The Original and the Copy. Leibniz, Kant and Hausdorff on the Problem of Space

Published version:

DOI:10.1007/s10838-010-9139-4

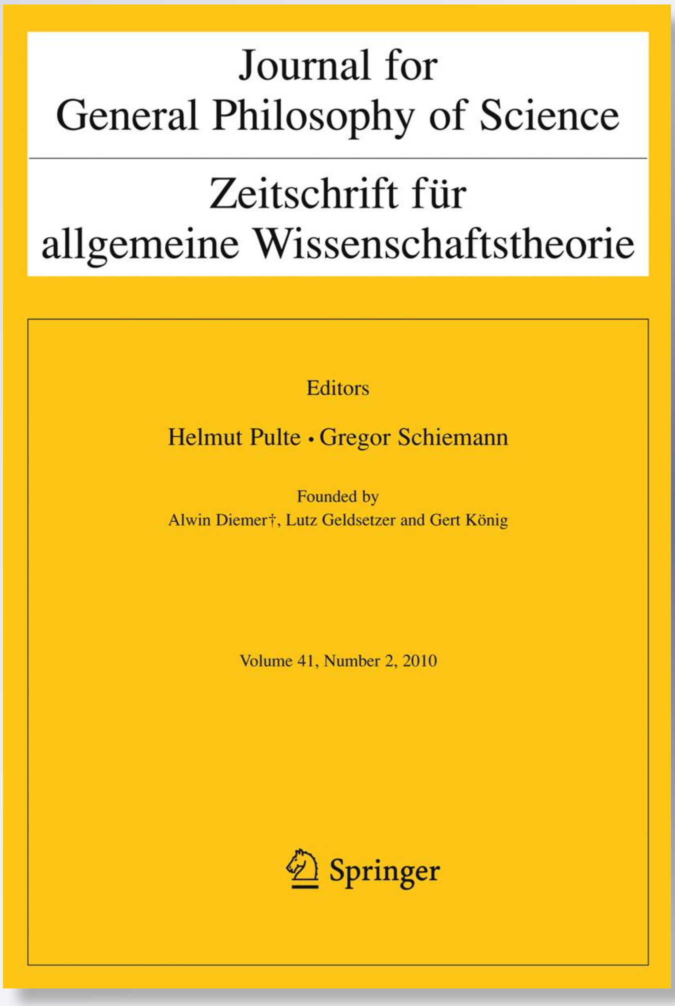
(Article begins on next page)

The Original and the Copy. Leibniz, Kant and Hausdorff on the Problem of Space

Journal for General Philosophy of Science

ISSN 0925-4560
Volume 41
Number 2

J Gen Philos Sci (2010)
41:283-313
DOI 10.1007/s10838-010-9139-4



Springer

J Gen Philos Sci (2010) 41:283–313
DOI 10.1007/s10838-010-9139-4

ARTICLE

Urbild und Abbild. Leibniz, Kant und Hausdorff über das Raumproblem
The Original and the Copy. Leibniz, Kant and Hausdorff on the Problem of Space

Marco Giovanelli

Published online: 2 December 2010

Abstract The article attempts to reconsider the relationship between Leibniz's and Kant's philosophy of geometry on the one hand and the nineteenth century debate on the foundation of geometry on the other. The author argues that the examples used by Leibniz and Kant to explain the peculiarity of the geometrical way of thinking are actually special cases of what the Jewish-German mathematician Felix Hausdorff called "transformation principle", the very same principle that thinkers such as Helmholtz or Poincaré applied in a more general form in their celebrated philosophical writings about geometry. The first two parts of the article try to show that Leibniz's and Kant's philosophies of geometry, despite their differences, appear to be preoccupied with the common problem of the impossibility to grasp conceptually the intuitive difference between two figures (such as a figure and its scaled, displaced or mirrored copy). In the third part, it is argued that from the perspective of Hausdorff's philosophical-geometrical reflections, this very same problem seems to find a more radical application in Helmholtz's or Poincaré's thought experiments on the impossibility of distinguishing distorted copies of our universe from the original one. I draw the conclusion that in Hausdorff's philosophical work, which has received scholarly attention only recently, one can find not only an original attempt to frame these classical arguments from a set-theoretical point of view, but also the possibility of considering the history of philosophy of geometry from an uncommon perspective, where especially the significance of Kant's infamous appeal to "intuition" can be judged by more appropriate standards.

Keywords Ähnlichkeit · Hausdorff · Inkongruente Gegenstücke · Kant · Kongruenz · Leibniz · Nicht-Euklidische Geometrie · Congruence · Hausdorff · Incongruent counterparts · Kant · Leibniz · Non-Euclidean geometry · Similarity

M. Giovanelli (✉)
Dipartimento di Filosofia, Università degli Studi di Torino, Via S. Ottavio, 20, 10124 Torino, Italy
e-mail: marco.giovanelli@unito.it

1 Einleitung

In der durch die Entdeckung der nicht-Euklidischen Geometrie angefachten philosophischen Diskussion des 19. Jh.s wurde Immanuel Kants Philosophie der Geometrie radikal in Frage gestellt. Entgegen der vermuteten unfehlbaren Evidenz der Euklidischen Axiome trat eine Vielzahl von „Geometrien" auf, eine Menge von gleichberechtigten Axiomensystemen, unter denen keines mehr Anspruch auf objektive Realität erheben konnte als die anderen. Kant hatte dagegen einerseits die Euklidische Geometrie als die apriorische Struktur unserer Sinnlichkeit betrachtet, d.h. als die Form, an die sich alle empirischen Gegebenheiten anpassen sollten, um sich überhaupt in objektive Erkenntnis verwandeln zu können; andererseits hatte er die Axiome als Grundtatsachen unserer Anschauung behandelt, d.h. als intuitiv erfassbare Wahrheiten. Die Entwicklung der Geometrie in 19. Jahrhundert hätte also eine solche paradoxe Verbindung zwischen Anschaulichkeit und Apriorität ein für allemal überholt. Die objektive Gültigkeit der geometrischen Axiome wurde nämlich entweder auf empirische Beobachtung (Hermann von Helmholtz) zurückgeführt oder auf reine Vereinbarung (Henri Poincaré) reduziert (vgl. z.B. DiSalle 2006).

Durch einen Vergleich zwischen Leibniz', Kants und Felix Hausdorffs geometrischen Reflexionen sollen hier die Grundelemente dieses *received view*, den vor allem der logische Empirismus verbreitet hat, nochmals in Frage gestellt werden.[1] Insbesondere wird versucht nachzuweisen, dass die Bedeutung des Anschauungsbegriffs in Kants Raumlehre anders interpretiert werden kann. Die „Anschauung" bedeutet nicht die apodiktische Evidenz der geometrischen Wahrheiten und auch nicht die bildliche Anschaulichkeit der geometrischen Konstruktionen.[2] Kants Berufung auf die Anschauung hat im Kontext seiner Raumlehre vielmehr mit der Existenz einer nicht auf die traditionellen Begriffe zurückführbaren Form von Verschiedenheit zwischen geometrischen Figuren zu tun. Um das zu beweisen, werde ich zeigen, inwiefern dieses Problem eine Vorgeschichte im Leibnizschen Denken und eine Nachgeschichte in der philosophischen Diskussion hat, was insbesondere in Hausdorffs Reflexionen über das Raumproblem deutlich wird.

Um diesen Ansatz nachzuweisen, werde ich folgendermaßen vorgehen: 1. Ich werde zeigen, dass Leibniz das Problem eines Unterschieds zwischen geometrischen Gebilden aufgeworfen hat, der erst auftritt, wenn sie zusammen in der Anschauung verglichen werden oder—in Leibniz' Ausdrucksweise—durch „Komperzeption". Die klassischen Leibnizschen Gedankenexperimente einer geometrischen Änderung, die alle Objekte der Welt betrifft, dienen gerade dazu, einen solchen Vergleich prinzipiell unmöglich zu machen. 2. Es wird versucht nachzuweisen, dass Kant in seiner Raumlehre, trotz der Polemik gegen die „Leibnitianer", in ähnlicher Weise aufzeigen wollte, dass die Geometrie eine Form von anschaulicher Verschiedenheit zwischen Figuren voraussetzt, die durch begriffliche Merkmale, welche die eine besitzt und die andere nicht, nicht ausgedrückt werden kann. 3. Es wird letztlich gezeigt, dass Hausdorff, indem er Leibniz' und Kants geometrische Beispiele

[1] Für einen viel anspruchsvolleren Versuch vgl. vor allem die Arbeiten von Michael Friedmann, insbesondere Friedman (1992). Vgl. auch Friedman (2002).

[2] So z.B. Rudolf Carnap: „Diese einfachen Tatsachen der Geometrie, so sagte Kant, sehen wir unmittelbar. Wir begreifen ihre Wahrheit intuitiv" (Carnap 1974, 128). Dagegen versteht Reichenbach unter „Anschauung" vor allem die Verwendung von gezeichneten Figuren in der Geometrie. In der englischen Übersetzung von (Reichenbach 1977)wird deswegen Anschauung mit „visualization" übersetzt (vgl. Reichenbach 1958, 83, Anm. 82). Gegen diese Auffassung, dass Anschauung „something you can visualize" (Hintikka 1992, 23) sei, hat sich vor allem Jakko Hintikka geäußert, der „Anschauung" vielmehr als Individualitätsbezug interpretiert: „There is, we may say, nothing 'intuitive' about intuitions so defined. Intuitivity means simply individuality" (Hintikka 1992, 23); s.u. Anm. 16.

als Spezialfälle seines „Übertragungsprinzips", „Transformationsprinzips" oder „Abbildungsprinzips" betrachtet, dieses Problem verallgemeinert und in einen neuen logischen Zusammenhang überträgt: Zwischen Urbild und Abbild besteht zwar keine Identität im Sinne der traditionellen Logik, aber doch eine eindeutige Abbildung im Sinne der modernen Mengenlehre.

Die Wahl eines Autors wie Hausdorff,[3] der sicher für seine Beiträge zur Mengenlehre (Hausdorff 2002, 2007) bekannter ist als für jene zur Philosophie der Geometrie, statt etwa Helmholtz oder Poincaré mag merkwürdig anmuten. Hausdorff, wie erst jüngst in der Literatur betont wurde (Epple 2006), hat sich jedoch mit dem Raumproblem intensiv beschäftigt, zuerst in dem unter dem Pseudonym Paul Mongré 1898 veröffentlichten Buch *Das Chaos in kosmischer Auslese* (CK) sowie in zahlreichen Nachlassfragmenten,[4] die in der Publikation seiner Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* (RP) aus dem Jahr 1903 und seiner im Wintersemester 1903/1904 gehaltenen Vorlesung *Zeit und Raum* (FH Kapsel 49: Fasz. 1067) gipfeln. Zudem nimmt Hausdorff deutlicher als die anderen Protagonisten der philosophischen Diskussion des 19. Jahrhunderts direkt Bezug auf die geometrischen Beispiele, die Leibniz und Kant verwendet haben, und zeigt ihre Bedeutung im Kontext moderner geometrischer Forschung auf.

2 Leibniz: Identität und Äquivalenz

2.1 Leibniz' Definition der Ähnlichkeit

Hermann Weyl war wohl der erste, der darauf aufmerksam gemacht hat, dass Leibniz dem geometrischen Begriff der Ähnlichkeit eine „philosophische Wendung" gegeben hat: „Ähnlich, sagt er, sind zwei Dinge, die ununterscheidbar sind, wenn jedes für sich betrachtet wird".[5] Nach Leibniz hat jede geometrische Figur eine Qualität (oder Form, z.B. die Form eines Vierecks) und eine Quantität (oder Größe: es gibt größere oder kleinere Vierecke). Figuren können also nach „Qualitatem et Quantitatem, sive Magnitudinem et Formam" [der Qualität und der Quantität, der Größe und der Form] (LA VI.4a, 514) charakterisiert werden. Zwei Figuren, die dieselbe Quantität haben, heißen „gleich"

[3] Für biographische Informationen über Hausdorff vgl. Epple (2007); Purkert (2008).

[4] Die vorliegende Arbeit nimmt auf folgende Texte des Nachlasses Bezug: Kapsel 24; Fasz. 71: Zeit und Raum, Vorlesung Universität Leipzig (WS 1903/04); Kapsel 48; Fasz. 994: Nichteuklidische Geometrie. Populärwissenschaftlicher Aufsatz [nach 1899, vermutl. 1902–1904]; Kapsel 49; Fasz. 1067: Raum und Zeit (Leipzig, vermutl. 1904); Kapsel 49; Fasz. 1077: Ähnlichkeit, Absolute und Relative Bewegung, Der Raum als Ganzes (Leipzig, vermutl. 1895–1910); Kapsel 49; Fasz. 1079: Transformationsprincip (Leipzig, vermutl. 1895–1910). Die Publikation dieses Materials ist in Hausdorff (2010) vorgesehen. Ich bedanke mich sehr herzlich bei Prof. Walter Purkert (Universität Bonn), der mir den Zugang zum Hausdorff-Nachlass ermöglichte und Entwürfe dieses Aufsatzes kommentierte. Großer Dank gebührt auch einem der anonymen Begutachter, dessen Bemerkungen sehr hilfreich für die Verbesserung der erste Version dieses Aufsatzes gewesen sind.

[5] Hermann Weyl betrachtet Leibniz' Ähnlichkeitsdefinition als die erste anschauliche Definition von Automorphismus, einer strukturerhaltenden Abbildung einer Menge auf sich selbst: „Ein Automorphismus führt eine Figur in eine andere über, die, um mit Leibniz zu reden, ‚von ihr unterscheidbar ist, wenn jede der beiden Figuren für sich betrachtet wird' (Weyl 1955; vgl. auch Mainzer 1988, 142ff.). Das ist meines Erachtens ein Hinweis auf die Möglichkeit, einen Vergleich der Leibniz'schen Definition mit der späteren Entwicklung der Mathematik durchzuführen.

(z.B. ein Dreieck und ein Viereck mit demselben Flächeninhalt); wenn sie aber dieselbe Qualität haben, sind sie „ähnlich“ (z.B. zwei Vierecke von verschiedener Größe).[6]

> Die Figur enthält allgemein außer der Quantität noch eine bestimmte Qualität oder Form, und wie dasjenige gleich ist, dem dieselbe Größe zukommt, so ist ähnlich, was dieselbe Form besitzt. (Leibniz 1996, I, 50)[7]

Leibniz erklärt die Unterscheidung zwischen Qualität und Quantität folgendermaßen: Zur Erfassung der Quantität müssen die Gegenstände, die man vergleicht, unmittelbar nebeneinander gegeben sein oder doch durch irgendeine Art der Vermittlung, d.h. durch Beziehung auf ein drittes Objekt als Maßstab, tatsächlich einander gegenübergestellt werden können. Die Qualität hingegen stellt dem Betrachter etwas dar, was sich in einem Gegenstand, auch wenn man ihn allein betrachtet, für sich erkennen lässt, ohne dass es nötig ist, die Vergleichsobjekte unmittelbar oder mittelbar aneinander heranzubringen.

Das gleichseitige Dreieck ist zum Beispiel von einem völlig ungleichseitigen zu unterscheiden, auch wenn beide nicht zusammen betrachtet werden. Aber wenn man das größere von zwei gleichseitigen Dreiecken bestimmen will, ist der Vergleich mit dem anderen nötig. Man kann nämlich keine Eigenschaft in einem der beiden Dreiecke finden, die nicht auch im anderen gefunden werden kann. Erst wenn sie „unmittelbar in der Anschauung verglichen werden“ (Schneider 1988, 175), wird der Größenunterschied deutlich. Dasselbe passiert auch, wenn sie nicht zusammen betrachtet werden, sondern wenn man etwas als Mittel oder Maß verwendet, das zuerst an der ersten Figur oder an etwas in ihr angelegt wird (vgl. GM V, 155):

> Ähnlich sind diejenigen, in denen, wenn sie einzeln betrachtet werden, nichts gefunden werden kann, das sie voneinander unterscheidet, wie zwei vollkommene Kugeln oder Kreise (oder zwei Würfel oder zwei vollkommene Quadrate) A und B. Wenn man sich vorstellt, mit dem bloßen Auge, ohne andere Körperteile, bald in der Kugel A, bald in der Kugel B zu sein, kann man sie nicht unterscheiden; man kann es aber, wenn man sie zusammen beobachtet oder wenn man andere Körperteile in die Kugel bringt oder ein anderes Maß, das an dem einen sowie an dem anderen angelegt wird. (Dagegen ist in unähnlichen Figuren eine gewisse Proportion genug, die in einem gefunden werden kann und im anderen nicht, um sie einzeln zu unterscheiden).[8]

Daher sagt Leibniz üblicherweise, dass „ähnlich“ diejenigen Figuren sind, die, ohne zusammen betrachtet zu werden (*compercipere*), nicht unterschieden werden können. Dagegen muss man zwei unähnliche Figuren nicht in einem Vergleichsakt gleichzeitig

[6] Es wird hier selbstverständlich nicht der Anspruch erhoben, das geometrische Raumproblem bei Leibniz ausführlich zu behandeln. Die jüngste umfassende Gesamtdarstellung findet man in De Risi (2007). Grundlegend für die folgende Darstellung bleibt aber immer noch Schneider (1988). Zu erwähnen sind auch Münzenmayer (1979); Wallwitz (1991); Mugnai (1992, 88ff.). Immer noch nützlich sind auch die Klassiker: Couturat (1961, Kap. IX), Cassirer (1998, Kap. III).

[7] „Figura in universum praeter quantitatem continet qualitatem seu forma; et quemadmodum aequalia sunt quorum eadem est magnitudo, ita similia sunt quorum eadem est forma.“ (GM V, 179; De analysi situs).

[8] „Similia sunt, in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest quo discernantur, ut duo sphaerae vel circuli (vel duo cubi aut duo quadrata perfecta) A et B […] Ut si solus oculus sine aliis membris fingantur, nunc esse intra sphaeram A nunc intra sphaeram B, non poterit eas discernere, sed poterit si ambas simul spectet, vel si secum membra alia corporis aliamve mensuram introrsum afferat, quam nunc uni nunc alteri applicet. Itaque ad similia discernenda opus est vel compraesentia eorum inter se, vel tertii cum singulis successive. [At in dissimilibus aliqua partium proportio notata in uno, quae non notatur in altero, sufficit ad discernendum sigillatim]”. (GM VII, 30; Initia mathematica, De quantitate).

betrachten, wenn man den Unterschied feststellen will. Hieraus geht hervor, dass zwei ähnliche Dreiecke gleichwinklig sind. Da in beiden Dreiecken die Winkelsumme dieselbe, nämlich gleich zwei rechten Winkel ist, so muss notwendig auch das Verhältnis der homologen Winkel zu der Summe in beiden Figuren dasselbe sein. Erst damit ist der scholastische Formbegriff überwunden. Die „Form" drückt nicht mehr das „Wesen" eines Dinges aus, sondern nur die Tatsache, dass die Winkel einer Figur unveränderlich bleiben, während sich ihre Größe eventuell ändert.

Leibniz' Berufung auf die „Komperzeption", d.h. auf einen anschaulichen Vergleich[9] beider Figuren, bedeutet also nicht die Einführung eines rein empirischen oder gar psychologischen Fremdelements in die Geometrie. Vielmehr meint Leibniz damit die prinzipielle Unmöglichkeit, ohne einen direkten Vergleich einen Unterschied zwischen den ähnlichen Figuren A und B feststellen zu können. Wenn man eine einzelne Figur betrachtet, ist es nicht möglich zu sagen, ob es sich um A oder B handelt.

Wenn man sich beispielsweise vorstellt, dass Gott alle Erscheinungen in uns und um uns herum in einem geschlossenen Raum verkleinert, die Proportionen aber aufrechterhält, so würde alles genauso aussehen wie zuvor und wir könnten den vorherigen Status vom späteren nicht unterscheiden, wenn wir nicht aus der Sphäre der verhältnismäßig verkleinerten Dinge, d.h. aus jenem Raum wieder herauskommen; die Verkleinerung wäre nämlich erst im Vergleich mit den nicht verkleinerten Gegenständen feststellbar (GM VII, 277). Wenn also Gott alles verhältnismäßig verkleinern würde, wäre es prinzipiell unmöglich, eine Unterscheidung vorzunehmen bzw. es hätte gar keinen Sinn, von einer solchen Unterscheidung zu reden:

> Wenn dagegen auf irgendeine Weise nun Gott alles ändern würde, indem er die Proportionen aufrechterhält, verlieren wir jedes Maß und können nicht wissen, um wie viel sich die Sachen verändert haben, denn es ist unmöglich, eine sichere Definition des Maßes zu bestimmen oder sie im Gedächtnis zu behalten, sondern es ist notwendig, sie wirklich aufrechtzuerhalten. Aus diesem allem glaube ich den Unterschied zwischen Größe und Art, zwischen Quantität und Qualität zu erhellen.[10]

Um festzustellen, ob eine Figur die doppelte Größe einer anderen hat, müssen wir einen Maßstab an der einen anlegen und später an der anderen, unter der Voraussetzung, dass er seine Größe nicht ändert. Wenn aber auch die Länge des Maßstabes sich in derselben Proportion ändern würde, könnte man den Unterschied nicht bemerken. Man beobachtet also nicht die Veränderung der Länge an sich, sondern nur die Veränderung des Verhältnisses zu einer anderen Länge, die als Maßstab gewählt wurde. Wenn sich also alles in denselben Proportionen verändern würde, hätte man keine Möglichkeit, diese Veränderung festzustellen. Beide Zustände wären derselbe Zustand und der Unterschied könnte erst bemerkt werden, wenn wir den Bezug auf etwas hätten, das sich nicht vergrößert bzw. verkleinert hat (vgl. GM V, 154; VII 276).

So ist es unmöglich zu erkennen, was der „Fuß" oder die „Elle" ist (vgl. GP V, 134), wenn man nicht ein wirklich gegebenes Objekt als Maßstab zugrunde legt und es sodann nacheinander mit verschiedenen Gegenständen zusammenbringt. Was ein Fuß ist, kann

[9] „[C]'est-à-dire par leur comparaison intuitive" (Couturat 1961, 412).

[10] „At si quemadmodum alibi jam dixi Deus omnia mutaret proportione eadem servata perisset nobis omnis mensura, nec possemus scire quantum res mutatae sint, quoniam mensura nulla certa definitione comprehendi adeoque nec memoria retineri potest, sed opus est reali ejus conservatione. Ex quibus omnibus discrimen inter magnitudinem et speciem inter quantitatem et qualitatem elucere arbitror." (GM VII, 276; Specimen Geometriae Luciferae).

daher durch keine Definition vollständig erklärt werden, denn man kann nicht das Gemeinsame aller ein Fuß langen Strecken finden; sagt man, der Fuß besteht aus zwölf Zoll, so stellt sich dieselbe Frage für die Maßeinheit „Zoll" usw. (vgl. GM VII 18–29). Man kann daher nur sagen, dass ein Fuß das ist, was „dieselbe Länge" einer konkret ausgewiesenen Strecke hat, die man willkürlich als „Standardfuß" gewählt hat. Hier besteht also ein Unterschied zwischen dem „Geben" eines individuellen Objekts durch eine anschauliche Ausweisung und der begrifflichen Beschreibung, die seine Merkmale definiert: „In der Tat, obwohl es einen einfüßigen Kreis, einen halbfüßigen, usw. geben kann, kann man keine Definition von Fuß geben, sondern braucht einen festen und dauerhaften Standard."[11] Dagegen besitzen in der Euklidischen Geometrie Winkel eine absolute Maßeinheit. Der gestreckte Winkel von 180° wird nicht empirisch als das Mehrfache einer willkürlich festgelegten Einheit, etwa des Winkels von 1° gemessen. Vielmehr besitzt man im gestreckten Winkel eine absolute Maßeinheit, die durch π ausgedrückt wird, so dass andere Winkel einfach als Brüche von diesem betrachten werden können (ein rechter Winkel ist also durch $\frac{\pi}{2}$, der 60°-Winkel durch $\frac{\pi}{3}$ ausgedrückt usw).

2.2 Leibniz' Kongruenzbegriff

Wie eben erläutert wurde, kann man also ohne „Komperzeption" zwei ähnliche geometrische Figuren nicht unterscheiden. Wenn wir aber zwei Figuren betrachten, die nicht nur ähnlich, sondern auch gleich sind, d.h. kongruent,[12] dann genügt es nicht, die beiden Figuren zusammen zu betrachten, um sie zu unterscheiden, denn in diesem Falle wären sie koinzident:

> Wenn jedoch zwei Dinge nicht nur ähnlich, sondern auch gleich sind, d.h. kongruent sind, […] können sie, auch wenn man sie zusammen anschaut, nicht unterschieden werden außer durch die Lage, d.h. insoweit man etwas anderes außerhalb von ihnen annimmt und man beobachtet, dass sie eine unterschiedliche Lage in Bezug auf dieses Dritte einnehmen. Denn wenn sie in demselben Ort sind, bleibt mir nichts übrig, das sie unterscheidet.[13]

Zwei ähnliche Figuren mit derselben Qualität, die sich am selben Ort befinden, sind nämlich Teil voneinander und können damit unterschieden werden. Wenn sie aber auch die gleiche Quantität hätten, müssten sie an verschiedenen Stellen sein, um verschieden zu erscheinen, sonst wären sie vollkommen koinzident. Man muss also die Figuren auf ein drittes Objekt legen, in Bezug zu dem sie verschiedene Lagen einnehmen:

> Kongruent sind diejenigen, die nur durch die Komperzeption mit einem Dritten unterschieden werden können. […] Kongruent sind diejenigen, deren Quantität und Qualität dieselbe ist und die nur durch die Lage unterschieden werden können.[14]

[11] „Enim alius possit esse circulus pedalis, alius semipedalis etc., tamen pedis nulla dari potest definitio, sed opus est typo aliquo fixo et permanente." (GM VII, 276).

[12] Zu Leibniz' Kongruenzbegriff vgl. Couturat (1961, 412), Cassirer (1998, 140ff.) Schneider (1988, 173ff.), De Risi (2007, 137ff).

[13] „Si vero duae res non tantum sunt similes sed et aequales, id est si sint congruae etiam simul perceptas non discernere possum, nisi loco id est, nisi adhuc aliud assumant extra ipsas et observem ipsas diversum habere situm ad tertium assumtum. Denique si ambo simul in eodem sint loco, jam nihil habere me amplius quo discriminentur." (GM V, 155; Charachteristica geometrica).

[14] „Congrua sunt quae sola comperceptione cum tertio discerni possunt […] Congrua itaque sunt, quorum qualitas et quantitas eadem est, et quae tamen positione discernuntur.' (LA VI.4a 565)

So können zwei Quadrate C und D in derselben Ebene viele Unterschiede aufweisen, wenn man ihr Verhältnis zueinander betrachtet: Zum Beispiel können die Seiten des einen unter einem bestimmten Winkel gegen die des anderen geneigt sein. Wenn man aber nur ein Quadrat isoliert betrachtet, kann man nicht mehr sagen, ob es sich um C oder um D handelt, da alles, was für C allein gilt, auch für D gilt und umgekehrt. Die Verschiedenheit besteht also nur in der gegenseitigen Beziehung zu einem bestimmten Objekt. Leibniz sagt daher, dass kongruente Figuren nur noch *solo numero*, nur weil sie zwei sind, bzw. *referentia ad externa* unterschieden werden können, d.h. weil „eines dem anderen westlicher oder nördlicher oder südlicher oder höher oder niedriger oder näher an irgendeinem anderen außerhalb ihnen gesetzten Körper“[15] sei.

Auch in diesem Fall hat die „Komperzeption“ (vgl. Schneider 1988, 175ff.) mit einem dritten Objekt nicht nur eine psychologische Bedeutung; es geht um die prinzipielle Unmöglichkeit, zwei kongruente Figuren per se zu unterscheiden, wenn man sie isoliert voneinander betrachtet. Leibniz benutzt deswegen erneut dasselbe Gedankenexperiment: Wenn man das ganze Universum an einen anderen Ort verschieben würde, könnte man nicht feststellen, ob diese Änderung stattgefunden hat, da es prinzipiell kein Objekt außerhalb des Universums gibt, in Bezug auf welches die Bewegung festgestellt werden könnte. So schreibt Leibniz in einer sehr bekannten Passage aus dem Briefwechsel mit Samuel Clarke:

> Nimmt man daher an, das Universum hätte zuerst eine andere Lage nach Raum und Zeit gehabt, als sie ihm jetzt tatsächlich zukommt, während dennoch alle Beziehungen zwischen seinen Teilen die gleichen wie jetzt gewesen wären, so ist dies eine unmögliche Erdichtung (Leibniz 1996, I, 103).[16]

Dasselbe gilt, würde man das Universum spiegeln. Wenn man alles von rechts nach links verkehren und ansonsten alles unverändert lassen würde, könnte man keinen Unterschied zwischen beiden Universen feststellen. Denn auch hier gilt: Ohne Zuhilfenahme eines dritten Körpers, der an der Änderung nicht teilnimmt, lässt sich nicht zwischen den Eigenschaften eines Körpers und jenen seines Spiegelbildes unterscheiden:

> [Es ist] unmöglich, einen Grund dafür anzugeben, weshalb Gott die Körper, die Beibehaltung ihrer Abstände und gegenseitigen Lagebeziehungen vorausgesetzt, gerade an diese bestimmte Raumstelle und nicht an eine andere gesetzt hat; warum nicht alles durch einen Umtausch von Westen nach Osten umgekehrt angeordnet worden ist […] so sind eben diese beiden Zustände, der ursprüngliche und seine Umkehrung, in nichts voneinander verschieden (Leibniz 1996, I, 94).[17]

[15] „unum alio orientalius aut occidentalius vel septentrionalius aut meridionalius vel superius aut inferius esse vel alteri alicui corpori extra ipsa posito esse propius.“ (GM VII, 275f.)

[16] „Ainsi l'hypothese, que l'univers auroit eu d'abord une autre position du temps et du lieu que celle qui est arrivée effectivement, et que pourtant toutes les parties de l'univers auroient eu la même position entre elles, que celle qu'elles ont receue en effect, est une fiction impossible.“ (GP VII, 372; Streitschriften zwischen Leibniz u. Clarke. Leibniz' viertes Schreiben).

[17] „[I]l est impossible qu'il y ait une raison, pourquoy Dieu, gardant les mêmes situations des corps entre eux, ait placé les corps dans l'espace ainsi et non pas autrement, et pourquoy tout n'a pas eté mis à rebours (par exemple) par un échange de l'orient et de l'occident [….] ces deux etats, l'un tel qu'il est, l'autre supposé à rebours, ne differeroient point entre eux. (GP VII, 364; Streitschriften zwischen Leibniz u. Clarke. Leibniz' drittes Schreiben). Nicht alle Interpreten sind sich darüber einig, dass es in Leibniz' Beispiel um eine Spiegelung geht. Es könnte sich nämlich auch um eine Drehung um 180° handeln (vgl. z.B. Mates 1986, 233). Die These der Spiegelung wird dagegen von Weyl (1955, 28f.) und Max Jammer (1954, 223–226) vertreten. John Earman hält beide Interpretationen für korrekt (vgl. Earman 1989, 173).

Hier tritt nochmals der „Gegensatz zwischen begrifflicher Definition und anschaulicher Aufweisung“ (Weyl 1923, 26) zutage. Genau wie bei der Definition von „Fuß“ oder „Elle“ ist es nämlich unmöglich, durch irgendeine geometrische Eigenschaft „rechts“ und „links“ begrifflich zu unterscheiden, ohne auf ein direkt ausgewiesenes asymmetrisches Objekt (z.B. den menschlichen Körper) Bezug zu nehmen, das z.B. als rechtsorientiert dekretiert wurde. Leibniz scheint dies beispielsweise in der folgenden Textpassage zu behaupten: „Aber es ist unmöglich rechts von links zu unterscheiden […], wenn nicht für die Tatsache selbst oder die Wahrnehmung, indem die Menschen erfahren, dass an einer Seite die Bewegung bequemer als auf die andere ist.“[18]

2.3 Identität und Äquivalenz: Leibniz' Begriff von „Ausdruck“

Wenn man behauptet, dass das Universum und sein Spiegelbild oder sein vergrößertes Modell usw. „dasselbe“ Universum sind, so bedeutet „dasselbe“ nicht eine absolute Identität, sondern eine bloße Gleichwertigkeit. In der Geometrie sucht man nämlich nicht „nach einer Identität, einem Ding, das wahrhaft dasselbe wäre“[19], sondern nach einer bloßen *aequivalentia* oder *aequipollentia*.[20]

Hier wird die Gegenüberstellung zwischen dem, was man als „dasselbe“ oder „nicht-dasselbe“ ansieht, von einem neuen Standpunkt betrachtet. Es geht nämlich um eine beständige und geregelte Beziehung zwischen dem, was sich von dem einen und von dem anderen sagen lässt, oder wie Leibniz sagt, dass das eine das andere *ausdrückt* (*exprimit, exprime*):[21] „Eine Sache drückt eine andere aus, wenn eine konstante und geregelte Beziehung zwischen dem, was sich von der einen, und dem, was sich von der anderen aussagen läßt, besteht. So drückt eine perspektivische Projektion das ihr zugehörige geometrische Gebilde aus. (Leibniz 1996, I,135) “[22] Ebenso drückt eine ebene perspektivische Zeichnung einen dreidimensionalen Körper, eine geographische Karte eine Gegend aus usw. (vgl. GP VII, 263f. Quid sit idea).[23] Das bedeutet nicht, dass zwischen dem einen und dem anderen irgendeine wahrhafte Identität bestehen würde—nichts erscheint so verschieden und unähnlich—, sondern nur, dass die Verhältnisse der einen Figur den Verhältnissen der anderen entsprechen und ihnen eindeutig zugeordnet sind. Zwischen einem Kreis und seiner perspektivischen Darstellung in einer Ellipse (vgl. Leibniz 1903, Phil. I, 15; GP I, 383; GP V 118; GP VII, 264) gibt es “eine exakte und natürliche Beziehung zwischen dem, was projiziert wird, und der Projektion, die man davon macht, insofern

[18] „Sed dextrum a sinistro discerni non potest [….] nisi facto ipso, seu perceptione, dum ab uno latere motum commodiorem quam ab alio homines experiuntur“ (Leibniz 1903, Phil VII, D, II, 2, f. 30).

[19] „une identité, une chose qui soit veritablement la même“ (GP VII, 401; Streitschriften zwischen Leibniz u. Clarke. Leibniz' fünftes Schreiben).

[20] Vgl. dazu die klassische Interpretation von Gottlob Frege: Frege (1977, 78ff.), vgl. auch Angelelli (1967, 97f.) und Ishiguro (1972, 17–34). Vgl. im Allgemeinen zu diesem Thema auch Weyl (1990, 25). „Mit dieser Einteilung der mathematischen Gegenstände in Dingklassen hat Leibniz nichts anders geleistet als was man—modern gesprochen—eine Äquivalenzklasse nennt“ (Schneider 1988, 179).

[21] Vgl. Kulstad (1957) und Maunu (2008).

[22] „Une chose exprime une autre […] lorsqu'il y a un rapport constant et reglé entre ce qui se peut dire de l'une et de l'autre. C'est ainsi qu'une projection de perspective exprime son geometral.“ (GP II, 112; Leibniz an Arnauld, September 1687; vgl. auch Leibniz (1903, Phil. I, 15) und GP VII, 263, Quid sit Idea).

[23] Für eine ausführliche Auflistung von Leibniz' Beispielen vgl. Kulstad (1957, 56).

jeder Punkt der einen Seite in einem bestimmten Verhältnis jedem Punkt der anderen Seite entspricht" (Leibniz 1996, IV, 147).[24]

Auf dieselbe Weise bleiben die Sätze, die die Euklidische Geometrie von einem bestimmten Gebilde entwickelt, unverändert, wenn sich seine absolute Lage im Raum verändert, die absoluten Größen im selben Verhältnis wachsen oder abnehmen, oder wenn sich die Anordnung seiner Teile umkehrt. Eine Figur kann also „statt der anderen" benutzt oder sie kann von der anderen ersetzt werden, ohne die Gültigkeit der Sätze der Geometrie in Gefahr zu bringen: „Ähnlich sind die, die bei Wahrung der Qualität überall ersetzt werden können oder die man nicht unterscheiden kann, wenn man sie nicht zusammen beobachtet."[25] In der Euklidischen Geometrie bilden z.B. Kreise, die sich nur durch die Länge ihrer Durchmesser unterscheiden, nicht verschiedene, sondern „dieselbe" Figur, denn die absolute Länge der Linien betrifft keine Sätze der Euklidischen Geometrie: „Alle Theoreme, alle Konstruktionen, alle Eigenschaften, Proportionen, die in Bezug auf einen Kreis bemerkt werden können, können in dem anderen auch bemerkt werden."[26] Die absolute Größe gehört also zu den sinnlichen Merkmalen, da sie nur durch die „Kompräsenz" (vgl. GM I, 180; Brief an Gallois) des willkürlich fixierten materiellen Maßstabs bestimmbar ist.

Dieser Indifferenz der Euklidischen Gebilde gegen alle absoluten Größenunterschiede entspricht jene der absoluten Lage. Die Sätze, die die Geometrie von einem bestimmten Gebilde entwickelt, bleiben unverändert, wenn dieses Gebilde seine Lage im Raum ändert. So sind auch zwei Dreiecke, die eine bloße Lageverschiedenheit aufweisen, „dasselbe" Dreieck. Sie können nämlich bei Wahrung der Quantität und der Qualität ersetzt werden, d.h. sie können genau denselben Raum einnehmen oder zur Deckung gebracht werden, ohne irgendeine andere Änderung als die Stellenversetzung (vgl. GM II, 20–25) zu vollziehen: „Kongruent sind die, die an demselben Ort ersetzt werden können."[27] Die Idee der „Ersetzbarkeit" oder Deckungsmöglichkeit, die Idee, dass eine Figur an die Stelle einer anderen gebracht werden kann, bedeutet also, dass es die Geometrie mit Eigenschaften der Figuren zu tun hat, die unabhängig sind von ihrer Position im Raum.

In den Beziehungen von Kongruenz und Ähnlichkeit zeigt sich die „Einheit des Raumes", der selbst innerlich überall gleichförmig ist, in dem Sinne, dass alle Teile durch einander ersetzbar sind und deshalb sich „in einem und demselben Raume"[28] (Leibniz 1996, I, 58f.) befinden.[29] Leibniz betont nämlich, dass die Teile des Raumes nicht nur zueinander kongruent sind (wie die Teile einer Kugeloberfläche), sondern auch zueinander

[24] „il y a un certain rapport exact et naturel entre ce qui est projetté et la projection, qui s'en fait, chaque point de l'un repondant suivant une certaine relation à chaque point de l'autre" (GP V, 118; Leibniz 1996, IV, 147)

[25] „Similia, quae sibi substitui possunt salva qualitate seu ita discerni nequeant, nisi simul spectentur" (GM VII, 196).

[26] „Omnia theoremata, omnia constructiones, omnes proprietates, proportiones, respectus, qui in uno circulo notari possunt, poterunt etiam in alio notari" (GM VII, 276; Specimen geometriae luciferae).

[27] „Congrua sunt quae sibi substitui possunt in eodem loco" (GM V, 172).

[28] „dans un même espace" (GM II, 23; Leibniz an Huygens, 8. September 1879).

[29] Vgl. z.B. diese Stelle: „Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un même espace. (GM II, 23; Leibniz an Huygens 8. September 1879) [Denn zwischen allen Punkten der Welt besteht Kongruenz, d.h. der eine kann immer an die Stelle des anderen gesetzt werden. Nun befinden sich alle Punkte der Welt in einem und demselben Raume] (HGP I, 58f.). „Itaque omnia puncta sunt in eodem spatio, et ad se invicem referri possunt." (GM V, 144) [Daher sind alle Punkte in demselben Raum und können auf einander bezogen werden].

ähnlich (wie die Teile einer Ebene). Der Raum ist also nicht nur gleichförmig, d.h. „sibi congruus", sondern auch „sibi similis" (LH XXXIV, I, 14, Bl. 23 retro).[30]

3 Kant: Begriff und Anschauung

Was bisher gezeigt wurde, lässt sich so zusammenfassen: Es gibt in der abstrakten Geometrie die Möglichkeit, zwei Gegenstände als unterschiedlich zu erkennen (z.B. weil sie verschiedene Orte einnehmen), obgleich die Gegenstände in ihren Eigenschaften (Qualität und Quantität) vollkommen übereinstimmen. Urbild und Abbild sind nicht zu unterscheiden, wenn sie separat betrachtet werden; sie erscheinen aber als verschieden, wenn man sie unmittelbar in der Anschauung vergleicht, d.h. wenn man ihre wechselseitigen Verhältnisse im Raum in Betracht zieht, obwohl es kein Merkmal gibt, welches dem einen zukäme und dem anderen nicht.

Obwohl hier die komplexen historischen Beziehungen zwischen Kant, Leibniz und der Leibniz'schen Tradition nicht genau untersucht werden können, soll dennoch versucht werden, zumindest auf systematischer Ebene nachzuweisen, dass Kants Unterscheidung zwischen „Begriff" und „Anschauung" gerade auf dieses Problem zurückgeführt werden kann, ein Problem, das Leibniz selbst aufgestellt hat.[31] In der Sprache Kants kann man nämlich sagen, dass es eine Form von Verschiedenheit gibt, die überhaupt nicht auf „Begriffe", d.h. „allgemeine Vorstellungen" (*repraesentationes per notas communes*) zurückgeführt werden kann, sondern die nur in der „Anschauung", d.h. in einer „einzelnen Vorstellung" (*repraesentatio singularis*) gegeben werden kann (vgl. AA IX, 91).[32] Begriffe sind verschieden, insofern in dem einen etwas ist, das in dem anderen nicht ist.

---

[30] Der Text ist von De Risi (2007, 582–585) herausgegeben (hier: 583). Vgl. auch diese Stelle: „Idem est in piano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis et in recta quae est linea intus sibi similis" (GM VII, 20; Initia rerum mathematicarum metaphysica) [Ebenso verhält es sich mit der Ebene, die eine innerlich gleichförmige, in all ihren Teilen ähnliche Fläche und mit der Geraden, die eine innerlich gleichförmige Linie ist] (PW, 40). Die Existenz von Ähnlichkeitstransformationen, die keine Isometrien sind, ist, wie man weiß, eine Besonderheit der Euklidischen Geometrie, in der der Raum als „flach" betrachtet wird.

[31] Die These einer Kontinuität zwischen Leibniz' und Kants Raumlehre zu behaupten, obwohl Kants Diktum dem zu widersprechen scheint, hat eine wichtige Interpretationsgeschichte hinter sich, in der der Marburger Neukantianismus die vornehmste Rolle spielt. Nach Hermann Cohen konnte sogar „[d]ie Grösse von Leibniz […] erst durch Kant selbst zur Aufhellung gelangen" (Cohen 1987, 5). Insbesondere in Bezug auf das Raumproblem versuchten die Neukantianer die Polemik Kants gegen Leibniz auf die Leibnizianer, Wolff und Baumgarten, zu verschieben: Kant habe Leibniz „zu sehr im Lichte Wolffs und der wolfschen Leibnizianer" (Cohen 1987, 5) betrachtet. Es waren Wolff und Baumgarten, die die „Auffassung von Raum und Zeit als ‚verworrene [….]' Ansichten der Dinge" (Cassirer 1998, 239) vertraten. Wenn man diese Interpretation von Leibniz' Raumlehre bestreitet, kann man sogar behaupten, dass „nicht erst Kant, sondern bereits Leibniz" die These vertrat, „daß der Raum eine reine „Form" sei. […] Damit war der Standpunkt der modernen Mathematik im Grunde von der Philosophie vorweggenommen." (Cassirer 2000, 40) Eine ähnliche Kontinuität zwischen Leibniz und Kant behauptete später—wenn auch von einem vom Problem einer Ontologie der Relationen geprägten Standpunkt aus—Gottfried Martin: „So war der Raum für Kant wie für Leibniz als ein Gefüge der Relationen und Mathematik Relationstheorie. Die Natur ist bestimmt durchaus nur als Verhältnissen bestehend, die Natur ist ein reines Relationsproblem, und mathematisch-physikalische Naturwissenschaft Relationstheorie" (Martin 1951, 126).

[32] Die Unterscheidung zwischen „Begriff" und „Anschauung" und die Verbindung zwischen „Anschaulichkeit" und „Individualität" wurde besonders in der anglo-amerikanischen Debatte diskutiert. Vgl. dazu vor allem Hintikka (1969), Parsons (1983, 112), Howell (1973) und Smit (2000, 237f) . In Bezug auf die Geometrie vgl. Beth (1956–1957), Hintikka (1992), Friedman (1992). Das Thema einer Form von anschaulicher Verschiedenheit, die nicht begrifflich erfasst werden kann, wird auch in Simon (2003) behandelt, obwohl nicht in Bezug auf Kants Philosophie der Geometrie (vgl. aber a.a.O., 297.).

Zwei geometrische Figuren können dagegen verschieden sein, wenn man sie zusammen in der Anschauung betrachtet, obwohl nichts in der einen zu finden ist, das in der anderen nicht ist.

Diese Interpretationshypothese kann bestätigt werden, wenn man jene Beispiele in Betracht zieht, von denen Kant ausgeht, um zu zeigen, dass ‚Raum' kein „allgemeiner Begriff" sein könne, sondern notwendigerweise als „reine Anschauung" oder „Form der Anschauung" angesehen werden müsse. Solche Beispiele scheinen dadurch miteinander verbunden zu sein, dass sie versuchen, die „Kongruenz" geometrischer Figuren (die nur durch ihre wechselseitige Position oder Orientierung im Raum verschieden sind) von der logischen „Identität" von Begriffen (die durch innere Eigenschaften voneinander abgegrenzt werden können) zu unterscheiden. Kant übernimmt von der Leibniz'schen Tradition die Idee, dass „die innern Bestimmungen eines Dinges […] *Qualitas* und *Quantitas*" (AA XXVIII, 569s.) seien.[33] Wenn zwei Begriffe dieselben inneren Bestimmungen haben, sind sie ein und derselbe Begriff (*interne totaliter eadem non sunt diversa*). Im Gegensatz dazu kann man zwei geometrische Figuren denken, die zwar in allen inneren Merkmalen übereinstimmen und die demzufolge gleich und ähnlich sind, die aber als verschieden betrachtet werden müssen, weil sie voneinander durch äußere Bestimmungen im Raum unterschieden werden können.

3.1 Die inkongruenten Gegenstücke

Das berühmteste, schon in der vorkritischen Zeit behandelte Beispiel, zu dem Kant greift, um die „anschauliche" Natur des Raumes nachzuweisen, ist jenes der sogenannten „inkongruenten Gegenstücke".[34] Das Beispiel wurde, wie man weiß, zuerst in der vorkritischen Schrift *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (1768) formuliert, um die Realität des absoluten Raumes nachzuweisen. Schon in der *Dissertatio de mundis sensibilis atque inteligibilis forma et principiis* (1770; vgl. AA II, 403), später in den *Prolegomena* (1783; vgl. AA IV, 286) und in *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1786, AA IV, 485) griff er es nochmals auf, um zu zeigen, dass Raum und Zeit „bloß[e] Formen unsrer sinnlichen Anschauung" (AA IV, 285) sind. Wir werden nur auf diese reifere Version des Arguments Bezug nehmen.

Mit diesem Beispiel versucht Kant zu zeigen, dass das, was logisch die Kriterien für die Identität von Begriffen erfüllt, als geometrisch verschieden betrachtet werden kann. Es geht, wie man weiß, um eine körperliche Figur und ihr Spiegelbild, die gleich und ähnlich und trotzdem nicht kongruent sind, weil sie in einem dreidimensionalen Raum nicht miteinander zur Deckung gebracht werden können: „aequalia et similia congruunt non nisi in plano" (AA XVIII, 15). Eine ein—oder zweidimensionale Figur kann mit ihrem Spiegelbild durch eine Drehung in der zweiten oder in der dritten Dimension immer zur

[33] Kants Quelle scheint die deutsche Schulmetaphysik des 17. Jahrhunderts zu sein. So Baumgarten: „Qua qualitatem eadem sunt SIMILIA, qua quantitatem, AEQUALIA, qua utramque, CONGRUENTIA" (Baumgarten 1963, §70). Ähnlich schreibt Christian Wolff: „Consistit adeo congruentia in identitate & quantitatum & qualitatum" (Wolff 1962a, §465); „Quoniam in rebus non distinguimus nisi quantitates und qualitates, in congruentibus autem & quantitates, & qualitates eadem sunt" (Wolff 1962a, §467).

[34] Vgl. dazu vor allem Van Cleve und Frederick (1991). Nützlich sind immer noch der Anhang *Das Paradoxon symmetrischer Gegenstände* in Vaihinger (1970, Bd. II, 518–532) und Scaravelli (1952). An dieser Stelle soll es jedoch nicht um die Details des berühmten Kantischen Arguments und vor allem nicht um den Vergleich zwischen der vorkritischen und kritischen These Kants gehen. Vgl. dazu Gloy (1984).

Deckung gebracht werden; im Fall einer dreidimensionalen Figur gibt es dagegen keine vierte Dimension, die eine solche Bewegung ermöglicht.[35]

Zwei Begriffe können durch bestimmte Merkmale unterschieden werden, die der eine Begriff besitzt und der andere nicht. Zwei geometrische Körper wie die linke und die rechte Hand können dagegen völlig gleich und ähnlich sein, wenn man die inneren Bestimmungen (Quantität und Qualität) betrachtet, und trotzdem so verschieden wegen ihrer äußeren Verhältnisse, dass „der Handschuh der einen Hand […] nicht auf der andern gebraucht werden" (AA IV, 286) kann. Denn es ist unmöglich zu zeigen, welche Eigenschaft eine rechtsorientierte Figur besitzt, die sie von einer linksorientierten unterscheidet, weil „eine vollständige Beschreibung der einen in allen Stücken auch von der andern gelten" muss (AA II, 382). So ist jede Figur von der anderen nicht zu unterscheiden, wenn sie „allein und zugleich vollständig beschrieben wird" (AA IV, 286);[36] die Figuren erscheinen aber als verschieden, wenn man sie zusammen als Teile eines gemeinsamen Raums betrachtet. Es gibt also eine durch begriffliche Merkmale nicht ausdrückbare Art von Verschiedenheit, die nur durch einen anschaulichen Vergleich gegeben werden kann:

> Wir können daher auch den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch incongruenter Dinge […] durch keinen einzigen *Begriff* verständlich machen, sondern nur durch das Verhältniß zur rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf *Anschauung* geht. (AA IV, 286; meine Hervorhebung)

Man kann zwar erkennen, dass ein Ding das Spiegelbild des anderen ist, doch ist die Erklärung unvollständig, denn sie sagt nicht, welches das rechte und welches das linke Ding ist. Das einzige Mittel, den Unterschied zu zeigen, ist, wie Kant auch sagt, auf „das Gefühl eines Unterschiedes an meinem eigenen Subject, nämlich der rechten und linken Hand" zurückzugreifen (AA VIII, 135). Da nämlich links und rechts „keinen merklichen Unterschied zeigen" (AA VIII, 135) ohne Bezug auf irgendein asymmetrisches Objekt wie meinen eigenen Körper, wäre es also unmöglich, sich in einem leeren Raum zu orientieren. Deswegen, so Kant: „hätte jemand mir zum Spaße alle Gegenstände zwar in derselben Ordnung unter einander, aber links gesetzt, was vorher rechts war", könnte ich nicht ohne das „Gefühl eines Unterschiedes meiner zwei Seiten, der rechten und der linken" (AA VIII, 135), wieder den Weg finden.[37]

In Gegensatz zur seiner vorkritischen Meinung (vgl. AA II, 382) scheint Kant hier also zu behaupten, dass, wenn es im gesamten Universum nur eine Schraube gäbe, man nicht sagen könnte, ob es sich um eine linksdrehende oder um eine rechtsdrehende handelt. Diese Frage hätte nämlich gar keine Bedeutung: Was eine rechtsdrehende Schraube ist, wird durch ihre Lage bestimmt, z.B. hinsichtlich einer linksdrehenden Schraube oder, wenn man so will, hinsichtlich eines einzigen asymmetrischen Gegenstandes wie des menschlichen Körpers.[38] So hätte es auch keinen Sinn, sich zu fragen, ob ein einzelner

[35] Vgl. Legendre (1833, 213). Zum Verhältnis zwischen Kant und Legendre vgl. Hon und Goldstein (2008, 246ff.). Über inkongruente Gegenstücke vgl. auch den Brief von Gauß an Gerling vom 8. April 1844 in Gauss (1973, VIII, 242). Für den Vergleich mit Leibniz vgl. De Risi (2007, 136ff.).

[36] „wenn man bloß auf eine derselben allein sieht" (AA II, 382; meine Hervorhebung).

[37] Vgl. Borel (1931, 68–71). Für den Vergleich mit Leibniz vgl. De Risi (2007, 291f.).

[38] Dieses Problem wird am deutlichsten von Carl Friedrich Gauß erläutert: „Der Unterschied zwischen Rechts und Links läßt sich aber nicht *definieren*, sondern nur *vorzeigen*, so daß es damit eine ähnliche Bewandtnis hat, wie mit Süß und Bitter" (Gauss 1973, VIII, 247, meine Hervorhebung). Gauß betont ausdrücklich, dass der Unterschied zwischen rechts und links nicht auf „Begriffe" zurückgeführt werden kann: „Diesen Unterschied [….] kann man aber nicht auf *Begriffe* bringen, sondern nur aus dem Anhalten an

Körper im Universum in Ruhe oder in Bewegung ist, weil Ruhe und Bewegung nur in Bezug auf andere Körper definiert werden können; so ist „z.B. Bewegung oder Ruhe der Welt im unendlichen leeren Raum, eine Bestimmung des Verhältnisses beider untereinander, welche niemals wahrgenommen werden kann und also auch das Prädicat eines bloßen Gedankendinges ist" (B 457, Anm.).

3.2 Positive und negative Größen

Kant zufolge hat also die deutsche Schulmetaphysik des 17. Jahrhunderts logische Identität und geometrische Kongruenz verwechselt. Die Inkongruenz der Gegenstücke, d.h. ihre wechselseitige „Unersetzbarkeit", zeigt für Kant, dass dasjenige, was für die „Logik der Begriffe" identisch ist, vollkommen verschieden sein kann für die „Logik der Anschauung". Kant hat hier Leibniz' Ersetzbarkeits-Gedanken vollkommen missverstanden in dem Sinne, als ob dieser die Negierung jeder reellen Differenz wäre, die Feststellung einer absoluten Identität. Der Verdienst Kants scheint aber darin zu bestehen, dass er im Gegensatz zu Leibniz bemerkt, dass eine Kongruenz entweder eigentlich (sie führt eine links—bzw. rechtsgewundene Schraube in eine ebensolche über) oder uneigentlich (sie verwandelt eine linksgewundene Schraube in eine rechtsgewundene und umgekehrt) sein kann.[39] Die erste wird einfach Bewegung genannt (in einem nicht-kinematischen, geometrischen Sinn), während die letztere als Spiegelung bekannt ist. Kant schreibt einer solchen „Entdeckung" eine relevante philosophische Bedeutung zu; sie zeigt, dass logische Identität und geometrische Kongruenz nicht verwechselt werden können.[40] Kant hat damit den Begriff der Äquivalenz einigermaßen wiedergewonnen: Links und rechts sind zwar gleichberechtigt, aber nicht identisch im logischen Sinne, weil sie doch in Bezug zueinander verschieden bleiben.

Die Inkongruenz ist hier also nicht entscheidend. Wichtig ist vielmehr die Verschiedenheit des „Sinnes", oder, wie Kant schreibt, der „Richtung", obwohl vielleicht das ebenfalls von Kant verwendete Wort „Gegend" geeigneter wäre.[41] Dies wird durch ein anderes Problem der Unterscheidung von positiven und negativen Größen bestätigt, das schon in der vorkritischen Schrift *Versuch den Begriff der negativen Größen in die*

Footnote 38 continued
wirklich vorhandene räumliche Dinge *vorzeigen*" (a.a.O., VII, 248; meine Hervorhebung). Obwohl Gauß solche Bemerkungen gegen Kant formulierte, ist dennoch verständlich, dass die Kantianer sie als gute Erläuterung des von Kant gestellten Problems benutzen konnten: So z.B. Ernst Friederich Apelt: „Man kann also am Raume selbst Oben und Unten, Vorn und Hinten, Links und Rechts oder, wie wir sagen, verschiedene Gegenden unterscheiden, aber man kann andern die Anschauung dieses Unterschieds nur durch Nachweisung an wirklichen Gegenständen bemerklich machen." (Apelt 1910, 74).

[39] Manche Interpreten haben deswegen eingewandt, dass der „Unterschied" zwischen den inkongruenten Gegenstücken eigentlich „rein begrifflich" sei (vgl. Reidemeister 1947; Mühlhölzer 1992; Torretti 1974). Diese Behauptung beruht aber meines Erachtens auf einem Missverständnis: Die Existenz rechts- und linksorientierter Koordinatensysteme ist sicherlich rein „begrifflich", welches von ihnen aber links- und welches rechtsorientiert ist, kann nur „anschaulich" definiert werden (s.o. Fußnote 21). Obwohl Kant sicher nicht immer deutlich zwischen den beiden Fällen (vgl. Lyre 2005, 62) unterscheidet, scheint es dennoch plausibel, dass er sich vor allem auf das zweite Problem bezieht.

[40] „L'égalité géométrique ne se réduit pas a l'identité logique" [Die geometrische Gleichheit ist nicht auf die logische Identität reduzierbar] (Vuillemin 1987, 338).

[41] In der heutigen Ausdrucksweise sagt man, dass alle parallelen Vektoren dieselbe „Richtung" haben; parallele Vektoren können aber entgegengesetzte „Sinne" darstellen. Kant benutzt in beiden Fällen das Wort „Richtung" und er unterscheidet, wie in den *Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft*, zwischen beiden Bedeutungen des Wortes (vgl. AA IV, 483). An einer Stelle der Danziger Physik dagegen unterscheidet er zwischen „Direktion" und „Gegend" (vgl. AA XXIX, 113).

Weltweisheit einzuführen besprochen wurde. Eine „Richtung" (Sinn) kann nicht für sich von der anderen unterschieden werden. Welche Richtung man „nach links" und „nach rechts" nennen soll, ist durch den begrifflich zu beschreibenden Charakter der Linie nicht gegeben; „$+a$ und $-a$ sind einander nicht qualitativ, sondern nur in der Relation der Richtung entgegengesetzt" (AA XXII, 176). Die Richtungen (Sinne) können also per se nicht unterschieden werden, und die Entgegensetzung tritt erst auf, wenn man sie anschaulich vergleicht: „Allein in der sinnlichen *Anschauung*, darin Realität (z.B. Bewegung) gegeben wird, finden sich Bedingungen (entgegengesetzte Richtungen), von denen im *Begriffe* der Bewegung überhaupt abstrahirt war" (B 338; meine Hervorhebungen), da man „entgegenstehende Richtungen […] nur in der *Anschauung*, nicht in bloßen *Begriffen* vorstellen" (AA XX, 283; meine Hervorhebungen) kann.

In *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1786) verbindet Kant ausdrücklich das Problem der inkongruenten Gegenstücke mit dem Problem der Bewegungen in entgegengesetzte Richtungen oder Sinnen. Wenn man z.B. eine Kreisbewegung betrachtet, kann man sich fragen:

> [W]as ist hier die Seite, nach der die Bewegung gerichtet ist? eine Frage, die mit der eine Verwandtschaft hat: worauf beruht der innere Unterschied der Schnecken, die sonst ähnlich und sogar gleich, aber davon eine Species rechts, die andere links gewunden ist […] ein Begriff, der sich zwar construiren, aber als Begriff für sich durch allgemeine Merkmale und in der discursiven Erkenntnißart gar nicht deutlich machen läßt. (AA IV, 483f.)

In beiden Fällen geht es um Gegenstände, die isoliert betrachtet nicht zu unterscheiden sind, denn es ist unmöglich, „in der Beschreibung eines Cirkels, ohne an ihm irgend eine Verschiedenheit der Gegenstände zu bedürfen, doch die Bewegung von der Linken zur Rechten von der in entgegengesetzter Richtung zu unterscheiden" (AA VIII, 135). Das, was in einem gegebenen Raum nach der einen Seite, und das, was nach der anderen liegt, kann bei aller Schärfe des Verstandes nicht begrifflich beschrieben, d.h. auf Verstandesmerkmale zurückgeführt (vgl. AA II, 403), sondern nur direkt anschaulich aufgewiesen werden, weil „sich dieser Unterschied zwar in der *Anschauung* geben, aber gar nicht auf deutliche *Begriffe* bringen, mithin nicht verständlich erklären (*dari, non intelligi*) lässt" (AA IV, 484, meine Hervorhebung).

Wie Leibniz erwähnt deshalb auch Kant in *Was heißt: Sich im Denken orientiren*? (1786) das Gedankenexperiment der Spiegelung des ganzen Universums. Die gespiegelte Welt wäre von der ursprünglichen nicht zu unterscheiden, solange alle Gegenstände die gleiche Vertauschung erleiden:

> [U]nd wenn in einem Tage durch ein Wunder alle Sternbilder zwar übrigens dieselbe Gestalt und eben dieselbe Stellung gegen einander behielten, nur daß die Richtung derselben, die sonst östlich war, jetzt westlich geworden wäre, so würde in der nächsten sternhellen Nacht zwar kein menschliches Auge die geringste Veränderung bemerken. (AA VIII, 135)

Auch dieses Beispiel, das Euler übernommen hat, zeigt also, wie es in der Paradoxie der inkongruenten Gegenstücke vor allem um die Unmöglichkeit geht, die „Orientierung" begrifflich zu definieren, ein Raumgebilde von seinem Spiegelbild durch „innere Kriterien" zu unterscheiden: „Daß sich alle Planeten u. ihre Trabanten von Abend gegen Morgen fortschreitend sowohl als umdrehend bewegen", ist also nach Kant eng verbunden mit „dem Phänomen der rechten und linken Hand" (AA XXII, 535; vgl. auch AA I, 409. Vgl. dazu Herring 1957/58).

3.3 Verschiedenheit des Ununterscheidbaren

Der Bezug zu Leibniz tritt besonders deutlich hervor, wenn man ein anderes, vor allem in der *Kritik der reinen Vernunft* im Anhang *Von der Amphibolie der Reflexionsbegriffe* diskutiertes Beispiel betrachtet, das gegen „Leibnitzens Satz des Nichtzuunterscheidenden" (AA XX, 280) gerichtet ist: „Es ist die frage, ob 2 Dinge blos *numero* verschieden seyn können oder ob sie durchaus specifisch *plura* seyn müssen, um mehr als ein Ding zu seyn" (AA XVII, 683; Refl., 4712).

Dieses Problem hat mit dem Fall der inkongruenten Gegenstücke eine evidente Ähnlichkeit, obwohl diese in der ersten Kritik nicht erwähnt werden. Es geht nämlich nochmals um zwei Objekte, die gleich und ähnlich und trotzdem wegen ihrer wechselseitigen Position im Raum verschieden sind: „Wenn uns ein Gegenstand mehrmals, jedesmal aber mit eben denselben innern Bestimmungen (*qualitas et quantitas*) dargestellt wird, so ist derselbe, wenn er als Gegenstand des reinen Verstandes gilt, immer eben derselbe und nicht viel, sondern nur ein Ding (*numerica identitas*)" (B 319); wenn der Gegenstand aber nicht durch „Begriffe", sondern in der „Anschauung" gegeben ist, „ist doch die Verschiedenheit der Örter", nämlich eine äußere Relation, „ein genugsamer Grund der numerischen Verschiedenheit [*numerica diversitas*] des Gegenstandes (der Sinne) selbst" (B 319). Hier ein Beispiel Kants:

> Der *Begriff* von einem Kubikfuße Raum, ich mag mir diesen denken, wo und wie oft ich wolle, ist an sich völlig einerlei. Allein zwei Kubikfüße sind im Raume dennoch bloß durch ihre Örter unterschieden (*numero diversa*); diese sind Bedingungen der *Anschauung*, worin das Object dieses Begriffs gegeben wird, die nicht zum Begriffe, aber doch zur ganzen Sinnlichkeit gehören. (B 339; meine Hervorhebungen)

Man kann also letztlich behaupten, dass alle bisher betrachteten Beispiele Kants, um Begriff und Anschauung zu unterscheiden (die inkongruenten Gegenstücke, die positiven und negativen Größen, die zwei Kubikfuß an verschiedenen Orten), auch wenn sie nicht immer von Kant selbst miteinander in Verbindung gebracht werden, etwas gemeinsam haben. Es geht um Elemente, die dieselben inneren Merkmale (*notae internae*), Quantität und Qualität, besitzen, d.h. gleich und ähnlich und trotzdem durch äußere wechselseitige Relationen (*ratione relationis*; AA XXIX, 838) verschieden sind, also nur, wenn sie in der Anschauung verglichen werden.[42]

Wenn man Dinge nur durch Begriffe, d.h. als Noumena denkt, dann könnte man nämlich immer eine Eigenschaft finden, die das eine hat und das andere nicht. Aber wenn man die Dinge als Phänomena in der Anschauung betrachtet, zeigen sie eine Verschiedenheit, die auf kein inneres Merkmal zurückzuführen ist. Wenn also Kant den Raum der „Logik der Anschauung" und nicht der „Logik des Begriffes" unterwirft, bedeutet das zunächst, dass „ganz ähnliche und gleiche Räume" verschieden sein können, obwohl sie

[42] Eine solche Interpretation scheint von einigen Autoren, die zur sogenannten *aetas kantiana* gehören, bestätigt werden. So z.B. Johan Schultz: „Die innern Merkmale eines Dinges heißen diejenigen, die seine Qualität und Quantität betreffen, die äußern die welche seine Stelle im Raum und in der Zeit bezeichnen"; „Dinge, die sich durch kein inneres Merkmal unterscheiden lassen, heißen an sich betrachtet vollkommen einerley […] Also können Dinge, die *an sich betrachtet* vollkommen einerley sind, bloß in Ansehung ihrer Stelle im Raum und in der Zeit verschieden seyn" (Schultz 1790, 28, meine Hervorhebung). Ähnlich dazu auch Wilhelm Traugott Krug (1770–842), ab 1805 Kants Nachfolger als Professor in Königsberg: „Die Theile des Raums und der Zeit können ja selbst als völlig gleich und ähnlich gedacht und *dennoch mittels der Anschauung unterschieden* werden, z. B. zwei Dreiecke von gleichen Seiten und Winkeln, oder zwei Stunden, weil sie ausser (neben und nach) einander vorgestellt werden." (Krug 1825, 174, meine Hervorhebung.)

kein begriffliches Merkmal besitzen, das sie von einem anderen unterscheidet, bloß weil sie „außer einander vorgestellt werden" (AA XX, 282), d.h. weil sie verschiedene Positionen in einem Raum einnehmen, in dem sie enthalten sind:

> Denn ein Theil des Raums, ob er zwar einem andern völlig *ähnlich* und *gleich* sein mag, ist doch außer ihm und eben dadurch ein vom ersteren verschiedener Theil […]; und dieses muß daher von allem, was in den mancherlei Stellen des Raums zugleich ist, gelten, so sehr es sich sonst auch ähnlich und gleich sein mag. (B 320; meine Hervorhebungen)

Von diesem Standpunkt aus kann man also verstehen, dass für Kant der Raum kein *allgemeiner Begriff* sein kann, den man erhält, wenn man von den besonderen Bestimmungen der einzelnen Räume absieht. Er ist *reine Anschauung*, weil es nur einen undifferenzierten Raum gibt und „wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Theile eines und desselben alleinigen Raumes" (B39).

Mit anderen Worten: Das Verhältnis zwischen dem Raum und den „Räumen" ist nicht wie jenes zwischen einem abstrakten Begriff und seinen Unterbegriffen aufzufassen, die sich durch bestimmte Merkmale unterscheiden lassen, sondern wie eines zwischen einem einzigen konkreten Ganzen und seinen Teilen, die nur durch ihre wechselseitige Stellung verschieden sind.[43] Erst eine solche Gleichförmigkeit des Raumes, so könnte man Kants „transzendentales Argument" grob zusammenfassen, macht die Geometrie möglich. Nur damit ist nämlich jene Indifferenz der geometrischen Gebilde aller Lageunterschiede gewährleistet, die an verschiedenen Stellen des Raumes identische Konstruktionen vorzunehmen erlaubt.[44]

[43] Lazarus Bendavid, einer der ersten von Kant selbst sehr geschätzten Vertreter der kritischen Philosophie, hat meines Erachtens diesen Standpunkt sehr deutlich ausgedrückt in seinen *Vorlesungen über die Kritik der reinen Vernunft* (1796): „Zur Bildung eines allgemeinen Begriffes gehören bekanntermaßen, mehrere, in etwas gleiche und in etwas verschiedene Dinge, von denen man ihre individuelle Verschiedenheit weglässt und nur das behält, was ihnen gemeinschaftlich zukommt. […] Nun aber findet zwischen Raum und Raum gar kein Unterschied statt, und die Vorstellung desselben kann kein allgemeiner Betriff seyn. Wenn ich den Raum meines Zimmers von dem des Nebenzimmers unterscheide, so geschieht das, weil beyde Zimmer durch eine Wand getrennt werden. Nähme ich diese Wand weg, so wären beyde, vorhin verschiedene Räume, nur ein Raum; und eben so würde es durch Aufhebung aller Schranken eines bestimmten Raumes, überall nur einen Raum geben." (Bendavid 1968, 14–15). „Ein einziges Ding, das durchgängig keine Verschiedenheit hat, wird nie einen allgemeinen Begriff ausmachen" (a.a.O. 15), sondern es ist eine Anschauung. Auch Ernst Apelt, ein Schüler von Fries, hat später die Raumanschauung auf eine ähnliche Weise interpretiert: „Kein Theil des Raumes lässt sich also von dem andern durch ein Merkmal (einen Begriff), sondern nur in der Anschauung unterscheiden. Wäre der Raum ein Begriff, so müssten seine Theile auch Begriffe oder Merkmale sein, aber die Theile des Raumes sind wiederum Räume, die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass sie (abgesehen von der Gestalt) eine andere Lage im Ganzen haben." „Wodurch ist nun diese Unterscheidung bei der Gleichartigkeit aller Theile möglich? Nicht durch einen Begriff, sondern in der Anschauung. Wäre der Raum nicht ein Gegenstand der Anschauung, so könnte man nicht zwei Punkte von einander unterscheiden, denn der Begriff des einen Punktes ist mit dem Begriff des andern Punktes völlig identisch, beide Punkte sind nur zu unterscheiden durch die Verschiedenheit ihrer Oerter im Raume. Ebenso zwei congruente Kreise oder Kugeln sind ihrer Grösse und Qualität nach vollkommen einerlei, der Verstand hat kein Merkmal, woran er die eine von der andern unterscheiden kann" (Apelt 1910, 71).

[44] Eine solche Interpretation wird interessanterweise von Schelling vertreten: „Der Raum ist etwas ganz außer dem Begriff Liegendes (insofern hatte Kant ganz Recht, die Vorstellung des Raums für eine auf bloßer Anschauung beruhende zu erklären), wäre dieß nicht, beruhte die Vorstellung des Raums nicht auf Anschauung, sondern auf einem Begriff, so wäre es dem Geometer ganz unmöglich, sich zwei verschiedene Punkte oder überhaupt zwei congruente Ausdehnungen, z.B. zwei gleiche gerade Linien oder zwei gleiche Kreise, vorzustellen; … Bei zwei gleichen geraden Linien, zwei gleichen Kreisen, zwei gleichen Kugeln hat der Verstand nicht das mindeste innere Merkmal, wodurch er die eine von der andern unterscheiden könnte

3.4 Der Ähnlichkeitsbegriff bei Kant

Kant scheint also wie etwa Leibniz zu behaupten, dass alle Teile des Raumes einander gleich und ähnlich sind, und deswegen Teile „desselben" Raums sind. Die Originalität von Kants Leistung liegt in der transzendentalen Problemstellung. Wie Leibniz scheint aber Kant zu glauben, dass die vollkommene Homogenität des Raumes erst erreicht werden kann, wenn alle Teile des Raumes auch zueinander ähnlich sind, d.h. dass es möglich ist, größere und kleinere Figuren zu konstruieren, ohne ihre geometrischen Eigenschaften zu ändern. Dies scheint als selbstverständlich schon in der These der Einheit und Homogenität des Raumes enthalten zu sein, ebenso wie die Möglichkeit, Figuren zu bewegen, ohne sie umzuformen. Hier wird also a priori die Indifferenz der Euklidischen Gebilde gegenüber allen Größen- und Lageunterschieden verlangt und damit die Bestimmungs- und Eigenschaftslosigkeit der einzelnen Punkte im Raum postuliert. So wie es keine absolute Position gibt, so gibt es auch keine absolute Längeneinheit, d.h. jedes Maß besteht nur durch den Bezug auf ein gegebenes Objekt.

Die einzelnen Gebilde können nämlich in ihrer reinen „Qualität" erfasst werden, ohne dass ein bestimmtes „Quantum", d.h. ein absoluter Zahl- und Größenwert, für ihre Definition in Betracht käme („Ähnliche Dinge [sind] nur ihrer Größe nach unterschieden", AA XVI, 77: Refl. 1676). Da die Messung in der Euklidischen Geometrie vollkommen relativ ist, bedeutet das also auch für Kant, dass die Unterscheidung von ähnlichen Figuren erst durch den Vergleich mit einem gegebenen Objekt möglich ist (vgl. z.B. AA XX, 47).

Kant wendet die Gegenüberstellung zwischen Begriff und Anschauung auch in Bezug auf die Relativität des Maßes an. Er scheint wie Leibniz zu behaupten, dass sich der Begriff „Fuß" oder „Elle" nicht definieren lässt; man kann nur eine bestimmte Strecke mit einem in der Anschauung gegebenen Objekt vergleichen, das wir als Standard festgelegt haben. Wir haben also, wie Kant in der *Kritik der Urtheilskraft* ausdrücklich betont, keinen „bestimmten Begriff von einer gegebenen Größe" (AA V, 251), sondern es muss „die Schätzung der Größe des Grundmaßes bloß darin bestehen, daß man sie in einer Anschauung unmittelbar fassen […] kann" (AA V, 251).[45] Auch diese Behauptung Kants kann unsere Definition des Anschauungsbegriffs bestätigen: Was eine „Elle" ist, kann „mit Worten" nicht erklärt werden, ebenso wenig wie „mit Worten" definiert werden kann, was „links" ist. Wesentlich ist also nochmals der Unterschied zwischen dem „Geben" eines Gegenstandes durch individuelle Ausweisung einerseits und das „Definieren" auf begrifflichem Wege andererseits. Es ist übrigens vielleicht nicht zufällig, dass die schon erwähnte Aussage Kants, dass das, was links (oder rechts) ist, „dari, sed non intelligi" (AA 04: 484) werden kann, fast wörtlich Wolffs Prinzip „quantitas dari, sed non per se intelligi

Footnote 44 continued
[…]. Ihre Verschiedenheit besteht bloß darin, daß wir sie uns in zwei verschiedenen Oertern des Raums vorstellen. Aber diese Oerter durch irgend einen Begriff kenntlich zu machen, zu bestimmen, was rechts oder links liegt, ist durchaus nicht Sache des Verstandes, und beruht auf unmittelbarer sinnlicher Vorstellung, d. h. auf Anschauung" (von Schelling 1856, Bd. 10, 314). In jüngerer Zeit und unter einer ganz anderen Perspektive hat vor allem Jakko Hintikka nachzuweisen versucht, dass Kant sich bei der Bestimmung der geometrischen Erkenntnisart am geometrischen Beweisverfahren Euklids orientierte (vgl. Hintikka 1969). Von diesem Standpunkt aus sollte der Raum die „infinite iterability of our process of construction" (Friedman 1992, 61) erlauben, d.h. *a priori* die Möglichkeit gewährleisten, an verschiedenen Stellen des Raumes identische Konstruktionen durchzuführen.

[45] Vgl. dazu Meerbote (1981, 204). Für den Vergleich mit Leibniz vgl. De Risi (2007, 355f., Anm. 344).

potest" (Wolff 1962a, 26) entspricht, mit dem dieser die Relativität der Messung ausdrückt.[46]

Die Größe bleibt trotzdem für Kant eine „innere" Bestimmung einer Sache: „Daß etwas eine Größe (*quantum*) sei", lässt sich nämlich „ohne alle Vergleichung mit andern" erkennen; nur „wie groß es aber sei, erfordert jederzeit etwas anderes, welches auch Größe ist, zu seinem Maße", und es gilt, dass „die Größe dieser letztern immer wiederum etwas Anderes als Maß bedarf, womit sie verglichen werden könne" (AA V, 248).[47] Interessanterweise greift Kant auch in den *Vorlesungen über die Metaphysik*—gehalten im Wintersemester 1794/95—auf das Gedankenexperiment der Ununterscheidbarkeit von ähnlichen Universen zurück, um eine solche Unmöglichkeit einer Definition des Maßes auszudrücken (AA XXIX, 835):

> Nimt man die Vorstellung an, einige Dinge im Universo würden immer kleiner, und alle übrigen blieben dagegen unverändert, so stellt man sich ein Verhältniß vor, in welchem die kleinern gegen die größern bleiben […]. Setzt man aber voraus, daß sich das ganze universum verändert habe, so ist keine Vergleichung weiter möglich, und also auch keine Veränderung der Größe […] weil wir sie nicht mit einem dritten Gegenstande vergleichen könnten. (AA XXIX, 997)

Der Begriff der Größe ist also zwar absolut, „aber die *magnitudo* oder *parvitas* kann nie *absolute* erkannt werden, sondern nur durch relation" (AA XXIX, 997). Es ist interessant zu bemerken, dass Kant etwa ein Jahr später (1796) in der Schrift über die Fortschritte der Metaphysik (die erst 1804 erschien) dieses Beispiel merkwürdigerweise gerade gegen Leibniz verwendete, da dieser den Unterschied zwischen Begriff und Anschauung nicht beachtet haben soll: dass „wir auf die Art den ganzen unendlichen Raum in einen Kubikzoll und noch weniger bringen könnten, konnte er [Leibniz] nicht zugeben, denn er ließ nur eine Unterscheidung durch *Begriffe* zu, und wollte keine von diesen specifisch unterschiedene Vorstellungsart, nämlich *Anschauung*" (AA XX, 282; meine Hervorhebungen).[48]

[46] Das kann weiter bestätigt werden, wenn man darauf achtet, dass, wenn Kant in der *Dissertatio* bemerkt, dass der Unterschied zwischen links und rechts „discursive describi s. ad notas intellectuales revocari nulla mentis acie possunt" [trotz aller Schärfe des Verstandes nicht begrifflich beschrieben, d.h. auf Verstandesmerkmale zurückgeführt werden] kann (AA II, 403) oder dass es unmöglich ist, einen solchen Unterschied „per omnia, quae notis menti per sermonem intelligibilibus efferre licet" [durch Merkmale, die der Seele mittelst der Worte verständlich sind] zu fassen (AA II, 403; vgl. dazu Rusnock und George 1995, 270). Er greift dabei Christian Wolffs Definition der Ähnlichkeit auf, die auf Leibniz selbst zurückgeht (vgl. dazu: Poser 1979, 65). In seinem Mathematischen Lexikon schreibt Wolff: „Denn die Grösse kann man einem wohl geben und undeutlich in die Einbildung fassen, aber nicht mit Worten erklären und im Verstande deutlich begreifen." (Wolff 1962b, Sp. 1278 u. 1280). Kant war sicher vertraut mit dieser Definition, die er in der vorkritischen Zeit kritisiert hatte (vgl. AA II, 277).

[47] Kant folgt aber Wolff und Baumgarten, auch wenn er behauptet, dass die „Quantität" eine „innere Bestimmung" sei, obwohl sie einen Vergleich erfordert. Kant unterscheidet aber zwischen *Quantitas* und *Quantum*. In einer Anmerkung zu § 69 von Baumgartens *Methaphysica*, der zwischen *qualitates* und *quantitates* unterscheidet, bemerkt Kant: „besser *quanta*; daß etwas ein *Qvantum* sey, läßt sich absolut erkennen, wie groß aber (*quantitas*), nur relativ" (vgl. auch AA XXIX, 991f.).

[48] Jules Vuillemin hat meines Erachtens die Grundlinien der hier vorgeschlagene Interpretation am besten zusammengefasst: „Les exemples que Kant allègue pour prouver la spécificité sensible de la géométrie et empêcher sa réduction à l'analyse intellectuelle appartiennent en réalité à trois domaines distincts de cette science: a) […] ni la translation ni la rotation n'altèrent ni la grandeur ni la forme des figures; b) […] la construction de figures homothétiques c) En troisième lieu, Kant utilise souvent, pour montrer l'irréductibilité de l'espace à un concept, l'exemple de l'égalité indirecte des figures […] d'après Kant, ce retournement est littéralement incompréhensible, l'analyse intellectuelle ne peut en rendre compte." [Die Beispiele, die Kant gibt um die sinnliche Natur der Geometrie nachzuweisen und ihre Reduktion auf eine Analyse durch den Verstand zu verhindern, gehören zu drei verschiedenen Feldern dieser Wissenschaft: a)

4 Hausdorffs Transformations- oder Abbildungsprinzip

Um den Unterschied zwischen Begriff und Anschauung nachzuweisen, scheint Kant gegen Leibniz paradoxerweise genau dasselbe Leibniz'sche Gedankenexperiment anzuführen, von dem man hier ausgegangen ist. Obwohl es hier um Textpassagen geht, die nicht den Hauptwerken Kants entnommen sind, ist es trotzdem bedeutsam, dass Kant auf dieses Beispiel zurückgreift. In einer späten Reflexion (etwa Mai 1797) bemerkt Kant auf eine ähnliche Weise: „Daß sich alle ausgedehnte Wesen in der Welt in einen Wassertropfen oder ins unendliche noch kleineren Raum bringen lassen, beweiset die Idealität des Raums, wen alles immer als relativ, niemals absolut gros oder klein betrachtet wird" (AA XVIII, 669; Refl. 6344; vgl. auch AA XVIII, 705; Refl. 6398; XVIII, 711, Refl. 6420). Im *Opus Postumum* spricht Kant übrigens oft (vgl. AA XXI, 196; XXI, 338; XXI, 501; XXII, 4) davon, dass das ganze Universum in einer Nussschale Platz finden könne, „ohne daß der mindeste Unterschied hierin anzutreffen" sei (AA XXI, 197). Er führte diese Bemerkung auf Isaac Newton und auf den schweizerischen Chemiker und Meteorologen Jean-André Deluc zurück. Kant hatte aber auch die 1797 erschienene deutsche Übersetzung von Pierre-Simon Laplaces *Exposition du systême du monde* zur Kenntnis genommen (de Laplace 1797), in der mit einem ähnlichen Gedankenexperiment die „Skaleninvarianz" des Newtonschen Gravitationsgesetzes behauptet wird (vgl. Webb, 1987, 57ff.).

Es gibt zwar nur wenige Bezüge Kants auf ein solches Gedankenexperiment, diese sind jedoch insofern bedeutsam, dass später häufig gerade auf den Fall einer gleichmäßigen Verkleinerung oder Vergrößerung der ganzen Welt um einen konstanten Faktor Bezug genommen wurde.[49] In dem unter dem Pseudonym Paul Mongré erschienenen *Das Chaos in kosmischer Auslese* (1898) hat Felix Hausdorff eine der wohl eindrucksvollsten und detailliertesten Darstellungen dieses Gedankenexperiments ausgeführt, die—ebenfalls in Auseinandersetzung mit Laplace—auch seine physikalische Bedeutung berücksichtigt, d.h. die Notwendigkeit der entsprechenden Änderung der physikalischen Konstanten:

> [S]o halten wir auch hier, bei der Relativität der Messung, es nicht für überflüssig zu betonen, dass wir die Vergrösserung und Verkleinerung aller Raumdimensionen uns an dem fertig vorliegenden Weltall vollzogen denken und nicht etwa von den physicalischen Folgen begleitet, die bei partiellen Grössenänderungen innerhalb des Weltalls aufzutreten pflegen. (CK 85)

Footnote 48 continued

[...] weder die Translation noch die Rotation verändern weder die Form noch die Größe der Figur; b) [...] die Konstruktion von homothetischen Figuren c) Drittens, Kant verwendet oft, um die Nichtreduzierbarkeit des Raumes auf einen Begriff zu zeigen, das Beispiel der indirekten Gleichheit der Figuren [...], diese Umwandlung ist nach Kant wörtlich unverständlich, die Analyse durch den Verstand kann davon keine Rechenschaft geben]. (Vuillemin 1987, 50–51). Mit anderen Worten führen die Automorphismen der Euklidischen Geometrie eine geometrische Figur auf eine andere über, deren Verschiedenheit durch die Begriffe der traditionellen Logik nicht ausdrückt werden kann. Vuillemin entwickelt leider diese Idee nicht weiter. Es scheint mir aber, dass Vuillemins Hinweis einen plausiblen Interpretationsschlüssel bietet, um die Unterscheidung zwischen Begriff und Anschauung in Kants Philosophie der Geometrie zu verstehen. Der von mir unternommene Vergleich zu Leibniz sollte das bestätigen. Die Tatsache, dass Kant Leibniz' Definition der Ähnlichkeit durch Wolff kannte, zeigt, dass meine Interpretation indirekt auch historisch gestützt wird. (vgl. Anm. 30).

[49] So etwa bei Helmholtz (1903, 43), Calinon (1893, 602), Poincaré (1905, 64f., 1908, 51), Delboeuf (1893), Lechalas (1896, 198ff.), und Frege (1967, 127).

Hausdorff warnt vor einer realistischen Missdeutung dieses Beispiels (CK 85). Er behauptet damit natürlich nicht, dass die Dimensionen des Weltalls tatsächlich variabel sind, dass das Weltall „im transcendenten realistischen Sinne, ein beliebig aufschwellender oder einschrumpfender Gummiball" ist (CK 10), sondern nur, dass „jenseits unserer relativen Grössenwahrnehmung der Begriff räumlicher Grösse" (CK 11) der Begriff von den „‚wirklichen Dimensionen' des Weltalls" als „gegenstandlos und dialectisch" (CK 85) betrachtet werden muss. Insofern „an dieser Gesamtänderung sowohl die messenden Objekte als auch unsere Maßstäbe theilnehmen" (CK 10), hat es keine Bedeutung, von einem Unterschied zwischen dem Original und dem abgebildeten Universum zu reden. Um eine Hegelsche Ausdrucksweise zu benutzen: Der Unterscheid der Größe ist ein „Unterschied, der zugleich kein Unterschied ist." (Hegel 1969, VII, 186).

Zentral für die vorliegende Arbeit ist folgendes: Hausdorff ist sich dessen bewusst, dass der Fall der Vergrößerung der Dimensionen der ganzen Welt dieselbe Bedeutung für den Begriff „Größe" hat wie etwa die Spiegelung, die „*alle* Gegenstände unserer Umwelt" (CK 89) betrifft, für den Begriff „Orientierung". Man lege beispielsweise eine beiderseitig spiegelnde Ebene durch den Weltraum, so dass jeder empirische Punkt durch sein Spiegelbild ersetzt wird: Nur „[f]ür einen ausserweltlichen Betrachter würde sich die gespiegelte Welt von der ursprünglichen unterscheiden wie für uns rechte Hand und linke Hand, Hopfenranke und Weinranke, rechts gewundene und links gewundene Schnecke; wir selbst würden nichts davon bemerken" (CK 89). Das hat eine für die vorliegende Arbeit wohlbekannte Konsequenz:

> Es existiert keine rein geometrische Definition des Unterschiedes zwischen rechts und links; alle mathematischen und physikalischen Festsetzungen über den Sinn von Richtungen und Drehungen appelliren an bekannte Bewegungen der Natur und Technik oder direkt an das unmittelbare Unterscheidungs-Vermögen für unsere beiden Körperhälften. (CK 90)

Hausdorff ist sich dessen bewusst, dass Kant der erste war, der die philosophische Bedeutung eines solchen „rein anschaulichen begrifflich nicht zu definierenden Unterschied[es] zwischen rechter und linker Hand" betonte (s. CK 91).

Die moderne Mathematik hat geklärt, dass die Existenz „symmetrische[r], aber nicht congruente[r] Gegenständ[e]" (CK 91) bloß zufällig ist. Zwei inkongruente Gegenstücke in einem Raum von n Dimensionen können nämlich durch eine Drehung in einem Raum von $n + 1$ Dimensionen zur Deckung gebracht werden: „Durch Bewegung im vierdimensionalen Räume können wir den empirischen Raum z.B. in sein Spiegelbild überführen, so wie zwei symmetrische Dreiecke der Ebene zur Deckung zu bringen sind, wenn man das eine aus der Ebene herausdreht und umklappt" (CK 119).[50] Gegen die „Verfechter des vierdimensionalen Raumes",[51] die die Existenz einer vierten Dimension daraus ableiten wollten, führt Hausdorff an, dass „in keinem Raume von noch so vielen

[50] „Umklappung von Handschuhen. An der zweidimensionalen Analogie zu erläutern. Unfug mit dem Handschuhproblem: Kant, Du Prel. Einwand, dass ein R^4 sich überall und normaler Weise verrathen müsste. Die ‚enantiomorphen Krystalle' (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 52). Doch setzt die Inkongruenz der Gegenstücke voraus, dass der Raum orientierbar ist, denn in einem nicht-orientierbaren Raum könnten die Gegenstücke zur Kongruenz gebracht werden (vgl. Möbius 1885, 171): „Ferner das Möbius'sche Blatt: ‚Einseitigkeit' von Flächen oder Räumen […] Hier ist Bild = Spiegelbild, so dass man zur Verwandlung rechter in linke Handschuhe nicht einmal den vierdimensionalen Raum braucht." (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 50). Für eine Diskussion dieses Problems im Bezug auf Kant vgl. Nerlich (1991).

[51] Über die vor allem von dem Astrophysiker Friederich Zöllner entwickelte Spekulation über die reale Existenz einer nicht wahrnehmbaren vierten Raumdimension vgl. Epple (1998, 166–174).

Dimensionen das ‚entschiedene Wunder'[52] beseitigt wäre" (CK 91). „Dieser groteske Schluss", d.h. die Existenz einer vierten Dimension, „ist glücklicherweise nicht dem Schöpfer der Vernunftkritik zur Last zu legen" (CK 92). Für Kant allerdings, das bemerkt Hausdorff meines Erachtens völlig zu Recht, ist es wichtig, dass es keinen Weg gibt, um ein geometrisches Gebilde nach einer Spiegelung anhand von „inneren Kriterien" vom Original zu unterscheiden, obwohl sie vollkommen verschieden sind. Erst durch einen „äußeren Bezug" auf ein direkt ausgewiesenes drittes Objekt kann man festlegen, welches das rechtsgewundene und welches das linksgewundene ist. Urbild und Abbild sind also „begrifflich identisch" (CK 90), aber trotzdem anschaulich verschieden. Ähnlich dazu würde auch „eine beliebige Verschiebung oder Drehung des erfüllten Raumes im leeren, bei welcher an der relativen Lage der empirischen Raumpunkte gegeneinander nichts geändert wird" (CK 83), nicht auffallen. Wenn die ganze Welt bloß verschoben oder gedreht würde, könnte man keinen Unterschied bemerken.

4.1 Raumumformungen

Die „bisher besprochenen Transformationen—Bewegung, Maßstabsänderung, Spiegelung—" (CK 91) sind dieselben, auf die (wenn auch in naiverer Herangehensweise) Leibniz und Kant Bezug genommen haben. Hausdorff zeigt aber, dass kompliziertere Beispiele angeführt werden können. Zwei Welten wären nicht zu unterscheiden, nicht nur wenn sie einander kongruent oder ähnlich wären, sondern auch dann, wenn man von der einen zur anderen durch irgendeine kompliziertere Deformation übergehen könnte. Wenn „nun etwa bloss eine Dimension vergrössert oder verkleinert würde […]: würde dies in unser Bewusstsein fallen?" (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 64). Die Gestalt der Körper hätte sich sicher gänzlich verändert: Aus Kugeln wären Rotationsellipsoide, aus Würfeln Parallelepipede geworden usw.; aber von einer solchen Deformation würden wir wiederum nichts bemerken. Der Versuch, mit Hilfe eines Maßstabes die Änderung der Längendimension zu konstatieren wäre vergeblich, weil ja der Maßstab, sobald wir ihn zum Zwecke der Messung in jene Richtung drehen, sich nach unserer Voraussetzung selbst in entsprechendem Maße verlängert oder verkürzt (vgl. CK 99). Ein Beobachter im deformierten Universum hätte keine Möglichkeit, den Unterschied zu bemerken, d.h. keine Möglichkeit zu sagen, ob er sich im ursprünglichen oder im abgebildeten Universum befindet.

Das gleiche gilt natürlich, wenn man „an eine beliebige Transformation und nicht mehr speciell an die Verkürzung längs einer Dimension" (CK 97) denkt. In erster Annährung kann man sich auf die Transformationen beschränken, die von „Unstetigkeiten und Singularitäten" (CK 99) frei sind. Es wird nur vorausgesetzt, dass jedem Punkt des ursprünglichen Raumes ein Punkt und nur ein Punkt seines verzerrten Abbild entspricht, und ebenso umgekehrt, so dass die Koordinaten des einen Punktes stetige und eindeutige Funktionen—ganz gleichgültig welche—der Koordinaten des entsprechenden Punktes sind. Es ist also „immer eine Abbildung des einen auf den andern möglich […], bei welcher Abbildung sich aber die starren Körper des wirklichen Raumes als deformable Körper im leeren Raume bewegen würden" (NL FH Kapsel 49; Fasz. 1079; Bl. 10).

Wenn man Messungen betreibt, bewegt man nämlich einen „festen Körper" aus einer Lage in eine andere; wenn man feststellt, dass er sich zunächst mit einer Figur und dann mit einer anderen zur Deckung bringen lässt, kommt man zu dem Schluss, dass diese beiden Figuren als kongruent anzusehen sind. Die Definition eines starren Körpers basiert

[52] Zitat aus Du Prel (1880, 160).

aber auf einem *circulus vitiosus*. Ein starrer Körper ist nämlich ein Körper, der bei jeder Bewegung dauernd kongruent bleibt. Man definiert damit Figuren als kongruent, wenn sie durch starre Bewegungen ineinander überführt werden können, gleichzeitig ist die starre Bewegung eine Veränderung, bei der jede Figur in eine Kongruente übergeht (vgl. Kapsel 48: Fasz. 994, Bl. 3 und Kapsel 49: Fasz. 1082, Bl. 2):

> Woran erkennen wir die Gleichheit zweier Raumstrecken? Durch Messung mit demselben als unveränderlich vorausgesetzten Maßstab. Woran erkennen wir die Unveränderlichkeit des Maßstabes? Daran, daß er bekanntermaßen gleiche Raumstrecken deckt, also durch Vergleichung mit einem anderen Maßstab! Unsere hölzernen Metermaße werden wir vielleicht an stählernen und diese in letzter Linie an dem Pariser Platinstab kontrollieren; aber an die Unveränderlichkeit dieses letzten müssen wir axiomatisch glauben, und wenn er durch beliebige Raumtransformation so verzerrt wird, daß er einem jenseitigen Beobachter als weicher plastischer Körper erscheinen müßte, so haben wir doch keine Möglichkeit, seine Formveränderungen wahrzunehmen (RP 17).

Die physikalische Geometrie hängt von der Definition der Kongruenz mit Hilfe starrer Körper ab, die wir gewählt haben. Je nach Festsetzung der zugrunde liegenden Maßstäbe ergibt sich dieses oder jenes geometrische System: „Man kann es auch so ausdrücken: wir wissen nicht, ob unsere für fest gehaltenen Körper ‚wirklich' (im absoluten, transcendenten Sinne) fest sind. Aber wir wissen, dass, wenn wir einen von ihnen für fest erklären, in dem darauf gegründeten System räumlicher Messungen auch die übrigen als feste Körper erscheinen" (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 66).

4.2 Abbildung, Zuordnung, Correspondenz

„Von gewissen Transformationen des Raumes", so fasst Hausdorff zusammen, „würden wir nichts bemerken: das ist der Refrain meiner ‚transcendentalen Dialektik" (NL FH Kapsel 49; Fasz. 1079; Bl. 26). Das ist aber unzweifelhaft gleichermaßen der Refrain der Debatte des 19. Jahrhunderts über die Grundlagen der Geometrie. Auf diesen Voraussetzungen basieren nämlich alle Gedankenexperimenten, die eine so wichtige Rolle in jener Debatte spielten und die „in popular einleuchtender Weise" die Idee ausdrückten, „dass eine Raumtransformation sich der empirischen Wahrnehmung entzieht" (CK 100). Es muss nur vorausgesetzt werden, dass alle „Massstäbe an der Transformation Theil genommen haben" (CK 116), so dass erst einem „von der Transformation nicht beeinflussten Beobachter" (CK 116) der Unterschied auffallen würde.

Hausdorff selbst bemerkt, dass dies der Sinn von „Helmholtzens Convexspiegelbild" (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 33)[53] ist, obwohl Helmholtz vielmehr an der „Anschaubarkeit nicht euklidischer Verhältnisse" (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 65) interessiert war als an der Unbestimmtheit der Raumstruktur. In einer leider nicht datierten Anmerkung aus dem Nachlass schreibt Hausdorff interessanterweise, dass er diesen Gedanken „auch bei Andern (Poincaré) gefunden" (NL FH Kapsel 49; Fasz. 1079; Bl. 4) habe, der, wie man

[53] So Helmholtz: „Man denke an das Abbild der Welt in einem Convexspiegel. […] Das Bild eines Mannes, der mit einem Maassstab eine von dem Spiegel sich entfernende gerade Linie abmisst, würde immer mehr zusammenschrumpfen, je mehr das Original sich entfernt, aber mit seinem ebenfalls zusammenschrumpfenden Maassstab würde der Mann im Bilde genau dieselbe Zahl von Centimetern herauszählen, wie der Mann in der Wirklichkeit; überhaupt würden alle geometrischen Messungen, von Linien oder Winkeln mit den gesetzmässig veränderlichen Spiegelbildern der wirklichen Instrumente ausgeführt, genau dieselben Resultate ergeben wie die in der Aussenwelt" (Helmholtz 1903, 43).

weiß, eine ganze Reihe von ähnlichen Gedankenexperimenten vorschlug.[54] In demselben Fragment wird auch „Calinon's Versuch" erwähnt (NL FH Kapsel 49; Fasz. 1079; Bl. 4), die geometrische Unbestimmtheit des Universums nachzuweisen (vgl. Calinon 1893), obwohl auch in diesem Fall nicht klar ist, wann Hausdorff Calinons geometrisch-philosophische Überlegungen gelesen hat.

Sehr originell am *Chaos in kosmischer Auslese* ist, dass Hausdorff die damals neue Mengenlehre Georg Cantors[55] anwandte (vgl. besonders CK 82, 31ff., 142). Das erscheint zunächst überraschend, weil sich damals nur wenige Mathematiker mit diesem Gebiet beschäftigten und noch weniger es auf philosophisch-erkenntnistheoretische Fragestellungen bezogen. Es waren aber insbesondere jene Fragen, die das Raumproblem betrafen, die Hausdorffs Interesse an jener Mengenlehre weckten, die er später als „das Fundament der gesamten Mathematik" (Hausdorff 2002, 1) betrachtete (vgl. Purkert 2002, 3ff.).[56]

Von diesem Standpunkt aus wird der Raum nicht mehr als ein Ganzes mit seinen Teilen angesehen, sondern es tritt die Tendenz zutage, ihn als eine Menge mit ihren Elementen zu betrachten.[57] Insbesondere wenn der empirische sowie der absolute Raum durch eine Menge dargestellt werden, kann man behaupten, dass zwischen ihnen das besteht, „was man neuerdings eine Transformation oder Abbildung des einen Raumes auf den anderen nennt" (CK 82), die die räumlichen Verhältnisse der charakterisierenden Strukturen unverändert lässt. Dass der Unterschied zwischen empirischem und absolutem Raum „nicht in unser Bewußtsein fallen würde" (RP 17) bedeutet jetzt also, dass eine solche strukturerhaltende Abbildung aufeinander überführt werden kann:

> Zwei Räume, die einander punktweise zugeordnet sind, derart dass ihr gesamter physischer Inhalt an dieser Correspondenz der Punkte betheiligt ist, erzeugen dasselbe Bewusstseinsbild. […] Jeder Raum [ist] Repräsentant einer ganzen Klasse von Räumen, zwischen denen keine Unterscheidung, auch also keine Entscheidung möglich ist. (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 65)

[54] Vgl. unter anderem diese Passage: „Il est clair que si tous les objets qui nous entourent et notre corps lui-même, ainsi que nos instruments de mesure étaient transportés dans une autre région de l'espace, sans que leurs distances mutuelles varient, nous ne nous en apercevrions pas, et c'est en effet ce qui arrive, puisque nous sommes entraînés sans nous en douter par le mouvement de la Terre. Si les objets étaient tous agrandis dans une même proportion, et qu'il en fût de même de nos instruments de mesure, nous ne nous en apercevrions pas davantage" (Poincaré 1913, 37).

[55] Vgl. dazu Scholz (1996). In Cantor (1874) entdeckte Georg Cantor die Überzahlbarkeit des Kontinuums. Die Arbeit kann als die wissenschaftliche Geburtsstunde der Mengenlehre betrachtet werden. In Cantor (1878) machte er das Konzept der Mächtigkeit einer unendlichen Menge deutlicher, indem er die Äquivalenz eines eindimensionalen mit einem mehrdimensionalen Kontinuum bewies (s.u. Anm. 43). Zwischen 1879 und 1884 in den „Mathematischen Annalen" erschienen sechs Arbeiten (Cantor 1879/1884) und Cantor (1883), die zusammen mit Cantor (1895/1897) Cantors Hauptwerk bilden.

[56] Erst im Sommersemester 1901 hielt Hausdorff eine Vorlesung über Mengenlehre in Leipzig, die zusammen mit jener von Ernst Zermelo im Wintersemester 1900/1901 in Göttingen, eine der ersten Vorlesungen überhaupt über das Thema war. Nachdem in den Sommersemestern 1910 und 1912 wieder Vorlesungen über Mengenlehre hielt, begann er die Arbeit an seinem 1914 erscheinenden Buch „Grundzüge der Mengenlehre" (Hausdorff 2002), „dem Schöpfer der Mengenlehre Herrn Georg Cantor in dankbarer Verehrung / gewidmet". In der zweiten Hälfte des Buches, in den Kapitel über die „Punktmengen", entwickelt Hausdorff die Begriffe von topologischen und metrischen Räumen, die heute zu Grundbegriffen geworden sind, in denen übrigens auch die Spur seiner erkenntnistheoretischen Reflexionen über das Raumproblem zu finden ist (vgl. Purkert 2002).

[57] Für diese Gegenüberstellung vgl. z.B. Torretti (1974, 43f.) und Nerlich (1994, 185).

Das Problem, von dem man hier ausgegangen ist, das Problem der Verschiedenheit zwischen „begrifflich identischen" Elementen, wird einerseits damit wiederaufgenommen und zur selben Zeit in einem neuen logischen Zusammenhang aufgehoben: Die *Wesensidentität* der traditionellen Begriffsbildung wird nämlich zu einer bloßen *mengentheoretisch-strukturell* gefassten Äquivalenz. Jeder Bezug auf einen begrifflich nicht zu fassenden Unterschied zwischen Urbild und Abbild, die, wie eben gezeigt wurde, die traditionelle philosophische Debatte beschäftigte, wird dadurch hinfällig, indem die alten diskursiven Begriffe als Aggregate von Merkmalen durch eine bloße „Abbildung, Zuordnung, Correspondenz" zwischen Mengen ersetzt werden:

> Abbildung im Sinne von Zuordnung, Correlation. Der gewöhnliche Sprachgebrauch schreibt dem „Bilde" eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Original zu; in diesem Sinne sagt man, dass die Bewusstseinsvorgänge Zeichen, nicht Bilder der Aussenwelt oder die Worte Zeichen, nicht Bilder der Begriffe seien. Geographische Karten führen schon zu freierer Auffassung des Begriffs Abbildung. (NL FH Kapsel 49; Fasz. 1079; Bl. 8)

Wenn man das Verhältnis zwischen absolutem und empirischem Raum als eine „Abbildung" im mengentheoretischen Sinn interpretiert, wird aber deutlich, dass es keinen Sinn macht, „von dieser Abbildung Congruenz oder Ähnlichkeit oder derlei zu verlangen" (Kapsel 49: Fasz. 1077, Bl. 4). Wie eben gezeigt, ist es unmöglich, das System derjenigen Linien, welche durch irgendeine Raumdeformation aus den Geraden entstehen, vom System der Geraden irgendwie geometrisch zu unterscheiden, solange sie durch irgendwelche wenigstens eindeutige und stetige Abbildung zugeordnet werden: „ob eine empirisch realisirte gerade Linie im leeren Raume geradlinig ist oder nicht, kann uns so gleichgültig sein wie es für uns unerfahrbar ist." (Kapsel 49: Fasz. 1077, Bl. 4)

4.3 Phänomen und Ding an sich

Von David Hilberts „Göttinger Festschrift" (RP 3; gemeint ist Hilbert 1899) stark beeindruckt (wie wir aus einem Brief an Hilbert vom 12. Oktober 1900 wissen)[58], betrachtet Hausdorff in den folgenden Jahren (in seiner Leipziger Antrittsvorlesung sowie in vielen Fragmenten des Nachlasses)[59] die Geometrie als ein rein formales System, das sich gegenüber der anschaulichen Natur ihrer Objekte ganz indifferent verhält. Sie wird damit zu einer autonomen Wissenschaft, deren Gewissheit „die Gewissheit der formalen Logik" (Kapsel 49: Fasz. 1067, Bl. 2) ist. „[I]n der ganzen philosophischen Discussion seit Kant" ist sie dagegen „stets als heteronom behandelt worden, als abhängig von einer fremden Instanz, die wir, nähere Bestimmung vorbehalten, als Anschauung bezeichnen können" (Kapsel 49: Fasz. 1067, Bl. 6–7):

> ‚Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit' (Georg Cantor). Diese Freiheit nun, die anzutasten die Philosophie immerhin nur selten gewagt hat, solange es sich ums blosse ‚Denken' handelt, scheint ihr aber ungemein ärgerlich zu werden, wenn sie sich auch in den secundären Functionen der ‚Anschauung' und der ‚Namengebung' äussern will. (Kapsel 48: Fasz. 994, Bl. 9)

58 Hilbert-Nachlass, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Cod. Ms. D. Hilbert, 136.

59 Vgl. vor allem das Fragment „Der Formalismus" in Kapsel 49: Fasz. 1067, Bl. 1ff.

Die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie wird damit definitiv durchtrennt (Freudenthal 1957, 111). Das mathematische Raumproblem wird vom empirischen abgesondert und die Frage, inwiefern dieses den absoluten oder intelligiblen Raum getreu wiedergibt, wird für unsinnig erklärt (vgl. RP 1f.). Denn die Geometrie kann ihr Sachgebiet nur bis zu einer strukturerhaltenden Abbildung festlegen: „Also: Geometrie gilt nicht von Einem bestimmten Raum (dem wirklichen), sondern von all seinen eindeutigen Bildern" (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 4 [7]).

Um eine Idee davon zu geben, entwickelt Hausdorff das Gleichnis einer Landkarte, aus welcher man die Gestalt des Originals nicht erschließen kann, wenn man das Projektionsverfahren nicht kennt. Von einer geographischen Karte verlangt man, wie Hausdorff bemerkt, selbstverständlich keine Kongruenz mit dem Original, denn dann müsste die Karte genau so groß sein wie die Gegend, die sie abbildet; sie muss aber auch keine bloße Ähnlichkeit haben, denn die Erdkugel könnte nur auf einem Globus, nicht auf einem ebenen Blatt Papier ähnlich abgebildet werden. Ohne eine gewisse „Verzerrung" ist es also unmöglich, eine Karte der Erde zu zeichnen.

Diese Verzerrung ist selbstverständlich keine bloße Verschiedenheit. Sie bedeutet zunächst „Eindeutigkeit" (jedem Ort auf der Erde soll ein Kartenpunkt, jedem Kartenpunkt ein Erdort korrespondieren) und dann „Stetigkeit". Eine stetige Abbildung kann also jede Figur beliebig verzerren, nur dürfen zusammenhängende Teile nicht auseinandergerissen und getrennte Teile nicht zusammengeheftet werden. Die Karte mag also im Allgemeinen jede beliebige Gestalt haben, sie mag Meridiane und Parallelkreise wieder durch Kreise oder Ellipsen oder Ovale höherer Gattung darstellen, sie mag Europa als Eimer und das gigantische Asien als Henkel daran abbilden, mag aus dem italienischen Stiefel einen Polypen mit Fangarmen machen usw. Mit anderen Worten: Die Korrespondenz, die Zuordnung zwischen Karte und Original ist beliebig (vgl. RP 14). Wichtig ist nur „ein hinreichend feinmaschiges Gradnetz; die geographische Länge und Breite der Orte […] [muss] aus der Karte ablesbar sein" (RP 14).

> Wenn diese Auffassung richtig ist, so muß man das Urbild einer beliebigen Transformation unterwerfen können, ohne daß das Abbild sich verändert: gerade so wie man einer Karte nicht ansehen kann, ob sie nach dem Original oder nach einer anderen Karte gezeichnet ist. (RP 15)

Daraus folgt, dass „wir aus der Karte allein die Gestalt des Originals nicht erschließen können; wir müssen auch noch das Abbildungsverfahren kennen, es muß, wie bei unseren Weltkarten, Maßstab und Projektion in einer Ecke vermerkt sein" (RP 15). Für Hausdorff ist unser empirischer Raum, der Raum der Naturwissenschaft, vergleichbar mit einer Karte, ein Abbild des absoluten Raumes; „aber es fehlt uns der Eckenvermerk, wir kennen das Projektionsverfahren nicht und kennen folglich auch das Urbild nicht" (RP 15). Zwischen beiden Räumen besteht eine unbekannte, willkürliche Beziehung oder Korrespondenz, eine völlig beliebige Punkttransformation. Aber der Orientierungswert des empirischen Raumes leidet darunter nicht; „wir finden uns auf unserer Karte zurecht und verständigen uns mit anderen Kartenbesitzern" (RP 15). Die Objektivität besteht nur in dieser Verständigung zwischen verschiedenen Beobachtern.

Das Gleichnis der Landkarte zeigt also nochmals, dass jeder Anspruch, von der wahren Geometrie des absoluten Raums zu reden dadurch hinfällig wird, dass jede stetige und eindeutige Raumtransformation „nicht in unser Bewußtsein fallen würde" (RP 17). Der empirische Raum ist also „keine getreue Kopie des absoluten, sondern nur sein Abbild nach einem beliebigen, unbestimmbaren Projektionsverfahren" (RP 17). Die „früher erwähnten Cantorschen Ideen" zeigen aber, dass wir „sogar die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Zuordnung zwischen beiden Räumen opfern können, und dann wissen wir nicht einmal, ob der absolute Raum dreidimensional ist“ (RP 17), weil „etwa der dreidimensionale Raum auf eine Ebene des leeren Raumes“ abgebildet werden kann (Kapsel 49: Fasz. 1079, Bl. 17; vgl. auch Kapsel 49: Fasz. 1080, Bl. 6v).[60]

In diesem Zusammenhang ist interessant, dass Hausdorff versucht, eine Kantische „Moral“ daraus zu ziehen: Die behauptete Unbestimmbarkeit des absoluten Raumes wäre etwa „identisch mit der Kantischen Lehre, daß die Beschaffenheit der Dinge an sich, also auch die des Raumes an sich, für unser Bewußtsein transzendent und unerkennbar sei“ (RP 3; vgl. auch NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 63):

> Entscheiden wir uns also beim mathematischen Raum für eine bestimmte Hypothese, etwa die gewöhnliche euklidische Geometrie, so lautet jetzt die Fragestellung: welche wirkliche Beschaffenheit der Dinge ist anzunehmen, damit wir in einem euklidischen Raume zu leben glauben? Nicht nur der Sinn der Frage, sondern zugleich die Antwort ist für einen Kantianer unzweifelhaft; wir wissen nichts von den Dingen an sich, die den Erscheinungen unserer Bewußtseinswelt entsprechen, folglich auch nichts vom absoluten Raume, der unser empirisches Raumbild erzeugt. Ich halte Kants Behauptung für richtig, seinen Beweis aber für ungültig. (RP 14)

Nach Hausdorff ist also „die idealistische These für den Raum insoweit bewiesen, als wir eben von der ‚wirklichen‘ Gestaltung des erfüllten Raumes nichts wissen“ (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 64). Wir wissen nicht, ob wir einen Raum R bewohnen oder den transformierten Raum R', „ob es der Raum vor oder hinter dem Convexspiegel ist“ (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 64), ob er das Urbild oder das Abbild ist: „Also: Geometrie gilt nicht von Einem bestimmten Raum (dem wirklichen), sondern von all seinen eindeutigen Bildern“ (Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 4).

5 Konklusion

Diese kurze Skizze hat selbstverständlich viele weitere höchst interessante Aspekte der Hausdorffschen Interpretation der Geometrie außer Acht gelassen.[61] Nichtdestotrotzt ist es uns hoffentlich gelungen, zumindest einen Eindruck davon zu vermitteln, wie bedeutend Hausdorffs erkenntnistheoretische Überlegungen für die Vermittlung zwischen der traditionellen philosophischen Reflexion über die Geometrie und der philosophischen Debatte des 19. Jahrhunderts sein können—jener Debatte, die so wichtig für die Entstehung der

[60] Schon 1874 hatte Cantor sich gefragt: „Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?“ (Cantor und Dedekind 1937, 20). In Cantor (1878) bewies Cantor die Gleichmächtigkeit von Kontinua verschiedener Dimension: „Eine nach n Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit lässt sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen“ (Cantor 1878, 122). Richard Dedekind wies auf die Unstetigkeit der Cantorschen Bijektion hin. Hausdorff wurde von diesem Resultat gezwungen, seine „Bemerkungen über Nietzsches ewige Wiederkunft zu revidiren“ (Kapsel 49: Fasz. 1076, Bl. 52; mehr dazu Hausdorff 2004, 850f., Kommentar 881, 833–882, 856). Die Invarianz der Dimensionenzahl, d.h. die „Unmöglichkeit, zwischen einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit und einer $(m + h)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(h > 0)$ eine eindeutige und stetige Beziehung herzustellen“ (Brouwer 1911, 161), wurde erst 1911 von Luitzen E. J. Brouwer bewiesen.

[61] Für eine Gesamtdarstellung muss man notwendigerweise auf den (bald erscheinenden) von Moritz Epple herausgegebenen Band VI von Hausdorffs Gesamtausgabe mit Einleitung und Kommentar warten: Hausdorff (2010). Vgl. auch Epple (2006).

modernen Wissenschaftstheorie war.[62] Einerseits betrachtet Hausdorff explizit jene einfachen geometrischen Beispiele, auf die auch Leibniz und Kant zurückgegriffen haben, als Sonderfälle von seinem „Übertragungsprincip, Transformationsprincip, Abbildungsprincip; Princip der Ersetzbarkeit" (NL FH Kapsel 24; Fasz. 71; Bl. 5). Andererseits erkannte er aber, dass auch Helmholtz und Poincaré ein solches „Übertragungsprinzip" verwendet haben, indem sie auf klassische Gedankenexperimente zurückgegriffen haben, die die Unbestimmtheit der geometrischen Struktur der Welt nachweisen können.

Hausdorffs Beiträge zur Philosophie der Geometrie scheinen, gerade weil sie bisher nahezu unbekannt in der wissenschaftsphilosophischen Debatte geblieben sind, einen „Gestaltwechsel" in der üblichen Wahrnehmung der Geschichte der Philosophie der Geometrie zu ermöglichen (um sich Thomas Kuhns bekannter Metapher zu bedienen). Aufgrund der Verstrickung der historischen Verhältnisse scheint es möglich, dort wo man früher nur Gegensätze gesehen hatte, die Evolution eines einheitlichen Problems zu erblicken: die Unmöglichkeit, Urbild und Abbild „begrifflich zu unterscheiden" (Weyl 1990, 41), obwohl sie anschaulich verschieden erscheinen. Es ist dieses von Leibniz formuliertes Problem, das auch Kants Philosophie der Geometrie beschäftigte; und es ist dieses Problem, das, wie es scheint, in der Philosophie der Geometrie im 19. Jahrhundert verallgemeinert und durch viel adäquatere Begriffsmittel präzisiert wurde.

Dieses Resultat ist meines Erachtens besonders relevant, wenn man daran denkt, dass Hausdorffs „Abbildungsprinzip"—wenn auch unter anderem Namen—für die wissenschaftsphilosophische Debatte um 1900 eine bedeutsame Rolle spielte. Es war ein ganz ähnliches begriffliches Instrumentarium, um das nachzuweisen, was Moritz Schlick im dritten Kapitel seines *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik* „geometrische Relativität des Raumes" (Schlick 2006, Kap. III) genannt hat. Dabei geht es erneut um die Behauptung, „daß es überhaupt keine beobachtbare, physikalisch reale Änderung bedeutet, wenn wir uns die ganze Welt in völlig beliebiger Weise deformiert denken, falls nur die Koordinaten eines jeden physischen Punktes nach der Deformation stetige, eindeutige, im übrigen aber ganz willkürliche Funktionen seiner Koordinaten vor der Deformation sind" (Schlick 2006, 232).

Die Ähnlichkeit dieser Argumente mit jenen Hausdorffs braucht nicht weiter erläutert zu werden. Schlick selbst verweist im Übrigen in der vierten Auflage seines Werkes diesbezüglich explizit nicht nur auf Helmholtz und Poincaré, sondern auch auf „das höchst scharfsinnige und faszinierende Buch […] ‚Das Chaos in kosmischer Auslese'", und er erkennt, dass „[d]as fünfte Kapitel dieses Werkes" die Grundgedanken seiner eigenen Auffassung bereits vorweggenommen hatte (Schlick 2006, 199, Anm. 112).[63] Das Erkennen von Hausdorffs Rolle ist bedeutsam, wenn man bedenkt, dass in Schlicks Standpunkt die logische empiristische Auffassung der „Relativität der Geometrie" im Kern bereits enthalten ist. Obwohl die logischen Empiristen ihre eigene Philosophie der Geometrie als „die stärkste Widerlegung des Kantschen Raumbegriffs" (Reichenbach 1955, 197) bezeichneten, kann vermutet werden, dass Kants Geometrieauffassung dieser Tradition viel weniger fremd ist, als üblicherweise behauptet.

[62] Vgl. zum Beispiel Friedman (1999, Kap. 8 und 9).

[63] Vgl. auch Felix Hausdorff an Moritz Schlick, 23. Februar 1919 und 17. Juli 1920 (beide Briefe werden im Reichsarchiv Noord Holland in Harlem aufbewahrt). Die Antwort Schlicks ist nicht erhalten (vgl. Stegmaier 2004, 77–78). Hausdorff wird auch in der von Schlick herausgegebenen Sammlung von Helmholtz' Schriften: Helmholtz (1921, 33, Anm. 43) erwähnt. Hausdorff erwähnt Schlick, jedoch als „O. Schlick", in seiner kurzen Diskussion der Relativitätstheorie in Kapsel 44: Fasz. 796.

6 Abkürzungen

AA	Immanuel Kant, *Kant's gesammelte Schriften*, hrsg. von Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften und Akademie der Wissenschaften in Göttingen (Berlin: Reimer, 1900)
CK	Paul Mongré (Felix Hausdorff), *Das Chaos in kosmischer Auslese. Ein erkenntnisskritischer Versuch.* (Leipzig: Naumann, 1898), Neudruck in Felix Hausdorff, *Gesammelte Werke: Philosophisches Werk*, hrsg. von Werner Stegmaier (Berlin: Springer, 2004), Bd. VII, 587–809. Zitiert wird nach der auch in der neuen Edition beibehaltenen Paginierung der Originalausgabe
GM	Gottfried Wilhelm Leibniz, *Leibnizens mathematische Schriften*, hrsg. von Carl Immanuel Gerhardt (Halle: Schmidt, 1850)
GP	Gottfried Wilhelm Leibniz, *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, hrsg. von Carl Immanuel Gerhardt (Berlin: Weidmann, 1875)
LA	Gottfried Wilhelm Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Akademie der Wissenschaften der DDR (Darmstadt: O. Reichl, 1923)
NL FH	Nachlass Felix Hausdorff. Der Nachlass befindet sich heute in der Universitäts- und Landesbibliothek Bonn. Er besteht aus 25.978 Blättern, die in 63 Kapseln untergebracht sind. Findbuch unter: http://www.aic.uni-wuppertal.de/fb7/hausdorff/findbuch.asp
RP	Felix Hausdorff. "Das Raumproblem." *Annalen der Naturphilosophie* 3 (1903), 1–23

Literatur

Angelelli, I. (1967). On identity and interchangeability in Leibnitz and Frege. *Notre Dame Journal of Formal Logic, 8*(1–2), 94–100.

Apelt, E. F. (1910). *Metaphysik*. Halle: Hendel.

Bendavid, L. (1968). *Vorlesungen über die Critik der reinen Vernunft*. Bruxelles: Culture et Civilisation.

Beth, E. W. (1956–1957). Über Lockes 'allgemeines Dreieck'. *Kant-Studien 48*, 361–380.

Borel, É. (1931). *Zeit und Raum. Von Euklid bis Einstein*. Stuttgard: Franckh'sche Verlagshandlung.

Brouwer, L. E. J. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Mathematische Annalen, 70*(2), 161–165.

Calinon, A. (1893). Étude sur l'indétermination géométrique de l'univers. *Revue philosophique de la France et de l'étranger, 36*, 595–607.

Cantor, G. (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1874*(77), 258–262.

Cantor, G. (1879/1884). Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. In E. von Zermelo (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (pp. 139–244). Hildesheim: Olms.

Cantor, G. (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. In E. von Zermelo (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (pp. 165–208). Hildesheim: Olms.

Cantor, G. (1895/1897). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In E. von Zermelo (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (pp. 282–351). Hildesheim: Olms.

Cantor, G., & Dedekind, R. (1937). In E. von Noether & J. Cavaillés (Hrsg.), *Cantor-Dedekind Briefwechsel*. Paris: Hermann.

Carnap, R. (1974). *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft*. München: Nymphenburger.

Cassirer, E. (1998). Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. In M. von Simon (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Werke* (Bd. 1). Hamburg: Meiner.

Cassirer, E. (2000). Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit: 4. Von Hegels Tod bis zur Gegenwart. In T. von Berben & D. Vogel (Hrsg.), *Gesammelte Werke* (Bd. 5). Hamburg: Meiner.

Cohen, H. (1987). Kants Theorie der Erfahrung (1885; 1918) In G. von Edel (Hrsg.), *Werke* (Bd. I,1). Hildesheim: Olms.

Couturat, L. (1961). *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*. Hildesheim: Olms. Original edition, Alcan, Paris 1901.

de Laplace, P. S. (1797). *Darstellung des Weltsystems*. Frankfurt am Mayn: Varrentrapp und Wenner.

De Risi, V. (2007). *Geometry and monadology: Leibniz's analysis situs and philosophy of space*. Basel, Boston: Birkhäuser.

Delboeuf, J. (1893). *Megamicros ou les effets sensibles d'une reduction proportionelle des dimensions de l'univers*. Paris: Alcan.

DiSalle, R. (2006). *Understanding space-time: The philosophical development of physics from Newton to Einstein*. Cambridge, UK, New York: Cambridge University Press.

Du Prel, C. (1880). *Die Planetenbewohner und die Nebularhypothese: neue Studien zur Entwicklungsgeschichte des Weltalls*. Leipzig: Günther.

Earman, J. (1989). *World enough and space-time: Absolute versus relational theories of space and time*. Cambridge, MA: MIT Press.

Epple, M. (1998). *Die Entstehung der Knotentheorie Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*. Braunschweig: Vieweg.

Epple, M. (2006). Felix Hausdorff's Considered Empiricism. In J. Ferreirós & J. Gray (Hrsg.), *The architecture of modern mathematics: Essays in history and philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Epple, M. (2007). An unusual career between cultural and mathematical modernism: Felix Hausdorff, 1868–1942. In U. Charpa & U. Deichmann (Hrsg.), *Jews and sciences in German contexts: Case studies from the 19th and 20th centuries* (pp. 77–100). Tübingen: Mohr Siebeck.

Frege, G. (1967). Über das Trägheitgesetz. In I. Angelelli (Hrsg.), *Kleine Schriften* (pp. 99–102). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Frege, G. (1977). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Hildesheim: Olms.

Freudenthal, H. (1957). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 4*, 105–242.

Friedman, M. (1992). *Kant and the exact sciences*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Friedman, M. (1999). *Reconsidering logical positivism*. New York: Cambridge University Press.

Friedman, M. (2002). Geometry, construction, and intuition in Kant and his successors. In: G. Sher & R. Tieszen (Hrsg.), *Between logic and intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gauss, C. F. (1973). In von K. Ges. d. Wiss (Hrsg.), *Werke* (zu Göttingen 12 Bd). Hildesheim, New York: Olms.

Hausdorff, F. (2002). Grundzüge der Mengenlehre (1914). In E. von Brieskorn, S. D. Chatterji & M. Epple (Hrsg.). Ders. *Gesammelte Werke. "Grundzüge der Mengenlehre*" (Bd. II). Berlin, Heidelberg: Springer.

Hausdorff, F. (2004). Das Chaos in kosmischer Auslese. Ein erkenntnisskritischer Versuch. In W. von Stegmaier (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Werke: Philosophisches Werk* (Bd. VII). Berlin: Springer.

Hausdorff, F. (2007). Mengenlehre (1927, 1935). In E. von Brieskorn, F. Hirzebruch, R. Remmert, W. Purkert & E. Scholz (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Werke: Deskriptive Mengenlehre und Topologie* (Bd. III). Berlin, Heidelberg: Springer.

Hausdorff, F. (2010). In M. von Epple (Hrsg.), *Gesammelte Werke: Geometrie, Raum und Zeit* (Bd. VI). Berlin, Heidelberg: Springer.

Hegel, G. W. F. (1969). In E. von Moldenhauer & K. M. Michel (Hrsg.), *Werke in zwanzig Bänden*. Frankfurt, Main: Suhrkamp.

Helmholtz, H. (1903). Über Ursprung und Bedeutung der Geometrischen Axiome. In: Ders. *Vorträge und Reden* (Bd. II, pp. 23–51). Braunschweig\Wiesbaden: Vieweg.

Herring, H. (1957/1958). Leibniz' principium identitatis indiscernibilium und die Leibniz-Kritik Kants. In *Kant Studien* (Vol. 69, pp. 389–400).

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. In D. Hilbert (Hrsg.), *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen* (pp. 1–92) Leipzig: B.G. Teubner.

Hintikka, J. (1969). On Kant's Notion of Intuition (Anschauung). In T. Penelhum & J. J. Macintosh (Hrsg.), *Logic, language-games and information: Kantian themes in the philosophy of logic* (pp. 38–53). Belmont, California: Wadsworth.

Hintikka, J. (1992). Kant on mathematical Method. In C. J. Posy (Hrsg.), *Kant's philosophy of mathematics*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer.

Hon, G., & Goldstein, B. R. (2008). *From summetria to symmetry: The making of a revolutionary scientific concept*. Dordrecht: Springer.

Howell, R. (1973). Intuition, synthesis, and individuation in the critique of pure reason. *Noûs, 7*(3), 207–232.

Ishiguro, H. (1972). *Leibniz's philosophy of logic and language*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Jammer, M. (1954). *Concepts of space the history of theories of space in physics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Krug, W. T. (1825). *System der theoretischen Philosophie*. Königsberg: A.W. Unzer.

Kulstad, M. A. (1957). Leibniz' conception of expression. *Studia Leibnitiana, 9*, 56–76.

Lechalas, G. (1896). *Étude sur l'espace et le temps*. Paris: Alcan.

Legendre, A.-M. (1833). *Éléments de géométrie*. Bruxelles: Société Belge de Librarie.

Leibniz, G. W. (1903). In L. von Couturat (Hrsg.), *Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat*. Alcan: Paris.

Leibniz, G. W. (1996). In A. von Buchenau & E. Cassirer (Hrsg.), *Philosophische Werke* (4 Bd). Leipzig: Meiner.

Lyre, H. (2005). Metaphysik im 'Handumdrehen': Kant und Earman, Parität und moderne Raumauffassung. *Philosophia naturalis, 42*(1), 49–76.

Mainzer, K. (1988). *Symmetrien der Natur ein Handbuch zur Natur- und Wissenschaftsphilosophie*. Berlin [u.a.]: de Gruyter.

Martin, G. (1951). *Immanuel Kant: Ontologie und Wissenschaftstheorie*. Köln: Kölner Universitätsverlag.

Mates, B. (1986). *The philosophy of Leibniz metaphysics and language*. New York, NY: Oxford University Press.

Maunu, A. (2008). Leibniz's theory of universal expression explicated. *Canadian Journal of Philosophy, 388*(2), 247–267.

Möbius, A. F. (1885). Der Barycentrische Calcul. Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. In R. von Baltzer, F. Klein & W. Scheibner (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Werke* (Bd. 1). Leipzig: Hirzel.

Mugnai, M. (1992). *Leibniz' theory of relations*. Stuttgart: F. Steiner.

Mühlhölzer, F. (1992). Das Phänomen der Inkongruenten Gegenstücke aus Kantischer und heutiger Sicht. *Kant Studien, 83*(4), 436–453.

Münzenmayer, H. P. (1979). Der Calculus Situs und die Grundlagen der Geometrie bei Leibniz. *Studia Leibnitiana, 11*, 274–300.

Nerlich, G. (1991). Hands, knees, and absolute space. In J. Van Cleve & R. E. Frederick (Hrsg.), *The Philosophy of right and left incongruent counterparts and the nature of space*. Dordrecht: Kluwer.

Nerlich, G. (1994). *What spacetime explains: Metaphysical essays on space and time*. Cambridge [u.a.]: Cambridge University Press.

Parsons, C. (1983). *Kant's philosophy of arithmetic mathematics in philosophy: Selected essays*. London: Cornell University Press.

Poincaré, H. (1905). *La valeur de la science*. Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1908). *Science et méthode*. Paris: Flammarion.

Poser, H. (1979). Die Bedeutung des Begriffs der Ähnlichkeit in der Metaphysik Christian Wolffs. *Studia Leibnitiana, 11*, 62–81.

Purkert, W. (2002). Grundzüge der Mengenlehre—Historische Einführung. In F. Hausdorff (Hrsg.), *Gesammelte Werke* (Bd. II, pp. 1–76). Berlin: Springer.

Purkert, W. (2008). The double life of Felix Hausdorff/Paul Mongré. *The Mathematical Intelligencer, 30*(4), 36–50.

Reichenbach, H. (1955). Die philosophische Bedeutung der Relativitätstheorie. In P. A. Schilpp (Hrsg.), *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher* (pp. 188–207). Stuttgart: Kohlhammer.

Reichenbach, H. (1958). In M. von Reichenbach (Hrsg.), *The philosophy of space and time*. New York: Dover Publ.

Reichenbach, H. (1977). Die Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. In A. von Kamlah & M. Reichenbach (Hrsg.), *Gesammelte Werke in 9 Bänden* (Bd. 2). Braunschweig\Wiesbaden: Vieweg.

Reidemeister, K. (1947). Über den Unterschied der Gegenden im Raum. *Zeitschrift für philosophische Forschung, 2*, 131–150.

Rusnock, P., & George, R. (1995). A last shot at Kant and incongruent counterparts. *Kant-Studien, 86*, 257–277.

Schlick, M. (2006). Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik (1921). In: M. von Neuber & O. Engler (Hrsg.), Ders. *Gesamtausgabe* (Bd. I,2). New York/Berlin: Springer.

Schneider, M. (1988). Funktion und Grundlegung der Mathesis Universalis. In *Studia Leibnitiana* Sonderheft 15(Leibniz Questions de Logique) (pp. 162–182).
Scholz, E. (1996). Logische Ordnungen im Chaos: Hausdorffs frühe Beiträge zur Mengenlehre. In E. Brieskorn (Hrsg.), *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes* (pp. 107–134). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
Schultz, J. (1790). *Anfangsgründe der reinen Mathesis*. Königsberg: Hartung.
Simon, J. (2003). *Kant: die fremde Vernunft und die Sprache der Philosophie*. Berlin, New York: De Gruyter.
Smit, H. (2000). Kant on Marks and the immediacy of intuition. *The Philosophical Review, 109*(2), 235–266.
Stegmaier, W. (2004). Einleitung des Herausgebers. In F. Hausdorff (Hrsg.), *Gesammelte Werke* (Bd. VII, pp. 1–76). Berlin: Springer.
Torretti, R. (1974). La geometría en el pensamiento de Kant. *Anales del Seminario de Metafísica, 9*, S9–S60.
von Schelling, F. W. J. (1856). In K. F. A. von Schelling (Hrsg.), *Friedrich Wilhelm Joseph von Schellings sämmtliche Werke*. Stuttgart, Augsburg: J.G. Cotta.
Vuillemin, J. (1987). *Physique et métaphysique kantiennes*. Paris: Presses Universitaires de France.
Wallwitz, G. G. (1991). Strukturelle Probleme in Leibniz Analysis Situs. *Studia Leibnitiana, 23*, 111–118.
Weyl, H. (1923). *Mathematische Analyse des Raumproblems : Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid*. Berlin: Springer.
Weyl, H. (1955). *Symmetrie*. Basel: Birkhäuser.
Weyl, H. (1990). *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. München: Oldenbourg.
Wolff, C. (1962a). Elementa Matheseos Universae: Elementa Arithmeticae Gesammelte. In J. von Ecole (Hrsg.), *Werke* (Bd. II.29). Hildesheim: Olms.
Wolff, C. (1962b). Mathematisches Lexikon (1716). In J. von Ecole (Hrsg.), Ders. *Gesammelte Werke* (Bd. I.11). Hildesheim: Olms.