Un’attività sui problemi narrativi tra matematica e lingua italiana

Un'attività sui problemi narrativi tra matematica e lingua italiana

Stefano Boccardo
I.C. 'Parri – Vian' – Torino

Massimo Borsero
I.C. 'Parri – Vian' – Torino
Dipartimento di Matematica 'G. Peano' – Università di Torino

Antonella Piccirilli
I.C. 'Parri – Vian' – Torino

Sunto. *Il rapporto tra matematica e lingua italiana è molto stretto ed emerge in modo particolare nello studio dei cosiddetti 'problemi narrativi', cioè problemi il cui testo è una storia. In questo articolo viene presentata e discussa un'attività condotta in una classe prima dell'I.C. 'Parri – Vian' di Torino, in cui si è cercato di potenziare le competenze di problem solving degli allievi attraverso un approccio integrato tra attività con focus narrativo e attività con focus matematico.*

Premessa

Il *problem solving* è da sempre uno dei cardini dell'attività matematica e dunque, per riflesso, uno degli elementi centrali del suo apprendimento. La stessa Unione Europea, nella Raccomandazione del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente parla di competenza matematica come la "capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane".

L'aspetto essenziale che caratterizza il *problem solving* e lo differenzia dall'attività di soluzione di esercizi è la necessità di compiere delle scelte strategiche. Già Karl Duncker definiva un problema come un'attività che "sorge quando un individuo ha una meta ma non sa come raggiungerla" (Duncker, 1945) e deve quindi far ricorso alle proprie risorse strategiche. La grande quantità di decisioni strategiche attivate nella soluzione di un problema è stata studiata estensivamente da Schoenfeld, che osserva che la differenza principale tra il buon solutore e il cattivo solutore di problema è relativa alle domande che il soggetto si pone durante la risoluzione, domande che sono il frutto di un'efficiente attività metacognitiva, e cioè della capacità di riflettere su ciò che si sta facendo e su come lo si sta facendo (Schoenfeld, 1992).

Il matematico George Polya fu tra i primi ad analizzare il processo di risoluzione di un problema, identificando le seguenti quattro fasi (Polya, 1945):
1. la comprensione del problema, per cui è necessario conoscere chiaramente quanto richiesto;
2. la compilazione di un piano che prevede la scoperta dei legami che intercorrono fra le varie informazioni, fra i dati e l'incognita;
3. lo sviluppo di un piano che comporta l'applicazione di regole, algoritmi e procedure;
4. la verifica del risultato, per cui si richiede di esaminare la soluzione ottenuta e di procedere alla verifica e alla discussione.

Naturalmente, queste fasi non si susseguono in ordine strettamente cronologico, ma vengono percorse dal solutore secondo un ciclo non lineare e iterativo a mano a mano che giunge alla soluzione. Tuttavia, la comprensione del problema appare come momento essenziale e imprescindibile per la sua soluzione.

Nel vasto filone di ricerca sulla comprensione dei problemi, riguardo al quale rimandiamo a Demartini e Sbaragli (2019) per una panoramica approfondita, particolare rilevanza ha assunto lo studio dei cosiddetti problemi narrativi. Questi problemi sono caratterizzati da una formulazione testuale che racconta esplicitamente una storia. Come osservato in Zan (2016), una storia ha tre componenti:
1. una situazione che presenta qualche conflitto, problema, disagio;
2. un protagonista animato che è coinvolto in questa situazione con uno scopo;
3. una sequenza basata su rapporti causali, in cui il conflitto viene risolto.

Chiaramente, l'idea di causalità è centrale nella narrazione di storie, ma è una causalità diversa da quella logica: si tratta di una causalità narrativa. Lo stretto legame tra il contesto narrativo evocato dalla storia e il contesto matematico del problema diviene un elemento essenziale sia per la comprensione che per la soluzione dei problemi narrativi. Questo legame è ben evidenziato dalla frase della medaglia Fields Cèdric Villani citata in Branchetti e Viale (2016), che rispondendo alla domanda di un giornalista che gli chiedeva come mai fosse ospite a Lucca Comics nel 2013 affermava "per spiegare bene la matematica si devono raccontare delle storie". Tuttavia, esistono esempi in cui questo racconto, invece che favorire, ostacola la comprensione. In Zan (2016), ad esempio, viene citato il seguente problema:

> Giulio e Andrea per giocare mettono assieme le loro automobiline. Quando smettono di giocare, ciascun bambino vuole riprendersi lo stesso numero di

automobiline che aveva all'inizio del gioco. Tutte le automobiline sono 48, ma come dividerle? Andrea ricorda che aveva il triplo delle macchinine di Giulio. Vuoi aiutarli a dividere le macchinine nel modo giusto?

Qui la storia appare del tutto incredibile, perché difficilmente un bambino non avrebbe ricordato quante automobiline aveva ma che ne aveva il triplo del suo amico, e sicuramente nessun bambino avrebbe rivoluto il numero di partenza invece che le sue macchinine. Questa storia fallisce nell'essere verosimile, e questo impedisce la sospensione dell'incredulità essenziale per immergersi in essa. Possiamo dunque affermare che vi è una frattura tra il contesto matematico e quello narrativo: problemi di questo tipo sono detti dalla stessa Zan *problemi a quadretti*.

Invece i problemi in cui il contesto matematico e quelli narrativo sono in continuità, sono chiamati dalla stessa Zan *problemi a righe*. Le caratteristiche essenziali per questi problemi sono che

1. il "problema" sia un problema di qualcuno;
2. la situazione conduca ad una sospensione dell'incredulità nel contesto narrativo evocato;
3. rispondere alla domanda risolva il problema.

Per un approfondimento sul tema dei *problemi a righe e a quadretti* rimandiamo a Zan (2007) e (2016).

Un ultimo aspetto sui cui è necessario porre attenzione è che, per la natura stessa dei testi dei problemi, la comprensione non può scaturire da una lettura superficiale degli stessi. Come affermato in Demartini e Sbaragli (2019) "Una convinzione comune è che esista un solo tipo di lettura e che, quindi, di fronte al testo di un problema matematico l'approccio sia identico a quello ad altri testi. È invece errato considerare la lettura come un'azione sempre uguale a sé stessa, senza differenze di procedura e di scopo: sarebbe più corretto parlare di letture, cioè di operazioni in parte diversificate a seconda del testo e del suo scopo (cioè di che cosa dobbiamo fare con il testo in questione)". In Tanner e Green (1988) viene proposta una classificazione in quattro tipi di lettura:

1. lettura esplorativa o orientativa (skimming): consiste nello scorrere rapidamente e a balzi un testo per scoprire di quale argomento e sotto-argomenti tratta, e per capire se è centrato o no rispetto al proprio scopo di lettura. È una lettura molto utile in vari contesti, in quanto è idonea ad esempio a capire a grandi linee di che cosa parla un opuscolo o un articolo, per valutare se procedere con una lettura più approfondita;

2. lettura selettiva (scanning): consiste nel cercare informazioni e dati specifici in un testo (ad esempio, le parole in un dizionario, l'argomento poligoni in un testo scolastico di matematica, le pagine su Leopardi in un'antologia, ma anche i prezzi in un volantino o un nominativo in un elenco ecc.);

3. *lettura estensiva o globale (extensive)*: ha carattere sequenziale (diversamente dalle precedenti) ed è quella che spontaneamente si impiega nella lettura per piacere, ad esempio nella lettura di testi narrativi non troppo impegnativi; si può ricavare un certo tipo di apprendimento, in quanto è una lettura che porta comunque alla sedimentazione di memorie e informazioni, cfr. Day e Bamford (2002);
4. *lettura intensiva o analitica (intensive or narrow)*: è quella usata per capire a fondo e per interpretare al meglio le richieste del testo, ma anche per studiare e per imparare; prevede perciò che il lettore si soffermi maggiormente sul testo e ne rilegga certi passi. È una lettura in cui chi legge attua regressioni, ipotesi e anticipazioni per cogliere meglio il senso del testo stesso, considera altri elementi come immagini, simboli ecc. (se presenti), integra le informazioni che derivano dai dati testuali e le combina tra loro e a dati extra-testuali, e riflette a fondo sui significati delle parole.

L'interscambio dinamico tra questi quattro tipi di lettura è, a nostro avviso, uno dei momenti essenziali dell'attività di comprensione che prelude a quella di soluzione e in seguito vedremo quali attività sono state messe in campo per analizzarlo.

Gli obiettivi

In questa sezione riferiremo un'esperienza didattica svoltasi in una classe prima, composta da 22 studenti divisi in 5 gruppi, della scuola secondaria di primo grado 'Nosengo' dell'Istituto Comprensivo 'Parri – Vian' di Torino, della durata complessiva di 20 ore ripartite a metà, con distribuzione alternata, tra gli insegnamenti di italiano e matematica del corso.

Abbiamo voluto indagare in particolare la relazione tra comprensione del testo e risoluzione del problema, avendo riscontrato in precedenza una tipologia di lettura eccessivamente selettiva anche nelle prove di italiano.

La finalità dell'intervento didattico è stata di potenziare il pensiero strategico, in linea con quanto previsto dalla certificazione delle competenze (D.M. 742/2017), di saper operare scelte consapevoli, di contro al prevalere di un diffuso automatismo negli atteggiamenti degli studenti di fronte alle consegne. Pertanto, abbiamo utilizzato i *problemi a righe* per incentivare in prima istanza il coinvolgimento degli studenti, riducendo le resistenze psicologiche e le prassi stereotipe che possono sorgere con generi testuali canonici fortemente tipicizzati e riconoscibili.

Prima della verifica della risoluzione, l'idea di fondo durante le ore di italiano è stata di monitorare il processo di comprensione della situazione problematica attraverso esercizi di riformulazione e attività di lettura intensiva.

Il testo di partenza è stato *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (1938), che è stato modificato per adattare i brani al contesto della classe, mantenendo inalterata la cornice. Si tratta di un libro noto e ampiamente diffuso per la sua modernità nell'ambito delle proposte didattiche sui problemi narrativi. Il protagonista, infatti, è un eroe *ante litteram* delle strategie innovative impiegate nella *gamification* e nel *problem solving*: Beremiz Samir, l'uomo del titolo, risolve sotto gli occhi ammirati del fedele compagno Hanak Tade Maia problemi matematici apparentemente impossibili con un atto non preordinato di intelligenza, riuscendo a farsi largo, debitamente ricompensato dagli sceicchi che aiuta, nella società della Baghdad del 1200.

Attraverso il suo personaggio, si è inteso incentivare una partecipazione attiva e creativa da parte dello studente; creare attraverso le sue avventure un contesto di apprendimento ludico e motivante. Volendo rinforzare l'*engagement*, tra gli 'aspetti motivanti' la narrazione funziona da intensificatore della realtà della situazione, come una sorta di succedaneo dell'esperienza reale. È un po' come se la realtà passasse nel testo. Il problema diventa meno astratto, si crea un contesto verosimile che nutre il patto di sospensione dell'incredulità, attribuendo un 'effetto di realtà' ai problemi.

Inoltre, la 'sfida-problema', come avviene per la variabile di genere nelle narrazioni a *clues*, richiama il completamento della storia, inducendo gli allievi a esporsi maggiormente e a formulare ipotesi e proposte di soluzione; si riducono così fenomeni di più opaca lettura come la resa e lo stallo, attestate nelle prove di matematica della classe.

Oltre a interpretare il problema, il saper argomentare la soluzione è l'altro aspetto relativo alla formulazione dei processi a cavallo tra italiano e matematica: avere a disposizione un certo numero di soluzioni, matematiche e non, si ritiene essenziale per la fase dell'argomentazione, che è stata condotta durante le ore di matematica. Va evidenziato come sia lo stesso testo a tematizzare la discussione: è Beremiz Samir che talvolta in nome di principi etici e filosofici preferisce una soluzione difforme da quella matematica da lui stesso individuata.

Abbiamo riconosciuto in precedenza come nella narrazione sia necessario un principio tematico, che funziona da ulteriore 'motivatore', in questo caso il tema della giustizia, argomento molto sentito dagli studenti, soprattutto in questa fascia di età. Beremiz non risolve solo questioni matematiche ma anche questioni morali. Ciò ha rappresentato uno stimolo alla discussione.

Si sono pertanto maggiormente esplorate le motivazioni dell'agire dei personaggi, le loro scelte, le loro strategie, per le quali sono state chieste anche delle valutazioni da parte degli allievi. Si è facilitato un approccio più interpretativo, per incentivare "quell'atteggiamento attivo, critico e costruttivo che favorirebbe lo sviluppo di processi di pensiero significativi, i quali a loro volta consentirebbero di saper prendere decisioni qualitative in base al contesto, oltre che quantitative", cfr. Demartini e Sbaragli (2019).

Nella presente sezione non sono presenti testimonianze di questo ineludibile passaggio dal testo alla realtà, tuttavia l'argomentazione della situazione problematica, che veniva già esplicitamente discussa all'interno della narrazione, ha promosso una maggiore disponibilità al confronto tra insegnanti e allievi: un invito a ragionare per problemi aperti da cui nasce la competenza del *problem solving* che abbiamo indagato.

Descrizione delle attività

In questa sezione presenteremo in dettaglio le quattro fasi della proposta didattica e l'analisi delle risposte degli studenti.

Fase 1

In questa prima fase abbiamo proposto per una comprensione del testo un riassunto durante le ore di italiano e una risoluzione del problema a gruppi misti nelle ore di matematica, a partire da una situazione problematica, riportata qui in versione ridotta[1]:

> Assad e Beremiz, sulla strada del viaggio per Baghdad, incontrano Salem, un viandante affamato. Il viandante chiede loro da mangiare, dicendo di essere un ricco mercante, e di poterli ricompensare non appena arrivati a Baghdad. Assad ha 5 pagnotte, e Beremiz ha 3 pagnotte. Si mettono in viaggio insieme. Assad dice: «Abbiamo 8 giorni di viaggio, dobbiamo consumare solo una pagnotta al giorno: ce la divideremo in tre». E così fanno il primo giorno, e poi il secondo, … e poi l'ottavo si dividono l'ultimo pane. Finalmente arrivano a Baghdad. Lì Salem li invita a casa sua, e per ricompensarli dà 5 monete d'oro a Assad, che aveva messo 5 pagnotte, e 3 monete d'oro a Beremiz, che aveva messo le sue 3 pagnotte. Beremiz dice: «Amico, non hai fatto il conto giusto. Devi dare 7 monete a Assad, e solo 1 a me. Infatti, anche noi abbiamo mangiato le pagnotte». Assad dice: «Amico, Beremiz ha fatto i conti per bene. Però l'importante è che ognuno di noi due ha

[1] Nell'attività svolta abbiamo scelto di utilizzare una versione tratta dal testo di Tahan (1938) con pochissime modifiche, di oltre 2900 caratteri.

messo a disposizione quello che aveva. Quindi dividiamo la ricompensa a metà: 4 monete per ciascuno». Salem non sa più come fare. Prova a spiegargli il ragionamento che ha fatto Beremiz.

Siamo partiti per conoscere il livello di partenza da un questionario di natura esplorativa. Ci è apparso significativo orientare la comprensione degli studenti indirizzandola sui personaggi e dal punto di vista linguistico su domande di coesione linguistica e connessione testuale.

'Spie linguistiche' dei personaggi e delle loro relazioni sono stati, infatti, i numerosi pronomi personali e aggettivi possessivi che intessevano il testo, al punto fare esclamare a uno studente che i personaggi fossero moltissimi, molti di più di quelli in effetti presenti. Riconoscere il riferimento di aggettivi possessivi, pronomi personali e altre forme di rimandi testuali ha permesso di 'trattenere' la lettura, perché il leggere non fosse semplicemente un percorso lineare, rapido, espulsivo, ma la rete di personaggi obbligasse a una continua verifica e revisione della comprensione. La tecnica del rimando linguistico implica una lettura strategica rivolta a cogliere le relazioni logico–sintattiche, utile perché porta gli studenti a percorrere l'intero testo e a mette in crisi la strategia di lettura più immediata per loro, la comprensione locale. Sotto questo aspetto, discorso narrativo e matematico tendono ad avvicinarsi, in quanto le informazioni da mettere in relazione non sono localizzate in un punto ma sono disseminate all'interno del testo problema, riproducendo l'esperienza reale, per sua natura non preordinata.

La seconda modalità di verifica del processo di comprensione della situazione problematica è stato il riassunto. Ci appare evidente la sua natura strategica, come si può desumere da Cardinale (2015) da cui abbiamo estratto alcuni brani che riteniamo significativi in tal senso, riportati in Tabella 1.

Funzioni	Descrizione
Integra i processi di lettura e scrittura	Affrontare il problema dell'apprendimento della scrittura oggi, alla ricerca di tecniche efficaci per favorire buone pratiche, implica perciò ripensare la lettura e rivalutare l'approccio cognitivista che fa della scrittura un'attività di produzione di senso. Saper scrivere significa innanzitutto saper comprendere, saper pensare e saper pianificare, se non si vuole ridurre tutto a micrologorrea e all'esibizione di semplici battute. Lettura e scrittura si rivelano infatti ancora attività strettamente correlate

Presuppone un rigoroso rispetto del testo di origine	Si tratta di una scrittura impersonale, che non coinvolge la soggettività, diversa dalla scrittura creativa, una scrittura a dominanza referenziale, che non ha altro scopo che quello di verificare il rigore e la precisione con cui viene compreso e riportato il pensiero altrui
Permette di organizzare le conoscenze immagazzinate in memoria	Quando un lettore capisce un discorso, compie soprattutto un lavoro di sintesi del testo, perché tende a ridurre l'informazione, cancellandone i dettagli, a generalizzare e a costruire una sorta di riassunto, un particolare tipo di rappresentazione semantica di esso, organizzata in una serie articolata di proposizioni, operando però in un contesto dinamico influenzato anche da fattori pragmatici legati alla situazione
È il risultato di un processo mnemonico, non semplicemente riproduttivo ma ricostruttivo	Favorisce la creazione di uno schema testuale (*macrostruttura semantica*) formato da una serie di categorie gerarchicamente ordinate, variabili in relazione a diverse società e culture

Tabella 1. Le funzioni del riassunto secondo Cardinale (2015).

L'analisi delle risposte degli studenti evidenzia due esiti che corrispondono a due tendenze: il riassunto 'matematico' e 'narrativo' (vedi Tabelle 2 e 3). Il primo pone il *focus* su una distribuzione precisa ed equilibrata degli elementi fondamentali per la soluzione, a cui viene dato ampio risalto al punto che occupano buona parte del testo; serve a impostare strategicamente la fase successiva della risoluzione e rivela la comprensione della natura del problema (vedi Tabella 2); il secondo risulta meno focalizzato, tende a essere meno selettivo, riportando particolari di natura narrativa non essenziali (vedi Tabella 3).

C'erano due stranieri, che durante il loro viaggio
incontrarono un viandante gravemente ferito. Allora,
i due viandanti corsero a soccorrerlo, e lui gli raccon
tò la sua avventura. Quando ebbe finito di raccontare,
chiese loro cibo per sfamarsi. Uno degli stranieri
disse che aveva tre pagnotte, l'altro cinque. Lo
sceicco volle fare lo scambio tra pagnotte e otto
monete d'oro, appena arrivati a Baghdad. Quando
giunsero a Baghdad, si diressero verso il palazzo
reale, dove viveva il visir e fecero lo scambio di
monete. Uno ricevette cinque monete per le sue
cinque pagnotte, l'altro tre per le sue tre pagnotte.
Il problema è che l'Uomo che Contava pretendeva
che la divisione di monete non fosse matematicamente
corretta, ma il visir disse che era una pretesa
totalmente assurda.

C'erano due stranieri, che durante il loro viaggio incontrarono un viandante gravemente ferito. Allora, i due viandanti corsero a soccorrerlo e lui gli raccontò la sua avventura. Quando ebbe finito di raccontare, chiese loro il cibo per sfamarsi. **Uno degli stranieri disse che aveva tre pagnotte, l'altro cinque**. Lo sceicco volle fare lo scambio **tra pagnotte e otto monete d'oro**, appena arrivato a Baghdad. Quando giunsero a Baghdad, si diressero verso il palazzo reale, dove viveva il visir e fecero lo scambio di monete. **Uno ricevette cinque monete per le sue cinque pagnotte e l'altro tre per le sue tre pagnotte**. **Il problema è** che l'Uomo che Contava pretendeva che la divisione di monete **non fosse matematicamente corretta**, ma il visir disse che era una pretesa totalmente assurda.

Tabella 2. Un esempio di 'riassunto matematico'.

RIASSUNTO
Salem Nasair, uno sceicco, viene trovato ferito e viene
soccorso da due viandanti. Racconta che venne ferito duran
te un attacco di persiani.
Era molto affamato e chiese agli stranieri del cibo promettendo
gli delle monete in cambio. Gli stranieri accettarono
offrendogli otto pagnotte, cinque dal viandante e tre
dal suo compagno. Successivamente tornarono a Baghdad;
arrivati alla città incontrarono il visir e, vedendo Salem
Nasair in quelle condizioni cosa gli era capitato, lo sceicco
disse lui che era stato aiutato da i due viandanti.
Il visir diede agli sconosciuti otto monete d'oro; ma l'uomo
che contava aveva un obiezione: diceva di meritarsi
sette monete e darne all'amico soltanto una

Salem Nasair uno sceicco viene trovato ferito e viene soccorso da due viandanti. **Racconta che venne ferito durante un attacco di persiani**.
Era molto affamato e chiese agli stranieri del cibo promettendogli delle monete in cambio. Gli stranieri accettarono offrendogli otto pagnotte, cinque dal viandante e tre dal suo compagno. Successivamente tornarono a Baghdad; arrivati alla città incontrarono il visir e**, vedendo Salem Nasair in quelle condizioni cosa gli era capitato**, lo sceicco disse lui che era stato aiutato dai due viandanti.
Il visir diede agli sconosciuti otto monete d'oro; ma **l'uomo che contava aveva un'obiezione**: diceva di meritarsi sette monete e darne all'amico soltanto una.

Tabella 3. Un esempio di 'riassunto narrativo'.

In sede di risoluzione, tre dei gruppi non hanno risolto il problema, ma hanno svolto il riassunto. Un solo gruppo, quello del riassunto matematico, ha risolto il problema, ma è significativo il confronto con la soluzione del gruppo che ha proposto il riassunto narrativo. Il gruppo dei 'matematici' trova la soluzione di Beremiz dividendo ciascuna delle 8 (5 + 3) pagnotte in 3 pezzi. In tutto ottiene 24 pezzi (5 · 3 = 15; 3 · 3 = 9; 15 + 9 = 24). Assad mette 15 pezzi, Beremiz 9 pezzi. Ognuno di loro trattiene 8 pezzi per sé, uno al giorno, per sopravvivere e dà il restante a Salem per sfamarlo. Quindi Assad dà 7 pezzi a Salem, Beremiz ne dà 1 (15 – 8 = 7; 9 – 8 = 1) e in base a questo riceveranno il proprio corrispettivo in monete. È importante notare come strategicamente il gruppo abbandoni la formulazione discorsiva, ridotta a funzione di commento e didascalia, a favore di una visualizzazione del processo attraverso i disegni (vedi Figura 1).

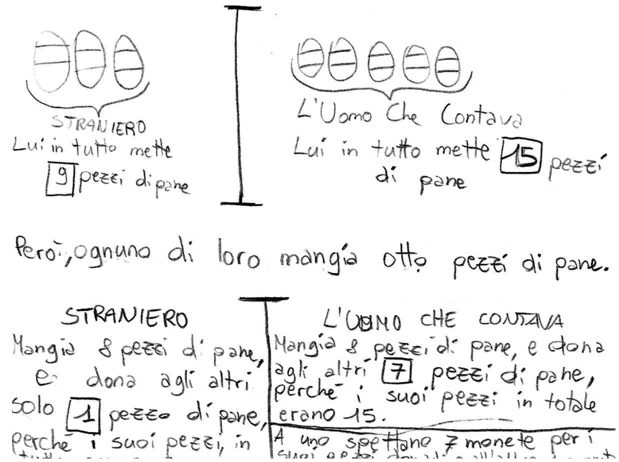
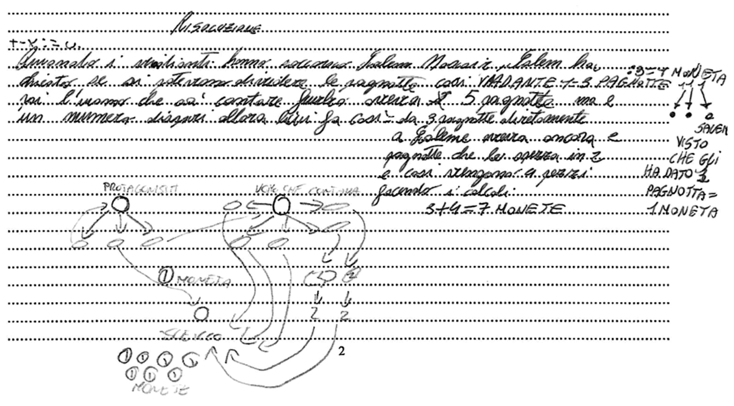


Fig.1. La soluzione matematica.

Il secondo gruppo insiste invece su una via narrativa per la sua proposta di risoluzione, che viene giustificata con un discorso lungo e articolato, dal quale risulta che per le 3 pagnotte date Assad (e non Beremiz) avrebbe ricevuto 1 sola moneta (3 : 3 = 1), mentre dalle sue 5 pagnotte Beremiz (e non Assad) doveva ricavare 7 monete (3 + 4 : 3 per ogni pagnotta data e 4 perché aveva spezzato in due le altre due restanti) come riportato in Tabella 4.



Quando i viandanti hanno soccorso Salem Nasair, Salem ha chiesto se si potevano dividere le pagnotte così VIANDANTE 1 = 3 PAGNOTTE: 3 = 1 MONETA poi l'uomo che sapeva contare **furbo** aveva 5 pagnotte ma **e un numero dispari** allora lui fa così: da 3 pagnotte direttamente a Salem aveva ancora 2 pagnotte che le spezza in 2 e così vengono 4 pezzi facendo i calcoli 3 + 4 = 7 MONETE

Tabella 4. Un esempio di 'soluzione narrativa'.

In sostanza, l'Uomo che Contava cerca di imbrogliare Salem, che sta morendo di fame ed è disposto ad accettare qualunque cosa.

La soluzione è matematicamente scorretta, ma narrativamente ha un senso.

Ciò che è interessante notare è che la personalità dello studente leader del gruppo dei 'narrativi' è esattamente 'imbrogliona' e manipolatrice. Lo studente è diventato 'L'Uomo che Sapeva Contare' (la sovrapposizione tra le figure di Assad e Beremiz è sintomatica) e si è preso carico della soluzione del problema. Il problema matematico è stato visto come un testo, che termina con una domanda, in cui un personaggio ha un problema che il lettore aiuta a risolvere. Attraverso la mediazione del personaggio, si agisce pertanto sulla motivazione del lettore a risolvere la situazione problematica. Il 'suo' problema (del personaggio) diventa un 'mio' problema (del lettore).

Fase 2

Tra le definizioni del testo problema, la più comune tra gli stessi studenti è che sia un testo che si conclude con una domanda. Per la seconda fase del progetto, svolta in modo individuale, dato il testo, gli studenti dovevano risalire alla domanda. Si trattava di focalizzare il problema nelle ore di italiano e provare a risolverlo con la docente di matematica nell'ora successiva.

Nella narrazione Beremiz assisteva a un litigio tra due fratelli Hamed e Harim. Il loro babbo aveva chiesto di tingere le inferriate del cancello. Hamed ci aveva lavorato per 3 pomeriggi interi, mentre Harim aveva trovato sempre delle scuse dicendo che aveva da fare altre cose, e aveva aiutato il fratello solo nell'ultimo pomeriggio. Quando avevano finito di tingere tutto, il babbo aveva detto soddisfatto: "Bravi! Avete fatto proprio un bel lavoro! Ecco 60 dinari: 30 per ognuno di voi". Ma Hamed aveva protestato. Gli studenti dovevano individuare "Perché Hamed protesta?" e "Quale domanda dovrà formulare per ricevere l'aiuto?"

Quasi tutti gli studenti hanno individuato correttamente il motivo della protesta, ma ciò che è interessante notare è che anche in questo caso, come nel precedente, possiamo individuare due interpretazioni – e strategie – degli studenti posti di fronte al testo. L'analisi delle domande rivela, infatti, che sono presenti due tendenze, una narrativa e una matematica (vedi Tabelle 5 e 6).

Per favore Beremid mi potrebbe aiutare ? Se lo poteva aiutare matematicamente
Per favore Beremid mi potrebbe aiutare? Se lo poteva aiutare matematicamente

Tabella. 5. Esempi di 'domande narrative'.

SE IO HO LAVORATO PER 3 GIORNI E MIO FRATELLO PER UNO QUANTO DOVRÒ GUADAGNARE? E LUI?
Se io ho lavorato per 3 giorni e mio fratello per uno quanto dovrò guadagnare? E lui?

Tabella. 6. La domanda matematica.

In particolare, molto curioso il caso di una studentessa che scrupolosamente sente la necessità di riempire un 'buco' nella narrazione, fornendo al padre la prova, dal momento che ipotizza, con un'inferenza, che non sia presente durante il lavoro (vedi Tabella 7). Il quesito matematico rimane implicito, mentre la domanda elaborata ha una funzione linguistica prevalente di tipo conativo, che rimane incentrata del tutto sul destinatario del messaggio; volendo fargli compiere un'azione, perde la sua referenzialità e la sua oggettività. Diverse possono essere le ipotesi che è possibile formulare per indagare nella domanda questo eccesso di narratività. È ragionevole pensare che l'identificazione, tipica della tipologia testuale narrativa, come accaduto nel caso precedente, porti a sposare un punto di vista, una soggettività.

Ecco la domanda di Hamed:«Padre, io e mio fratello avevamo due vernici di colore diverso, puoi notare pure tu che il mio colore prevale sul cancello, mentre il suo è molto poco. Potresti andare a guardare meglio, ora che te l'ho ricordato?».
Ecco la domanda di Hamed ‹‹Padre, io e mio fratello avevamo due vernici di colore diverso, puoi notare pure tu che il mio colore prevale sul cancello, mentre il suo è molto poco. Potresti andare a guardare meglio, ora che te l'ho ricordato?››.

Tabella. 7. Una domanda 'molto' narrativa.

Per quanto riguarda la soluzione, si tratta di un problema di divisione in parti proporzionali. Bisogna di dividere per 4 pomeriggi, i 3 lavorativi di Hamed e 1 pomeriggio di Harim, e dare al primo 45 e al secondo 15 (vedi Figura 2).

Tuttavia, la maggioranza degli allievi ha risolto dividendo 60 per 3 pomeriggi, attribuendo ad Hamed 50 dinari (20 del primo pomeriggio, 20 del secondo e 20 : 2 = 10 del terzo) e 10 ad Hamir, per la metà del terzo pomeriggio (vedi Figura 3).

Ma perché gli allievi hanno preferito rispondere così? Probabilmente ha agito l'attrazione dell'elemento fondamentale per la soluzione, il numero 3, esplicitato nel testo, invece del numero 4 da ricavare come dato nascosto, e l'automatismo di dividere 60 per 3 (che però è divisibile anche per 4). Inoltre, è possibile che alcuni studenti abbiano inteso la frase del testo problema "solo nell'ultimo pomeriggio" come terzo pomeriggio, per cui hanno attribuito metà giornata pomeriggio di lavoro a Hamed e l'altra metà a Harim. Riteniamo perciò, anche sulla base delle argomentazioni successive effettuate in aula, che sia riscontrabile un problema di 'enciclopedia' cioè di informazioni condivise relative alla conoscenza sul mondo, presupposte dai lettori, e che abbia condizionato le risposte degli studenti, i quali hanno probabilmente immaginato una retribuzione del lavoro a ore, come avviene per esempio per molti lavori che sono pagati a tempo effettivamente impiegato e non a cottimo o a giornata.

Ci pare anche questo il caso di un problema, la cui comprensione non sia riducibile al solo testo, ma sia influenzata anche dal contesto che questo evoca, che lo studente è chiamato a rappresentare; riguarda pertanto più le regole del mondo della storia (determinato, reale, verosimile, presunto o supposto), il cosiddetto *storyworld*, che un contesto strettamente matematico o puramente astratto.

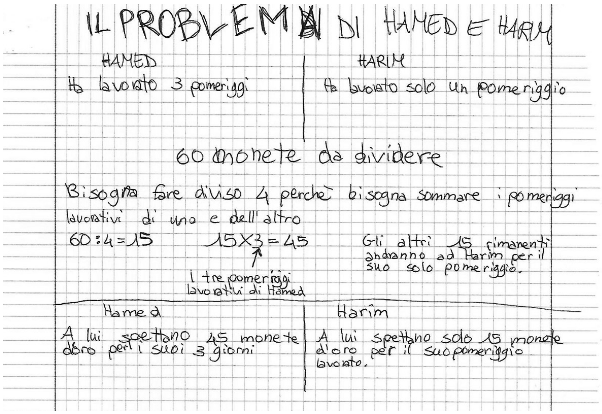


Fig. 2. La soluzione che si basa su una retribuzione a giornata.

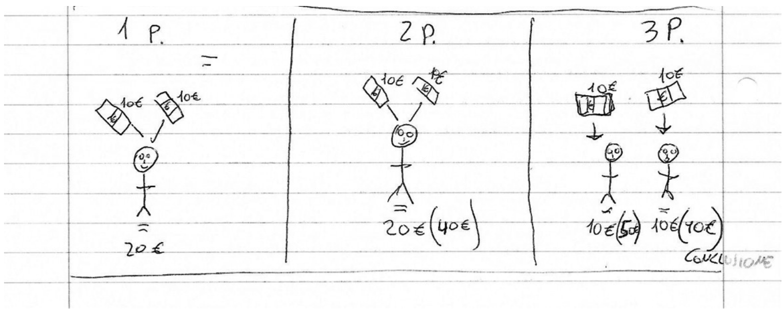


Fig. 3. La soluzione che presuppone una retribuzione per frazioni di giornata.

Fase 3

Per finire, abbiamo sottoposto agli studenti, suddivisi per gruppi misti, un testo-problema nel quale, date le domande, dovevano individuare alcuni elementi fondamentali per la soluzione. Trattasi del procedimento contrario a quello richiesto dall'esercizio precedente: si va dalla domanda al testo.

Per quanto riguarda la metodologia, abbiamo utilizzato gli *item cloze*, il cosiddetto 'testo bucato' (vedi Figura 4). Applicato nella didattica di una lingua straniera e della stessa lingua madre, il *cloze* "è un buon sistema per favorire l'apprendimento di unità lessicali e sviluppare le capacità di ragionamento e argomentazione", cfr. Serianni (2013). Consiste nella "ricostruzione di un brano tramite il reinserimento di alcune parole precedentemente cancellate secondo vari criteri", cfr. Nuccorini in Serianni (2013). Le finalità del cloze sono di incentivare i processi di lettura e comprensione in maniera attiva, facendo alcune ipotesi sulle parole mancanti ed è utile a capire la rappresentazione mentale dell'allievo rispetto allo stimolo testuale. Come scrive Carla Marello in Serianni (2013), "la somministrazione del cloze può diventare l'occasione per fare lezione di grammatica e di lessico qualora l'insegnante faccia discutere in classe le lacune più interessanti, quelle che hanno ricevuto integrazioni molto diverse e che pochi hanno saputo riempire".

Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma.
Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.
La mamma

Pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.
Arrivati a casa portano il detersivo dalla vicina, che chiede: "quanto vi devo dare per il detersivo?".
Marco e Anna si accorgono di aver perso lo scontrino, ma ricordano che il latte costava 1 euro e 50 centesimi e

1. Aiuta Beremiz a completare il testo: INSERISCI DELLE FRASI NELLE CASELLE IN MODO CHE SI POSSA RISOLVERE IL PROBLEMA.
2. Aiuta i due fratelli a capire quanto devono chiedere alla vicina per il detersivo.

Fig. 4. Il 'testo bucato'.

Analogamente al riassunto, che implica una tipologia di lettura attiva per il processo di riformulazione del testo, lo strumento del *cloze* richiede allo studente di saper cogliere le singole informazioni ricostruendo il significato globale del testo. Impiegato in ambito matematico, rivela la comprensione della natura del problema. Un gruppo, infatti, produce un problema chiuso, inserendo tutti gli elementi necessari per la soluzione (vedi Tabella 8).

"Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. *Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina che è malata e non può uscire.* *La mamma* QUANTO DEVE SPENDERE SE HA UNA BANCONATA DA 10 €? *Pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.* *Arrivati a casa portano il detersivo dalla vicina, che chiede: "quanto vi devo dare per il detersivo?".* *Marco e Anna si accorgono di aver perso lo scontrino, ma ricordano che il latte costava 1 euro e 50 centesimi e* il detersivo costa 5,00 euro, il latte costa 1,50 e il pane costa 0,50 più 3 euro di resto.
Quanto deve spendere se ha una banconota da 10 €? Il detersivo costa 5,00 euro, il latte costa 1,50 € e il pane costa 0,50 più 3 euro di resto.

Tabella. 8: Il problema 'chiuso'.

Gli altri gruppi hanno ottenuto tutti un problema risolubile, che sono stati in grado di risolvere, ma ciò che colpisce maggiormente è che in un problema il cui 'mondo della storia' presentava elementi tratti da un contesto quotidiano, quali pane, latte, detersivo, i gruppi, senza consultarsi tra loro, abbiano tutti deciso di inserire 10 come valore del denaro totale (vedi Tabella 9).

Un gruppo, in particolare, ha sentito la necessità di dettagliare la narrazione, precisando che "il pane costa 1,50 al kg" e che i protagonisti "ne comprano 2 Kg" (vedi Tabella 10).

Se è vero che sono informazioni accessorie di natura variabile all'interno del testo, rivelano tuttavia che gli studenti hanno cercato la massima verosimiglianza in questo problema, che evidentemente evoca un contesto familiare. Pertanto, in questo caso, probabilmente anche per ragioni di prossimità rispetto al problema precedente che afferiva al mondo del lavoro, esperienza ancora da compiersi, gli studenti hanno impiegato al meglio le competenze interpretative, spingendosi a utilizzare anche quelle di tipo valutativo.

Di fronte a un problema come questo, nel quale quanto a enciclopedia e a processo di identificazione discorso matematico e discorso narrativo sembrano convergere di più, gli studenti hanno compiuto operazioni non solo testuali ma anche di contesto, preoccupandosi loro stessi di ridurre eventuali fratture e ribadendo la continuità tra i mondi narrativo e matematico.

Riteniamo interessante notare come questo atteggiamento si traduca in un'espansione del testo – processo di riscrittura complementare al processo narrativo del riassunto, visto in precedenza – nella quale la descrizione è qui di tipo matematico, diversamente dall'opzione esclusivamente narrativa impiegata per riempire il 'buco' della narrazione nella formulazione della domanda del secondo problema *(cfr. Fase 2)*.

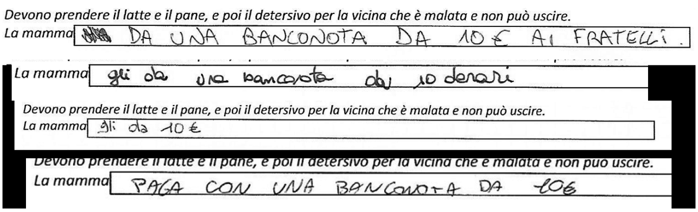

da una banconota da 10 € ai fratelli. gli da una banconota da 10 denari gli da 10 € paga con una banconota da 10 €

Tabella. 9. Elementi verosimili per la risoluzione di un problema ‘a righe’.

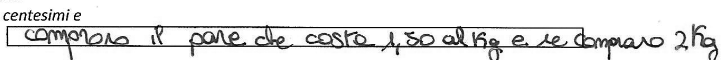

Comprano il pane che costa 1,50 al kg e ne comprano 2 kg

Tabella. 10. L’espansione ‘matematica’ di un elemento del testo problema.

Fase 4

Siamo arrivati al punto finale: posto che narrazione e matematica convergano, come riuscire a fare in modo che questa non sia solo una premessa e una condizione alla risoluzione ma diventi anche una risorsa, una strategia? Posto dunque che scattino la presa in carico del problema, l’identificazione e la motivazione, che ci sia un’effettiva continuità, permeabilità e riconoscibilità tra testo e contesto a livello di rappresentazione ed enciclopedia, con il patto di sopensione e il *world building*, che le operazioni di linguaggio siano corrette e rispettose (la narrazione non deve spiegare la matematica secondo un processo di affabulazione), sembra che il tema sia uscire da un certo soggettivismo verso cui la narrazione induce e recuperare un piano di oggettività formale. Quello che Umberto Eco definiva perdersi nei ‘boschi narrativi’, che qui sono diventati matematici.

Per non perdersi, la bussola deve diventare interiore, il che rimanda a un problema – anche educativo e non solo disciplinare – di consapevolezza, essere in grado di usare gli strumenti che il contesto matematico e narrativo offrono in modo sinergetico.

Nel cercare anche di verificare se la nostra azione didattica avesse migliorato le competenze di *problem solving* degli studenti, abbiamo proposto un ultimo testo. Si tratta della famosa storia sulla nascita degli scacchi qui riportata in versione ridotta[2]:

> Il gioco degli scacchi arrivò in Egitto, portato da un ambasciatore persiano che volle insegnarlo anche al Faraone. Questi, entusiasta del gioco, al termine della partita, per testimoniare la propria gratitudine, invitò l'ambasciatore ad esprimere un desiderio qualsiasi che sarebbe stato senz'altro esaudito. L'interpellato rispose che voleva del grano: un chicco sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro sulla terza e così continuando e raddoppiando, fino alla sessantaquattresima casella.
>
> "Una cosa da nulla" proclamò il Faraone, stupito che la richiesta fosse così misera, e diede ordine al Gran Tesoriere di provvedere.
>
> Quanti chicchi di grano deve dare il Gran Tesoriere all'ambasciatore?

Quattro gruppi su cinque hanno risolto il problema in maniera (quasi) corretta[3], di cui uno in maniera completa[4] (vedi Tabella 11), ma ciò che importa constatare non è il risultato quanto l'evidenza del processo.

I chicchi di grano che soddisfano la ~~[illegible]~~ richiesta del mercante sono 2^{64}
I chicchi di grano che soddisfano la richiesta del mercante sono 2^{64}

Tabella. 11. La soluzione del problema.

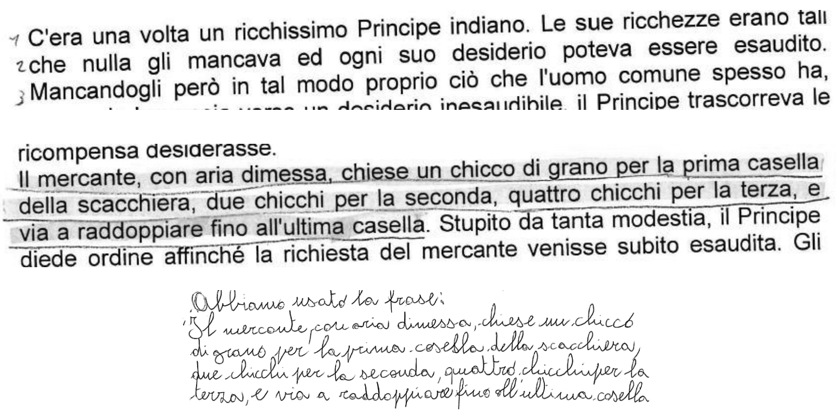
Abbiamo notato un miglioramento nelle strategie di lettura: gli studenti hanno attuato una lettura intensiva, compiendo spontaneamente un lavoro sul testo, con modalità diverse, ma tutte attive, quali la numerazione delle righe, la sottolineatura e la paragrafazione e adottando strategie basate sugli aspetti narrativi del problema (vedi Tabella 12). Questi segnali possono essere valutati come indizi tipici del comportamento del 'buon lettore' che può di-

[2] Anche in questo caso, nell'attività svolta in classe abbiamo utilizzato un testo di oltre 2200 caratteri.

[3] In realtà la soluzione corretta del problema è 2^{64}-1. Tuttavia in questo contesto è stata accettata come corretta anche la soluzione 2^{64}, chiarendo poi in una successiva discussione matematica il perché la somma delle potenze di 2 da 0 a *n* sia 2^n-1. Non ci si è spinti a dimostrare la formula per induzione, ma si è fatta congetturare la regolarità mediante l'uso di un foglio di calcolo.

[4] Gli altri tre gruppi hanno risolto il problema correttamente, ma non sono giunti alla formulazione con la notazione della potenza.

ventare un 'buon solutore', e che coinvolgono "la comprensione del 'problema nel contesto', quindi la comprensione anche linguistica della situazione, con il fine di trasformarlo in 'problema matematico'". Rispetto alla fase iniziale, con queste operazioni testuali sembrerebbero in fase di correzione "le convinzioni degli allievi inerenti lo scopo del problema matematico [...] solitamente rivolte all'atto del risolvere o al mettere in campo conoscenze e abilità, più che alla comprensione della situazione", cfr. Demartini e Sbaragli (2019).


1 C'era una volta un ricchissimo Principe indiano. Le sue ricchezze erano tali
2 che nulla gli mancava ed ogni suo desiderio poteva essere esaudito.
3 Mancandogli però in tal modo proprio ciò che l'uomo comune spesso ha,
... un desiderio inesaudibile, il Principe trascorreva le

ricompensa desiderasse.
Il mercante, con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella. Stupito da tanta modestia, il Principe diede ordine affinché la richiesta del mercante venisse subito esaudita. Gli

Abbiamo usato la frase:
"Il mercante, con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella

Abbiamo usato la frase:
Il mercante, con aria dimessa chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella.

Tabella. 12. Un esempio di 'lettura intensiva'.

Non solo con operazioni sul testo, ma anche attraverso rappresentazioni del contesto, gli studenti hanno tutti attuato strategicamente una integrazione tra linguaggi. Un aspetto fortemente motivante di congiunzione tra narrazione e matematica è, infatti, immaginare il 'come', che può favorire l'attivazione di processi risolutivi. Una strategia di lettura del testo narrativo consiste nel visualizzare i particolari più significativi del testo ossia immaginarli, raffigurarli mentalmente. È accaduto nel comportamento del 'buon solutore' del primo problema *(cfr. Fase 1)*, che ha utilizzato il linguaggio iconico, per rappresentare il pane. Anche in questo caso, sebbene in negativo, gli studenti hanno provato a raffigurare i chicchi sulla scacchiera, ma si sono resi conto dell'impossibilità di rappresentarli tutti e, di conseguenza, come non fosse possibile contare un numero che andava espresso come potenza.

Infine, oltre agli indizi su un processo di lettura più consapevole e sulla necessità di rendere trasparenti i propri processi mentali che portano alla soluzione, si sono rilevate tracce di un'attività di riscrittura funzionale alla risoluzione del problema: riempire i 'buchi narrativi' o eliminare gli ostacoli alla comprensione sono attività compiute dagli stessi studenti, attraverso strumenti testuali quali il riassunto e l'espansione, con le quali si spinge la narrazione della situazione problematica verso la determinazione di un contesto.

Conclusioni

Abbiamo introdotto un principio di narratività nella formulazione del problema di matematica. Elemento di raccordo tra la matematica e la narrazione è stato il personaggio.

L'approccio narrativo al testo ha favorito la 'presa in carico' del problema da parte degli studenti, con un miglioramento della loro motivazione.

Si è, inoltre, riscontrato un potenziamento delle competenze di *problem solving*, principalmente attraverso la scelta della tipologia di lettura intensiva, usata per capire a fondo e per interpretare al meglio le richieste del testo. Gli studenti hanno impiegato altri elementi come immagini, simboli e disegni per integrare le informazioni che derivavano dai dati testuali.

Il riassunto si è rivelato una strategia nuova ed efficace e un potente strumento di comprensione della situazione problematica, se focalizza e seleziona gli elementi utili alla risoluzione del problema.

Più in generale, si sono evidenziate due tendenze nei protocolli degli studenti, di tipo matematico e narrativo, una più selettiva, l'altra più 'onnivora'. La prima, in base alla rappresentazione quantitativa dei fenomeni, procede per astrazione e ragionamenti ipotetico-deduttivi; la seconda è un modo di attribuire un significato all'esperienza, collocando il problema nel contesto. Se i due atteggiamenti si integrano, si individua una strategia risolutiva pertinente; se divergono, il prevalere della narrazione può essere di ostacolo alla risoluzione.

Infine, è emersa spontaneamente la necessità di rendere trasparenti i propri processi mentali utilizzando espansioni del testo per esercitare un'azione metacognitiva di controllo sul proprio ragionamento.

In futuro, sarà possibile riproporre attività in continuità con questa, per indagare ulteriormente il rapporto tra processi di riscrittura e di risoluzione dei *problemi a righe.*

Riferimenti bibliografici

Branchetti, L., Viale, M., (2016), *Storie geometriche. Quando la scrittura creativa incontra la matematica a scuola*, Lugano, Edizioni Opera Nuova.

Cardinale, C., (2015), *L'arte di riassumere. Introduzione alla scrittura breve*, Bologna, Il Mulino Editore.

Day, R.R. e Bamford, J., (2002), *Top Ten Principles for Teaching Extensive Reading*, Reading in a Foreign Language, 14(2).

Demartini, S. e Sbaragli, S., (2019), *La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo*, Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 5, 9-43.

Duncker, K., (1945), *On problem solving*, Psychological monographs.

Polya, G., (1945), *How to solve it*. Princeton, University Press, [Traduzione italiana: 2016, UTET Università].

Serianni, L., (2013), *Leggere, scrivere, argomentare. Prove ragionate di scrittura*, Bari, Laterza Editore.

Schoenfeld, A. H., (1992), Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In A. G. Douglas (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York, Macmillan Publishing Company.

Tahan, M., (1938), *L'uomo che sapeva contare*, [Traduzione italiana: 2001, Salani Editore].

Tanner, R. e Green, C., (1988), *Tasks for teacher education. A reflective approach*, Harlow, Addison Wesley Longman.

Zan, R., (2007), *La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 30.

Zan, R., (2016), *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Roma, Carocci.

Torino, 21 marzo 2019