difficile perché non è decidibile se un Teorema è totalmente formalizzabile, se un Lemma è formalmente deducibile. Quindi si tratta del buon giudizio del matematico che fa fare alla macchina le parti calcolabili. Il Teorema dei quattro colori è il grande esempio, ma da allora la proof assistance, come la modellizzazione computazionale, è diventato uno strumento essenziale per chi fa scienza perché ovunque oggi si fa scienza con un uso essenziale dell'informatica.

Il guaio è quando questo lo si confonde con il mondo. Uno dei modi di vedere dove i problemi si pongono è quel contrasto che chiamavo, con Thom, l'aporia fondamentale della matematica: il gioco fra discreto e continuo. Il mondo non è né discreto né continuo. È quello che è. Ma noi ci diamo strumenti matematici diversi che l'*organizzano* in modo diverso con questi due sguardi, che non son affatto neutri rispetto all'intelligibilità. E non ascoltate chi dice che la Meccanica Quantistica ci dice che il mondo è discreto. La Meccanica Quantistica inizia con la grande sorpresa di osservare lo spettro discreto dell'energia dell'elettrone-legato, mentre lo spettro dell'energia dell'elettrone-libero è continuo. La sfida della Meccanica Quantistica è questa continua superposizione, dualità, particella discreta - onda continua.

In effetti, la Meccanica Quantistica ci dice che in alcun modo possiamo dividere il mondo in bit e in byte, in scatolette con la dimensione della lunghezza di Planck, perché ci ha mostrato i fenomeni di intricazione. Cioè queste scatolette non si possono separare con la misura. Una struttura è discreta quando la topologia discreta è naturale. Questo la Meccanica Quantistica lo vieta perché, qualsiasi misura si scelga, ci sono fenomeni di intricazione che non permettono di separare, non permettono la topologia discreta sul mondo.

Invece il computer, come dice Turing, è una macchina a stati discreti. Soprattutto quando è isolata. Sulla rete i problemi si complicano perché c'è il continuo dello spazio-tempo, cioè c'è lo spazio-tempo che capiamo meglio con il continuo perché ci sono fluttuazioni di ogni genere. La macchina a stati discreti, questa qui non isolata, è una macchina laplaciana. Lo dice persino Turing nell'articolo del '50. In che senso? Se voi vi programmate la più caotica delle dinamiche non-lineari – i miei colleghi fanno meraviglie nella implementazione di uragani – e poi fate "Restart", quella fa *esattamente* la stessa identica dinamica, esattamente nello stesso modo. Cosa che non ha senso fisico. Mai una dinamica non lineare, di un uragano per dire, si ripete in maniera identica. Ma siccome la macchina è a stati discreti, la si può reiniziare *esattamente* sulle stesse condizioni iniziali – cosa che non ha senso fisico. Ciò è possibile grazie ai miracoli dell'ingegneria perché ovviamente lì dentro c'è un flusso continuo. Ma attraverso switch e transizioni critiche, l'interfaccia che conta è solo un'interfaccia discreta.

In rete le cose si complicano. Infatti l'aleatorio è molto presente, ma i colleghi che lavorano in rete sono tanto bravi che, attraverso tecniche di semafori *interleaving* ecc., possono permettersi di chiamarlo "*do not care*" – non lo vedi – e infatti non lo vediamo, normalmente; se semplicemente si manifesta attraverso il ritardo, l'apertura di una pagina web in Australia che ci mette il doppio del solito ad esempio, diventiamo furiosi: "… ma cosa succede? come mai?..." Non accettiamo proprio che la macchina o la rete non iteri in modo identico, il suo mestiere è iterare in modo sempre identico, sinonimo di "programma che funziona correttamente".

La ricchezza del continuo è nel permettere, in primis, di descrivere l'approssimazione della misura classica. L'approssimazione è intrinseca alla misura; la misura classica è sempre approssimata, è sempre un intervallo; è quello che ha capito Poincaré, che poi Turing riprende nella sua applicazione alla morfogenesi nel '52: in un sistema non-lineare, la perturbazione, la fluttuazione *al di sotto* della migliore misura possibile dà luogo ad una dinamica totalmente diversa ad ogni iterazione, ovvero è dimostrabilmente impredittibile. L'uomo ucciso dalla valanga causata dall'elettrone che si è spostato un anno prima di un nanometro, cioè al di sotto della scala di misura, della scala propria all'uomo, osserva Turing nel '50.

Informazione digitale e causalità

Ora, qual è il nodo nell'intelligibilità del continuo? La questione fondamentale è la causalità. Perché? La nozione di causa diventa solida in Fisica quando è immersa nel contesto dei principi di conservazione. In realtà il Fisico può persino fare a meno della causalità. Per esempio uno può dire in Relatività non che "la Gravitazione causa la caduta di un corpo", no, può dire qualcosa di molto più bello; può dire: "un corpo cade per ragioni di simmetria". Perché può dir questo? Perché Einstein ha unificato Inerzia e Gravitazione. Ora, il Principio di Inerzia è un Principio di Conservazione della Quantità di moto, il Principio di Conservazione della Quantità di moto sono simmetrie nelle equazioni del movimento – Teoremi di Noether degli anni venti. Questo è un monumento del sapere grazie a cui uno capisce come proprietà di simmetria, ovvero proprietà di conservazione, permettono di scrivere l'hamiltoniana o la lagrangiana da cui si derivano le equazioni di Newton, l'equazione di Schrödinger…. In questo monumento di intelligibilità, il fatto che le simmetrie siano continue è essenziale. E Riemann lo capisce e dice nella sua tesi – che ricordo a memoria nella traduzione di Clifford del 1873

> "*Nel casi di una varietà discreta, la comparazione riguardo le quantità, si fa solamente con il contare, in una varietà continua si deve misurare con intervalli in modo approssimato, e poi posso anche contare il numero delle misure. Quindi se la realtà, che è soggiacente agli spazi forma una varietà discreta non si ha che la possibilità di contare. Invece se è una varietà continua, dobbiamo fondare le relazioni metriche – quindi l'accesso con la misura approssimata – sulle forze che agiscono su di esse.*"

E questo è quello che Hermann Weyl definirà la *divinazione* di Riemann. Perché questa intuizione, con il lavoro matematico sui riferisce, sarà proprio la via alla Relatività: le forze coesive fra i corpi, come dice Riemann, portano all'unità che Einstein proporrà fra Gravitazione e Inerzia – passando ovviamente attraverso le geometrie riemanniane, i rapporti fra metrica e curvatura dello spazio, il tensore metrico, ecc. Ecco quel monumento di sapere che è la costruzione fisico-matematica: ci riporta quasi al ruolo delle simmetrie in Euclide. Si pone così il rapporto fra Fisica e Matematica in termini molto originali, ben lontani da quelli dei primi padri fondatori della rivoluzione scientifica, e che mette insieme tutte le branche della Fisica grazie a principi di simmetria (leggi di conservazione) unitariamente applicati a spazio e tempo. Branche della fisica per altro non molto unificate, perché sappiamo bene che poi in realtà non c'è unità fra campo Quantistico e Relativistico, l'Idrodinamica non si descrive in termini quantistici e così via. C'è un grosso sforzo di unificazione, tuttavia. Ricordo un bellissimo libro di Chibbaro et al., di cui ho scritto una recensione, intitolato *l'Importanza di essere al confine – The importance to be in borderline* – in cui si fanno vedere i problemi di unificazione che si pongono in Fisica. Così, l'Idrodinamica è una teoria dei fluidi incompressibili nel continuo ed in alcun modo la si capisce in termini quantistici e tantomeno di particelle. Questo per dire a chi viene a raccontare che il vivente devo capirlo in termini molecolari… Ma non si capisce l'Idrodinamica in termini delle particelle! E c'è moltissima acqua negli organismi. Siamo in presenza di una volgarità che nega la Scienza e la storia della Fisica in affermazioni di questo genere. Per di più, in una cellula – ho scritto su questo un articolo con Marcello Buiatti genetista delle piante – si possono osservare effetti quantistici con conseguenze fenotipiche. Ovvero, si può fare una bella fisica della cellula che mette in evidenza come alcuni fenomeni quantistici, anche a livello di DNA, hanno un effetto fenotipico e si sovrappongono a effetti classici; in più c'è anche molta l'acqua.... Quando si dice: devo capire la biologia in termini fisici, la prima cosa da replicare è: tu comincia a capire l'idrodinamica e l'aleatorio classico in termini di Fisica Quantistica e poi, siccome ci sono tre teorie fisiche incompatibili coinvolte, cominceremo a discutere .... Questa invocazione vaga della fisica di immensa volgarità che fa spesso il biologo molecolare; salvo poi in realtà usare un altro linguaggio, usare un approccio "linguistico" al vivente (come recita il titolo di un classico articolo di François Jacob), il linguaggio dell'espressione, informazione, segnale, il programma, l'editing del DNA ....

Perché, appunto, questo è il fenomeno a cui stiamo assistendo. Il raccontarci, come fa Wolfram, in un articolo addirittura in onore di Turing, che l'universo è una grossa Macchina di Turing: Turing ha detto l'opposto! Rileggete l'articolo del '50 in cui scrive: il cervello non è una macchina a stati discreti e non lo è l'Universo perché, appunto, la fluttuazione di un elettrone di un nanometro, una fluttuazione al di sotto dell'intervallo della misura, un fenomeno che capisco solo nel continuo – Turing sta parlando in termini classici – dà luogo ad un effetto imprevedibile. E lo dice anche parlando del cervello, tanti invece ci raccontano ancora oggi che il cervello è una Macchina di Turing. Per fortuna, i termini della IA classica non si pongono più, perché le tecniche del *deep learning* hanno totalmente spazzato via l'intelligenza artificiale del "cervello macchina di Turing". La nuova IA è basata su tecniche raffinate di "wavelets", di rinormalizzazione, prese in prestito dalla fisica matematica, punto banali e largamente descritte nel continuo. I ricercatori in questi domini nuovi di applicazione di tali metodi hanno poi il grosso problema di implementarli su una macchina a stati discreti, una grossa sfida. Ma, diciamo, oggi non esiste più quel racconto del cervello macchina digitale. Invece sussiste ahimè in Biologia: il Dogma Centrale, sull'informazione codificata completamente nel DNA trasmessa come nell'"algebra booleana" di un computer (Monod, 1971) ecc. governa ancora il mito degli OGM, la ricerca sul cancro e ben altro.

Ma qual è la differenza che c'è nel guardare il mondo attraverso un sistema di equazioni nel continuo? Quando il matematico scrive un'equazione basandosi sui principi di conservazione, che sono al cuore della grande unità di tutte le discipline così poco unificate della Fisica, cerca di rendere intelligibile

dinamiche in base a principi di simmetria. Anche nel caso delle dinamiche non-conservative cioè di sistemi aperti, lontano dall'equilibrio, usa dei principi di conservazione per esaminare i flussi – un Sistema è aperto, lontano dall'equilibrio, quando c'è un flusso di energia o materia. Principi di conservazione permettono di formalizzare un flusso e questo gli permette poi di derivare, e non è banale, delle traiettorie; sempre modulo *la misura*, perché l'unico nostro accesso al mondo è la misura – la misura classica, quantistica – che è sempre o approssimata o addirittura indeterminata, non-commutativa nel caso della Meccanica Quantistica.
Quando uno invece programma una dinamica lì sullo schermo e fa cadere una mela, ecco che Wolfram ci racconta – e tanti altri purtroppo con lui che "la mela cade perché è programmata per cadere". Così, la legge fisica è un algoritmo e che quindi una mela cade, in natura, perché è programmata per cadere. Capite la differenza rispetto alla Fisica che ci dice che una mela cade per ragioni di simmetria. È proprio un crollo della conoscenza il dire: esiste la proprietà intrinseca del cadere, il programma per cadere.

Fra la descrizione fisica in termini equazionali con tutte queste caratteristiche (la misura, l'eventuale non linearità, la dimostrazione dell'imprevedibilità) e il processo che avviene su uno schermo, c'è un abisso. Sullo schermo nulla si muove ma delle regole dicono esattamente quali pixel si spengono e quali si accendono; e sempre gli stessi si iterano in modo identico, seguendo una regola che non descrive una dinamica ma semplicemente una regola di rimpiazzamento e di riscrittura. I sistemi di programmazione sono dei sistemi di scrittura e di riscrittura, fino a scrivere/accendere pixel e cancellarli/spegnerli. I programmi hanno tutt'altro scopo rispetto alle equazioni: permettere un'implementazione su una macchina a stati discreti. Se uno li proietta nel mondo ha un'immagine del tutto deformata e deformante di quello che invece propone una fisica che, a riguardo, è solidissima.

E fra l'altro si perde quest'immersione della causalità in principi di conservazione, espressi da simmetrie nel continuo (teoremi di Noether) che è il grande successo della Fisica del XX secolo. Si passa cioè da una intelligibilità formidabile a una normatività della regola da seguire nel modo più "desultory" possibile, dice Turing. Il che è molto diverso.

Le equazioni invece rendono intelligibile, esplicitano le cause, e Turing lo racconta benissimo perché chiama la sua costruzione, nell'articolo del '52, un *modello* della morfogenesi. Ovvero, tramite le equazioni cerca di mettere in evidenza quello che considera le *cause* della dinamica: azione, reazione, diffusione in un contesto conservativo; l'articolo del '50 lo dedica invece ad un gioco dell'*imitazione* perché, in realtà, vuol solo far vedere che una macchina può imitare una donna imbrogliando un osservatore che fa delle domande. Tanti intelligenti artificiali classici si sono focalizzati su queste domande, che non sono molto interessanti – chiede infatti: sai scrivere una poesia? Hai i capelli lunghi? Fai la somma di... e fa fare la somma di due numeri di cinque cifre e… la risposta è sbagliata perché la macchina fa finta di essere, deve imitare, una donna… e per Turing le donne non sono molto brave in matematica. La cosa divertente è che la traduzione dell'articolo, per un volume in francese di IA, corregge l'errore...

Causalità ed informazione, in biologia

Il trasferimento dunque di una struttura dell'intelligibilità su una macchina a stati discreti, che è un processo oggi essenziale per la Scienza, deve subire tutte le mediazioni *cui ho accennato*. Che cosa vuol dire rendere intelligibile un processo con *anche* l'aiuto della macchina? Quando poi si arriva al colmo di dire che la scrittura di quattro lettere, il DNA, è completa rispetto all'ontogenesi, all'evoluzione biologica .... In testi di biologia si trova scritto che l'organismo è un puro *avatar* cioè una pura immagine della informazione genetica. E Gilbert, importante biologo molecolare che lavorava alla decodifica del DNA scrive: quando avremo decodificato il DNA lo potremo trasferire su un compact disk e dire "qui c'è un uomo", "qui ci sono io". Queste non sono esagerazioni, è veramente un sapere che si è diffuso e che si ritrova nei testi di biologia della scuola, anche secondaria. È impressionante. Perché il dogma centrale della biologia molecolare, che è basato su tutto questo, vige ancora. Cosa dice questo dogma? dice che l'informazione si trasmette in modo unidirezionale dal DNA all'RNA (piccola retroazione è possibile) alle proteine e queste producono ovviamente gli organi, l'organismo, le funzioni. Tale assurdità, la completezza informazionale del DNA ha due figli diretti: uno gli OGM, che sono appunto basati sul mito che con il DNA si guida perfettamente la pianta nell'ecosistema, e l'altro, quello che mi interessa, perché collaboro con biologi del cancro, a Boston, la ricerca sul cancro, ancora tutta centrata sulla ricerca dell'oncogene, o del proto-onco-gene o, se uno proprio non ce li ha, del "missing onco-suppressor-gene".

Nel caso degli OGM – fra i tanti Marcello Buiatti, genetista delle piante e Mariano Bizzarri con cui pure ho collaborato, raccontano in molti articoli ed in un libro, che ovviamente si fanno OGM da cinquant'anni nei laboratori; per motivi sperimentali, si inducono mutazioni di ogni sorta nelle piante. Ma solo cinque reggono per qualche tempo nell'ecosistema e sono quelli commercializzati. Cinque o sei. Il problema di questo mito, è che non ha fatto vedere quali guai grossi vengono indotti a livello del microbioma delle radici. Un humus fertile è ricco di interazioni fra le piante grazie ai funghi e diverse forme di batteri, che contribuiscono in maniera essenziale al metabolismo, fra l'altro collegando fra loro le piante. Batteri e funghi delle radici sono quelli di gran lunga più colpiti da quei prodotti che sono stati fatti apposta perché gli OGM resistano ai pesticidi. E questo ha un effetto catastrofico a medio termine che nel breve termine però si può compensare. Come? Comprando fertilizzanti artificiali dalla Bayer, ad esempio. E quindi l'alleanza in una delle più grandi holding che esistano al mondo fra Monsanto e Bayer, di cui avete forse letto.

Adesso non so quanto io possa accennare ad una situazione drammatica che è la distorsione sulla ricerca sul cancro, anche perché può essere doloroso per tutti, visto che siamo in una situazione in cui ognuno di noi ha sicuramente avuto un'esperienza diretta o indiretta di questa malattia. L'incidenza del cancro negli ultimi quarant'anni è raddoppiata. Nel 2000 venne promesso che, grazie alla decodifica del DNA, per il 2015 si sarebbe sconfitto definitivamente il cancro (il presidente dell'Associazione Americana della Biologia del Cancro). Ma soprattutto si promise che in due o tre anni si sarebbe fatta l'analisi di un tumore (benigno, maligno, metastatico, primario ...) grazie alla conoscenza del DNA. Diciotto anni dopo solo un istologo, guardando il tessuto, riconosce se il tumore è primario, metastatico, – una metastasi è una caricatura del tessuto originario – riconosce se è benigno o maligno. Distorsione dei fondi di ricerca incredibile; negli Stati Uniti si stima il costo della ricerca sul cancro a 10 miliardi l'anno. Il problema del rapporto, invece, fra tessuto, organismo ed ecosistema che è al cuore della rottura del controllo della riproduzione cellulare, è quello a cui, appunto, lavorano alcuni, in tutt'altra ottica. Devo dire con successo crescente di ascolto poiché, per fortuna, ci sono delle risposte a questo fallimento di una visione totalmente digitale-genocentrica dell'organismo in generale e del cancro in particolare.

Bisogna dunque uscire da questa forma attuale dello scientismo che è passato oltre lo stadio per cui tutto si capisce con regole di ottimo – in particolare in Economia: politiche economiche dettate da geodetiche uniche possibili, senza alternative, come va un fiume al mare. Invece in una Scienza storica, come l'Evoluzione e l'Economia, lo spazio dei possibili si co-costituisce insieme alla dinamica. Entrambe costruiscono il proprio ecosistema. Lo scientismo è passato dal mito del tutto è geodetiche alla regola formale, all'istruzione, al programma. In particolare, per quello che riguarda il vivente, inclusa l'intelligenza.

E così si è arrivati a pensare che si possa eliminare la Scienza, come dal 2008 tanti tenori dei Big Data vanno dicendo. "Data supersede science: with enough data, a computer may detect regularities and propose prediction and action" (Anderson). Ho scritto a riguardo un articoletto con Cristian Calude, un matematico neozelandese, perché ci siamo ricordati di un teorema, a cui indipendentemente avevamo lavorato negli anni '80, di tipo Ramsey. Esiste una importante teoria combinatoria dei numeri molto difficile tecnicamente (teoria di Ramsey che fa parte di una combinatoria finita) che risponde negativamente a questo mito secondo cui tanto più ho dati, tanto più le macchine possono distinguere regolarità e quindi permetterci di agire, predire, sulla base di queste regolarità. La Teoria di Ramsey ci dice quanto segue, lo racconto in una maniera molto informale – il nostro articoletto si chiama *The Deluge of Spurious Correlatios in Big Data*, scaricabile (cit.). La matematica come noi la presentiamo è semplice, i teoremi, in particolare quello di Van Der Waerden, non sono facili, ma la nostra applicazione è molto semplice: dammi una regolarità, e questo si può caratterizzare con tre parametri. Quanto tempo vuoi che questa regolarità si propaghi? Poi con *regolarità* intendo ad esempio che su una regolarità binaria due numeri su due osservabili diversi coincidano o siano vicini secondo un criterio che stabilisco – dimmi appunto la n-arità della regolarità (almeno due osservabili da correlare), per qualsiasi *n*. Dimmi infine come intendi ripartire il tuo spazio dei dati (colorandoli in maniera diversa secondo se consideri i due osservabili correlati o non correlati, o poco correlati). Allora, questi teoremi dicono: dammi una regolarità con questi tre parametri, allora posso calcolare una cardinalità, ovvero un numero tale che ogni insieme di numeri con questa cardinalità contiene la tua regolarità. In particolare un insieme di numeri ottenuto da … estrazioni al lotto, tirando i dadi, da misure quantistiche. Cioè l'osservazione molto bella e sorprendente è che insiemi di numeri abbastanza grandi contengono sempre delle regolarità.

Attenzione: questi numeri in alcuni casi sono spaventosamente grandi. La Teoria di Ramsey permette di costruire numeri che tecnicamente si possono dire *immensi* perché la funzione che li calcola è calcolabile ma non è dimostrabile totale in aritmetica. Si tratta quindi di una funzione rapidissimamente crescente. Alcuni teoremi permettono questo risultato di rapidissima crescenza delle funzioni prodotte dal teorema. Quelli che abbiamo utilizzato noi, invece, hanno una crescita esponenziale che è del tutto compatibile con le dimensioni delle attuali basi di dati.

Per esempio, in questa follia del "tutto è questione di dati", indipendentemente dalla comprensione, in Biologia, è stato lanciato un progetto da 280 milioni di dollari: raccogliere gli "omics" di 10 milioni di pazienti di cancro. Con *omics* intendo i metabolomics, genomics, proteomics. La mia stima grossolana è che questi dovrebbero avere qualche cosa come 10^{15} dati. O numeri di questo ordine di grandezza.

Una quantità immensa di soldi per produrre dati senza senso, di cui non si sa il senso, sperando che le macchine, trovando le regolarità, poi dicano come agire per diagnosi, prognosi e terapia. Pura follia, perché quando si hanno questi numeri immensi, vi si trovano necessariamente regolarità totalmente spurie, come si diceva.

C'è una divertentissima pagina Web americana che dà esempi di correlazioni spurie. Per esempio i matrimoni in Kentucky sono tanti quanto gli affogati sulle due coste americane: da 20 anni è lo stesso numero. Poi l'età di Miss America per 15 anni è la stessa che le migliaia di tonnellate di patate in Delaware. Una collega italiana negli Stati Uniti mi diceva: "sai, Miss America è sempre un po' patata". In fondo proponeva un lavoro interpretativo scientifico: faccio una congettura di una teoria unificata delle patate e può darsi che permetta di unificare e dar senso ai due fenomeni; è questo il lavoro scientifico in tanti domini, della fisica in particolare.

Veniamo ora all'idea di identificare l'intelligenza con l'elaborazione e la trasmissione dell'informazione. Come vi dicevo, in intelligenza artificiale c'è stata una svolta radicale, molto ostacolata dagli intelligenti artificiali classici. L'ho visto personalmente in un Master di Scienze Cognitive negli anni '90 e l'ho raccontato in un seminario qualche tempo discutendo con un illustre personaggio di queste tecniche recenti del *deep learning* – basato su reti di neuroni nel continuo, reti formali e adesso messi in molti strati. Questi fanno operazioni di filtraggio è poi convoluzione, matematica di spessore, belle idee ed applicazioni – così riescono a riconoscere immagini con grande efficacia. È da notare che più si ottengono risultati, meno le strutture che vengono utilizzate hanno a che vedere con il cervello. I veri esperti in materia lo sanno benissimo. Così riconoscono immagini come mai si è potuto far prima; riconoscono voce e suoni. Successi notevoli. Sono comunque macchine input/output che elaborano e trasmettono informazione. Cosa bellissima da fare e molto utile, sempre più lontana, in questi multistrati di filtri e convoluzioni, spesso nel continuo, dalla struttura e dal funzionamento del cervello.

Ma attenzione, l'intelligenza certo contiene questa componente: anche noi trasmettiamo e elaboriamo informazione. Ma poi facciamo altro: *immaginiamo configurazioni di senso*. Come quando inventiamo una configurazione che non esiste fra le stelle interpolandole, quando inventiamo la linea senza spessore della geometria greca. Immaginiamo una configurazione di senso. E poi, nel linguaggio umano, la continua espressione dell'emozione arricchisce la comprensione reciproca, è una componente essenziale della comprensione del mondo, delle sue *nuances*. Il suscitare emozioni fa parte dello scambio umano di intelligenza del modo e dell'altro. Ma attenzione, tutte queste componenti devono essere presenti insieme. Stiamo vivendo in una situazione in cui, da una parte ci si racconta che l'elaborazione e la trasmissione dell'informazione digitale potrà essere completa rispetto all'intelligenza umana o rimpiazzarla, d'altra viviamo situazioni in cui sempre più domina l'espressione immediata dell'emozione. Questa è una componente dell'intelligenza, ma, isolata, diventa un modo di comunicare in cui si esprimono le "budelle" al mattino con un *tweet* di poche righe, pura emozione, spesso pura aggressività senza "informazione". Allora si passa al suscitare una reazione emotiva senza elaborazione di informazione né di senso. Da una parte ci si dice: la macchina per elaborare informazione può rimpiazzare l'intelligenza. Dall'altra si comunica solo contenuti reattivi-emotivi dell'intelligenza senza riflessione.

E in effetti con il ruolo straordinario che hanno le reti digitali oggi, ci troviamo di fronte a una alternativa. Da una parte uno strumento straordinario della correlazione di esperienze diverse: la diversità umana, la diversità culturale che proprio solo la rete permette di mettere in interazione immediata, arricchendoci di possibilità nuove di conoscenza reciproca, di diversità di esperienze che comunicano, permettendo l'invenzione originale grazie a nuove sintesi. Dall'altra, possiamo usare le macchine e le loro reti formidabili per costruire l'uniformità di un campo medio in cui tutti diventiamo grigi, uguali, come chi segue i consigli statistici di Amazon per comprar libri: se ci si adegua, compreremo sempre più tutti gli stessi libri, in un feedback positivo terrificante. È evidente che la presenza di immensi monopoli tende piuttosto a questa seconda opzione.

È quindi ancor peggio quando uno scientismo di straordinaria pervasività proietta sul mondo questo bellissimo invariante che è la nozione di funzione calcolabile dicendo: è intrinseca alle dinamiche fisiche, è intrinseca alle dinamiche ontogenetiche e filogenetiche, al cervello. Questa occupazione progressiva del reale con un unico strumento di conoscenza è parte del peggiore scientismo, quando, invece, la Scienza è la proposta continua di una diversità di forme di conoscenza; salvo poi cercare l'unità, il dialogo, lo scambio, la sintesi. La Fisica in questo è stata una grande maestra.

E qui si arriva a un punto in cui alcune esplorazioni che potevano essere dette meramente filosofiche dettano forme di vita. Così quando un filosofo che va per la maggiore ci dice: "*quello che non può essere calcolato non può essere pensato*", ci sta proponendo modi dell'azione. Una affermazione del genere forse vent'anni, trent'anni fa poteva essere un'analisi … sbagliata. Anche io sono stato sempre molto rispettoso di quelli che dicevano che il cervello è una Macchina di Turing 0/1, destra/sinistra: forse si trattava di introspezione. Ma quando lo si dice oggi, in presenza di questi immensi monopoli, chi sta dicendo che quello che non può essere calcolato dalla macchine, possedute, sviluppate da Google, Apple o Microsoft, non può essere pensato, non sta proponendo un'analisi, ma una *norma*. Sta ponendo un obbligo. C'è un salto qualitativo. E c'è dietro una visione dell'uomo e si impongono prassi di vita.

Simondon, filosofo francese poco noto, che nel '50-'60 ha scritto solo due libri – ma sono una perla – lo dice molto bene paragonando le macchine che già allora c'erano:

> "*una macchina può sregolarsi, non funzionare, e presentare allora caratteristiche di funzionamento analoghe alla condotta folle di un essere vivente. Ma la macchina non può rivoltarsi, perché la rivolta implica in effetti una profonda trasformazione delle condotte finalizzate e non un sregolarsi della condotta*"

Riferimenti bibliografici

Molti testi pertinenti si possono scaricare dalla mia pagina web: https://www.di.ens.fr/users/longo/download.html
In particolare, i seguenti articoli in italiano e, rivisti anche nella bibliografia, in inglese, sono i più prossimi al discorso sviluppato:

Calude, C.S. e Longo G. (2017), The Deluge of Spurious Correlatios in Big Data, in *Foundations of Science*, 2017, Volume 22, Issue 3, pp. 595-612.

Longo, G. (2018a), *Interfaces of Incompleteness*. In Minati, G, Abram, M & Pessa, E (Eds.) *Systemics of Incompleteness*, Springer, New York, NY.

(Incompleteness.pdf) (Versione preliminare in italiano per *La Matematica*, vol. 4, pp. 219-262, Einaudi, 2010: Incompletezza.pdf; traduite en français: Incomplete-tude.pdf).

Longo, G. (2018b), *Letter to Alan Turing*. Invited, In *Theory, Culture and Society*, Posthumanities Special Issue, (Letter-to-Turing.pdf).

(Originale in italiano: Lettera-a-TuringIt.pdf; con un'introduzione in inglese: Lettera-a-Turing.pdf).

Turing, Alan Mathison (1952), The chemical basis of morphoenesis, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, B237, pp. 121-157.

Torino, 8 novembre 2018

Scegliere, argomentare, comprendere: un laboratorio matematico con la teoria dei giochi

Samuele Antonini
Dipartimento di Matematica "F. Casorati" - Università di Pavia

Sunto. *In questo articolo riporto un'attività laboratoriale in teoria dei giochi cooperativi svolta in alcune scuole secondarie di primo e di secondo grado. La metodologia laboratoriale e i problemi proposti, aperti a diverse soluzioni e che necessitano di una riflessione sul significato stesso di soluzione, hanno promosso processi decisionali consapevoli e un'intensa attività argomentativa in cui gli studenti hanno sostenuto e cambiato i propri punti di vista, costruendo infine un modello matematico condiviso. Un breve paragrafo sulla trattazione formale dei giochi cooperativi a utilità trasferibile chiude l'articolo.*

Premessa

Il contributo dell'educazione matematica allo sviluppo cognitivo e alla formazione culturale degli studenti è di ampia portata e le *Indicazioni Nazionali* per il curriculo del primo ciclo di istruzione (MIUR 2012) sottolineano esplicitamente il rilevante apporto dello studio della matematica allo sviluppo di competenze che sono fondamentali in una società democratica e complessa:

> Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità […]. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. (MIUR 2012, p. 60)

Comunicare, discutere, argomentare e comprendere il punto di vista degli altri sono traguardi di alto valore culturale e sociale, oltre che cognitivo, e viene ribadito più volte nelle stesse *Indicazioni*. È stabilito, tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria, che l'alunno sappia costruire "ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri" (p. 61). Al termine della scuola secondaria di primo grado lo studente "produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite […] sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta" (p. 63).

Il *Profilo culturale, educativo e professionale dei Licei*[1] (Ministero della Giustizia, 2010) afferma la "piena valorizzazione" della "pratica dell'argomentazione e del confronto" (p. 97) e una delle aree metodologiche in cui "la cultura liceale consente di approfondire e sviluppare conoscenze e abilità, maturare competenze e acquisire strumenti" (p. 97) è l'area logico-argomentativa. Tra i risultati di apprendimento in quest'area, sulla stessa linea di quelli per il primo ciclo, leggiamo che "a conclusione dei percorsi di ogni liceo gli studenti dovranno […] saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui." (p. 98).

In sintesi, nei diversi livelli scolari, la competenza argomentativa è articolata in diverse sfaccettature che comprendono in particolare la produzione di argomentazioni a sostegno di una propria tesi e la comprensione delle argomentazioni degli altri, l'assunzione di diversi punti di vista e la flessibilità di cambiare il proprio punto di vista in seguito alla valutazione critica delle argomentazioni[2].

Lo sviluppo di queste competenze richiede necessariamente il coinvolgimento dello studente in attività didattiche che devono valorizzare la pratica del confronto e dell'argomentazione; in questo senso la matematica offre una miniera di possibilità, sia in termini di contenuti, sia per i processi cognitivi e metacognitivi che la sua pratica può promuovere.

Pratica matematica, processi decisionali e laboratorio matematico

Una delle materie prime con cui sviluppare le competenze degli studenti descritte nel paragrafo precedente è la *pratica* matematica intesa come attività di risolvere problemi. Citando ancora le *Indicazioni Nazionali*:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. (MIUR 2012, p. 60)

[1] Allegato A del Decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010 n. 89 "Regolamento recante revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei".

[2] Sul ruolo e l'importanza della gestione dei punti di vista nell'insegnamento/apprendimento della matematica, si vedano anche Bartolini Bussi e Boni (1995) e Garuti e Boero (2002).

La distinzione tra problemi ed esercizi è un punto centrale nella ricerca in didattica e nell'insegnamento. Per chiarire cosa intendiamo con 'problema' richiamiamo la definizione di Karl Duncker (1935), secondo il quale "un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla". Sulla stessa linea, George Polya, nel celebre saggio sui problemi, scriveva che "risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile" (Polya, 1945).

Precisare che il soggetto "non sa come raggiungere" la meta e che lo scopo "non sia immediatamente raggiungibile", scrive Zan (1998), offre la chiave per una distinzione tra problemi ed esercizi. Risolvere esercizi richiede un comportamento automatico, risolvere problemi un comportamento strategico che mette in gioco risorse cognitive e metacognitive e in cui diventa essenziale assumere decisioni:

> Prendere decisioni si contrappone al comportamento automatico [...] e caratterizza l'attività di risoluzione di problemi. Qualsiasi definizione di problema mette infatti in evidenza la presenza di un obiettivo e la mancanza di un procedimento automatico per raggiungerlo, e presuppone quindi implicitamente la necessità di prendere decisioni. Il problem solving si configura quindi come ambiente ideale per sviluppare negli studenti capacità di tipo decisionale. Naturalmente è essenziale che si tratti di attività di soluzione di effettivi problemi, e non di esercizi di routine [...]. (Zan 1998, p. 134)

Anche le *Indicazioni Nazionali* richiamano l'attenzione sui processi decisionali. Nella scuola secondaria di primo grado "l'alunno [...] sceglie le azioni da compiere [...] e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema". (MIUR p. 60)

Risolvere problemi, attivare processi decisionali, produrre argomentazioni e assumere diversi punti di vista possono trovare la loro attuazione in attività laboratoriali. La nozione di *laboratorio matematico* è oramai diffusa nella ricerca in didattica della matematica[3], è promossa nei documenti dell'Unione Matematica Italiana (UMI et al. 2003) dedicati alla 'matematica per il cittadino', ed è richiamata nelle *Indicazioni Nazionali*:

> In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e speri-

[3] Per una sintesi della storia della nozione di *laboratorio matematico* in didattica della matematica, si veda Reggiani (2008).

> menta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.
>
> (MIUR 2012, p. 60)

In sintesi, in una attività laboratoriale l'alunno è protagonista del proprio comportamento, prende decisioni e le motiva con argomentazioni, discute il proprio punto di vista e quello degli altri.

Nei prossimi paragrafi vado a descrivere un esempio di laboratorio matematico mirato in particolare a promuovere le competenze di cui abbiamo discusso in questa prima parte dell'articolo.

Un laboratorio matematico con la teoria dei giochi

Un ambito che trovo particolarmente indicato per stimolare processi decisionali, produrre argomentazioni e assumere diversi punti di vista è la *teoria dei giochi*, per motivi che vado presto a chiarire[4]. La *teoria dei giochi* è una parte della matematica "*che ha per oggetto di analisi le situazioni in cui più decisori si trovano a fare delle scelte, dal complesso delle quali dipende il risultato finale*" (Patrone, 2006, p. 1, corsivo mio). Una delle distinzioni fondamentali all'interno della teoria dei giochi è quella tra *giochi cooperativi* e *giochi non cooperativi*. Si parla di giochi cooperativi quando ai giocatori è data la facoltà di sottoscrivere accordi vincolanti, e di giochi non cooperativi quando tale facoltà non è data. Esempi di giochi non cooperativi sono quelli in cui gli obiettivi dei due giocatori sono conflittuali, per esempio i casi in cui un giocatore vince se e solo se l'altro giocatore perde. Su problemi di teoria dei giochi cooperativi è invece costruito il laboratorio che vado a presentare.

I problemi posti sono *giochi* in cui diversi giocatori possono cooperare per arrivare ad un accordo, il più vantaggioso possibile per tutti. Gestire problemi di questo tipo richiede di prendere in considerazione gli obiettivi, le richieste e le argomentazioni dei diversi giocatori, assumendo vari punti di vista. Arrivare in classe ad una soluzione condivisa comporta inoltre uno scontro tra contrapposte argomentazioni per arrivare a conciliare i diversi punti di vista.

Il laboratorio è stato proposto in due situazioni molto diverse nell'ambito delle attività del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia per il

[4] Diversi studi in didattica della matematica hanno fatto uso della teoria dei giochi come ambiente stimolante per attività di problem-solving e per promuovere la produzione di congetture e argomentazioni. Si vedano, per esempio, i lavori dei ricercatori italiani Martignone (2007), Martignone e Sabena (2014), Soldano *et al.* (2019).

Piano Lauree Scientifiche. Nell'anno 2016/2017 è stato proposto in una II e una III di una scuola secondaria di primo grado dall'insegnante di matematica. Nel giugno 2017 è stato condotto dall'autore di questo articolo con studenti di scuola secondaria di secondo grado in occasione di un loro stage presso il Dipartimento di Matematica. In entrambe le occasioni le attività con gli studenti hanno richiesto circa 8 ore, di cui la maggior parte dedicate al laboratorio che vado a descrivere.

Gli obiettivi didattici di questo laboratorio sono pienamente coerenti con gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per lo sviluppo delle competenze sopra richiamati (si veda anche Antonini, 2017; Antonini, 2018). In dettaglio, attraverso l'esperienza diretta degli studenti nella gestione di situazioni problematiche della teoria dei giochi cooperativi, si intendeva promuovere:

- processi decisionali consapevoli (cioè effettuare scelte, essere consapevoli delle scelte effettuate e del fatto che sono possibili scelte diverse);
- produzione di argomentazioni a sostegno delle scelte effettuate;
- comprensione delle scelte, dei punti di vista e delle argomentazioni degli altri;
- cambiamento del punto di vista in seguito ad una valutazione critica delle argomentazioni altrui;
- discussioni in cui argomentazioni, contro-argomentazioni e punti di vista diversi si conciliano fino ad arrivare ad una proposta condivisa;
- costruzione di un modello matematico, valutazione dell'adeguatezza delle soluzioni fornite dal modello e validazione del modello stesso;
- costruzione dei significati di punto di vista, argomentazione, modellizzazione.

I problemi proposti sono riformulazioni degli insegnanti coinvolti nel progetto di alcuni giochi classici della teoria dei giochi cooperativi tratti da Patrone (2006). La scelta dei problemi è stata effettuata in modo che:

- gli studenti potessero immedesimarsi nella situazione descritta dai problemi, dunque il contesto fosse sufficientemente vicino a situazioni a loro familiari;
- non ci fosse un criterio o una procedura per determinare una soluzione; diverse risposte fossero possibili e lo stesso significato di 'soluzione' potesse (anzi, dovesse!) essere messo in discussione;
- non fossero necessarie conoscenze matematiche particolari per formulare una proposta e per argomentarla, né il problema suggerisse l'uso di particolari strumenti matematici.

Focalizzeremo l'attenzione sul seguente problema, con il quale si è aperto il laboratorio e la cui 'soluzione' ha richiesto circa 6 ore:

Tre musicisti, Ada, Bea e Ciro, vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi da soli, in coppia o in trio. Le ricompense stabilite dall'organiz-

zatore dell'evento sono le seguenti: 100 euro ad Ada (se suona sola), 150 euro a Bea (da sola), 180 euro a Ciro (da solo), 600 euro al trio se suonano insieme. Se suonano in coppia, i ricavi saranno i seguenti: 400 euro alla coppia Ada e Bea, 300 euro a Ada e Ciro, 420 euro a Bea e Ciro. Mettendovi nei panni dei tre musicisti, provate a discutere l'offerta e spiegate in che modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni.

Per meglio comprendere il problema facciamo alcuni esempi. Se Ada e Bea decidessero di suonare insieme, il loro guadagno sarebbe di 400 euro che loro potrebbero suddividere come ritengono opportuno (e dunque non necessariamente in parti uguali). A Ciro non resterebbe che decidere di non suonare oppure di suonare da solo, ottenendo 180 euro. Se, invece, i tre musicisti decidessero di suonare insieme, dovrebbero trovare un accordo su come suddividere i 600 euro di guadagno. Osserviamo che, dunque, non c'è una soluzione in senso classico e che lo stesso significato di 'soluzione' può diventare oggetto di riflessione. Ci possono essere diverse opzioni *del tutto ragionevoli*, sia relativamente alla scelta del compagno o dei compagni con cui suonare, sia sulle modalità di suddivisione del guadagno. Il punto semmai è quello di determinare cosa si intende con 'opzione ragionevole', ovvero sulla base di quali criteri una proposta possa essere più adeguata di un'altra.

Nel corso del laboratorio, per arrivare ad una proposta di classe, è necessario negoziare e questo deve avvenire su due livelli. Uno è il livello degli studenti coinvolti nell'attività didattica, i quali devono trovare un accordo e dunque conciliare proposte diverse in merito al comportamento dei tre musicisti. L'altro è il livello dei tre musicisti che possono avere punti di vista diversi e obiettivi di guadagno che entrano in conflitto. In altre parole, gli studenti devono negoziare una proposta *sulla* negoziazione dei tre musicisti. Come già riportato in altra sede (Antonini, 2018, p. 16) "ci troviamo di fronte ad un gioco (quello di cui si occupa la teoria dei giochi e che riguarda il negoziato tra i tre musicisti), e una riflessione sul gioco che riguarda il negoziato tra gli alunni".

Il laboratorio è stato gestito dall'insegnante e articolato in tre fasi: lavoro a piccoli gruppi di studenti volto all'esplorazione del problema e alla formulazione delle proposte di una soluzione; esposizione del lavoro di ogni gruppo a tutta la classe; discussione finale collettiva di riflessione e di confronto tra le diverse proposte e costruzione di un modello matematico condiviso.

Prime proposte degli studenti

Riporterò, nella parte restante dell'articolo, i processi risolutivi degli studenti, sia allo scopo di illustrare le potenzialità didattiche del laboratorio sia per offrire strumenti concreti all'insegnante che intenda proporre attività analoghe. Ritengo infatti che la conoscenza degli obiettivi e dei processi cognitivi che possono emergere nel corso di un laboratorio matematico sia indispensabile per la sua progettazione, gestione e valutazione.

Il lavoro nelle classi è stato registrato e trascritto e successivamente analizzato con scopi di ricerca. Sulla base delle trascrizioni delle discussioni in classe possiamo apprezzare la ricca complessità dei processi cognitivi degli studenti che hanno generato diverse proposte e un intreccio di argomentazioni e contro-argomentazioni assumendo via via punti di vista diversi. Le proposte più comuni partivano dalla considerazione che ai musicisti sarebbe convenuto suonare insieme. Le modalità di suddivisione del guadagno di 600 euro emerse con maggior frequenza sono riportate in tabella 1. Nella prima colonna della tabella sono riportati i nomi che gli studenti stessi (in qualche caso con l'intervento dell'insegnante) hanno assegnato alla loro proposta. Osserviamo, per inciso, che in qualche caso i valori numerici sono approssimati.

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Equamente	200	200	200
Frazioni	140	209	251
Surplus	156	207	237
Surplus a Ciro	150	200	250

Tabella 1. *Alcune proposte degli studenti sulla modalità di suddivisione del guadagno di 600 euro nel problema dei tre musicisti.*

La prima osservazione di tutti i gruppi di studenti è stata che il modo di comportarsi dei musicisti dipende dalla loro amicizia. Se sono amici, la proposta 'equamente' è risultata la più adeguata. Secondo gli studenti, se i musicisti non sono amici avrebbero dovuto comunque mettersi d'accordo ma con suddivisioni diverse. Le principali proposte si basavano sul fatto che chi ha un guadagno maggiore suonando da solo deve avere un compenso maggiore anche suonando in trio, nella suddivisione dei 600 euro comuni. Dunque, suonando insieme, il guadagno di Ciro dovrà essere maggiore di quello di Bea, che, a sua volta, dovrà essere maggiore di quello di Ada, come quando suonano da soli. Le proposte degli studenti che si basavano su questa assunzione (che all'inizio era rimasta implicita) sono molte e alcune di queste sono piuttosto articolate. In generale si basavano su modelli moltiplicativi o additivi e le argomentazioni prodotte sostenevano in linea di massima che il modello proposto era il più adeguato per rispettare la diversità dei guadagni.

La soluzione del problema chiamata ‘frazioni’ seguiva un modello moltiplicativo e consisteva nel suddividere il guadagno totale di 600 euro in modo proporzionale a quanto Ada, Bea e Ciro avrebbero guadagnato se avessero suonato da soli. Considerando che suonando da solisti la somma dei ricavi sarebbe pari a 100+150+180=430 euro, i guadagni della proposta ‘frazioni’ sono:

- Ada: $100/430 \cdot 600 \approx 140$
- Bea: $150/430 \cdot 600 \approx 209$
- Ciro: $180/430 \cdot 600 \approx 251$

La proposta è stata argomentata dagli studenti con una certa forza sulla base del fatto che la proporzionalità mantiene i rapporti tra i guadagni e dunque l’ordinamento e sembra pertanto garantire una certa equità: se il musicista X ha un ricavo maggiore di quello di Y quando suonano da soli, avrà un compenso maggiore anche nella suddivisione dell’importo comune.

Una delle critiche principali a questa soluzione da parte di alcuni studenti entrava nel vivo dell’adeguatezza del modello proporzionale come strumento per garantire una differenziazione ragionevole dei guadagni.

La controproposta, chiamata ‘surplus’, si basava sul mantenimento della *differenza* tra i guadagni da solisti. Questo modello è dunque additivo e consiste nell’assegnare ad ognuno il compenso che avrebbe avuto suonando da solo e di aggiungere un terzo del rimanente surplus di 170 euro.

La variante ‘surplus a Ciro’ è stata proposta come compromesso in seguito alla critica che quella del ‘surplus’ non fosse equa perché non premiava sufficientemente Ciro il cui valore era stabilito dall’importo del suo guadagno da solista. In questo caso il surplus di 170 euro non viene diviso in tre parti uguali ma offrendo 50 euro sia ad Ada che a Bea e 70 euro a Ciro.

Tutte queste proposte si basano su un principio che potremmo chiamare di *monotonia*, per cui la suddivisione del guadagno totale deve rispettare le stesse relazioni d’ordine dei guadagni da solisti. Quello che gli studenti hanno mostrato di comprendere a fondo è che, dando per scontato di voler mantenere i rapporti tra i guadagni, la soluzione ‘frazioni’ è l’unica possibile mentre la suddivisione in parti uguali del ‘surplus’ garantisce l’invarianza delle differenze.

La costruzione di queste proposte e le loro argomentazioni hanno richiesto, come previsto, lo scontro tra idee e punti di vista diversi e l’assunzione del punto di vista dei singoli musicisti. Osserviamo che nessuna di queste soluzioni tiene conto del guadagno che i musicisti avrebbero avuto suonando in coppia.

Verso un modello matematico

Nel corso delle discussioni che hanno portato alle soluzioni prima esposte, gli studenti hanno analizzato proposte diverse e hanno prodotto anche argomentazioni basate sul fatto che tra due opzioni un musicista sceglie quella a lui più conveniente. Queste argomentazioni, nella prima parte del laboratorio, hanno accompagnato quelle basate sul principio di monotonia. Il ruolo dell'insegnante, una volta discusse le soluzioni della tabella 1, è stato quello di riproporre quanto rimasto implicito e di mettere in crisi le proposte fino a quel momento analizzate.

In particolare, quando uno studente propose che Ada e Bea suonassero insieme, l'insegnante colse l'occasione per lanciare un gioco di punti di vista e per forzare gli studenti ad analizzare il problema in modo diverso. Alla richiesta dell'insegnante su "*chi volesse fare il Ciro della situazione*", uno degli studenti volontariamente vestiva i panni di Ciro dicendo che avrebbe proposto a Bea di suonare insieme a lui in modo che entrambi avrebbero avuto un guadagnato maggiore. Il cambio di prospettiva è molteplice. Non solo gli studenti hanno iniziato a considerare in modo esplicito i diversi punti di vista dei singoli musicisti, ma hanno anche preso in considerazione la possibilità di rilanciare via via nuovi accordi, accettabili da qualche musicista in quanto più vantaggiosi. Per esempio, se Ada e Bea concordano di suonare in coppia e di dividere i 400 euro in parti uguali, Ciro può proporre a Bea di suonare con lui. In questo modo la coppia Bea-Ciro guadagnerebbe 420 euro e Ciro potrebbe offrire a Bea 225 euro e tenerne 195 per sé. Questa proposta sarebbe preferita da Bea e Ciro in quanto più vantaggiosa per entrambi rispetto al precedente accordo. A questo punto, Ada dovrebbe suonare da sola ottenendo 100 euro ma potrebbe proporre a Bea di suonare insieme guadagnando in due 400 euro. Se Ada offrisse a Bea (per esempio) 230 euro, per lei resterebbero 170 euro: per entrambe sarebbe vantaggioso e dunque Bea lascerebbe Ciro per seguire Ada. E così via…

Simulando un negoziato tra Ada, Bea e Ciro, gli studenti si sono resi conto che le proposte di suddivisione del guadagno che avevano formulato (tra cui quelle della tabella 1) non sarebbero accettate perché due di loro avrebbero trovato più vantaggioso suonare in coppia. In altri termini, alcune suddivisioni del guadagno risultavano essere *instabili* nel corso di una contrattazione, in quanto sostituibili da proposte più vantaggiose per qualche coppia di musicisti.

Nella fase successiva del laboratorio, gli studenti, con l'aiuto dell'insegnante, andavano a costruire il modello matematico mettendo in formule quanto discusso. Riassumo qui, in breve, questa trattazione matematica del problema.

Se si assume il principio per cui la contrattazione deve essere *stabile*, una soluzione al problema della suddivisione del guadagno nel caso in cui i musicisti suonino insieme è una terna x(A), x(B), x(C) che corrisponde rispettivamente ai ricavi di Ada, Bea e Ciro e tale che siano verificate le relazioni seguenti:

		$x(A) \geq 100$		$x(A)+x(B) \geq 400$
1) $x(A)+x(B)+x(C)=600$	2)	$x(B) \geq 150$	3)	$x(A)+x(C) \geq 300$
		$x(C) \geq 180$		$x(B)+x(C) \geq 420$

L'uguaglianza 1) stabilisce che la somma dei guadagni sia pari a 600 euro. Le disuguaglianze in 2) garantiscono che ogni musicista ricavi di più di quanto guadagnerebbe suonando da solo, opzione che dunque non preferirebbe. Le relazioni 3) impongono che la somma dei ricavi di due musicisti sia maggiore di quanto guadagnerebbero suonando in due, escludendo in questo modo che una coppia tragga maggiori vantaggi nel lasciar fuori il terzo musicista. Se valgono tutte queste relazioni, a nessun musicista conviene suonare da solo e nessuno di loro è nella condizione di poter fare accettare da qualcuno degli altri due una proposta più vantaggiosa anche per sé.

Come si può osservare, esistono diverse terne che rendono stabile una contrattazione. Per esempio x(A)=170, x(B)=240, x(C)=190, oppure x(A)=115, x(B)=300, x(C)=185, ecc.

In conclusione, il processo di modellizzazione ha avuto come esito la formulazione delle relazioni 1), 2) e 3) e la costruzione di un modello del *gioco* dei tre musicisti[5], in cui il termine 'soluzione' acquisisce significato. Ha accompagnato la costruzione del modello la consapevolezza che il modello stesso rispondeva a criteri basati su precise scelte e che altre scelte sarebbero state possibili.

Un po' di formalismo

In questo paragrafo, per completezza, illustro brevemente alcune definizioni della teoria dei giochi cooperativi. Questa parte non è stata presentata né trattata in classe e la riporto a beneficio del lettore che per approfondire ulteriormente può consultare Patrone (2006) o altri trattati di teoria dei giochi.

Come abbiamo già detto, in un gioco cooperativo sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori. Per modellizzarli pensiamo che ad ogni esito del gioco corrisponda un valore numerico (potrebbe essere la vincita in denaro),

[5] Sui processi di modellizzazione dal punto di vista didattico si veda Blum *et al.* (2007).

chiamato *utilità*. Tra i giochi cooperativi consideriamo quelli per cui un qualsiasi gruppo di giocatori può ripartirsi la vincita. Si assume che sia possibile lo scambio di utilità e debba esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro.

Partiamo dalla seguente

Definizione 1: Si definisce *gioco cooperativo a utilità trasferibile* una coppia $G = (N, V)$, dove

• N è un insieme finito. Gli elementi di N rappresentano i *giocatori*; i sottoinsiemi di N sono anche chiamati *coalizioni*.

• $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $v(\emptyset) = 0$, dove $\mathcal{P}(N)$ è l'insieme delle parti di N (cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N) e $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali. La funzione v è detta *funzione caratteristica del gioco* e rappresenta il guadagno che le coalizioni riescono a garantirsi indipendentemente dalle scelte dei rimanenti giocatori. La restrizione $v(\emptyset) = 0$ sta a significare che il guadagno della coalizione vuota, cioè senza giocatori, è pari a zero.

(Per semplificare la notazione si è soliti indicare $v(\{i\})$ con $v(i)$, $v(\{i,j\})$ con $v(i,j)$, eccetera).

Il gioco dei musicisti formalmente è rappresentato con la coppia (N, v), in cui, Ada, Bea e Ciro sono rispettivamente i giocatori 1,2, e 3 e:

- $N = \{1, 2,3\}$
- $v : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$v(\emptyset) = 0, v(1) = 100, v(2) = 150, v(3) = 180,$

$v(1,2) = 400, v(1,3) = 300, v(2,3) = 420,$

$v(1,2,3) = 600.$

Ci poniamo ora il problema di ripartire la vincita (utilità) tra i giocatori della coalizione N (la più grande coalizione). La teoria dei giochi offre diversi strumenti per dare una soluzione a questo problema. Consideriamo qui quella che garantisce (se esiste) la stabilità della contrattazione, come abbiamo visto nell'esempio dei tre musicisti. Premettiamo la seguente

Definizione 2: Dato un gioco $\mathrm{G} = (\mathrm{N}, \mathrm{v})$ si definisce *nucleo* di un gioco cooperativo a utilità trasferibile l'insieme dei vettori $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^n$ (dove x_i rappresenta la vincita del giocatore i) tali che:

- $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$
- $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Osserviamo che la prima relazione garantisce che sia stata suddivisa tra i giocatori l'intera vincita, la seconda garantisce che la somma delle vincite dei giocatori di ogni coalizione sia maggiore o uguale a quella che otterrebbe la coalizione da sola indipendentemente dalle scelte degli altri giocatori. Inoltre, la relazione sulle coalizioni ha come caso particolare quello delle coalizioni con un solo elemento, e dunque risulta che $\forall i = 1, \ldots, n, x_i \geq v(i)$ cioè ogni giocatore riceve una vincita maggiore o uguale a quanto potrebbe ottenere da solo. Dunque ogni elemento del nucleo è una ripartizione della vincita che garantisce la stabilità, dato che nessuna colazione può ottenere maggiori vantaggi escludendo gli altri giocatori.

Per esempio, il nucleo del gioco dei musicisti è proprio l'insieme dei vettori (x(A), x(B), x(C)) che soddisfano le relazioni 1), 2) e 3) formulate dagli studenti e riportate nel paragrafo precedente.

Osserviamo che, in generale, il nucleo può essere vuoto, può avere un solo elemento o più elementi, a seconda della funzione caratteristica del gioco. Per completezza, ricordo che altri approcci, basati su scelte diverse, portano a soluzioni diverse. Per approfondire si rimanda a Patrone (2006) e ad altri trattati specialistici.

Conclusione

La teoria dei giochi è una parte della matematica particolarmente ricca di problemi che offrono la possibilità di costruire attività didattiche per promuovere processi decisionali, argomentazioni a sostegno delle scelte e assunzione di diversi punti di vista. Nel laboratorio qui presentato gli studenti si sono trovati in una situazione in cui hanno dovuto effettuare delle scelte. Al fine di sostenere la propria posizione, gli studenti hanno esplicitato e discusso i criteri alla base delle loro decisioni e hanno prodotto argomentazioni e contro-argomentazioni su diversi livelli: nelle discussioni sui criteri stessi e a sostegno dell'adeguatezza degli strumenti matematici utilizzati per soddisfare i criteri.

L'intensa attività argomentativa è certamente effetto, oltre che del particolare problema matematico, dell'interazione tra studenti che ha promosso il confronto tra punti di vista, quello degli studenti stessi e quello dei musicisti.

Importante è stato il fatto che la matematica necessaria per la trattazione di questo problema sia piuttosto elementare. Si potrebbe obiettare che questo sia un punto debole del laboratorio qui presentato, tuttavia occorre fare una precisazione. Da un lato possiamo forse dire che i concetti e le procedure matematiche coinvolti nel laboratorio siano elementari, soprattutto nella scuola secondaria di II grado, ma non è così se pensiamo ai processi coinvolti nel trattamento del problema. Attivare processi decisionali consapevoli, argomentare le proprie scelte, comprendere i punti di vista e le argomentazioni altrui, considerare che non c'è soluzione se non vengono esplicitati criteri per definire *cosa sia* una soluzione, costruire un modello matematico e valutarlo, sono processi di pensiero matematico culturalmente e cognitivamente significativi, accessibili agli studenti ma tutt'altro che elementari.

Riferimenti bibliografici

Antonini, S. (2017). Argomentare, comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri: attività didattiche con la teoria dei giochi cooperativi. In B. D'Amore & S. Sbaragli (eds.), *Matematica, didattica e scuola: fra ricerca e prassi quotidiana,* pp. 3-8. Pitagora Editrice Bologna.

Antonini, S. (2018). Giocare con la matematica: argomentare, modellizzare e costruire significati. In *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Numero Speciale n. 2, 2018, G.R.I.M., pp. 13-18.

Bartolini Bussi, M.G. e Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A(3), 221-256.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. e Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and applications in mathematics education. *The 14th ICMI Study.* New York: Springer.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*, Springer [Traduzione italiana: *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, 1969].

Garuti, R. e Boero, P. (2002). Interiorisation of forms of argumentation: a case study. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v. 2, 408-415. Norwich: PME.

Martignone, F. (2007). *Analisi di processi di pianificazione e sviluppo di strategie risolutive in problemi di Teoria dei Giochi* (Tesi di Dottorato non pubblicata). Università di Genova.

Martignone, F. e Sabena, C. (2014). Analysis of argumentation processes in strategic interaction problems. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proc. of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 218-223). Vancouver, Canada: PME.

Ministero della Giustizia (2010). *Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana*, supplemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 137 del 15 giugno 2010, n. 128/L.

Miur (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Firenze: Le Monnier.

Patrone, F. (2006). *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi*. Pisa: Plus.

Polya, G. (1945). *How solve it*. [Traduzione italiana: *Come risolvere i problemi di matematica*. Milano, Feltrinelli, 1967].

Reggiani, M. (2008). Il laboratorio come “ambiente” per l’insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31 A-B, n. 6, pp. 645-663.

Soldano, C., Luz, Y., Arzarello, F., Yerushalmy, M. (2019). Technology-based inquiry in geometry: semantic games through the lens of variation. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), pp. 7-23.

Umi, Miur, Sis e Mathesis (2003). *Matematica 2003*. Lucca, Italia: Liceo Scientifico “A. Vallisneri”.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

Torino, 29 novembre 2018

Un progetto a lungo termine per lo sviluppo delle competenze argomentative

Esther Levenson
Tel Aviv University

Francesca Morselli
Dipartimento di Matematica - Università di Genova

Sunto. *In questo contributo si presentano i primi risultati di un progetto di ricerca volto a studiare lo sviluppo a lungo termine delle competenze argomentative in matematica. Il lavoro si avvale di due lenti teoriche opportunamente combinate: le funzioni della spiegazione e le dimensioni della razionalità.*

Introduzione

Questo contributo si situa all'interno del progetto "Linguaggio e argomentazione", volto alla pianificazione, sperimentazione e analisi di percorsi ad ampio respiro intorno al "nodo" dell'argomentazione in campo matematico. I percorsi sono rivolti a studenti di tutti i livelli scolari (dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado, in una prospettiva di continuità verticale) e sono finalizzati allo sviluppo di competenze argomentative e, negli ordini di scuola superiori, a promuovere un ingresso significativo nella "cultura dei teoremi" (Boero, 2007). Il progetto, nato nel contesto del Piano Nazionale Lauree Scientifiche, è attivo dal 2007 e ha avuto fino ad oggi risvolti sul piano dello sviluppo professionale degli insegnanti coinvolti e sul piano della ricerca, in termini di sviluppo di strumenti teorici per il design di attività e l'analisi delle competenze argomentative promosse. Per una descrizione più estesa delle modalità di lavoro all'interno del progetto, si veda (Morselli & Testera, 2010; Morselli, 2013; Morselli, Sibilla & Testera, 2015).

In questo contributo ci concentriamo su una caratteristica peculiare del progetto, ovvero il fatto di rivolgersi a studenti dell'intero primo ciclo, con la possibilità per gli studenti di seguire percorsi argomentativi nei diversi anni della loro scolarità, per gli insegnanti di lavorare in continuità e in una prospettiva ad ampio respiro e per i ricercatori di lavorare sulla progettazione, implementazione e analisi a lungo termine. Queste particolari condizioni permettono di realizzare il presente studio, volto proprio ad approfondire il tema dello sviluppo a lungo termine delle competenze argomentative. Fonte di ispirazione è lo studio documentato in Levenson (2013), in cui è discusso il "caso di Sharon", studentessa israeliana, che è stata "seguita" nel suo percorso scolastico, per cui sono disponibili sue interviste semi-strutturate negli anni 2, 5, 6 e 10 della scolarità. L'analisi delle interviste mostra un'evoluzione delle spiegazioni fornite da Sharon: negli anni della scuola primaria Sharon produce spiegazioni nel senso di "istruzioni da seguire", mentre a partire dal decimo anno di scolarità Sharon inizia a concepire la spiegazione come modo di "legittimare" un'affermazione di contenuto matematico. Nonostante questo, ancora al decimo anno Sharon si mostra a disagio se le si chiede di esprimere "che cosa significhi spiegare". Inoltre, se attraverso la scolarità si assiste a un'evoluzione da spiegazioni "di tipo pratico" a spiegazioni "di tipo matematico", si registra la persistenza di spiegazioni "di tipo pratico" per determinati concetti.

Il presente studio si ispira al "caso di Sharon", tenendo presente però le caratteristiche peculiari del contesto in cui è realizzato lo studio italiano rispetto a quello israeliano. Caratteristica importante, per esempio, è il fatto che i dati su cui si basa il presente studio non provengono da interviste semi-strutturate, come nel caso di Sharon, ma da attività di classe, realizzate con la collaborazione degli insegnanti. I dati si riferiscono ad attività individuali, in piccolo gruppo o discussioni di classe.

Nel paragrafo successivo sono presentati i due strumenti teorici utilizzati per lo studio.

Inquadramento teorico

Tra i riferimenti teorici alla base del progetto "Linguaggio e argomentazione" troviamo la distinzione, proposta da Balacheff (1987), tra spiegazione, prova e dimostrazione. La spiegazione è un discorso che ha lo scopo di mostrare il carattere di verità di una proposizione. Acquista valore di prova quella spiegazione accettata da una determinata comunità, dove i criteri di accettabilità sono relativi a una comunità fissata in un determinato momento storico. Infine, la dimostrazione è una prova strutturata secondo regole precise, condivise all'interno della comunità dei matematici. Secondo Balacheff, per insegnare la dimostrazione occorre portare gli studenti a comprendere che cosa è una dimostrazione, e poi a produrre in prima persona una dimostrazione, curando quindi tanto la dimostrazione come prodotto finale (oggetto matematico che deve soddisfare alcuni requisiti stabiliti dalla comunità di riferimento) che come processo (un processo intenzionalmente volto alla creazione del prodotto dimostrazione). Dalla doppia attenzione agli aspetti di processo e di prodotto deriva una particolare cura per gli aspetti di controllo e di comunicazione, che trova piena risonanza nel costrutto di comportamento razionale, ripreso dal filosofo Habermas (1999; trad. it. 2001) e adattato al caso della matematica. Habermas individua tre componenti di un comportamento razionale:

- razionalità *epistemica*: conosciamo qualcosa sullo scopo o sui mezzi di un'azione quando "sappiamo perché è vero", convinti di sapere perché le affermazioni relative sono vere o false. Un'opinione è razionale quando è possibile motivarla in un dato contesto;
- razionalità *teleologica*: si agisce razionalmente quando si agisce in base a uno scopo e si persegue lo scopo con mezzi intenzionalmente scelti e messi in opera;
- razionalità *comunicativa*: si comunica razionalmente quando si scelgono consapevolmente i mezzi per rendere efficace la comunicazione.

Secondo Habermas, la razionalità si manifesta nel rendere conto del proprio agire secondo pretese di validità, il che significa che il soggetto è capace, nella comunicazione con se stesso e con gli altri, di giustificare le sue azioni mettendole in rapporto con lo scopo da raggiungere. Per approfondire l'adattamento della definizione di Habermas al campo della didattica della matematica si vedano Boero e Morselli (2009) e Boero *et al.* (2010).

Il quadro della razionalità del dimostrare è stato messo in relazione con lo studio di Levenson, Barkai e Larson (2013) che ha portato, a partire da un'analisi dei documenti relativi al curriculum di matematica in Israele e Svezia, a una classificazione delle funzioni della spiegazione. Tale classificazione si applica alle spiegazioni che possono emergere in classe durante la risoluzione di un problema. Una spiegazione ricopre la **funzione 1** quando consiste nella **descrizione** del processo di pensiero dello studente, cioè risponde alla domanda "Come hai risolto il problema? Spiega". Una spiegazione ha invece la **funzione 2** quando fornisce la risposta ad una domanda del tipo "**perché?**". Più precisamente, si ha la funzione 2 quando la spiegazione risponde alla domanda "Questa affermazione è vera o falsa? Spiega perché". Una spiegazione ricopre la **funzione 3** quando consiste in un'**interpretazione**, ovvero una risposta a una richiesta del tipo "Spiega che cosa significa questa affermazione matematica nel contesto quotidiano". Una spiegazione ha **funzione 4** quando risponde a una domanda del tipo "Trova tutte le possibili soluzioni e spiega", nel qual caso la spiegazione apre la via a nuove **esplorazioni**. Una spiegazione ricopre la **funzione 5** quando consiste nella giustificazione della **ragionevolezza** di una strategia. Si ha quando la spiegazione risponde alla domanda del tipo "Perché ha deciso di risolvere il problema in questo modo?". Infine, una spiegazione ha **funzione 6** quando *è* utilizzata principalmente come mezzo di **comunicazione**.

Morselli e Levenson (2014) propongono un uso integrato dei due strumenti teorici (razionalità e funzioni della spiegazione) per analizzare in termini di razionalità i processi di spiegazione. Il primo studio in tal senso, condotto sulle spiegazioni fornite da studenti di seconda secondaria di primo grado, mostra che è possibile individuare le tre componenti della razionalità nei processi di spiegazione degli studenti; inoltre, emerge che in relazione alle diverse funzioni della spiegazione le tre componenti della razionalità hanno un peso differente.

Il presente studio si propone di proseguire lo studio sistematico delle dimensioni di razionalità coinvolte nel processo di spiegazione, con particolare riferimento alle diverse funzioni della spiegazione.

Il contesto

Lo studio si basa su dati raccolti in una classe primaria dell'Istituto Comprensivo di Carcare (SV). Un gruppo di bambini è stato seguito anche nei successivi anni della scuola secondaria di primo grado. I dati a disposizione sono: per quanto riguarda la scuola primaria, le documentazioni raccolte dall'insegnante Rossana Iadarola (registrazioni audio delle discussioni di classe, risposte scritte individuali) e il materiale aggiuntivo raccolto da Alessia Bonanini per la sua tesi di laurea (Bonanini, 2015); per la scuola secondaria di primo grado, documentazioni raccolte dall'Insegnante Emanuela Zignego (registrazioni video delle discussioni di classe, risposte scritte individuali). In particolare, il contributo si concentra su dati relativi alle classi I, V primaria e II secondaria di primo grado. Si rileva che la classe di scuola primaria a cui ci riferiamo lavora regolarmente nel contesto dei campi di esperienza (Boero & Douek, 2008).

Domande di ricerca

Lo studio è volto ad analizzare lo sviluppo delle competenze argomentative promosso all'interno del progetto "Linguaggio e argomentazione". A tal fine, ci si concentra sulle spiegazioni (risposte individuali o interventi nelle discussioni di classe) prodotte da una studentessa, che indicheremo con lo pseudonimo di Francesca. I dati sono analizzati utilizzando gli strumenti teorici precedentemente individuati (dimensioni di razionalità e funzioni della spiegazione).

In particolare, ci si chiede:

1. Quali funzioni della spiegazione emergono?

2. Quali dimensioni di razionalità caratterizzano le spiegazioni?
3. Si può osservare un'evoluzione delle spiegazioni nel corso della scolarità, in termini di funzioni e dimensioni di razionalità?

Analisi dei dati

Classe I primaria: misuriamo la neve

Il primo estratto fa riferimento alla discussione di classe relativa al seguente problema proposto: *Come possiamo misurare quanta neve è venuta giù [stanotte]?*

1. Daniele: bisogna appoggiarlo sulla neve là e così si può misurare.
2. **Francesca**: ma no … bisogna piantarlo nella neve e vedere il numero che … tu lo pianti e vedi il numero che c'è.
3. Leonardo: io non sono d'accordo con Francesca perché se lo metti in giù non vedi i numeri…per vedere i numeri devi metterlo così e poi se lo pianti puoi prendere un foro e cade giù e poi bisogna aspettare la primavera cioè quando si scioglie la neve
   […]
4. **Francesca**: io non sono d'accordo con Leonardo perché quando lo metti lo senti se c'è il fondo oppure un foro
5. Marianna: se stai attenta a mettere il metro nella neve poi riesci a fare il modo che ha detto Francesca
   […]
6. Insegnante: come lo metto? Osserviamo il righello… cosa vedete…
7. **Francesca**: ci sono dei numeri… quelli ci servono
8. Leonardo: qui c'è lo zero… lo devi mettere così
9. Insegnante: perché?... Leo dice di mettere dallo zero, osservate bene qui c'è un altro numero il sessanta…e allora cosa faccio?
10. Daniele: secondo me dobbiamo partire dallo zero perché è il primo numero
11. Leonardo: se parti dal sessanta vai all'indietro
12. **Francesca**: poi arrivi qui e dici 0 metri! (tutti ridono)

La discussione inizia con una domanda aperta posta dall'insegnante ("*Come possiamo misurare quanta neve è venuta giù [stanotte]?*". Si tratta di una richiesta di spiegazione di funzione 1, perché l'insegnante domanda "come" misurare la neve. Gli alunni rispondono descrivendo la procedura e, in particolari casi, giustificando le loro proposte. Nella battuta 3 Leonardo descrive parte della procedura (funzione 1 della spiegazione), specificando anche che il righello non deve essere piantato nella neve, altrimenti può finire in un buco del terrazzo e cadere. Leonardo giustifica la sua opinione, fornendo quindi una spiegazione che ha funzione 5. Dal punto di vista della razionalità, emerge la dimensione teleologica (Leonardo ha in mente un piano e lo giustifica), mentre si possono individuare carenze a livello epistemico, dal momento che per misurare la neve è necessario mettere il righello nella neve, non si può aspettare la primavera.

Francesca (battuta 2) descrive la procedura di misurazione (funzione 1 della spiegazione) in maniera corretta, il che denota una buona dimensione epistemica della razionalità. Anche la dimensione teleologica è presente, dal momento che Francesca ha chiaro lo scopo di effettuare la misura, che collega allo scopo di leggere i numeri sul righello. La dimensione comunicativa è presente nella capacità di Francesca di condividere la sua proposta con i compagni.

Notiamo che Francesca (battuta 4) difende la sua procedura a fronte delle critiche di Leonardo, mostrando perché la proposta di Leonardo non può essere accolta (funzione 5 della spiegazione).

Leonardo contesta il piano di Francesca sulla base di premesse non corrette (la presenza del buco ecc.), il che può essere collegato a una dimensione teleologica, ma ha carenze a livello epistemico. Francesca risponde in maniera efficace (dimensioni epistemica, teleologica e comunicativa).

Nel successivo scambio (battute 7-12), Leonardo rileva che si può misurare anche senza partire da zero, e Francesca risponde che in tal caso si ottiene una misura non corretta. Leonardo è poco efficace nel farsi capire dagli altri (carenze nella dimensione comunicativa), ma Francesca pare non consapevole del fatto che misurare non consiste semplicemente nel leggere il numero riportato sul righello, il che denota una carenza a livello epistemico. Tuttavia, la risposta di Francesca è coerente col suo scopo (se lo scopo è leggere il numero riportato sul righello, occorre posizionare il righello in corrispondenza dello zero), il che denota razionalità a livello teleologico.

Classe V primaria: i numeri negativi

I dati relativi al percorso sui numeri decimali sono tratti da un percorso progettato e sperimentato con il supporto di Alessia Bonanini (2015).

La prima domanda posta, per la quale è stata raccolta una risposta individuale, è la seguente: *Hai mai visto o incontrato i numeri negativi? Se sì, dove? In che contesto? Come venivano usati e per indicare cosa?*

Qui di seguito la risposta di Francesca:

Francesca risponde così:

> Entrambi sono positivi quindi basta guardare il valore, il 5 è più grande di zero

La risposta di Francesca in prima battuta si configura come una spiegazione con funzione 2, ma a ben vedere si può rilevare anche una funzione 1, perché la studentessa fornisce indicazioni sul metodo per confrontare due numeri ("basta guardare il valore"). Emerge una dimensione epistemica della razionalità (da un lato si fa riferimento a proprietà matematiche, dall'altra si considera zero come numero positivo), ma anche una dimensione teleologica (Francesca ha chiaro lo scopo di confrontare i due numeri) e comunicativa (la spiegazione è chiara).

La successiva coppia da confrontare è formata da -5 e -7.

Francesca risponde così:

> -5 e -7 sono entrambi negativi ma -5 si avvicina rispetto a -7 più ai numeri positivi quindi -5 è più grande rispetto a -7.

La spiegazione ha la funzione 1: Francesca descrive il procedimento da adottare per il confronto di due numeri negativi (occorre guardare quale sia più vicino ai numeri positivi). La spiegazione ha anche funzione 2 per il riferimento a proprietà matematiche (la distanza dai numeri positivi). Il riferimento a proprietà matematiche si collega alla dimensione epistemica della razionalità, l'avere chiaro lo scopo dell'attività alla dimensione teleologica e l'utilizzo di termini appropriati alla dimensione comunicativa.

Nella successiva discussione, i ragazzi lavorano sul confronto tra numeri entrambi negativi, utilizzando la retta dei numeri.

1. Giorgia: secondo me i numeri negativi e positivi sono due cose diverse perché se noi avessimo confrontato nei positivi 5 e 7, 5 sarebbe stato più piccolo, invece per i numeri negativi è 5 il più grande.
2. […]
3. Osservatore 2: cosa significa la freccia sulla linea dei numeri?
4. Daniele: che quei numeri continuano.
5. Leonardo: che vanno in avanti.
6. Insegnante: prova ad andare avanti da -5
7. Francesca: -5-4-3-2-1-0+1+2+3. Quindi prima dello zero i numeri negativi vanno dal più piccolo al più grande e poi dallo zero in su i numeri vanno dal più piccolo al più grande.
8. Osservatore 1: nei numeri scritti alla lavagna qual è il più piccolo?
9. Ragazzi: -7.
10. Osservatore 1: e poi -6? È più grande o più piccolo?
11. Ragazzi: più grande.

12. Osservatore 1: -5?
13. Leonardo: ancora più grande perché si avvicina di più allo zero.
14. […]
15. Giorgia: quindi la freccia indica che devi andare avanti da -7: quindi -7-6-5-4-3-2-1 0 e poi 1 2 3 4.
16. Francesca: come nei positivi che vai sempre dal più piccolo al più grande, anche nei negativi andando verso destra vai dal più piccolo al più grande.
17. […]
18. Francesca: a noi sembra diverso perché partiamo dallo zero andando verso destra, invece si va in una sola direzione. Noi pensavamo ai numeri positivi dallo zero verso destra e poi negativi dallo zero verso sinistra invece vanno tutti in un'unica direzione verso destra dal più piccolo al più grande. Noi pensiamo i numeri positivi da zero verso destra e i negativi da zero verso sinistra; se pensi invece a una sola direzione come in questo caso destra tutti i numeri hanno lo stesso ordine e vanno dal più piccolo al più grande. Noi pensavamo fossero due cose diverse invece, positivi più grandi, negativi più piccoli: non pensavamo alle altre cose che hanno in comune.

La battuta 7 costituisce una spiegazione con funzione 2: Francesca fa riferimento a una proprietà matematica generale per indicare il fatto che i numeri negativi sono ordinati dal più piccolo al più grande. Sono presenti le dimensioni epistemica (il ragionamento è corretto) e teleologica (lo scopo di Francesca è mostrare come la visualizzazione dei numeri sulla retta orientata aiuti nel confrontare due numeri). Per quanto riguarda la dimensione comunicativa, la frase di Francesca non è di immediata comprensione per tutti.

La battuta 16 contiene una spiegazione con funzione 2: Francesca spiega che, in generale, sia i numeri positivi che i numeri negativi crescono andando verso destra. Nella battuta 18 dice che "vanno tutti in un'unica direzione". A livello teleologico, possiamo osservare che Francesca ha lo scopo non solo di effettuare il confronto sulla coppia proposta, ma di trovare una regola/ procedura generale per effettuare i confronti. La linea dei numeri è individuata come un buon supporto per il ragionamento. L'intervento è efficace dal punto di vista della dimensione comunicativa, perché Francesca indica esplicitamente la regola generale (andando verso destra vai dal più piccolo al più grande)

Nella battuta 18, Francesca fornisce una spiegazione con funzione 2 perché rileva che i numeri positivi e negativi hanno proprietà diverse. L'intervento di Francesca ha anche funzione 6, perché è volto a contribuire alla spiegazione collettiva, della classe: Francesca non si limita a fornire la sua spiegazione, comunica le sue riflessioni agli altri. Al di là della dimensione epistemica, qui si nota soprattutto la dimensione teleologica: Francesca ha lo scopo di trovare una "regola" generale e utilizza la linea dei numeri come supporto. La dimensione comunicativa è buona, perché Francesca afferma esplicitamente che "si va in una sola direzione". Nel suo intervento, Francesca cerca di coinvolgere i suoi compagni ("Noi pensavamo…") per ottenere il loro consenso.

Classe II secondaria di primo grado: l'arancia frizza

L'ultima selezione di dati riguarda un percorso di avvio al pensiero proporzionale proposto nella classe seconda secondaria di primo grado. Il problema proposto è il seguente: *Guglielmo è sempre contento quando può invitare a casa sua gli amici. In tali occasioni prepara la sua specialità, l'arancia-frizza, mischiando succo d'arancia e Sprite. Venerdì prepara 7 litri d'arancia-frizza, mischiando 3 litri di succo d'arancia e 4 di Sprite. Sabato prepara 9 litri di arancia-frizza, mischiando 4 litri di succo d'arancia e 5 di Sprite. L'arancia-frizza di sabato avrà lo stesso gusto di quella di venerdì? Spiega il tuo ragionamento.*

Per maggiori informazioni sul percorso "dell'arancia frizza" si rimanda a Morselli e Testera (2015).

La risposta individuale di Francesca è la seguente:

> Secondo me l'arancia-frizza di sabato avrà lo stesso gusto di quella di venerdì perché, anche se le quantità del prodotto sono diverse, il rapporto tra gli ingredienti è lo stesso. Infatti per preparare l'arancia-frizza si usa sempre 1 litro in più di Sprite rispetto al succo di arancia. Secondo me il rapporto tra gli ingredienti dell'arancia-frizza è il seguente: (x-1)/x

La spiegazione fornita da Francesca ha funzione 2, perché Francesca fornisce una motivazione: per lei il gusto non cambia perché il rapporto tra ingredienti non cambia. Inoltre, la spiegazione ha funzione 3 perché Francesca interpreta la relazione tra i due ingredienti in termini matematici. La risposta di Francesca denota carenze a livello epistemico, perché Francesca chiama "rapporto" quella che in realtà è una relazione additiva, non moltiplicativa. Dal punto di vista comunicativo la risposta è chiara. L'utilizzo di notazioni algebriche è coerente con lo scopo di farsi capire dai compagni.

Nella successiva discussione di classe, le soluzioni individuali sono messe a confronto e l'insegnante guida gradualmente gli studenti nella costruzione sociale della soluzione corretta. L'insegnante insiste molto sul confronto tra rapporti di ingredienti. Alla fine del percorso, gli studenti ricevono una scheda individuale di "ripensamento": *Riguarda quello che avevi scritto. Pensi che la soluzione sia corretta? Pensi che la risposta da te proposta contenga anche una spiegazione per la soluzione proposta? Se sì, useresti la stessa oggi? Se no, quale spiegazione forniresti oggi?*

la discussione matematica. Nel percorso a lungo termine, si può osservare una graduale evoluzione dai campi di esperienza extramatematici (la misurazione della neve) a quelli intramatematici (i numeri negativi), con possibili ritorni all'extramatematico (le ricette) letto con gli strumenti della matematica. A livello di attività proposte, alla produzione scritta individuale seguita dalla discussione di bilancio si aggiunge, nella secondaria di primo grado, la proposta di schede di "ripensamento", in un'ottica di valutazione formativa.

L'analisi delle spiegazioni prodotte, effettuata mediante i due strumenti teorici (funzioni della spiegazione e dimensioni di razionalità'), permette in primo luogo di meglio caratterizzare la razionalità dello spiegare, soprattutto per quanto riguarda certe funzioni che si presentano con regolarità.

Relativamente alla funzione 1, la dimensione epistemica riguarda la correttezza della procedura dal punto di vista matematico, la dimensione teleologica il riferimento allo scopo finale e la dimensione comunicativa la comunicazione della procedura (descrizione di tutti i passaggi).

Relativamente alla funzione 2, la dimensione epistemica riguarda il riferimento alle corrette proprietà matematiche, la dimensione teleologica la scelta delle proprietà adatte in relazione allo scopo e la dimensione comunicativa l'organizzazione di una spiegazione comprensibile.

Relativamente alla funzione 3, la dimensione epistemica riguarda la corretta interpretazione dell'affermazione matematica / dell'oggetto nel contesto quotidiano; la dimensione teleologica riguarda la scelta di un contesto quotidiano adeguato per dare significato al concetto, o l'utilizzo dell'interpretazione quotidiana per sostenere il ragionamento e perseguire lo scopo; la dimensione comunicativa riguarda la chiarezza nell'esporre la relazione tra contesto quotidiano e contesto matematico.

Lo studio delle spiegazioni prodotte va avanti, allo scopo di caratterizzare in maniera ancora più fine tutte le funzioni della spiegazione.

L'analisi nel dettaglio delle produzioni e interventi di Francesca ci permette di formulare anche alcune riflessioni in termini di "evoluzione" delle competenze argomentative nel corso della scolarità. Francesca si mostra sin dalla prima classe di scuola primaria in grado di produrre argomentazioni, ascoltare le argomentazioni prodotte da altri, interagire con i compagni e scegliere gli argomenti più adatti per giungere ad un accordo con loro. Diventa via via in grado di valutare criticamente le proprie argomentazioni e, ove necessario, correggerle.

A livello di funzioni della spiegazione, già dalla classe prima Francesca affianca alla funzione 1 (descrizione della procedura) la funzione 5 (giustificazione della procedura) e si possono notare le prime "tracce" di funzione 2 (produzione di argomentazioni pro o contro la verità di un'affermazione, con garanzie di tipo teorico). La tendenza a passare dal piano pratico a quello teorico si osserva già nella scuola primaria. La grande importanza attribuita alla "teoria", allo strumento matematico si può riscontrare negli estratti di seconda secondaria di primo grado, in cui si cerca di "piegare" lo strumento matematico (le proporzioni) per avere conferma di quanto intuito. Interessante che lo stesso strumento sia poi usato in fase di ripensamento, per confutare la prima spiegazione prodotta.

La presenza precoce di spiegazioni con funzione 2 e l'esigenza di "supporto teorico" non caratterizza solo Francesca, ma anzi si riscontra in più di uno studente della classe. Questo dato suggerisce di proseguire con l'analisi fine dei dati, al fine di documentare il graduale ingresso nella "cultura dei teoremi. Risulta inoltre interessante approfondire il ruolo giocato dalle diverse attività proposte, che si affiancano alla richiesta di spiegazione individuale. Le discussioni di bilancio (Bartolini Bussi, Boni e Ferri, 1995) appaiono promettenti per fare emergere spiegazioni con funzione 5 (giustificazione della procedura adottata), ma anche per promuovere la dimensione comunicativa dello spiegare, volta a promuovere non solo il fatto che gli altri capiscano quello che è stato fatto, ma anche che lo approvino e vi aderiscano.

Riferimenti bibliografici

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au college. *Recherches En Didactiques Des Mathématiques*, 3(3), 261-304.

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola. Rapporto tecnico n. 10*, Centro di Documentazione Educativa, Modena.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers, Rotterdam.

Boero, P. E Douek, N. (2008). La didactique des domaines d'expérience dans le cadre de la théorie des champs conceptuels et de la dialectique concepts scientifiques – concepts communs. *Carrefours de l'éducation* 26, 99-114.

Boero, P. E Morselli, F. (2009). Towards a comprehensive frame for the use of algebraic language in mathematical modelling and proving. *roceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 185-192. Thessaloniki, Greece: PME.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. E Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 179-209. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Bonanini, A. (2015). *I numeri negativi nella scuola primaria e secondaria di primo grado. Analisi di un percorso ad alto contenuto argomentativo*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Genova.

Habermas, J. (2003). *Truth and justification*. Cambridge (MA): MIT Press.

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 181-203.

Levenson, E., Barkai, R., e Larsson, K. (2013). Functions of explanations: Israeli and Swedish elementary school curriculum documents. *SEMT '13 – International Symposium Elementary Mathematics Teaching*, 188-195. Prague, Czech Repulic.

Morselli, F. e Boero, P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding of algebraic language. In Cai, J. & Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 453-481. Springer.

Morselli, F. (2013). The "Language and argumentation" project: researchers and teachers collaborating in task design. In C. Margolinas (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 – Task design in mathematics education*, 481-490. Reperibile al sito: http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054.

Morselli, F. e Levenson, E. (2014). Functions of explanations and dimensions of rationality : combining frameworks. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 250-257. Vancouver, Canada: PME.

Morselli F. e Testera M. (2010). L'argomentazione in matematica. *Scuola italiana moderna*, n. 2, 35-36.

Morselli, F. e Testera, M. (2015). One task, five stories: comparing teaching sequences in lower secondary schools. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, n. 25, Supplemento n. 2. GRIM (Dipartimento di Matematica e Informatica, University of Palermo). 419-426.

Morselli F., Sibilla A. e Testera M. (2015). Lo sviluppo delle competenze argomentative nella scuola secondaria di primo e secondo grado. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38, 548-565.

Torino, 20 dicembre 2018

Gli Indivisibili: un viaggio nello spazio e nel tempo da Archimede a Cavalieri

Giulia Bini

Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino

***Sunto**. Questo lavoro presenta un esperimento di didattica laboratoriale realizzato in una quarta Liceo Scientifico, ispirato alla storia degli indivisibili di Cavalieri e alla loro applicazione per il calcolo del volume della sfera. Il progetto ha avuto un duplice obiettivo: da un lato si voleva valutare l'efficacia di un'attività basata sulla storia della disciplina per umanizzare la relazione degli studenti con la matematica e stimolare riflessioni metamatematiche, e dall'altro osservare l'adeguatezza di un approccio laboratoriale come incentivo a superare gli ostacoli tipicamente collegati al ragionamento geometrico nello spazio.*

La storia della matematica come ispirazione didattica

Come sottolinea Marie-Anne Pech nel suo lavoro (Pech, 2013), la matematica permette un doppio viaggio: ci fa viaggiare nel tempo perché la nostra conoscenza attuale è stata costruita dall'umanità di ieri, e nello spazio perché questa conoscenza deve essere compresa nel suo contesto culturale.

Ripensare alla storia della matematica può quindi essere un buon punto di partenza per creare significative attività di classe: infatti, la storia della matematica può rivelarsi una formidabile fonte di idee per costruire le abilità matematiche degli studenti e sviluppare la loro sensibilità e il loro interesse per l'evoluzione dei concetti matematici e per il relativo lessico e simbolismo.

Comprendere la conoscenza nel suo contesto culturale implica che "i concetti di 'matematico' e 'comunità scientifica' debbano essere differenziati in base al periodo storico, [infatti] i matematici sono esseri sociali, e lo sviluppo della matematica è un processo di interazione tra matematici, quindi, ovviamente, c'è sempre un elemento sociale da tenere in considerazione nella storia della matematica"[1] (Bos & Mehrtens, 1977, p. 9).

[1] Questa e tutte le successive citazioni di testi stranieri sono state tradotte dall'autore.

In particolare, i matematici del XVI e XVII secolo possono essere descritti come pionieri che incarnano l'atmosfera di scoperta che ha caratterizzato la scienza in quel periodo: "il matematico, come un esploratore, deve trovare la sua strada attraverso la nebbia e la natura selvaggia, per arrivare ai tesori inafferrabili. La matematica, per loro, è una scienza di ricerca: si tratta della scoperta di gemme segrete e nascoste della conoscenza. I suoi obiettivi hanno poco in comune con la geometria euclidea tradizionale e molto in comune con gli obiettivi e le finalità delle scienze sperimentali emergenti" (Alexander, 2012, p. 9).

Pech (op. cit.) ci ricorda anche che, nel guardare alla storia della matematica come fonte di attività didattiche significative, dobbiamo prendere in considerazione due aspetti diversi: la percezione della storia come strumento per motivare gli studenti, per umanizzare la matematica e approfondire il processo di apprendimento, insieme alla storia come obiettivo in sé, per imparare cos'è la matematica, per darle significato, per mostrare le sue continue evoluzioni nel tempo e nello spazio e sviluppare riflessioni metamatematiche.

Questo esperimento didattico è dunque ispirato dall'idea di vedere "la storia non solo come una finestra da cui trarre una migliore conoscenza della natura della matematica, ma come mezzo per trasformare l'insegnamento della disciplina stessa. La specificità di questo uso pedagogico della storia è che intreccia la nostra conoscenza degli sviluppi concettuali passati con la progettazione di attività in aula, il cui obiettivo è quello di migliorare lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti" (Furinghetti e Radford, 2008, p. 626).

L'attività qui descritta vuole fare leva sulla sensazione di scoperta personale che caratterizza le attività pratiche per promuovere sia l'interesse dei ragazzi, sia un atteggiamento critico nei confronti della geometria euclidea, che apra le porte alla successiva introduzione dell'analisi matematica. Il progetto ha avuto un duplice scopo: si voleva valutare da un lato l'efficacia di un'attività basata sulla storia della disciplina per umanizzare la relazione degli studenti con la matematica, e dall'altro l'adeguatezza di un approccio laboratoriale per coinvolgere i ragazzi e incentivarli a superare gli ostacoli tradizionalmente legati al ragionamento geometrico.

In particolare, concentrandosi sulla teoria degli indivisibili di Cavalieri, l'obiettivo didattico è stato osservare se il fatto di ripercorrere il processo storico che ha portato all'idea di valutare un volume come somma potesse aiutare gli studenti a cogliere la delicatezza di questo punto, e aprire la strada alla futura introduzione della moderna teoria dell'integrazione.

Dagli indivisibili agli infinitesimi

Per seguire il cammino degli studenti dalla consapevolezza storica a quella epistemica, nel paragrafo che segue verranno ricapitolati velocemente i passaggi chiave del percorso concettuale che porta alla nascita della moderna analisi matematica, così come sono stati esposti agli studenti per introdurre l'attività, senza ovviamente la pretesa di fare di questo lavoro uno studio esaustivo di questo punto nodale della storia della matematica.

Il viaggio nel tempo e nello spazio dagli indivisibili agli infinitesimi inizia in Magna Grecia nel III secolo a.C.: grazie alla riscoperta nel 1906 del celebre Palinsesto di Archimede, contenente il "Metodo dei Teoremi Meccanici" (nella forma di una lettera da Archimede a Eratostene), sappiamo che il metodo degli indivisibili è già noto al matematico siracusano, che però non lo accetta come strumento matematico rigoroso. Egli infatti dimostra tutti i suoi risultati con il metodo di esaustione, ma in realtà usa gli indivisibili combinati con il metodo meccanico per scoprire i rapporti tra aree e volumi per i quali fornisce in seguito dimostrazioni precise.

Dopo questo inizio contrastato, gli indivisibili giacciono dimenticati per quasi duemila anni, fino a quando nel 1615 Keplero, che conosce il lavoro di Archimede, pubblica un libro intitolato "Nova Stereometria doliorum vinariorum" (Nuova geometria solida delle botti di vino), contenente il calcolo di aree e volumi con l'uso degli indivisibili. Vale la pena di sottolineare che gli indivisibili di Keplero hanno la stessa dimensione dell'oggetto da misurare: infatti egli immagina il "volume della botte, come ogni altro corpo, costituito da numerosi fogli sottili opportunamente disposti a strati, e lo considera come la somma dei volumi di questi fogli, ognuno dei quali è un cilindro" (Klein, 1908, p. 209).

Ci spostiamo a Bologna qualche anno più tardi, dove, in una lettera indirizzata a Galileo Galilei nel 1621, Cavalieri presenta la sua versione degli indivisibili: "supponiamo di aver tracciato una linea retta in una figura piana e quindi tutte le possibili rette parallele, chiamo queste linee così disegnate tutte le linee di quella figura (Cavalieri usa le parole latine *omnes lineae sive figura ipsa*)", e, analogamente, per un solido, egli definisce "tutti i piani (in latino, *omnia plana*) di quel solido".

Alcuni anni dopo, nel 1635, nella sua "Geometria indivisibilibus", egli ribadisce che "una linea retta è composta da punti come un rosario da grani, un piano è composto da linee rette come un panno da fili e un volume è composto da aree piane come un libro da pagine". Nella stessa opera egli introduce il suo omonimo principio, la cui versione spaziale, comunemente riportata dai libri di testo (quella che segue viene dalla pagina web del progetto Polymath dedicata alla Scodella di Galileo) è: “se due volumi tagliati da un sistema di piani paralleli intercettano sopra ognuno di essi sezioni uguali, anche i due volumi sono uguali; se intercettano sezioni che stanno tra loro in rapporto costante anche i due volumi stanno in questo rapporto”.

Gli indivisibili di Cavalieri differiscono da quelli di Keplero perché sono di una dimensione inferiore al continuo che generano, tuttavia, sebbene non ci sia una definizione condivisa di “indivisibile”, e lo stesso Cavalieri sappia bene che il metodo di sommare linee in aree e aree in volumi possa essere potenzialmente pericoloso (come avviene nel caso del paradosso dei triangoli di Torricelli), questo fatto non lo ostacola dall’applicare con una certa disinvoltura gli indivisibili per il calcolo di aree e volumi. “In contrasto con gli speculatori medievali, egli era meno interessato a domande sulla precisa natura o esistenza di elementi indivisibili, che al loro uso pragmatico come strumento per ottenere risultati. Il rigore, scrive nel suo “Exercitationes [Geometricae Sex]” è affare della filosofia piuttosto che della matematica” (Edwards, 1979, p. 104).

L’idea degli indivisibili e il metodo ad essi correlato sono accolti con sentimenti contrastanti dalla comunità scientifica di quel periodo: si va dal punto di vista agnostico di Galileo, riportato dalle parole di Salviati nella prima giornata dei “Discorsi” (1638): “l’infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gli indivisibili” e anche “ricordiamoci che siamo tra gl’infiniti e gl’indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor piccolezza”, fino alla violenta opposizione dello svizzero Guldino: “a mio parere nessun geometra concederà mai a Cavalieri che una superficie possa essere descritta in linguaggio geometrico come [l’insieme di] tutte le linee di una tale figura, in nessun caso una moltitudine di linee, per grande che sia, può comporre anche la più piccola superficie” (citato da Alexander, 2014, p. 153).

È Torricelli, nella sua “Opera Geometrica” del 1644, a intervenire a favore di Cavalieri e del suo metodo, osservando che: “è comunque certo che questa geometria consente un mirabile risparmio nella scoperta di nuove verità e permette di stabilire innumerevoli e quasi imperscrutabili teoremi con dimostrazioni brevi, dirette, affermative. Ciò che non può per nulla essere fatto con i metodi degli antichi. Essa è veramente la via regia nel ginepraio delle matematiche, che per primo aprì e spianò, per il pubblico bene, l’ideatore di mirabili invenzioni, Cavalieri”. L’indivisibile come lo intende Torricelli torna ad avere le stesse dimensioni della figura di cui fa parte, e subisce una ulteriore piccola ma significativa trasformazione, infatti esso non è più il risultato di una sezione, ma è ottenuto come *vestigium*, residuo ultimo della figura: la trasformazione da indivisibile ad infinitesimo sta cominciando a prendere forma.

La linea che distingue i due concetti si sfuoca ulteriormente nel trattato di John Wallis "The Arithmetic of Indivisibles", pubblicato nel 1656 in Inghilterra, in cui si legge: "suppongo, come punto di partenza (secondo la geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri), che qualsiasi piano sia costituito, per così dire, da un numero infinito di linee parallele. O meglio (che preferisco) da un numero infinito di parallelogrammi di uguale altezza, l'altezza di ciascuno dei quali può essere $1/\infty$ dell'intera altezza, e, cioè, una parte aliquota infinitamente piccola (perché '∞' denota un numero infinito), in modo che l'altezza di tutte [tali parti] prese insieme sia uguale all'altezza della figura" (citato da Malet & Panza, 2015, p. 312).

Infine è nelle parole di Newton che gli indivisibili lasciano definitivamente il campo libero agli infinitesimi: "poiché i presupposti sugli indivisibili sembrano un po' grossolani e quindi il metodo è considerato meno geometrico [...] quando considererò le quantità come composte da particelle, non intenderò queste come indivisibili, ma piuttosto quantità divisibili evanescenti", "Principia Mathematica", Libro I (citato da Kitcher, 1973, p. 48).

Il viaggio dagli indivisibili di Cavalieri alla moderna teoria dell'integrazione si conclude il 29 ottobre 1675, con il manoscritto di Leibniz dedicato al calcolo delle aree, conservato presso la Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek della Niedersächsische Landesbibliothek di Hannover in Germania (Sig. LH XXXV, VIII, 18, Bl. 2v). In questo testo, tradotto da Child (1920), Leibniz seguendo la consuetudine del tempo, utilizza inizialmente la locuzione "omn l" – derivato dalle "omnes lineae" di Cavalieri – per indicare la somma di infiniti elementi lineari, e quindi dà prova della sua abilità sorprendente nel creare i simboli che faranno la moderna matematica, osservando che "sarà utile scrivere $\int$ per omn, in modo che sia $\int l$ = omn l [cioè] la somma di tutte le l" (op. cit., p. 80).

Dalla storia della matematica alle attività didattiche

L'attività proposta – strettamente connessa alle Indicazioni Nazionali per il liceo scientifico – è concepita come la trasposizione didattica del lavoro di Cavalieri, incentrata sull'uso di indivisibili per ricavare la formula del volume della sfera. Il percorso educativo segue la dimostrazione data agli inizi del 1600 da Luca Valerio – comunemente nota come la *scodella di Galileo*, perché Galileo la riporta nel suo "Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (Fig. 1).

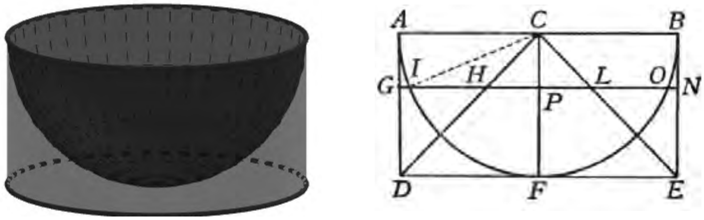


Fig. 1. La scodella di Galileo (a), e il relativo schizzo tratto dai "Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (b).

Viaggiando indietro nel tempo, alla dimostrazione classica dell'equivalenza tra la scodella e il cono di uguale raggio e altezza, condotta con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, per la quale, citando ancora il Salviati dei Discorsi "è necessario farne la figura, perché la prova è pura geometrica", viene affiancata una verifica fisica ottenuta applicando il principio dell'equilibrio meccanico di Archimede.

L'esperienza didattica descritta in queste pagine è stata svolta in una lezione di due ore consecutive con una classe di 24 studenti di una quarta Liceo Scientifico (17-18 anni); i dati sperimentali sono stati raccolti dall'autore, che era l'insegnante della classe, attraverso gli appunti presi durante l'attività e la successiva discussione in classe, e attraverso l'analisi delle relazioni degli studenti.

L'approccio utilizzato si riconduce al concetto laboratorio matematico come metodologia didattica, così come è stato introdotto dall'UMI-CIIM nel 2001 e successivamente illustrato da Bartolini Bussi: "la storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo con testo, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio […] adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici. […]" (Bartolini Bussi, 2010, p. 42).

In questa attività, gli studenti vengono infatti stimolati a diventare apprendisti nella bottega matematica e, allo stesso momento, vengono invitati a viaggiare nel tempo per cogliere e comprendere le analogie e le differenze tra i metodi di Archimede e di Cavalieri per il calcolo dei volumi.

Di fondamentate importanza dal punto di vista didattico è anche la discussione matematica che segue l'attività laboratoriale, intesa come "strumento per costruire, attraverso la negoziazione nella classe, domini di consenso nei quali possa avvenire la comunicazione su un argomento matematico […], una discussione matematica è [infatti] una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento" (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995, p. 7).

Per concludere, il passaggio dalla narrazione orale alla narrazione scritta nelle relazioni di laboratorio mira a collegare due modi altrettanto significativi per coltivare il pensiero matematico, con una particolare attenzione al secondo, in linea con quanto osserva Sfard nella sua "Psicologia del pensiero matematico" (2009, p. XIV) sul fatto che "la nostra capacità di analizzare e spiegare è inferiore alla nostra capacità di vedere e osservare".

Svolgimento dell'attività

Dopo l'introduzione storica ricordata nel paragrafo precedente, il percorso didattico prosegue sottolineando il fatto che, essendo il principio di Cavalieri indipendente dai postulati dello spazio euclideo, si può esso stesso considerare come una sorta di postulato, che fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'equivalenza di due figure geometriche. Quindi, dopo aver applicato il principio di Cavalieri per la dimostrazione classica dell'uguaglianza dei volumi della sfera e dell'anticlessidra, gli studenti sono divisi in otto gruppi di tre persone ciascuno, e viene loro richiesto di dimostrare l'equivalenza tra la scodella e il cono di uguale raggio e altezza, applicando sempre il principio di Cavalieri.

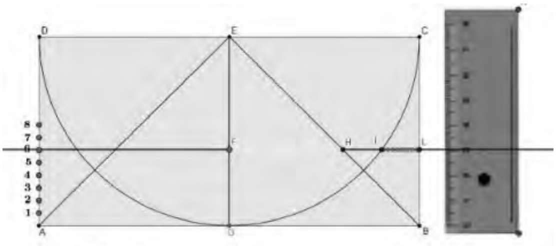


Fig. 2. La figura dinamica utilizzata per l'assegnazione dei livelli.

Al termine dell'attività dimostrativa, inizia la parte laboratoriale dell'attività per la quale viene assegnato a ciascuno degli 8 gruppi un livello (scelto tra 0,5cm e 4cm) e viene condivisa una figura dinamica creata con GeoGebra (Fig. 2), in cui è possibile trascinare la linea orizzontale alla quota data, e fare riferimento al righello per leggere la misura che indica la posizione dei propri indivisibili.

Agli studenti viene quindi chiesto di:

- ricavare le misure degli indivisibili assegnati, sapendo che l'altezza dei due solidi è di 7,5 cm, e realizzarne le sagome utilizzando dei fogli di foam (un

materiale semplice da ritagliare, che permette di ottenere delle sezioni con uno spessore e un peso adatti all'obiettivo sperimentale),
- verificare l'equivalenza dei momenti meccanici e da essa ricavare quella degli indivisibili assegnati.

In questa attività, la parte di dimostrazione viene richiesta *prima* della verifica, per attirare l'attenzione degli studenti sulla differenza concettuale tra le due procedure.

Lavorando in gruppi, gli studenti affrontano e risolvono la parte matematica necessaria per ricavare le misure esatte delle loro specifiche sezioni e, successivamente, creano i loro indivisibili tagliando le sagome nei fogli di foam. Infine costruiscono la leva a bracci uguali, utilizzando dei bastoncini di legno precedentemente forati, e verificano sperimentalmente l'equilibrio meccanico (Fig. 3).

Fig. 3. La costruzione degli indivisibili e la verifica dell'equilibrio meccanico.

Al termine dell'attività, la discussione di classe permette la condivisione dei risultati e quindi, a casa, ogni gruppo riassume le sue conclusioni in una relazione di laboratorio, che viene valutata dal docente.

Analisi delle produzioni degli studenti

Gli appunti presi durante lo svolgimento dell'attività, le relazioni di laboratorio e le riflessioni emerse durante la discussione di classe, sono stati quindi analizzati per valutare l'efficacia dell'esperienza in termini di coinvolgimento e supporto per "lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti" (Furinghetti e Radford, op. cit.).

1 - La matematica: i calcoli delle misure e la costruzione delle sezioni

La realizzazione dei modelli per la costruzione della bilancia ha svolto un duplice ruolo nella classe: per gli studenti più deboli, che hanno incontrato qualche problema a affrontare la parte di matematica necessaria per calcolare le misure esatte degli indivisibili, è stata una forte motivazione a superare le difficoltà (Fig. 4). D'altro canto, per un gruppo tra quelli più forti, che ha sottovalutato il problema e ha tagliato sezioni sbagliate, la mancanza di equilibrio è stata la manifestazione evidente di un errore che ha obbligato i ragazzi a riconsiderare i ragionamenti matematici svolti.

$\overline{EG} = \overline{EC}$ perché entrambi raggi della semisfera
$\overline{EC} = \overline{GB}$ perché $\overline{GB}$ raggio della cfr di base del cilindro
$\Rightarrow \overline{EG} = \overline{GB}$ per proprietà transitiva
$\Rightarrow$ EGB triangolo isoscele rettangolo in G per costruzione

EGB ~ EFH per il primo criterio di similitudine: A angolo in E in comune
A $\widehat{EFH} = \widehat{EGB} = \frac{\pi}{2}$ per costruzione
A $\widehat{EHF} = \widehat{EBG}$ per differenza

$\Rightarrow$ EFH triangolo rettangolo isoscele
$\overline{FH} = \overline{EF} = \overline{EG} - \overline{FG}$ = 7.5 cm - 2.5 cm = 5 cm
$\Rightarrow \overline{FH} = r_{\text{[illegible]}}$ = 5 cm

Il raggio maggiore della corona circolare è di 7.5 cm per costruzione
$\overline{EI}$ = 7.5 cm perché è raggio della sfera
$\overline{EF}$ = 5 cm per costruzione

$\overline{FI} = \sqrt{\overline{EI}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{(7.5cm)^2 - (5cm)^2}$
$\overline{FI}$ = raggio minore della corona circolare = 5.6 cm

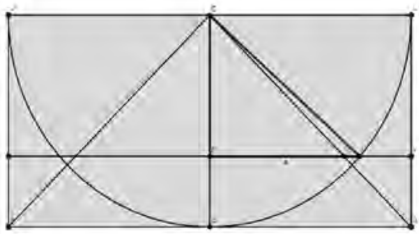


Fig. 4. Dalle relazioni di laboratorio: la matematica per la costruzione delle sezioni.

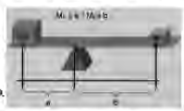
2 - La fisica: verificare vs dimostrare

"Con la procedura di Archimede verifichiamo in modo fisico che la sezione del cono (cerchio) è equivalente a quella della scodella (corona circolare) [...] Per eseguire la procedura di Archimede abbiamo bisogno di sezioni materiali."

VERIFICA FISICA DELL'EQUIVALENZA TRA LE DUE SEZIONI: LA PROCEDURA DI ARCHIMEDE

Con la procedura di Archimede si verifica in modo fisico che la sezione del cono (cerchio) sia equivalente a quella della scodella (corona circolare):

Date le sezioni del cono e della scodella, verifichiamo l'uguaglianza dei loro momenti meccanici, ossia che sono equivalenti se, mettendole agli estremi di una leva con bracci congruenti, quest'ultima si trova in posizione di equilibrio.



→ Le sezioni realizzate sono fatte dello stesso materiale (foglio di foam), perciò hanno stessa densità e stesso spessore.
→ Se stanno in equilibrio sulla leva, i momenti meccanici sono nulli, per cui hanno stesso peso, e poiché la costante gravitazionale è la stessa hanno anche uguale massa: $M = P \cdot b = m \cdot g \cdot b$
→ Avendo quindi uguale densità e massa hanno anche uguale Volume: $V = m \cdot d$
→ Avendo stesso volume e stesso spessore, le due superfici di base sono equivalenti per il principio inverso di Cavalieri .

Per svolgere la procedura di Archimede c'è bisogno delle sezioni materiali.

Fig. 5. Dalle relazioni di laboratorio: verifica vs dimostrazione.

L'uso corretto del termine 'verifica' nello stralcio da una delle relazioni di laboratorio riportato sopra e in Figura 6, conferma l'idea che gli studenti abbiano correttamente compreso la differenza epistemologica tra i concetti di verifica e dimostrazione.

3 - Equivalenza matematica vs coincidenza numerica:

VERIFICA MATEMATICA
Per verificare l'equivalenza tra le due sezioni, oltre al metodo fisico, si può anche usare il metodo matematico, calcolando entrambe le aree.
⇒ Svolgendo i calcoli per ottenere le superfici della sezione del cono e della corona circolare si ottiene:

$S_{sezione\ circolare\ del\ cono} = \pi r^2 = 16 \pi cm^2$

$S_{corona\ circolare} = \pi FL^2 - \pi FI^2 = 56,25\pi\ cm - 40,19\pi\ cm = 16,06\pi\ cm^2$

I due risultati hanno una minima differenza dovuta ad approssimazioni effettuate durante lo svolgimento dei calcoli, che perciò è accettabile.

Fig. 6. Dalle relazioni di laboratorio: gli errori sperimentali.

"I due risultati hanno una differenza minima a causa delle approssimazioni fatte durante l'esecuzione dei calcoli": ciò prova che gli studenti sono consapevoli della necessità di accettare un margine di errore legato alla misura sperimentale e alla differenza tra i numeri irrazionali e le loro approssimazioni razionali.

4 - Indivisibili o infinitesimi? La nascita del calcolo moderno

L'osservazione fatta da uno studente durante la discussione di classe "un indivisibile è una figura piana di spessore infinitesimo" ha facilitato il passaggio dalla consapevolezza storica a quella epistemica, fornendo lo spunto per riprendere la differenza tra indivisibili e infinitesimi anticipata nell'introduzione storica, e rendendo più tangibile la necessità di una nuova branca della matematica.

Conclusioni

Ritengo di poter affermare che i risultati di questa attività in termini di discussione di classe e produzione scritta dimostrino l'efficacia di una strategia laboratoriale ispirata a fonti storiche per interessare gli studenti. Il fatto di avere costruito da sé gli oggetti matematici, e la verifica meccanica finale hanno entusiasmato gli studenti. I ragazzi sono stati profondamente coinvolti nell'attività, si sono visibilmente emozionati quando i bracci della leva si sono assestati nella posizione di equilibrio e si sono chiesti se Archimede abbia provato la stessa sensazione quando ha utilizzato il suo Metodo dei Momenti meccanici per verificare i suoi risultati geometrici.

Per un paio d'ore Archimede, Galileo e Cavalieri sono emersi dal passato e dalla immobilità del libro di testo per diventare compagni di lavoro, coinvolgendo gli studenti e promuovendo la loro consapevolezza dell'importanza della storia della matematica e del suo ruolo all'interno della nostra cultura, e cambiando per sempre il significato della parola scodella, come testimonia il *meme* (artefatto digitale, costituito dalla combinazione originale di un'immagine e un testo, creato e diffuso in rete dagli utenti stessi) in Figura 7, realizzato a fine anno da una delle studentesse della classe.

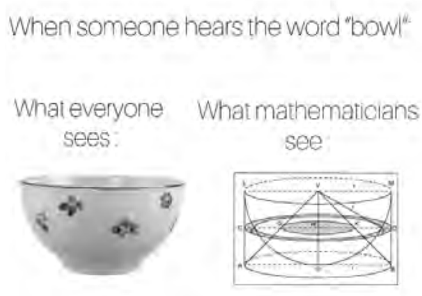


Fig. 7. La scodella per un matematico.

Riferimenti bibliografici

Alexander, A. (2012), From Voyagers to Martyrs: Toward a Storied History of Mathematics, in A. Doxiadis, B. Mazur (eds.), *Circles Disturbed*. Princeton University Press.

Alexander, A. (2014), *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*. New York: Scientific American / Farrar, Straus and Giroux.

Bartolini Bussi, M.g., Boni, M. & Ferri, F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Comune di Modena.

Bartolini Bussi, M.G. in F. Martignone (Ed.) (2010), MMLab-ER: Laboratori delle macchine matematiche per l'Emilia Romagna, Az. 1. In USR E-R & Regione Emilia-Romagna, *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, Napoli: Tecnodid.

Bos, H. e Mehrtens, H. (1977), The Interactions of Mathematics and Society in History. Some Exploratory Remarks. *Historia Mathematica* 4,7-30

Cavalieri, B. (1989), *Geometria degli Indivisibili*, Classici della Scienza, Torino, Utet.

Child, J. M. (1920), *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court.

Edwards, C.H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag

Furinghetti, F. e Radford, L. (2008), Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 626-655), New York: Routledge, Taylor and Francis.

Galilei, G. (1638), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, http://www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf, consultato in data 3/8/2019

Kitcher, P. (1973), Fluxions, Limits, and Infinite Littlenesse. A Study of Newton's Presentation of the Calculus. *Isis,* 64(1), 33-49.

Malet, A. e Panza, M. (2015), Wallis on Indivisibles. In. *Seventeenth-Century Indivisibles Revised*, Vincent Jullien, Birkhäuser-Springer, pp. 307-346.

Pech. M.A. (2013), *Utilisation des textes historiques en mathematiques a l'ecole elementaire*, Education.

Progetto Polymath *Scodella di Galileo*, a cura di Chiara Baldovino https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Set10/ScodellaGalileo.htm, consultato in data 3/8/2019

Sfard, A. (2009), *Psicologia del pensiero matematico*, Trento, Erickson.

Torricelli, E. (1975), *Opere Scelte*, Classici della Scienza, Torino, Utet.

Torino, 17 gennaio 2019

MOOC e MathCityMap: connubio vincente

Eugenia Taranto

Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino
Dipartimento di Scienze della Formazione, Università di Catania

***Sunto**. Nel 2017 è stata avviata una collaborazione tra il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università Goethe di Francoforte. Il risultato è stato un modulo di un Massive Open Online Course (MOOC) rivolto a insegnanti in servizio, con l'intento di formarli sulla possibilità di creare percorsi matematici all'aperto, mediante MathCityMap (MCM). MCM è uno strumento digitale per creare, gestire e svolgere percorsi matematici con dispositivi mobili. Gli insegnanti hanno creato delle attività di matematica all'aperto basandosi sulle linee guida precedentemente definite per completare il modulo MOOC. Un team di revisori esperti ha lavorato per garantire la qualità dei materiali. Il coinvolgimento degli insegnanti, gli sforzi dei revisori e, in generale, questa collaborazione hanno dato risultati soddisfacenti che saranno presentati in questo contributo.*

Introduzione

Da ottobre 2015, il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino è impegnato in un'iniziativa innovativa: il progetto *Math MOOC UniTo* (cfr. Taranto *et al.*, 2017). Il progetto prevede la creazione, l'erogazione e il monitoraggio di MOOC (Massive Open Online Courses) per la formazione di insegnanti di matematica in servizio, con l'utilizzo della piattaforma DI.FI.MA. (http://difima.i-learn.unito.it), una piattaforma Moodle, gestita dal suddetto dipartimento, dove sono iscritti più di 2.500 insegnanti italiani di tutti i livelli scolari. Gli obiettivi di questi corsi online sono quelli di offrire proposte di attività in linea con i nuclei di programmazione propri delle *Indicazioni Nazionali* per la scuola secondaria (Aritmetica e Algebra, Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni), per supportare l'insegnamento della matematica e per offrire agli insegnanti un'opportunità di sviluppo professionale a livello nazionale. Sono stati erogati i seguenti MOOC: *MOOC Geometria* (basato su contenuti geometrici, da ottobre 2015 a gennaio 2016), *MOOC Numeri* (basato su contenuti aritmetici e algebrici, da novembre 2016 a febbraio 2017), *MOOC Relazioni e Funzioni* (basato su contenuti di relazioni e funzioni, da gennaio 2018 ad aprile 2018), *MOOC Dati e Previsioni* (basato su contenuti di dati e previsioni, da gennaio 2019 ad aprile 2019). Di seguito ci concentriamo sul terzo, che di seguito indicheremo come MOOC R&F.

In occasione di un convegno europeo, il CERME10[1] di Dublino, alcuni membri del team del MOOC R&F hanno conosciuto il progetto MathCityMap (MCM). Questo progetto è stato sviluppato dal Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università Goethe di Francoforte (Germania), e consente agli insegnanti di implementare percorsi matematici supportati da smartphone nelle classi di matematica. Il tutto è possibile grazie al portale web MCM. Esso consente agli insegnanti di creare facilmente attività matematiche dislocate nel territorio locale e questo si inserisce bene in un MOOC per formazione insegnanti, dal momento che gli insegnanti del MOOC possono apprendere le competenze necessarie online e poi applicarle direttamente creando attività nel proprio territorio.

È dunque nata una collaborazione tra questi due progetti: da un lato c'era l'intento di fornire un approccio innovativo per insegnare i contenuti matematici di relazioni e funzioni nel mondo reale con il supporto della tecnologia. Dall'altro lato, MCM è un progetto in espansione e valeva la pena di introdurlo e diffonderlo in Italia. In questo contributo riporteremo i risultati emersi da questa esperienza, insieme ad alcuni esempi di attività matematiche create dai docenti corsisti del MOOC, secondo le linee guida per la progettazione di MCM. Inoltre, mostreremo le potenzialità di un sistema di revisione condotto da esperti, sottolineando come questo sia un modo per garantire la qualità delle attività nell'ambiente online del MOOC.

Percorsi matematici

Blane e Clarke (1984) sono stati tra i primi a presentare l'idea di percorso matematico a un pubblico scientifico più ampio. I percorsi matematici erano accompagnati da una guida, solitamente una mappa, che mostrava luoghi e compiti interessanti da un punto di vista matematico. Studi sull'apprendimento all'aperto hanno mostrato che gli studenti non solo ricordano il lavoro sul campo e le visite all'aperto per diverso tempo (anche anni), ma anche l'esperienza di apprendimento all'aperto è considerata "più efficace per lo sviluppo delle abilità cognitive rispetto all'apprendimento in classe" (Dillon *et al.,* 2006, p. 107). Gli studenti devono comprendere il problema, trovare un

[1] Tenth Congress of the European society for Research in Mathematics Education.

modello matematico appropriato, raccogliere dati, lavorare matematicamente, convalidare e discutere la loro risposta. Queste attività si avvicinano al ciclo di modellizzazione descritto da Blum e Leiß (2005) e aiutano a promuovere la modellizzazione.

I contenuti matematici dipendono dalle attività che un percorso matematico offre. I problemi nel campo della geometria e della misurazione sono ovvi, poiché molte forme geometriche modellano il nostro ambiente. Tuttavia, è possibile trovare molti compiti negli altri campi della matematica. A differenza dei percorsi originali che si svolgevano su base volontaria, i percorsi di matematica a scuola sono per lo più preparati dagli insegnanti per i loro studenti con particolare attenzione a un determinato argomento e sono soggetti a ostacoli organizzativi. Poiché il tempo a disposizione è solitamente fissato da lezioni di un certo periodo (ad esempio, 60 o 120 minuti) e il gruppo di apprendimento è composto da circa 20-30 persone, è necessario che l'insegnante organizzi bene l'attività del percorso di matematica affinché abbia successo. Ci sono molti aspetti che vanno considerati durante la creazione di un percorso di matematica. Per questo motivo, le linee guida per la progettazione delle attività, che verranno presentate nel paragrafo seguente, sono state formulate per aiutare gli autori a generare materiale di alta qualità.

MathCityMap e garanzia di qualità dei contenuti

Il progetto MathCityMap combina l'idea di percorsi matematici con le possibilità delle tecnologie web e dei dispositivi mobili (cfr. Gurjanow, Ludwig & Zender, 2017). Con l'aiuto del portale web MCM (https://mathcitymap.eu), gli insegnanti possono creare e gestire digitalmente compiti e percorsi. Inoltre, il portale web offre modelli di attività, molte attività pubbliche e la possibilità di generare automaticamente una guida matematica in PDF. Lo scopo del portale web MCM, che è disponibile in ben 11 lingue (italiano incluso, grazie alla collaborazione nata con *Math MOOC UniTo*), è quello di rendere più comoda la sfida di creare un percorso matematico. L'applicazione MCM per smartphone utilizza il GPS per visualizzare la posizione delle attività sulla mappa e presentarne la consegna agli utenti. Inoltre, gli utenti possono beneficiare di suggerimenti, se hanno necessità di richiederne, e ricevono un feedback automatico sulle risposte inserite. L'applicazione è destinata a utenti (ad es. studenti) che desiderano percorrere un percorso di matematica.

Le comunità web (ad esempio, Wikipedia o GeoGebraTube), che permettono agli utenti di creare contenuti, in generale affrontano la questione del mantenimento degli standard di qualità. Le revisioni tra pari o tra esperti sono un modo comune per garantire la qualità dei lavori accademici e del materiale prodotto da diversi autori (Price & Flach, 2017). MathCityMap implementa un sistema di revisione condotto da esperti per mantenere un'alta qualità delle attività e dei percorsi pubblicati. Gli esperti sono selezionati per ogni paese partecipante. Si tratta spesso di insegnanti o accademici esperti nel campo dell'insegnamento della matematica, che sono ben informati sulle circostanze specifiche dell'insegnamento della matematica nei rispettivi paesi. Gli esperti possono decidere se il compito o il percorso soddisfa i criteri di qualità e accettarne la pubblicazione o, se è necessaria una revisione, possono rifiutare la pubblicazione con un messaggio, indicando le modifiche necessarie (cfr. Jablonski, Ludwig & Zender, 2018).

Per aiutare i nuovi autori, sono state formulate delle linee guida per la progettazione delle attività. Queste linee guida sono la base del sistema di revisione MCM (Gurjanow *et al.*, in stampa):

1. *Unicità*. Ogni attività deve fornire una foto che aiuti a identificare con precisione la situazione, l'oggetto dell'attività e di cosa si tratta principalmente.
2. *Partecipazione*. Per risolvere un'attività, l'utente deve essere presente, quindi i dati dell'attività possono essere ottenuti solo localmente. Questo significa anche che l'immagine e la descrizione dell'attività non dovrebbero mai permettere di esporre la soluzione.
3. *Essere attivi*. Colui che risolve l'attività deve essere attivo e fare qualcosa (per esempio, misurare e contare).
4. *Soluzioni multiple*. L'attività dovrebbe essere risolvibile in vari modi.
5. *Riferimento alla realtà*. Le attività dovrebbero avere un riferimento a un'applicazione reale e non apparire come artificiali.
6. *Strumenti*. Gli strumenti necessari per risolvere il compito dovrebbero essere annotati sulla guida del percorso. In generale, non si dovrebbe aver bisogno di strumenti speciali e straordinari per risolvere un compito.
7. *Suggerimenti*. Ogni attività dovrebbe fornire almeno due suggerimenti.
8. *Esempio di soluzione*. Gli autori dovrebbero fornire una soluzione campione che includa i dati misurati.
9. *Tipologie di soluzione*. La soluzione dovrebbe essere rappresentabile come intervallo, valore esatto o scelta multipla.
10. *Matematica scolastica e parole chiave*. L'attività dovrebbe includere una connessione alla matematica scolastica (usando le parole chiave predisposte o aggiungendone di nuove). Inoltre ogni compito dovrebbe essere assegnato ad un grado scolastico (da 1 = primo anno scuola primaria; ...; 13 = ultimo anno scuola secondaria di secondo grado).

Nell'ambito del MOOC R&F, per quanto riguarda l'utilizzo di MCM, i corsisti sono stati invitati a generare attività di matematica all'aperto, legate al tema delle relazioni e delle funzioni. Al fine di migliorare la qualità del materiale, Maaß e colleghi (2014) raccomandano che gli insegnanti dovrebbero sperimentare e riflettere da soli su nuove attività prima di sviluppare il proprio materiale. Tuttavia, per la loro natura, i percorsi di matematica sono legati a un ambiente particolare. Questo porta al fatto che gli insegnanti del MOOC non sono stati in grado di sperimentare le attività proposte prima di progettare le loro, dato che le attività italiane di MCM esistenti erano – a quel tempo – poche e si trovavano solo a Torino (dove lavorava il team del MOOC). Tuttavia, era una delle principali preoccupazioni del modulo produrre attività che fossero in linea con le linee guida di MCM.

Come si è concretizzata la collaborazione: metodologia di lavoro

Il MOOC R&F, come gli altri MOOC del progetto *Math MOOC UniTo*, è aperto, gratuito e disponibile online per gli insegnanti sulla piattaforma DI.FI.MA. Si compone di moduli con durata variabile da una a due settimane. Ogni modulo richiede lo svolgimento di un compito. Una volta eseguito il compito, la piattaforma rilascia un badge. Gli utenti hanno il tempo di eseguire il compito a partire dalla data di inizio del modulo in cui è inserito, fino alla data di chiusura del MOOC. Il modulo MCM è iniziato nella quarta settimana del MOOC R&F ed è durato 2 settimane (poiché il MOOC R&F è durato in totale 11 settimane, i corsisti hanno avuto 7 settimane per svolgere il compito del modulo su MCM). Come già detto in precedenza, lo scopo del modulo era quello di imparare a utilizzare una nuova tecnologia (portale web e app MCM) per creare un'attività di matematica all'aperto sul tema relazioni e funzioni. Di seguito, spieghiamo in dettaglio l'integrazione di MCM nel MOOC R&F. In particolare, indicheremo con *team tedesco* i membri di MCM, mentre con *team italiano* i membri del MOOC R&F.

Il modulo MCM inizia condividendo con i partecipanti gli aspetti teorici e tecnici di MCM. Il team tedesco ha realizzato un video in cui ha illustrato lo spirito del progetto MCM agli insegnanti del MOOC. L'audio del video era in inglese. Il team italiano ha aggiunto sottotitoli in italiano. Successivamente, è stato necessario rendere autonomi gli insegnanti del MOOC per lavorare con MCM, vale a dire, permettere loro (i) di creare nuove attività; (ii) creare un nuovo percorso; (iii) utilizzare l'app MCM per percorrere un percorso. Pertanto, per ognuno di questi punti è stato necessario un video tutorial. Entrambi i team hanno convenuto che per questi video la voce avrebbe dovuto essere in italiano. Così, il team tedesco ha preparato le trascrizioni in inglese e il team italiano ha aggiunto la voce ai video tutorial realizzati, senza audio, dal team tedesco. Dopo aver chiarito i dettagli tecnici, è stato il momento di mostrare alcuni esempi agli insegnanti del MOOC. Nel portale web c'erano già alcune attività, ma per lo più in tedesco o in inglese. Pochi mesi prima dell'inizio del MOOC, nell'ottobre 2017, alcuni membri del team tedesco si sono recati a Torino per esplorare la città con alcuni membri del team italiano. Insieme hanno creato e implementato alcune attività in italiano nel portale web. Successivamente, il team italiano ha preparato alcuni Sway[2], dove sono stati spiegati i dettagli metodologici e matematici di ogni attività. Inoltre, sulla piattaforma a disposizione dei partecipanti è stata caricata una scheda con le linee guida (esposte nella sezione precedente) da seguire per la progettazione di un buon compito. In questo modo, gli insegnanti hanno avuto esempi di alta qualità a cui ispirarsi e tutte le informazioni necessarie per svolgere il compito del modulo. Quest'ultimo consisteva (i) nella creazione di un'attività di matematica all'aperto sul portale web sul tema relazioni e funzioni; (ii) nella richiesta di pubblicazione dell'attività attraverso il processo di revisione; (iii) nella condivisione del link della loro attività pubblica su un archivio specifico creato nel modulo MOOC. Solo tre membri del team italiano erano responsabili della revisione delle attività prodotte dai corsisti. Essi potevano approvare direttamente l'attività per la pubblicazione se conforme alle linee guida per la progettazione. In caso contrario, rifiutavano la pubblicazione inviando un'e-mail al corsista attraverso il sistema di revisione di MCM, spiegando le ragioni del rifiuto. I dati sull'attività di revisione sono stati raccolti dalla banca dati sulla revisione di MCM. Il modulo del MOOC si conclude con un questionario che intende indagare il livello di soddisfazione degli insegnanti del MOOC su MCM e la loro intenzione di utilizzarlo nuovamente con i loro studenti.

Risultati della formazione online su MCM: analisi dei dati

Il MOOC R&F ha avuto 358 iscritti. Per quanto riguarda il modulo MCM, sono state create 287 attività dai corsisti. 257 di esse sono state aggiunte al sistema di revisione. Tra queste, alla chiusura del MOOC, 231 (il 90%) sono state considerate conformi alle linee guida per la progettazione e sono quindi state rese pubbliche. Il team italiano ha eseguito 396 processi di revisione (sono possibili più revisioni fino alla pubblicazione di un'attività) per

[2] Sway (https://sway.office.com/): strumento di Microsoft che permette agli utenti di combinare testo e media per sostenere la visualizzazione di contenuti online.

garantire la qualità dei contenuti. Il database di revisione MCM mostra che tra le 257 attività che hanno richiesto la pubblicazione, 119 (il 46%) hanno soddisfatto sin dalla prima revisione le linee guida per la progettazione; mentre 138 (il restante 54%) no. I docenti del MOOC hanno rivisto 112 delle 138 attività rifiutate dai revisori (quindi l'81%) e, successivamente, queste hanno soddisfatto i criteri delle linee guida ottenendo la pubblicazione. In realtà, la situazione è stata un po' più complessa. Le attività direttamente accettate non sempre erano in linea con i criteri di progettazione, per cui meno di 119 attività hanno soddisfatto le linee guida alla prima revisione. Il team italiano si è accorto che quando rifiutava le attività, gli insegnanti del MOOC non sempre le rivedevano e le sottoponevano nuovamente alla revisione. Invece, se i revisori inviavano un feedback[3] con una richiesta di revisione senza declinare l'attività, i docenti del MOOC apportavano le modifiche e i revisori potevano approvare l'attività come se questa fosse stata presentata per la prima volta. Tuttavia, purtroppo, non siamo in grado di quantificare esattamente questi dati.

Mostriamo ora, nelle Tabelle 1 e 2, degli esempi di attività che sono state pubblicate.

L'attività "Il concerto" (Tabella 1) è stata realizzata dalla corsista G. Zito[4], a Brindisi (Puglia). È un'attività che può essere proposta a partire dal secondo anno di scuola secondaria di primo grado e i nodi concettuali su cui si basa sono misura e area. La corsista ha così soddisfatto il punto 10 delle linee guida da seguire per la progettazione (di seguito le indicheremo brevemente con la sigla LGP). L'attività viene individuata da una foto, che aiuta l'utente ad individuare l'ubicazione del posto in cui doversi recare per poter risolvere il problema (come richiesto dai punti 1 e 2 delle LGP). L'utente è invitato ad impegnarsi in un compito di realtà (punto 5 delle LGP), ossia stimare quante persone possono raccogliersi nell'area individuata, senza accalcarsi.

[3] Inviando e-mail personali, come il team del MOOC era solito fare per altri impegni nel MOOC (ad esempio, sollecitando i corsisti per ottenere il badge dei moduli, ...).

[4] Poiché le attività sono pubbliche sul portale web MCM e si risale facilmente al nome dell'autore, non vi è ragione di riportare uno pseudonimo.

<table>
<tr>
<td>
Il concerto

Voglio organizzare un concerto sulla veranda; gli spettatori dovranno stare sulla cementata. Stima quante persone posso invitare (di corporatura media), in modo che non stiano troppo accalcate.
Dall'anno scolastico
7
Parole chiave
Geometria, Misura, Numeri, area
</td>
<td>
<u>Esempio di soluzione:</u>
Le dimensioni della cementata sono 11,67m · 16,50m.
L'area risulta quindi di 192,55 m².
Si può stimare che “In un m² vi entrano 4 persone”.
Quindi: 192,55 · 4 = 770 persone

<u>Strumenti di assistenza:</u>
• Gesso
• Metro
• Calcolatrice

<u>Suggerimenti:</u>
1) Calcola l'area della cementata in cm² o in m²
2) Stima quante persone possono stare comodamente in un m². Puoi disegnare per terra con il gesso un m² e verificare da te.
3) moltiplica l'area calcolata per il numero di persone, attenta/o alle unità di misura scelte!!!
Risposta:*:
Intervallo
750 | 760 | 780 | 790
</td>
</tr>
</table>

Tabella 1. Attività ideata da G. Zito (Puglia).

Avvalendosi degli strumenti suggeriti (punti 3 e 6 delle LGP), l'utente deve innanzitutto stabilire quante persone possono permanere in un m². Entra qui in gioco il punto 4 delle LGP, nel senso che sta all'utente ingegnarsi per trovare un modo per poter effettuare questa stima. Qualora non si riuscisse a pervenire a nessuna idea, usando l'app, si potrebbe fare ricorso ai suggerimenti (la corsista Zito ne ha inseriti tre, soddisfacendo il punto 7 delle LGP). Come richiesto dal punto 8 delle LGP, l'attività è stata anche corredata da un esempio di soluzione (esso è visibile solamente sul portale web e non sull'app, dove invece appare se si risponde correttamente al problema, permettendo all'utente di confrontare il suo ragionamento con quello del progettista). La tipologia di soluzione scelta dalla corsista è stata l'intervallo (punto 9 delle LGP). È stata una scelta ragionevole, dal momento che il numero di persone che possono entrare nell'area indicata si ricavano in funzione della stima di quelle che possono stare in un m^2. La corsista individua come intervallo verde (risposte che si ritengono corrette) quelle che rientrano nell'intervallo chiuso di estremi [760, 780]. Lei infatti nella sua soluzione considera come soluzione esatta una quantità di persone pari a 770. Mentre, vengono considerate risposte parzialmente corrette quelle che ricadono negli intervalli di estremi [750, 760) e (780, 790].

<table>
<tr>
<td>
Paraboloide

Il paraboloide nella fotografia presenta una struttura metallica con un cerchietto posizionato nel fuoco. Supponi di fare una sezione bidimensionale con un piano passante per il fuoco. Quanto misura l'ampiezza della parabola ottenuta? (Misura in centimetri e usa quattro cifre decimali nella risposta)
Dall'anno scolastico
11
Parole chiave
Geometria, Misura
</td>
<td>
<u>Esempio di soluzione:</u>
La distanza focale misura 71,5 cm.
Supponendo il vertice della parabola nell'origine degli assi, il calcolo dell'ampiezza è: $a = 1/(4f)$
con f distanza focale pari a
$f = 71,5$ cm
Quindi $a = 3,4965 \cdot 10^{-3} = 0,0035$

<u>Strumenti di assistenza:</u>
• Metro
• Calcolatrice

<u>Suggerimenti:</u>
1) Supponi la parabola con il fuoco nell'origine degli assi.
2) Se indichiamo con a l'ampiezza e con f la distanza focale vale la seguente uguaglianza: $a = 1/(4f)$.
Risposta:*:
Intervallo
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.0030</td><td>0.0033</td><td>0.0037</td><td>0.0040</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tabella 2. Attività ideata da S. Ferrari (Lombardia).

L'attività "Paraboloide" (Tabella 2) è stata realizzata dalla corsista S. Ferrari, a Mantova (Lombardia). È un'attività che può essere proposta a partire dal terzo anno di scuola secondaria di secondo grado e i nodi concettuali su cui si basa sono funzioni (dal titolo e dall'attività si coglie che l'oggetto di interesse è un paraboloide) e misura. La corsista ha così soddisfatto il punto 10 delle linee guida da seguire per la progettazione (di seguito le indicheremo brevemente con la sigla LGP). L'attività viene individuata da una foto, che aiuta l'utente ad individuare l'ubicazione del posto in cui doversi recare per poter risolvere il problema (come richiesto dai punti 1 e 2 delle LGP). L'utente è invitato ad impegnarsi in un compito che non possiamo esattamene definire di realtà, in quanto non viene data una contestualizzazione o una motivazione concreta a dover svolgere tale problema (come richiedeva il punto 5 delle LGP). Tuttavia, l'attività risponde al compito assegnato dal MOOC, ossia ideare qualcosa relativamente al nucleo "Relazioni e funzioni", per tale ragione si è comunque ritenuta idonea alla pubblicazione. Avvalendosi degli strumenti suggeriti (punti 3 e 6 delle LGP), l'utente deve passare dal 3D al 2D, immaginando un piano che tagli il paraboloide passando per il fuoco. L'utente si ritrova così a lavorare su di una parabola, della quale si richiede di calcolare l'ampiezza. Entra qui in gioco il punto 4 delle LGP, nel senso che sta all'utente ingegnarsi per trovare un modo per poter effettuare questa misurazione. Qualora non si riuscisse a pervenire a nessuna idea, usando l'app, si potrebbe fare ricorso ai suggerimenti (la corsista Ferrari ne ha inseriti due, soddisfacendo il punto 7 delle LGP). Come richiesto dal punto 8 delle LGP, l'attività è stata anche corredata da un esempio di soluzione. La tipologia di soluzione scelta dalla corsista è stata l'intervallo (punto 9 delle LGP). È stata una scelta ragionevole, dal momento che sono coinvolte delle misurazioni da fare in loco e non è detto che l'utente le compia con la stessa accuratezza con cui le ha effettuate il progettista. La corsista individua come intervallo verde quelle che rientrano nell'intervallo chiuso di estremi [0.0033, 0.0037]. Lei infatti nella sua soluzione considera come soluzione esatta una quantità di persone pari a 0.0035. Mentre, vengono considerate risposte parzialmente corrette quelle che ricadono negli intervalli di estremi [0.0030, 0.0033) e (0.0037, 0.0040].

Conclusioni

La collaborazione tra *Math MOOC UniTo* e MathCityMap è stata un successo. Gli insegnanti del MOOC hanno creato quasi 300 attività di matematica all'aperto in tutta Italia. 142 insegnanti hanno completato il questionario inserito nel modulo MCM e il 76% di loro sono stati soddisfatti dei contenuti del modulo e consiglierebbero MCM ai colleghi. Sebbene il modulo MCM abbia fornito video tutorial, nonché esempi di buone pratiche e linee guida esplicite per la progettazione dei compiti, non tutti e non tutti subito sono stati in grado di soddisfare il compito del modulo. La fase di revisione è stata davvero impegnativa. Infatti, se consideriamo i dati del database di revisione MCM, solo il 46% dei compiti creati soddisfacevano i criteri di progettazione dei compiti. I revisori esperti hanno contribuito a migliorare un totale di (almeno) 112 attività (44%). Alla fine del modulo, il 90% delle attività è stato considerato di buona qualità e ha permesso ai rispettivi autori di ottenere il badge del modulo. La quantità di attività riviste (112 su 138, 81%) è notevolmente elevata e dimostra che gli insegnanti hanno accettato e apprezzato i feedback degli esperti. In generale, la formazione degli insegnanti che mira a migliorare le lezioni di matematica attraverso materiali di alta qualità, specialmente quelle formazioni in cui si desidera che i partecipanti creino del materiale, adattato ai propri studenti, hanno bisogno di assicurare la qualità di tali materiali (Maaß et al., 2014). Nel caso di un MOOC per formazione insegnanti, il sistema di revisione gestito da esperti si è rivelato un metodo adeguato per raggiungere questo obiettivo. In totale sono stati necessari 396 processi di revisione per implementare il sistema di revisione durante il modulo MCM del MOOC. Da un lato, riconosciamo che uno svantaggio del sistema di revisione è quello di dover scrivere manualmente le recensioni. Ciò implica che i revisori debbano essere altamente motivati a svolgere questo compito e ad assicurare materiali di alta qualità. D'altra parte, la possibilità di fornire un feedback che tenga conto non solo della matematica, ma anche del background culturale e del panorama formativo delle classi di matematica in Italia, potrebbe essere identificato come uno dei principali vantaggi del sistema di revisione. Tuttavia, il successo del sistema di revisione si basa sulla disponibilità degli insegnanti partecipanti ad accettare la revisione e a rivedere il compito. Non si sono esaminati esplicitamente i fattori che portano alla revisione di un compito, ma si può supporre che tale volontà di revisione risieda nei seguenti aspetti: il revisore ha rilasciato feedback che si reputano di valore per migliorare il proprio compito; si desidera ottenere il badge del modulo; i contenuti del modulo sono stati soddisfacenti e/o motivanti e si desidera completare l'attività richiesta al meglio. Infine, possiamo certamente affermare che l'impegno dei docenti del MOOC nella creazione dei compiti del percorso di matematica e gli sforzi compiuti dai revisori hanno costituito un patrimonio, non solo per la comunità del MOOC ma anche per tutti gli utenti del MCM.

Ringraziamenti

Ringrazio sentitamente tutti i membri del team del progetto *Math MOOC UniTo*, in particolare V. Alberti e R. Ferro, che insieme a me hanno gestito i numerosi processi di revisione delle attività MCM create dai corsisti. Ringra-

zio anche il team del progetto *MathCityMap* e in particolare I. Gurjanow che mi ha coinvolto in questa stimolante e innovativa visione della matematica non vincolata solo a libri di testo, ma capace di svelarsi in tutto ciò che ci circonda.

Riferimenti bibliografici

Blane, D. e Clark, D. (1984). *A mathematics trail around the city of Melbourne*. Monash Mathematics Education Centre, Monash University.

Blum, W. e Leiß, D. (2005). "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed): *Proceedings of CERME4* (pp. 1623-1633). FUNDEMI IQS.

Dillon, J., Rickinson, M., Teamey, K., Morris, M., Choi, M.Y., Sanders, D. & Benefield, P. (2006). The value of outdoor learning: evidence from research in the UK and elsewhere. *School science review*, 87 (320), 107.

Gurjanow, I., Ludwig, M. e Zender, J. (2017). What influences in-service and student teachers' use of MathCityMap? In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.): *Proceedings CERME10 (*pp. 2366-2374), Dublin, Ireland.

Gurjanow, I., Taranto, E., Ludwig, M., Alberti, V. e Ferro, R. (in stampa). Math MOOC UniTo & MathCityMap - Exploring the potentials of a review system in a MOOC environment. In: U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME

Jablonski, S., Ludwig, M. & Zender, J. (2018). Teachers as partners in task design. A dialog-based review system to ensure a certain quality of tasks in the MathCityMap web community. *Accepted to be presented at ERME Topic Conference – Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)*. Copenhagen, Denmark.

Maaß, K., Wernisch, D., Schafer, E. e Reitz-Koncebowski, K. (2014). Conference: Educating the educators. In K. Maaß, G. Törner, D. Wernisch, E. Schäfer & K. Reitz-Koncebowski (Eds.): *Conference Proceedings in Mathematics Education – Educating the educators: International approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education* (pp. 5-10). Essen, Germany.

Price, S. e Flach, P. (2017). Computational support for academic peer review: a perspective from artificial intelligence. In M. Vardi (Ed.): *Communications of the ACM (60)*, 70-79, ACM New York, NY, USA.

Taranto, E., Arzarello, F., Robutti, O., Alberti, V., Labasin, S. e Gaido, S. (2017), Analyzing MOOCs in terms of their potential for teacher collaboration: the Italian experience. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.): *Proceedings of CERME1* (pp. 2478-2485). Dublin, Ireland.

Torino, 31 gennaio 2019

Scienza in esilio: Gustavo Colonnetti e i Campi Universitari in Svizzera (1943-1945)

Erika Luciano

Dipartimento di Matematica 'G. Peano' Università di Torino – Torino

Sunto. *Illustreremo la storia straordinaria, ma poco conosciuta, dei Campi Universitari per studenti militari internati, creati da Gustavo Colonnetti durante il suo esilio in Svizzera (1943-44), concentrandoci soprattutto sul 'Grande' Campo Universitario Italiano di Losanna, all'interno del quale migliaia di giovani furono 'rieducati' al libero pensiero, alla cultura e allo studio.*

Introduzione[1]

Scienziato di eccezionale valore, universalmente noto per i contributi d'avanguardia dati all'ingegneria, alla statica delle costruzioni e alla teoria matematica dell'elasticità, Colonnetti appartiene – come scrisse l'amico Franco Antonicelli – a quel "collettivo spirituale e morale che tenne viva un'altra Italia accanto a quella ufficiale"[2]. Antifascista perché uomo di cultura, spirito libero e fervente cattolico, sollevato dalla carica di rettore del Politecnico di Torino nel 1925 per il suo rifiuto di piegarsi a compromessi con il regime, Colonnetti fu costretto all'esilio in Svizzera nell'autunno del 1943. Per lui fu l'inizio di una nuova stagione di attività accademica al servizio delle vittime delle persecuzioni per ragioni politiche e razziali. Riparato a Losanna, Colonnetti creò "un lembo di Università italiana in terra straniera"[3] istituendo a Friburgo, Ginevra, Huttwil, Losanna, Mürren e Neuchâtel sei Campi Universitari per studenti militari internati.

L'esperienza di questi Campi di internamento universitario ha destato l'interesse storiografico già negli anni '80 e '90, tuttavia attraverso l'esame di fonti

[1] Il presente contributo costituisce una sintesi del saggio introduttivo al volume di E. Luciano, *Scienza in esilio. Gustavo Colonnetti e i campi universitari in Svizzera (1943-1945), Pristem/Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura 41-42*, Milano, Egea, 2017.

[2] Franco Antonicelli, in AA.VV. 1973, pp. 22-23.

[3] G. Colonnetti, *Due grandi problemi di vita universitaria*, in Colonnetti 1973, p. 35.

inedite, custodite presso numerosi archivi italiani ed elvetici, fra cui l'archivio Colonnetti di Torino e quello dell'Università Statale di Milano, è ora possibile ricostruire con precisione di dettagli i contorni di quella che fu non solo una bella storia di solidarietà e di speranza ma anche un'avventura culturale di straordinaria intensità, volta a rieducare allo studio e al libero pensiero migliaia di giovani, cui affidare la ricostruzione materiale e morale del Paese dalle macerie della guerra.

'Un uomo libero'

Tante voci hanno fatto rivivere la figura di Colonnetti, lasciando testimonianze del suo genio scientifico e del suo impegno nei tempi dolorosi e difficili del fascismo, della guerra e della ricostruzione. Colonnetti nasce a Torino l'8 novembre 1886. Il padre, ingegnere delle ferrovie, scompare nel 1899, lasciando la moglie con due figli piccoli: Gustavo e Gemma. Gustavo frequenta con ottimo profitto il liceo Massimo D'Azeglio, "scuola peraltro a lui uggiosissima"[4] e, non ancora diciassettenne, consegue la licenza liceale. Iscrittosi alla Scuola d'applicazione per Ingegneri di Torino, nel 1908 si laurea in Ingegneria civile. Sono – quelli universitari – cinque splendidi anni, "anni spensierati e belli"[5], vissuti con la gioia di chi può finalmente dedicarsi agli studi prediletti.

Nel novembre del 1908 Colonnetti riceve la nomina ad assistente alla cattedra di Scienza delle costruzioni presso il Politecnico di Torino tenuta dal suo maestro Camillo Guidi. Accetta l'incarico, rifiutando altre offerte di lavoro ben più remunerative. Nel 1910 ottiene la libera docenza in Scienza delle Costruzioni. Nel 1911 consegue una seconda laurea in Matematica, discutendo una tesi di geometria algebrica sotto la guida di Corrado Segre. Gli studi matematici gli danno l'opportunità di intrecciare un'ampia rete di rapporti con grandi Maestri quali Vito Volterra, Giuseppe Peano, Tullio Levi-Civita, Carlo Somigliana, Ulisse Dini, Gino Fano, oltre che con Alessandro Terracini, con il quale si addottora nella stessa sessione di laurea, e al quale sarà legato da un affettuoso rapporto di amicizia per il resto della vita. Frattanto, sempre nel 1910, Colonnetti partecipa a un concorso a cattedra di Meccanica applicata alle costruzioni e alle Macchine presso la Scuola Superiore d'Ingegneria Navale di Genova. Spicca per il suo promettente talento e per la sua produzione di eccellenza ma, da ultimo, è classificato secondo anche se, per una serie di avvicendamenti concorsuali e di trasferimenti di sede, sarà comunque chiamato

[4] Laura Badini Confalonieri, in AAVV 1973, p. 5.

[5] Alberto Rimbotti in AAVV 1973, p. 9.

a Genova. Di qui passa a Pisa nel 1914, dove è nominato Direttore del Laboratorio di prove sulla resistenza dei materiali. Al periodo pisano risale il suo trattato *Principi di statica dei solidi elastici* (Pisa, Spoerri, 1916), che riscuote un notevole successo e che diviene presto un classico della teoria dell'elasticità, oltre che il progetto delle grandiosi torri dell'antenna a tenda per la stazione radio di Coltano.

Nonostante la sua vicinanza agli ambienti neutralisti, durante la Grande Guerra Colonnetti è impegnato nella sezione Meccanica dell'Ufficio Invenzioni creato da Volterra e nel 1916 è chiamato a dirigere il laboratorio per le prove degli acciai per le granate. La sua capacità e competenza non tardano a manifestarsi anche in questo settore a lui così poco congeniale: inventa infatti un apparecchio elettro-magnetico per le prove dell'acciaio, che risulta di grande efficienza e utilità rispetto a quelli usati nella campagna di Libia. Nel 1919, ispirato da quell'"idea prestigiosa e vaga di giustizia congiunta a libertà che tirò su l'Italia mortificata e rese i cattolici consapevoli del conto loro"[6], Colonnetti è sollecitato a aderire al Partito Popolare.

Ritornato a Torino a partire dall'anno accademico 1919-20, Colonnetti è dapprima titolare della cattedra di Meccanica tecnica superiore e, dal 1928, di quella di Scienza delle costruzioni. Nel 1922 è nominato Direttore del Politecnico. Quello torinese è un periodo fondamentale nella sua biografia. Egli pubblica infatti in questi anni i due suoi più celebri volumi: i *Fondamenti della statica* (Torino, Utet, 1927) e i *Principii di dinamica* (Torino, Utet, 1929). Le sue lezioni di Meccanica razionale diventano intanto leggendarie perché egli adotta un approccio nuovo, quello delle 'illustrazioni' della genesi, delle leggi e delle applicazioni dei principi della meccanica.

È però soprattutto in rapporto alle scelte deontologiche compiute da Colonnetti che il periodo torinese appare di centrale importanza. Quella fra il 1923 e il 1928 è infatti un'epoca di crescente tensione e il Politecnico di Torino non è estraneo alle lotte per la causa delle libertà civili e religiose. Enrico di Rovasenda ricorda – fra gli altri – le prime contese da matricola: "quando resistemmo tutti insieme, eravamo trecento in primo corso, alle violenze degli anziani e come uno di quelli, in camicia nera, minacciò con la rivoltella la nostra ribellione, nell'aula di analisi matematica del Prof. Fubini. E rammento i parapiglia, gli urli pro e contro il Direttore Colonnetti"[7].

Colonnetti è fra i pochi, nella Torino di quegli anni, a non strumentalizzare la propria carica o il prestigio di cui gode a fini politici e anzi a rivendicare

[6] Arrigo Bugiani in AAVV 1973, p. 10.

[7] P. Enrico di Rovasenda, in AAVV 1973, p. 18.

l'autonomia degli uomini di scienza di fronte a qualsiasi ideologia e il valore della collaborazione, indipendentemente dagli orientamenti personali. Tutta Torino sa, però, che Colonnetti si è rifiutato di prendere la tessera – nel 1946 il suo nome campeggerà sui manifesti murali che elencano i 'mai iscritti' – e così, pur senza alcuna ostentazione, il suo mancato *ralliement* inizia a destare scalpore, all'interno e all'esterno delle aule del Politecnico. Nel mentre, Colonnetti si avvicina agli ambienti dell'azionismo universitario cattolico e in particolare alla Federazione Universitari Cattolici Italiani, dove incontra intellettuali solidali con lui nella difesa dei valori cardine del cristianesimo sociale come Pier Giorgio Frassati, Antonio Severi, Isidoro Bonini. Il rifiuto dei fucini torinesi a iscriversi al GUF e l'aver pubblicamente condannato la pretesa obbligatorietà di tale iscrizione costano però a Colonnetti la prima comparizione in Questura e la minaccia di essere spedito al confino.

Nell'ambito delle sue scelte contro-corrente spicca poi l'organizzazione degli 'esami di gruppo'. Questa, in sintesi, la vicenda. Colonnetti aveva da sempre condannato il sistema degli esami speciali, considerandoli un mezzo inadeguato per apprezzare il profitto dello studente, nonché fonte di incomprensioni e tensioni fra Maestri e allievi. Egli auspicava che ad essi fosse sostituito un colloquio globale, in cui lo studente dovesse confrontarsi con l'intero collegio docenti e questo potesse valutare collegialmente il grado di maturazione del candidato. Come andarono i fatti lo racconta ancora Rovasenda:

> fummo una dozzina a sostenere quell'esame, comprensivo di tutto il biennio, che fu detto 'esame di gruppo'. La nostra adesione nacque da un atto di fiducia in Colonnetti. L'esame di gruppo era un'espressione di libertà universitaria in un mondo sempre più soffocato dal totalitarismo del regime, ed era da parte di noi giovani una manifestazione di autonomia, un atto di coraggio individuale[8].

Intanto, anche sul fronte personale la vita di Colonnetti va incontro a importanti cambiamenti. Durante le vacanze estive del 1926, il Nostro conosce infatti Laura Badini Confalonieri. La coppia si sposa l'anno successivo, e si stabilisce a Torino dove nasceranno i loro sei figli.

Nello stesso anno del matrimonio, Colonnetti è costretto a rassegnare le dimissioni dal rettorato del Politecnico senza aver neanche completato il triennio. Anche se gli è impedito di manifestare pubblicamente le proprie convinzioni, continua tuttavia a mantenere stretti rapporti con il suo Laboratorio e con gli amici della FUCI. Sollevato però dalla maggior parte dei suoi impegni,

[8] P. Enrico di Rovasenda, in AAVV 1973, p. 19. Cfr. anche Antonio Rostagni, in AAVV 1973, p. 53.

nel 1930 acquista a Pollone, presso Biella, Villa Ricci, che diventerà la residenza estiva della famiglia e loro dimora stabile dall'inizio della seconda guerra mondiale. Qui trovano ospitalità decine di uomini di cultura, artisti, giornalisti e intellettuali perseguitati dal regime fra cui Benedetto Croce, Annibale Germano e Franco Antonicelli. A questo stesso periodo, e precisamente al 1932, risale infine uno dei gesti più iconici compiuti da Colonnetti: il rifiuto a prendere parte in camicia nera alla solenne manifestazione d'omaggio al Duce in visita alla Regia Scuola d'Ingegneria, accettando di riceverlo solo "in rapido passaggio"[9] e in camice bianco nel suo Laboratorio.

Negli anni Trenta, Colonnetti approfondisce sempre più i suoi contatti con gli ambienti cattolici biellesi dell'antifascismo popolare e dell'azione politica clandestina. La qualifica di accademico pontificio nel 1936 consolida il prestigio di cui già gode in Vaticano e gli consente di eludere le maglie della censura, ricevendo una messe di lettere dall'estero, con notizie e informazioni sulla situazione in Spagna e nel Terzo Reich, che fa circolare nel contesto pollonese. Intanto Colonnetti inizia ad interessarsi a tre problemi che diventeranno, con il passare del tempo, la sua passione e il suo cruccio: l'edilizia popolare, il rinnovamento della scuola e dell'Università italiana e la responsabilità degli uomini di scienza di fronte alla società e all'idolatria della tecnica e dei consumi.

Nell'autunno del 1938, a seguito dell'emanazione delle leggi razziali, Colonnetti assiste all'espulsione di tanti suoi colleghi e fraterni amici. Guido Fubini, Gino Fano lasciano il Politecnico, insieme a uno dei suoi allievi prediletti: Franco Levi. Di fronte all'ignominia della politica razziale, egli è fra i pochi a non tacere e, per esempio, a chiedere al pontefice di manifestare esplicitamente solidarietà nei confronti dei colleghi che, in quanto ebrei, non sarebbero più potuti intervenire alle sedute dell'Accademia Pontificia. Quando Pio XII gli risponde che "dubita della convenienza dell'iniziativa" Colonnetti non esita ad esprimergli tutta la sua "delusione"[10].

Poco dopo, si reca per l'ultima volta a Parigi come docente del Politecnico, per tenere una conferenza alla Sorbona. È in quei giorni di delusione e di sfiducia che matura in lui il progetto di rifugiarsi in Svizzera, dove sa di poter fare affidamento su una serie di contatti di lunga data. È a Losanna almeno tre volte nel 1940. Nell'aprile del 1941 chiede di recarsi ancora in Svizzera, avendo ricevuto un invito come *visiting professor*. La domanda è inoltrata al Ministero dell'Educazione Nazionale e, nonostante le perplessità, Giuseppe Bottai non può che accordare l'autorizzazione.

[9] Giuseppe Olivero, in AAVV 1973, p. 46.

[10] Giuseppe Olivero, in AAVV 1973, p. 47.

Via via che si intensificano i viaggi di Colonnetti in Svizzera, la Direzione del Politecnico inizia a dubitare delle reali motivazioni che lo tengono lontano dalla vita universitaria, tanto più che nonostante i frequenti e severi richiami del Direttore, durante l'anno accademico 1942-43 egli non tiene più di cinque o sei lezioni.

Il 23 luglio 1943, Aldo Bibolini segnala al Ministero che Colonnetti non ha svolto regolarmente il suo insegnamento e denuncia l'intenzione dello scienziato di trasferire a Pollone la Direzione del Centro Studi sui materiali da costruzione, pur senza esserne stato autorizzato. Due giorni dopo cade il regime fascista e Colonnetti assume nuovamente la carica di Direttore del Politecnico, che manterrà fino all'autunno successivo. Come ricorda Luigi Szegö, però:

> Dopo l'esplosione di gioia, il ritorno ad un regime ancora più brutale causa amarezza e disperazione in tutte le persone amanti della libertà e si prospetta per loro la necessità di lasciare la loro casa per non subire la repressione dei nazisti e la vendetta dei fascisti[11].

Colonnetti decide quindi di fuggire in Svizzera, alla ricerca di uno spazio di sopravvivenza intellettuale. I suoi timori non sono infondati: nell'autunno del 1943 sarà infatti sospeso dal suo incarico al Politecnico in quanto disertore e nel 1944 campeggerà sui giornali la notizia della sua condanna in contumacia per reati politici.

Colonnetti lascia l'Italia il 18 settembre 1943 e, da Pollone, raggiunge la Svizzera a piedi con la figlia Elena "con un ricco bagaglio di speranze (non di illusioni)"[12]. La moglie Laura e gli altri figli lo raggiungono in un secondo tempo, passando la frontiera il 1° Novembre. Durante l'esilio, Gustavo soggiorna prima a Lugano, presso monsignor Angelo Jelmini, poi a Losanna, all'*Hôtel des étrangers*, dove ritrova, fra gli altri esuli per motivi razziali e politici, Gino Fano.

A meno di un mese dal suo arrivo in Svizzera, è già operativo, avendo ottenuto un incarico di insegnamento nel corso di Scienza delle costruzioni presso l'*Ecole des Ingénieurs*. Questa posizione, tuttavia, non lo pone in grado di provvedere ai bisogni della sua numerosa famiglia e lo costringe a separarsi dai suoi bimbi. Solo la moglie Laura resta con lui a Losanna, dove diventa quasi un mito fra i giovani studenti internati. 'La zia Lalla' – come la chiamano tutti affettuosamente – si prodiga infatti per aiutare centinaia di studenti sparsi nei campi di prigionia di tutto il mondo, procurando loro aiuti materiali e libri

[11] Luigi Szegö, in AAVV 1973, p. 28.

[12] ACT: L. Badini Confalonieri a G. Colonnetti, senza data ma novembre 1943.

con inesauribili tenacia e forza d'animo, unite a una sana dose di buon senso. "Salvare i principii è una bella cosa ma aiutare il prossimo è anche altrettanto bello", raccomanda scherzosamente al marito [13].

Negli anni trascorsi in Svizzera, Colonnetti non si dedica solo ai suoi studi o all'insegnamento all'*Ecole des Ingénieurs*, anzi si può dire che questi siano due aspetti marginali della sua vita di esule. Tutte le sue energie sono infatti rivolte altrove, in primo luogo alla creazione del Centro studi per la ricostruzione italiana, un "organo eminentemente apolitico" [14], nel quale lavorano architetti ed ingegneri internati o esuli, quali Maurizio Mazzocchi, Alfred Roth, Adriano Olivetti, Ernesto Nathan Rogers, e che anima la pubblicazione di un *Bollettino di studi per l'edilizia*. Colonnetti svolge inoltre un'intensa attività di editorialista dalle colonne della *Gazzetta Ticinese* e di altri periodici svizzeri, pubblicando vari corsivi sotto lo pseudonimo di *Etegonon*, crasi del motto *Etiam si omnes et ego non*. La crisi dell'università italiana, i temi della libertà di pensiero che aveva sviluppato su l'*Osservatore romano*, sono qui affrontati con rinnovata *verve* e spietata sincerità. Ma è soprattutto parlando di epurazione che Colonnetti scrive una delle sue pagine forse più belle:

> un'altra ragione v'è che permetterà di rivedere a fondo i quadri dell'insegnamento universitario in Italia; ed è quella di epurare l'Università da tutti coloro che sono stati complici diretti o profittatori del regime, o che, per obbedire al regime, hanno sacrificato la dignità della scuola e tradita la propria missione educatrice. È di costoro un nuovo genere di reato: il reato di prostituzione della scienza. Essi vanno inesorabilmente cacciati dall'Università, a colpi di frusta, come i mercanti dal Tempio [15].

L'istituzione dei Campi Universitari e Il 'Grande Campo' di Losanna

L'opera che più caratterizza Colonnetti come Maestro e come Uomo è la creazione e l'organizzazione dei Campi Universitari. Per ricostruire i contorni di quella che fu un'autentica missione di apostolato scientifico e culturale, bisogna rammentare che fino al 1943 la Svizzera aveva istituzionalizzato un'unica forma di internamento, quella dei campi militari per francesi, italiani e polacchi. La vita degli internati, sebbene diversa da campo a campo, era caratterizzata da condizioni di prigionia miserevoli. Gli internati, soprattutto se soldati semplici, erano spesso stipati come bestie in stalle e ovili e passavano

[13] ACT: L. Badini Confalonieri a G. Colonnetti, senza data ma 1944.

[14] ACT: [G. Colonnetti], *XI Centro Studi in Svizzera per la ricostruzione italiana*, [1944], p. a.

[15] G. Colonnetti, *L'Università*, in Colonnetti 1973, p. 53-54.

la giornata impegnati nei lavori forzati. Solo in pochi casi qualche ufficiale riusciva ad ottenere un lavoro retribuito presso le aziende agricole svizzere o come operaio addetto alla gestione del patrimonio boschivo. Al fine di migliorare questa situazione, nel settembre del 1943 il *Fond Européen de Secours aux Etudiants* (FESE) di Ginevra coinvolge l'*Eidgenossisches Kommissariat für Internierung und Hospitalisierung* (EKIH) nella formulazione di un progetto di studi superiori, volto a fornire ai rifugiati militari "quell'aiuto intellettuale e morale" che rappresenta "un'imperiosa necessità e costituisce un complemento indispensabile all'aiuto materiale"[16]. Il segretario del FESE, André de Blonay, fa diramare un questionario in tutti i circa 150 Campi d'internamento presenti sul territorio elvetico, al fine di censire gli studenti universitari. Il 13 novembre 1943 giungono al FESE quasi 1200 questionari compilati. Fra questi, 1015 provengono da studenti (per lo più delle Università e degli istituti di studi superiori del Nord Italia: Milano e Torino in testa), 120 da laureati e 5 da docenti. Gli studenti di Scienze economiche sono i più numerosi, seguiti da quelli di Ingegneria, Lettere, Diritto, Matematica e Fisica.

Viene allora costituito a Losanna un *Comité d'aide aux universitaires italiens en Suisse*, presieduto da Colonnetti e da Plinio Bolla, vice presidente del Tribunale federale. Bolla e Colonnetti inviano al Commissariato un protocollo delle misure che intendono adottare per favorire l'accesso agli studi dei giovani rifugiati. Il primo progetto elaborato contempla la richiesta di concedere l'iscrizione gratuita degli italiani alle diverse facoltà elvetiche e di consentire loro la massima libertà di lavoro e di studio, pur continuando a essere soggetti al controllo delle autorità militari. Questa proposta è ovviamente respinta ma il grande numero di personalità di rilievo che l'appoggiano spinge l'EKIH ad accettare di radunare parte degli internati e dei rifugiati italiani in campi speciali a regime para-militare, collocati nei dintorni delle varie Università romande.

Grazie agli sforzi di intellettuali svizzeri e italiani quali Alfred Stucky, Roger Secrétan e Colonnetti, la macchina organizzativa si mette in moto con sorprendente rapidità ed efficienza. Per selezionare le richieste pervenute, si riunisce a Mürren, Lyss e Olten una commissione d'esame composta da quattro sottocommissioni formate da docenti svizzeri o italiani, una per ciascuna macro-area disciplinare: Ingegneria, Economia, Lettere, e Scienze (quest'ultima è diretta da Gino Fano). L'esame consiste in una prova orale della durata di pochi minuti su ogni materia compresa nel piano di studi per il quale l'internato ha presentato domanda di ammissione. Colonnetti avverte subito l'inuti-

[16] AFB, E, 5791, 1, 18/1, f. 4, *Les universitaires italiens internés en Suisse*, novembre 1943, memorandum firmato de Blonay.

lità di questa prova e, anni dopo, avrebbe rievocato così il senso di desolazione e di umana partecipazione provato durante quei colloqui:

> Parlare a quei giovani di matematica o di fisica, di letteratura o di storia, era evidentemente inutile impresa. Decisi di prender con essi contatto su di un terreno più umano. Chiesi loro di dove venissero, di quali miserie fossero stati testimoni, quali notizie avessero delle loro famiglie lontane. E vidi riaccendersi il loro sguardo, ed aprirsi il loro animo alla speranza; ed ascoltai le voci accorate che mi scongiuravano di accoglierli nei campi universitari, di aiutarli a riprendere gli studi interrotti; e li giudicai da uomo a uomo, senza preoccuparmi di quel che sapevano o di quel che avevano dimenticato[17].

A causa della ristrettezza dei finanziamenti accordati, solo 540 fra i 1140 aspiranti sono ammessi ai Campi e ripartiti fra Friburgo, Losanna, Neuchâtel e Ginevra. Per favorire gli esclusi, vengono creati due corsi di studi universitari riservati a ufficiali, a Mürren e a Huttwil. Ai Campi affluiscono

> giovani di tutte le condizioni e di tutte le provenienze; giovani che avevano lasciato l'Università giunti alla vigilia della laurea; giovani che l'Università non avevano neppur vista, essendo stati chiamati alle armi subito dopo la maturità. Coscienze inquiete e profondamente turbate, in cui il crollo improvviso di ogni gerarchia, di ogni disciplina militare, aveva scavato un solco non ancora colmato dal sorgere del senso della personalità che per troppo tempo era stata avvilita e compromessa[18].

I campi, posti alle dipendenze delle autorità militari elvetiche e di un Ispettorato generale, hanno la tipica struttura piramidale degli organismi militari. Il tenente colonnello Max Zeller, docente di fotogrammetria al Politecnico di Zurigo, una figura "quasi caricaturale"[19] è loro direttore generale. Egli individua, per ogni campo, un docente universitario responsabile, il rettore, e un comandante militare (detto *chef des études*). Nonostante l'uniformità dei regolamenti emanati dall'Ispettorato, ogni campo ha comunque caratteristiche proprie, in parte legate alla costituzione del corpo docente e in parte dovute alle interazioni fra questo e le autorità militari. Per esempio il Campo di Huttwill, pur costituendo un modello di fattiva collaborazione tra militari e accademici, grazie alla guida intelligente di Alberto Montel e Roberto Dellea, si distingue purtroppo per le manifestazioni di antisemitismo nei confronti dei docenti ebrei quali Gino Fano, Alessandro Levi e Paolo d'Ancona.

[17] Colonnetti, 1945, p. 218.

[18] *Ibidem*, p. 217.

[19] Franco Levi in AAVV 2000, p. 92.

Per Bolla e Colonnetti, è però Losanna a rappresentare fin da subito la sede ideale per riunire gli studenti universitari italiani internati in Svizzera. In primo luogo, infatti, la città aveva dato asilo a un gran numero di rifugiati ‘speciali’, membri della nobiltà e d’illustri dinastie industriali, come Adriano Olivetti, e poteva dunque offrire numerosi garanti. Inoltre Losanna vantava numerosi istituti culturali e scientifici, fra cui il *Cercle mathématique*, dove Fano avrebbe tenuto durante l’esilio quattro conferenze dedicate a celebrare la Scuola Italiana di Geometria Algebrica. A Losanna viene perciò creato il ‘Grande’ Campo Universitario Italiano (CUI), inaugurato il 26 gennaio 1944, che ospiterà da solo circa 200 studenti.

Colonnetti, che ne è nominato rettore nel novembre del 1943, affronta un periodo di attività frenetica. Per vincere tutta la serie di vincoli posti dagli uffici federali, cantonali, dalle autorità del Politecnico e dell’Università, “ci voleva infatti tutta la sua pazienza, il suo tatto ed il suo potere di convinzione”[20]. Il primo e più essenziale aspetto di cui occuparsi è il reclutamento dei docenti. É Colonnetti a selezionarli personalmente, iniziando a contattare i colleghi e gli amici di lunga data: Amintore Fanfani, Alfredo Morbelli, Ettore Giordana, Luigi Szegö, Gino Fano, Bonaparte Colombo e naturalmente Franco Levi che aveva evitato per un soffio la deportazione ad Auschwitz, grazie a un falso certificato di battesimo procuratogli proprio da Colonnetti. Fra novembre e gennaio, si può dire che Colonnetti dedichi tutte le sue giornate a incontrare gli aspiranti docenti e assistenti, che si rivolgono a lui anche per ricevere indicazioni concrete sui corsi loro affidati. I frutti di questi colloqui non si fanno attendere. Il Campo di Losanna sarebbe arrivato a contare 29 docenti tra cui, per le discipline scientifiche: Gino Fano, Mario Giacomo Levi, Eugenio Mortara, Andrea Tommasi, Bruno Jarach, Franco e Alberto Levi, Luigi Szegö e 22 assistenti, fra cui Bonaparte Colombo e Modesto Dedò.

Oltre a definire il corpo docente, Colonnetti esamina, ad una ad una, le pratiche di quegli studenti e aspiranti assistenti che, per un motivo o per l’altro, non avevano potuto sostenere il colloquio o non erano stati ammessi. L’*Hotel des Etrangers* diventa così un porto di mare, “un campione di varia umanità”[21], ove sfilano migliaia di internati militari e civili che in Colonnetti vedono una guida spirituale e che “lo venerano come un Papà”[22].

Particolarmente serio è poi il problema dell’immissione nei corsi di studio regolari, ad anno accademico peraltro già iniziato, di un gran numero di gio-

[20] Luigi Szegö, in AAVV 1973, p. 29.

[21] Elena Colonnetti 1996, in Badini Confalonieri e Colonnetti 2006, p. 6.

[22] ACT: G. Carloni a G. Colonnetti, Lützelflüh, 21.4.1944.

vani, con alle spalle *curricula* di studio frammentari e diversissimi fra loro e con difficoltà linguistiche non irrilevanti. E poi ancora vi è la questione delle pratiche di riconoscimento dei titoli, assai spinosa dal momento che spesso gli internati non erano in grado di esibire alcuna documentazione comprovante i loro studi. Il nodo maggiormente critico è però legato alla pluralità di scopi che, fin da subito, Colonnetti intende perseguire nei Campi: offrire sì ai giovani la possibilità di recuperare gli anni di studio persi, sottrarli dalla vita desolata dell'internamento ma soprattutto ricondurre giovani che avevano conosciuto solo la disciplina delle armi a un'esperienza intellettuale che li preparasse e li proiettasse alla ricostruzione, iniettando nelle loro menti lo spirito democratico e l'amore per la libertà inevitabilmente piegati da un ventennio di ideologia fascista. È da questo punto di vista che il Campo di Losanna si distinguerà da tutti gli altri: per la sua vita culturale, di una vivacità e di un dinamismo tanto singolari, quanto straordinari tenuto conto del particolare frangente storico.

In primo luogo, Colonnetti inaugura la redazione delle dispense delle lezioni svolte. La produzione editoriale è intensa e, fra il dicembre del 1944 e il maggio del 1945, appaiono oltre trenta fascicoli con il marchio editoriale 'CUI Losanna' ciclostilati e distribuiti da un ufficio creato appositamente. Tra questi ricordiamo le dispense dei corsi di Geometria descrittiva di Fano, esemplate sulle sue magistrali *Lezioni date al R. Politecnico di Torino*, pubblicate nel 1910 e riedite nel 1935, quelle di Fisica, di Meccanica razionale, di Matematica generale e di Scienza delle costruzioni, che circolano non solo nei Campi universitari ma anche in quelli militari e che, tramite il FESE, raggiungono persino gli italiani prigionieri di guerra in Germania e Polonia.

L'elemento più interessante dell'attività condotta nel Campo di Losanna è tuttavia costituito dalle Conferenze, affidate sia a esuli (Concetto Marchesi, Gustavo Del Vecchio, Mario Giacomo Levi, Bruno Caizzi, Luigi Einaudi...) sia a intellettuali elvetici, che si svolgono ogni mercoledì, in un'aula del Palais de Rumine, e riscuotono un immenso successo. La pluralità di riflessioni sul futuro assetto del paese riflette i diversi orientamenti degli oratori e il reciproco rispetto per le altrui opinioni, che impronta i dibattiti ad esse seguiti. Per molti internati esse rappresentano del resto la sola occasione per superare l'angoscia originata dalle notizie frammentarie sugli avvenimenti politici che giungono al Campo.

Fra i primi a intervenire vi è Colonnetti sul tema *Le premesse spirituali della ricostruzione*. Si tratta di un testo di grande spessore etico, in cui lo scienziato torinese illustra agli studenti internati quei principi morali e deontologici che avevano e avrebbero orientato tutta la sua carriera di docente e la sua condotta di uomo: fede cattolica, lotta contro il materialismo, amore per la scienza, difesa della libertà e della personalità del cittadino, superamento di ogni rigido e stretto nazionalismo, nel nome di una concezione più vasta, più umana, più europea della realtà contemporanea. Il problema della ricostruzione nazionale – esordisce Colonnetti in quella circostanza – non si può ridurre a quello della riedificazione materiale di case, ponti e strade, ma deve essere preceduto da un'analisi delle cause di immaturità democratica che hanno causato l'offuscarsi delle coscienze e hanno consentito l'affermarsi dei totalitarismi, provocando l'immane tragedia della guerra. Prima ancora delle sfide tecniche e scientifiche poste dalla ricostruzione, occorre quindi discuterne le premesse spirituali. Per Colonnetti vale, per così dire, l'equazione secondo la quale alla ricerca scientifica corrisponde il progresso tecnologico, il quale a sua volta costituisce la base di ogni duraturo avanzamento economico e sociale. Per riconquistare i valori migliori e più alti della civiltà europea, esportati nel resto del pianeta grazie alla circolazione di uomini e idee che aveva costituito l'unico aspetto positivo del colonialismo, Colonnetti sostiene allora la necessità di rinunciare alle ideologie nazionaliste e agli egoismi di classe, costruendo un'Europa unita che sappia dare "equa risoluzione a quella che si è ormai convenuto di chiamare la questione sociale"[23].

Il 12 giugno e il 10 luglio 1944 Colonnetti torna a parlare ai suoi studenti, questa volta dei *Problemi della vita universitaria*. Secondo Colonnetti nell'epoca moderna l'istituto universitario ha smarrito la propria identità e, nell'istruzione, il fine biecamente utilitaristico è conseguentemente prevalso. La soluzione da lui proposta è rivoluzionaria: separare nettamente le funzioni della formazione universitaria, adottando ordinamenti distinti per coloro che vogliono prepararsi alla vita professionale e per chi vuole darsi esclusivamente alla ricerca; aprire la via degli studi a tutti coloro che se lo meritano, per quanto disagiate siano le loro condizioni di partenza, e chiuderla "agli inetti, anche se largamente dotati di beni di fortuna, perché studiare non è un lusso od un passatempo, ma è un servizio sociale"[24].

La chiusa della conferenza è nuovamente un appello ai giovani di "quel lembo di Università italiana in terra straniera"[25], affinché sappiano partecipare in prima persona alla ricostruzione spirituale dell'Università italiana:

> Voi sapete che il vostro Rettore deve scrupolosamente astenersi di parlarvi di politica. Qui s'arresta quindi il mio discorso, ed io mi guarderò bene dal dirvi

[23] G. Colonnetti, *Le premesse spirituali della ricostruzione*, in Colonnetti 1973, pp. 15-16.

[24] Q. Sella in G. Colonnetti, *Due grandi problemi di vita universitaria*, in Colonnetti 1973, p. 40.

[25] G. Colonnetti, *Due grandi problemi di vita universitaria*, in Colonnetti 1973, p. 35.

> attraverso quali aberrazioni del pensiero, attraverso quali degenerazioni del costume, coloro che han trascinata l'Italia nel baratro attuale abbiano minata e corrotta anche la vita universitaria. Sta di fatto che vi furon maestri che, per viltà o per brama di onori, tradirono la loro missione mettendosi al servizio dei più loschi interessi del regime; che vi furono istituti che, immemori delle loro tradizioni, non sdegnarono di trasformarsi in caserme; che vi furon folle di giovani che, in un'orgia di clamori, accettarono di rinunciare alla più sacra di tutte le libertà, alla libertà del pensiero[26].

L'organizzazione delle conferenze origina presto profondi dissapori tra Colonnetti e le autorità militari svizzere. Gli ufficiali responsabili del Campo non vedono infatti di buon occhio i contenuti di propaganda di alcuni di questi interventi, contenuti che sono ritenuti incompatibili con il carattere asettico e strettamente scientifico che dovrebbe contraddistinguere l'insegnamento nei Campi. L'autorità federale interviene per far cessare queste riunioni, bollandole come contrarie alle norme di funzionamento stabilite dal Commissariato e in una serie di circolari giunge a prospettare la sospensione dei corsi e lo scioglimento del CUI, se esse non fossero state interrotte. La reazione di Colonnetti è immediata: di fronte alla minaccia che i 'suoi' studenti siano dispersi, egli decide *sua sponte* di abolire tutte le conferenze, indipendentemente dal loro oggetto. Così si sfoga con l'amico Bolla, commentando l'epilogo della vicenda:

> Ella sa, caro Presidente, che io mi preoccupavo soprattutto di condurre gli allievi verso lo studio e la discussione dei grandi problemi sociali e politici del dopoguerra; ed avevo naturalmente scelto la via più semplice: quella di parlare loro di questi problemi e di offrir loro libertà di discuterne. Ma v'è evidentemente anche un'altra via per raggiunger lo stesso risultato, ed è quella di proibirglieli[27].

Si giunge intanto al termine delle lezioni e al momento dell'apertura della sessione di esami estiva. Nonostante la brevità dell'anno accademico, tutti i docenti sono riusciti a portare a termine i rispettivi programmi e alcuni hanno persino istituito delle lezioni supplementari. Le valutazioni sono ampiamente soddisfacenti: pochissime le bocciature, poche anche le promozioni con giudizio di sufficienza, numerose invece quelle con voti elevati o, addirittura, con lode. La soddisfazione è tuttavia guastata da una nuova fase di tensione nei rapporti fra Colonnetti e le autorità militari. Franco Bellia, console d'Italia a Berna, chiede infatti a Colonnetti di diffondere fra gli studenti del Campo il

[26] *Ibidem*, pp. 34-35.

[27] ACT: G. Colonnetti a P. Bolla, Château-d'Oex, 15.5.1944. Cfr. anche G. Colonnetti al Comitato di Liberazione Nazionale, Delegazione di Lugano, 25.8.1944.

testo del proclama lanciato dal Comitato di Liberazione per l'Alta Italia per celebrare l'anniversario della caduta del regime fascista. Allo stesso tempo, Ernesto Nathan Rogers, Giuseppe Pozzi, Gian Ernesto Sessa e Costanzo Bianchi raccolgono gli indirizzi degli studenti del Campo di Losanna-Vevey che hanno aderito al CLN. Entrambe le iniziative costano a Colonnetti una nuova segnalazione alle autorità federali.

Il Campo chiude i battenti l'ultima settimana di Luglio e gli studenti e gli assistenti sono destinati ai lavori agricoli forzati. Mentre Colonnetti lascia Losanna per trascorrere qualche giorno con i suoi bimbi, in alcuni settori del Campo dilaga il malcontento. Colonnetti aveva infatti stilato personalmente la lista degli assistenti che avrebbero potuto restare a Losanna, decidendo di esonerare dai lavori forzati coloro che dovevano portare a termine la redazione delle dispense. Inevitabilmente, la sua decisione è criticata e lui accusato di favoritismi. A Chateau d'Oeux, nell'agosto, stila una dettagliata relazione sul funzionamento del Campo e fa presente alcuni aspetti passibili di miglioramento. In particolare egli propone alla Delegazione federale di accrescere il numero dei posti disponibili, affinché tutti i meritevoli possano accedervi; chiede di suddividere i giovani nelle varie sedi a seconda delle facoltà presenti e soprattutto auspica che "vengano in ben altro modo definiti i rapporti tra autorità accademiche e militari"[28]. Come scrive all'amico Jacini: "in fondo la Delegazione non è in grado di darci nessun contributo reale; potrebbe perlomeno lasciarci lavorare"[29]. Frattanto, Colonnetti e sua moglie Laura intensificano il loro impegno su un altro fronte ancora: quello della raccolta e della trasmissione di notizie sugli italiani sbandati, deportati o prigionieri di guerra. Nell'Italia divisa in due dalla Linea gotica, riuscire ad ottenere informazioni è difficilissimo. Grazie ai loro contatti con la Santa Sede e con Legazione d'Italia a Berna, Gustavo e Laura riescono però ad aiutare decine di famiglie disperate per la sorte dei loro cari. Basti citare, fra le richieste di aiuto evase, quella di Gino Cassinis, il cui figlio Roberto, aspirante s. tenente del Genio navale non aveva più dato notizie di sé dopo l'armistizio. In tanti coadiuvano i Colonnetti in quest'opera di solidarietà e, fra gli altri, vi è il matematico Gino Fano, che mette a disposizione i suoi contatti con i comitati internazionali di soccorso agli ebrei.

Durante tutta l'estate, non giungono informazioni né sulla riapertura del Campo né sul fatto che il suo rettorato vada ancora a Colonnetti, anche se continuano ad arrivare decine di domande di aspiranti studenti. La situazione

[28] ACT: G. Colonnetti, *Per una migliore organizzazione dei campi universitari in* Svizzera, pp. 1-4.

[29] ACT: G. Colonnetti a S. Jacini, Château d'Oex, 5.8.1944 e F. Consolo a G. Colonnetti, Chesières, 8.8.1944.

politica sempre più critica e la guerra in fase di stallo spingono tuttavia le autorità federali a decidere la ripresa dell'attività di insegnamento per il successivo anno accademico. Circa 140 studenti sono ammessi a frequentare il semestre invernale, sotto la guida di 25 docenti e assistenti. Oltre alle lezioni, riprendono anche le Conferenze ma l'esperienza di Colonnetti alla guida del CUI sta chiaramente volgendo al termine a causa dell'insanabile contrasto tra gli alti ideali di questo scienziato e la rigidità della *leadership* militare. In un rapporto segreto, imbeccato da Zeller, Tommasi accusa Colonnetti di "trattenersi frequentemente presso agitatori comunisti", di minare l'autorità degli ufficiali italiani e di concedere "piena tolleranza a manifestazioni di carattere politico", e propone l'apertura di un'inchiesta, al fine di ristabilire la disciplina nel Campo di Losanna, grandemente compromessa dalla gestione di Colonnetti, "che non è un militare e che non ha mai taciuto i suoi sentimenti del tutto contrari a quanto sia militare" [30].

Colonnetti reagisce lasciando la carica di rettore del Campo, confortato dal sostegno della stragrande maggioranza dei 'suoi' studenti e del personale. Le lettere di commiato ricevute non si contano: "La ricorderemo sempre come il primo che ci parlò dell'Italia e della libertà con le parole che tanto attendevamo", gli scrivono quattro internati[31]. Colonnetti si congeda il 30 novembre 1944, pronunciando una delle sue conferenze più belle e appassionate, *Fenomeni transeunti e permanenti*, quasi una sorta di testamento spirituale, nella quale traccia un suggestivo raffronto fra i principi di statica che stanno a fondamento di un fabbricato e quelli su cui si dovrebbe reggere l'edificio economico, sociale e politico di una nazione.

Di nuovo in Italia

Ai primi di dicembre del 1944 si riunisce a Ginevra un gruppo di rifugiati in Svizzera dei quali il governo italiano, appena insediatosi sotto la presidenza di Ivanhoe Bonomi, chiede urgentemente il rimpatrio a Roma per affidar loro i più delicati e difficili incarichi governativi. Sono "uomini provati dalle vicende dell'esilio e della persecuzione, da ultimo affluiti in Svizzera, insieme con migliaia di altri rifugiati israeliti, intellettuali, soldati, sbandati e tanti altri, ricercati, spesso non si sa perché dai tedeschi"[32]. Non vi è alcun mezzo, se non gli aerei militari, per raggiungere Roma, capitale occupata di un paese

[30] AFB E, 4264, 1985/196, *Personaldossier* G. Colonnetti; E, 5791, 1, 7/53 e 56.

[31] ACT: G.E. Bianchi, M. Paravicini, E. Amman, P. Rotta a G. Colonnetti, 23.11.1944.

[32] Adolfo Alessandrini, in AAVV 1973, p. 34.

diviso in due. Da ultimo si decide che il gruppo lasci la Svizzera il 4 dicembre alla volta di un castello nei pressi di Lione, dove resterà per una settimana, ufficialmente ospite delle autorità alleate ma, di fatto, sotto stretta sorveglianza della Military Police.

> Che fare? – racconterà Adolfo Alessandrini – Si iniziano e si succedono le discussioni. È qui che sento, per la prima volta, perorare da un italiano la causa dell'Europa unita[33]

Il 10 dicembre, gli esuli atterrano a Ciampino. Come primo atto al suo rientro, Colonnetti presenta alle autorità italiane il lavoro svolto in Svizzera nei Campi Universitari e riesce ad ottenere il riconoscimento degli esami sostenuti dagli internati. Il Governo lo autorizza a comunicare ufficialmente la notizia su Radio Londra.

I Colonnetti, che hanno lasciato i figli in Svizzera, continuano a tenersi in contatto con loro e con molti docenti del Campo di Losanna, che chiude definitivamente le sue attività il 14 maggio 1945. Tuttavia questo è per loro un periodo di "vera cesura nella vita famigliare"[34]. Dalle lettere emerge tutta la malinconia di un padre e di una madre lontani dai loro affetti più cari, ma anche il coraggio di due persone che avevano saputo trarre del buono dal loro tempo di esilio. Animati dalla consapevolezza che "l'Italia in frantumi chiede dedizione e iniziativa per necessità che sono ancora più grandi e impellenti di quelle loro famigliari"[35] i Colonnetti vanno incontro a dodici anni di intenso lavoro.

Presidente del CNR, eletto membro della Consulta Nazionale e del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Gustavo si impegna soprattutto sul fronte della scuola, dell'Università e della ricerca, Laura su quello del recupero alla vita civile dei reduci. La carriera politica di Colonnetti si arresterà tuttavia alla Costituente per la sua battaglia a favore dell'annullamento di tutte le nomine a professore universitario, effettuate senza procedura di concorso a partire dal 1923, a guisa di 'dono di scambio' per meriti politici. Inutile dirlo: Colonnetti avrebbe perso questa battaglia perché, come ricorda Arturo Carlo Jemolo:

> già in quel Consiglio appariva, come in ogni altro aspetto della vita italiana, il contrasto tra i personaggi dell'austerità, del rifiuto di ogni compromesso e chi riteneva occorresse invece sanar le ferite, riconciliare, darsi tutti la mano, non avendo ripugnanza a stringere anche mani scarsamente pulite, facendo scendere l'oblio

[33] *Ibidem*, p. 35-36.

[34] Elena Colonnetti in Badini Confalonieri e Colonnetti 2006, p. 7.

[35] Elena Colonnetti in Badini Confalonieri e Colonnetti 2006, p. 8. Cfr. anche Colonnetti 1945 e Colonnetti 1946.

sul passato, colpe collettive e colpe individuali, e soprattutto facendo gran leva sul principio della situazione consolidata: ciascuno conservi quel che ha, non importa se bene o male acquisito[36].

Al compimento dei settant'anni, Colonnetti lascia la Presidenza del CNR e torna in Piemonte. Ancora pienamente attivo, dedica il crepuscolo della sua vita ai temi che lo avevano da sempre impegnato: la scuola e l'università ma, ancor più, la responsabilità degli scienziati nei confronti del progresso tecnologico. Di fronte agli indizi della crisi sociale e della rivolta giovanile che stanno profilandosi all'orizzonte, nell'ultimo convegno da lui organizzato all'Accademia delle Scienze di Torino Colonnetti chiede ai colleghi di sottoscrivere una sorta di 'giuramento di Ippocrate', un impegno morale a non impiegare le conquiste scientifiche a fini bellici. Si spegnerà a Torino meno di un anno dopo, nel marzo del 1968, fiducioso che la sua memoria non sarebbe venuta "meno nel cuore di quanti ritengono che la vita è lavoro e che solo han diritto alla quiete eterna coloro i quali passarono nella terra adempiendo alla legge del dovere"[37].

Conclusione

La vicenda esistenziale e professionale di Colonnetti in Svizzera è stata finalmente riscoperta, grazie alle ricerche condotte negli archivi italiani e Svizzeri. In particolare le migliaia di lettere custodite nell'Archivio Colonnetti di Torino, cento delle quali pubblicate da Luciano nel volume *Scienza in esilio. Gustavo Colonnetti e i campi universitari in Svizzera (1943-1945),* hanno fornito un ritratto vivido, a tratti dolente, di tutto ciò che questo illustre scienziato, alieno al potere e ai compromessi, fece per coordinare il funzionamento dei Campi. I tratti salienti del magistero scientifico e spirituale di Colonnetti in Svizzera, le tappe che portarono all'istituzione del Campo di Losanna, le finalità con cui essi furono avviati e le difficoltà burocratiche e materiali che si dovettero superare per la loro realizzazione sono state poste in risalto, insieme ai contributi di quei docenti – Gino Fano, Franco Levi, Modesto Dedò, Luigi Szegö, Luigi Einaudi e tanti altri ancora – che condivisero con Colonnetti l'esperienza dell''Università in esilio'. Per contro i rapporti e le relazioni ufficiali inerenti il Campo di Losanna, custoditi a Berna presso l'Archivio Federale Svizzero, hanno illustrato la distanza siderale che separò gli ideali culturali e

[36] Arturo Carlo Jemolo, in AAVV 1973, p. 42.

[37] Luigi Einaudi in Vittorio Badini Confalonieri, in AAVV 1973, p. 50.

spirituali del corpo docente del CUI dalle piccole e grandi meschinerie dell'*establishment* militare elvetico.

Almeno due temi restano però da approfondire, ed è ciò che ci ripromettiamo di fare nel prossimo futuro. In primo luogo appare interessante indagare il retaggio che l'esperienza di Losanna lasciò su Colonnetti e valutare se e in quali termini essa sia stata di stimolo e di ispirazione per il successivo impegno alla guida delle istituzioni della ricerca scientifica italiana nel quadro della ricostruzione culturale del paese dopo l'immane tragedia della guerra. Un secondo ambito di indagine sarà legato alla ricostruzione delle storie degli 'altri' Campi (Friburgo, Ginevra, Huttwil, Mürren e Neuchâtel), ciascuno dei quali ebbe tratti culturali distintivi propri e peculiari dinamiche di struttura e funzionamento.

Abbreviazioni

AFB: Archives fédérales suisses, Berna

ACT: Archivi privati - Colonnetti Gustavo, presso Archivio di Stato di Torino, Sezioni Riunite.

Riferimenti bibliografici

AAVV, *A ricordo di Gustavo Colonnetti*, Torino, C.N.R., [1974].

AAVV, *Gustavo Colonnetti per chi lo conobbe, Pollone*, Fondazione Alberto Colonnetti, 1973.

AAVV, *Testimonianze: 75° compleanno di Franco Levi*, Torino, Politecnico di Torino. Dipartimento di Ingegneria strutturale, 1989.

AAVV, *Laura e Gustavo Colonnetti: scritti di persone che li ricordano con nostalgia e affetto*, Occhieppo Superiore (BI): Ecomuseo Valle Elvo-Serra, 2000.

Badini Confalonieri L., *Colonnetti inedito*, Biella, Sandro Maria Rosso, 1978.

Badini Confalonieri L. (a cura di), *Testimonianze in memoria di Gustavo Colonnetti*, Torino, Stamperia Artistica Nazionale, 1973.

Badini Confalonieri L., Colonnetti G., *Carissimi figlioli belli ... Lettere da Roma 1944-45*, Torino, Fondazione Alberto Colonnetti, 2006.

Bartolini A.C., *Scienza e solidarietà: i campi di internamento universitario di Friburgo, Neuchâtel, Ginevra, Mürren e Huttwil (1944-1945)*, rel. prof. E. Luciano, Torino, Dipartimento di Matematica dell'Università, a.a. 2017-18.

Broggini R., *Terra d'asilo. I rifugiati italiani in Svizzera 1943-1945*, Bologna, Il Mulino, 1993.

Broggini R., *La frontiera della speranza: gli ebrei dall'Italia verso la Svizzera: 1943-1945*, Milano, Mondadori, 1999.

Bucher A., *Lausanne, terre d'accueil. Le camp universitaire militaire italien, 1943-1945*, Travail de diplôme presenté pour l'obtention du titre du guide de la ville de Lausanne, Lausanne, s.e., 2000.

Camurani E., *Il Presidente e il cappuccino. I rapporti tra Luigi Einaudi e padre Placido da Pavullo*, Reggio Emilia, Istituto per la Storia della Resistenza, *Ricerche Storiche*, XL, n. 105, 2008, pp. 9-36.

Castagnola R., Panzera F., Spiga M. (a cura di), *Spiriti liberi in Svizzera: la presenza di fuorusciti italiani nella Confederazione negli anni del fascismo e del nazismo, 1922-1945: atti del Convegno internazionale di studi*, *Ascona, Centro Monte Verità; Milano, Università degli studi, 8-9 novembre 2004*, Firenze, Cesati, 2006.

Chiorino M. A., *Meccanica strutturale a Torino e in Piemonte dal Settecento al Novecento*, 2012, preprint.

Chiorino M. A., *Un committente particolare, Gustavo Colonnetti (1886-1968) - Un padre fondatore della scienza delle costruzioni dialoga con l'architettura*, 2010, preprint.

Colonnetti G., *L'esperienza svizzera e la nostra ricostruzione universitaria*, Nuova Antologia, 1945, pp. 217-223.

Colonnetti G., *Democrazia svizzera*, Idea, a. II, n. 2, febbraio 1946, pp. 85-89.

Colonnetti G., *Pensieri e fatti dall'esilio (18 settembre 1943-7 dicembre 1944)*, Roma, Accademia dei Lincei, 1973.

Einaudi L., *Diario dell'esilio 1943-1944*, Torino, Einaudi, 1997

Fanfani A. *Diari: Volume I, 1943-1845 Quaderni svizzeri* (a cura di Capperucci V., Giovagnoli A., Moro R., Roggi P.), Rubbettino, Catanzaro, 2012

Lasserre A., *Frontières et camps: le refuge en Suisse de 1933 à 1945*, Lausanne, Payot, [1995].

Luciano E., *Scienza in esilio. Gustavo Colonnetti e i campi universitari in Svizzera (1943-1945),* Pristem/Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura 41-42, Milano, Egea, 2017.

Levi A., *I campi universitari italiani in Svizzera (1944-1945)* in *Svizzera italiana*, VII (1947), n. 62, pp. 93-101.

Levi F., *Cinquant'anni prima: dalle rovine belliche alle costruzioni funzionali*, *Cinquant'anni dopo: il cemento armato, dai primordi alla maturità*, Torino, Testo & immagine, 2002-2003.

Melchionda D., *Scienza in esilio: l'esperienza del Campo d'internamento Universitario di Losanna (1944-45)*, rel. prof. E. Luciano, Torino, Dipartimento di Matematica dell'Università, a.a. 2013-14.

Peruccio P., *La ricostruzione domestica; Gustavo Colonnetti tra cultura politecnica e industrializzazione (1943-1957)*, Torino, Celid, 2005.

Signori E., *La Svizzera e i fuoriusciti italiani. Aspetti e problemi dell'emigrazione politica 1943-1945*, Milano, Franco Angeli Editore, 1983.

Signori E., *Una «peregrinatio academica» in età contemporanea. Gli studenti ebrei stranieri nelle università italiane tra le due guerre*, Annali di storia delle università italiane, 4, 2000, pp. 139-162.

Supino G., *Gustavo Colonnetti. Discorso commemorativo pronunciato nella seduta ordinaria dell'11 gennaio 1969*, Accademia Nazionale dei Lincei, Celebrazioni Lincee, 20, Roma, 1969, 10 p.

Twardzik S., *Le carte dei campi di internamento universitari per i militari italiani in Svizzera conservate dall'Università degli Studi di Milano*, all'interno di *Spiriti liberi in Svizzera: la presenza di fuorusciti italiani nella Confederazione negli anni del fascismo e del nazismo (1922-1945), Atti del convegno internazionale di studi Ascona, Centro Monte Verità Milano, Università degli Studi 8-9 novembre 2004*, Franco Cesati Editore, Milano, 2006

Terracini A., *Ricordi di un matematico. Un sessantennio di vita universitaria*, Roma, Cremonese, 1968.

Terracini S. (a cura di), *Matematica e Liberazione*, dossier di Lettera Matematica Pristem 60, 2006.

Tricomi F.G., *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori (bibliografia commentata 1916-1967)*, Padova, CEDAM, 1967.

Wisard F., *L'université vaudoise d'une guerre à l'autre*, Losanna, Editions Payout Lausanne, Université de Lausanne, 1998.

Torino, 14 febbraio 2019

Hilbert e Pirandello. Logica e verità[1]

Carlo Toffalori
Sezione di Matematica, Scuola di Scienze e Tecnologie
Università di Camerino
carlo.toffalori@unicam.it

Sunto. *Confrontiamo e commentiamo il concetto di verità – in particolare di verità scientifica – in Hilbert e Pirandello, cioè in un matematico e uno scrittore che sperimentarono da sponde opposte la crisi di valori del primo Novecento.*

Vite parallele

David Hilbert e Luigi Pirandello furono quasi contemporanei: il primo nacque nel 1862 a Königsberg e morì nel 1943 a Göttingen, mentre il secondo vide la luce cinque anni dopo, nel 1867 ad Agrigento, e scomparve sette anni prima, nel 1936 a Roma. Furono l'uno un matematico e l'altro uno scrittore, come tali collocati dall'immaginario collettivo quasi d'ufficio agli antipodi. Ma forse un loro confronto merita un'analisi meno superficiale, che sappia o confermare la loro eterogeneità oppure svelare eventuali convergenze. E' quanto ci proponiamo di fare in questa nota. Cominciamo col dare di ciascuno brevi cenni biografici.

David Hilbert fu un "grande" matematico. Ebbe carriera precoce e lineare, e arrivò velocemente alla massima notorietà internazionale. Già nel 1895 fu chiamato come professore alla sede prestigiosa di Göttingen, dove formò una serie impressionante di allievi – le anagrafi scientifiche ne contano 76. I suoi contributi alla matematica e perfino alla fisica sono eminenti e molteplici. Uno studente universitario di matematica ha ripetute occasioni di incrociarli: in algebra, a riguardo dei così detti *teorema della base* e *teorema degli zeri* (Artin, 1997); oppure in analisi funzionale, dove si considerano appunto gli *spazi di Hilbert* (Cannarsa & D'Aprile, 2008); oppure ancora nella geometria, della quale i *Fondamenti* da lui pubblicati a fine Ottocento forniscono una

[1] Una trattazione estesa dell'argomento compare nel volume *Letteratura e matematica. Spiragli di infinito*, in corso di stampa per UTET De Agostini.

rielaborazione epocale (Hilbert 1899, ed. 2012 a cura di R. Betti e Hilbert, Cohn-Vossen, 1972). Le sue ricerche si estesero pure alla teoria dei numeri, alla teoria degli invarianti, alla fisica matematica e alla teoria della relatività. Nel suo genere, fu pure scrittore brillante ed efficace. Il suo *Zahlbericht* – il "resoconto" sulla teoria algebrica dei numeri del 1897 (Hilbert, 1996) – viene comunemente ritenuto un capolavoro di letteratura matematica, e le sue riflessioni sulla filosofia della matematica, di cui avremo presto occasione di discutere, sono ricche di brani e aforismi famosi[2].

Introdurre Luigi Pirandello è più facile. La sua figura di scrittore e drammaturgo è universalmente nota. Del resto il suo genio gli meritò il Premio Nobel per la Letteratura nel 1934 – il terzo conferito a un italiano, dopo Giosuè Carducci e Grazia Deledda. Eppure Pirandello restò per molti anni una figura isolata, se non trascurata, nella letteratura non solo internazionale ma pure italiana. Il suo successo restò per molti anni altalenante, faticoso e contrastato. Rileva uno dei suoi commentatori più autorevoli, Giovanni Macchia (Macchia, 2000, p. 198), che scrittori famosi quali Proust, Joyce, Musil e ancor prima James lo ignorarono del tutto, pur manifestando invece la loro ammirazione per altri autori nostrani come D'Annunzio. La stessa sorte gli toccò per lungo tempo pure in Italia. Eppure, osserva ancora Macchia (ibidem, p. 19), *"nessuno scrittore contemporaneo ha lavorato per larghezza ed estensione più di Pirandello. Nessuno ha sperimentato in una terra solitaria e scontrosa culture tanto diverse"*.

Pirandello trascorse nella Germania di Hilbert lunghi periodi della propria vita. Vi giunse ancora studente, dopo un diverbio con un docente dell'Università di Roma, che lo indusse ad abbandonare quell'Ateneo e l'Italia stessa, riparando per l'appunto a Bonn – può essere che, a distanza di anni, quel litigio abbia condizionato la sua fortuna nell'ambiente culturale del nostro paese. In Germania il giovane Luigi si laureò, per la precisione nel 1891. Sempre in Germania Pirandello sarebbe tornato in occasione della rappresentazione di varie sue commedie. Tuttavia la sua dimensione mediterranea, il suo legame con la sua terra e con la campagna di Agrigento permasero anche dopo la

[2] I saggi di Hilbert sui fondamenti della matematica sono raccolti nella traduzione italiana in (Hilbert, 1985). Segnaliamo (prima col titolo originario e poi con la traduzione nella nostra lingua) anzitutto *Mathematische Probleme-Problemi matematici* (il contributo che seguì la conferenza al convegno del 1900 a Parigi, di cui avremo presto occasione di parlare) e poi *Axiomatische Denken-Pensiero assiomatico* (Zurigo, 1917), *Neubegründung der Mathematik-Nuova fondazione della matematica* (Copenhagen e Amburgo, 1922), Über das Undenliche-Sull'infinito (Münster, 1925), *Die Grundlagen der Mathematik-I fondamenti della matematica* (ancora Amburgo, 1927) e *Naturerkennung und Logik-Conoscenza della natura e logica* (Königsberg 1930).

sua prima esperienza tedesca. Dopo le vicissitudini che si dicevano, a poco a poco la sua fama si accrebbe in Italia e nel mondo, sia pure accompagnata da polemiche per l'innovazione del suo stile e del suo pensiero, fino ad arrivare appunto al Nobel del 1934.

Quanto ai possibili legami tra Hilbert e Pirandello, tra essi sta certamente la crisi di valori che caratterizzò il loro tempo, quindi lo smarrimento di ogni certezza, l'apparente disfacimento di ogni postulato. A questo disorientamento ambedue reagirono, ciascuno nel proprio campo, con quelle *"larghezza ed estensione"* e con quella fervida sperimentazione che Macchia attribuisce allo scrittore, ma con sensibilità ovviamente diversa, fiduciosa nel caso di Hilbert e scettica in quello di Pirandello. Nelle pagine che seguono presentiamo allora il pensiero dell'uno e poi dell'altro proprio in tema di scienza e verità, per valutare compiutamente la loro eventuale affinità, confermarla oppure smentirla, e azzardare finalmente un raffronto e qualche conclusione.

Per approfondimenti su Hilbert rimandiamo al recente libro di Gabriele Lolli (2016) e all'introduzione di Michele Abrusci (1985), oltre che alla biografia di Constance Reid (1970). Per la storia della matematica, specie di fine Ottocento e del Novecento, consigliamo (Bartocci et al., 2007) e (Kline, 1985), oltre ai classici (Boyer, 1980) e (Courant e Robbins, 2000). I commenti all'opera di Pirandello sono sconfinati. Qui segnaliamo in particolare quelli di Renato Barilli (2005) e Giovanni Macchia (cit.).

David Hilbert

Cominciamo da Hilbert. La sua concezione della matematica si trova espressa in vari saggi dal 1899 al 1931, quelli già segnalati nella traduzione italiana (Hilbert, 1985): li citeremo liberamente, con tacito e costante riferimento a quel volume.

Come già s'è accennato, Hilbert fu ben consapevole del ruolo chiave della matematica nel progresso delle altre scienze – quelle che sono in genere ritenute meno astratte e quindi più redditizie –, non tuttavia come ancella, ma come cardine, guida e fondamento. Per lui infatti la stella polare della ricerca scientifica, e matematica in particolare, è non il profitto, o il beneficio di qualche effetto tangibile, ma, ben più nobilmente, *"l'onore dello spirito umano"* (come leggiamo in *Conoscenza della natura e logica*). In questa prospettiva la matematica è pienamente legittimata a trattare anche argomenti trascendenti come l'*infinito* – l'idea che più di ogni altra, ad avviso di Hilbert, ha stimolato e affascinato l'intelletto umano. Concetto che la natura stessa rifugge, al pari del suo opposto, che è l'infinitesimo – perfino il numero delle particelle che compongono l'universo è sì spropositato, ma ***finito***, e allo stesso modo ogni singola particella è sì minuscola, ma concreta. Concetto apparentemente estraneo anche alla razionalità. Ma proprio per questo concetto che più di altri ha bisogno di chiarificazione.

L'interesse di Hilbert per il tema dell'infinito, cui è espressamente dedicato sin dal titolo il famosissimo saggio del 1925 *Sull'infinito*, aveva chiare motivazioni storiche.

Nel 1872 infatti Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918), e del resto anche Karl Weierstrass (1815-1897), avevano presentato le prime, famose definizioni dei numeri reali, introdotti rispettivamente attraverso i concetti di *sezione* e di *successione di Cauchy* tra i numeri razionali (Waismann, 1971). Si dava così finalmente forma a quei numeri chiamati irrazionali, cioè non frazionari, come $\sqrt{2}$ e π, la cui rappresentazione decimale è ***infinita*** e in qualche senso imprevedibile, perché mai periodica. Di lì a qualche anno poi, a partire dal 1874, lo stesso Cantor, col sostegno di Dedekind, avrebbe elaborato la sua teoria dei numeri transfiniti, cardinali e ordinali, e sviluppato così una vera e propria, stupefacente e affascinante, matematica dell'infinito (Leonesi & Toffalori, 2007; Lolli, 2013; Lombardo-Radice, 1981; Zellini, 1980).

Novità rivoluzionarie, non a tutti gradite, e anzi da molti avversate. Così Leopold Kronecker (1823-1891), che pure di Cantor era stato professore a Berlino, proclamò nel 1886 che i numeri interi – tutti rigorosamente finiti – *"sono i soli creati da Dio"*, a significare che a essi, e solo a essi, la matematica si deve dedicare, accostandoli peraltro con strumenti algebrici e aritmetici, rifuggendo di conseguenza tanto i reali irrazionali, e l'analisi che vi si fonda, quanto a maggior ragione i numeri transfiniti.

Hilbert la pensò in modo diametralmente opposto, ritenendo che l'introduzione rigorosa dei numeri reali a partire dai razionali consentisse finalmente uno sviluppo maturo del calcolo differenziale e integrale e un'aritmetizzazione dell'analisi, rendendo quest'ultima una *"sinfonia dell'infinito"*, cioè una sua esaltazione. Quanto alla teoria cantoriana dei numeri transfiniti, Hilbert la celebrò nel saggio già ricordato *Sull'infinito* con aforismi che sono rimasti famosi – un esempio per tutti: *"dal Paradiso che Cantor ha creato per noi nessuno deve poterci mai cacciare"*.

Il suo fermo convincimento della liceità di trattare in matematica l'infinito si fondava sugli argomenti che seguono. Ammettiamo pure, insieme a Kronecker, che, in ragione del suo carattere finitario, l'aritmetica degli interi sia pienamente legittimata. Altrettanto vale allora per ogni sistema matematico che, allo stesso modo, si sviluppi rispettando analoghe prerogative di finitezza. Ma su queste basi si può anche costruire un calcolo, non più numerico ma logico, il quale manipola non le cifre usuali o i segni +, ·, –, ma simboli logici – come quelli ¬, ∧, ∨, →, ∀, ∃ che si adoperano per significare *"non"*, *"e"*, *"o"*, *"se … allora"*, *"per ogni"*, *"esiste"* – e col loro aiuto formalizza le leggi matematiche, cerca di ottenerne la conferma o la refutazione, sviluppa così le sue *dimostrazioni*. Queste ultime, infatti, si possono intendere come sequenze di affermazioni – *formule* del linguaggio concordato – che si succedono collegate da regole prefissate di deduzione e si concludono in un numero *finito* di passi o con il risultato matematico da provare o con la sua negazione.

Un approccio di questo genere si applica non solo ai numeri interi o alla geometria, dove qualche evidenza sensoriale pur sempre soccorre, ma anche alla matematica più astratta, come quella dell'infinito: finitaria essa pure, non per i concetti che considera, ma per il carattere delle argomentazioni che la sorreggono. Anzi, ogni branca della matematica si riterrà pienamente legittimata nella misura in cui saprà affidarsi ad apparati deduttivi che, poggiandosi come in Euclide su assiomi, ne derivino le proprie dimostrazioni fino a raggiungere i teoremi, e preservino in tutto questo un carattere accuratamente finitario. Ad avvalorare un tale sistema deduttivo non saranno più l'evidenza e l'esperienza, ma la potenza delle deduzioni e la saldezza logica, segnatamente

- la *coerenza*, ovvero l'assenza di contraddizioni, per evitare il rischio di provare allo stesso tempo tutto e il contrario di tutto,
- e per converso la *completezza*, ossia la capacità di dimostrare oppure confutare qualunque affermazione, e perciò di far luce su ogni dubbio.

Sono il nitore e *la perfezione* delle argomentazioni a garantire la bontà della teoria, anche quando gli oggetti da trattare, come i numeri trasfiniti di Cantor, paiono lontani da ogni concretezza. In questo modo la matematica finitaria interviene a sostenere pure quella infinitaria, con l'ausilio di un calcolo deduttivo.

Questo superamento del criterio dell'intuizione e dell'evidenza si estende secondo Hilbert, come già si è detto, anche alle branche più "visibili" della matematica e perfino alla geometria. In una lettera del 29 dicembre 1899 a Gottlob Frege (1848-1925) – uno dei grandi filosofi della matematica di quell'epoca – Hilbert commentava con le seguenti parole la sua visione, appunto, della geometria, alla quale proprio in quell'anno aveva dedicato i *Fondamenti*:

> *"Se con i miei punti voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema:* ***amore, legge, spazzacamino…****, allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni tra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. La circostanza or ora menzionata, però, non può mai rappresentare un difetto di una teoria (ne è piuttosto un grandissimo pregio) e in ogni caso è inevitabile."*

Insomma, pure in geometria va superato il condizionamento sensibile. Al contrario, si deve sviluppare una teoria astratta, di una finezza tutta intellettuale, capace quindi di applicarsi liberamente non solo ai consueti oggetti di interesse, ossia punti, rette e piani, ma pure ad amori, leggi, spazzacamini e a ogni terna appropriata di realizzazioni, fossero anche ***tavoli, sedie, boccali di birra*** – per riprendere un altro esempio paradossale, attribuito a Hilbert dall'allievo e poi collega Otto Blumenthal (1876-1944) e ripreso da Reid (1970). Gli oggetti della teoria possono cambiare, e allargarsi appunto a boccali o spazzacamini al posto delle rette, purché la perfezione dell'intreccio si conservi.

Dentro e fuori la geometria, dovizie di riferimenti confermano nelle opere di Hilbert questa concezione, e testimoniano peraltro le critiche ch'essa talora ricevette. Basterà citare qui i commenti che su certi suoi lavori giovanili del 1888 furono espressi da colleghi più anziani e a quel tempo autorevoli, come Paul Gordan (1837-1912): *"egli* [Hilbert] *ritiene sufficiente che nessuno contraddica la sua dimostrazione"*. E, ancora, l'accusa più famosa che viene attribuita allo stesso Gordan: che quella di Hilbert non è matematica, ma teologia. Pure Henri Poincaré (1854-1912) restò convinto che la matematica non potesse in alcun modo disgiungersi dalla realtà fisica e ridursi a un puro gioco mentale, avversò di conseguenza le concezioni hilbertiane, cui anzi riservò in (Poincaré, 1997) ironie anche feroci.

Dal canto suo, Hilbert non giunse mai a condividere neppure l'opinione di chi, come Frege, lo stesso Dedekind e più tardi Russell[3], coltivava l'ambizione *logicista* di fondare l'intera matematica, a cominciare dall'aritmetica e poi dalla geometria, sui concetti e sugli schemi della logica. Tuttavia continuò a sottolineare la funzione cruciale che nella ricerca scientifica rivestono l'intelletto e il *"puro pensiero"*. *"Procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente"* affermava nel saggio *Nuova fondazione della matematica* del 1922. Il ruolo che egli assegnò alle dimostrazioni e la definizione formale che ne diede lo indicano allora come un grande, non solo della matematica, ma proprio della logica e, se è per questo, perfino dell'informatica, alla cui nascita con le sue idee contribuì. Le computazioni di un moderno programma di calcolo si evolvono infatti come le dimostrazioni hilbertiane.

Per ribadire ulteriormente le sue idee menzioniamo nuovamente la sua lettera del 1899 a Frege, stavolta a proposito del concetto di *verità*:

[3] Bertrand Russell (1872-1970) fu matematico, logico, filosofo, scrittore gallese, Premio Nobel per la Letteratura.

"Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza."

Un buon sistema matematico dovrà quindi garantire l'assenza di contraddizioni. Anzi, tra i suoi teoremi ne dovrà comparire uno che attesta proprio questa coerenza. Hilbert suggerì perfino una strategia per raggiungere ovunque in matematica un tale obiettivo (Abrusci, 1985). In effetti, siccome la geometria si fonda sull'analisi e questa sull'aritmetica, è di quest'ultima che va accertata la non contraddittorietà. Ma, una volta raggiunto questo obiettivo, si avrà la sicurezza che dappertutto in matematica verità e dimostrabilità coincidono e coerenza e forse completezza trionfano. Si prospetta così un ribaltamento totale dei ruoli: un teorema non è dimostrabile perché vero, ma vero perché dimostrabile.

Si obietterà: per astratta che sia, una teoria matematica dovrà sottostare alla prova dei fatti. Tanto rimarcava appunto Poincaré (1997). Dunque, che di rette o boccali o spazzacamini si occupi, che alle une invece che agli altri si riferiscano i suoi simboli, la teoria dovrà comunque provare quanto riscontrabile nella realtà, e niente altro. I suoi assiomi astratti dovranno essere così duttili da conformarsi nel concreto, a seconda dei casi, a ciascuna delle tre situazioni.

Ora, esiste in matematica un approccio che meglio di altri si presta a formalizzare e chiarire la questione. Non è perfetto, perché difetta talora di espressività. È tuttavia, in un senso opportuno, il migliore possibile. Si chiama *logica del primo ordine*. Alfred Tarski (1901-1983) e Kurt Gödel (1906-1978) furono poi due grandi della storia della matematica del Novecento. Il primo elaborò un concetto di ***verità*** per il primo ordine, pubblicandolo nel 1935 (Tarski, 1935). Ma già tra il 1929 e il 1930 Gödel provò nella sua tesi di dottorato il così detto *teorema di completezza* – attenzione: completezza, non incompletezza, che di Gödel è il risultato più famoso e che affronteremo più tardi – e cioè che, nella logica del primo ordine, vale l'uguaglianza *vero = dimostrabile*. Come dire che, in un sistema matematico (assiomi più regole di deduzione) formalizzabile al primo ordine e coerente, gli enunciati che si dimostrano coincidono esattamente con quelli che risultano veri (secondo Tarski) nei mondi che realizzano quel sistema. Si noti che altri approcci logici, apparentemente più potenti, smarriscono questa proprietà. Da questo deriva la superiorità del primo ordine.

Aggiungiamo che la dimostrazione più famosa e trasparente che del teorema di completezza si conosce è non quella di Gödel, ma l'altra fornita nel 1949 dallo statunitense Leon Henkin (1921-2006). Vi si prova appunto che ogni sistema coerente ammette un modello, dunque un universo concreto, capace di soddisfare tutte le proposizioni che in quel sistema sono dimostrabili. Per costruirlo ricorre all'artificio di identificare personaggi e interpreti, ovvero i simboli che occorrono nelle affermazioni del sistema – come tali pura astrazione – e gli oggetti matematici che dovrebbero incarnarli. Anziché boccali o spazzacamini sono proprio i simboli a rappresentare se stessi[4].

Tornando a Hilbert: c'era dunque in lui la piena fiducia che la matematica potesse sviluppare le proprie teorie in modo coerente e completo grazie all'appropriatezza degli assiomi e alla purezza delle dimostrazioni, accedendo per questa via a una verità sempre più piena. In realtà in quegli stessi anni, o subito prima, alcuni ricercatori di altre discipline manifestarono il dubbio che la scienza riuscisse realmente a percepire e comprendere l'essenza delle cose. Emil Du Bois-Reymond, fisiologo tedesco del tardo Ottocento (1818-1896), aveva espresso in proposito tutto il suo scetticismo e sostenuto, sia pure in riferimento alle scienze naturali e non alla matematica, *"ignoramus et ignorabimus"*, ossia *"ignoriamo e ignoreremo"*: il mondo si nasconde all'investigazione dell'uomo. Hilbert dissentì vigorosamente, a proposito della scienza in generale e in particolare della matematica, dove *"non abbiamo* ***ignorabimus****, al contrario, nel senso più esteso, a riguardo dunque di tutti i problemi, anche di quelli molto difficili, noi dobbiamo dire:* ***noscemus****"* (*"sapremo"*) (Hilbert, *Nachlass*). Questa rivolta contro l'*ignorabimus*, questa fede nella facoltà della mente matematica di conoscere e capire animano vari scritti hilbertiani. Leggiamo così in *Sull'infinito*, anticipato peraltro quasi con le stesse parole in *Problemi matematici* del 1900: *"… sentiamo continuamente dentro di noi l'appello: ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l'****ignorabimus****"*. Oppure, in *Problemi della fondazione della matematica* del 1928: *"… io devo aggiungere, per gli scettici e i pusillanimi: nella matematica non c'è l'****ignorabimus****, anzi noi possiamo sempre dare risposte alle questioni sensate"*. E ancora in *Conoscenza della natura e logica*:

> *"Per i matematici non esiste l'****ignorabimus****, e a mio parere non esiste nemmeno per la scienza della natura […] non esiste alcun problema irrisolubile. Al posto dello* ***stolto ignorabimus****, la nostra parola d'ordine è invece:* ***noi dobbiamo sapere, noi sapremo****"*.

Queste ultime parole rappresentano addirittura per Hilbert una sorta di testamento scientifico, al punto che perfino la stele sulla sua tomba a Göttin-

[4] Una storia commentata della propria dimostrazione è presentata dallo stesso Henkin (1996). I dettagli si possono trovare in rete, anche in italiano, nelle dispense di vari corsi universitari di logica matematica.

gen le riporta, ovviamente in tedesco: *"Wir müssen wissen, wir werden wissen"* (Poincaré, 1997, p. 220).

Concludiamo qui il nostro breve ritratto di Hilbert logico e filosofo della scienza, non senza però due ultime aggiunte doverose.

Teniamo anzitutto a sottolineare come, secondo Hilbert, la verità matematica sia lontana da ogni pretesa di assolutezza. I buoni sistemi deduttivi possono mantenersi singolarmente coerenti, e al tempo stesso rivelarsi molteplici e addirittura ***antitetici***. Basti pensare al caso delle geometrie, euclidee oppure no: tutte individualmente attendibili, eppure incompatibili tra loro. Non c'è quindi in geometria, e neppure nella matematica transfinita, una via regia, un'unica verità aprioristica, meno che mai imposta dall'evidenza. Al contrario emergono più teorie contrapposte, suggerite dalla lezione del mondo o dalla libertà del *"puro pensiero"*. Ognuna ha la sua verità, e talora il suo modo autonomo di riconoscerla e dimostrarla, cioè un suo specifico calcolo deduttivo.

Occorre poi distinguere il rigore dalla rigidità. Non sono sinonimi. La precisione che la ricerca scientifica esige non significa ottusità, imposizione delle idee, chiusura rispetto alle innovazioni. Al contrario stimola e sostiene la creatività e la fantasia: *"l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà"*, aveva scritto Cantor nel 1883, ed è appunto la sua teoria dei numeri transfiniti, così originale, imprevedibile e lontana da ogni schema precostituito, a confermarlo (Cantor, 2012, p. 99). Anche a parere di Hilbert i risultati della ricerca sono non dogmi immutabili, ma tappe successive verso una conoscenza sempre più ampia e matura, e mai definitiva.

Luigi Pirandello

Arriviamo così a Pirandello – il quale in realtà non pare interessarsi affatto di matematica, e al massimo riserva qualche attenzione alla scienza nel suo complesso. Lo fa in alcuni saggi che risalgono al 1908 e quindi precedono decisamente l'avvio della sua parabola teatrale. Al loro interno la scienza viene spesso accostata all'arte, della quale si riconosce però la priorità. E' dunque guardata con rispetto ma anche con sospetto.

Nel saggio *Arte e scienza*[5], si mette per esempio in guardia dal rischio di intromissioni indebite della scienza e in particolare della logica nell'ambito artistico. Si riconosce sì che *"ogni opera di scienza è scienza e arte, come ogni*

[5] Ci rifacciamo alla raccolta dei saggi pirandelliani (Pirandello, 2006) nei Meridiani Mondadori. Allo stesso modo, per le opere teatrali, ci riferiamo tacitamente alla loro edizione completa (Pirandello, 2007), sempre sui Meridiani.

opera d'arte è arte e scienza". Si sottolinea di conseguenza che perfino la scienza possiede un suo lato inventivo ed emozionale. Si tiene però a distinguere, appunto, l'intelletto dalla logica, la creatività del primo dalla freddezza della seconda. Il rigore geometrico, si sostiene, *"non penetra veramente nell'intimità dell'arte"*.

Nell'altro saggio, sempre del 1908, *Soggettivismo e oggettivismo nell'arte narrativa*, tornano parole, come *coerenza* e *logica*, che già abbiamo incontrato in Hilbert, ma che stavolta assumono tutt'altro significato. Parlando infatti dell'arte di scrivere novelle e polemizzando con immaginari interlocutori, fautori in proposito dell'imposizione di vincoli e precetti, Pirandello osserva:

> *"Qui entriamo, veramente, nella retorica: prescriviamo una legge.*
> *Si può ribattere: – Non una legge, propriamente; ma la* ***coerenza***.
> *Potete scegliere questo o quel mezzo; ma se scegliete questo, seguitelo, coerenti. No, rispondiamo noi: perché la coerenza, a cui qui si fa appello, non è la coerenza estetica, ma quella logica."*

Si tiene quindi a separare la *coerenza* dello scrittore, o comunque dell'artista, tesa a seguire e cogliere le anime e i fremiti dei personaggi, e la coerenza del teorico e dello scienziato, che rischia di ridursi a mero esercizio di pedanteria.

Ora, Pirandello è conosciuto e ammirato oggigiorno assai più come autore di racconti, romanzi e soprattutto commedie che come saggista. Tuttavia lo scetticismo verso la scienza tornerà nei capolavori teatrali posteriori, dove anzi evolverà verso il rifiuto di ogni verità, non solo oggettiva ma anche soggettiva, verso l'ironia paradossale contro ogni conclamata certezza e verso la conseguente affermazione di un relativismo pressoché assoluto.

Colpisce allora che Pirandello e la sua opera siano spesso accusate di cerebralismo, come dire di un eccesso di quella stessa logica che egli critica e condanna. Colpisce ancor più che, in occasione del primo anniversario della morte del drammaturgo – avvenuta, come si è detto, nel 1936, per la precisione il 10 dicembre – un matematico che diverrà famoso, Bruno de Finetti[6], scriva per commemorarla una nota intitolata *Luigi Pirandello maestro di logica* (de Finetti, 1937). Per capire le ragioni di questo titolo, conviene ovviamente esaminare l'articolo – che per la cronaca comparve prima il 5 dicembre 1937 a Roma nella rivista *Quadrivio* e poi, a distanza di due giorni, sull'altro periodico *Brennero*. Leggiamo allora de Finetti dichiarare *"Considero Pirandello come uno dei più grandi spiriti matematici"*, e aggiungere subito dopo che questa sua affermazione può sembrare sì paradossale, ma solo a chi, "*cullandosi nelle*

[6] 1906 Innsbruck-1985 Roma.

inveterate illusioni razionalistiche, […] considera la matematica come un complesso di verità assolute che col relativismo pirandelliano sarebbe addirittura agli antipodi". E ancora – le parole di de Finetti sono molto belle, ed è un piacere citarle integralmente:

> *"Nulla potrebbe dare una rappresentazione drammatica così perfettamente aderente al pensiero del matematico che quella dei magistrali lavori pirandelliani, in cui ogni personaggio procede sino in fondo colla sua logica allucinante, strumento tagliente e perfetto che tuttavia* ***nulla può sulla logica altrui*** *se è diversamente impostata, a meno che non il ragionamento ma un improvvisto barlume dell'anima non sconvolga tale impostazione".*

In effetti molti dei drammi più famosi di Pirandello e molti dei loro protagonisti manifestano appunto una logica apparentemente ironica, fredda e inattaccabile, eppure pervasa di umanissima e soffocata disperazione.

Esemplare è il caso de *Il giuoco delle parti*, del 1918. Vi si presenta un classico triangolo borghese, lui, lei e l'altro. In realtà lei, cioè la moglie Silia, e l'altro, l'amante Guido Venanzi, mal sopportano lui, Leone Gala, ch'è sì marito, ma solo di forma e non di sostanza, peraltro accondiscendente e remissivo, e tanto più sgradito per questo suo stoico distacco. Cercano dunque il modo di eliminarlo – in un'epoca in cui in Italia il divorzio non era ancora permesso. L'occasione si presenta quando un giovane ufficiale oltraggia pubblicamente Silia. Secondo le convenzioni dell'epoca, sta al marito di sfidare a duello l'autore dell'insulto per difendere la dignità della consorte. Leone Gala è consapevole che non uscirà vivo dallo scontro, e tuttavia sorprendentemente accetta. Al momento della contesa, però, si fa da parte, osservando come il duello competa non a lui, ma al Venanzi. Lui ha onorato la forma, sfidando l'ufficiale; ma a combattere nella sostanza dev'essere l'amante.

Un ragionamento matematico inappuntabile, una logica fredda, paradossale, spaventosa – *"allucinante"*, *"tagliente"* e *"perfetta"*, per riprendere le parole di de Finetti –, inconciliabile tuttavia con ogni altra premessa *"diversamente impostata"*, non solo con gli intrighi di moglie e amante, ma anche col rispetto degli schemi della società borghese, che anzi *"squalificherà"* – cioè emarginerà – il Gala per il mancato rispetto di questi suoi paradigmi.

C'è tuttavia da prendere atto che situazioni del genere, se da un lato attestano l'umana incomunicabilità e la relatività dell'esistenza, per altri versi corrispondono in modo niente affatto superficiale a quella molteplicità delle geometrie, euclidee e non, che rilevavamo poc'anzi nella matematica dei tempi di Hilbert. Anzi, viste in questa luce innocente, finiscono per non scandalizzare più nessuno. Pare dunque ragionevole ammettere, nella vita come nella scienza, concezioni diverse e addirittura opposte, riconoscendo tuttavia a ognuna di esse una sua dignità e una sua coerenza.

Ma l'intreccio dell'altra commedia pirandelliana *Così è (se vi pare)*, che in realtà risale al 1917 e dunque precede di un anno *Il giuoco delle parti*, va ben oltre. Vi assistiamo infatti alla reazione della logica borghese – la stessa che ripudia Leone Gala – di fronte allo strano caso del signor Ponza e della signora Frola, rispettivamente genero e suocera, e dell'identità di colei che dovrebbe essere la moglie dell'uno e la figlia dell'altra. Crudelmente segregata e allontanata dalla madre, si lamenta quest'ultima. Al contrario, sostiene lui, nascosta per pietà verso la suocera: infatti non di sua figlia si tratta – quest'ultima, che aveva sì sposato il Ponza, era poi deceduta –, ma di una seconda moglie. Se dunque la si tiene isolata, è solo per tacere alla signora Frola la tragica scomparsa della sua prole. Due teorie opposte, nuovamente antitetiche. Con una differenza sostanziale però rispetto a prima, perché stavolta, come viene da pensare a chi ascolta le due versioni,

> "*[…] la verità sarà da una parte o dall'altra! O pazza lei, o pazzo lui: da qui non si scappa! Quale dei due?*"

La curiosità borghese, così stuzzicata, si lancia in vari tentativi di soluzione: ricerche anagrafiche di atti di morte, colloqui separati con i due personaggi, confronti diretti tra gli stessi. Tutti, però, senza successo. Né l'arcano è svelato, nella drammatica scena finale, dall'apparizione della reclusa, che arriva velata e, tra lo sconcerto degli astanti, si dichiara *"sì la figlia della Signora Frola – e la seconda moglie del Signor Ponza – sì; e per me nessuna! Nessuna! Io sono colei che mi si crede"*.

Insomma: una verità ci dovrebbe essere, su chi mente e chi no tra il signor Ponza e la signora Frola, eppure non c'è modo di dimostrarla. Come commenta beffardamente uno dei personaggi, lo scettico Lamberto Laudisi, verosimilmente la coscienza critica dello stesso Pirandello: *"Chi dei due? Non potete dirlo voi, come non può dirlo nessuno"*.

Sulle verità indimostrabili, sulla scena e nella scienza, ritorneremo tra breve. Adesso però riprendiamo l'esame del brano citato di de Finetti, laddove esso allude a improvvisi barlumi dell'anima che possono sconvolgere il gelo delle impostazioni logiche precostituite, tanto nei rapporti umani quanto nella ricerca matematica. In *Pirandello maestro di logica* de Finetti mette ulteriormente in guardia dalle insidie di un intellettualismo arido e arrogante.

> "*Perché la logica è uno strumento, ma strumento potente: al servizio di una fede è un'arma formidabile; al servizio di nulla è un giocattolo […] pericoloso. Nella pretesa*

di non ammettere nulla che non sia logica, corrode intacca scuote ogni fede ogni mistica ogni mito…"

Ecco allora che il raziocinio degli "eroi" pirandelliani, Leone Gala per primo, e del loro creatore perde talora la sua lucidità granitica, si incrina e arriva a fremere di *"intoppi logici"*, *"tormenti espressivi"*, *"incantevoli banalità"* (Macchia, 2000, p. 21). Ma de Finetti va oltre e nel suo scritto sembra insinuare l'idea che pure la scienza correttamente intesa non possa limitarsi alla mera pratica del ragionamento. Che quest'ultimo possa differenziarsi e produrre teorie e conclusioni antitetiche, lo diamo ormai per acquisito. Adesso però, leggendo de Finetti, viene da domandarsi se perfino la matematica non sia, oltre che rigore astratto, anche palpito ed emozione. Ora, è innegabile che il fervore del ricercatore teso a comprendere la realtà sia anche trepidazione e travaglio. L'indagine scientifica non è solamente la brillantezza di una teoria sistemata e confezionata, ma, molto più e molto prima, la fatica di scavarla, abbozzarla e conformarla. Esige di conseguenza concentrazione, sacrificio, se non addirittura un'alienazione totale dal resto del mondo. Se c'è consentita una divagazione a questo proposito, vorremmo ricordare un altro dei capolavori pirandelliani, l'*Enrico IV* del 1922. Esso ci presenta nuovamente l'equilibrio instabile tra due sistemi logici:

- la follia del mondo medievale in cui il protagonista uscito di senno si è rintanato, identificandosi con l'antico imperatore del titolo,
- l'infido e ipocrita perbenismo borghese che lo circonda.

L'unico momento di contatto tra i due universi coincide col delitto – l'omicidio che Enrico IV rinsavito compie del suo rivale. Commesso il quale, però, non gli resta che il ritorno obbligato e definitivo nel rifugio della pazzia: *"Ora sì... per forza... qua insieme, qua insieme... e per sempre!"*. Ebbene, persino lo scienziato appare talora come un folle, ossessionato dalle sue idee e isolato dalla sua fame di verità.

Ma torniamo a de Finetti e alla matematica intesa come emozione: non solo però nella dedizione di chi la studia e ricerca, ma anche nell'essenza delle sue stesse teorie. Queste, infatti, non possono consistere unicamente nella mera formalizzazione logica, si potrebbe dire nella cristallizzazione, dei contenuti. La concezione di de Finetti sembra qui divergere da quella hilbertiana – non è tuttavia inconciliabile, come spiegheremo più avanti. Per illustrarla in maggior dettaglio facciamo riferimento al calcolo delle probabilità. Bruno de Finetti è infatti ricordato e celebrato per il contributo originalissimo che offrì a questa disciplina. Guardiamo in particolare alla voce *Probabilità* che lui stesso preparò nel 1979 per l'*Enciclopedia Einaudi* (de Finetti, 1980). Nell'occasione, per sottolineare la molteplicità delle teorie sulla probabilità, e illustrare la sua convinzione *"sul significato* ***soggettivo*** *della probabilità"* (de Finetti, 1931), de Finetti si richiama ancora a Pirandello, specificamente a *Ciascuno a suo modo* ma soprattutto al romanzo *Uno, nessuno, centomila* (Pirandello, 2014). In esso si racconta l'imbarazzo provato dal protagonista, Vitangelo Mostarda, a ritrovarsi non uno, come si presumerebbe sia, ma il caleidoscopio di immagini che gli altri hanno di lui, e conseguentemente, di per sé, nessuno – lo stesso sconcerto della dama velata di *Così è (se vi pare)*. Per illustrare le sue idee, de Finetti cita esplicitamente un passo del romanzo, sostituendo però, rispetto al testo originario, *"realtà"* con *"probabilità"* e *"mi do"* con *"sento"*. Ne deriva la seguente parafrasi, nella quale evidenziamo in neretto le parole modificate.

> *"Ci fosse fuori di noi, per voi e per me, ci fosse una signora* ***probabilità*** *mia e una signora* ***probabilità*** *vostra, dico per se stesse, e uguali, immutabili. Non c'è. C'è in me e per me una* ***probabilità*** *mia: quella che io* ***sento****, e una* ***probabilità*** *vostra in voi: quella che voi sentite; le quali non saranno mai le stesse, né per voi né per me."*

Si sostiene in definitiva che il calcolo delle probabilità, e più in generale le teorie matematiche, vanno avvicinate non in modo uniforme e oggettivo, ma *"ciascuno a suo modo"*. Commenta ancora de Finetti:

> *"Sarebbe stato impossibile, senza l'aiuto di Pirandello, esprimere questo concetto (e, in nuce, l'essenza della nostra tesi) in un modo così preciso, completo, efficace."*

Non abbiamo qui lo spazio per presentare la teoria delle probabilità di de Finetti, che il lettore trova comunque esposta in de Finetti (1931, 1970, 1980). Quanto però alla visione di una matematica "emozionale" che ne consegue, osserviamo che, sorprendentemente, essa si applica pure alla logica. Infatti, nonostante gli auspici di Hilbert, neppure i sistemi matematici – assiomi e calcoli deduttivi – sanno dimostrare fino in fondo la loro verità. Anzi, talvolta perfino la verità matematica è soggettiva.

Affermazione che può sconcertare il lettore, nella misura in cui sembra contraddire l'uguaglianza *vero = dimostrabile* che proprio in matematica, o meglio nella logica del primo ordine, abbiamo proclamato poco fa. Dunque argomento delicato, anzi così delicato da meritarsi un capitolo a parte, il prossimo.

Per concludere intanto questo, accenniamo invece a un altro punto di contatto tra il teatro pirandelliano e la logica hilbertiana, stavolta a riguardo del rapporto sottile e ambiguo tra personaggio e interprete. Uno dei drammi più famosi, se non il più famoso, dello scrittore siciliano è *Sei personaggi in cerca d'autore*, del 1921. L'inizio è ben noto: a una compagnia di autori che sta provando *Il giuoco delle parti* si presentano sei personaggi, protagonisti di un *"dramma doloroso"*, i quali chiedono di acquistare forma e consistenza, e che dunque si fissino sulla carta e sul palcoscenico le loro vicissitudini. Pure figure immaginarie, si animano tuttavia, fino a rivivere nuovamente la loro tragedia.

La pièce inaugura la così detta *trilogia* pirandelliana del *teatro nel teatro*, cui si aggiungeranno, di lì a poco, altre due commedie: anzitutto nel 1924 *Ciascuno a suo modo*, e poi nel 1930 *Questa sera si recita a soggetto*. Nella prima attori e spettatori si confondono, e tra questi ultimi compaiono addirittura gli individui reali che con la loro storia hanno ispirato il dramma sulla scena. Nella seconda, invece, sono gli attori che si immedesimano con i ruoli da recitare, fin quasi alle estreme, tragicissime conseguenze – ribaltando così per certi versi la situazione dei *Sei personaggi*. In questo modo il teatro, piuttosto che verità che si fa finzione, diviene finzione che si fa verità.

Azzardiamo allora sull'argomento una sorta di similitudine matematica, che proprio le opinioni hilbertiane su verità e dimostrabilità, e il conseguente impiego di formalismo e simbolismo, suggeriscono. Pensando infatti da un lato ai sistemi ipotetico-deduttivi della matematica e alle proprietà astratte che al loro interno si desumono e dall'altro ai modelli concreti di queste teorie, invocati a corroborarle, viene quasi da affermare la proporzione

personaggio sta a interprete come teoria sta a modello.

Concentrando invece l'attenzione sui simboli chiamati a *rappresentare* i concetti matematici – come per denotare il numero irrazionale che fa da rapporto costante tra le lunghezze di una circonferenza e del suo diametro, oppure per indicare il primo numero cardinale transfinito di Cantor – verrebbe da sostenere che

personaggio sta a interprete come concetto sta a simbolo.

Ma, proprio come nella trilogia pirandelliana, i ruoli si invertono, anche i simboli acquistano una loro vita intrinseca come e , o almeno vi anelano come gli attori di *Questa sera si recita a soggetto*, e sono dunque loro a realizzarsi nei concetti. Si potrebbe così arrischiare pure la proporzione inversa, che

personaggio sta a interprete come simbolo sta a concetto.

Del resto, ricordando Henkin e la sua prova del teorema di completezza, si arriva addirittura al paradosso in cui simboli e concetti, personaggi e interpreti, ricercano un'impossibile identificazione.

Cerebralismi, funambolismi logici, o forse qualcosa di più profondo? E davvero la matematica, i suoi oggetti e i simboli che li rappresentano possono fissare la complessità del reale?

Resta il commento che Barilli (2005, pp. 191-192) propone sulla *trilogia* del *teatro nel teatro*, o meglio sulla *Premessa* che Pirandello stesso compose per introdurla. In esso i tre drammi sono presentati come una *"specie di calcolo combinatorio"* dei rapporti e dei conflitti che tra personaggi, attori, regista, pubblico e autore si stabiliscono: nello specifico (Marotta, 1998, p. 255) tra *"personaggi e attori-regista"* nella «commedia da fare», cioè nei *Sei personaggi*, tra *"spettatori e autore-attori"* nella «commedia fatta», ossia in *Ciascuno a suo modo*, e finalmente tra *"regista e attori-personaggi"* nella commedia «recitata a soggetto».

Quanto alla matematica, scrive ancora de Finetti (2006) che *"i nostri concetti fondamentali, a cominciare da quelli di tempo e spazio, non saranno mai i protagonisti di una commedia **finita** ove ciascuno ha la sua parte e il suo ruolo, ma saranno sempre i Sei personaggi in cerca di autore"*. Matematica mai definita e appagata, ma in evoluzione, se non addirittura in gestazione: è questo, appunto, l'aspetto che andremo ad approfondire nel capitolo che viene.

Il continuo

La matematica del Novecento, specie dopo gli anni trenta, sembra davvero discostarsi, e in modo radicale, dalla visione di Hilbert avvicinandosi piuttosto ai relativismi pirandelliani. Perfino la logica, la cinica e ineluttabile logica, rivela una componente che si potrebbe definire soggettiva ed emotiva. Nel 1931, infatti, i *teoremi di incompletezza* di Kurt Gödel (1906-1978) che abbiamo già preannunciato evidenziarono come un sistema ipotetico-deduttivo che voglia trattare non l'infinito, o non solo l'infinito, ma più modestamente la "semplice" aritmetica – la teoria dei numeri naturali con le loro operazioni di addizione e moltiplicazione – e intenda farlo in modo ***coerente*** e umanamente comprensibile, è per ciò stesso ***incompleto***, incontra cioè al proprio interno almeno un'affermazione che non sa né provare né confutare, vera dunque, se affermata o negata, tra i numeri naturali, eppure indimostrabile, in conclusione solo *colei che la si crede*, al pari della donna misteriosa di *Così è (se vi pare)*.

Si potrà certamente rinvigorire quel sistema, fino a costruirne uno più potente, che sappia sciogliere quel dubbio particolare. Ma a quel punto nel nuovo apparato emergeranno altre affermazioni ugualmente indecifrabili. In definitiva, per la mente matematica non c'è maniera, dentro o fuori il primo ordine, di individuare assiomi e regole di deduzione che raggiungano tutta e sola la verità dei numeri naturali. Non che questa conclusione contraddica il teorema di completezza. Semplicemente, evidenzia come il nostro pensiero sia incapace di assicurarne le premesse, e cioè di costruire un sistema ipotetico-deduttivo che colga l'essenza ultima dei numeri naturali e realizzi tra loro l'uguaglianza desiderata *vero = dimostrabile*.

Un esempio esplicito di queste affermazioni *indecidibili*? Anzitutto proprio quella coerenza che il buon sistema dovrebbe possedere, e anzi attestare da solo, con la forza delle proprie dimostrazioni. In molti casi infatti questa coerenza, seppure sussiste, non c'è maniera di provarla.

Oppure, se si preferisce un'affermazione più concreta e diretta, legata peraltro a Hilbert e all'infinito, l'*ipotesi del continuo* di Georg Cantor.

Quest'ultimo nel 1874 aveva distinto tra i sottoinsiemi infiniti dei numeri reali, cioè dei punti della retta, due diverse cardinalità, vale a dire due livelli diversi di infinito: quello della retta stessa, che chiamò *continuo*, e quello dei numeri naturali, che denominò invece *numerabile*. Aveva poi osservato che, tra i sottoinsiemi infiniti dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, alcuni, come gli interi e i razionali, sono ancora numerabili, in questo senso assimilabili ai numeri naturali, altri, come gli irrazionali o qualunque segmento, condividono con i reali la cardinalità del continuo. Non si registravano apparentemente in $\mathbb{R}$ casi intermedi, cioè insiemi infiniti con cardinalità né numerabile né continua.

L'ipotesi di Cantor, formulata per la prima volta nel 1878, sosteneva appunto questo, che un insieme infinito di numeri reali sta in corrispondenza biunivoca o con l'insieme dei numeri naturali o con l'intero $\mathbb{R}$. Cantor stesso tentò a lungo di provare questa sua congettura, ma senza successo.

David Hilbert pose la questione al primo posto della sua famosissima lista di 23 problemi di matematica, presentata ai colleghi durante il Convegno Internazionale di Parigi nel 1900. Una versione ampliata dell'intervento hilbertiano si trova nel saggio già citato *Problemi matematici* (Hilbert, 1985). Tra parentesi: il secondo problema riguardava proprio la non contraddittorietà dei sistemi matematici, in particolare dell'aritmetica. Ma vorrei segnalare qui, almeno di sfuggita, un'altra delle 23 questioni hilbertiane, ormai risolta, ma in maniera, direi, inquietante, quasi pirandelliana.

Mi riferisco al decimo problema, che riguarda proprio l'aritmetica e, volendo, pure la matematica computazionale. La premessa è che un polinomio a coefficienti interi non sempre ammette soluzioni intere. Talora basta una minima modifica, o di un segno o del valore di un coefficiente, per cambiare radicalmente la situazione. Per esempio il polinomio di grado 2 in due indeterminate $x^2 + y^2 - 1$ ha quattro radici intere, corrispondenti alle coppie $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1 ,0)$, mentre il polinomio $x^2 + y^2 + 1$ non ne ha nessuna. Più semplicemente, il polinomio di grado 1 in una indeterminata $2x - 4$ ha la radice intera 2, cioè 4 diviso 2, ma $2x - 3$ tra gli interi non si risolve, perché 3 è dispari.

Chiamiamo allora *diofantea*, in riferimento a Diofanto, matematico alessandrino del III secolo d. C., un'equazione a coefficienti interi di cui si cercano soltanto le soluzioni intere. Hilbert chiese allora di determinare una procedura capace di distinguere, per ogni polinomio a coefficienti interi, di qualsiasi grado e in qualsiasi numero di indeterminate, l'esistenza o meno di soluzioni intere.

La risposta arrivò a distanza di 70 anni, dunque nel 1970, a opera del matematico russo Yuri Matijasevic, che peraltro coronò un lungo lavoro svolto in precedenza dai colleghi statunitensi Martin Davis, Hilary Putnam e Julia Robinson. Ma stavolta la conclusione, per certi versi imprevedibile, paradossale, degna dell'ironia di Laudisi, è che l'algoritmo cercato non c'è. In altre parole non esiste maniera di risolvere il problema e operare la distinzione richiesta. Per arrivare a una simile conclusione occorre ovviamente chiarire a priori che cosa si debba intendere per algoritmo, e quali problemi si possano ritenere privi di soluzione. Un discorso di questo genere ci condurrebbe troppo lontano, ad Alan Turing e alla nascita dell'informatica. Rimando allora sul decimo problema all'autorevole resoconto di Martin Davis (2010) o più modestamente a (Telloni & Toffalori, 2019). L'articolo di Davis illustra anche la gran varietà di nuovi interrogativi che la risposta negativa alla questione originaria di Hilbert solleva – a ribadire che nella ricerca matematica non c'è mai una parola fine e che spesso la soluzione di un dilemma ne suscita tantissimi altri.

Ma è tempo di tornare al problema numero uno, e cioè alla congettura di Cantor su reali e naturali. Nella sua conferenza parigina e nell'articolo che ne seguì Hilbert la definì *"molto verosimile"*, ma prese pure atto che *"nonostante gli sforzi più assidui"* la sua dimostrazione era ancora di là da venire. A distanza di anni, nel 1925, alla fine dell'altro saggio *Sull'infinito*, Hilbert tornò a celebrare l'interrogativo cantoriano (chiamato appunto *ipotesi del continuo*) *"per la sua originalità e la sua intrinseca bellezza"*, oltre che per la sua novità, e tentò inutilmente di abbozzarne una strategia di soluzione.

D'altronde sono proprio le sue riflessioni sulla matematica, e l'enfasi da lui attribuita al metodo assiomatico, che consigliano, prima di affrontare una simile questione, di stabilire con precisione il sistema ipotetico-deduttivo cui si intende fare riferimento. Nel caso che ci interessa lo si può forse identificare con ZFC, un acronimo che deriva dai suoi propositori, Ernst Zermelo (1871-1953, tra l'altro collaboratore di Hilbert) e Abraham Fraenkel (1891-1965), oltre che, per la C finale, dal delicato assioma della scelta (*choice* in inglese) che vi figura coinvolto. Il sistema ZFC costituisce infatti un approccio complessivo alla teoria degli insiemi e dunque, suo tramite, a tutta la matematica, dai numeri naturali all'infinito. In questo ambito è forse oggi il più popolare, quello che viene più comunemente adoperato. Esso resta tuttavia soggetto ai teoremi di incompletezza di Gödel e quindi, quand'anche coerente, è certamente incompleto e incapace di provare la propria assenza di contraddizioni – in realtà al momento non c'è garanzia definitiva nemmeno della sua coerenza. Sembrerebbe comunque ragionevole aspettarsi che l'ipotesi del continuo si chiarisca sulla base di ZFC, se quest'ultimo è coerente. Ebbene,

- nel 1938, proprio Gödel osservò che non c'è modo di confutarla a partire da ZFC (risultato che potrebbe ritenersi un argomento a suo sostegno),
- ma nel 1963, Paul Cohen (1934-2007) provò – e la sua scoperta gli valse nel 1966 la Medaglia Fields – che non c'è neppure modo di dimostrarla.

Allora, rispetto a ZFC, l'ipotesi del continuo è, appunto, *colei che la si crede*. Non c'è dimostrazione che, all'interno di ZFC, sappia affermarla o negarla. Niente però esclude, come già si accennava, che esistano altri sistemi più efficaci e convincenti, rafforzamenti di ZFC o sue alternative, che sappiano infine sciogliere la congettura del continuo. Attenzione, però: Gödel e i suoi teoremi estendono a tutte queste varianti, se coerenti, il comune difetto dell'incompletezza. Se dunque al loro interno l'ipotesi del continuo si chiarisce, altri misteri fatalmente affiorano.

La matematica e le sue teorie manifestano così, riguardo all'ipotesi di Cantor ma anche in generale, quella tensione, quella perfettibilità mai soddisfatta, che ne costituiscono la parte per così dire emozionale.

Come parla la verità

"Noi dobbiamo sapere, noi sapremo" sostiene Hilbert. *"Ed ecco, o signori, come parla la verità! Siete contenti?"* sembra rispondergli Pirandello per bocca di Laudisi[7] – come dire che alla verità non c'è verso di accedere. Due posizioni rispettabili, e tuttavia inconciliabili – né intendiamo noi qui provare ad accordarle. Del resto la verità è tema sottile, e la verità matematica solo una sua forma particolare, ben più schematica e categorica di quella dell'anima. Nel caso di Pirandello, giustificati dal freddo rigore logico delle argomentazioni di Leone Gala e di altri personaggi, ci siamo permessi di assimilarle, ma siamo ben consapevoli della grossolanità di questa semplificazione. Colpiscono al riguardo le parole di Barilli (cit., pp. 191 e seguenti), che collegano nella *trilogia* il vero e il verosimile, e segnatamente nei *Sei personaggi* l'anelito già segnalato di questi ultimi, che cercano di tradurre l'illusione del loro dramma nella pienezza della verità, contrapposto alla routine degli attori, che tendono

[7] È la battuta finale di *Così è (se vi pare)*.

al contrario ad accontentarsi della verosimiglianza di una recitazione convenzionale. *"Ma che verità, mi faccia il piacere! Qui siamo a teatro! La verità fino a un certo punto"*, replica il Capocomico alla disperazione del Padre.

Ciò appurato, proviamo tuttavia a confrontare alcuni aspetti fondamentali delle due visioni di Hilbert e di Pirandello.

Partiamo dalla "verità" del matematico tedesco, la quale – l'abbiamo sottolineato – è sì rigorosa, ma non rigida, seria ma non intollerante, molteplice e non assoluta, quindi dinamica, aperta, curiosa di conoscere. Se dunque dobbiamo ammettere con Gödel che ***ignoriamo e ignoreremo*** i fondamenti ultimi dell'aritmetica, tuttavia noi ***sappiamo*** questo nostro limite, ***sappiamo*** i teoremi di incompletezza, ***sappiamo*** la risposta al decimo problema di Hilbert – e questa conoscenza ci consente una visione matematica più compiuta. Il *"puro pensiero"* e la logica non sono certo la chiave altezzosa che svela ogni enigma, ma gli strumenti indispensabili, la strada maestra per comprendere e progredire.

Per converso lo scetticismo irridente di Laudisi, o meglio di Pirandello, non è ironia fine a se stessa, sterile critica dei conformismi e delle convenzioni, ma si vena di disillusione e amarezza di fronte alla solitudine umana, all'incapacità di afferrare fin in fondo sé stessi.

Basterà il confronto di queste visioni per confermare come Hilbert e Pirandello abbiano maturato, ciascuno con la propria sensibilità, modi diversi di percepire e vivere la crisi del Novecento e approcci e metodi talora opposti; ma al tempo stesso siano state figure di straordinaria ricchezza e complessità, dedite a una ricerca incessante e appassionata – fiduciosa in un caso, disincantata nell'altro – sulla natura e sull'uomo. Al di là di conclusioni talora dissonanti, credo che proprio questa tenacia e la comune onestà di pensiero, unitamente all'ampiezza deglii orizzonti, alla sperimentazione di nuove strategie di indagine e all'originalità degli atteggiamenti, costituiscano l'eredità più viva che ambedue ci consegnano.

Riferimenti bibliografici

Abrusci, V.M. (1985), *Autofondazione della matematica. Le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica*, in (Hilbert, 1985, pp. 31-151).

Artin, E. (1997), *Algebra*, Bollati Boringhieri, Torino.

Barilli, R. (2005), *Pirandello. Una rivoluzione culturale*, Mondadori, Milano.

Bartocci, C., Betti, R., Guerraggio, A., Lucchetti, R. (a cura di) (2007), *Vite matematiche. Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles*, Springer Italia, Milano.

Boyer, C.B. (1980), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Cannarsa, P. e D'Aprile, T. (2008), *Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale*, Springer Italia, Milano.

Cantor, G. (2012), *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)*, a cura di G. Rigamonti, Mimesis, Milano.

Courant, R. e Robbins, H. (2000), *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino.

Davis, M. (2010), *Il decimo problema di Hilbert: equazioni e computabilità*, in: C. Bartocci – P. Odifreddi (a cura di), *La matematica*, Vol. IV, Einaudi, Torino, pp. 135-160.

de Finetti, B. (1931), Sul significato soggettivo della probabilità, *Fundamenta Mathematicae* 17 (1931), pp. 298-329.

de Finetti, B. (1937), Luigi Pirandello maestro di logica, *Quadrivio*, 5-12-1937, poi *Brennero*, 7-12-1937.

de Finetti, B. (1970), *Teoria delle probabilità*, Einaudi, Torino.

de Finetti, B. (1980), Probabilità, voce dell'*Enciclopedia*, Einaudi, Torino, pp. 1146-1187.

de Finetti, B.(2006), *L'invenzione della verità*, Raffaello Cortina, Milano.

Henkin, L. (1996), The discovery of my completeness proofs, *Bull. Symbolic Logic* 2 (1996), 137-158.

Hilbert, D. (1985), *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli.

Hilbert, D. (1996), *The Theory of Algebraic Number Theory. Zahlbericht*, Springer, Berlin.

Hilbert, D. (2012), *Fondamenti della Geometria*, Franco Angeli, Milano.

Hilbert, D. *Nachlass*, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, cod. Ms. D. Hilbert 600, p. 72.

Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S. (1972), *Geometria intuitiva*, Boringhieri, Torino.

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano.

Leonesi, S. e Toffalori, C. (2007), *Matematica, miracoli e paradossi. Storie di cardinali da Cantor a Gödel*, Bruno Mondadori, Milano.

Lolli, G. (2013), *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa.

Lolli, G. (2016), *Tavole, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina, Milano.

Lombardo-Radice, L. (1981), *L'infinito. Itinerari filosofici e matematici di un concetto di base*, Editori Riuniti, Roma.

Macchia, G. (2000), *Pirandello o la stanza della tortura*, Mondadori, Milano.

Marotta, M. (1998), *Luigi Pirandello*, Bruno Mondadori, Milano.

Pirandello, L. (2006), *Saggi e interventi*, Arnoldo Mondadori, Milano.

Pirandello, L. (2007), *Maschere Nude*, Arnoldo Mondadori, Milano.

Pirandello, L. (2014), *Uno, nessuno, centomila*, Einaudi, Torino.

Poincaré, H. (1997), *Scienza e metodo*, a cura di C. Bartocci, Einaudi, Torino.

Reid, C. (1970), *Hilbert*, Springer, New York.

Tarski, A. (1935), Der Wahrheitsbegriff in der formalisiert Sprachen, *Studia Philosophica* 1 (1935), pp. 261-405. Traduzione italiana: *Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati*, in: *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo da Peirce a Tarski*, a cura di F. Rivetti-Barbò, Vita e Pensiero, Milano, 1963, 391-677.

Telloni, A.I. e Toffalori, C. (2019), *La logica delle equazioni*, in: F. Morselli, G. Rosolini, C. Toffalori (a cura di), *Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini*, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana, Bologna, 2019 (in corso di stampa).

Waismann, F. (1971), *Introduzione al pensiero matematico*, Boringhieri, Torino.

Zellini, P. (1980), *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano.

Torino, 21 febbraio 2019

Le successioni di interi

Umberto Cerruti
Dipartimento di Matematica 'G. Peano' – Università di Torino

Sunto. *Viene qui proposto un breve viaggio nell'affascinante mondo delle successioni di interi. Incontreremo successioni famose come quella dei numeri primi, dei numeri di Fibonacci, delle cifre di pi greco. Faremo conoscenza anche con altre notevoli sequenze, per esempio composizioni, partizioni, ordinamenti dei razionali e loro compagne. Buon divertimento!*

1. Introduzione

1.1 *Il fondamento di tutto*

Dio creò gli interi:
tutto il resto è opera dell'uomo
Leopold Kronecker (1823-1891)

Senza dubbio alla base della Matematica ci sono i *numeri interi*, in particolare c'è la *sequenza* **N** dei numeri naturali: 1,2,3,4,5,…..
Partendo da **N** si costruiscono via via tutti gli altri numeri, **Z** (interi), **Q** (razionali), **R** (reali) e **C** (complessi).

1.2 *Che cosa viene dopo?*

Quando vediamo una successione finita di numeri, è spontaneo chiedersi: che cosa viene dopo?
Per esempio questa non è difficile

1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171 ...

Ma questa può metterci in difficoltà

1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2,...

Per non dire di questa

0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7...

2. L'Enciclopedia delle sequenze di interi

2.1 *Neil J. A. Sloane*

Neil Sloane (1939) è un matematico molto noto, autore e coautore di più di 350 pubblicazioni in molti campi della matematica, e di diversi libri, tra i quali ricordo lo splendido *Sphere-Packings, Lattices and Groups*, scritto con John Horton Conway (Conway & Sloane, 1988).
Il suo amore per le sequenze di interi ebbe inizio nel 1964 studiando l'altezza totale media di certe famiglie di alberi.
La sequenza calcolata *w(n)* di queste medie cominciava con
1, 8, 78, 944, 13800, 237432, 4708144, 105822432, ...
Iniziò da qui la sua collezione di sequenze. In seguito riuscì a trovare la forma chiusa della sequenza

$$w(n)=(n-1)!\sum_{n=0}^{n-2}\frac{n^k}{k!}$$

Questa raccolta enciclopedica divenne la passione dominante della sua vita, come egli stesso afferma fin dal titolo di una sua recente conferenza (Sloane, 2017): *Confessions of a Sequence Addict*.
Pubblicò due libri (Sloane, 1973), (Sloane & Plouffe, 1995) colmi di sequenze.
Il secondo (con Simon Plouffe) conteneva 5487 sequenze in 587 pagine!
Si rese necessario infine passare al Web, e Sloane creò OEIS:

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

2.2 *Che cosa contiene OEIS?*

L'Enciclopedia delle Sequenze di Interi contiene al momento più di 320000 successioni provenienti non soltanto dalla matematica, ma anche da fisica, chimica, biologia e tante altre discipline. Si veda per esempio all'indirizzo Web

http://oeis.org/wiki/The_multi-faceted_reach_of_the_OEIS

Le sequenze contengono spiegazioni più o meno ampie a seconda della loro importanza. Contengono collegamenti ad altre sequenze, programmi per calcolarle, riferimenti bibliografici, congetture e problemi aperti. Per molti matematici, me compreso, è uno strumento di ricerca fondamentale. Penso che per ragazzi curiosi e portati alla matematica sia un eccellente ambiente dove trovare spunti, idee e percorsi di studio.
OEIS possiede un ottimo motore di ricerca. Possiamo cercare singoli numeri, o parti finite di successioni, o nomi di sequenze, autori, keyword e altro.
Si possono vedere grafici e ascoltare le melodie generate dai numeri.

2.3 *Fibonacci*

Scrivendo *keyword:nice* ci viene restituito un elenco che contiene quasi 7000 sequenze! In questo immenso giardino abbonda la bellezza!
Se inseriamo *keyword:core* ci sono offerte circa 180 successioni, che costituiscono il nucleo fondante della OEIS.
Al secondo posto (http://oeis.org/A000045) appare la *successione di Fibonacci* (F_n), definita da

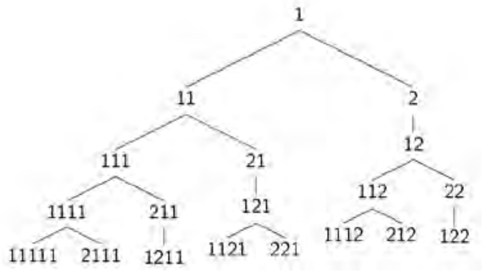
$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Leonardo Pisano detto il *Fibonacci*, c.1170 - c.1235.

2.4 *L'Albero di Fibonacci*

Diciamo *2-composizione* di $n \geq 1$ una k-upla ordinata di interi positivi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tali che $a_i = 1, 2$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$.

Vediamo qui sotto l'albero delle composizioni.



Se una 2-composizione inizia con 1 ha due figli, il primo si ottiene aggiungendo un 1 a sinistra, il secondo sostituendo 2 al primo 1. Se inizia con 2 ha un solo figlio ottenuto preponendo un 1.

2.5 *Il numero delle 2-composizioni*

Diciamo f_n il numero delle 2-composizioni di n. Numeriamo i livelli dell'albero partendo da 1.
Dimostriamo ora, per induzione, che nell'albero di Fibonacci appaiono tutte le 2-composizioni. In particolare proviamo che il livello n contiene tutte le 2-composizioni di n.
Questo è vero per i livelli 1 e 2. Supponiamolo vero per tutti i livelli fino a n. Se s è una 2-composizione di n+1 ci sono due possibilità, che inizi con 1 o con 2. Nel primo caso tagliando l'uno iniziale si ha una composizione s' che sta al livello n ed è genitore di s. Nel secondo caso, $s = 2t$ ed è figlio di $1t$ al piano n che proviene da t al piano n-1. Questo prova che al piano n+1 ci sono tutte le 2-composizioni di n+1.
Inoltre abbiamo dimostrato che $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ per ogni $n \geq 3$.
Calcolando gli f_n a ritroso si trova $f_0 = 1$, $f_{-1} = 0$. Se diciamo F_n l'n-esimo numero di Fibonacci, si ha $F_n = f_{n-1}$.

2.6 *La Matrice di Fibonacci*

I numeri di Fibonacci appaiono ovunque, in ogni campo della matematica, in biologia, in fisica e persino in alcune tecniche finanziarie!
Una connessione estremamente utile con l'algebra lineare è data dalla *matrice di Fibonacci M.*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Esercizio - Dimostrare per induzione la (1).

Denotiamo con *det* (*A*) il determinante di una matrice *A*.
Poiché *det* (*M*) = -1, si ha *det* (M^n) = $(-1)^n$ e quindi

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n \tag{2}$$

2.7 *Fibonacci e la Sezione Aurea*

La *sezione aurea* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è zero del polinomio $x^2 - x - 1$ e pertanto

$$\Phi^2 = 1+\Phi \Rightarrow \Phi = \frac{1+\Phi}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{1+2\Phi}{1+\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{3\Phi+2}{2\Phi+1} \Rightarrow \Phi = \frac{5\Phi+3}{3\Phi+2}$$

Si vede che per ogni n

$$\Phi = \frac{F_n\Phi + F_{n-1}}{F_{n-1}\Phi + F_{n-2}} \tag{3}$$

Esercizio - Dimostrare per induzione la (3).

Con un semplice calcolo, utilizzando la (3) e la (2) si ha

$$\left|\Phi - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \left|\frac{F_n\Phi + F_{n-1}}{F_{n-1}\Phi + F_{n-2}} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \left|\frac{-F_{n-2}F_n + F_{n-1}^2}{F_{n-1}(F_{n-1}\Phi + F_{n-2})}\right| =$$

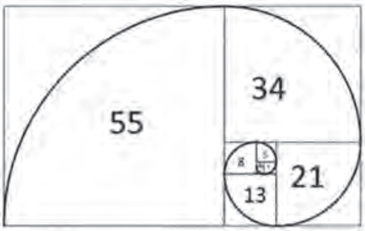
$$= \frac{1}{F_{n-1}(F_{n-1}\Phi + F_{n-2})} < \frac{1}{F_{n-1}F_n} < \frac{1}{F_{n-1}^2}$$

2.8 *La Sezione Aurea*

Dalla formula precedente si ricava subito che:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

La convergenza è molto veloce, perché F_n cresce in modo esponenziale, infatti è l'intero più vicino a $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$.
Nella spirale aurea le volute sono contenute in un rettangolo i cui lati hanno lunghezza F_n, F_{n+1}. Il rapporto tra i lati converge quindi alla sezione aurea.



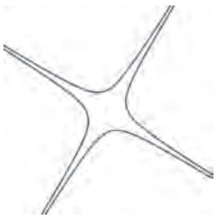
2.9 *La curva di Fibonacci*

Se nella (2) sostituiamo a F_{n+1} la somma $F_{n-1} + F_n$ troviamo

$$F_{n-1}^{\ 2} + F_{n-1}F_n - F_n^{\ 2} = (-1)^n$$

Pertanto i punti di coordinate intere (F_{n-1}, F_n) stanno tutti sulla curva

Inoltre essi sono (a parte il segno) i soli punti interi sulla curva.



Questo fatto è stato utilizzato da Matiyasevich nel corso della dimostrazione della indecidibilità del decimo problema di Hilbert (vd. Jones, 1988).

3. I numeri primi

3.1 *Intervalli tra i primi*

Al primo posto tra le successioni *core* (http://oeis.org/A000040) c'è la sequenza dei *numeri primi*:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,……
Si tratta probabilmente della sequenza di interi più studiata, fin dall'antichità. Non tratteremo qui della distribuzione dei primi nella sequenza dei naturali, ma li vedremo come una sequenza a sé stante.
Questa successione ne genera immediatamente un'altra (http://oeis.org/A001223) quella dei *gap*, le distanze tra due primi consecutivi.
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, ...
La congettura dei *primi gemelli* si può esprimere così: "Esistono infiniti gap uguali a 2".

3.2 *Zhang*

Moltissimi e profondi studi sono stati fatti sui primi gemelli e sui gap (si vedano per esempio Rezgui, 2017 e Granville, 2015).
Rimangono tante zone oscure, ma notevoli passi avanti sono stati fatti, e ci sono alcune eccitanti novità, che si possono enunciare senza troppi preliminari.
Cominciamo da Yitang Zhang. Nato a Shangai nel 1955, attualmente cittadino americano, professore presso l'Università di Santa Barbara (California).

3.3 *Il grande Teorema*

Poniamo

$$H_m = \liminf_{n \to \infty} (p_{n+m} - p_n)$$

La congettura dei primi gemelli equivale a H_1=2.
Il 17 Aprile del 2013 Zhang enunciò il seguente risultato

$$H_1 < 7 \times 10^7$$

Il Teorema di Zhang venne subito pubblicato sulla prestigiosa rivista *Annals of Mathematics* (Zhang, 2014).
A prima vista non sembrerebbe così notevole, ma si tratta di un progresso che potremmo dire, senza esagerare, infinito.
Infatti prima, incondizionatamente, ovvero, senza ricorrere a ipotesi non dimostrate, a destra del < si poteva mettere soltanto ∞.
Solo accettando la congettura (non provata) di Elliott-Halberstam si poteva dimostrare che $H_1 \leq 16$.

3.4 *L'opera collettiva*

Nel 2007 Timothy Gowers, un grande matematico inglese (medaglia Field) che lavora a Cambridge, propose un innovativo (per i matematici) metodo di ricerca: mettere insieme pubblicamente i risultati derivanti dalla collaborazione di tanti matematici, su un certo tema proposto.
Il sito che raccoglie proposte e risultati si chiama **Polymath** (vedere all'indirizzo *https://polymathprojects.org*).
L'idea ebbe successo, tanto che alcune riflessioni di Gowers e Michael Nielsen sull'argomento vennero pubblicate su Nature in una nota dal titolo "*Massively collaborative mathematics*".
Quando Gowers vide il risultato di Zhang mise in moto un progetto Polymath (Polymath8) (vedi Granville, 2015).

3.5 *I risultati*

Il limite superiore cominciò a calare, e dopo tre mesi si sapeva che $H_1 \leq 4680$.
A questo punto intervenne James Maynard, che dimostrò, con metodi diversi, che $H_1 \leq 600$.
Inoltre Maynard provò che, per ogni m, H_m è limitato superiormente da una quantità finita. Questo significa che se, per esempio, m=10 ^{6}, esiste un intero N tale che, se fabbrichiamo una finestra di lunghezza N, e la facciamo scorrere lungo la sequenza dei primi, infinite volte vedremo 10^6 (almeno) primi!
Venne allora attivato il progetto Polymath8b. Dopo otto mesi di duro lavoro si arrivò a questi risultati:
incondizionatamente

$$H_1 \leq 246;$$

ettando la congettura di Elliott-Halberstam

$$H_1 \leq 6$$

4. Idiosincrasie dei numeri primi

4.1 *Distribuzione dei primi modulo q*

Ricordiamo che la funzione $\pi(x)$ conta il numero dei primi $\leq x$.
Diciamo $\pi(x,a,q)$ il numero dei primi $\leq x$. che sono congrui ad a modulo q, dove q è un intero > 2 detto *modulo*, ed a è coprimo con q.
$\pi(x,a,q)$ conta il numero dei primi nella successione aritmetica

$$S(a,q) = a,\ a+q,\ a+2q,\dots,\ a+kq,..$$

con $a+kq \leq x$.
Dirichlet dimostrò che in $S(a,q)$ ci sono sempre infiniti primi. Inoltre essi si distribuiscono (asintoticamente) in maniera uniforme nelle $\varphi(q)$ classi coprime con q. Cioè

$$\text{per ogni } a \text{ tali che } MCD(a,q)=1 \qquad \pi(x,a,q) \sim \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}$$

Con $f(x) \sim g(x)$ intendiamo dire che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Prendiamo per esempio il modulo q=3. Ci aspettiamo di trovare mediamente, nei primi n numeri primi, circa $n/2$ primi congrui a 1 modulo 3 e $n/2$ primi congrui a 2 modulo 3. In effetti è così.
Se consideriamo x_0 tale che $\pi(x_0) = 10^7$ abbiamo

$$\pi(x_0,1,3) = 4999504 \qquad \pi(x_0,2,3) = 5000495$$

(si noti che la somma dà 9999999 perché bisogna levare 3).
Se q=10, abbiamo 4 classi coprime con 10: a=1,3,7,9. Facendo i calcoli otteniamo

$$\pi(x_0,1,10) = 2499755 \qquad \pi(x_0,3,10) = 2500209$$
$$\pi(x_0,7,10) = 2500283 \qquad \pi(x_0,9,10) = 2499751$$

(la somma dà 9999998 perché bisogna levare 2 e 5).

4.2 *Repulsione tra primi*

Nel 2016 Robert J. Lemke Oliver e Kannan Soundararajan pubblicarono un articolo sui *Proceedings of the National Academy of Sciences* statunitense (Lemke Oliver & Soundararajan, 2016), nel quale osservavano una inattesa distorsione nella distribuzione delle coppie di primi consecutivi.
I due autori considerarono *coppie di classi*. Per esempio se q=3 ci sono 4 coppie di classi (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). In generale ci saranno $\varphi(q)^2$ coppie di classi (consideriamo soltanto le coppie ammissibili, cioè quelle formate da due interi coprimi con q).
Diciamo $\pi\,(x,q,\,(a,b))$ il numero delle coppie di primi consecutivi (p_n, p_{n+1}) con $p_n \leq x$ tali che

$$p_n \sim a \mod q, \qquad p_{n+1} \sim b \mod q.$$

Ci aspetteremmo che, per ogni coppia ammissibile (a,b)

$$\pi\,(x,q,\,(a,b)) \sim \frac{\pi(x)}{\varphi(q)^2}$$

Se però poniamo q=3, consideriamo come sopra i primi 10^7 numeri primi e calcoliamo, troviamo

$$\pi\,(x_0,3,(1,1)) = 2203295 \qquad \pi\,(x_0,3,(1,2)) = 2796209$$
$$\pi\,(x_0,3,(2,1)) = 2796210 \qquad \pi\,(x_0,3,(2,2)) = 2204284.$$

Questa gigantesca distorsione si manifesta anche per gli altri moduli. Questa è una tavola mostrata nell'articolo, per q=10.

a	b	$\pi(x_0;10,(a,b))$	a	b	$\pi(x_0;10,(a,b))$
1	1	4,623,042	7	1	6,373,981
	3	7,429,438		3	6,755,195
	7	7,504,612		7	4,439,355
	9	5,442,345		9	7,431,870
3	1	6,010,982	9	1	7,991,431
	3	4,442,562		3	6,372,941
	7	7,043,695		7	6,012,739
	9	7,502,896		9	4,622,916

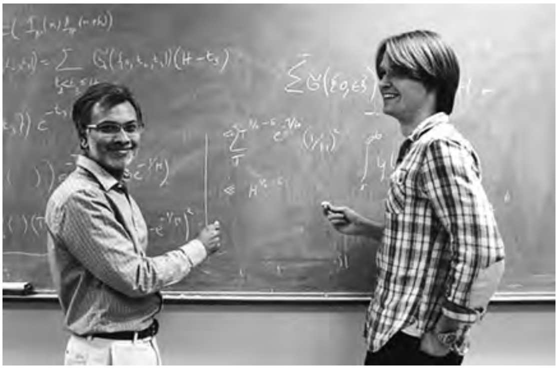
4.3 *L'origine della ricerca*

È una forma di repulsione, i numeri primi che terminano con una certa cifra preferiscono essere seguiti da un compagno con diversa ultima cifra!

La notizia di questo strano fenomeno si diffuse rapidamente. Le prime reazioni degli esperti furono di stupore e addirittura, di incredulità (Klarreich, 2016).
Andrew Granville: *"Da tanto tempo studiamo i numeri primi, e non ce ne siamo mai accorti, è pazzesco!"*
Ken Ono: *"Quando me lo dissero, pensai che certamente c'era un errore nel programma che utilizzavano."*
Ma come è venuta in mente ai due autori l'idea di cercare questa distorsione? Si tratta di una storia veramente interessante.
Qualche tempo prima Soundararajan fu colpito da una particolare "*anomalia*" probabilistica, descritta in una conferenza di Tadashi Tokieda.
Molti risultati, veri e dimostrati, nella teoria della probabilità sono contro intuitivi, e sembrano falsi. Nella sua conferenza, tra le altre cose, Tokieda parlò di questo gioco tra Alice e Bob.
Alice e Bob lanciano una moneta. Identifichiamo le due facce con 0 e 1. Per Alice la regola è questa: vince appena escono, in due tiri consecutivi, 01. Bob vince quando escono 11.
Se facessero soltanto due tiri a testa avrebbero la stessa probabilità di vincere. Invece il gioco consiste nel continuare a lanciare la moneta fino a che si verifica l'evento atteso.
Per esempio Alice lancia la moneta e dopo 6 tiri ottiene 111001, e si ferma. Ha vinto il suo premio. Bob dopo 5 tiri ottiene 01011 e vince.
Intuitivamente viene da pensare che la media dei tiri da fare per arrivare a una vincita sia la stessa per Alice e Bob. Invece Alice vincerà in media ogni 4 tiri e Bob ogni 6.
Questa apparente anomalia colpì l'immaginazione di Soundararajan, che si chiese se un fenomeno simile potesse avere luogo considerando la sequenza dei numeri primi invece dei lanci di moneta.
Consideriamo la successione dei primi >3 modulo 3. Essi finiscono con 1 o 2. Viene scelto un punto iniziale a caso *n* e si percorre la sequenza

$$p_n \mod 3, \qquad p_{n+1} \mod 3, \qquad p_{n+2} \mod 3.$$

Alice vince non appena apparirà la coppia 12 e Bob vince al comparire di 22. È un gioco alla pari?

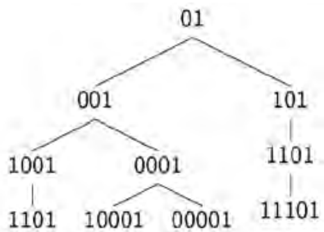


Alcuni esperimenti convinsero Soundararajan che la distorsione esisteva veramente, e ne parlò con il suo allievo post doc Oliver, che ne fu entusiasta. La ricerca iniziò e ne abbiamo visto i risultati.

5 Il gioco di Alice e Bob

5.1 *L'Albero di Alice*

Analizziamo, con un albero, il gioco nel caso che termini con uno 0 seguito da un 1. Per ogni $n \geq 2$ (n è il numero dei tiri), al livello n elenchiamo tutte le n-uple che terminano con 01 e tali che la sequenza 01 *non è mai apparsa prima*. Questi sono i casi favorevoli. L'albero inizia dal livello 2 (due tiri).

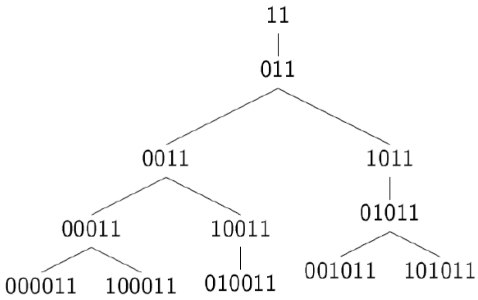


Esercizio - Dimostrare che al livello n dell'albero ci sono n-1 nodi.

Questo significa che la probabilità di terminare dopo n tiri è $\dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

5.2 *L'Albero di Bob*

Esaminiamo allo stesso modo il caso nel quale il gioco termina se si estraggono due 1 consecutivi. Anche in questo caso l'albero inizia dal livello 2.



Esercizio - Dimostrare che al livello n dell'albero il numero dei nodi è la somma del numero dei nodi ai livelli n-1 e n-2. In altri termini al livello n il numero dei nodi è il numero di Fibonacci F_{n-1} .

Questo significa che la probabilità di terminare dopo n tiri è $\dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

5.3 *L'attesa media di Alice*

Per Alice la probabilità di vincere dopo n lanci è $\dfrac{n-1}{2^n}$.

Dunque per vincere dovrà fare in media $\sum_{n=2}^{\infty} n\dfrac{n-1}{2^n}$ lanci.

Possiamo facilmente calcolare le prime approssimazioni, per n=9,10,11,12,13,14,15:

3.92285, 3.95508, 3.97412, 3.98523, 3.99164, 3.9953, 3.99738

Si dimostra (Ram & Bhusham, 2016) che in effetti $\sum_{n=2}^{\infty} n\dfrac{n-1}{2^n} = 4$

Esercizio - Scrivere, nel linguaggio preferito, un programma che calcoli sperimentalmente, lanciando una moneta virtuale, l'attesa media per una vincita di Alice.

5.4 *L'attesa media di Bob*

Per Bob la probabilità di vincere dopo n lanci è $\dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

Dunque per vincere dovrà fare in media $\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{F_{n-1}}{2^n}$ lanci.

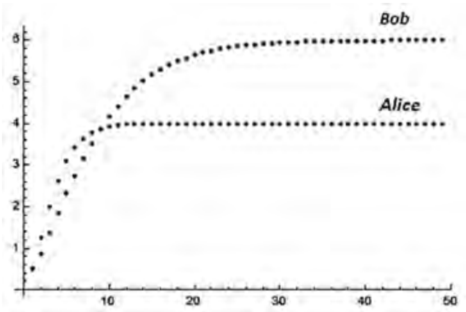
La convergenza è più lenta; calcoliamo le prime approssimazioni, per n=29,30,31,32,33,34:

5.91415, 5.92852, 5.94053, 5.95056, 5.95893, 5.9659

Anche in questo caso si dimostra (Ram & Bhushan, 2016) che in effetti risulta $\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{F_{n-1}}{2^n} = 6.$

Esercizio - Scrivere, nel linguaggio preferito, un programma che calcoli sperimentalmente, lanciando una moneta virtuale, l'attesa media per una vincita di Bob.

Queste curve illustrano le approssimazioni alle attese medie di Alice e Bob.



6 Altre sequenze

6.1 *Il Minimo Comune Multiplo*

Consideriamo la sequenza formata da $d(n)$=MCM(1,2,3,...,n)

1, 2, 6, 12, 60, 60, 420, 840, 2520, 2520, 27720, 27720...

Attraverso una analisi elementare ma assai ingegnosa di questa sequenza M. Nair dimostra (Nair, 1982) che per ogni $n \geq 7$

$$d(n) \geq 2^n \tag{4}$$

Se diciamo $e(p,n)$ il più grande esponente tale che $p^{e(p,n)} \leq n$, con p primo, si ha ovviamente che

$$d(n) = \prod_{p^{e(p,n)} \leq n} p^{e(p,n)} \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) otteniamo

$$2^n \leq d(n) = \prod_{p^{e(p,n)} \leq n} p^{e(p,n)} \leq \prod_{\pi(n) volte} n = n^{\pi(n)} \tag{6}$$

6.2 *Ci sono tanti primi!*

Leggendo la (6), abbiamo dunque

$$2^n \leq n^{\pi(n)}$$

Prendendo da entrambi i lati il logaritmo (in qualsiasi base b) si ha

$$n \log_b(2) \leq \pi(n) \log_b(n)$$

e infine

$$\pi(n) \geq \log_b(2) \frac{n}{\log_b(n)}.$$

Da questa diseguaglianza, ottenuta in modo così semplice, possiamo vedere che i numeri primi sono davvero tanti! Prendiamo b=2. Abbiamo, per esempio, se n=2^{100}:

$$\pi(2^{100}) \geq \frac{2^{100}}{100} > 2^{93}.$$

Le successioni ($d(n)$) e ($\pi(n)$) sono le A003418 e A000720 in OEIS.

6.3 *Stern Brocot*

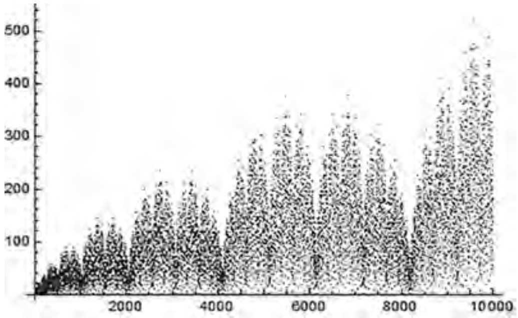
Ci siamo chiesti all'inizio quale fosse il seguito della

0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, …

Se la inseriamo nel motore di ricerca della OEIS troviamo la A002487, la famosissima sequenza di Stern Brocot, che può essere definita ricorsivamente così:

$$s_0=0, \quad s_1=1, \quad s_{2n}=s_n\,, \quad s_{2n+1}=s_n+s_{n+1}$$

Vediamo sotto i primi 10000 termini della successione di Stern Brocot:



Si può costruire la sequenza mediante questa tavola che chiamiamo *T:*

0	1																1
1	1								2								1
2	1				3				2				3				1
3	1		4		3		5		2		5		3		4		1
4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1
	.	.	.		.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.

Ogni riga di T si ottiene dalla precedente inserendo tra due numeri la loro somma.
Allineando una dopo l'altra le righe di T si ottiene la sequenza di Stern Brocot $s(n)$. Nella riga n di T ci sono 2^n+1 interi, e la loro somma è 3^n+1 .
La proprietà più importante è che una coppia (a,b) di interi coprimi appare (come coppia di termini consecutivi) una e una sola volta in T.

6.4 *Ordinare i razionali*

Da questo si può provare una incredibile proprietà della sequenza di Stern Brocot: nella successione

$$\left(\frac{s_n}{s_{n+1}}\right) \text{ con } n\geq 1,$$

ogni numero razionale positivo appare una e una sola volta!

$$1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},3,\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},4,\frac{1}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{3},\frac{3}{8},\ldots$$

È un **ordinamento dei razionali** (vedi Calkin & Wilf, 1999).
I numeri di Fibonacci occupano posizioni particolari. Si dimostra che nella successione $s(2^n), \ldots, s(2^{n+1})$, che inizia e termina con 1, l'intero più grande è F_{n+2}. Per esempio, se n=4 allora F_6=8 è il massimo nella sequenza

1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1

Esercizio - Calcolare in forma chiusa le posizioni degli F_n nella successione $s(2^n),\ldots,s(2^{n+1})$.

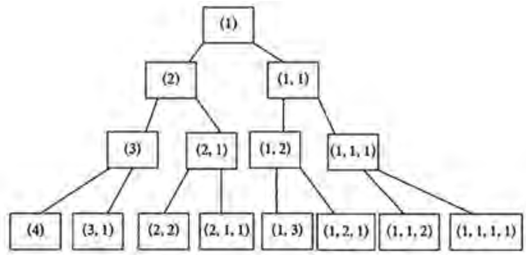
6.5 *Partizioni degli interi*

Abbiamo visto le 2-composizioni. In generale una *composizione* di n è una stringa *ordinata* di interi positivi la cui somma è n.
Le partizioni di n sono come le composizioni, ma non conta l'ordine. Per esempio (3,2,5) e (5,3,2) sono la stessa partizione di 10, ma rappresentano composizioni differenti.
Definiamo *partizione* di n una stringa v di interi $v_i \geq 1$, detti *parti*

$$v=(v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \ldots. \geq v_k) \text{ tali che } \sum_{h=1}^{k} v_h = n.$$

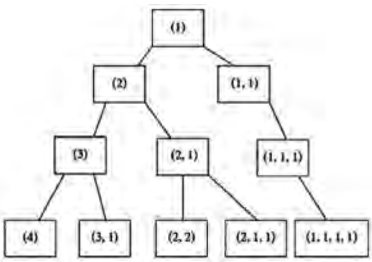
Diciamo $p(n)$ il numero delle partizioni di n.
Per esempio $p(4)$=5, perché le partizioni di 4 sono {4}, {3,1}, {2,2}, {2,1,1}, {1,1,1,1}.
La sequenza delle partizioni è la A000041 in OEIS
1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627,...
Anche l'insieme delle partizioni si può generare con un albero.
Vediamo prima l'albero delle composizioni.

6.6 *L'albero delle Composizioni*



L'albero inizia dal livello 1 che contiene l'unica composizione di 1. Al livello n contiene tutte le 2^{n-1} composizioni di n.
La regola è questa: ogni composizione ha due figli, il primo generato sommando 1 all'ultimo termine, e il secondo aggiungendo un 1 a destra.

6.7 *L'albero delle Partizioni*



L'albero inizia dal livello 1 che contiene l'unica partizione di 1. Al livello n contiene tutte le $p(n)$ partizioni di n (Abrate et al., 2013).
La regola è questa: se la partizione v ha lunghezza almeno 2 e termina con due interi uguali ha un solo figlio, che si ottiene aggiungendo un 1 a destra. In tutti gli altri casi ha due figli, il primo generato sommando 1 all'ultimo termine, e il secondo aggiungendo un 1 a destra.

6.8 *Una identità di Eulero*

Il grande Eulero, il padre di noi tutti, lavorò molto su $p(n)$.
Tra l'altro dimostrò che detto $p_o(n)$ il numero delle partizioni di n in parti dispari, e detto $p_d(n)$ il numero delle partizioni di n in parti tutte diverse, si

ha sempre $p_o(n)=p_d(n)$, Vediamo una semplice dimostrazione di questo fatto, stabilendo una bijezione tra l'insieme *O(n)* delle partizioni in parti dispari e l'insieme *D(n)* delle partizioni in parti diverse.
Consideriamo v in *O(n)*. Diciamo $t(1)$ il numero delle parti di v uguali a 1, con *t(3)* il numero delle parti di v uguali a 3 e così via. Diciamo $B(k)$ la scrittura in base 2 di *t(k)*. Per esempio se ci sono 6 parti uguali a 5, cioè $t(5)=6$, allora avremo $B(5)=2^2+2$.
Si ha $n=B(1)1+B(3)3+B(5)5+\ldots$. Ovviamente la somma è finita e ci possono essere certi $B(k)=0$, che non scriviamo. Ora semplicemente sostituiamo a ogni $B(i)$ la sua espressione e otteniamo n scritto come somma di interi tutti diversi, ovvero determiniamo un unico elemento in *D(n)*, immagine di v.
Si noti che gli addendi ottenuti sostituendo a ogni $B(i)$ la sua espressione sono veramente tutti diversi, perché un intero si scrive in modo unico come prodotto di una potenza di 2 per un numero dispari. Nel nostro caso gli addendi differiscono o per la parte dispari o per la potenza di 2.
Per tornare indietro è sufficiente prendere le parti pari e dimezzarle finché basta.
Facciamo un esempio. Prendiamo $v=(9,9,9,5,5,5,5,5,5,1,1,1)\in O(60)$.
Si ha $t(1)=3$, $t(5)=6$, $t(9)=3$. Conseguentemente $B(1)=1+2$, $B(5)=2+4$, $B(9)=1+2$.
Quindi
$n = 60 = B(1)1+B(5)5+B(9)9 = (1+2)1+(2+4)5+(1+2)9 = 1+2+10+20+9+18$.
Riordinando abbiamo la partizione $(20,18,10,9,2,1)\in D(60)$.
Viceversa prendiamo $w=(20,7,6,3,1)\in D(37)$. Dobbiamo soltanto ridurre le parti pari, dimezzandole: $20=10+10=5+5+5+5$, $6=3+3$. Quindi, riordinando, w diventa $(7,5,5,5,5,3,3,3,1)\in O(37)$.

7 Sequenze di cifre

7.1 *I numeri sono sequenze*

Tutti ormai siamo abituati a scrivere i numeri interi in almeno due basi: 10 e 2. Ad esempio:

$$163 = 1\times10^2 + 6\times10^1 + 3\times10^0\,;$$

in binario: $163= 10100011 = 2^7+2^5+2^1+2^0$.
Ma che come scrivere un numero non intero in base b?
Il metodo, sempre valido, si comprende da un esempio: calcoliamo le prime cifre di $\alpha=\sqrt{11}$ in base 3.

Prima di tutto occorre una approssimazione di α in base 10

$$\alpha=3{,}31662...$$

La parte intera 3 si trasforma in base $3{:}\ 3 \mapsto 10$. Quindi α in base 3 sarà 10, ...
Pensiamo che dobbiamo scrivere α-3 nella forma

$$\alpha\text{-}3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$$

dove le c_i sono le cifre dopo la virgola di α in base 3.

Domanda: $\frac{1}{3} < \alpha\text{-}3$? No. Quindi $c_1=0$.

Domanda: $\frac{1}{9} < \alpha\text{-}3$? Sì. Quindi $c_1 \geq 1$.

Domanda: $\frac{2}{9} < \alpha\text{-}3$? Sì. Poiché le cifre possibili sono soltanto 0,1,2, certamente $c_2=2$.
A questo punto sappiamo che α in base 3 inizia con 10,02..., cioè

$$\alpha\text{-}3= \frac{0}{3}+\frac{2}{9}+....+$$

Calcoliamo ancora una cifra, continuando la serie delle domande.

Domanda: $\frac{1}{27} < \alpha - 3 - \frac{2}{9}$? Sì. Quindi $c_3 \geq 1$. Domanda: $\frac{2}{27} < \alpha - 3 - \frac{2}{9}$? Sì. Dunque $c_3=2$ e $\alpha=\sqrt{11}$ in base 3 inizia con 10,022...
Poiché è irrazionale il processo continua all'infinito. E non diventerà mai periodico, vista la caratterizzazione dei numeri razionali:
Caratterizzazione dei numeri razionali
Un numero $\alpha\in\mathbf{R}$ è razionale se e solo se la sua espansione posizionale (su qualsiasi base) è finita o periodica.
Dato che abbiamo a disposizione, su questa terra, soltanto un ammontare di tempo finito, non potremo mai conoscere completamente un numero irrazionale. Possiamo soltanto denotarlo simbolicamente o esprimerlo mediante una formula, o assegnarlo mediante un algoritmo che calcoli la successione delle sue cifre.

Le successioni di cifre dei numeri irrazionali generano molti interessanti e in parte irrisolti problemi.

7.2 *Pi Greco*

Le prime 50 cifre di π-3 in base 10 sono:

14159265358979323846264338327950288419716939937510

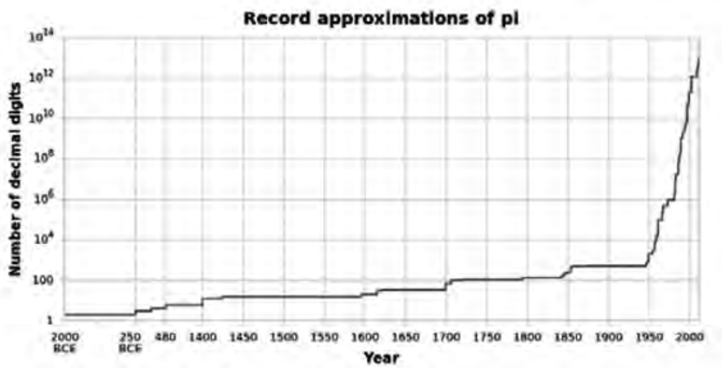
Questa sequenza di cifre è famosa e assai studiata.
Nel 2000 AC circa i Babilonesi approssimavano π con $3+\frac{1}{8}=3{,}125$, ottenendo una cifra decimale esatta.
Per avere due cifre esatte bisogna aspettare Archimede che provò

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \qquad \text{ovvero} \qquad 3.1408\ldots < \pi < 3.1428\ldots.$$

Queste cifre sono anche amate, infatti molti le imparano a memoria.
Il 14 marzo del 2017, in occasione del Pi Day, presso il Correctional Complex di Monroe (Seattle) (Caire et al., 2018), mia moglie e io abbiamo assistito a una gara di memoria sulle cifre di π. Uno dei carcerati ha recitato più di 500 cifre consecutive!

7.3 *Le cifre di Pi Greco*

In questo stesso momento ci sono diversi supercomputer impegnati nel calcolo delle cifre di π. Sono note migliaia di miliardi di cifre.



Questa immane raccolta di dati serve, tra l'altro, a tentare di dare una risposta alla domanda

Pi greco è normale?

7.4 *Numeri Normali*

Un numero irrazionale α si dice *normale* in base b se, per ogni $m \geq 1$, una qualsiasi stringa di cifre di lunghezza m appare, nella successione di cifre che esprime α in base b, con frequenza $\frac{1}{b^m}$.
La frequenza $\frac{1}{b^m}$ è proprio quella che ci aspetteremmo se la successione di cifre fosse veramente casuale.
Un numero si dice *assolutamente normale* se è normale in ogni base $b \geq 2$.
Si ritiene che tutti i numeri algebrici siano assolutamente normali. Non abbiamo però alcuna dimostrazione della normalità di *un singolo* numero algebrico per *una singola* base!
Non è nota la normalità di alcuna costante trascendente famosa (per esempio π o e).
Alcuni recenti e notevoli studi (Aragón Artacho et al., 2013; Ganz, 2014; Bailey et al., 2017) forniscono la quasi certezza del fatto che π sia normale in base 16 e che *non* sia casuale.

7.5 *Normali ma artificiali*

Si possono fabbricare numeri normali. Forse il più noto è quello di Champer-nowne, ottenuto accostando le cifre degli interi consecutivi

$$0{,}1234567891011121314151617181920\ldots$$

Questo numero è normale sulla base 10. Se lo sia su altre basi non è noto.
Sono stati ideati metodi estremamente originali per fabbricare numeri normali e assolutamente normali, a partire dagli articoli fondamentali di Copeland, Daven-port e Erdös.
È stato congetturato in (Copeland & Erdös, 1946) e provato in (Davenport & Erdös, 1946) che, se $f(x)$ è un polinomio non costante con coefficienti interi tale che per ogni $n>0$ sia $f(n)>0$, allora concatenando

$$f(1)\, f(2)\, f(3)\ldots$$

si ottiene un numero normale in base 10.

7.6 *Biblioteche di Babele*

In (Pollack & Vandehey, 2015) si dimostra la possibilità di utilizzare la composizione di alcune funzioni aritmetiche, al posto di un polinomio. Per esempio, utilizzando la funzione φ di Eulero, si ottiene il numero $\varphi(1)\ \varphi(2)\ \varphi(3)$... normale in base 10.

$$0{,}112242646410412688166188121022820121812288 30\ldots$$

In un numero normale ogni stringa finita di cifre appare infinite volte. Dunque, con una opportuna codifica, troveremo qualsiasi testo possibile.
***Ma dove sta il testo che cerchiamo*?**
Concatenando le cifre dei primi 50000 valori di $\varphi\ (n)$ si ottiene una lista di 228422 cifre decimali.
Il testo 12345 appare per la prima volta nella posizione 168607. In questa infinita biblioteca i libri sono difficili da trovare!

7.7 *Infinite biblioteche*

Il numero di Champernowne rende fattibile la ricerca. Osserviamo intanto che il metodo usato, accostare le cifre degli interi consecutivi, restituisce numeri normali per ogni base scelta b.
Attenzione però, cambiando la base questo procedimento cambia il numero.
Se scriviamo 1,2,3,4,... in base 2: 1,10,11,100,... e li accostiamo troviamo

$$0{,}1101110010111011110001001 10\ldots$$

mentre il numero di Champernowne scritto in base 2 è

$$0{,}0011111100110101101110100 1101\ldots$$

Denotiamo con C_b il numero di Champernowne derivante dalle cifre degli interi consecutivi scritti in base b.

7.8 *Trovare i numeri*

Con la frase *il numero n sta al posto m in* C_b intendiamo affermare che se $n=c_1c_2c_3\ldots\ c_k$ in base b, allora in C_b nel posto $m+j$ c'è c_{j+1}, con $j=0,1,\ldots k-1$.
Dati n e C_b vogliamo determinare un posto, che chiamiamo $\rho_b(n)$, nel quale siamo certi che stia n.
Poniamo $v_b(n)$ il numero delle cifre di n in base b. Trattiamo il caso $b=10$.

Poniamo

$$\theta_{10}(n)=\sum_{k=1}^{\nu_{10}(n)-1} 9k10^{k-1}+1.$$

Soluzione per la base 10:

$$\rho_{10}(n) = \theta_{10}(n) + \nu_{10}(n)\,(n - 10^{\nu_{10}(n)-1}).$$

Calcoliamo $\rho_{10}(2019)$. Abbiamo $\nu_{10}(2019)=4$. Quindi $\theta_{10}(2019)=9+18\times10+27 \times 100+1=2890$. Infine $\rho_{10}(2019) = 2890+4(2019-1000) = 6966$.

7.9 *Esercizi e problemi*

Esercizio - Scrivere una $\rho_b(n)$ che restituisca in forma chiusa una posizione di n in C_b , come fa la ρ_{10} .

Esercizio - Scrivere una $\tau_b(n,m)$ che restituisca m posizioni (in forma chiusa) di n in C_b ,

Generalmente le posizioni che si trovano non corrispondono all'ordine nel quale n appare in C_b.
Particolarmente interessante è il confronto tra la *prima* posizione di n in C_b che denotiamo con $\gamma_b(n)$ e la posizione $\rho_b(n)$.
Cosideriamo per esempio n=54321. Le $\gamma_b(54321)$ con $2 \le b \le 10$ sono

134481, 7275, 6387, 165894, 324261, 1828, 29270, 75104, 66051.

Le posizioni $\rho_b(54321)$ con $2 \le b \le 10$ sono invece

803602, 513687, 412724, 360717, 324261, 306319, 288478, 264225, 260495.

Problema - Si trovi un algoritmo, migliore delle ricerca esaustiva, che determini $\gamma_b(n)$.

È notevole la successione delle prime posizioni delle potenze b^n, con n=1,2,... in C_b.
Sia $\gamma_b(b^n)$ la prima posizione di b^n, in C_b.

Problema - Dimostrare che $\gamma_b(b^n) = (n-\frac{1}{b-1})b^n+\frac{b}{b-1}$

Prendiamo b=10. Allora abbiamo $\gamma_{10}(10^n) = (n-\frac{1}{9})10^n+\frac{10}{9}$

Prendiamo b=2. La sequenza $\gamma_2(2^n) = (n-1)2^n + 2$ con $1 \leq n \leq 12$ è

$$2, 6, 18, 50, 130, 322, 770, 1794, 4098, 9218, 20482, 45058$$

Se dividiamo per 2 e sostituiamo n+1 a n, otteniamo la successione c(n)=n 2^n+1:

$$3, 9, 25, 65, 161, 385, 897, 2049, 4609, 10241, 22529,...$$

c(n) non è una sequenza qualsiasi. È la successione dei numeri di Cullen A002064.
Questi numeri, introdotti da James Cullen nel 1905 sono quasi sempre composti.
Esiste per essi, data lo loro forma particolare, un algoritmo assai veloce per determinare, con certezza, se sono composti (per test e criteri di primalità si vedano (Caire & Cerruti. 2006 e 2007).
Si prova che c(n) è primo per n=1, 141, 4713, 5795, 6611, 18496, 32292, ... (è la A005849).
Il più grande primo di Cullen noto (2009) è 6678812^{667881}+1 che possiede ben 2.010.852 cifre!
Problemi aperti - Esistono infiniti primi di Cullen? Esiste un primo p tale che c(p) sia primo?

8 Conclusioni

Abbiamo soltanto sfiorato l'argomento.
Non abbiamo nemmeno citato sequenze che provengono dalla teoria dei giochi, dalla fisica, dalla chimica, dall'informatica, dagli sviluppi in serie, dalle frazioni continue, dagli automi cellulari, dalle sequenze di numeri razionali, le sequenze autogeneranti e tante altre.
Del resto, anche disponendo di un tempo infinito, non sarebbe possibile elencare tutte le sequenze, perché il loro insieme non è numerabile.

Soltanto Dio conosce tutte le sequenze!

Riferimenti bibliografici

Abrate, M., Barbero, S., Cerruti, U., Murru, N. (2013). Construction and Composition of Rooted Trees via Descent Functions, *Hindawi Publishing Corporation, Algebra,* Vol. 2013, Article ID 543913; https://www.hindawi.com/journals/algebra/2013/543913/

Aragón Artacho, F.J., Bailey, D.H., Borwein, J.M., Borwein, P.B. (2013).

Walking on Real Numbers, *The Mathematical Intelligencer*, 35, Issue 1, 2013, pp. 42-60.

Bailey, D.H., Borwein, J.M., Brent, P.R., Reisi, M. (2017). Reproducibility in Computational Science: A Case Study: Randomness of the Digits of Pi, *Experimental Mathematics*, 26, Issue 3, 2017, pp. 298-305.

Borel, E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 27, 1909, pp. 247-271.

Caire, L. e Cerruti, U. (2006). Questo numero è primo? Sì, forse, dipende …, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 8, Vol. 9-A, 2006, pp. 449-481.

Caire, L. e Cerruti, U. (2007). Numeri primi: la certezza, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 8, Vol. 10-A, 2007, pp. 85-117.

Caire, L. e Cerruti, U., Gordon, G. (2018). Pi Day Behind Bars, Doing Mathematics in Prison*, Math Horizons*, 26, 2018, Issue 1, pp. 24-25.

Calkin, N. e Wilf, H.S. (1999). Recounting the rationals, *The American Mathematical Monthly*, 107, 4, 2000, pp. 360-363; https://www.math.upenn.edu/~wilf/website/recounting.pdf.

Conway, J.H. e Sloane, N.J.A. (1988). *Sphere Packing, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, NY.

Copeland, A.H. e Erdös, P. (1946). Note on normal numbers*, Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 1946, No 10, pp. 857-860.

Davenport, H. e Erdös, P. (1952). Note on normal decimals, *Canadian Journal of Mathematics*, 4, 1952 , pp. 58-63.

Ganz, R.E. (2014). The Decimal Expansion of π Is Nor Statistically Random, *Experimental Mathematics*, 23, 2014, Issue 2, pp. 99-104.

Granville, A. (2015). Primes in intervals of bounded length, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 2015, pp. 171-222; https://arxiv.org/pdf/1410.8400.pdf.

Jones, J.P. (1988). Diophantine Representation of Fibonacci Numbers Over Natural Numbers, *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 3, pp. 25-29.

Klarreich, E. (2016). Mathematicians Discover Prime Conspiracy, *Quanta Magazine*, March 13 2016.

Lehmer, D.H. (1929). On Stern's Diatomic Series, *The American Mathematical Monthly*, 36, No. 2, 1929, pp. 59-67.

NAIR, M. (1982). On Chebyshev-Type Inequalities for Primes, *The American Mathematical Monthly*, 89, 1982, pp. 126-129.

Lemke Oliver, R.J. e Soundararajan, K. (2016). Unexpected biased in the distribution of consecutive primes, *Proceeding of the National Academy of Science of the Unites States of America*, PNAS, 113, 2016, pp. E4446-E4454; https://www.pnas.org/content/pnas/113/31/E4446.full.pdf.

Pollack, P. e Vandehey, J. (2015). Some normal numbers generated by arithmetic functions, *Canadian Mathematical Bulletin*, 58, 2015, Issue 1, pp. 160-173.

RAM, S. e Bhushan, S. (2016). Prime Conspiracies in the Classroom, *Resonance-Journal of Science Education*, 21, 2016, pp. 621-639; https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/021/07/0621-0639.

Rezgui, H. (2017). Conjecture of twin primes (still unsolved problem in number theory) an expository essay, *Surveys in Mathematics and Applications*, 12, 2017, pp. 229-253 http://emis.ams-org/journals/AMS/v12/p12_17pdf

Sloane, N.J.A. (1973). *A handbook of Integer Sequences*, Academic Press.

Sloane, N.J.A. e Plouffe, S. (1995). *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press.

Sloane, N.J.A. (2017). *Confessions of a Sequence Addict*, AofA 2017, Princeton University.

Zhang, Y. (2014). Bounded gaps between primes, *Annals of Mathematics*, 179, 2017, Issue 3, pp. 1121-1174; http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.308.998&rep=rep1&type=pdf

Torino, 28 febbraio 2019

Il teorema dei numeri primi

Carlo Viola
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Sunto. *Il teorema dei numeri primi, nei suoi successivi miglioramenti dimostrati da Hadamard, da de la Vallée Poussin e da autori piú recenti, riguarda la distribuzione asintotica dei numeri primi nella successione dei numeri naturali e si ottiene come conseguenza delle proprietà della funzione zeta di Riemann nel campo complesso. L'ipotesi di Riemann, tuttora non dimostrata, riguardante la distribuzione degli zeri complessi della funzione zeta è equivalente ad un enunciato congetturale del teorema dei numeri primi sostanzialmente ottimale.*

La funzione enumeratrice dei primi e il logaritmo-integrale

Il teorema dei numeri primi, dimostrato da Hadamard e, indipendentemente, da de la Vallée Poussin nel 1896, e in forma piú forte da de la Vallée Poussin nel 1899, riguarda l'andamento asintotico, per $x \to +\infty$, della funzione enumeratrice

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = (\text{numero dei numeri primi } p \le x),$$

e quindi la distribuzione in media dei numeri primi nella successione dei numeri naturali. Indicando con $\mathrm{Li}\, x$ il logaritmo-integrale di x definito da

$$\mathrm{Li}\, x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \qquad (x > 1) \tag{1}$$

(nell'intorno del polo semplice $t = 1$ l'integrale va inteso come valore principale, ovvero $\int_0^x = \lim_{\delta \to 0+} \big(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^x \big)$), il teorema dei numeri primi afferma che

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}\, x \sim \frac{x}{\log x} \tag{2}$$

(Hadamard e de la Vallée Poussin, 1896), o piú precisamente che, per un'opportuna costante $C > 0$,

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O\big(x\, e^{-C\sqrt{\log x}}\big) \tag{3}$$

(de la Vallée Poussin, 1899).

Con ripetute integrazioni per parti dalla (1) si ottiene, per ogni n fissato, lo sviluppo asintotico di $\mathrm{Li}\, x$ per $x \to +\infty$:

$$\mathrm{Li}\, x \;=\; \frac{x}{\log x} + \frac{1!\, x}{\log^2 x} + \frac{2!\, x}{\log^3 x} + \cdots + \frac{(n-2)!\, x}{\log^{n-1} x} + O\Big(\frac{x}{\log^n x}\Big), \tag{4}$$

e in particolare $\mathrm{Li}\, x \sim x/\log x$. Poiché $x\, e^{-C\sqrt{\log x}} = o(x/\log^n x)$, dalle (3) e (4) segue che $\pi(x)$ ha lo stesso sviluppo asintotico di $\mathrm{Li}\, x$, cioè, per ogni n fissato,

$$\pi(x) \;=\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k-1)!\, x}{\log^k x} + O\Big(\frac{x}{\log^n x}\Big) \qquad (x \to +\infty). \tag{5}$$

Le formule asintotiche (2), (3) e (5) mostrano che il teorema dei numeri primi non è un enunciato 'rigido': posto

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + R(x),$$

il teorema va inteso come opportuna maggiorazione asintotica

$$R(x) = O(f(x)) \qquad (x \to +\infty) \tag{6}$$

per il resto $|R(x)| = |\,\pi(x) - \mathrm{Li}\, x\,|$. Vale la (6) con $f(x) = o(\mathrm{Li}\, x) = o(x/\log x)$ (Hadamard e de la Vallée Poussin), e con $f(x) = x\, e^{-C\sqrt{\log x}}$ (de la Vallée Poussin). Il miglior risultato dimostrato finora è

$$f(x) = x \exp\bigg(-\,C\,\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\bigg) \tag{7}$$

(I. M. Vinogradov e Korobov indipendentemente, 1958; vedi [4], Corollary 8.30). L'ipotesi di Riemann, riguardante la distribuzione degli zeri della funzione zeta (vedi piú avanti) e finora non dimostrata, è equivalente alla stima (6) con

$$f(x) = x^{1/2} \log x.$$

L'identità di Eulero

Negli *Elementi* (libro IX, prop. 20) Euclide dimostra che, dati n numeri primi distinti $p_1, \ldots, p_n$, esiste un numero primo p diverso da $p_1, \ldots, p_n$: basta prendere per p un qualunque divisore primo di $p_1 \cdots p_n + 1$. Se p fosse uguale ad uno fra $p_1, \ldots, p_n$ sarebbe un divisore primo di

$$(p_1 \cdots p_n + 1) - p_1 \cdots p_n = 1,$$

assurdo. Dunque esistono infiniti numeri primi (Euclide esemplifica il suo ragionamento nel caso $n = 3$, ma osserva che esso vale in generale).

Se si eccettua il teorema di Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi, nell'antichità classica e in seguito fino al XVIII secolo la teoria dei numeri ignora la distribuzione dei numeri primi e studia principalmente la risolubilità di equazioni diofantee, cioè la ricerca di soluzioni intere o razionali di equazioni algebriche in piú incognite a coefficienti interi. Al Settecento si possono far risalire i primi studi sulla distribuzione in media dei numeri primi. Il primo risultato in questo àmbito è l'identità di Eulero (1737):

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad (s > 1), \tag{8}$$

dove p percorre i numeri primi e n gli interi positivi.[1] L'identità di Eulero si può considerare un equivalente analitico del teorema della fattorizzazione unica di ogni intero positivo n come prodotto di potenze di primi distinti, e si dimostra sviluppando in serie geometrica

$$(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} p^{-hs}$$

e moltiplicando le serie cosí ottenute al variare di p sui numeri primi. Dimostriamo una forma un po' piú generale della (8), come segue:

Proposizione (identità di Eulero). *Sia f una funzione aritmetica, cioè un'applicazione $f : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{C}$, tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Se f è moltiplicativa, cioè $f(1) = 1$ e $f(mn) = f(m)f(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}^\times$ primi fra loro, allora*

$$\prod_p \sum_{h=0}^{\infty} f(p^h) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Se f è completamente moltiplicativa, cioè $f(1) = 1$ e $f(mn) = f(m)f(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}^\times$, allora

$$\prod_p (1 - f(p))^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \tag{9}$$

Dimostrazione. Per ogni primo p, la serie $\sum_{h=0}^{\infty} f(p^h)$ è assolutamente convergente per l'ipotesi $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Dunque, detto N un intero positivo e $p_1, \dots, p_k$

[1] Qui e nel seguito, una potenza α^β con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, e con $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (non necessariamente $\beta \in \mathbb{R}$), si intende definita da $\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha)$, dove $\log \alpha$ è il logaritmo elementare (reale) di α.

i primi $\le N$, si ha

$$\prod_{p\le N}\sum_{h=0}^{\infty} f(p^h) = \prod_{j=1}^{k}\sum_{h=0}^{\infty} f(p_j^h) = \sum_{(h_1,\dots,h_k)\in\mathbb{N}^k} f(p_1^{h_1})\cdots f(p_k^{h_k})$$
$$= \sum_{(h_1,\dots,h_k)\in\mathbb{N}^k} f(p_1^{h_1}\cdots p_k^{h_k}) = {\sum_{n\ge 1}}' f(n),$$

dove $\sum'$ indica che la somma è fatta sugli interi n i cui divisori primi non superano N. Ne segue

$$\left|\prod_{p\le N}\sum_{h=0}^{\infty} f(p^h) - \sum_{n=1}^{N} f(n)\right| = \left|{\sum_{n>N}}' f(n)\right| \le \sum_{n>N} |f(n)| \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

e quindi

$$\prod_{p}\sum_{h=0}^{\infty} f(p^h) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Se f è completamente moltiplicativa si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} f(p^h) = \sum_{h=0}^{\infty} f(p)^h = \frac{1}{1-f(p)}. \qquad \square$$

La (8) si ottiene dalla (9) con $f(n)=n^{-s}$ osservando che $(mn)^{-s}=m^{-s}n^{-s}$ e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge assolutamente per $s>1$.

L'identità di Eulero implica un risultato piú forte dell'esistenza di infiniti numeri primi, e cioè

$$\sum_{p}\frac{1}{p} = \infty. \tag{10}$$

Infatti dalla (8) segue

$$\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} > \int_1^{\infty} x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1},$$

e quindi

$$\lim_{s\to 1+}\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} = \infty.$$

Prendendo il logaritmo del prodotto euleriano si ottiene perciò, per $s\to 1+$,

$$\log\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} = \sum_{p}\sum_{h=1}^{\infty} h^{-1}p^{-hs} = \sum_{p} p^{-s} + \sum_{p}\sum_{h=2}^{\infty} h^{-1}p^{-hs} \to \infty.$$

Ma

$$\sum_p \sum_{h=2}^{\infty} h^{-1} p^{-hs} < \sum_p \sum_{h=2}^{\infty} p^{-h} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Big) = 1.$$

Dunque $\lim_{s \to 1+} \sum_p p^{-s} = \infty$, e ne segue la (10).

Nell'ultimo decennio del Settecento, sulla base di accurate tabulazioni numeriche, Gauss congetturò che $\mathrm{Li}\, x$ fosse una 'buona approssimazione' a $\pi(x)$, senza specificare cosa intendesse per buona approssimazione. La congettura di Gauss si può interpretare sia asintoticamente nella forma (2) o (5), e come tale si può considerare il primo enunciato congetturale del teorema dei numeri primi, sia come affermazione che $\mathrm{Li}\, x$ fornisca una buona approssimazione numerica a $\pi(x)$ per valori finiti di x (le tavole di Gauss confrontano numericamente $\pi(x)$ con $\mathrm{Li}\, x$ fino a $x = 3 \times 10^6$).

Dopo la congettura di Gauss, importanti contributi allo studio della distribuzione dei numeri primi sono dovuti a Dirichlet e a Čebyšev. Nel 1839 Dirichlet pubblica un lavoro in cui dimostra che, dati due qualsiasi interi positivi a e q primi fra loro, esistono infiniti numeri primi p nella progressione aritmetica

$$a,\ a+q,\ a+2q,\ a+3q,\ \dots,$$

e inoltre che

$$\sum_{p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{1}{p} = \infty,$$

estendendo cosí alle progressioni aritmetiche il risultato (10). Per la dimostrazione di questo risultato Dirichlet utilizza fra l'altro la sua celebre formula sul numero delle classi di forme quadratiche binarie aventi un discriminante assegnato. Per Dirichlet il punto di partenza è l'identità di Eulero (9), nella forma

$$\prod_p \big(1 - \chi(p) p^{-s}\big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \qquad (s > 1),$$

dove $\chi : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{C}$ (carattere di Dirichlet modulo q) è una funzione aritmetica periodica di periodo q, nulla sugli n non primi con q e completamente moltiplicativa, cioè tale che $\chi(1) = 1$ e $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}^\times$.

Nel maggio 1848 Čebyšev presenta all'Accademia di San Pietroburgo una memoria sulla distribuzione dei numeri primi, poi pubblicata nel 1850. Čebyšev è il primo autore interessato esplicitamente al comportamento asintotico di $\pi(x)$ per $x \to \infty$, e il suo lavoro contiene il primo studio della funzione $\pi(x)$ con metodi analitici. Partendo dall'identità di Eulero, Čebyšev dimostra che

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\operatorname{Li} x} \le 1 \le \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\operatorname{Li} x},$$

per cui se esiste il $\lim \pi(x)/\operatorname{Li} x$ deve essere 1. In un successivo lavoro del 1852 Čebyšev fornisce diseguaglianze esplicite, dal di sopra e dal di sotto, per $\pi(x)$. Dimostra che, per ogni x abbastanza grande, si ha

$$\lambda_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < \lambda_2 \frac{x}{\log x}, \tag{11}$$

dove $\lambda_1 = 0,92\ldots$ e $\lambda_2 = 1,105\ldots$.

La funzione zeta di Riemann

Nel novembre 1859 Riemann presenta all'Accademia delle Scienze di Berlino, in occasione della sua nomina a socio corrispondente, una comunicazione [5] intitolata *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Sul numero dei numeri primi al di sotto di una quantità assegnata), poi pubblicata nell'anno seguente sui Monatsberichte dell'Accademia. In questa memoria, un articolo di sole nove pagine che fra i suoi lavori pubblicati è l'unico dedicato alla teoria dei numeri, Riemann introduce idee innovative riguardanti lo studio della funzione enumeratrice $\pi(x)$. Lo scopo principale dell'articolo di Riemann, dove le tavole numeriche di Gauss sono citate, è la ricerca di una formula esplicita per $\pi(x)$ che permetta di ottenere un'approssimazione a $\pi(x)$ migliore di $\operatorname{Li} x$, senza specificare se per i valori di x considerati da Gauss nelle sue tavole ($x \le 3 \times 10^6$), o per valori molto grandi di x. Comunque sia, Riemann non accenna esplicitamente alle conseguenze delle proprie ricerche riguardanti formule asintotiche per $\pi(x)$. Il punto di vista asintotico prevale invece nelle successive ricerche di Hadamard, de la Vallée Poussin, von Mangoldt, Landau ed altri a cavallo fra l'Ottocento e il Novecento seguendo il percorso aperto da Riemann, ricerche che condurranno alle dimostrazioni del teorema dei numeri primi nelle forme citate sopra.

Riassumo qui per grandi linee i contenuti della memoria di Riemann. La sua idea piú innovativa consiste nello studio dell'identità di Eulero (8) per valori complessi di s, applicando all'identità i principi della teoria delle funzioni analitiche e in particolare il prolungamento analitico. Poiché $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge assolutamente e uniformemente per $\operatorname{Re} s \ge 1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi rappresenta una funzione olomorfa di s nel semipiano aperto $\operatorname{Re} s > 1$. Applicando la (9) con $f(n) = n^{-s}$ si ottiene l'identità di Eulero (8) per ogni $s \in \mathbb{C}$ nel semipiano $\mathrm{Re}\, s > 1$. Riemann definisce la funzione $\zeta(s)$ come

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \qquad (s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s > 1), \tag{12}$$

e nelle prime tre pagine del suo articolo dà due dimostrazioni diverse dei seguenti risultati fondamentali:

(i) La funzione $\zeta(s)$ è prolungabile analiticamente dal semipiano $\mathrm{Re}\, s > 1$ a tutto il piano complesso $s \in \mathbb{C}$, dando luogo ad una funzione meromorfa avente come unica singolarità al finito un polo semplice con residuo 1 nel punto $s = 1$.

(ii) $\zeta(s)$ (cioè il suo prolungamento analitico) soddisfa l'equazione funzionale

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \;=\; \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s), \tag{13}$$

dove Γ è la funzione gamma di Eulero. In altre parole, $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ assume lo stesso valore in due punti del piano complesso simmetrici rispetto a $s = 1/2$, ed è quindi una funzione pari di $s - 1/2$.

Per un'esposizione dettagliata delle dimostrazioni date da Riemann dei risultati (i) e (ii) si rimanda all'articolo [7].

L'equazione funzionale (13) permette di ricavare le proprietà di $\zeta(s)$ nel semipiano $\mathrm{Re}\, s < 0$ da quelle nel semipiano $\mathrm{Re}\, s > 1$. Come esempio di questo, osserviamo anzitutto che dal prodotto di Eulero (12) segue $\zeta(s) \neq 0$ nel semipiano $\mathrm{Re}\, s > 1$. Infatti dalla (12) si ottiene, per $\mathrm{Re}\, s > 1$,

$$\zeta(s) \prod_{p \le N} (1 - p^{-s}) \;=\; \prod_{p > N} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots) \;=\; 1 + {\sum_{n > N}}'' n^{-s},$$

dove $\sum''$ indica che la somma è fatta sugli n i cui divisori primi sono maggiori di N. Dunque

$$\left| \zeta(s) \prod_{p \le N} (1 - p^{-s}) \right| \;\ge\; 1 - \left| {\sum_{n>N}}'' n^{-s} \right| \;\ge\; 1 - \sum_{n>N} |n^{-s}|$$

e quindi, per N abbastanza grande,

$$\left| \zeta(s) \prod_{p \le N} (1 - p^{-s}) \right| > 0,$$

da cui $\zeta(s) \neq 0$. Dall'equazione funzionale (13) si ottiene allora che gli unici zeri di $\zeta(s)$ nel semipiano $\mathrm{Re}\, s < 0$, detti gli zeri banali, sono i poli di $\Gamma(s/2)$, cioè i punti $s = -2, -4, -6, \ldots$. La parte rimanente del piano complesso, dove $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$, è detta striscia critica.

Le successive sei pagine dell'articolo di Riemann sono dedicate principalmente ad ottenere una formula esplicita per $\pi(x)$, il cui termine piú significativo è una somma fatta sugli zeri di $\zeta(s)$ nel campo complesso. Leggendo l'articolo di Riemann non si può fare a meno di notare la differenza di stile e di metodo fra le prime tre pagine, nelle quali Riemann fornisce due dimostrazioni, entrambe rigorose anche se molto concise, dei risultati (i) e (ii) di cui sopra, e le successive sei pagine in cui Riemann dà brevi cenni di altre proprietà di $\zeta(s)$ delle quali non solo non fornisce dimostrazioni esaurienti, ma talvolta non dà nemmeno enunciati precisi. In una lettera indirizzata all'Accademia di Berlino di cui esiste copia nella biblioteca dell'università di Göttingen, riferendosi a due proposizioni riguardanti $\zeta(s)$ enunciate senza dimostrazione nel suo articolo, Riemann dichiara che esse sono conseguenze di un nuovo sviluppo della funzione intera

$$\xi(s) := \frac{s(s-1)}{2}\, \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \tag{14}$$

per $s = \frac{1}{2} + it$, sviluppo da lui non ancora sufficientemente semplificato per poterlo comunicare all'Accademia.

La mia opinione è che Riemann, o per la fretta di presentare la sua comunicazione all'Accademia di Berlino entro una scadenza ravvicinata, o per limiti di spazio dovuti ad esigenze redazionali dei Monatsberichte, abbia deciso di enunciare in forma sintetica nelle ultime sei pagine del suo articolo varie proprietà di $\zeta(s)$, di alcune delle quali non aveva nel 1859 dimostrazioni soddisfacenti, che avrebbe voluto riprendere in lavori successivi che non ebbe il tempo di scrivere. La difficoltà di fornire dimostrazioni esaurienti delle proposizioni enunciate da Riemann è testimoniata dal fatto che tali proposizioni sono state dimostrate fra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX – cioè piú di 30 anni dopo la pubblicazione del lavoro di Riemann – da Hadamard, da von Mangoldt e da altri, ad eccezione della cosiddetta 'ipotesi di Riemann' tuttora non dimostrata, che afferma che gli infiniti zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica hanno tutti parte reale 1/2, e che peraltro Riemann considera molto probabile ('sehr wahrscheinlich') ma non certa.

Zeri di $\zeta(s)$

Dopo aver dimostrato il prolungamento analitico di $\zeta(s)$ e l'equazione funzionale (13), Riemann afferma che il numero $N(T)$ degli zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica, contati con molteplicità, aventi parte immaginaria t compresa fra 0 e T è circa uguale a

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\,,$$

e giustifica la sua affermazione accennando al principio dell'argomento senza fornire dettagli. Il procedimento di Riemann per il calcolo di $N(T)$ è descritto in [7]. Si ottiene cosí la formula di Riemann–von Mangoldt:

$$N(T) \;=\; \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T) \tag{15}$$

(von Mangoldt, 1905). Ne segue in particolare che la striscia critica contiene infiniti zeri di $\zeta(s)$.

Subito dopo Riemann afferma che il numero degli zeri di $\zeta(s)$ sul segmento verticale $[\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}+iT]$ è circa uguale a

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\,,$$

senza dare nessuna indicazione del metodo con cui ottiene questo risultato, ed è quindi portato a formulare l' 'ipotesi di Riemann' che tutti gli zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica abbiano parte reale $1/2$.[2] È facile vedere che la funzione intera $\xi(s)$ definita dalla (14) non si annulla fuori dalla striscia critica, e nella striscia critica ha gli stessi zeri di $\zeta(s)$; inoltre l'equazione funzionale (13) è equivalente a

$$\xi(s)=\xi(1-s), \tag{16}$$

e l'ipotesi di Riemann equivale ovviamente ad affermare che tutti gli zeri t della funzione intera $\xi(\frac{1}{2}+it)$ sono reali. Riferendosi a $\xi(\frac{1}{2}+it)$ Riemann scrive: Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind (In effetti, fra questi limiti [cioè fra 0 e T] si trova un numero di zeri reali circa uguale a questo [cioè a $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$], ed è molto probabile che tutti gli zeri siano reali).

In virtú dell'equazione funzionale (16), $\xi(s)$ assume valori reali sulla retta $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$; quindi gli zeri di $\zeta(s)$, cioè di $\xi(s)$, sul segmento $[\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}+iT]$ si possono contare (ammesso che siano zeri semplici) contando i cambiamenti di segno di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ per $0\le t\le T$. Il calcolo numerico di $\xi(\frac{1}{2}+it)$, e quindi il computo dei cambiamenti di segno di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ fino ad un'ordinata T, è facilitato dall'uso della formula di Riemann–Siegel (vedi [2], cap. 7), che presumibilmente è collegata al 'nuovo sviluppo' di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ cui Riemann allude nella lettera all'Accademia di

[2] L'ipotesi di Riemann, tuttora non dimostrata, è l'ottavo problema proposto da Hilbert al congresso internazionale di Parigi nel 1900.

Berlino sopra citata. Con questi metodi, confrontando il numero dei cambiamenti di segno di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ fino ad un'ordinata T con l'intero $N(T)$ il cui valore esatto si può ottenere con calcoli numerici sufficientemente precisi e poi arrotondando il risultato all'intero piú vicino, è stato recentemente dimostrato che l'ipotesi di Riemann vale fino all'ordinata $T = 2 \times 10^{20}$, con zeri tutti semplici fino a tale ordinata.

Riemann scrive, riferendosi all'ipotesi di Riemann: Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien (Sarebbe senza dubbio desiderabile avere una dimostrazione rigorosa di questa proposizione; tuttavia, per il momento, ho lasciato da parte questa ricerca dopo qualche rapido tentativo infruttuoso, poiché essa sembra superflua per lo scopo immediato del mio studio).

Prima di passare allo studio di $\pi(x)$, Riemann dà indicazioni brevi e lacunose su come dimostrare una formula che esprima $\log\xi(\frac{1}{2}+it)$ mediante una somma fatta sugli zeri non banali di $\zeta(s)$. Tale formula è conseguenza della fattorizzazione

$$\xi(s) \;=\; \frac{1}{2}\,e^{As}\prod_{\varrho}\Big(1-\frac{s}{\varrho}\Big)e^{s/\varrho}, \tag{17}$$

dove A è una costante ($A = 2\xi'(0)$) e dove ϱ percorre gli zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica. La (17) è stata dimostrata da Hadamard nel 1893.

Riemann infine passa allo studio di $\pi(x)$, e piú precisamente alla ricerca di una formula esplicita che permetta di confrontare $\pi(x)$ con $\operatorname{Li} x$. Come abbiamo visto sopra, prendendo il logaritmo del prodotto euleriano, dalla (12) si ottiene, per $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2}\sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} + \dots, \tag{18}$$

da cui, ponendo $p^{-ms} = s\int_{p^m}^{\infty} x^{-s-1}\,\mathrm{d}x$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$, si ha

$$\frac{1}{s}\log\zeta(s) \;=\; \int_1^{\infty}\pi_1(x)x^{-s-1}\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

dove

$$\pi_1(x) \;=\; \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots . \tag{20}$$

Applicando alla (19) il teorema d'inversione per l'integrale di Fourier, Riemann ottiene, per ogni $c > 1$, la seguente rappresentazione di $\pi_1(x)$ come integrale di Mellin:

$$\pi_1(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\log\zeta(s)\,\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s. \tag{21}$$

Dalla (14) e dalle proprietà elementari della funzione gamma di Eulero si ottiene

$$\zeta(s) \;=\; \frac{1}{s-1}\,\xi(s)\pi^{s/2}\Big(\frac{s}{2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big)^{-1}. \tag{22}$$

Sostituendo a $\zeta(s)$, nell'integrale (21), il secondo membro della (22) e esprimendo $\log\xi(s)$ mediante la (17), Riemann arriva ad una formula esplicita per $\pi_1(x)$ contenente una somma sugli zeri ϱ di $\zeta(s)$ nella striscia critica. Infine, invertendo la (20), Riemann ottiene una formula esplicita per $\pi(x)$. Nella formula esplicita di Riemann il termine quantitativamente prevalente è $\operatorname{Li} x$, in accordo con la congettura di Gauss.

Formule esplicite e teorema dei numeri primi

Il procedimento di Riemann, formalmente piuttosto complicato, si comprende meglio cercando una formula esplicita per la funzione

$$\psi(x) := \sum_{n\le x} \Lambda(n),$$

dove $\Lambda : \mathbb{N}^{\times} \to \mathbb{R}$ è la funzione aritmetica di von Mangoldt definita da

$$\Lambda(n) \;=\; \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^m \;\; (p \text{ primo},\; m \ge 1 \text{ intero}) \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione $\psi(x)$, introdotta per la prima volta da Čebyšev nel suo lavoro del 1852 citato sopra, ha una formula esplicita piú semplice di quella per la funzione $\pi_1(x)$ definita nella (20); inoltre $\psi(x)$ e $\pi_1(x)$ sono facilmente collegabili l'una all'altra, come si vede nel modo seguente. Per la (20) abbiamo

$$\pi_1(x) \;=\sum_m \frac{1}{m}\,\pi(x^{1/m}) \;=\sum_m \frac{1}{m}\sum_{p\le x^{1/m}} 1 \;=\sum_{\substack{(p,m)\\ p^m\le x}} \frac{\log p}{m\log p} \;=\sum_{2\le n\le x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\,,$$

e quindi per sommazione parziale (vedi per es. [6], Theorem 5.2) si ha

$$\pi_1(x) \;=\sum_{2\le n\le x}\frac{\Lambda(n)}{\log n} \;=\; \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Analogamente, per sommazione parziale, si ottiene l'inversa della (23) nella forma

$$\psi(x) \;=\sum_{2\le n\le x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\log n \;=\; \pi_1(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi_1(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Per la (20) e per il teorema di Čebyšev (11) si ha

$$\pi_1(x) \;=\; \pi(x) \;+\; O\biggl(\frac{x^{1/2}}{\log x}\biggr).$$

Dunque dalle (23) e (24) si ottiene rispettivamente, per $x \to +\infty$,

$$\pi(x) \;=\; \frac{\psi(x)}{\log x} \;+\; \int_2^x \frac{\psi(t)}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t \;+\; O\biggl(\frac{x^{1/2}}{\log x}\biggr) \tag{25}$$

e

$$\psi(x) \;=\; \pi(x)\log x \;-\; \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;+\; O\bigl(x^{1/2}\bigr). \tag{26}$$

Da ogni formula asintotica per $\psi(x)$ si ricava una formula asintotica per $\pi(x)$ usando la (25), e viceversa usando la (26). In particolare, il teorema dei numeri primi nella forma (2) equivale a

$$\psi(x) \sim x,$$

e nella citata forma di de la Vallée Poussin

$$\pi(x) \;=\; \operatorname{Li} x + O\bigl(x\exp(-C\sqrt{\log x}\,)\bigr) \tag{27}$$

equivale a

$$\psi(x) \;=\; x + O\bigl(x\exp(-C_1\sqrt{\log x}\,)\bigr), \tag{28}$$

con opportune costanti $C, C_1 > 0$.

La formula esplicita per $\psi(x)$ è piú semplice di quella per $\pi_1(x)$ perché lo sviluppo in serie di Dirichlet della derivata logaritmica di $\zeta(s)$ è dato da

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1).$$

Infatti derivando la (18) si ha

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;&=\; -\sum_p \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} \;=\; -\sum_p \log p \sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms}\\ &=\; -\sum_{(p,m)} (\log p)(p^m)^{-s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.\end{aligned}$$

Un procedimento analogo a quello seguito da Riemann per ottenere la (21) fornisce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s}\,\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s \;=\; \begin{cases} 1, & \text{se } n < x \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = x \\ 0, & \text{se } n > x \end{cases} \qquad (x > 0,\;\; c > 0). \tag{29}$$

Allora, definendo

$$\psi_0(x) \;=\; \frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2} \;=\; \sum_{n<x} \Lambda(n) + \begin{cases} \frac{1}{2}\Lambda(x), & \text{se } x \in \mathbb{N}^\times \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dalla (29) si ottiene, per $c > 1$,

$$\begin{aligned} \psi_0(x) \;&=\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s}\,\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{30}$$

dove nei punti di discontinuità di $\psi_0(x)$, cioè per $x = p^m$, l'integrale di Mellin (30) va inteso come valore principale:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \;=\; \lim_{T\to+\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}\,.$$

L'integrale (30) è trattabile piú facilmente dell'integrale (21) perché la funzione $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ è meromorfa, e quindi (30) può essere calcolato applicando il teorema dei residui, mentre per il calcolo di (21) occorre tenere conto della polidromia di $\log\zeta(s)$ nell'intorno dei punti di diramazione, cioè in $s = 1$ e negli zeri di $\zeta(s)$. Maggiorando opportunamente $|\,\zeta'(s)/\zeta(s)\,|$ si dimostra che il terzo membro della (30) è effettivamente uguale alla somma dei residui della funzione integranda. Si ha

$$\operatorname{Res}\left(-\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{x^s}{s}\right) \;=\; \begin{cases} x \;\text{ in } s = 1 \\ -\zeta'(0)/\zeta(0) \;\text{ in } s = 0 \\ -x^{\varrho}/\varrho \;\text{ in } s = \varrho, \end{cases}$$

dove ϱ indica uno zero di $\zeta(s)$ nella striscia critica (nella somma dei residui, il termine $-x^{\varrho}/\varrho$ va ripetuto h volte se ϱ è uno zero di molteplicità h). Inoltre la somma dei residui negli zeri banali $-2, -4, -6, \ldots$ di $\zeta(s)$ è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n} \;=\; -\frac{1}{2}\log(1-x^{-2}).$$

In questo modo si dimostra la formula esplicita (von Mangoldt, 1895):

$$\psi_0(x) \;=\; x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}), \tag{31}$$

dove la serie $\sum_{\varrho} x^{\varrho}/\varrho$ non converge assolutamente, e deve essere intesa come

$$\sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \;=\; \lim_{T\to+\infty} \sum_{|\mathrm{Im}\,\varrho|\le T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\,.$$

In virtú della (31), stime asintotiche per $|\,\psi_0(x) - x\,|$ dipendono da maggiorazioni di $\bigl|\sum_{\varrho} x^{\varrho}/\varrho\bigr|$, e quindi, essendo $|x^{\varrho}| = x^{\mathrm{Re}\,\varrho}$, da maggiorazioni di $\mathrm{Re}\,\varrho$. Per questa via si ottiene il teorema dei numeri primi nella forma $\psi(x) \sim x$ equivalente alla (2), dimostrando che $\mathrm{Re}\,\varrho < 1$ per ogni zero ϱ di $\zeta(s)$, cioè che $\zeta(1+it) \ne 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per ottenere il teorema dei numeri primi nelle forme piú forti citate sopra occorre dimostrare che certe regioni alla destra di curve contenute nella striscia critica e aventi come asintoto la retta $\mathrm{Re}\,s = 1$ sono prive di zeri ϱ di $\zeta(s)$. Ad esempio, per ricavare la stima (27)–(28) di de la Vallée Poussin si dimostra che esiste una costante $c > 0$ tale che $\zeta(\sigma + it) \ne 0$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$ nella regione $\sigma > 1 - c\,/\log(|t| + 2)$.

Non è noto se valga un'ipotesi di Riemann in forma 'debole', cioè se esista un numero α con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ tale che $\mathrm{Re}\,\varrho \le \alpha$ per ogni zero ϱ di $\zeta(s)$. In ogni caso, indicando con α l'estremo superiore delle parti reali degli zeri ϱ di $\zeta(s)$, dalla (31) si ottiene

$$\psi(x) \;=\; x + O\bigl(x^{\alpha}\log^2 x\bigr), \tag{32}$$

risultato che ha interesse se $\alpha < 1$. Per le (25) e (26), la (32) equivale a

$$\pi(x) \;=\; \mathrm{Li}\,x + O\bigl(x^{\alpha}\log x\bigr).$$

Si dimostra che $\alpha = \sup\{\mathrm{Re}\,\varrho\}$ coincide con l'estremo inferiore degli esponenti β tali che

$$\psi(x) \;=\; x + O\bigl(x^{\beta}\bigr).$$

Se vale l'ipotesi di Riemann si ha $\alpha = 1/2$, e quindi per la (32)

$$\psi(x) \;=\; x + O\bigl(x^{\frac{1}{2}}\log^2 x\bigr).$$

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\psi(x) \;=\; x + O\bigl(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\bigr)$$

allora $\alpha = 1/2$ e quindi vale l'ipotesi di Riemann.

Dunque la validità dell'ipotesi di Riemann è condizione necessaria e sufficiente affinché i resti $|\psi(x) - x|$ ovvero $|\pi(x) - \mathrm{Li}\, x|$ nel teorema dei numeri primi si possano maggiorare in modo sostanzialmente ottimale, cioè come termini d'errore aventi ordine di grandezza $\sqrt{x}$ a meno di logaritmi.

Dimostrazioni 'elementari' del teorema dei numeri primi

La straordinaria profondità del lavoro di Riemann e l'abbondanza di risultati ottenuti alla fine dell'Ottocento e nei primi decenni del Novecento percorrendo la strada aperta da Riemann generarono un diffuso pessimismo riguardo alla possibilità di dimostrare il teorema dei numeri primi, anche nella forma piú debole (2), senza far uso della teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa (vedi [3] p. 6). Tuttavia nel 1949 Erdős e Selberg, indipendentemente, diedero le prime dimostrazioni 'elementari' della (2), ottenute cioè esclusivamente con argomenti di analisi reale. Sia la dimostrazione di Erdős che quella di Selberg sono basate sulla formula asintotica

$$\psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\psi(x/n)\,\Lambda(n) = 2x\log x + O(x)$$

dimostrata da Selberg con metodi elementari. Il metodo di Selberg è stato successivamente raffinato, fino ad ottenere stime per il resto $|\psi(x) - x|$ simili nella struttura alla migliore stima dimostrata per via analitica, cioè a

$$\psi(x) = x + O\left(x\exp\left(-C_1\,\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right)$$

equivalente alla (7) di Vinogradov e Korobov ([4], Corollary 8.30). Ad esempio, nel 1970 Diamond e Steinig (vedi [1], pp. 576-578) hanno dimostrato elementarmente che

$$\psi(x) = x + O\left(x\exp\left(-C_1\,\frac{(\log x)^{1/7}}{(\log\log x)^{2}}\right)\right).$$

Riferimenti bibliografici

[1] Diamond, Harold G., *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 553-589.

[2] Edwards, Harold M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.

[3] Ingham, Albert E., *The distribution of prime numbers*, Cambridge Tracts in Math. no. 30, Cambridge Univ. Press, 1932.

[4] IWANIEC, Henryk e KOWALSKI, Emmanuel, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **53**, Providence, 2004.

[5] RIEMANN, Bernhard, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, in: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß*, Teubner, Leipzig, 1876, pp. 136-144.

[6] VIOLA, Carlo, *An Introduction to Special Functions*, Unitext **102**, Springer International Publishing, 2016.

[7] VIOLA, Carlo, *I contributi di Riemann in teoria dei numeri*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **151** (2017), 21-39.

Torino, 7 marzo 2019

Un'attività sui problemi narrativi tra matematica e lingua italiana

Stefano Boccardo
I.C. 'Parri – Vian' – Torino

Massimo Borsero
I.C. 'Parri – Vian' – Torino
Dipartimento di Matematica 'G. Peano' – Università di Torino

Antonella Piccirilli
I.C. 'Parri – Vian' – Torino

Sunto. *Il rapporto tra matematica e lingua italiana è molto stretto ed emerge in modo particolare nello studio dei cosiddetti 'problemi narrativi', cioè problemi il cui testo è una storia. In questo articolo viene presentata e discussa un'attività condotta in una classe prima dell'I.C. 'Parri – Vian' di Torino, in cui si è cercato di potenziare le competenze di problem solving degli allievi attraverso un approccio integrato tra attività con focus narrativo e attività con focus matematico.*

Premessa

Il *problem solving* è da sempre uno dei cardini dell'attività matematica e dunque, per riflesso, uno degli elementi centrali del suo apprendimento. La stessa Unione Europea, nella Raccomandazione del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente parla di competenza matematica come la "capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane".

L'aspetto essenziale che caratterizza il *problem solving* e lo differenzia dall'attività di soluzione di esercizi è la necessità di compiere delle scelte strategiche. Già Karl Duncker definiva un problema come un'attività che "sorge quando un individuo ha una meta ma non sa come raggiungerla" (Duncker, 1945) e deve quindi far ricorso alle proprie risorse strategiche. La grande quantità di decisioni strategiche attivate nella soluzione di un problema è stata studiata estensivamente da Schoenfeld, che osserva che la differenza principale tra il buon solutore e il cattivo solutore di problema è relativa alle domande che il soggetto si pone durante la risoluzione, domande che sono il frutto di un'efficiente attività metacognitiva, e cioè della capacità di riflettere su ciò che si sta facendo e su come lo si sta facendo (Schoenfeld, 1992).

Il matematico George Polya fu tra i primi ad analizzare il processo di risoluzione di un problema, identificando le seguenti quattro fasi (Polya, 1945):
1. la comprensione del problema, per cui è necessario conoscere chiaramente quanto richiesto;
2. la compilazione di un piano che prevede la scoperta dei legami che intercorrono fra le varie informazioni, fra i dati e l'incognita;
3. lo sviluppo di un piano che comporta l'applicazione di regole, algoritmi e procedure;
4. la verifica del risultato, per cui si richiede di esaminare la soluzione ottenuta e di procedere alla verifica e alla discussione.

Naturalmente, queste fasi non si susseguono in ordine strettamente cronologico, ma vengono percorse dal solutore secondo un ciclo non lineare e iterativo a mano a mano che giunge alla soluzione. Tuttavia, la comprensione del problema appare come momento essenziale e imprescindibile per la sua soluzione.

Nel vasto filone di ricerca sulla comprensione dei problemi, riguardo al quale rimandiamo a Demartini e Sbaragli (2019) per una panoramica approfondita, particolare rilevanza ha assunto lo studio dei cosiddetti problemi narrativi. Questi problemi sono caratterizzati da una formulazione testuale che racconta esplicitamente una storia. Come osservato in Zan (2016), una storia ha tre componenti:
1. una situazione che presenta qualche conflitto, problema, disagio;
2. un protagonista animato che è coinvolto in questa situazione con uno scopo;
3. una sequenza basata su rapporti causali, in cui il conflitto viene risolto.

Chiaramente, l'idea di causalità è centrale nella narrazione di storie, ma è una causalità diversa da quella logica: si tratta di una causalità narrativa. Lo stretto legame tra il contesto narrativo evocato dalla storia e il contesto matematico del problema diviene un elemento essenziale sia per la comprensione che per la soluzione dei problemi narrativi. Questo legame è ben evidenziato dalla frase della medaglia Fields Cèdric Villani citata in Branchetti e Viale (2016), che rispondendo alla domanda di un giornalista che gli chiedeva come mai fosse ospite a Lucca Comics nel 2013 affermava "per spiegare bene la matematica si devono raccontare delle storie". Tuttavia, esistono esempi in cui questo racconto, invece che favorire, ostacola la comprensione. In Zan (2016), ad esempio, viene citato il seguente problema:

> Giulio e Andrea per giocare mettono assieme le loro automobiline. Quando smettono di giocare, ciascun bambino vuole riprendersi lo stesso numero di

automobiline che aveva all'inizio del gioco. Tutte le automobiline sono 48, ma come dividerle? Andrea ricorda che aveva il triplo delle macchinine di Giulio. Vuoi aiutarli a dividere le macchinine nel modo giusto?

Qui la storia appare del tutto incredibile, perché difficilmente un bambino non avrebbe ricordato quante automobiline aveva ma che ne aveva il triplo del suo amico, e sicuramente nessun bambino avrebbe rivoluto il numero di partenza invece che le sue macchinine. Questa storia fallisce nell'essere verosimile, e questo impedisce la sospensione dell'incredulità essenziale per immergersi in essa. Possiamo dunque affermare che vi è una frattura tra il contesto matematico e quello narrativo: problemi di questo tipo sono detti dalla stessa Zan *problemi a quadretti*.

Invece i problemi in cui il contesto matematico e quelli narrativo sono in continuità, sono chiamati dalla stessa Zan *problemi a righe*. Le caratteristiche essenziali per questi problemi sono che

1. il "problema" sia un problema di qualcuno;
2. la situazione conduca ad una sospensione dell'incredulità nel contesto narrativo evocato;
3. rispondere alla domanda risolva il problema.

Per un approfondimento sul tema dei *problemi a righe e a quadretti* rimandiamo a Zan (2007) e (2016).

Un ultimo aspetto sui cui è necessario porre attenzione è che, per la natura stessa dei testi dei problemi, la comprensione non può scaturire da una lettura superficiale degli stessi. Come affermato in Demartini e Sbaragli (2019) "Una convinzione comune è che esista un solo tipo di lettura e che, quindi, di fronte al testo di un problema matematico l'approccio sia identico a quello ad altri testi. È invece errato considerare la lettura come un'azione sempre uguale a sé stessa, senza differenze di procedura e di scopo: sarebbe più corretto parlare di letture, cioè di operazioni in parte diversificate a seconda del testo e del suo scopo (cioè di che cosa dobbiamo fare con il testo in questione)". In Tanner e Green (1988) viene proposta una classificazione in quattro tipi di lettura:

1. *lettura esplorativa o orientativa (skimming)*: consiste nello scorrere rapidamente e a balzi un testo per scoprire di quale argomento e sotto-argomenti tratta, e per capire se è centrato o no rispetto al proprio scopo di lettura. È una lettura molto utile in vari contesti, in quanto è idonea ad esempio a capire a grandi linee di che cosa parla un opuscolo o un articolo, per valutare se procedere con una lettura più approfondita;
2. *lettura selettiva (scanning)*: consiste nel cercare informazioni e dati specifici in un testo (ad esempio, le parole in un dizionario, l'argomento poligoni

in un testo scolastico di matematica, le pagine su Leopardi in un'antologia, ma anche i prezzi in un volantino o un nominativo in un elenco ecc.);

3. *lettura estensiva o globale (extensive)*: ha carattere sequenziale (diversamente dalle precedenti) ed è quella che spontaneamente si impiega nella lettura per piacere, ad esempio nella lettura di testi narrativi non troppo impegnativi; si può ricavare un certo tipo di apprendimento, in quanto è una lettura che porta comunque alla sedimentazione di memorie e informazioni, cfr. Day e Bamford (2002);
4. *lettura intensiva o analitica (intensive or narrow)*: è quella usata per capire a fondo e per interpretare al meglio le richieste del testo, ma anche per studiare e per imparare; prevede perciò che il lettore si soffermi maggiormente sul testo e ne rilegga certi passi. È una lettura in cui chi legge attua regressioni, ipotesi e anticipazioni per cogliere meglio il senso del testo stesso, considera altri elementi come immagini, simboli ecc. (se presenti), integra le informazioni che derivano dai dati testuali e le combina tra loro e a dati extra-testuali, e riflette a fondo sui significati delle parole.

L'interscambio dinamico tra questi quattro tipi di lettura è, a nostro avviso, uno dei momenti essenziali dell'attività di comprensione che prelude a quella di soluzione e in seguito vedremo quali attività sono state messe in campo per analizzarlo.

Gli obiettivi

In questa sezione riferiremo un'esperienza didattica svoltasi in una classe prima, composta da 22 studenti divisi in 5 gruppi, della scuola secondaria di primo grado 'Nosengo' dell'Istituto Comprensivo 'Parri – Vian' di Torino, della durata complessiva di 20 ore ripartite a metà, con distribuzione alternata, tra gli insegnamenti di italiano e matematica del corso.

Abbiamo voluto indagare in particolare la relazione tra comprensione del testo e risoluzione del problema, avendo riscontrato in precedenza una tipologia di lettura eccessivamente selettiva anche nelle prove di italiano.

La finalità dell'intervento didattico è stata di potenziare il pensiero strategico, in linea con quanto previsto dalla certificazione delle competenze (D.M. 742/2017), di saper operare scelte consapevoli, di contro al prevalere di un diffuso automatismo negli atteggiamenti degli studenti di fronte alle consegne. Pertanto, abbiamo utilizzato i *problemi a righe* per incentivare in prima istanza il coinvolgimento degli studenti, riducendo le resistenze psicologiche e le prassi stereotipe che possono sorgere con generi testuali canonici fortemente tipicizzati e riconoscibili.

Prima della verifica della risoluzione, l'idea di fondo durante le ore di italiano è stata di monitorare il processo di comprensione della situazione problematica attraverso esercizi di riformulazione e attività di lettura intensiva.

Il testo di partenza è stato *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (1938), che è stato modificato per adattare i brani al contesto della classe, mantenendo inalterata la cornice. Si tratta di un libro noto e ampiamente diffuso per la sua modernità nell'ambito delle proposte didattiche sui problemi narrativi. Il protagonista, infatti, è un eroe *ante litteram* delle strategie innovative impiegate nella *gamification* e nel *problem solving*: Beremiz Samir, l'uomo del titolo, risolve sotto gli occhi ammirati del fedele compagno Hanak Tade Maia problemi matematici apparentemente impossibili con un atto non preordinato di intelligenza, riuscendo a farsi largo, debitamente ricompensato dagli sceicchi che aiuta, nella società della Baghdad del 1200.

Attraverso il suo personaggio, si è inteso incentivare una partecipazione attiva e creativa da parte dello studente; creare attraverso le sue avventure un contesto di apprendimento ludico e motivante. Volendo rinforzare l'*engagement*, tra gli 'aspetti motivanti' la narrazione funziona da intensificatore della realtà della situazione, come una sorta di succedaneo dell'esperienza reale. È un po' come se la realtà passasse nel testo. Il problema diventa meno astratto, si crea un contesto verosimile che nutre il patto di sospensione dell'incredulità, attribuendo un 'effetto di realtà' ai problemi.

Inoltre, la 'sfida-problema', come avviene per la variabile di genere nelle narrazioni a *clues*, richiama il completamento della storia, inducendo gli allievi a esporsi maggiormente e a formulare ipotesi e proposte di soluzione; si riducono così fenomeni di più opaca lettura come la resa e lo stallo, attestate nelle prove di matematica della classe.

Oltre a interpretare il problema, il saper argomentare la soluzione è l'altro aspetto relativo alla formulazione dei processi a cavallo tra italiano e matematica: avere a disposizione un certo numero di soluzioni, matematiche e non, si ritiene essenziale per la fase dell'argomentazione, che è stata condotta durante le ore di matematica. Va evidenziato come sia lo stesso testo a tematizzare la discussione: è Beremiz Samir che talvolta in nome di principi etici e filosofici preferisce una soluzione difforme da quella matematica da lui stesso individuata.

Abbiamo riconosciuto in precedenza come nella narrazione sia necessario un principio tematico, che funziona da ulteriore 'motivatore', in questo caso il tema della giustizia, argomento molto sentito dagli studenti, soprattutto in questa fascia di età. Beremiz non risolve solo questioni matematiche ma anche questioni morali. Ciò ha rappresentato uno stimolo alla discussione.

Si sono pertanto maggiormente esplorate le motivazioni dell'agire dei personaggi, le loro scelte, le loro strategie, per le quali sono state chieste anche delle valutazioni da parte degli allievi. Si è facilitato un approccio più interpretativo, per incentivare "quell'atteggiamento attivo, critico e costruttivo che favorirebbe lo sviluppo di processi di pensiero significativi, i quali a loro volta consentirebbero di saper prendere decisioni qualitative in base al contesto, oltre che quantitative", cfr. Demartini e Sbaragli (2019).

Nella presente sezione non sono presenti testimonianze di questo ineludibile passaggio dal testo alla realtà, tuttavia l'argomentazione della situazione problematica, che veniva già esplicitamente discussa all'interno della narrazione, ha promosso una maggiore disponibilità al confronto tra insegnanti e allievi: un invito a ragionare per problemi aperti da cui nasce la competenza del *problem solving* che abbiamo indagato.

Descrizione delle attività

In questa sezione presenteremo in dettaglio le quattro fasi della proposta didattica e l'analisi delle risposte degli studenti.

Fase 1

In questa prima fase abbiamo proposto per una comprensione del testo un riassunto durante le ore di italiano e una risoluzione del problema a gruppi misti nelle ore di matematica, a partire da una situazione problematica, riportata qui in versione ridotta[1]:

> Assad e Beremiz, sulla strada del viaggio per Baghdad, incontrano Salem, un viandante affamato. Il viandante chiede loro da mangiare, dicendo di essere un ricco mercante, e di poterli ricompensare non appena arrivati a Baghdad. Assad ha 5 pagnotte, e Beremiz ha 3 pagnotte. Si mettono in viaggio insieme. Assad dice: «Abbiamo 8 giorni di viaggio, dobbiamo consumare solo una pagnotta al giorno: ce la divideremo in tre». E così fanno il primo giorno, e poi il secondo, … e poi l'ottavo si dividono l'ultimo pane. Finalmente arrivano a Baghdad. Lì Salem li invita a casa sua, e per ricompensarli dà 5 monete d'oro a Assad, che aveva messo 5 pagnotte, e 3 monete d'oro a Beremiz, che aveva messo le sue 3 pagnotte. Beremiz dice: «Amico, non hai fatto il conto giusto. Devi dare 7 monete a Assad, e solo 1 a me. Infatti, anche noi abbiamo mangiato le pagnotte». Assad dice: «Amico, Beremiz ha fatto i conti per bene. Però l'importante è che ognuno di noi due ha

[1] Nell'attività svolta abbiamo scelto di utilizzare una versione tratta dal testo di Tahan (1938) con pochissime modifiche, di oltre 2900 caratteri.

messo a disposizione quello che aveva. Quindi dividiamo la ricompensa a metà: 4 monete per ciascuno». Salem non sa più come fare. Prova a spiegargli il ragionamento che ha fatto Beremiz.

Siamo partiti per conoscere il livello di partenza da un questionario di natura esplorativa. Ci è apparso significativo orientare la comprensione degli studenti indirizzandola sui personaggi e dal punto di vista linguistico su domande di coesione linguistica e connessione testuale.

'Spie linguistiche' dei personaggi e delle loro relazioni sono stati, infatti, i numerosi pronomi personali e aggettivi possessivi che intessevano il testo, al punto fare esclamare a uno studente che i personaggi fossero moltissimi, molti di più di quelli in effetti presenti. Riconoscere il riferimento di aggettivi possessivi, pronomi personali e altre forme di rimandi testuali ha permesso di 'trattenere' la lettura, perché il leggere non fosse semplicemente un percorso lineare, rapido, espulsivo, ma la rete di personaggi obbligasse a una continua verifica e revisione della comprensione. La tecnica del rimando linguistico implica una lettura strategica rivolta a cogliere le relazioni logico–sintattiche, utile perché porta gli studenti a percorrere l'intero testo e a mette in crisi la strategia di lettura più immediata per loro, la comprensione locale. Sotto questo aspetto, discorso narrativo e matematico tendono ad avvicinarsi, in quanto le informazioni da mettere in relazione non sono localizzate in un punto ma sono disseminate all'interno del testo problema, riproducendo l'esperienza reale, per sua natura non preordinata.

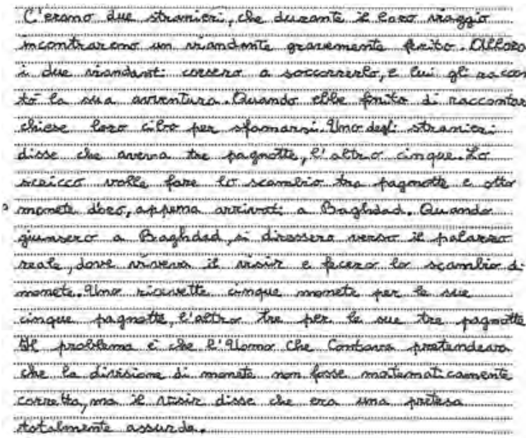
La seconda modalità di verifica del processo di comprensione della situazione problematica è stato il riassunto. Ci appare evidente la sua natura strategica, come si può desumere da Cardinale (2015) da cui abbiamo estratto alcuni brani che riteniamo significativi in tal senso, riportati in Tabella 1.

Funzioni	**Descrizione**
Integra i processi di lettura e scrittura	Affrontare il problema dell'apprendimento della scrittura oggi, alla ricerca di tecniche efficaci per favorire buone pratiche, implica perciò ripensare la lettura e rivalutare l'approccio cognitivista che fa della scrittura un'attività di produzione di senso. Saper scrivere significa innanzitutto saper comprendere, saper pensare e saper pianificare, se non si vuole ridurre tutto a micrologorrea e all'esibizione di semplici battute. Lettura e scrittura si rivelano infatti ancora attività strettamente correlate

Presuppone un rigoroso rispetto del testo di origine	Si tratta di una scrittura impersonale, che non coinvolge la soggettività, diversa dalla scrittura creativa, una scrittura a dominanza referenziale, che non ha altro scopo che quello di verificare il rigore e la precisione con cui viene compreso e riportato il pensiero altrui
Permette di organizzare le conoscenze immagazzinate in memoria	Quando un lettore capisce un discorso, compie soprattutto un lavoro di sintesi del testo, perché tende a ridurre l'informazione, cancellandone i dettagli, a generalizzare e a costruire una sorta di riassunto, un particolare tipo di rappresentazione semantica di esso, organizzata in una serie articolata di proposizioni, operando però in un contesto dinamico influenzato anche da fattori pragmatici legati alla situazione
È il risultato di un processo mnemonico, non semplicemente riproduttivo ma ricostruttivo	Favorisce la creazione di uno schema testuale (*macrostruttura semantica*) formato da una serie di categorie gerarchicamente ordinate, variabili in relazione a diverse società e culture

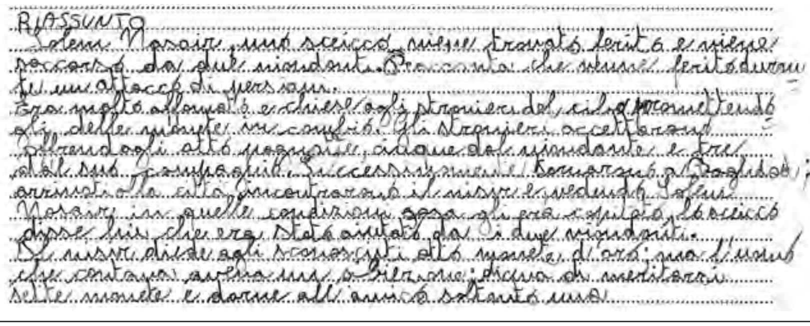
Tabella 1. Le funzioni del riassunto secondo Cardinale (2015).

L'analisi delle risposte degli studenti evidenzia due esiti che corrispondono a due tendenze: il riassunto 'matematico' e 'narrativo' (vedi Tabelle 2 e 3). Il primo pone il *focus* su una distribuzione precisa ed equilibrata degli elementi fondamentali per la soluzione, a cui viene dato ampio risalto al punto che occupano buona parte del testo; serve a impostare strategicamente la fase successiva della risoluzione e rivela la comprensione della natura del problema (vedi Tabella 2); il secondo risulta meno focalizzato, tende a essere meno selettivo, riportando particolari di natura narrativa non essenziali (vedi Tabella 3).



C'erano due stranieri, che durante il loro viaggio incontrarono un viandante gravemente ferito. Allora, i due viandanti corsero a soccorrerlo e lui gli raccontò la sua avventura. Quando ebbe finito di raccontare, chiese loro il cibo per sfamarsi. **Uno degli stranieri disse che aveva tre pagnotte, l'altro cinque**. Lo sceicco volle fare lo scambio **tra pagnotte e otto monete d'oro**, appena arrivato a Baghdad. Quando giunsero a Baghdad, si diressero verso il palazzo reale, dove viveva il visir e fecero lo scambio di monete. **Uno ricevette cinque monete per le sue cinque pagnotte e l'altro tre per le sue tre pagnotte**. **Il problema è** che l'Uomo che Contava pretendeva che la divisione di monete **non fosse matematicamente corretta**, ma il visir disse che era una pretesa totalmente assurda.

Tabella 2. Un esempio di 'riassunto matematico'.



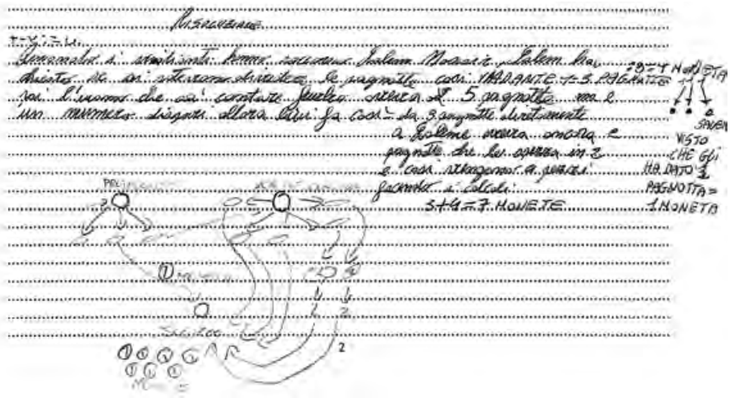
Salem Nasair uno sceicco viene trovato ferito e viene soccorso da due viandanti. **Racconta che venne ferito durante un attacco di persiani**.
Era molto affamato e chiese agli stranieri del cibo promettendogli delle monete in cambio. Gli stranieri accettarono offrendogli otto pagnotte, cinque dal viandante e tre dal suo compagno. Successivamente tornarono a Baghdad; arrivati alla città incontrarono il visir e**, vedendo Salem Nasair in quelle condizioni cosa gli era capitato**, lo sceicco disse lui che era stato aiutato dai due viandanti.
Il visir diede agli sconosciuti otto monete d'oro; ma **l'uomo che contava aveva un'obiezione**: diceva di meritarsi sette monete e darne all'amico soltanto una.

Tabella 3. Un esempio di 'riassunto narrativo'.

In sede di risoluzione, tre dei gruppi non hanno risolto il problema, ma hanno svolto il riassunto. Un solo gruppo, quello del riassunto matematico, ha risolto il problema, ma è significativo il confronto con la soluzione del gruppo che ha proposto il riassunto narrativo. Il gruppo dei 'matematici' trova la soluzione di Beremiz dividendo ciascuna delle 8 (5 + 3) pagnotte in 3 pezzi. In tutto ottiene 24 pezzi (5 · 3 = 15; 3 · 3 = 9; 15 + 9 = 24). Assad mette 15 pezzi, Beremiz 9 pezzi. Ognuno di loro trattiene 8 pezzi per sé, uno al giorno, per sopravvivere e dà il restante a Salem per sfamarlo. Quindi Assad dà 7 pezzi a Salem, Beremiz ne dà 1 (15 – 8 = 7; 9 – 8 = 1) e in base a questo riceveranno il proprio corrispettivo in monete. È importante notare come strategicamente il gruppo abbandoni la formulazione discorsiva, ridotta a funzione di commento e didascalia, a favore di una visualizzazione del processo attraverso i disegni (vedi Figura 1).

Fig.1. La soluzione matematica.

Il secondo gruppo insiste invece su una via narrativa per la sua proposta di risoluzione, che viene giustificata con un discorso lungo e articolato, dal quale risulta che per le 3 pagnotte date Assad (e non Beremiz) avrebbe ricevuto 1 sola moneta (3 : 3 = 1), mentre dalle sue 5 pagnotte Beremiz (e non Assad) doveva ricavare 7 monete (3 + 4 : 3 per ogni pagnotta data e 4 perché aveva spezzato in due le altre due restanti) come riportato in Tabella 4.



Quando i viandanti hanno soccorso Salem Nasair, Salem ha chiesto se si potevano dividere le pagnotte così VIANDANTE 1 = 3 PAGNOTTE: 3 = 1 MONETA poi l'uomo che sapeva contare **furbo** aveva 5 pagnotte ma **e un numero dispari** allora lui fa così: da 3 pagnotte direttamente a Salem aveva ancora 2 pagnotte che le spezza in 2 e così vengono 4 pezzi facendo i calcoli 3 + 4 = 7 MONETE

Tabella 4. Un esempio di 'soluzione narrativa'.

In sostanza, l'Uomo che Contava cerca di imbrogliare Salem, che sta morendo di fame ed è disposto ad accettare qualunque cosa.

La soluzione è matematicamente scorretta, ma narrativamente ha un senso.

Ciò che è interessante notare è che la personalità dello studente leader del gruppo dei 'narrativi' è esattamente 'imbrogliona' e manipolatrice. Lo studente è diventato 'L'Uomo che Sapeva Contare' (la sovrapposizione tra le figure di Assad e Beremiz è sintomatica) e si è preso carico della soluzione del problema. Il problema matematico è stato visto come un testo, che termina con una domanda, in cui un personaggio ha un problema che il lettore aiuta a risolvere. Attraverso la mediazione del personaggio, si agisce pertanto sulla motivazione del lettore a risolvere la situazione problematica. Il 'suo' problema (del personaggio) diventa un 'mio' problema (del lettore).

Fase 2

Tra le definizioni del testo problema, la più comune tra gli stessi studenti è che sia un testo che si conclude con una domanda. Per la seconda fase del progetto, svolta in modo individuale, dato il testo, gli studenti dovevano risalire alla domanda. Si trattava di focalizzare il problema nelle ore di italiano e provare a risolverlo con la docente di matematica nell'ora successiva.

Nella narrazione Beremiz assisteva a un litigio tra due fratelli Hamed e Harim. Il loro babbo aveva chiesto di tingere le inferriate del cancello. Hamed ci aveva lavorato per 3 pomeriggi interi, mentre Harim aveva trovato sempre delle scuse dicendo che aveva da fare altre cose, e aveva aiutato il fratello solo nell'ultimo pomeriggio. Quando avevano finito di tingere tutto, il babbo aveva detto soddisfatto: "Bravi! Avete fatto proprio un bel lavoro! Ecco 60 dinari: 30 per ognuno di voi". Ma Hamed aveva protestato. Gli studenti dovevano individuare "Perché Hamed protesta?" e "Quale domanda dovrà formulare per ricevere l'aiuto?"

Quasi tutti gli studenti hanno individuato correttamente il motivo della protesta, ma ciò che è interessante notare è che anche in questo caso, come nel precedente, possiamo individuare due interpretazioni – e strategie – degli studenti posti di fronte al testo. L'analisi delle domande rivela, infatti, che sono presenti due tendenze, una narrativa e una matematica (vedi Tabelle 5 e 6).

Per favore Beremid mi potrebbe aiutare ? Se lo potera aiutare matematicamente
Per favore Beremid mi potrebbe aiutare? Se lo poteva aiutare matematicamente

Tabella. 5. Esempi di 'domande narrative'.

SE IO HO LAVORATO PER 3 GIORNI E MIO FRATELLO PER UNO QUANTE DOVRÒ GUADAGNARE? E LUI?
Se io ho lavorato per 3 giorni e mio fratello per uno quanto dovrò guadagnare? E lui?

Tabella. 6. La domanda matematica.

In particolare, molto curioso il caso di una studentessa che scrupolosamente sente la necessità di riempire un 'buco' nella narrazione, fornendo al padre la prova, dal momento che ipotizza, con un'inferenza, che non sia presente durante il lavoro (vedi Tabella 7). Il quesito matematico rimane implicito, mentre la domanda elaborata ha una funzione linguistica prevalente di tipo conativo, che rimane incentrata del tutto sul destinatario del messaggio; volendo fargli compiere un'azione, perde la sua referenzialità e la sua oggettività. Diverse possono essere le ipotesi che è possibile formulare per indagare nella domanda questo eccesso di narratività. È ragionevole pensare che l'identificazione, tipica della tipologia testuale narrativa, come accaduto nel caso precedente, porti a sposare un punto di vista, una soggettività.

Ecco la domanda di Hamed:«Padre, io e mio fratello avevamo due vernici di colore diverso, puoi notare pure tu che il mio colore prevale sul cancello, mentre il suo è molto poco. Potresti andare a guardare meglio, ora che te l'ho ricordato?».
Ecco la domanda di Hamed ‹‹Padre, io e mio fratello avevamo due vernici di colore diverso, puoi notare pure tu che il mio colore prevale sul cancello, mentre il suo è molto poco. Potresti andare a guardare meglio, ora che te l'ho ricordato?››.

Tabella. 7. Una domanda 'molto' narrativa.

Per quanto riguarda la soluzione, si tratta di un problema di divisione in parti proporzionali. Bisogna di dividere per 4 pomeriggi, i 3 lavorativi di Hamed e 1 pomeriggio di Harim, e dare al primo 45 e al secondo 15 (vedi Figura 2).

Tuttavia, la maggioranza degli allievi ha risolto dividendo 60 per 3 pomeriggi, attribuendo ad Hamed 50 dinari (20 del primo pomeriggio, 20 del secondo e 20 : 2 = 10 del terzo) e 10 ad Hamir, per la metà del terzo pomeriggio (vedi Figura 3).

Ma perché gli allievi hanno preferito rispondere così? Probabilmente ha agito l'attrazione dell'elemento fondamentale per la soluzione, il numero 3, esplicitato nel testo, invece del numero 4 da ricavare come dato nascosto, e l'automatismo di dividere 60 per 3 (che però è divisibile anche per 4). Inoltre, è possibile che alcuni studenti abbiano inteso la frase del testo problema "solo nell'ultimo pomeriggio" come terzo pomeriggio, per cui hanno attribuito metà giornata pomeriggio di lavoro a Hamed e l'altra metà a Harim. Riteniamo perciò, anche sulla base delle argomentazioni successive effettuate in aula, che sia riscontrabile un problema di 'enciclopedia' cioè di informazioni condivise relative alla conoscenza sul mondo, presupposte dai lettori, e che abbia condizionato le risposte degli studenti, i quali hanno probabilmente immaginato una retribuzione del lavoro a ore, come avviene per esempio per molti lavori che sono pagati a tempo effettivamente impiegato e non a cottimo o a giornata.

Ci pare anche questo il caso di un problema, la cui comprensione non sia riducibile al solo testo, ma sia influenzata anche dal contesto che questo evoca, che lo studente è chiamato a rappresentare; riguarda pertanto più le regole del mondo della storia (determinato, reale, verosimile, presunto o supposto), il cosiddetto *storyworld*, che un contesto strettamente matematico o puramente astratto.

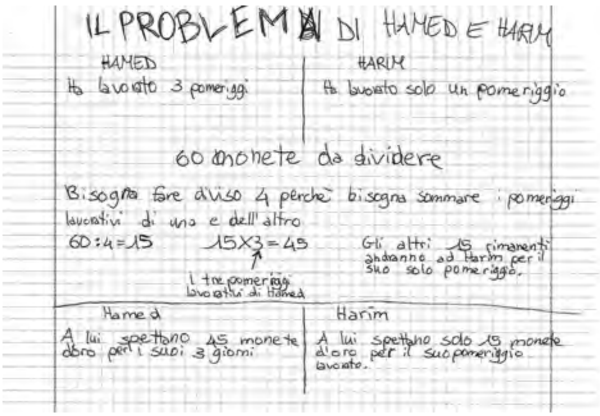


Fig. 2. La soluzione che si basa su una retribuzione a giornata.

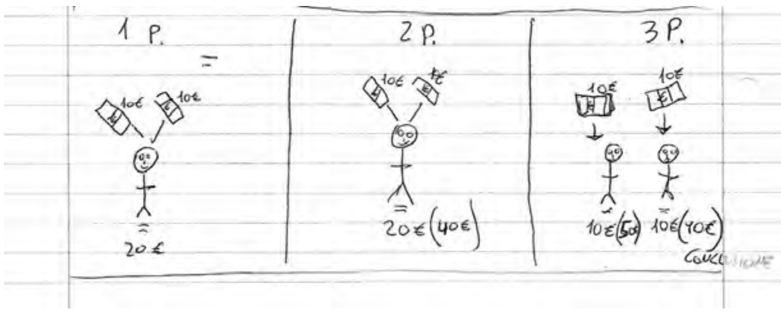


Fig. 3. La soluzione che presuppone una retribuzione per frazioni di giornata.

Fase 3

Per finire, abbiamo sottoposto agli studenti, suddivisi per gruppi misti, un testo-problema nel quale, date le domande, dovevano individuare alcuni elementi fondamentali per la soluzione. Trattasi del procedimento contrario a quello richiesto dall'esercizio precedente: si va dalla domanda al testo.

Per quanto riguarda la metodologia, abbiamo utilizzato gli *item cloze*, il cosiddetto ‘testo bucato’ (vedi Figura 4). Applicato nella didattica di una lingua straniera e della stessa lingua madre, il *cloze* “è un buon sistema per favorire l’apprendimento di unità lessicali e sviluppare le capacità di ragionamento e argomentazione”, cfr. Serianni (2013). Consiste nella “ricostruzione di un brano tramite il reinserimento di alcune parole precedentemente cancellate secondo vari criteri”, cfr. Nuccorini in Serianni (2013). Le finalità del cloze sono di incentivare i processi di lettura e comprensione in maniera attiva, facendo alcune ipotesi sulle parole mancanti ed è utile a capire la rappresentazione mentale dell’allievo rispetto allo stimolo testuale. Come scrive Carla Marello in Serianni (2013), “la somministrazione del cloze può diventare l’occasione per fare lezione di grammatica e di lessico qualora l’insegnante faccia discutere in classe le lacune più interessanti, quelle che hanno ricevuto integrazioni molto diverse e che pochi hanno saputo riempire”.

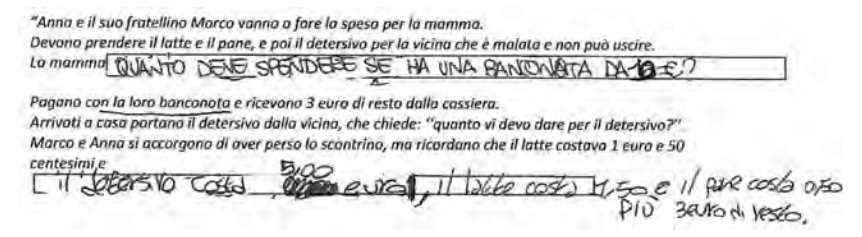
Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma.
Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma

Pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.
Arrivati a casa portano il detersivo dalla vicina, che chiede: “quanto vi devo dare per il detersivo?”.
Marco e Anna si accorgono di aver perso lo scontrino, ma ricordano che il latte costava 1 euro e 50 centesimi e

1. Aiuta Beremiz a completare il testo: INSERISCI DELLE FRASI NELLE CASELLE IN MODO CHE SI POSSA RISOLVERE IL PROBLEMA.
2. Aiuta i due fratelli a capire quanto devono chiedere alla vicina per il detersivo.

Fig. 4. Il ‘testo bucato’.

Analogamente al riassunto, che implica una tipologia di lettura attiva per il processo di riformulazione del testo, lo strumento del *cloze* richiede allo studente di saper cogliere le singole informazioni ricostruendo il significato globale del testo. Impiegato in ambito matematico, rivela la comprensione della natura del problema. Un gruppo, infatti, produce un problema chiuso, inserendo tutti gli elementi necessari per la soluzione (vedi Tabella 8).


"Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma.
Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma QUANTO DEVE SPENDERE SE HA UNA BANCONOTA DA 10 €?
Pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.
Arrivati a casa portano il detersivo dalla vicina, che chiede: "quanto vi devo dare per il detersivo?"
Marco e Anna si accorgono di aver perso lo scontrino, ma ricordano che il latte costava 1 euro e 50 centesimi e
IL DETERSIVO COSTA 5,00 EURO, IL LATTE COSTA 1,50 E IL PANE COSTA 0,50 PIÙ 3 EURO DI RESTO.

Quanto deve spendere se ha una banconota da 10 €? Il detersivo costa 5,00 euro, il latte costa 1,50 € e il pane costa 0,50 più 3 euro di resto.

Tabella. 8: Il problema 'chiuso'.

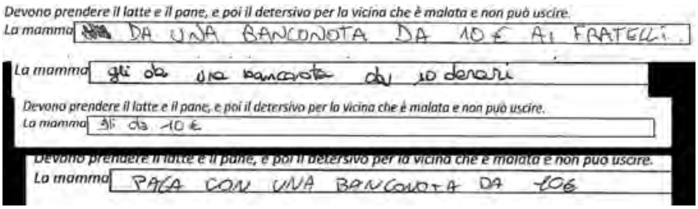
Gli altri gruppi hanno ottenuto tutti un problema risolubile, che sono stati in grado di risolvere, ma ciò che colpisce maggiormente è che in un problema il cui 'mondo della storia' presentava elementi tratti da un contesto quotidiano, quali pane, latte, detersivo, i gruppi, senza consultarsi tra loro, abbiano tutti deciso di inserire 10 come valore del denaro totale (vedi Tabella 9).

Un gruppo, in particolare, ha sentito la necessità di dettagliare la narrazione, precisando che "il pane costa 1,50 al kg" e che i protagonisti "ne comprano 2 Kg" (vedi Tabella 10).

Se è vero che sono informazioni accessorie di natura variabile all'interno del testo, rivelano tuttavia che gli studenti hanno cercato la massima verosimiglianza in questo problema, che evidentemente evoca un contesto familiare. Pertanto, in questo caso, probabilmente anche per ragioni di prossimità rispetto al problema precedente che afferiva al mondo del lavoro, esperienza ancora da compiersi, gli studenti hanno impiegato al meglio le competenze interpretative, spingendosi a utilizzare anche quelle di tipo valutativo.

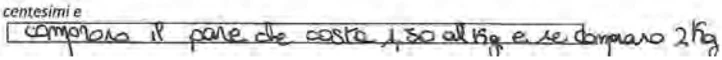
Di fronte a un problema come questo, nel quale quanto a enciclopedia e a processo di identificazione discorso matematico e discorso narrativo sembrano convergere di più, gli studenti hanno compiuto operazioni non solo testuali ma anche di contesto, preoccupandosi loro stessi di ridurre eventuali fratture e ribadendo la continuità tra i mondi narrativo e matematico.

Riteniamo interessante notare come questo atteggiamento si traduca in un'espansione del testo – processo di riscrittura complementare al processo narrativo del riassunto, visto in precedenza – nella quale la descrizione è qui di tipo matematico, diversamente dall'opzione esclusivamente narrativa impiegata per riempire il 'buco' della narrazione nella formulazione della domanda del secondo problema *(cfr. Fase 2)*.


Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma DA UNA BANCONOTA DA 10 € AI FRATELLI
La mamma gli da una bancosta di 10 denari
Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma gli da 10 €
Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma PAGA CON UNA BANCONOTA DA 10€

da una banconota da 10 € ai fratelli.
gli da una banconota da 10 denari
gli da 10 €
paga con una banconota da 10 €

Tabella. 9. Elementi verosimili per la risoluzione di un problema ‘a righe’.


centesimi e
comprano il pane che costa 1,50 al kg e ne comprano 2 kg

Comprano il pane che costa 1,50 al kg e ne comprano 2 kg

Tabella. 10. L’espansione ‘matematica’ di un elemento del testo problema.

Fase 4

Siamo arrivati al punto finale: posto che narrazione e matematica convergano, come riuscire a fare in modo che questa non sia solo una premessa e una condizione alla risoluzione ma diventi anche una risorsa, una strategia? Posto dunque che scattino la presa in carico del problema, l’identificazione e la motivazione, che ci sia un’effettiva continuità, permeabilità e riconoscibilità tra testo e contesto a livello di rappresentazione ed enciclopedia, con il patto di sopensione e il *world building*, che le operazioni di linguaggio siano corrette e rispettose (la narrazione non deve spiegare la matematica secondo un processo di affabulazione), sembra che il tema sia uscire da un certo soggettivismo verso cui la narrazione induce e recuperare un piano di oggettività formale. Quello che Umberto Eco definiva perdersi nei ‘boschi narrativi’, che qui sono diventati matematici.

Per non perdersi, la bussola deve diventare interiore, il che rimanda a un problema – anche educativo e non solo disciplinare – di consapevolezza, essere in grado di usare gli strumenti che il contesto matematico e narrativo offrono in modo sinergetico.

Nel cercare anche di verificare se la nostra azione didattica avesse migliorato le competenze di *problem solving* degli studenti, abbiamo proposto un ultimo testo. Si tratta della famosa storia sulla nascita degli scacchi qui riportata in versione ridotta[2]:

> Il gioco degli scacchi arrivò in Egitto, portato da un ambasciatore persiano che volle insegnarlo anche al Faraone. Questi, entusiasta del gioco, al termine della partita, per testimoniare la propria gratitudine, invitò l'ambasciatore ad esprimere un desiderio qualsiasi che sarebbe stato senz'altro esaudito. L'interpellato rispose che voleva del grano: un chicco sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro sulla terza e così continuando e raddoppiando, fino alla sessantaquattresima casella.
>
> "Una cosa da nulla" proclamò il Faraone, stupito che la richiesta fosse così misera, e diede ordine al Gran Tesoriere di provvedere.
>
> Quanti chicchi di grano deve dare il Gran Tesoriere all'ambasciatore?

Quattro gruppi su cinque hanno risolto il problema in maniera (quasi) corretta[3], di cui uno in maniera completa[4] (vedi Tabella 11), ma ciò che importa constatare non è il risultato quanto l'evidenza del processo.

I chicchi di grano che soddisfano la richiesta del mercante sono 2^{64}
I chicchi di grano che soddisfano la richiesta del mercante sono 2^{64}

Tabella. 11. La soluzione del problema.

Abbiamo notato un miglioramento nelle strategie di lettura: gli studenti hanno attuato una lettura intensiva, compiendo spontaneamente un lavoro sul testo, con modalità diverse, ma tutte attive, quali la numerazione delle righe, la sottolineatura e la paragrafazione e adottando strategie basate sugli aspetti narrativi del problema (vedi Tabella 12). Questi segnali possono essere valutati come indizi tipici del comportamento del 'buon lettore' che può di-

[2] Anche in questo caso, nell'attività svolta in classe abbiamo utilizzato un testo di oltre 2200 caratteri.

[3] In realtà la soluzione corretta del problema è 2^{64}-1. Tuttavia in questo contesto è stata accettata come corretta anche la soluzione 2^{64}, chiarendo poi in una successiva discussione matematica il perché la somma delle potenze di 2 da 0 a n sia 2^n-1. Non ci si è spinti a dimostrare la formula per induzione, ma si è fatta congetturare la regolarità mediante l'uso di un foglio di calcolo.

[4] Gli altri tre gruppi hanno risolto il problema correttamente, ma non sono giunti alla formulazione con la notazione della potenza.

ventare un 'buon solutore', e che coinvolgono "la comprensione del 'problema nel contesto', quindi la comprensione anche linguistica della situazione, con il fine di trasformarlo in 'problema matematico'". Rispetto alla fase iniziale, con queste operazioni testuali sembrerebbero in fase di correzione "le convinzioni degli allievi inerenti lo scopo del problema matematico [...] solitamente rivolte all'atto del risolvere o al mettere in campo conoscenze e abilità, più che alla comprensione della situazione", cfr. Demartini e Sbaragli (2019).

1 C'era una volta un ricchissimo Principe indiano. Le sue ricchezze erano tali 2 che nulla gli mancava ed ogni suo desiderio poteva essere esaudito. 3 Mancandogli però in tal modo proprio ciò che l'uomo comune spesso ha, ... desiderio inesaudibile, il Principe trascorreva le ricompensa desiderasse. Il mercante, con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella. Stupito da tanta modestia, il Principe diede ordine affinché la richiesta del mercante venisse subito esaudita. Gli Abbiamo usato la frase: Il mercante con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella
Abbiamo usato la frase: Il mercante, con aria dimessa chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella.

Tabella. 12. Un esempio di 'lettura intensiva'.

Non solo con operazioni sul testo, ma anche attraverso rappresentazioni del contesto, gli studenti hanno tutti attuato strategicamente una integrazione tra linguaggi. Un aspetto fortemente motivante di congiunzione tra narrazione e matematica è, infatti, immaginare il 'come', che può favorire l'attivazione di processi risolutivi. Una strategia di lettura del testo narrativo consiste nel visualizzare i particolari più significativi del testo ossia immaginarli, raffigurarli mentalmente. È accaduto nel comportamento del 'buon solutore' del primo problema *(cfr. Fase 1)*, che ha utilizzato il linguaggio iconico, per rappresentare il pane. Anche in questo caso, sebbene in negativo, gli studenti hanno provato a raffigurare i chicchi sulla scacchiera, ma si sono resi conto dell'impossibilità di rappresentarli tutti e, di conseguenza, come non fosse possibile contare un numero che andava espresso come potenza.

Infine, oltre agli indizi su un processo di lettura più consapevole e sulla necessità di rendere trasparenti i propri processi mentali che portano alla soluzione, si sono rilevate tracce di un'attività di riscrittura funzionale alla risoluzione del problema: riempire i 'buchi narrativi' o eliminare gli ostacoli alla comprensione sono attività compiute dagli stessi studenti, attraverso strumenti testuali quali il riassunto e l'espansione, con le quali si spinge la narrazione della situazione problematica verso la determinazione di un contesto.

Conclusioni

Abbiamo introdotto un principio di narratività nella formulazione del problema di matematica. Elemento di raccordo tra la matematica e la narrazione è stato il personaggio.

L'approccio narrativo al testo ha favorito la 'presa in carico' del problema da parte degli studenti, con un miglioramento della loro motivazione.

Si è, inoltre, riscontrato un potenziamento delle competenze di *problem solving*, principalmente attraverso la scelta della tipologia di lettura intensiva, usata per capire a fondo e per interpretare al meglio le richieste del testo. Gli studenti hanno impiegato altri elementi come immagini, simboli e disegni per integrare le informazioni che derivavano dai dati testuali.

Il riassunto si è rivelato una strategia nuova ed efficace e un potente strumento di comprensione della situazione problematica, se focalizza e seleziona gli elementi utili alla risoluzione del problema.

Più in generale, si sono evidenziate due tendenze nei protocolli degli studenti, di tipo matematico e narrativo, una più selettiva, l'altra più 'onnivora'. La prima, in base alla rappresentazione quantitativa dei fenomeni, procede per astrazione e ragionamenti ipotetico-deduttivi; la seconda è un modo di attribuire un significato all'esperienza, collocando il problema nel contesto. Se i due atteggiamenti si integrano, si individua una strategia risolutiva pertinente; se divergono, il prevalere della narrazione può essere di ostacolo alla risoluzione.

Infine, è emersa spontaneamente la necessità di rendere trasparenti i propri processi mentali utilizzando espansioni del testo per esercitare un'azione metacognitiva di controllo sul proprio ragionamento.

In futuro, sarà possibile riproporre attività in continuità con questa, per indagare ulteriormente il rapporto tra processi di riscrittura e di risoluzione dei *problemi a righe.*

Riferimenti bibliografici

Branchetti, L., Viale, M., (2016), *Storie geometriche. Quando la scrittura creativa incontra la matematica a scuola*, Lugano, Edizioni Opera Nuova.

Cardinale, C., (2015), *L'arte di riassumere. Introduzione alla scrittura breve*, Bologna, Il Mulino Editore.

Day, R.R. e Bamford, J., (2002), *Top Ten Principles for Teaching Extensive Reading*, Reading in a Foreign Language, 14(2).

Demartini, S. e Sbaragli, S., (2019), *La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo*, Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 5, 9-43.

Duncker, K., (1945), *On problem solving*, Psychological monographs.

Polya, G., (1945), *How to solve it*. Princeton, University Press, [Traduzione italiana: 2016, UTET Università].

Serianni, L., (2013), *Leggere, scrivere, argomentare. Prove ragionate di scrittura*, Bari, Laterza Editore.

Schoenfeld, A. H., (1992), Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In A. G. Douglas (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York, Macmillan Publishing Company.

Tahan, M., (1938), *L'uomo che sapeva contare*, [Traduzione italiana: 2001, Salani Editore].

Tanner, R. e Green, C., (1988), *Tasks for teacher education. A reflective approach*, Harlow, Addison Wesley Longman.

Zan, R., (2007), *La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 30.

Zan, R., (2016), *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Roma, Carocci.

Torino, 21 marzo 2019

Educazione matematica informale: un'esperienza nel quartiere di Scampia a Napoli

Gemma Carotenuto, Daniele Manzone, Cristina Sabena
Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione – Università di Torino

Sunto. *Presentiamo un'esperienza che intreccia educazione matematica informale ed educazione alla cittadinanza, realizzata nel quartiere di Scampia a Napoli attraverso un* summer camp *nei mesi di giugno e luglio 2018 e un* doposcuola *nell'autunno dello stesso anno. Oltre a illustrare esempi di attività, proponiamo una riflessione sulle scelte compiute e sul ruolo dell'educazione matematica informale come motore per una cittadinanza attiva e consapevole.*

Il progetto *Proud of You-Pilot* a Scampia

Il territorio del quartiere di Scampia a Napoli è teatro di una vera e propria emergenza educativa. Il disagio sociale vissuto dalla popolazione adulta – caratterizzato da bassi livelli di istruzione, problemi economici e giudiziari, tossicodipendenza – travolge inevitabilmente anche i minori. In questo scenario, la Scuola non sempre riesce a orientare bambini e adolescenti in difficoltà verso la costruzione di una identità che permetta loro di emanciparsi dal disagio culturale vissuto all'interno delle proprie famiglie. Al contrario, finisce troppo spesso per perdere il suo valore istituzionale agli occhi delle famiglie e dei ragazzi stessi. Se il tasso di dispersione scolastica nella scuola secondaria di primo grado è preoccupante, moltissimi bambini già nel livello primario non frequentano regolarmente la scuola.

Nel corso dell'anno 2018 l'associazione torinese Next-Level ha realizzato il progetto Proud of You-Pilot, finanziato dal Fondo di beneficienza di Intesa San Paolo. Il macro-obiettivo del progetto è stato la prevenzione dell'abbandono scolastico presso l'Istituto Comprensivo Virgilio IV di Scampia. Proud of You-Pilot si è posto nello specifico tre obiettivi, che intrecciano l'educazione matematica e l'educazione alla cittadinanza consapevole:
1) incrementare la frequenza scolastica;
2) aumentare il rendimento scolastico nelle discipline dell'italiano e della matematica;
3) aumentare la fruizione culturale e le opportunità educative del territorio.

Tra le azioni del progetto c'è stata l'attuazione di due percorsi didattici extra-curricolari di matematica (che chiameremo 'PoY-Matematica' nel seguito), rispettivamente durante l'estate e l'autunno del 2018. Questi hanno coinvolto circa cento ragazzi della scuola dalla quarta primaria alla seconda classe della scuola secondaria di primo grado in attività di problem solving e laboratorio matematico in alcune delle zone più significative della città e negli spazi scolastici, attraverso esperienze embodied che hanno valorizzato il movimento di tutto il corpo e, allo stesso tempo, hanno posto l'accento sui processi comunicativi.

Le attività sono state progettate e coordinate da un gruppo di lavoro composto da Cristina Sabena (responsabile scientifico per l'area matematica nel progetto), Gemma Carotenuto (ricercatore-borsista), Daniele Manzone e Paola Lattaro (insegnanti-borsisti), con la collaborazione scientifica di Maria Mellone (Univ. Napoli), mentre Next-Level si è occupata degli aspetti logistici. La realizzazione delle attività è stata affidata ai docenti della scuola che hanno aderito al progetto, con il supporto di studenti di didattica della matematica del Corso di Laurea in Matematica a Napoli, che hanno svolto il ruolo di tutor.

PoY-Matematica si colloca nel filone dell'educazione matematica informale, che viene introdotto nel prossimo paragrafo. In seguito, presentiamo gli obiettivi didattici, matematici e di educazione alla cittadinanza, e le idee-chiave delle scelte progettuali dell'intervento. Successivamente, descriviamo brevemente i due percorsi didattici realizzati. Riflessioni sul ruolo della "educazione matematica critica" ci hanno permesso di rileggere l'esperienza fatta e sono delineate nel paragrafo conclusivo, insieme a un bilancio dell'esperienza.

Educazione matematica informale

L'educazione matematica è generalmente pensata e realizzata a scuola, secondo modalità ben definite (orari, organizzazione disciplinare, valutazioni…) e perseguendo specifici obiettivi stabiliti da apposite istituzioni, che in Italia fanno capo al MIUR. Accanto a questa 'educazione matematica formale', la ricerca in didattica della matematica ha posto fin dagli anni '70 l'attenzione all'apprendimento della matematica che avviene al di fuori della scuola, secondo modi non intenzionali e non pianificati, ma al contrario relativi a situazioni contingenti, come per esempio situazioni di compravendita per i venditori di strada: si vedano su tutte le ricerche di Bishop (1991), Nunes (Nunes et al., 1993) sulla cosiddetta *street mathematics* o *everyday mathematics* (matematica della strada o quotidiana). Da questi studi è emerso anche un nuovo genere di pratiche didattiche d'aula, centrate sui cosiddetti "problemi autentici", in opposizione ai tradizionali problemi verbali. Come diverse ricerche hanno sottolineato, questa trasposizione scolastica di problemi che provengono da contesti di vita quotidiana non è scevra di criticità, che riguardano in particolare la perdita del potenziale di autenticità dei problemi affrontati e la scarsità di contenuti matematici non elementari (per maggiori approfondimenti e riferimenti bibliografici rimandiamo a Nemirovsky, Kelton e Civil, 2017). Anche a fronte di queste limitazioni, più recentemente è emersa l'attenzione per quella che Nemirovsky, Kelton e Civil (2017) chiamano 'educazione matematica informale', che si realizza attraverso spazi di apprendimento intenzionalmente progettati e collocati al di fuori dell'istituzione scolastica (ad es. percorsi didattici strutturati, come i *summer camp*, o esibizioni ospitate nei musei di scienze). Le caratteristiche principali degli spazi di educazione informali, che li differenziano dall'ambiente scolastico, sono:

- la partecipazione di chi apprende è volontaria; inoltre, gli allievi sono relativamente liberi di seguire i propri interessi e possono perciò influenzare l'andamento delle attività;
- i confini disciplinari sono fluidi (usuali sono le connessioni con l'arte, la letteratura, le altre scienze, la tecnologia ecc.);
- non sono presenti forme tradizionali di valutazione (di solito l'apprendimento è documentato, ma gli allievi non sono valutati individualmente).

Musei ed esposizioni costituiscono gli spazi più usati per questo tipo di educazione, i cui obiettivi "non consistono nel mediare o risolvere le tensioni tra la matematica-a-scuola e la matematica al-di-fuori-della-scuola, ma di coltivare nuovi spazi sociali in cui i confini del lavoro matematico non sono necessariamente posti dalle tradizioni curricolari, libri di testo e test valutativi, e sono quindi più aperti a cosa i partecipanti ricordano, inventano, associano o provano" (*ibid*., pag. 970, traduzione degli autori). In questo modo, si ha a disposizione un grande potenziale nel veicolare visioni alternative sulla natura della matematica (in opposizione a quelle, spesso negative, create in ambiente scolastico) e nel coinvolgere in attività matematiche ciascun partecipante secondo creatività e personalità proprie. Le attività realizzate in PoY-Matematica si collocano in questo filone, ma trascendono gli spazi museali per andare a considerare l'intera città di Napoli come spazio adatto per una educazione matematica informale.

Obiettivi didattici e idee-chiave di PoY-Matematica

Gli obiettivi didattici considerati in fase di progettazione dei due percorsi sono stati di diverse tipologie. Ci si è posti infatti obiettivi disciplinari e obiettivi trasversali.

Gli obiettivi matematici cognitivi per il *summer camp* sono stati determinati a partire dalle esigenze percepite dai docenti della scuola coinvolti, che sono state raccolte a priori attraverso interviste, ma anche tenendo in considerazione la grande occasione offerta dal progetto di esplorare dal punto di vista matematico i luoghi cittadini. Si è deciso perciò di lavorare nell'ambito della misura di superfici in geometria piana, al fine di ri-scoprire e dare significato alle formule delle aree di rettangoli, parallelogrammi e triangoli e di riflettere sulle relazioni di equiscomponibilità e di equiestensione. Per il doposcuola autunnale, invece, si è scelto di lavorare nell'ambito di dati, relazioni e funzioni, con l'obiettivo di esplorare il sofisticato oggetto matematico del grafico di funzione a partire da esperienze di movimento e attraverso l'utilizzo di sensori.

Parallelamente, PoY-Matematica si è posto l'obiettivo di lavorare per il miglioramento degli atteggiamenti degli allievi verso la disciplina. Ispirati dal modello tridimensionale di atteggiamento verso la matematica[1], dovuto a Di Martino e Zan (2010), tra gli obiettivi degli interventi didattici sono stati considerati: un coinvolgimento emotivo positivo nelle attività, una riflessione sulla propria visione della disciplina e una percezione soddisfacente delle proprie competenze in matematica. Pur convinti della necessità di tempi lunghi per un efficace e durevole lavoro sugli atteggiamenti, questi obiettivi sono stati concepiti come concorrenti a un'esperienza di rottura con l'usale pratica matematica vissuta in classe, grazie alla preziosa occasione offerta dal progetto di essere immersi in un contesto di educazione matematica informale.

Inoltre, gli interventi didattici si sono posti obiettivi trasversali nell'ambito dell'educazione alla cittadinanza attiva, orientati alla crescita dei ragazzi come cittadini partecipanti e alla loro emancipazione da confini geografici e sociali. Si è perciò mirato a un avvicinamento degli allievi al mondo istituzionale e culturale, al loro coinvolgimento in forme di confronto democratico e alla partecipazione a occasioni di competizione leale. Tali obiettivi sono in linea con il documento ministeriale *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari* (MIUR, 2017) in cui si sottolinea come lo sviluppo di competenze matematiche di tipo comunicativo e argomentativo siano "rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti" (p. 12).

I diversi obiettivi prefissati a priori si sono tradotti in tre *idee-chiave* di tipo metodologico che hanno caratterizzato tutte le attività proposte all'interno di

[1] Secondo questo modello, l'atteggiamento verso la matematica viene ricondotto a tre dimensioni principali: visione della disciplina, senso di autoefficacia ed emozioni.

PoY-Matematica, pur nella loro grande eterogeneità:

- Sfida di problemi complessi: non sono state proposte attività che potessero essere percepite dai ragazzi come interventi di recupero, ma piuttosto problemi matematici sfidanti, che richiedevano ad esempio la modellizzazione geometrica di grandi spazi della realtà o la gestione del sofisticato strumento matematico del grafico di funzione. Tale scelta deriva principalmente dagli obiettivi di lavoro sugli atteggiamenti: al miglioramento del senso di autoefficacia e alla proposta di una visione della matematica che non fosse ridotta all'esecuzione di semplici procedure, ma come campo in cui è necessario lavorare in gruppo.
- Coinvolgimento di tutto il corpo e scoperta di significati matematici: sia fuori dagli ambienti scolastici, durante il *summer camp*, che al loro interno, nel doposcuola autunnale, non è stata trascurata la dimensione del corpo e del suo movimento, vista sia come canale per l'apprendimento matematico, facilmente accessibile anche per coloro che dimostravano gravi carenze linguistiche, sia come fonte di emozioni positive da associare all'attività matematica.
- Focus sui processi di comunicazione e di argomentazione: molta attenzione è stata posta nella promozione di momenti di dialogo e di confronto. Questi hanno interessato l'ambito matematico, al fine di risolvere i problemi posti e rispondere alle esplicite richieste comunicative che contenevano, ma sono stati anche occasione per riflettere su tematiche di carattere sociale. Alla base di questa scelta c'è stata la promozione di una visione dell'apprendimento della matematica che passa attraverso il confronto con i pari e con i formatori e, parallelamente, la volontà di creare occasioni di confronto democratico e rispettoso, nell'ottica di un'educazione alla cittadinanza attiva e consapevole.

Il summer camp: giovani architetti in giro per la città di Napoli

Il percorso didattico del *summer camp* ha previsto quattro uscite mattutine per ognuno dei due gruppi in cui sono stati divisi i circa 70 ragazzi partecipanti, ciascuna della durata di circa 3 ore, nei mesi di giugno e luglio 2018. Le attività, riconducibili al nucleo tematico della misura in geometria piana, sono state caratterizzate dalla presenza di problemi la cui risoluzione ha previsto l'alternarsi di compiti nel macrospazio e nel microspazio, e in cui l'*esplorazione dei luoghi con tutto il corpo* e la *manipolazione di artefatti* hanno contribuito alla costruzione di significati matematici. A fare da sfondo alle attività sono stati quattro luoghi della città di Napoli, significativi dal punto di vista sociale, culturale, storico e paesaggistico: il pontile nord di Bagnoli, i laboratori di Città della Scienza, il Parco del Virgiliano e le terrazze di Castel dell'Ovo.

La *scoperta della città di Napoli* ha contribuito a motivare gli studenti a raccogliere le complesse sfide matematiche che venivano loro proposte, ma è stata anche un mezzo per perseguire gli obiettivi trasversali di orientare geograficamente i ragazzi e di creare un senso di appartenenza all'intera comunità cittadina, che andasse oltre i confini del proprio quartiere.

Fig. 1. La mappa delle municipalità e dei quartieri della città di Napoli utilizzata nelle attività matematiche.

I ragazzi hanno affrontato tre problemi, che sono stati posti loro attraverso l'adozione dell'espediente narrativo della corrispondenza con un geometra del comune di Napoli e con il direttore di un giornale cittadino. Entrambi hanno inviato delle lettere ai ragazzi, chiedendo il loro aiuto per la risoluzione di compiti matematici. A fare da sfondo alla risoluzione dei tre problemi è stata creata infatti la cornice motivazionale in cui ogni ragazzo ha interpretato il ruolo di un architetto appartenente a una piccola squadra, all'interno della quale ha partecipato a un lavoro di gruppo. Le squadre dei piccoli architetti hanno fatto dei sopralluoghi in giro per la città, dove hanno esplorato il territorio, costruito un modello matematico del problema e proposto possibili (e non univoche) soluzioni. I *processi di comunicazione* sono stati un aspetto essenziale delle attività: gli architetti hanno avuto bisogno di interpretare le lettere che sono state recapitate loro, comprendendone la richiesta matematica, di confrontarsi continuamente all'interno delle loro squadre per risolvere i problemi e, infine, di rispondere per iscritto al geometra e al direttore del giornale, producendo a loro volta delle lettere.

Il geometra, dichiarandosi poco abile in matematica, si è rivolto due volte agli allievi della scuola per chiederne l'aiuto. Una prima volta ha posto loro il problema di stabilire il numero massimo degli invitati alla festa con cui il comune voleva celebrare i maturandi dell'anno e per cui era stata individuata come sede il pontile nord di Bagnoli. Si tratta di un luogo molto esteso (macrospazio), approssimabile a un rettangolo il cui lato più lungo misura quasi un chilometro e il più corto circa 18 metri, che i ragazzi hanno esplorato muovendosi con tutto il corpo.

Fig. 2. Il pontile nord di Bagnoli: a sinistra, il pontile è ripreso da un'immagine satellitare; al centro, un gruppo di allievi percorre il pontile allo scopo di misurarne la superficie; a destra, un gruppo di studenti risponde alla prima lettera del geometra con il supporto di un tutor.

Gli allievi hanno affrontato il sotto-problema della misurazione della superficie del pontile facendo emergere nei diversi gruppi una grande varietà di strategie, dipendenti dai diversi elementi architettonici su cui si sono ritrovati a focalizzare l'attenzione (come i moduli di ringhiera per misurare lunghezze o i differenti elementi della pavimentazione).

Il secondo problema posto dal geometra attraverso una nuova lettera è stato quello di determinare il numero di mattonelle, dall'originale forma di parallelogramma, che sarebbe stato necessario per pavimentare una terrazza triangolare del Parco del Virgiliano. Anche questa seconda attività ha coinvolto i ragazzi nell'esplorazione di un luogo molto esteso, per individuare la terrazza a cui si riferiva il geometra e successivamente per costruire un modello matematico del problema.

Fig. 3. La terrazza del Virgiliano: a sinistra, un'allieva impegnata nell'individuazione della terrazza a cui si riferisce la seconda lettera del geometra; a destra, un gruppo di allievi interpreta la stessa lettera con l'aiuto di un docente.

Fig. 4. Attività di modellizzazione sulla terrazza del Virgiliano: a sinistra, un gruppo di allievi con due formatori misura un'altezza del triangolo con cui è stata modellizzata la terrazza; a destra in basso, un gruppo di allievi con l'aiuto di una formatrice rievoca la formula dell'area del parallelogramma.

Il terzo e ultimo problema affrontato nel *summer camp* è stato posto agli allievi attraverso la lettera del direttore di un quotidiano, in cerca di un'idea, originale e al tempo stesso funzionale, per una nuova impaginazione dei giornali che possa aumentarne la vendita. Perché non considerare giornali triangolari o di altre forme? Armati di vecchi giornali, forbici e scotch, i ragazzi hanno creato diversi possibili modelli, rispettando il vincolo di creare pagine in grado di contenere lo stesso numero di caratteri rispetto al quotidiano attuale. Successivamente, hanno valutato e discusso la possibilità di adottare ciascuno dei diversi modelli creati, considerando proprietà relative agli angoli interni o proprietà di simmetria dei poligoni di cui questi ne ricordavano la forma, rispetto alla valenza estetica del possibile quotidiano e alla sua fruibilità di lettura.

Fig. 5. Un momento di attività laboratoriale ospitato in una terrazza di Castel dell'Ovo.

Il doposcuola autunnale: camminate, puzzle, danze e storie

Il percorso del *doposcuola autunnale,* che ha avuto luogo nei mesi di ottobre-dicembre 2018, ha previsto 9 incontri pomeridiani a scuola della durata di un'ora e mezza. I cento ragazzi iscritti sono stati divisi in quattro gruppi, omogenei per i diversi livelli scolastici coinvolti (quarta primaria, quinta primaria, prima secondaria di primo grado e seconda secondaria di primo grado). Ogni gruppo ha partecipato alle attività una volta a settimana e ha svolto parte dell'incontro con un gruppo di un differente ordine scolastico. Si è voluto così fornire ai ragazzi della scuola primaria un'occasione di contatto con i ragazzi e i docenti della scuola secondaria di primo grado, dando loro modo di percepire una continuità tra i due ordini, che è stata valorizzata per contrastare la dispersione scolastica nel delicato momento di transizione da un ordine al successivo.

Il percorso si è articolato in tre fasi. La prima fase, propedeutica alle altre, è stata dedicata all'introduzione dei grafici di funzione attraverso lo strumento didattico del *sensore di posizione* (sperimentato negli ultimi decenni in diversi contesti, per esempio da Arzarello & Robutti, 2009, Ferrara, 2012). Il sensore rileva la distanza di un corpo posizionato nel suo raggio di azione – un cono caratterizzato da un asse centrale lungo 6 metri – e produce sulla LIM il grafico che ne descrive il movimento in un breve intervallo di tempo stabilito dall'utente (per es. 20 secondi). Le attività svolte in questa fase sono state differenziate in relazione ai diversi livelli scolastici, per venire incontro alle abilità e alle esigenze degli allievi e agli stili didattici dei docenti. Ciononostante, possiamo riscontrare delle caratteristiche comuni al lavoro di tutti i gruppi: il focus sulla *percezione del movimento del corpo*, del proprio e di quello di compagni e formatori, e sull'osservazione e l'interpretazione dei grafici prodotti dal sensore. In particolare, indipendentemente dal livello scolastico, tutti gli allievi si sono cimentati nello *scoprire* e *spiegare* (Cusi, Morselli & Sabena, 2017): il legame tra la quota di un punto del grafico nel piano cartesiano e la distanza dal sensore dell'allievo che esegue la camminata; la relazione tra gli andamenti crescente, decrescente e costante di un grafico e le due possibili direzioni della camminata e la condizione di rimanere fermi.

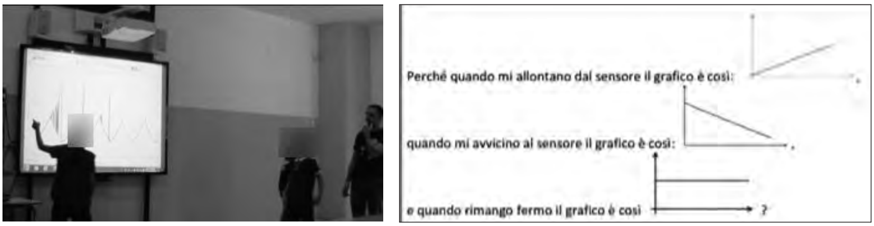


Fig. 6. Grafici e sensori: a sinistra, un gruppo di studenti con il supporto di un insegnante si confronta sul grafico prodotto dal sensore; a destra, un esempio delle domande poste agli allievi tramite scheda.

A fare da cornice alle due fasi successive è stato il contesto di un torneo a squadre. A ogni incontro le squadre in cui sono stati divisi gli allievi hanno affrontato diverse sfide matematiche, di creatività e di comunicazione. Ogni attività ha previsto infatti l'assegnazione di un punteggio a ciascuna squadra, sulla base di criteri stabili a priori e secondo il giudizio degli stessi allievi: essi hanno infatti dialogato tra loro e con gli insegnanti con il fine di valutare il lavoro svolto dalle squadre avversarie *in maniera equa*. Una riflessione sui criteri di valutazione più adatti e su come si potesse valutare le produzioni altrui (e le proprie) ha accompagnato l'attività.

La seconda fase ha coinvolto gli allievi in compiti di completamento di *puzzle di grafici* e di *puzzle di storie*. Sulla base dell'esperienza vissuta in prima persona con il sensore, agli allievi è stato chiesto di completare un grafico "bucato", da cui cioè erano stati cancellati dei tratti, utilizzando dei pezzetti di cartoncino rettangolari su cui erano rappresentati segmenti di lunghezza e orientamento differente. La scelta dei pezzi è stata fatta in accordo a una storia in cui vi era descritta una particolare passeggiata. Successivamente, i ragazzi hanno completato a piacere la storia, decidendo come avrebbe camminato un nuovo personaggio e quindi ne hanno rappresentato la passeggiata disponendo i pezzetti di puzzle su un nuovo piano cartesiano. La fase è terminata con la realizzazione e la presentazione dei cartelloni attraverso cui gli allievi hanno mostrato il loro lavoro, giustificando le scelte di completamento adottate dal punto di vista matematico e narrativo.

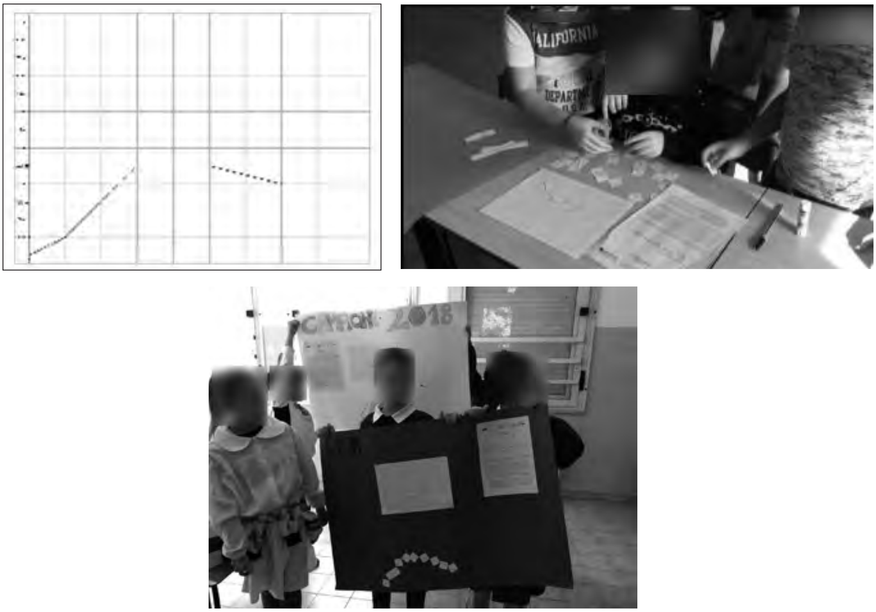


Fig. 7. Grafici e storie: in alto a sinistra, il grafico bucato da completare in accordo alla passeggiata descritta nella storia; in alto a destra, un gruppo di studenti con il supporto di un tutor completa il puzzle di grafici; in basso, una squadra presenta a compagni e formatori il suo cartellone.

La terza e ultima fase ha visto gli allievi impegnati, nei locali appena messi a nuovo della palestra, nell'interpretazione e nella realizzazione di grafici associati a *danze da scoprire o da inventare*. Lo strumento matematico del grafico è stato collegato all'attività ricreativa della danza attraverso l'espediente di un messaggio proveniente da Mary, personaggio precedentemente incontrato nella storia della seconda fase (il nome deriva dalla figura di Mary Sommerville). Mary è una matematica del passato e ha realizzato una danza misteriosa che ha potuto comunicarci grazie a un grafico di posizione.

In un momento iniziale di questa fase ogni allievo è stato invitato a ballare liberamente a ritmo di musica sulle note della canzone de "I Cento Passi" del gruppo dei Modena City Ramblers[2], vincendo la timidezza iniziale di danzare insieme a compagni di scuola e formatori e raggiungendo un buon coinvolgimento emotivo. Successivamente, i formatori hanno mostrato un primo pezzo di grafico della danza di Mary, accompagnato dall'indicazione dell'intervallo esatto a cui corrispondeva nella canzone ("*Allora dimmi se tu sai contare, dimmi se sai anche camminare, contare, camminare insieme a cantare la storia di Peppino e degli amici siciliani*"). I ragazzi si sono cimentati nel compito di interpretarlo in termini di passi e di tempi, e hanno provato a interpretare il riferimento della scheda che contiene il grafico a un sensore che raccoglie i dati lungo una certa direzione (denominata "verticale"). Così, dapprima in piccoli gruppi e poi tutti contemporaneamente, allievi e formatori hanno eseguito il primo pezzo di danza, facendo attenzione ai passi indicati dal grafico, ma anche aggiungendo con creatività i movimenti delle braccia. Ma Mary è andata solo avanti e indietro? Come avrebbe potuto fare a indicare una danza che segue anche altre direzioni? Se ne è discusso, e solo dopo che sono emerse possibili soluzioni rappresentative, si è mostrato agli allievi un nuovo pezzo di grafico, che si riferiva questa volta a un "sensore laterale"[3]. La danza da eseguire è diventata così più articolata e i gli allievi si sono mossi in due diverse direzioni, oltre che in due diversi versi, come già fatto in precedenza.

[2] Come spiegato più avanti, il testo della canzone fa riferimento alla storia di Peppino Impastato e alla sua lotta contro la mafia siciliana.

[3] I due sensori sono pertanto immaginati raccogliere dati lungo direzioni perpendicolari l'una all'altra, e denominate "verticale" e "laterale".

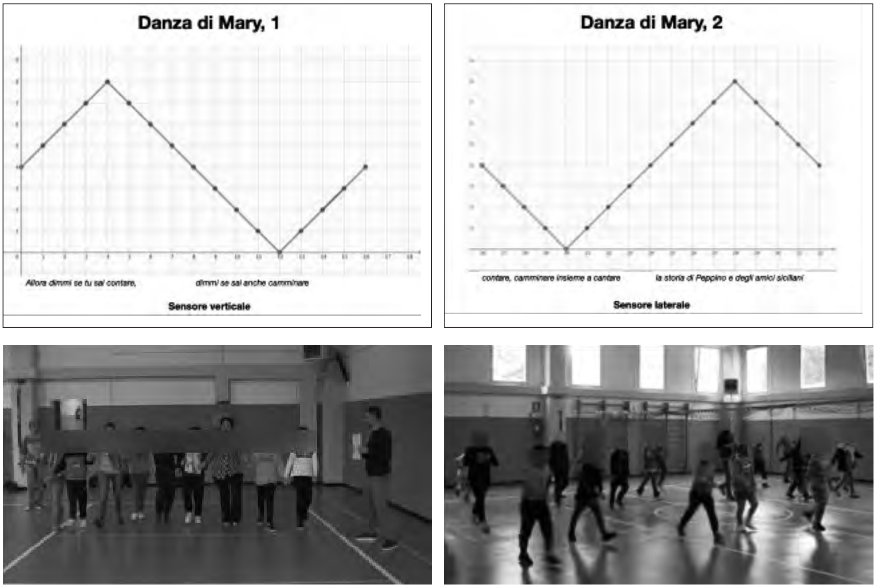


Fig. 8. La danza di Mary: in alto, i due grafici rappresentanti la danza di Mary. In basso a sinistra, un momento dalle prime prove di interpretazione del grafico in piccolo gruppo; in basso a destra, un'immagine dalla danza eseguita a grande gruppo.

Nella seconda parte di questa fase, una sfida più complessa è stata lanciata agli allievi: è stato chiesto loro di inventare e poi rappresentare con un grafico una nuova danza idealmente destinata a un'altra matematica già incontrata in PoY-Matematica, Ipazia. Gli allievi si sono accordati all'interno delle loro squadre sui passi da eseguire e su eventuali movimenti di altro tipo, come quelli delle braccia o i salti sul posto. Ogni squadra ha quindi prodotto un cartellone attraverso il quale ha presentato la propria danza a compagni e formatori prima di interpretarla al ritmo di musica. Anche il cartellone è stato oggetto di valutazione tra pari, secondo i criteri della *correttezza* e della *creatività* precedentemente concordati tra tutti i partecipanti.

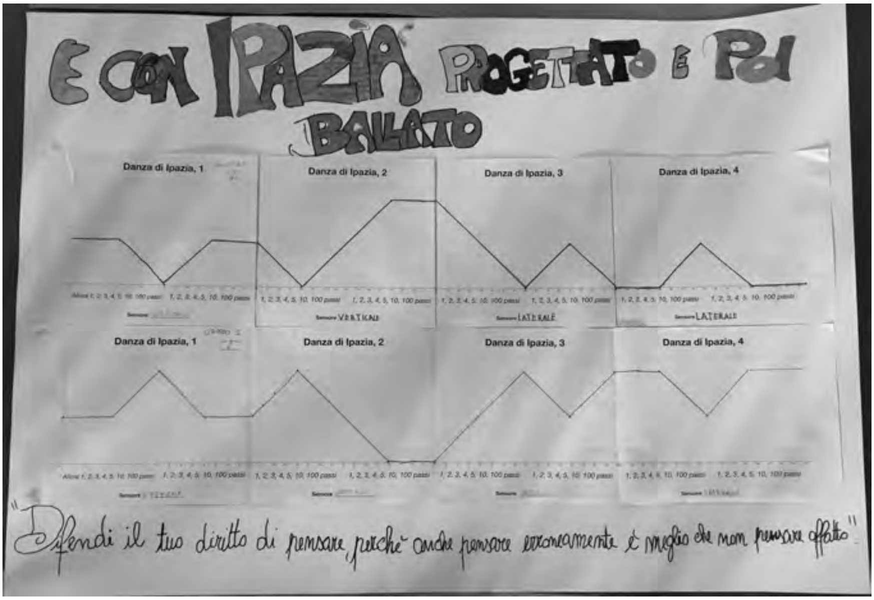


Fig. 9. Il cartellone con cui un gruppo di allievi ha rappresentato la danza da loro inventata: i due grafici indicano i passi per ciascuno dei due sotto-gruppi in cui hanno deciso di suddividersi.

Il percorso del doposcuola autunnale è stato anche *un'occasione per dialogare e confrontarsi* con i ragazzi su due tematiche che in fase di progettazione sono sembrate particolarmente significative in relazione al contesto in cui si stava operando: *la lotta ai pregiudizi di genere* e *la lotta alle mafie*. La prima è stata introdotta attraverso la lettura di storie di due grandi figure femminili del mondo della matematica, in qualche modo legate alla città di Napoli: Mary Sommerville, astronoma e matematica nata nella campagne scozzesi alla fine del diciottesimo secolo, che scelse Napoli per trascorrere gli ultimi e felici anni della sua vita e che nella città è sepolta, e Ipazia, matematica, astronoma e filosofa greca, la cui figura risplende in un murale sulla facciata di un edificio dei Quartieri Spagnoli che da sempre ospita iniziative dedicate alle donne. Si tratta di due figure femminili, che in epoche e con maniere e risultati diversi, hanno dovuto lottare contro il pregiudizio di genere per affermarsi nella comunità scientifica, e nella società. La tematica della lotta alle mafie è stata invece introdotta partendo dall'ascolto attento del testo della canzone scelta per la danza "I Cento Passi": questo è stato infatti il pretesto per raccontare e discutere della figura di Peppino Impastato, giornalista e attivista siciliano, vittima di mafia per la sua opera di denuncia contro le attività di Cosa Nostra.

Fig. 10. Un momento di confronto collettivo sulla lotta ai pregiudizi di genere.

Un bilancio dell'esperienza

Su richiesta esplicita dell'ente finanziatore in relazione agli obiettivi specifici del progetto, gli studenti sono stati sottoposti a una valutazione individuale degli apprendimenti (aspetto, questo, in contrasto con i caratteri dell'educazione matematica informale esposti sopra), svolta attraverso tre test (pre-test, test dopo il *summer camp*, test finale). L'analisi quantitativa dei dati mostra un certo miglioramento degli studenti che hanno partecipato più assiduamente ai percorsi PoY-Matematica, accompagnato da una maggiore frequenza scolastica nei giorni in cui avvenivano le attività del doposcuola autunnale.

Al di là di queste 'prove provate' vogliamo rivolgere la nostra riflessione su quelli che a nostro avviso hanno costituito punti di forza e criticità del progetto.

Tra le criticità emerse, ne segnaliamo due, che non sono estranee ad altri percorsi didattici innovativi:

- la necessità di tempi più lunghi di un anno solare, al fine di incidere in maniera significativa e perdurante sulle competenze e sugli atteggiamenti degli allievi (tempi previsti nel progetto iniziale, poi purtroppo non finanziato);
- la mancanza di una formazione più lunga e strutturata dei formatori, che includa spazi di co-progettazione con i ricercatori.

Tra i punti di forza, segnaliamo innanzitutto il coinvolgimento positivo degli allievi che hanno partecipato più assiduamente alle attività: essi hanno dimostrato una significativa motivazione nell'accettare la sfida di compiti matematici complessi, hanno espresso emozioni prevalentemente positive e stabilito buone relazioni con compagni e formatori. A nostro avviso, questo è un frutto prezioso delle scelte metodologiche fatte a partire dalle idee-chiave che hanno ispirato fin dall'inizio la progettazione dei due percorsi e che sono state descritte nel terzo paragrafo:

- Sfida di problemi complessi;
- Coinvolgimento di tutto il corpo e scoperta di significati matematici;
- Focus sui processi di comunicazione e di argomentazione;

ma derivanti anche da scelte progettuali implicite quali:

- Laboratorio matematico, che è stato proposto sia nella città sia negli spazi scolastici, dentro e al di fuori dell'aula (palestra);
- Intreccio di aspetti matematici con elementi narrativi e ludici, attraverso corrispondenze fittizie, storie e puzzle;
- Lavoro collaborativo tra gli allievi, con il supporto di formatori (lavori di gruppo, discussioni collettive).

In contrapposizione a metodologie (purtroppo ad ampia diffusione) che propongono agli allievi con difficoltà in matematica delle scorciatoie cognitive che smorzano o annullano ogni complessità, la nostra scelta di fondo è stata quella di *proporre problemi e argomenti complessi*, non trascurando i processi argomentativi e comunicativi (pur nella consapevolezza – e anzi anche per quella – delle grandi difficoltà linguistiche della maggior parte degli allievi).

A questo proposito ci sembra interessante la discussione condotta da Skovmose e Penteado (2012) sul tema della relazione tra educazione matematica e democrazia durante 64° convegno della *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching* dedicato a tale tema (CIEAEM64). Gli autori partono dalla critica a una visione (che chiamano 'prospettiva moderna sulla matematica') secondo cui la matematica viene celebrata come strumento intrinsecamente democratico. Contrapposta a questa visione, sviluppano una 'prospettiva critica sulla matematica', secondo la quale è importante considerare la matematica scevra da valori prestabiliti, perché la razionalità matematica può accompagnarsi a diversi tipi di valori:

> la matematica ha bisogno di essere analizzata criticamente e non celebrata in generale, perché può asservirsi a interessi politici e socio-economici diversi, anche quelli meno democratici. Sviluppare tale critica è una importante sfida per la didattica della matematica (p. 19, nostra traduzione).

A supporto di questa tesi, Skovmose e Penteado sottolineano le caratteristiche di una educazione matematica tradizionale:

- le attività sono definite da un libro di testo;
- gli esercizi hanno procedure univoche e un'unica soluzione, che richiedono ruoli esecutori e nei quali nulla viene posto in discussione;
- eliminare gli errori è uno degli obiettivi principali dell'educazione ("fare esercizi senza errori" è equiparato a "imparare la matematica");
- le performances degli studenti devono essere valutate (dal docente, da test standardizzati).

Gli autori evidenziano così come una educazione matematica di questo tipo non vada nella direzione di una didattica attenta agli ideali democratici. Al contrario, essa prepara gli allievi a ciò che chiamano '*prescription readiness*', ossia l'essere pronti all'eseguire comandi e prescrizioni.

In sintesi, gli autori ci mettono in guardia dalla facile tentazione di presupporre connessioni intrinseche tra matematica ed educazione matematica, da una parte, e aspirazioni democratiche, dall'altra. Al contrario: tali relazioni sono contingenti. Nel caso di PoY-Matematica, le scelte fatte contrastano in modo forte con la didattica tradizionale descritta qui sopra e ci sembrano coerenti con un approccio didattico attento agli ideali democratici.

Inoltre, gli autori identificano tre aspetti cruciali per una didattica che miri all'educazione di cittadini democratici e consapevoli, soprattutto in contesti di svantaggio socio-culturale: *prospettive*, *significati* e *possibilità*. Ci soffermiamo sui primi due, che riteniamo prossimi al nostro discorso.

Le *prospettive* sono le opportunità che il contesto sociale, politico, economico e culturale degli allievi fornisce loro. Sono influenzate da parametri determinabili su base statistica (ad esempio il salario medio), ma anche dall'esperienza personale dei singoli individui, che include le loro aspettative, le speranze e le frustrazioni. Le prospettive sono fondamentali costituenti delle motivazioni per l'apprendimento: le aspirazioni e le speranze degli studenti forniscono energia al processo di apprendimento. Quindi una prospettiva guasta (o guastata) può rivelarsi uno degli ostacoli più devastanti per l'apprendimento.

Il *significato* di una azione per un certo soggetto (pensiamo a uno studente) viene collegato dagli autori non solamente al contesto e alle esperienze del soggetto (per esempio, la famigliarità con un certo argomento), ma anche alle *intenzionalità emergenti*; e, quindi, alle prospettive emergenti. Per questo motivo, rivestono grande significato e pregnanza per studenti in contesti fortemente socio-svantaggiati (come, nel caso delle ricerche degli autori, townships in Sudafrica o bidonvilles in America Latina) anche attività con software di geometria dinamica. Questo tipo di attività si ricollega all'immaginare nuove possibilità per la propria vita ("Questo potrebbe fare per me!") e ha pertanto significato per tali studenti, anche se è lontanissimo dal contesto quotidiano degli allievi, che a casa non hanno un computer, e dalle loro esperienze pregresse.

Nella progettazione di PoY-Matematica, abbiamo provato a creare attività a cui gli allievi potessero attribuire un significato che derivasse non direttamente dalle loro esperienze quotidiane, ma piuttosto da possibili prospettive emergenti. In un contesto sociale in cui pochi sono i contatti con il mondo istituzionale e culturale e in cui le donne sono spesso messe da parte a causa di un pregiudizio di genere, abbiamo perciò deciso di servirci dell'espediente della richiesta di aiuto da parte di due professionisti, il geometra del comune e il direttore del quotidiano, e di coinvolgere nella narrazione e idealmente nella danza (oltre che nei momenti dedicati esplicitamente alla discussione) due figure femminili di scienziate del passato, esempi di indipendenza e libertà di pensiero.

Concludiamo osservando che il coinvolgimento in un progetto di questo tipo ha fatto sì che, come progettisti, ci interrogassimo a lungo sui significati che gli allievi avrebbero attribuito alle attività che avremmo proposto loro e su quali potessero essere gli obiettivi primari di un intervento didattico come quello di PoY-Matematica. Alla luce di questa esperienza, vista anche la ricchezza delle riflessioni, matematiche e non, che sono emerse dagli allievi e dai formatori, ci sentiamo di affermare che una progettazione attenta ai significati e che abbia come traguardi espliciti non solo apprendimenti matematici, ma anche obiettivi di educazione alla cittadinanza attiva, sia una sfida importante per l'educazione matematica in tutti i contesti, anche in quelli in cui gli ideali democratici tendono ad essere dati per scontato dagli educatori.

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare l'associazione Next-Level e tutti coloro che hanno dato il loro contributo per la realizzazione di PoY-Matematica, con passione e professionalità: Maria Mellone, Paola Lattaro, i tutor Christian Bisogni, Simone Esposito, Luisa Ferrara, Miriana Gagliano, Ivano Vettigli, i docenti della scuola Roberta Cuomo, Maria Luigia Cuozzo, Maria Ferrigni, Benedetta Maione, Salvatore Sarnataro, Maria Vallefuoco, Giosuè Verde e la dirigente Lucia Vollaro.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, Ferdinando e Robutti, Ornella (2009), "Embodiment e multimodalità nell'apprendimento della matematica", *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32, A-B n. 3, p. 243-268.

Bishop, Alan (1991), *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Boston, Kluwer.

Cusi, Annalisa, Morselli, Francesca e Sabena, Cristina (2017), "Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd", *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, vol. 9, n. 14, *Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze*, p. 91-107.

Di Martino, Pietro e Zan, Rosetta (2010), "*Me and maths*: towards a definition of attitude grounded on students' narratives", *Journal of Mathematics Teachers Education,* vol. 13, n. 1, p. 27-48.

Ferrara, Francesca (2012), "*Sensori di moto e didattica della matematica: Esperienze dalle classi*", *Bricks,* vol. 2, n. 4, p. 129-136.

MIUR (2017). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari.* Reperibile online al sito: https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2.

Nemirovsky, Ricardo, Kelton, Molly L. e Civil, Marta (2017), "Towards a vibrant and socially significant informal mathematics education". In J. Cai (a cura di), *Compendium for Research in Mathematics Education,* p. 968-980, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, Terezinha, Schliemann, Analucia D. e Carraher, David W. (1991), *Street mathematics and school mathematics*, New York, Cambridge University Press.

Skovmose, Ole e Penteado, Miriam Godoy (2012), "*Mathematics education and democracy: an on-goign challenge*", *International Journal for Mathematics in Education,* vol. special issue, n. 4, p. 15-29. Reperibile online al sito: http://www.hms.gr/sites/default/files/subsites/publications/issues_files/HMS_i_JME_vol4_0.pdf.

Torino, 28 marzo 2019

Allegato A. La lettera inviata dal geometra Righelli (personaggio di invenzione) agli studenti di Scampia per ringraziarli dell'aiuto ricevuto e per proporre loro un nuovo problema.

COMUNE DI **NAPOLI**

OGGETTO: Ringraziamento e Pavimentazione di una splendida terrazza

Gentilissimi ragazzi,

Vi ringrazio di cuore per le lettere di risposta che ho ricevuto la scorsa settimana: ora il numero di invitati per la Festa d'Estate 2018 non è più un problema qui in ufficio!

Approfitto del vostro ingegno e della vostra disponibilità per chiedervi aiuto per un nuovo progetto, che è stato appena affidato al mio ufficio.

In un luogo molto panoramico di Napoli, sopra un alto crostone di roccia che cade a picco sul mare e che si può ammirare dal pontile di Bagnoli, c'è un parco pubblico, noto da sempre a scrittori e poeti di tutto il mondo per le sue vedute mozzafiato. Si chiama **Parco del Virgiliano**.

Il Comune ha deciso di pavimentare una delle sue splendide terrazze: per capirci, si tratta della terrazza *più vicina alla grotta di Seiano*. L'estroso architetto che lavora qui al Comune ha scelto le mattonelle molto pregiate e originali che vedete qui a lato, la cui forma è senza dubbio molto particolare! (La prossima settimana ne riceveremo un campione in ufficio e ve ne invierò una copia in cartoncino alla vostra scuola).

Occorre ordinarle, ma di *quante mattonelle avremo bisogno per la nostra pavimentazione*?

Io non ho mai compreso il perché di certe formule della geometria e così non le ricordo mai quando servono! Chiederei a voi di risolvere questo problema andando direttamente al parco nei prossimi giorni...ma di andarci preparati per capire cosa occorre misurare e perché!

Aspetto una Vostra risposta.

Napoli, 18 giugno 2018

Geom. Gianfranco Righelli

Gianfranco Righelli

I Gesuiti e gli Insegnamenti Matematici Mondializzazione, Apprendimento Disciplinamento

Luigi Pepe

Università di Ferrara - Emerito

Sunto. *Per cercare di rispondere ad alcune domande di interesse storico e di qualche attualità, il presente lavoro è diviso in brevi paragrafi. Essi riguardano la nascita della Compagnia di Gesù come risposta alla Riforma protestante, gli insegnamenti matematici nei loro Collegi, con particolare attenzione ai manuali di Tacquet e Boscovich. Si descrive anche l'insediamento dei Gesuiti in Piemonte, il loro radicamento, le vicende della Nuova Compagnia dopo la soppressione e il ristabilimento, il legame originario tra Gesuiti e Salesiani. Infine viene mostrato come caratteristiche degli insegnamenti presso i Gesuiti si possano tradurre in precetti didattici di oggi.*

Gli insegnamenti matematici, impartiti nei collegi della Compagnia di Gesù di tutto il mondo, sono ormai oggetto di numerosi studi, in particolare alcuni di questi riguardano Torino e il Piemonte, con insospettati riferimenti alla pratica didattica di oggi. Alcuni lavori sugli Antichi Stati Italiani e l'Italia unita, sono in gran parte confluiti in un corposo volume[1].

L'attenzione viene posta su alcune domande di interesse storico e di notevole attualità:

Da dove vengono i Gesuiti?

Perché i Gesuiti si sono interessati di matematica e del suo insegnamento?

Come i Gesuiti sono entrati in Piemonte e come ci sono rimasti?

La politica scolastica in Italia di questo nuovo secolo ha qualcosa a che fare con la tradizione didattica della Compagnia?

1. La Compagnia di Gesù e la Riforma

La Compagnia di Gesù è un ordine religioso maschile costituito da sacerdoti (padri) e da laici (fratelli coadiutori). Essa fu fondata per contrastare

[1] Pepe (2016). Si vedano anche: Guerraggio-Pepe (2017), Pepe (2018a).

la Riforma protestante, per la diffusione del cattolicesimo nei paesi extra europei, per la formazione delle classi dirigenti dei paesi cattolici, da un nobile spagnolo, Ignazio di Loyola (1491-1556), ed ebbe il riconoscimento papale da Paolo III nel 1540. I gesuiti nel mondo (2015) sono circa 17.600, il più numeroso degli ordini religiosi, ad essi vanno aggiunti i Salesiani, 15.500, con i quali hanno alcune affinità e la cui origine porta proprio a Torino.

La Riforma protestante fu opera principalmente di uomini colti, molti dei quali ecclesiastici come Martin Lutero (1483-1546), frate agostiniano e professore nell'Università di Wittenberg. Le tesi luterane contro le indulgenze, la corruzione del clero e l'organizzazione centralistica della chiesa, del tipo delle tesi che venivano discusse nelle università, furono affisse nel 1517.

Particolare influenza negli ambienti universitari ebbe uno dei primi seguaci di Lutero: Filippo Melantone (1497-1560). Egli era pronipote del celebre umanista tedesco Johannes Reuchlin (1455-1522), che aveva viaggiato in Italia e conosciuto tra gli altri Angelo Poliziano; era stato studente prima all'Università di Heidelberg, la più antica della Germania, poi a quella di Tübingen (fondata nel 1477) dove fu allievo di Johannes Stöffler. Dopo aver dato prova della sua cultura umanistica con una traduzione di Terenzio (1516) e di Cicerone e con la pubblicazione di una grammatica greca (1518), Melantone si trasferì all'Università di Wittenberg, dove prese le difese di Lutero (1521)[2].

Testi letterari e filosofici greci erano stati stampati già nel Quattrocento e nel primo Cinquecento. Aldo Manuzio aveva pubblicato in cinque volumi a Venezia le *Opere* di Aristotele dal 1495 al 1498, ma agli inizi degli anni trenta del Cinquecento restavano ancora inedite le grandi opere della matematica greca in lingua originale: Euclide, Archimede, Tolomeo, Apollonio, Diofanto, Pappo. La lacuna per le prime tre fu colmata da due editori riformati a Basilea. Simon Grynaeus e Thomas Venatorius.

Simon Grynaeus (1493-1541) aveva studiato all'Università di Vienna e insegnato a Buda dove fu imprigionato su accusa dei Domenicani. Liberato si recò da Melantone a Wittenberg e ottenne la cattedra di greco (1524) e di latino (1526) nell'Università di Heidelberg. Qui ebbe nuovamente difficoltà con i colleghi cattolici. Entrato in corrispondenza con Giovanni Oecolampadius fu invitato all'Università di Basilea che Erasmo aveva appena lasciato. Nel 1531 visitò l'Inghilterra per ricerche bibliografiche. Ritornato a Basilea raccolse pareri favorevoli al divorzio di Enrico VIII. Nel 1534 fu chiamato a Wittenberg per sostenere la riforma e prese parte alla rifondazione dell'Università protestante di Tübingen. Come rappresentante delle chiese svizzere intervenne ai

[2] Pepe (2018b): da questo lavoro trae origine questo paragrafo.

colloqui di Worms tra cattolici e protestanti (1540). Grynaeus fu traduttore ed editore a Basilea di diverse opere di antichi autori[3].

Filologo latino, oltre che greco, sua fu la scoperta di un nuovo codice di Tito Livio, conservato nella biblioteca del monastero di Lorsch, nella regione di Worms: Titus Livius, *Ab urbe condita libri CXLII*, Basilea, Frobenius, 1531

Grynaeus curò diverse opere importanti del pensiero greco:

Aristoteles, *Opera omnia*, Basilea, Bebeliou,1531

Proclus, *Compendiaria de motu disputatio*, Basilea, Bebeliou, 1531

Platone, *Opera omnia*, Basilea, Frobenius, 1532

Euclides, editio lingua Graeca, Basilea, Herwegen, 1533

Claudij Ptolemaei Magnae constructionis, id est perfectae coelestium motuum pertractationis, lib. 13. Theonis Alexandrini in eosdem Commentariorum lib. 11, Basilea, apud Ioannem Walderum, 1538

Compose una nuova opera geografica: *Novus Orbis regionum ac insularum veteribus incognitarum*, Basilea, Hervagius, 1532.

Particolare importanza ebbe l'*editio princeps* degli *Elementi* di Euclide in greco accompagnata dai commenti di Proclo al primo libro degli *Elementi*. Per l'edizione di Euclide Grynaeus si servì essenzialmente di due codici, uno conservato a Venezia, che era già stato utilizzato per la prima traduzione diretta dal greco in latino da Bartolomeo Zamberti (1505), l'altro conservato a Parigi. Per Proclo si servì di un codice conservato a Oxford. Manca spesso negli esemplari superstiti in Italia la dedica a Cuthbert Tunstall. Si tratta di un intervento censorio di parte cattolica, che portava anche alla cancellazione sul frontespizio del nome dello stampatore o del curatore riformato.

L'*Almagesto* di Tolomeo, già tradotto in latino in due edizioni veneziane del 1515 e del 1528, fu stampato nel testo greco a Basilea nel 1538 da Symon Grinaeus e Joachim Camerarius a partire da un manoscritto oggi perduto e già appartenuto a Regiomontano[4].

Anche l'*editio princeps* del testo greco delle *Opere* di Archimede fu stampata a Basilea a partire da una copia del codice A, anch'esso oggi perduto, portato da Regiomontano aldilà delle Alpi. Egli aveva anche rivisto e portato con sé nel 1470 la traduzione latina delle *Opere di Archimede* realizzata a metà del Quattrocento da Iacopo di San Cassiano (Iacopo da Cremona), un allievo di Vittorino da Feltre, per volere del papa umanista Niccolò V. Questa traduzione fu stampata insieme all'*editio princeps* greca da un altro umanista riformato:

[3] Cummings (2002).

[4] Pedersen (2011).

Thomas Venatorius (1490-1551):[5] Archimedes, *Opera, quae quidem extant, omnia*, *Eutocius, Ascalonites, In eosdem Archimedis libros commentaria*, Basilea, Herwagen, 1544.

Venatorius era nato a Norimberga, era stato allievo di Schöner e amico di Willibald Pirkheimer. Egli diede alle stampe anche la prima edizione del *De Pictura* di Leon Battista Alberti, contenente anche un 'importante trattazione geometrica: Thomas Venatorius, *De pictura praestantissima, et nunquam satis laudata arte libri tres absolutissimi, Leonis Baptistae de Albertis uiri in omni scientiarum genere, & praecipue mathematicarum disciplinarum doctissimi,* Basilea, Westheimer, 1540

Ai successi delle edizioni a Basilea di Euclide, Tolomeo e Archimede, bisogna aggiungere il parziale insuccesso della prima edizione greca dell'*Arithmetica* di Diofanto. La morte prematura del curatore, Wilhelm Holtzman (1532-1576), Xilander, impedì la stampa del testo greco, ricavato da una copia da due codici italiani, conservati rispettivamente nella Biblioteca Ambrosiana e Vaticana. Solo la traduzione latina dell'opera vide la luce, insieme ad un esteso commento:

Diophanti Alexandrini Rerum Aritmethicarum libri sex. Scholia Maximi Planudis, Basilea, per Eusebium Episcopium, 1575.

Il manoscritto greco pervenne alla biblioteca Palatina di Heidelberg, per poi essere acquisito dalla biblioteca Vaticana (Vat. Pal. gr. 391)[6].

Xilander era stato professore di greco all'Università di Heidelberg. Tradusse dal greco in latino Dione Cassio (1558), Plutarco (1560, 1570), Strabone (1571) e dal greco in tedesco i primi sei libri degli *Elementi* di Euclide. La traduzione latina di Diofanto di Xilander fu rivista e ristampata insieme al testo greco da Bachet de Mézeriac (Parigi, 1621).

I Gesuiti dovettero quindi misurarsi fin dall'inizio con ambienti culturali molto avanzati, per questo dedicarono agli studi molto più tempo di tutti gli altri ordini religiosi e più di tutti questi annoverano tra i loro membri uomini eccellenti nelle arti e nelle scienze più diverse.

2. I Gesuiti e le matematiche

Ignazio, quando ebbe la sua conversione religiosa, non era molto colto, anche se non era quasi analfabeta, come Diderot lo dipinge nell'articolo *Jésuites* dell'*Encyclopédie*. Consapevole però dei suoi limiti e della difficoltà dell'im-

[5] Napolitani (2013).

[6] Meskens (2010).

presa di fondare l'ordine religioso che aveva in mente, trascorse un lungo periodo a Parigi nell'ambito dei Collegi universitari, dove incontrò i primi compagni di fede tra i quali un nobile spagnolo: Francesco Saverio. Ora tra le materie curricolari della facoltà delle arti a Parigi vi era anche la matematica, unita all'astronomia. Si insegnavano i primi libri degli *Elementi* di Euclide, l'aritmetica decimale e la *Sfera* del Sacrobosco: era questa un compendio descrittivo dell'*Almagesto* di Tolomeo, composto da un professore parigino del secolo XIII, Giovanni da Holywood. I corsi a Parigi erano più ordinati di quelli impartiti allora nelle università italiane, che si segnalavano invece per una maggiore libertà lasciata agli studenti e ai lettori. Quando si decise quindi di adottare il *modus parisiensis* nei collegi gesuitici venne naturale prevedere anche un insegnamento matematico. Questo tuttavia non era propedeutico all'insegnamento della fisica e veniva impartito alla fine del corso di filosofia naturale aristotelica, con la quale non si mescolava.

A rafforzare la posizione della matematica nell'insegnamento dei gesuiti venne anche la speciale vocazione della Compagnia per le Missioni. Queste cominciarono con l'appoggio del re del Portogallo in India, in Cina, in Giappone. Ora i missionari erano chiamati a navigare per luoghi sconosciuti e infidi. Quando si insediavano dovevano provvedere a edificare edifici civili, chiese e fortificazioni, costruire orologi solari. Se le popolazioni indigene erano ostili dovevano anche prepararsi alle ostilità. Per essere invece accolti dai governanti dovevano dare prova di scienza e di capacità artistiche. Le loro conoscenze astronomiche ad esempio impressionarono molto i dotti cinesi e i cortigiani dei sovrani dell'India. Praticamente tutte le scienze matematiche: la geometria, l'aritmetica, la geometria pratica, l'astronomia, l'arte di gettare le bombe, l'architettura civile e militare, l'astronomia, meritavano di essere apprese. Chi provvide a fornire i testi di riferimento per tutti questi insegnamenti fu padre Cristoforo Clavio (1538-1612), un gesuita di Bamberga (Franconia, Germania), che si era formato in Portogallo e che insegnò a lungo nel Collegio Romano. Fu questo uno dei primi Collegi della Compagnia, che forniva insegnamenti non solo agli aspiranti a diventare gesuiti, ma anche ad altri prelati, a uomini d'armi, a persone destinate ad occupare alti gradi nella scala sociale. Aprì nel 1551, ma nel 1556, anno della morte di Ignazio, i Collegi erano già diciannove e alla fine del secolo diverse centinaia, diffusi in quasi tutta l'Europa cattolica, dalla Spagna alla Boemia, dalla Francia alla Croazia, dall'Italia al sud della Germania, all'Austria, all'Ungheria, alla Polonia e inoltre erano già presenti in America latina, nelle coste dell'India, in Cina. In questa crescita tumultuosa i Gesuiti furono guidati da un collegamento costante con la sede romana del Generale della Compagnia che impartiva istruzioni particolareggiate ai vari collegi per assicurare l'uniformità degli insegnamenti. Per quanto riguarda la matematica essi furono basati sui testi di Clavio: *Sfera* (1570), *Euclide* (1574), *Aritmetica pratica* (1586), *Geometria pratica* (1606), redatti in latino, lingua ufficiale dei Collegi. Ricordiamo che Clavio fu anche il tecnico di riferimento per la riforma del Calendario, realizzata da papa Gregorio XIII nel 1582. La prima edizione dell'*Euclide* di Clavio è dedicata ad Emanuele Filiberto[7].

3. I Gesuiti in Piemonte

Diversi motivi spinsero i Gesuiti ad insediarsi presto in Piemonte: innanzi tutto la vicinanza a Ginevra diventata con Calvino un centro di irradiazione della Riforma, poi la tradizionale presenza nelle valli alpine dei Valdesi, ma sul loro ingresso nello stato influì anche il personale favore di Emanuele Filiberto di Savoia (1528-1560). Il giovane principe aveva trovato i suoi stati soggetti al re di Francia, che aveva occupato Torino nel 1536. Egli aveva militato con successo nelle truppe spagnole infliggendo ai Francesi la sconfitta di San Quintino (1557). Terminate le ostilità nel 1559 con la pace di Cateau-Cambrésis, Emanuele Filiberto prese gradualmente possesso dei territori piemontesi e nel 1562 entrò in Torino. Già prima aveva le idee chiare sulla necessità di promuovere l'alta cultura e nel 1560 aveva rifondato l'Università piemontese a Mondovì, chiamando docenti di grido come il matematico Giovanni Battista Benedetti (1530-1590) e il celebre letterato Giovanni Battista Giraldi Cinzio (1504-1573), che a Mondovì pubblicò la sua opera più famosa: gli *Ecatommiti* (1565), una raccolta di novelle dalla quale trassero ispirazione anche Shakespeare e Cervantes[8].

L'anno dopo arrivarono a Mondovì anche i Gesuiti che vi si insediarono per due secoli: uno dei primi insegnanti di retorica grammatica e greco fu Roberto Bellarmino (1542-1621). Era già presente in Piemonte un altro dei maggiori scrittori della Compagnia, Antonio Possevino (1533-1611), mandato ad evangelizzare Valdesi e Ugonotti. Gli insegnamenti grammaticali e filosofici nell'Università e nei Collegi Gesuitici, in parte si sovrapponevano e, per dirimere la questione, venne stabilito che si insegnasse grammatica solo nei Collegi e Filosofia solo nelle Università. La questione rimase tuttavia aperta a successivi conflitti[9].

[7] Borgato (1981), Knobloch (1988), Rommevaux (2005).

[8] Roero (1997), Pepe (2008).

[9] Omodeo (2014).

Per quasi un secolo e mezzo i gesuiti a Torino dominarono l'ambiente culturale, e non solo, della debole monarchia sabauda, giungendo nel 1676 alla costruzione dell'imponente nuova sede del Collegio, promossa dal padre Carlo Maurizio Vota e dall'architetto Michelangelo Garove. Per arrivare ad un vero rilancio dell'Università in Piemonte bisognò attendere quindi il consolidamento del regno di Vittorio Amedeo II che nel 1729 varò le Regie Costituzioni universitarie con le quali vietava ai Collegi il conferimento dei titoli dottorali di qualunque genere. I Gesuiti poterono mantenere il loro Collegio, ma gli studenti che intendevano laurearsi dovevano iscriversi all'Università di Torino[10].

Vittorio Amedeo II però si avvalse dell'opera del gesuita Andrea Guevarra per il suo programma di eliminare la mendicità nel Regno. La soppressione dei Gesuiti si ebbe solo nel 1773, quando la Compagnia fu chiusa dalla bolla *Dominus ac Redemptor* di Papa Clemente XIV. Gli immensi patrimoni dei gesuiti negli stati sabaudi al di qua delle Alpi furono incamerati dallo stato: le sole proprietà agricole arrivavano a 20755,49 giornate corrispondenti a 7908.66 ettari[11].

4. I manuali di Tacquet

I libri di Clavio contenevano quasi tutto quello che si desiderava insegnare nei Collegi dei Gesuiti fino alla metà del secolo XVIII, ma non erano un manuale: gli *Elementi di Euclide* ad esempio, nella loro edizione integrale, contenevano sia la geometria piana e solida sia l'aritmetica teorica. Il gesuita belga Andreas Tacquet (1612-1660) era stato uno dei migliori allievi di Grégoire de Saint Vincent, allievo a sua volta di Clavio. Tacquet fu soprattutto un grande professore a Louvain, ebbe allievi molto importanti tra i quali Ferdinand Verbiest (1623-1688), poi direttore dell'osservatorio astronomico di Pechino[12].

Tacquet ci ha lascito due opere didattiche molto apprezzate internazionalmente: *Elementa geometriae* (Antwerp, 1654, 1665, 1672), *Arithmeticae theoria et praxis* (Louvain, 1656: Antwerp, 1665, 1682). I libri elementari di Tacquet, nonostante la presenza capillare in Italia dei Collegi gesuitici, tardarono ad affermarsi, per la diffusione delle opere di Clavio e anche per le numerose edizioni italiane degli *Elementi*. Solo la *Geometria* poté essere ristampata in Italia nel Seicento (Padova, Frambotti, 1674; Tip. Seminarii 1691, 1694). L'opera dovette apparire per l'epoca anche troppo innovatrice.

[10] *Compagnia di Gesù* (1998), Patergnani (2018).

[11] *Compagnia di Gesù* (1998), p. 360.

[12] Bosmans (1918). In questo capitolo e nel successivo seguiremo le parti esposte in lingua inglese in Pepe (2018a).

L'*Arithmetica* di Tacquet (Napoli, Mosca, 1724) è divisa in due parti. La prima in tre libri riprende i libri settimo, ottavo e nono degli *Elementi* di Euclide. L'edizione di riferimento è quella di Clavio, tuttavia l'ordine delle proposizioni (non si fa distinzione tra teoremi e problemi) non è quella euclidea. Il libro primo inizia con la regola per provare che due numeri sono primi tra di loro e continua con la divisione euclidea per trovare il massimo comun divisore di due numeri. Il libro secondo tratta delle proporzioni tra numeri interi: essendo i rapporti numeri razionali non c'è bisogno della lunga trattazione del libro V di Euclide. Nel libro terzo il teorema 18 nell'Euclide di Clavio:

> *Primi numeri plures sunt, omni propositi multitudine priorum numerorum*

diventa in Tacquet:

> *Primi numeri sunt infiniti*

Nel secolo XVII era venuta meno la preoccupazione dei matematici greci di parlare dell'infinito!

Sia Tacquet che Clavio introducono le lettere maiuscole dell'alfabeto latino A, B, C,… nelle dimostrazioni. L'uso delle espressioni letterali è più frequente in Tacquet, rendendo le trattazioni più spedite.

La seconda parte del libro che riguarda l'aritmetica pratica copre tutti gli argomenti dell'aritmetica arabo-indiana: la lettura dei numeri interi, le quattro operazioni, le frazioni, ecc. L'estrazione delle radici quadrate viene estesa alle radici di ordine qualunque attraverso l'espressione letterale delle potenze di un binomio per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Gli esempi sono meno numerosi dei libri di aritmetica pratica di circolazione locale, mancando riferimenti a monete o a pesi e misure di un particolare luogo. Il quarto libro dell'*Arithmetica practica* è dedicato alle più comuni regole del tre: *Regula Societatis, Regula Alligationis, Regula Falsi* e si conclude con lo studio delle progressioni aritmetica e geometrica. L'appendice dell'edizione napoletana è costituita da un opuscolo di Nicola De Martino (1701-1769) riguardante le permutazioni e le combinazioni.

La *Geometria* di Tacquet ebbe nel Settecento in Italia varie edizioni: Padova, Manfré, 1729; Venezia, Hertziana, 1737; Milano, Agnelli 1741; Napoli, Gennari, 1744; Roma, Monaldini, 1745; Bassano, Remondini, 1781 ecc. L'edizione napoletana riprende quella curata a Utrecht da P. Musschenbroek (1724), a sua volta ricavata dall'edizione di Cambridge di W. Whiston (I ed. 1703, III ed. 1722).

La prima significativa differenza con il testo euclideo è l'uso nella *Geometria* di Tacquet delle espressioni letterali con caute contaminazioni con l'algebra che tuttavia facevano condannare dal "purista" George Berkeley (1685-1753) la geometria di Tacquet. Il libro inizia con una *Historica narratio de ortu et progressu matheseos,* secondo la tradizione cinquecentesca delle edizioni di Euclide che attingevano al commento al primo libro degli *Elementi* da parte di Proclo. La divisione in capitoli ricalca gli *Elementi:* libri I-VI, XI, XII. Alla fine mettendo insieme l'*Arithmetica* tutta l'opera viene riformulata, ad eccezione dei libri X e XIII. L'ordine della trattazione è comunque diverso dal testo euclideo in particolare per la teoria delle parallele, che vengono definite rette equidistanti, sottintendendo il quinto postulato e per la teoria delle proporzioni del libro quinto. Oltre ai libri euclidei trovano posto nella Geometria i teoremi di Archimede sulla misura del cerchio e sulla sfera e il cilindro. Vi è anche esposta la trigonometria, elaborata personalmente da Tacquet. Essa compare, insieme all'astronomia e alla geometria pratica nella raccolta delle opere dello studioso (1707). Paradossalmente la Geometria di Tacquet che al suo apparire era apparsa troppo innovativa fu usata nella seconda metà del Settecento come baluardo della tradizione contro la contaminazione "moderna" tra algebra e geometria.

5. I manuali di Boscovich

A metà del Settecento un grande successo editoriale viene a proporsi in Italia dalla Francia: si tratta degli *Elements de géométrie* (Paris, 1741) imperniato sull'uso pratico della geometria e dell'*Algèbre* (Paris, 1746) di Alexis Clairaut (1713-1765). Di queste due opere la prima è la più innovatrice: essa rovescia completamente l'ordine logico euclideo per far posto ad un insegnamento per problemi. La geometria pratica esisteva da tempo, ma qui si tratta di uno dei maggiori matematici dell'epoca che proponeva un'opera di interesse generale. Clairaut ebbe rapporti diretti con Ruggero Giuseppe Boscovich (1711-1787) e l'ambiente romano. Un allievo di Boscovich, Carlo Benvenuti (1716-1789), tradusse in Italiano gli *Elements de géométrie* (Roma, Salomoni, 1751). Si tratta dello stesso editore del corso matematico di Boscovich.

Gli *Elementa universae matheseos* si aprono con le approvazioni della censura ecclesiastica. La trattazione matematica è divisa in cinque parti, ciascuna generalmente ordinata in paragrafi numerati. La prima parte comprende la geometria piana e termina con una tavola di corrispondenze tra l'opera e i primi due libri degli *Elementi* di Euclide. Occupa in tutto solo sessanta pagine. Le parallele sono oggetto della definizione 17 (I, p. 93) "Si chiamano parallele due rette che non si incontrano, né si avvicinano". I risultati sulle parallele (teoremi 27, 28, 29, 30 di Euclide) sono ricavati senza esplicitare il *Quinto Postulato*. La teoria delle proporzioni viene trattata aritmeticamente.

Gli *Elementa arithmeticae* comprendono le quattro operazioni tra interi e tra frazioni decimali, gli irrazionali “numeri surdi”, tre tavole f.t. esemplificano le operazioni; seguono le proprietà delle proporzioni, le progressioni e i logaritmi: Si studiano prima le progressioni geometriche e aritmetiche poi i logaritmi: se i numeri sono in progressione geometrica i loro logaritmi sono in progressione aritmetica. L’ultimo capitolo tratta della proporzione armonica.

Gli *Elementa solidorum* costituiscono la terza parte del volume. Anch’essa, come gli elementi piani si chiude con una tavola di corrispondenze con gli Elementi di Euclide (libri XI e XII). Si va dalle posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, al volume e alla superficie della sfera. Per i volumi dei solidi si ricorre al metodo degli indivisibili di Cavalieri.

Dopo la geometria solida è la volta della *Trigonometria*, “Ars resolvendi triangula”. Si comincia con la definizione delle funzioni circolari, si prosegue con la costruzione delle tavole trigonometriche, l’uso delle tavole. Si passa poi alla trigonometria piana, cioè al modo di risolvere i triangoli rettangoli e i triangoli qualunque (dati tre elementi di un triangolo dei quali almeno un lato trovare gli altri tre). La terza parte riguarda la risoluzione dei triangoli sferici. Anche qui si tratta prima la risoluzione dei triangoli rettangoli, poi quelli generali.

L’appendice contiene una postfazione al volume, nella quale si spiegano le fasi di composizione delle varie parti e una serie notevole di complementi o considerazioni didattiche rivolte agli insegnanti.

Il tomus II (Roma, Salomoni, 1754, 8° pp. 324) contiene l’*Algebra finita*: si tratta della teoria delle equazioni algebriche e di quella che era stata chiamata aritmetica speciosa cioè l’aritmetica letterale. A p. 7 si trova la definizione dell’Algebra: “Algebra signis quibusdam utitur, et quantitates litteris esprimit”. Seguono le operazioni con il calcolo letterale su polinomi. Si passa poi alle equazioni e vengono subito risolte le equazioni di primo e secondo grado.

Vari modi per trasformare le equazioni (segni dei coefficienti e delle radici)

n. 35: riduzioni delle frazioni allo stesso denominatore

n. 55: divisioni tra polinomi

n. 91: potenze intere di un binomio

n. 108: potenze razionali di un binomio

nn. 110-142: estrazione della radice ennesima di un numero, con la formula binomiale

pp. 143-185: proprietà generali delle equazioni algebriche

nn. 200-234: risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado

n. 297: equazioni di terzo grado

n. 299: radici reali ed immaginarie

n. 330: risoluzione generale delle equazioni di terzo grado

nn. 383- 423: equazioni di quarto grado

nn. 424-538: limiti delle radici, regola della falsa posizione, abbassamento di grado di un'equazione, nota una radice

nn. 539-606: risoluzione di alcuni problemi.

Il tomus III *Elementorum universae matheseos* (8° Roma, Salomoni, 1754, pp. XXVI, (2), 468 pp., tav. 7 f.t.) è la novità maggiore di questa edizione. Esso contiene una nuova esposizione della teoria elementare delle coniche e una dissertazione "De transformatione locorum geometricorum".

Il volume consta di tre parti: una lunga *Praefatio auctoris* pp. I-XXVI; i *Sectionum conicarum elementa* pp. 1-296; il *De transformatione locorum geometricorum* pp. 297-468.

Alla base delle sue definizioni di coniche Boscovich non pose le proprietà ricavate dalle sezioni di un cono nello spazio, ma proprietà riferite a un piano. L'ellisse, la parabola e l'iperbole sono così definite come luoghi di punti le cui distanze da un punto detto 'fuoco' e da una retta, che non passa per esso, detta 'direttrice' sono rispettivamente minori, uguali o maggiori. Questa caratterizzazione delle coniche, senza far uso delle sezioni di un cono, si trova già in Pappo: *Collectiones mathematicae* (libro VII, pp. 235-238). Il termine per indicare il rapporto tra la distanza dal fuoco e dalla direttrice ("eccentricità") fu introdotto da Keplero nell'*Astronomia nova* (1609). Precedentemente lo stesso Keplero aveva usato, nel suo significato matematico, il termine "focus" (*Ad Vitellionem paralipomena*, cap. 4, par. 4, 1604).

Risultati notevoli:

n. 34: dato il fuoco, la direttrice e il rapporto tra le distanze da questi trovare la sezione conica,

n. 128: trovare l'intersezione di una conica con una retta passante per un fuoco

n. 140: trovare l'intersezione tra una retta qualunque e una conica

n. 181: proprietà dei fuochi dell'ellisse e dell'iperbole, del fuoco e della direttrice della parabola

n. 206: fasci di rette parallele e diametri di una conica

n. 299: figure iscritte in una conica

n. 351. proprietà notevoli delle coniche,

n. 397: tangenti ad una conica

n. 495: proprietà dei segmenti paralleli intercettati da una conica

Le coniche come sezioni del cono circolare retto sono studiate nei paragrafi 546-590. Analogamente le sezioni del cilindro sono studiate nei paragrafi 591-614. Nei paragrafi 615-663 sono trattati i conoidi e gli sferoidi ossia i solidi ottenuti facendo ruotare una conica intorno ad un proprio diametro. L'ultima proposizione riguarda il solido generato dalla rotazione di una retta sghemba intorno ad un asse (iperboloide n. 668)[13].

Gli *Elementa* di Boscovich ebbero una fortuna limitata dalla soppressione canonica dei Gesuiti nel 1773, ma comunque numerosi furono i suoi allievi che continuarono l'insegnamento nella sua scia, tra tradizione e innovazione[14].

6. I Gesuiti della Nuova Compagnia

I Gesuiti di fatto non furono mai soppressi completamente. Essi poterono continuare ad insegnare nei territori del re di Prussia Federico II e dell'imperatrice di Russia Caterina II. Così quando dopo vari tentativi, papa Pio VII ristabiliva la Compagnia con la bolla *Sollicitudo omnium ecclesiarum* del 1814, alcuni ex gesuiti diedero vita gradualmente ai nuovi collegi. I Gesuiti furono particolarmente bene accolti nel Regno di Sardegna anche perché il re Carlo Emanuele IV, che aveva rinunciato nel 1802 al trono in favore del fratello Vittorio Emanuele I, entrò nel noviziato della Compagnia di Sant'Andrea al Quirinale e Roma e si fece gesuita. Nel 1818 veniva ripristinato a Torino il Collegio dei Nobili che riprese anche ad impartire corsi universitari (1822). Dopo i moti liberali del 1821 fu introdotto un nuovo regolamento per tutte le scuole del Regno di Sardegna che era più adatto ai seminari che alle scuole laiche. I Gesuiti inoltre dirigevano le scuole di Chambery, Novara e Nizza e il Collegio delle Provincie, o di San Francesco di Paola, a Torino. Testimonianze molto negative dell'educazione nei collegi della Restaurazione ci sono state lasciate da Giovanni Ruffini (*Lorenzo Benoni*), Angelo Brofferio (*I miei tempi*), Massimo D'Azeglio (*I miei ricordi*), mentre Cavour (1844) osservava che affidare completamente ai Gesuiti l'educazione dei giovani avrebbe portato ad "una razza bastarda di Grandi di Spagna e di Nobili napoletani: una via di mezzo tra l'uomo e la bestia"[15].

La situazione non cambiò a Torino anche con l'avvento al trono di Carlo Alberto, la cui conserte (come quella di Carlo Felice) aveva un confessore gesuita. Solo dopo l'elevazione al soglio pontificio di Pio IX, nel 1846, le cose

[13] Del Centina-Fiocca (2018).

[14] Pepe (2014).

[15] Martina (1998). Si vedano anche Giacardi (2006), Lugaresi (2017).

si modificarono un poco, ma intanto le opere di due filosofi cattolici come Antonio Rosmini, *Delle Cinque piaghe della Santa Chiesa* (1849), e Vincenzo Gioberti, *Il gesuita moderno* (1849) venivano poste all'Indice. Va invece ricordato che personalità della cultura, fratelli di protagonisti del Risorgimento italiano, come Francesco Pellico, Luigi Taparelli D'Azeglio e Giuseppe Bixio, erano gesuiti. Nel 1848 prevalse l'ostilità contro la compagnia e i gesuiti furono espulsi dal regno di Sardegna, come da altri stati italiani, interessati dal movimento rivoluzionario. L'ostilità contro la Nuova Compagnia continuò nel decennio 1849-1859, quando furono varate le leggi Siccardi sul foro ecclesiastico e diversi esuli italiani trovarono rifugio in Piemonte e in Liguria. Tra essi Bertrando Spaventa che scrisse sul *Cimento*, famosi articoli contro i Gesuiti del XIX secolo. Dopo l'unità (1861) si ebbero le leggi eversive degli ordini religiosi tra i quali furono compresi i Gesuiti (1866). Ma molto dell'educazione cattolica impartita nei loro Collegi continuò, sotto altre vesti grazie alla *Pia Società di San Francesco di Sales*, fondata da don Giovanni Bosco (1815-1888), seguendo i consigli di Pio IX e dell'arcivescovo di Torino Luigi Fransoni. I Salesiani non furono colpiti dalla soppressione degli ordini religiosi per il loro collocarsi a mezza strada tra laici e cattolici. Don Bosco svolse un opera di conciliazione con lo Stato italiano che permise anche ai vescovi di mantenere le proprietà nelle diocesi. Insieme alla sua opera caritatevole (alla quale ricorse anche Francesco Crispi, nel suo esilio torinese) va però ricordata la sua *Storia d'Italia raccontata alla gioventù* (Torino, Paravia, 1855), una narrazione alla rovescia nella quale gli aneliti di libertà nella Repubblica Romana del 1849 sono trattati come delitti e le più feroci repressioni sono salutate come benefiche[16].

Così veniva recensita la *Storia d'Italia* dalla rivista dei Gesuiti *La Civiltà cattolica*:

> Il nome dell'egregio Sac. D. Bosco è oggimai un'area più che sufficiente della bontà de' suoi scritti improntati tutti di zelo e diretti alla coltura della gioventù, al bene di cui da tanti anni lavora con lodevolissima fatica. Questa sua Storia d'Italia in particolare merita elogio per la rara discrezione con cui fu scritta, in maniera che nell'angusto spazio di 558 pagine in 16° vi si raccolgono con diligenza tutti i principali avvenimenti della patria nostra. Noi pertanto facciam voti, perché, dato bando a tante Storie d'Italia scritte con leggerezza od anche con perverso fine, questa del Bosco corra per le mani dei giovani, che s'iniziano allo studio delle vicende della nobilissima Penisola[17].

[16] http://www.donboscosanto.eu/download_orig/Don_Bosco-La_storia_d'Italia-i.pdf

[17] Anno VIII [1857], serie III, vol. V. pag. 482.

Nel 1870 a Torino venne fondato il Collegio Valsalice, prima affidato ai Fratelli della Dottrina Cristiana, poi ai Gesuiti. Nel 1872 dopo che il gesuita Girolamo Raffo ebbe scritto contro Roma capitale il Collegio fu affidato a don Bosco. Ora l'attività didattica continua come scuola paritaria tenuta dai Salesiani[18].

I gesuiti fondarono poi a Torino nel 1881 l'attuale *Istituto sociale* che accoglie oltre 800 alunni dalle elementari ai licei[19].

7. Alcune considerazioni finali

Abbiamo avuto modo di documentare come anche negli insegnamenti matematici le tre caratteristiche enunciate della didattica dei Gesuiti appaiano chiaramente:

Mondializzazione: nelle centinaia di Collegi fondati dai gesuiti in tutto il mondo si segue una pratica didattica comune: una sola lingua, il latino, libri di testo adottati universalmente, pratica didattica regolata dalla *Ratio studiorum*.

Apprendimento: la bilancia tra apprendimento/insegnamento nei collegi, pende sull'apprendimento. Il successo rapido della Compagnia impedì di avere insegnati preparati in tutte le materie per tutti i collegi, così erano chiamati ad insegnare anche giovani allievi di qualche talento: un caso notevole è quello di Roberto Bellarmino che racconta, come diventato professore a Mondovì, apprendeva i contenuti che andava ad insegnare poco tempo prima delle lezioni. Boscovich fu mandato ad insegnare giovanissimo a Fermo ecc. Tutto il contrario di quanto accadde nella Scuola Normale dell'Anno 3 voluta dalla Rivoluzione in Francia per essere di norma, ossia di regola, per tutte le future scuole della Repubblica. Qui furono chiamati ad insegnare i maggiori studiosi di tutti i campi presenti a Parigi, privi del tutto o quasi di esperienza didattica, come Lagrange e Laplace per la matematica.

Disciplinamento: avendo puntato sull'apprendimento e ricercato modi uniformi per tutti i collegi veniva come conseguenza che le lezioni dovessero essere ben strutturate. Quindi stessi libri di riferimento per i docenti, redatti da autori interni all'ordine: prima le opere di Clavio, poi i manuali di Tacquet, infine Boscovich. Clavio era nato in Germania, aveva studiato in Portogallo insegnava a Roma. Tacquet era belga ma i suoi manuali arrivarono anche in Cina. Boscovich era dalmata, i suoi manuali furono stampati a Roma e a Venezia, poi adottati anche dopo la Restaurazione nell'Impero asburgico.

[18] https://liceovalsalice.it/

[19] https://istitutosociale.it/

E veniamo alla didattica di questi ultimi decenni e vediamo come i termini mondializzazione, apprendimento disciplinamento che caratterizzano la didattica dei gesuiti si traducono facilmente in modelli didattici di oggi:

Mondializzazione = informatica e inglese

Apprendimento = Crediti. (dalla parte degli allievi e non dei docenti)

Disciplinamento = test (cosa si deve sapere e cosa si può ignorare)

È da stupirsi che i gesuiti si trovino a loro agio in questi contesti e che li promuovano? E infatti:

> L'*INValSI* per effettuare le proprie valutazioni del sistema scolastico italiano si avvale dei test messi a punto da Istituti di ricerca privati come il *TIMSS* e il *PIRLS*, enti che a loro volta fanno capo all'*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (*IEA*), ossia l'*Ente internazionale per la valutazione del rendimento scolastico* che ha sede ad Amsterdam e che coordina (e pilota) gli Istituti di valutazione dei singoli Paesi dell'Eurozona in modo da omologare programmi scolastici, metodologie e criteri docimologici in funzione delle esigenze della politica, dell'imprenditoria e della finanza europea. L'*IEA*, infatti, a sua volta beneficia dei finanziamenti del *Boston College*, di cui ben due membri (su sette) siedono nel proprio Comitato esecutivo. Il *Boston College* è una Università cattolica fondata dai Gesuiti nel 1863: i più importanti dirigenti *TIMSS* e *PIRLS* si trovano proprio nel direttivo di questa Università confessionale [….] Il 6 febbraio 2014 è nominata presidente Anna Maria Ajello Messina, professore ordinario della facoltà di Psicologia de *La Sapienza* di Roma e membro, tra l'altro, di organizzazioni internazionali di ricerca sull'apprendimento come l'*EARLI* o l'*ISCAR*. La professoressa Ajello è attiva collaboratrice dell'*Istituto Salesiano San Marco* di Mestre e fa parte del Comitato scientifico della rivista *IUSVEducation,* che fa capo all'*Istituto Universitario Salesiano di Venezia*[20].

E i Salesiani sono dalla loro fondazione torinese buoni amici dei Gesuiti!

Appendice - I Gesuiti contro l'alternanza scuola lavoro

Gli orientamenti di questi ultimi decenni sull'istruzione confliggono con la modernità, rappresentata nei primi decenni dai Collegi della Compagnia di Gesù. Così l'alternanza scuola lavoro si scontra con le innovative *Costituzioni* (1843) dei Collegi dei Gesuiti. Esse raccomandavano agli studenti di applicarsi seriamente e costantemente allo studio convinti che gli allievi non possono far niente di più gradito a Dio che consacrarsi allo studio. E quand'anche non dovessero mai mettere in opera quello che avessero appreso, devono sapere che

[20] https://www.gildavenezia.it/quello-che-dellinvalsi-non-si-dice-e-altri-miracoli-della-istruzione-detta-pubblica/

il lavoro dello studio, intrapreso come conviene, è un'opera molto meritoria agli occhi della suprema e divina maestà: "Serio et constanter animum studiis applicare deliberent, sibique persuadeant, nihil gratius se Deo facturos in Collegis, studiis se diligenter impendant… Et licet nunquam ad exercenda ea, quae didicerunt, perveniant, illum tamen studendi laborem opus est magni meriti"[21].

Per rendere efficace l'apprendimento le *Costituzioni* rimarcavano che bisogna eliminare gli ostacoli che distolgono lo spirito dallo studio, come le cure e le occupazioni estranee. È saggio rimandare il lavoro a dopo il completamento degli studi, al fine di rendersi più utili agli altri, per mezzo della scienza che si è acquisito. D'altra parte non mancano altri per attendere al lavoro nel frattempo: "Impedimenta etiam removeantur, quae a studiis animum avocant…. Est enim consultum, quo aliis postea utiliores cum doctrina, quam didicerint, se praebeant donec studiis sint absoluta, differri; quandoquidem non deerunt alii, qui ea interim exerceant".

Un altro dogma in materia di educazione nasconde la pretesa che gli uomini siano computer portatili ai quali si può insegnare qualsiasi cosa con opportuni software. L'insegnamento sarebbe soltanto una tecnologia didattica che può trasformare ogni allievo in un matematico, un musicista, un pittore, un atleta. Esistono invece capacità in gran parte incomprimibili e inestendibili, per fortuna abbastanza equamente distribuite in natura. Così le *Costituzioni* gesuitiche raccomandavano che se si vede che un allievo perde completamente il suo tempo in uno studio, sia che egli non voglia, sia che fosse incapace di fare progressi nella lettura, bisogna ritirarlo da esso: "quod si animadverteret, aliquem in studiis tempus inutiliter terere, quod nolit aut certe non possit progressum in literis facere, expedit illum ab eis removere".

Riferimenti bibliografici

Borgato, M.T. (1981). Alcune note storiche sugli Elementi di Euclide nell'insegnamento della matematica in Italia. *Archimede*, *33,* n. 4, pp. 185-193.

Bosman, H. (1927). André Tacquet (S. J.) et son traité d'arithmétique théorique et pratique, *Isis*, 9, pp. 66-82.

Compagnia di Gesù (1998), *La Compagnia di Gesù nella provincia di Torino dagli anni di Emanuele Filiberto a quelli di Carlo Alberto*, a cura di Bruno Signorelli e Pietro Uscello, Torino, Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti.

Constitutiones (1843). *Les Constitutiones des Jésuites*, Paris, Paulin.

[21] *Constitutiones* (1843) pp. 174-176, 182-184.

Cummings, B (2002). *The literary culture of the reformation*, Oxford University Press.

Del Centina, A., Fiocca, A. (2018). "A masterly though neglected work", Boscovich's treatise on conic sections, *Archive for History of Exact Sciences, 72* (4), pp. 453-495.

Giacardi, L. ed. (2006). *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Lumières internationales.

Guerraggio, A., Pepe, L. (2017). A cosa serve la storia degli insegnamenti matematici? *Lettera Matematica Pristem*, 101, pp. 41-48 (disponibile anche in traduzione inglese).

Jami, C. (2012). *The Emperor's new Mathematics Western Learning and Imperial Authority during the Kangxi Reign (1662-1722),* Oxford University Press.

Knobloch, E. (1988), Sur la vie et l'oeuvre de Christophore Clavius (1538-1612). *Revue d'Histoire des Sciences*, 41, pp. 331-356.

Lugaresi, M.G. (2017). *Vita scientifica di Giorgio Bidone. Torino dopo Lagrange*, Torino, Fondazione Burzio.

Lupano, A. (1998). "La soppressione lunga" dalle Costituzioni universitarie del 1720 a quelle del 1772, in *Compagnia,* pp. 145-160.

Martina, G. (1998). *Motivi e radici dell'opposizione piemontese alla Compagnia di Gesù, 1814-1848*, in *Compagnia*, pp. 411-427.

Meskens, Ad (2010). *Travelling Mathematics, The Fate of Diophantos' Arithmetic*, Basel, Springer.

Napolitani, P.D (2013). Fra mito e matematica: le vicende di Archimede e della sua opera*, Lettera matematica Pristem*, 86, pp. 17-25.

Omodeo, P.D. (2014). Torino 1593. Motivi dell'opposizione universitaria ai Gesuiti nel contesto degli antagonismi europei del tempo, *Rivista di Storia dell'Università di Torino*, 3, p. I, file:///C:/Users/Prof.%20Pepe/Downloads/708-2675-1-PB.pdf

Patergnani, E. (2018). *Insegnamenti matematici nelle scuole militari in Italia da Eugenio di Savoia a Napoleone*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Ferrara.

Pedersen, O. (2011). *A survey of the Almagest*, New York, Spinger.

Pepe, L. (2008). *Le Università di Giovan Battista Giraldi Cinzio*, in *Giovan Battista Giraldi Cinzio*, *gentiluomo ferrarese*, a cura di Paolo Cherchi, Micaela Rinaldi e Mariangela Tempera, Firenze, Olschki, pp. 1-15.

Pepe, L. (2014). Boscovich as Mathematician and his Italian Pupils, in *Scientific Cosmopolitanism and Local Cultures: Religions, Ideologies, Societies*, ed. Gianna Katsiampoura, Athens, National Hellenic Research Foundation, pp. 425-430.

Pepe, L. (2016). *Insegnare matematica. Storia degli insegnamenti matematici in Italia*, Bologna, Clueb.

Pepe, L. (2018a). On the history of mathematical education in Italy in the eighteenth century*, Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 38, pp. 291-307.

Pepe, L. (2018b). Astronomia e matematica nei primi decenni delle riforme protestante e cattolica, in *Le Università e la Riforma protestante. Studi e ricerche nel quinto centenario delle tesi luterane*, a cura di Simona Negruzzo, Bologna, il Mulino, pp. 245-259.

Roero, S. (1997). Giovanni Battista Benedetti and the Scientific Environment of Turin in the 16th Century, *Centaurus*, 39, pp. 37-66.

Rommevaux, S. (2005). *Clavius une clé pour Euclid au XVIe siècle*, Paris, Vrin.

Torino, 11 aprile 2019

Professori, ricercatori, come lavorare insieme per il reciproco vantaggio!

Gilles Aldon
ENS de Lyon – Francia

Sunto. *Il quadro della trasposizione meta-didattica è un riferimento importante per lo studio delle relazioni esistenti nella ricerca collaborativa tra docenti e ricercatori. Nato in un contesto formativo, è importante estenderlo per descrivere e analizzare queste stesse relazioni nel contesto della ricerca. E' analizzando finemente gli oggetti su cui si concentrano i protagonisti che si possono individuare elementi significativi per la descrizione dell'interazione tra di essi, che portano a un miglioramento della ricerca collaborativa sia dal punto di vista teorico che metodologico.*

Introduzione

Il quadro della trasposizione meta-didattica, nato in seno al gruppo di ricerca di Torino in un contesto di formazione dei docenti, è stato ripreso, ampliato e arricchito per adattarsi all'analisi delle interazioni nella cosiddetta ricerca collaborativa, coinvolgendo attori di diverse istituzioni, ricercatori, docenti, informatici, ecc. Lo scopo di questa relazione è quello di mostrare come la teorizzazione delle relazioni tra gli attori può aiutare a comprendere meglio e ad agire sul miglioramento di questa ricerca collaborativa. Nella prima parte dell'articolo sviluppo una parte del mio percorso personale per giustificare l'importanza della ricerca collaborativa nella didattica della matematica e in una seconda parte torno alla costruzione teorica permettendo di evidenziare le sorgenti delle interazioni. Nella seconda parte, elaboro le ipotesi fondamentali che sostengono il mio lavoro di ricercatore e giustificano sia la scientificità sia l'utilità della ricerca nella didattica della matematica. Nella terza parte metto alla prova questa costruzione sull'esempio del lavoro svolto con gli insegnanti nel progetto europeo FaSMEd. Il lavoro presentato in questa conferenza si basa sul lavoro svolto nel team EducTice dell'Istituto francese di educazione (IFÉ), in particolare nel progetto FoRCE (Formation et Recherche Collaborative en

Éducation), un progetto franco-canadese che coinvolge l'IFÉ (ENS de Lyon), il rettorato di Lione e la facoltà di pedagogia dell'università di Sherbrooke[1].

Ipotesi di ricerca nel campo della didattica matematica

Per molto tempo sono stato insegnante di matematica nella scuola secondaria, soprattutto nell'ultimo anno di liceo, e ho sempre lavorato in gruppi di ricerca presso l'IREM (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*). Questi istituti, la maggior parte dei quali sono ospitati nella facoltà di matematica delle università, sono stati creati nel 1969 in occasione della cosiddetta "riforma della matematica moderna". Una grande necessità di formazione era infatti essenziale quando gli insegnanti dovevano insegnare ambiti matematici che non facevano parte del loro curriculum universitario, soprattutto per gli insegnanti del *college* (che va dal grado 6 al grado 9 in Francia) che, per un gran numero, provenivano dall'istruzione primaria. A quel tempo, i matematici erano ben consapevoli delle loro carenze nell'insegnamento della matematica nei gradi inferiori, così come gli insegnanti erano consapevoli delle loro carenze in matematica. Pertanto, la scelta degli IREM è stata quella di offrire una formazione sotto forma di gruppi di *ricerca d'azione*, spesso guidati da un matematico e che riunivano insegnanti delle scuole primarie, medie e superiori. Dal 1969, gli IREM hanno continuato a operare nella stessa forma, permettendo a insegnanti, matematici e didattici di lavorare insieme in relazioni non gerarchiche. Dopo aver difeso una tesi di laurea in didattica matematica, sono entrato a far parte di un gruppo di ricerca multidisciplinare (EducTice) presso l'*Institut Français de l'Éducation* dell'*École Normale Supérieure de Lyon*. Come insegnante, ero interessato al ruolo dei problemi nell'apprendimento della matematica e allo stesso tempo a usare gli strumenti per *fare matematica*. Infatti, se si utilizza un software di geometria dinamica o fogli di calcolo o sistemi di calcolo formali, cambia il modo di fare matematica, e quindi cambia anche il modo di insegnare e apprendere. Naturalmente, come ricercatore, ho proseguito su questi temi di ricerca. Ma la questione chiave allora era come e con chi condurre questa ricerca. La mia vicinanza alla professione di insegnante, la mia esperienza di lavoro all'IREM di Lione e il tipo di ricerca svolta nel team di IFÉ EducTice mi ha convinto della necessità di coinvolgere gli insegnanti nella ricerca. Questo porta, da un

[1] Il progetto FoRCE è un progetto COOPERA finanziato dalla regione Rhône-Alpes-Auvergne. Gli attori: Réjane Monod-Ansaldi, ENS di Lione, Isabelle Nizet, Università di Sherbrooke, e Michèle Prieur, rettore del DFIE di Lione e Gilles Aldon, autore di questo testo.

punto di vista filosofico, a pensare a diversi paradigmi di ricerca e posizioni del ricercatore e degli insegnanti nella ricerca relativa all'insegnamento in generale e all'insegnamento della matematica in particolare.

Come ha sottolineato l'antropologo Marcel Mauss (1923), l'educazione è un fatto totale, "un fatto che mette in moto l'intera società e le sue istituzioni" (p. 102). Si tratta quindi di un fenomeno complesso, che, come sottolinea il filosofo Edgar Morin, può essere compreso solo attraverso un pensiero complesso (Morin, 1990):

> Si può dire che ciò che è complesso è da un lato empirico, incerto, incapace di essere certo di tutto, di formulare una legge, di disegnare un ordine assoluto. D'altra parte, è anche una questione di logica, cioè l'incapacità di evitare le contraddizioni. (cap. 27/57)[2]

La ricerca educativa ha quindi la necessità di tener conto di questa complessità e di integrarla nei suoi paradigmi di ricerca:

> Siamo in una battaglia incerta e non sappiamo ancora chi vincerà. Ma si può già dire, tuttavia, che se la semplificazione del pensiero si basa sul dominio di due tipi di operazioni logiche: la disgiunzione e la riduzione, entrambe brutalizzanti e mutilanti, allora i principi del pensiero complesso saranno necessariamente principi di distinzione, congiunzione e implicazione. (Id. cap. 33/57)[3]

Porre domande sul tipo di ricerca e sulla posizione degli attori della ricerca solleva almeno tre tipi di domande, di natura epistemologica, metodologica ed etica. Le questioni epistemologiche si riferiscono alle posizioni della ricerca rispetto agli attori e agli obiettivi di questa ricerca. Permettono, in un certo senso, di collocare la ricerca nelle tensioni tra i poli antagonisti: la ricerca accademica per produrre nuove conoscenze o la ricerca per formare gli attori. E da un altro punto di vista, la ricerca relativa alla costruzione di materiali didattici o la ricerca per comprendere una pratica (Fig. 1).

Quali sono i rapporti ricercatore-praticante? Si tratta di considerare l'insegnante nella ricerca come parametro, cioè come elemento del sistema da

[2] On peut dire que ce qui est complexe relève d'une part du monde empirique, de l'incertitude, de l'incapacité d'être certain de tout, de formuler une loi, de concevoir un ordre absolu. Il relève d'autre part de quelque chose de logique, c'est-à-dire de l'incapacité d'éviter des contradictions.

[3] Nous sommes dans une bataille incertaine et nous ne savons pas encore qui l'emportera. Mais l'on peut dire, d'ores et déjà, que si la pensée simplifiante se fonde sur la domination de deux types d'opération logiques : disjonction et réduction, qui sont l'une et l'autre brutalisantes et mutilantes, alors les principes de la pensée complexe seront nécessairement des principes de distinction, de conjonction et d'implication.

studiare, o come variabile, cioè come elemento del sistema da caratterizzare o infine come oggetto di ricerca? (Roditi, 2015). Quali sono le produzioni mirate e quali sono le condizioni per la loro scientificità?

Da un punto di vista metodologico, l'organizzazione del lavoro collaborativo non è ovvia e deve essere pensata in relazione ai quadri teorici e al tempo stesso agli obiettivi che gli attori si sono posti.

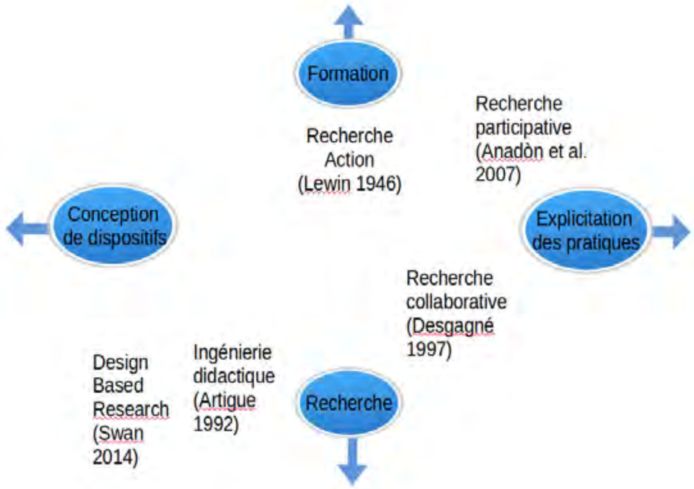


Fig. 1. Tensioni da considerare nella ricerca.

La costruzione di strumenti per fornire condizioni di lavoro collaborativo è essenziale. L'esempio del *Laboratoire d'Innovation Pédagogique et Numérique* (LIPn), istituito presso l'*Institut Français de l'Éducation,* è un buon esempio di costruzione di strumenti metodologici per la ricerca. È un luogo dedicato alla ricerca collaborativa che riunisce risorse umane e metodologiche per facilitare la riflessione collettiva. Da un punto di vista pratico, le pareti di questa stanza sono delle lavagne bianche, l'arredamento permette di configurare l'ambiente in tempi brevissimi in base alle esigenze. Dal punto di vista metodologico, la LIPn permette di costruire relazioni dialettiche tra ricerca e pratica, tra riflessione e azione (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015). Infine, le questioni etiche sono essenziali in qualsiasi lavoro con attori di diverse istituzioni. Ognuno ha problemi diversi nel lavoro comune che devono essere presi in considerazione e affrontati nella ricerca. Le questioni relative al riconoscimento istituzionale e alla capitalizzazione del lavoro sono al centro del "contratto" che deve essere concluso tra gli attori della ricerca collaborativa. Questo contratto mi sembra avere due sfaccettature molto distinte: la prima riguarda la revisione delle condizioni e degli obiettivi attesi dagli operatori della ricerca: cosa ci si aspetta da ciascuna parte e come sarà possibile raggiungere questi obiettivi, ma anche i risultati attesi e le modalità di diffusione di questi risultati (formazione, testo, risultati effettivi, ecc.). Il secondo aspetto riguarda l'oggetto della ricerca, che può essere definito *a priori* solo attraverso domande o ipotesi su un oggetto i cui confini non sono ancora stati costruiti con precisione. Il contratto è quindi simile al contratto didattico della Teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1990), cioè non può essere pienamente spiegato. Il contratto viene negoziato attraverso una devoluzione della ricerca, così come l'apprendimento è il risultato di una devoluzione della situazione didattica negoziata tra insegnanti e studenti. Le questioni etiche sono alla base della concettualizzazione della ricerca collaborativa e non possono essere trascurate a pena di inadempimento contrattuale e quindi di fallimento.

Queste riflessioni portano naturalmente ad ipotesi su cui basiamo la nostra ricerca e che tendono a considerare tutti gli attori come partner della ricerca. Si tratta quindi di *lavorare con* gli insegnanti piuttosto che *sugli* insegnanti, considerando le tensioni già incontrate (Fig. 1).

Quale risposta può essere data dalla ricerca per formalizzare la ricerca collaborativa tra ricercatori e docenti?

Questa sarà la seconda parte del mio intervento, che si divide in tre parti:

- i fondamenti della trasposizione meta-didattica
- le forze motrici della dinamica
- che porterà a una nuova proposta per la schematizzazione della trasposizione meta-didattica.

Un tentativo di teorizzare i rapporti tra ricercatori e insegnanti

La trasposizione meta-didattica, nata in Italia, più precisamente a Torino nel gruppo di ricerca di Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti (2014) in un contesto di formazione nazionale degli insegnanti, si basa sull'approccio antropologico della didattica di Chevallard (1989, 1992). Descrive una dinamica di relazioni tra ricercatori, insegnanti e formatori.

Siamo rimasti sedotti da questo approccio (Sanchez & Monod-Ansaldi 2015; Aldon & al. 2013; Aldon & Panero, 2017, Monod-Ansaldi & al. 2019) e abbiamo cercato di estendere questo modello teorico per descrivere e analizzare la ricerca collaborativa. Questo modello descrive una dinamica di relazioni tra ricercatori e insegnanti basata su cinque pilastri:

1. Doppia dialettica: dialettica didattica tra conoscenza, insegnamento e apprendimento e dialettica meta-didattica tra dialettica didattica e giustificazione pragmatica o teorica di questa dialettica.
2. Prasséologie meta-didattiche: secondo Chevallard (1989), ogni attività umana può essere descritta come una prasseologia modellata da un quadrupla (T, τ, θ, Θ): davanti a un compito t, una o più tecniche τ permetteono di risolvere il compito allo stesso modo in cui tutti i compiti dello stesso tipo T ($t \in T$) possono essere risolti. Questa tecnica, che dipende strettamente dall'istituzione in cui viene proposto il tipo di compito, è giustificata nell'istituzione da un discorso (θ, tecnologia: discorso sulla tecnologia) e da una teoria Θ. La doppia dialettica ci porta poi a considerare due tipi di prasseologie: una prasseologia didattica in cui il tipo di compito è costruito con riferimento alle conoscenze da insegnare, la tecnica riconosciuta in un'istituzione e le giustificazioni tecnologiche e teoriche in funzione sia delle abitudini istituzionali che delle conoscenze apprese; e una prasseologia meta-didattica in cui il tipo di compito è la prassi didattica: ad esempio nel progetto europeo FaSMEd che si occupava di valutazione formativa in scienze e matematica, la prasseologia di una lezione sulle frazioni, dove la scrittura di una frazione si basa su una tecnica giustificata da regole di calcolo e più teoricamente dall'algebra, è la base per una valutazione formativa, essa stessa giustificata dai dati empirici e dalle teorie della valutazione formativa.
3. Aspetti istituzionali: per ciascuno degli attori, le prassi sono dirette dal fatto che gli attori appartengono ad un'istituzione; nel caso di un tipo di compito, la tecnica utilizzata e le giustificazioni per questa tecnica dipendono funzionalmente dall'istituzione dell'attore.
4. Internalizzazione: questo fenomeno descrive gli scambi tra attori di diverse istituzioni ed è al centro del lavoro collaborativo che non potrebbe esistere se gli attori non sfruttassero le interazioni per modificare il loro sistema di conoscenza. L'internalizzazione è legata alle conoscenze in gioco, pratiche o teoriche e può essere considerata come una modifica di una prasseologia a livello didattico o meta-didattico.
5. Intermediazione: affinché il dialogo si svolga in modo fruttuoso, sono necessarie azioni che rendano esplicite le idee in gioco (*intermediazione*), al fine di facilitare il dialogo chiarendo le rispettive posizioni. L'*intermediario* è essenziale nel fenomeno dell'internalizzazione per fare il collegamento tra i punti di vista espressi e per riformulare nel linguaggio di ciascuna delle istituzioni coinvolte i concetti e le conoscenze in gioco.

La figura 2 mostra una prima schematizzazione della trasposizione meta-didattica che descrive le dinamiche che si possono creare nella ricerca collaborativa:

attraverso il lavoro congiunto, con l'aiuto di azioni di *mediazione,* insegnanti e ricercatori costruiscono una prassi condivisa internalizzando *a priori* componenti esterne all'una o all'altra comunità (Fig. 2). A livello meta-didattico, cioè a livello di discussione delle pratiche didattiche, insegnanti e ricercatori hanno sviluppato delle prassi nelle proprie istituzioni: hanno tecniche e giustificazioni per queste tecniche. Il fenomeno di trasposizione deve quindi condurre ad una prassi condivisa, mentre le componenti esterne sono internalizzate nelle pratiche.

Questa schematizzazione mostra le dinamiche che si possono creare, ma solleva anche interrogativi: come si può mettere in moto questa dinamica? Come e perché viene mantenuta? Qual è il significato del termine "condiviso" quando si descrive una prassi condivisa?

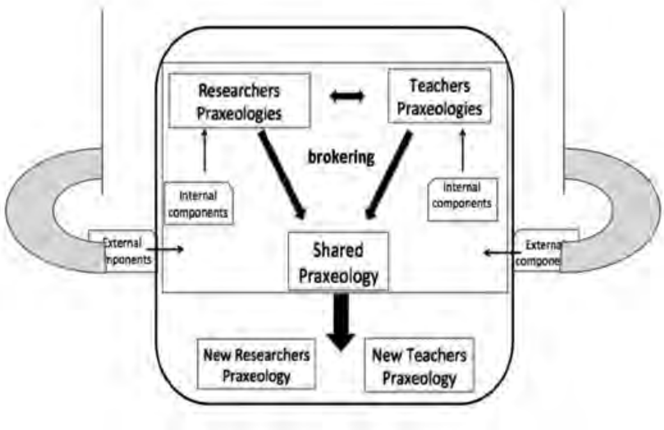


Fig. 2. Schema delle dinamiche descritte nel DTM (Aldon & al. 2013)

Definire con precisione questo oggetto di lavoro permette di fare approfondire questo modello. Mantenendo la concettualizzazione della trasposizione meta-didattica, è possibile fornire alcune risposte a queste domande specificando la natura dell'oggetto opera (o oggetto di interazione), che può essere visto come 'oggetto di confine' (boundary object) nel senso dato da Star e Griesemer (1989). Questa idea di oggetto di confine, frutto di un approccio antropologico, è particolarmente interessante per descrivere le interazioni tra comunità e sviluppare il concetto di prassi condivisa:

> Boundary objects are objects which are both plastic enough to adapt to local needs and constraints of the several parties employing them, yet robust enough to maintain a common identity across sites. (p. 393)

Oltre a questa *flessibilità interpretativa*, anche la struttura dell'oggetto di confine è di grande importanza e le "esigenze di informazione" innescano le azioni che possono essere realizzate sull'oggetto confine in questione. La metafora dell'oggetto come oggetto nel paradigma della programmazione orientata all'oggetto può aiutare a comprendere meglio questa struttura e la questione della scala evidenziata da Star (2010):

> The two other aspects of boundary objects, much more rarely cited or used, are (1) the material/organizational structure of different types of boundary objects and (2) the question of scale/granularity. Boundary objects are a sort of arrangement that allow different groups to work together without consensus. However, the forms this may take are not arbitrary. They are essentially organic infrastructures that have arisen due to what Jim Griesemer and I called "information needs" in 1989 (Star, 2010, p. 602)

In questo paradigma di programmazione, gli oggetti integrano i dati con attributi specifichi e delle funzioni (nel senso matematico del termine) forniscono metodi per agire su questi dati; essi sono modellati su oggetti del mondo reale con cui l'ambiente interagisce.

Infine, il confine dell'oggetto non deve essere considerato come una delimitazione, ma piuttosto come uno spazio condiviso in cui si gioca un'intesa comune:

> Often, boundary implies something like edge or periphery, as in the boundary of a state or a tumor. Here, however, it is used to mean a shared space, where exactly that sense of here and there are confounded. These common objects form the boundaries between groups through flexibility and shared structure – they are the stuff of action." (Star, 2010, p. 602-603)

Ma ciò che è particolarmente interessante in questa citazione è il fatto che l'oggetto confine esiste solo se gli attori agiscono su di esso. È attraverso le interazioni che questa frontiera può essere ampliata, illuminata dall'attività collettiva risultante da tutte le azioni individuali dei protagonisti.

Seguendo Carlile (2004), si distinguono tre tipi di azione sulle componenti di un oggetto di confine:

> […] we scale the relative complexity of the circumstances at a boundary using Shannon and Weaver's (1949) three levels of communication complexity: syntactic, semantic, and pragmatic. (p. 557)

A livello sintattico, l'azione di trasferimento propone un chiarimento della conoscenza dell'oggetto; corrisponde ad una situazione in cui si stabilisce un vocabolario comune o si costituisce a *priori*. Queste azioni mantengono il confine allo stato iniziale ma permettono a tutti gli attori di esplorare insieme concordando i termini utilizzati, evidenziando le diverse componenti dell'oggetto ma senza interrompere le relazioni tra gli oggetti.

A livello semantico, l'azione di traduzione sposta i limiti del confine o influisce sulle relazioni tra le componenti dell'oggetto confine. La ricerca del buon senso riguarda le relazioni tra i componenti, i componenti dell'oggetto confine e una costruzione comune del significato di uno di questi componenti. L'attività di traduzione porta i protagonisti a costruire un compromesso sufficiente per accordarsi sull'argomento di studio nel quadro specifico della loro discussione.

Infine, a livello pragmatico, le azioni di trasformazione portano ad una condivisione della conoscenza in vista del suo utilizzo nel resto dell'opera; affermiamo la natura pragmatica dell'intervento perché c'è la consapevolezza di una modifica di una tecnica rispetto ad un tipo di compito. Questa "negoziazione" (Monod-Ansaldi *et al.*, 2019) può essere accettata come evoluzione delle prospettive di lavoro con l'oggetto in una dimensione di formazione e di sviluppo professionale che possiamo mettere in relazione al fenomeno di internalizzazione della trasposizione meta-didattica.

Le azioni di trasferimento e traduzione evidenziano la comprensione reciproca delle componenti manipolate agendo sia a livello sintattico di comprensione reciproca delle componenti manipolate, sia a livello semantico del significato che può essere dato e condiviso a queste componenti. Le azioni di trasformazione modificano le relazioni con gli oggetti includendoli in tutti gli strumenti che possono essere utilizzati per l'azione a livello didattico. Per fare il collegamento con la trasposizione meta-didattica, il trasferimento porta ad una comprensione condivisa del tipo di compiti, la traduzione porta ad una modifica delle tecnologie (nel senso di Chevallard) e delle teorie quando la trasformazione porta ad una modifica delle tecniche relative ai tipi di compiti relativi alle componenti dell'oggetto confine in questione, consentendo un investimento pratico della componente studiata (Fig. 3).

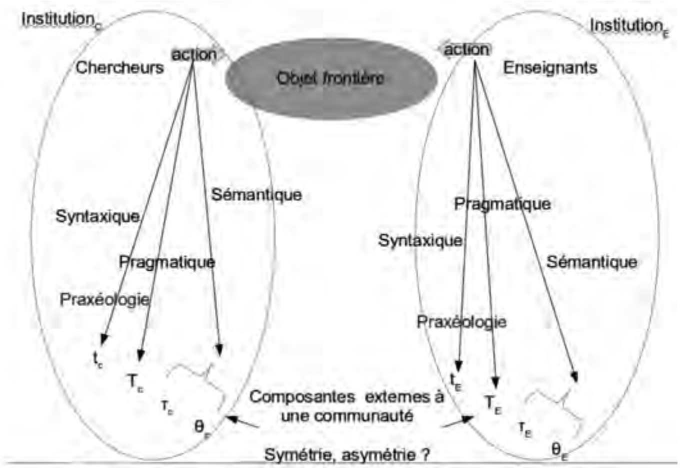


Fig. 3. Oggetti di confine e trasposizione meta-didattica.

Queste prasseologie sono *a priori* esterne alle comunità e le azioni successive portano a questa famosa interiorizzazione che porta a prasseologie condivise, nel senso che ognuno può evocarle o usarle con parole, significati e pratiche condivise.

Un esempio

Vorrei illustrare questa proposta prendendo un esempio dal lavoro svolto nell'ambito del progetto europeo FaSMEd[4], il cui tema era la valutazione formativa nelle scienze e in matematica. La metodologia annunciata del progetto è stata costruita sul paradigma della Design Based Research (Swan 2014). In questo progetto, la discussione generale sulla valutazione formativa a livello meta-didattico, utilizzando in particolare i risultati della ricerca, promuove la costruzione di attività in aula e la loro implementazione nelle aule. Allo stesso tempo, queste implementazioni in classe forniscono un feedback che, attraverso osservazioni e analisi, evolve il modello e partecipa allo sviluppo professionale di attori, docenti e ricercatori. Durante le fasi sperimentali del FaSMEd (progettazione dei compiti, analisi *a priori*, riflessioni *a posteriori,* ecc.), i ri-

[4] Formative Assessment for Science and Mathematics Education, The research leading to these results has received funding from the European Community's Seventh Framework Programme fp7/2007-2013 under grant agreement No[612337].

cercatori condividono i risultati della ricerca, mentre gli insegnanti offrono principalmente le loro conoscenze professionali e giustificazioni pragmatiche per queste pratiche. Così, durante il processo di trasposizione meta-didattica, le prasseologie dei ricercatori si scontrano con quelle degli insegnanti, e può accadere che componenti di prasseologia esterne a una certa comunità diventino gradualmente interne, all'interno di una prasseologia "condivisa" dalle due comunità. I concetti di "valutazione formativa" e "uso della tecnologia", ad esempio, sono oggetto di fenomeni di internalizzazione che sono stati evidenziati e studiati nella conduzione del FaSMEd. Nell'estratto dell'Appendice 1, docenti e ricercatori esaminano il lavoro dell'anno. La consapevolezza dei fenomeni di interiorizzazione appare con chiarezza, ma non permette di evidenziare le prasseologie condivise; tuttavia i dialoghi mostrano chiaramente i due livelli didattici e meta-didattici, in particolare nelle righe 8-10 e 13-15 dove il confronto dell'osservazione in classe con le analisi della situazione costruita mette in discussione il posizionamento didattico degli insegnanti in modo violento (riga 15):

> 8 H1 E poi, è così che ci aspettiamo da..... sono sotto controllo perché forse quello che volevamo fare non è quello che..... non è che in realtà.....
>
> 9 H2 Si', si', si'..... si', e poi....
>
> 10 H1....e, ed è interessante averlo.....questo scambio lì e penso che sia fantastico sì, è fantastico sì, è fantastico sì, è interessante qui è davvero....se possiamo continuare a livello scolastico è bello eh: proprio perché c'è una ricchezza e uno scambio come quello e....non gente come quella come si vedete a posteriori....
>
> […]
>
> 15 H1 perché a volte siamo davvero nella nostra cosa aah ! Merda *(colpo sul tavolo)* quello che non capiscono e infatti è perché sì, in realtà siamo noi che non abbiamo proposto, messo il problema di, di, di, di, di, di, di, di, ed è davvero vero che è.......

Ma c'è anche un'interiorizzazione della realtà della classe che deve inserirsi nel modello (righe 16-23) e che illustra questo doppio movimento di interiorizzazione necessario per una reale condivisione delle prasseologie.

Un secondo estratto, nell'allegato 2, illustra le azioni sull'oggetto confine. In questo dialogo, l'oggetto confine del contenitore è infatti la valutazione formativa, che però non viene mai menzionata. D'altra parte, le interazioni si concentrano su MCQ, domande aperte e tecnologia. In primo luogo (riga 1), la questione della relazione tra QCM e oggetti tecnologici si pone e si riduce rapidamente a discutere il tipo di domanda che può essere posta (riga 4), integrando così l'oggetto "domanda aperta" come componente dell'oggetto confine. Le linee da 5 a 7 distinguono il ruolo dell'uso della tecnologia: esistono relazioni media-metodo e sono queste relazioni che devono essere studiate (linee 10-11) sia dal punto di vista dello studente che dell'insegnante (linee 12-16); il dialogo porta poi a un punto di allargamento del confine dell'oggetto collegando le "modalità di valutazione" alle strategie di differenziazione specifiche della valutazione formativa (linee 17-19).

In termini di azione sugli oggetti di frontiera, il trasferimento sembra concordare il rapporto che può esistere tra la valutazione e i mezzi di valutazione; pertanto, alle righe 9 e 10, viene evidenziata la distinzione da operare tra mezzi e fine:

> 9 C2: sì, non è dovuto alla tecnologia
>
> 10 CP1: no, è qualcos'altro.

Segue un'azione di traduzione:

> 11 E1: questo è il metodo di valutazione

Nella componente "MCQ" dell'oggetto confine, la modalità di interrogazione viene messa in discussione e collegata ai metodi di valutazione, che viene poi ripetuta per chiarire le relazioni che possono esistere tra il modo in cui gli studenti sono interrogati e le strategie di valutazione formativa (riga 17). Le azioni di trasformazione possono essere identificate solo in parte a livello locale. Ma a lungo termine, tuttavia, è possibile assistere ad una trasformazione delle pratiche sia degli insegnanti che dei ricercatori.

Conclusione

Utilizzando l'esempio della design-based reserach del progetto europeo FaSMEd, ho presentato quadri teorici e metodologici per analizzare le interazioni tra insegnanti e ricercatori nella ricerca collaborativa. Gli elementi essenziali della trasposizione meta-didattica non sono tutti sviluppati ma rimangono in filigrana nel testo. In particolare, l'importanza della dimensione istituzionale, che in questo caso non è stata sviluppata a vondo, rimane un quadro fondamentale per gli studi. È chiaro che le analisi delle prasseologie ma anche delle componenti di un oggetto di confine hanno senso solo in una data istituzione e che il dialogo tra gli attori tiene conto delle posizioni istituzionali di ciascuno di essi (Fig. 3). Analogamente, le azioni sulle componenti di un oggetto di confine possono portare all'internalizzazione solo nella misura in cui sono costruite in una sequenza, non necessariamente lineare, di trasferimento, traduzione e trasformazione. I motori di queste azioni comportano quindi necessariamente atti di *intermediazione* che possono essere evidenziati nell'analisi delle interazioni.

Riferimenti bibliografici

Aldon, G. Arzarello, f. Cusi, A., Garuti, R. Martignone, F. et al.(2013). The Meta-didactical Transposition : a model for analysing teachers education programs in *Proceedings of PME Mathematics learning across the life span*, Jul 2013, Kiel, Germany. pp. 97-124.

Aldon, G., Panero, M. (2017). La genèse de praxéologies partagées entre enseignants et chercheurs dans un cadre d'évaluation formative. In A*ctes du 29e Colloque de l'ADMEE (Association pour le développement des méthodologies d'évaluation en éducation) – Europe « L'évaluation : levier pour l'enseignement et la formation ».* Disponible en ligne: http://www.agrosupdijon.fr/recherche/colloque-admee/actes/ (retrieved 5th june 2019).

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C. Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: a theoretical model for teacher education programmes in Clark-Wilson, A., Robutti, O., Sinclair, N. (Eds) *The mathematics teacher in the digital era*, Springer Science+Business Media Dordrecht.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 9/3, 309-336.

Carlile, P. (2004). Transferring, Translating, and Transforming: An Integrative Framework for Managing Knowledge Across Boundaries. *Organization Science*, 15(5), 555-568.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory : some introductory notes in *Proceedings of the International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education*, Bratislava, 3-7 August 1988.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Mauss, M. (1923/2007). *Essai sur le don : Forme et raison de l'échange dans les sociétés archaïques.* Presses universitaires de France, coll. « Quadrige Grands textes ».

Monod-Ansaldi, R., Vincent, C. & Aldon, G. (accepté, à paraître en 2019). Objets frontières et brokering dans les négociations en recherche orientée par la conception, *Éducation & didactique*.

Morin, E. (1990). *Introduction à la pensée complexe*. Paris: Le Seuil.

Roditi, E. (2015). Recherches sur les pratiques enseignantes et relations chercheurs-praticiens. In Vinatier, I & Rinatier J-L, Eds, *Rencontre entre chercheurs et praticiens: quels enjeux* ? Armand Colin. Paris.

Sanchez, E., Monod-Ansaldi, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception: Un paradigme méthodologique pour prendre en compte la complexité des situations d'enseignement-apprentissage. *Éducation & Didactique*, Presses Universitaires de Rennes, 9 (2), pp.73-94

Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education, *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, 148-152.

Torino, 9 maggio 2019

Appendice 1

1 H1 Inoltre è che anche sul lato scuola

2 F1B Beh, si', e' quello che ho detto loro.

3 H1 A scuola, l'interesse ad avere persone che hanno prospettiva e ti permettono di..... vedi, mi ricordo molto bene una volta quando l'osservazione che hai fatto, uh, in relazione al modo in cui hai valutato dove hai posto la domanda ma aspetta.... valutiamo la tecnica chirurgica o ti valutiamo vedi.... e che così uh, a scuola siamo a capo del manubrio e io lo faccio.

4 F2 Si', lo facciamo, si', si', si', si', si', si'.

8 H1 E poi, è così che ci aspettiamo da..... sono sotto controllo perché forse quello che volevamo fare non è quello che..... non è che in realtà.....

9 H2 Si', si', si'..... si', e poi....

10 H1....e, ed è interessante averlo.....questo scambio lì e penso che sia fantastico sì, è fantastico sì, è fantastico sì, è interessante qui è davvero....se possiamo continuare a livello scolastico è bello eh: proprio perché c'è una ricchezza e uno scambio come quello e....non gente come quella come si vedete a posteriori....

11 F2 ....che solleva interrogativi anche per noi, sì.

13 H1 c'è una distanza e un aspetto così diverso che ti porterà a dire ah sì, ma forse c'è il fallimento che ne deriva..... non sanno come contare è perché in realtà quello che stavi proponendo è non contare è non contare, è non contare, vedi e ricordo bene questa volta lì

14 F3 e anche, a volte le valutazioni non sempre.....

15 H1 perché a volte siamo veramente nella nostra cosa aah! Cazzo e merda (colpo sul tavolo) quello che cazzo non capiscono e infatti è perché sì, in realtà siamo noi che non abbiamo proposto di porre il problema di, di, di, di, di, ed è vero che in realtà è........

16 H2 sì e allo stesso tempo è vero anche nell'altra direzione

17 H1 sì

18 H2 perche' ti porti un sacco di cose che sono la realta'.

19 H1 Si', si', si', si', ma certo.

20 H2 non è solo sognando, insegnando, senza studenti, senza studenti.

21 F3 Si', cos'e' in realta', uh, praticabile o, uh.

22 H2 ciò che è praticabile, uh cosa possiamo realmente fare, ovviamente

23 F3 e come le cose possono essere trasposte efficacemente

24 H1 24 H1 questo è tutto, la ricerca d'azione è davvero buona no

25 H2 bene sì

Appendice 2

1 E1: [.......] La tecnologia porta a risposte diverse, questa è la domanda che ci siamo posti.

2 C1: Uhmm, uhmm, uhmm

3 E1: solo per avere,..... perché no

4 C1: qui la differenza è che si tratta di un MCQ e di una risposta aperta.

5 E1: sì...... oppure va presentato....

6 CP1: devono aver memorizzato tutte le proposte per essere in difficoltà di scrittura.

7 C2: no, è la stessa cosa, è la domanda che ti sei posto, c'è una differenza tra una risposta aperta e una scelta tra tre risposte che ti servono.....

8 C1: ma non è dovuto alla tecnologia

9 C2: sì, non è dovuto alla tecnologia

10 CP1: no, è qualcos'altro.

11 E1: questo è il metodo di valutazione.

12 CP1: dobbiamo essere consapevoli che non stiamo chiedendo loro la stessa cosa [.....] è vero che lo strumento dà cose per adulti, dà una lettura rapida, una visione rapida dei risultati, per elemento, per studente, ma dopo di loro.....

13 E1: Beh, mi hanno detto che è troppo buono, perché non dobbiamo scrivere, va più veloce,.....

14 CP1: c'è ancora il compito della parola scritta che.....

15 E1: Oh sì, il compito di scrivere, ah me, è la prima cosa che mi hanno detto: ah, non potevamo farlo tutto il tempo (ride) perché di conseguenza, hanno una sensazione di velocità rispetto alle valutazioni dove passiamo il tempo, e lì hanno passato del tempo ma non è la stessa cosa, credo.

16 CP1: già, se manteniamo il piacere su nozioni nuove come quella che in generale le stanca perché è tutto nuovo, tutto........

17 C2: e allo stesso tempo, un'osservazione che volevo fare non è troppo legata alla valutazione, alla valutazione sommaria che si sta per essere in grado di fare, beh, quello che preferirei vedere è come possiamo fare in modo che gli studenti che non hanno avuto successo in certi luoghi, come possiamo farli avere successo, sai.....

18 E1: uhm..... ma questo è il nostro obiettivo oggi

19 R2: sì, esatto.

Le Iniziative

Math 2019: da 24 anni una grande sfida

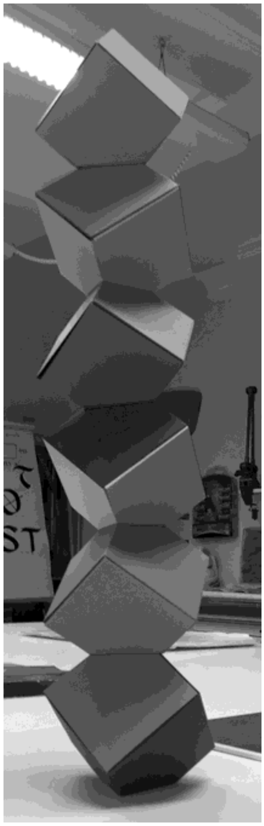
Gemma Gallino
Associazione Subalpina Mathesis – sezione Bettazzi – Torino

Nel periodo dal 6 maggio al 31 maggio si è svolto su quattro turni di tre giorni la 24[esima] edizione dello Stage di Matematica intitolato MATH 2019.

In ogni edizione ci proponiamo di continuare a proporre una situazione stimolante e importante per i nostri allievi che provengono da 40 scuole di comune di Torino, della provincia, della regione Piemonte e non solo: infatti per il secondo anno abbiamo ospitato una delegazione di 70 allievi provenienti da Finlandia, Norvegia, Olanda e Russia, 20 in più rispetto allo scorso anno. Sicuramente anche questo è per noi un segnale incoraggiante.

Quest'anno, abbiamo avuto molti importanti cambiamenti: la Presidenza della Associazione Subalpina Mathesis è traghettata dal Prof. Franco Pastrone alla Prof.ssa Cristina Sabena.
Al prof. Pastrone, per tutto il lavoro svolto, per l'opportunità che ci ha dato, per la dedizione che in tutti questi anni ha dimostrato, per la fiducia con cui ha seguito il nostro operato, va tutta la nostra riconoscenza, che, poiché ammonta a quella di almeno 1600 persone, non può che essere davvero molto grande!
La Prof. Sabena ci ha accolti con entusiasmo e con grandi aspettative e ci sentiamo quindi in dovere di continuare il lavoro puntando su mete didattiche sempre di maggiore efficacia.

Uno dei punti forti del nostro agire didattico è la condivisione del lavoro. Gli allievi per tutto il periodo dello Stage lavorano in gruppo e, anche se inizialmente trovano il lavoro più faticoso, a conclusione dei tre giorni, nei riscontri che abbiamo attraverso i questionari di valutazione emerge che la



maggior parte degli allievi ha dato un giudizio molto positivo sulla situazione "lavorativa" vissuta.

Per focalizzare fin dall'inizio l'importanza della condivisione delle idee abbiamo utilizzato una metafora: abbiamo presentato loro dei cubi apparentemente perfetti, ma che a una più attenta osservazione presentavano una cavità in corrispondenza di un vertice. Abbiamo evidenziato che ogni cubo poteva rappresentare uno dei componenti del gruppo: bravo, competente, ma con forse con qualche piccola "lacuna".
Abbiamo invitato poi gli allievi di un gruppo ad appoggiare i cubi uno sull'altro e con gran sorpresa si è creata con facilità una torre di sei cubi: ciò è stato possibile proprio grazie alla presenza della cavità.
"Ciascuno di noi può **non** essere perfetto, ma insieme si può salire ugualmente molto in alto".
Nel laboratorio serale gli allievi/e hanno potuto costruire con l'origani, questo oggetto: si tratta del "Columbus Cube" (creatore David Mitchell).
Questa costruzione, portata a casa, potrà richiamare le suggestioni matematiche ed esperienziali vissute durante lo stage.

È importante ancora citare una grande novità di questa edizione: si tratta dell'indagine statistica sull'iniziativa dello Stage, condotta dal team di ricercatori del Collegio Carlo Alberto su commissione della Compagnia di San Paolo, che è da anni nostro generoso sponsor.
Con un grande e competente lavoro sono stati creati due gruppi di allievi, un gruppo ha partecipato allo Stage mentre l'altro è servito come gruppo di controllo. Sono stati somministrati un test prima dello stage, uno a conclusione per entrambi i gruppi e numerose valutazioni durante lo svolgimento dello Stage. Ora attendiamo l'elaborazione dei dati: sicuramente sarà importante avere dati cercati ed elaborati con estrema competenza statistica, li analizzeremo con cura e ne faremo tesoro per l'organizzazione del prossimo anno: il 25^{esimo}.

Come afferma Mickael Launay: "*Nella matematica, anche la più semplice, c'è sempre una fonte inesauribile di stupore e di meraviglia*"*:* noi ci auguriamo, con il lavoro condotto allo Stage, di riuscire sempre meglio a suscitare queste emozioni che stanno alla base di un apprendimento significativo e costruttivo per i nostri allievi/e.

Torino, 8 agosto 2019

Festa della Matematica 2019 (16ª edizione)

Pier Luigi Pezzini
Responsabile organizzativo del progetto MATH 2019

Il progetto MATH 2019 (sponsorizzato e sostenuto dalla Compagnia di San Paolo) ha coinvolto, come negli anni scorsi, le scuole di Torino e provincia e alcune scuole della Regione Piemonte-Valle d'Aosta e si è articolato in due momenti: La Festa della Matematica e lo Stage di Matematica a Bardonecchia.

La **Festa della Matematica** Si è svolta a Torino presso l'Arsenale della Pace del SERMIG Venerdì 8 Marzo 2019 ed ha visto la partecipazione di oltre 1500 persone. L'iniziativa si è inserita nell'ambito delle olimpiadi nazionali della matematica, ha avuto come protagoniste le scuole aderenti al progetto e contemporaneamente è stata aperta a tutti i cittadini.

Nell'ottica di diffondere e promuovere l'interesse per la matematica, si è pensato, come nel passato, di far partecipare all'evento tutte le persone che lo desiderano (studenti e cittadini) affiancando alla gara olimpica, destinata ad una delegazione ufficiale di ogni istituto, una competizione a squadre aperta a tutti (gara del pubblico) e, per la prima volta quest'anno, una gara preparata esclusivamente per gli studenti delle scuole medie inferiori. A questa gara gli studenti si sono preparati con l'aiuto dei loro coetanei delle superiori che, nell'ambito dell'ASL (*Alternanza Scuola Lavoro)*, sono andati nelle scuole medie ad allenare per la gara dell'8 marzo.

Con questi obiettivi le gare sono state inserite in una giornata interamente dedicata alla matematica e, oltre alle competizioni, ci sono stati due incontri.
Il primo comprendente "*L'azzardo del giocoliere*", conferenza spettacolo sulla matematica del gioco d'azzardo e la ludopatia del Prof. Federico Benuzzi, (Professore, giocoliere e attore professionista) e "*Matematica in pausa pranzo*" del Dott. Maurizio Codogno, Matematico e informatico.
Il secondo sul "*Mercatino delle idee*" dove studenti e professori hanno presentato con exibit i lavori elaborati durante l'anno nelle singole scuole.
Il consuntivo dell'iniziativa è stato sicuramente positivo e incoraggiante sia per la partecipazione e l'interesse, sia per l'entusiasmo della maggior parte dei partecipanti per il loro stesso coinvolgimento.
Questi i numeri:

- 127 squadre partecipanti alla gara del pubblico (Squadra vincitrice: *I Tondinos)*
- 51 squadre partecipanti alla gara ufficiale tra Istituti

Le prime sei squadre vincitrici che hanno partecipato alla gara nazionale Cesenatico sono:

1° Galileo Ferraris (Torino)
2° Cattaneo (Torino)
3° Pascal (Giaveno)
4° Monti (Chieri)
5° Peano-Pellico (Cuneo)
6° Berard (Aosta)
7° Sobrero (Casale Monferrato)

- 15 squadre delle Scuole Medie Inferiori, tra le quali la vincitrice è stata la DIGIT dell'Istituto Marro di Villar Perosa (TO)
- 14 le scuole che hanno esposto al Mercatino delle idee. Il Liceo Monti e il Liceo Valsalice si sono aggiudicati a pari merito il 1° premio.
  La scuola vincitrice il Premio Perlasco è stata il Liceo Galileo Ferraris (Torino).

Finito di stampare
nel mese di ottobre 2019
per i tipi de
L'Artistica Savigliano