ANDIAMO A DIMOSTRARE. FUTURI MATEMATICI ALLA PROVA

Massimo Borsero[1 2], Raffaele Casi[3], Chiara Pizzarelli[1 4], Saverio Tassoni
[1] Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino;
[2] I.C. Parri Vian, Torino; [3] I.C. Andezeno; [4] I.C. Torino II
raffaele.casi@istruzione.it

Abstract
Si propone un percorso di approfondimento sulle tecniche dimostrative in matematica, sperimentato con due gruppi misti di studenti di Licei piemontesi del secondo biennio e dell'ultimo anno, nato e sviluppato all'interno del Piano Lauree Scientifiche, sotto la guida di Ornella Robutti.
Il lavoro prende spunto dalle ricerche di Paola e Robutti (2001) e da una nostra analisi personale circa le pratiche didattiche in Scuole Secondarie, prevalentemente orientate all'apprendimento mnemonico di dimostrazioni perlopiù in ambito geometrico. L'obiettivo è di aiutare gli studenti a sviluppare le capacità di congetturare, argomentare e, infine, produrre catene logiche di giustificazioni di enunciati in maniera autonoma e creativa. Dopo una prima fase in cui si porta a riflettere sulla differenza tra dimostrare la verità o la falsità di un'affermazione, si propongono attività: sulla geometria sferica, come sistema assiomatico "inusuale" per gli studenti; sull'assiomatica, formalizzata nel quadro proposto da D. Hilbert; e infine sulla dimostrazione per assurdo e per induzione come tecniche dimostrative con cui familiarizzare per raggiungere una maggiore consapevolezza del lavoro del matematico.

Parole-chiave
Dimostrare; Congetturare; Assiomatica; Dimostrazione per induzione; Dimostrazione per assurdo.

QUADRO TEORICO DI RIFERIMENTO

Nello strutturare un percorso di approfondimento sulla dimostrazione matematica, rivolto a studenti delle Scuole Secondarie di II grado, ci siamo chiesti che importanza rivesta la dimostrazione nella normativa di riferimento.
In particolare, nelle Indicazioni Nazionali per i Licei si trova quanto segue:

> "Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica".

La dimostrazione è dunque utilizzata per affrontare concetti fondanti della storia della matematica, che mutano nel tempo. Allo stesso modo nei secoli cambiano le tecniche e i modi di intendere la dimostrazione: da argomentazioni *sintetiche*, che hanno lo scopo di convincere il lettore della verità delle ipotesi partendo dai dati e giungendo gradualmente alla risoluzione, si passa a quelle *analitiche*, che affrontano il problema come già risolto e ne cercano le condizioni risolutive, conducendo il lettore alla scoperta stessa della dimostrazione.
Riteniamo che il problema della dimostrazione nella didattica non abbia la stessa considerazione che ha attualmente nella pratica matematica. Ci sembra che alcuni docenti cerchino di risolvere le difficoltà dell'attività dimostrativa, richiedendo semplicemente ai propri studenti di ripetere mnemonicamente alcune dimostrazioni fatte in classe. Nella prassi didattica sono rari i momenti di produzione originale e di successiva validazione di enunciati; momenti che, d'altra parte, comportano numerose difficoltà.

Le criticità nelle attività dimostrative sono acuite dalla scelta – tradizionale nella prassi didattica e mai abbandonata – di introdurre le dimostrazioni quasi esclusivamente nel ricco ambiente della geometria euclidea.
Inoltre, la competenza dell'argomentare, che caratterizza fortemente il profilo culturale degli studenti nel secondo ciclo di istruzione, non necessariamente conduce a sviluppare le abilità che servono per condurre una dimostrazione matematica, la quale richiede l'utilizzo di precise regole formali. Ciò potrebbe spiegare i comportamenti di alcuni studenti, che, pur essendo in grado di argomentare, compiono errori nel costruire una dimostrazione.
Infine, ma non per ultimo, le abilità metacognitive messe in gioco nella produzione di una dimostrazione riguardano sia l'organizzazione di strutture complesse, sia il controllo sul lavoro svolto. Per sviluppare queste abilità sono fondamentali impegno, attenzione e condivisione degli obiettivi tra insegnante e studenti.
Proprio per questi motivi riteniamo che la pratica della dimostrazione matematica possa essere un utile strumento non solo per le competenze interne alla disciplina, ma anche per quegli obiettivi trasversali che contribuiscono a sviluppare negli studenti quel senso critico necessario a formare cittadini responsabili e consapevoli.

Metodologia
Si intende presentare un percorso di orientamento per gli studenti del secondo biennio e del quinto anno della Scuola Secondaria di II grado, verso i corsi di studio universitari ad alto contenuto matematico, attraverso l'approfondimento di temi di matematica avanzata.
Nello specifico l'obiettivo è di integrare il curricolo secondario con attività incentrate sul tema della dimostrazione matematica. L'intento è mostrare come lavora un matematico, ossia quali siano i procedimenti caratteristici del pensiero matematico, e far sviluppare la capacità di ragionare e dimostrare autonomamente, attraverso un processo di scoperta e non già come frutto di procedimenti e tecniche appresi mnemonicamente.
Le attività proposte ruotano intorno al nucleo trasversale di Argomentare, Congetturare e Dimostrare (Anichini, Arzarello, Ciarrapico & Robutti, 2004), mirano a far comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi e a far acquisire la padronanza delle tecniche dimostrative e del linguaggio logico-formale.
Il percorso che presentiamo è stato realizzato in 7 incontri, il primo dei quali tenuto all'interno delle classi degli studenti partecipanti, gli altri presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano' dell'Università di Torino, con i ragazzi delle diverse scuole riuniti in un unico gruppo.
Abbiamo progettato gli interventi didattici a partire dai traguardi di competenza definiti da INVALSI (2016), che sono stati successivamente da noi declinati in termini di obiettivi di conoscenza e abilità. Il percorso è stato suddiviso in quattro macro-temi:

- La geometria sferica come esempio fondamentale di modello assiomatico in geometria;
- L'assiomatica e il suo legame con i modelli matematici;
- La dimostrazione per assurdo e i principi di terzo escluso e non contraddizione;
- L'induzione matematica e gli assiomi di Peano.

Individuati i temi, abbiamo scelto di progettare dapprima la prova di valutazione finale, e poi procedere a rovescio nel definire le varie attività da proporre agli studenti. Ciò ha consentito di fornire agli studenti da un lato un'esperienza realistica dei modi e dei tempi di lavoro all'università, e dall'altro di progettare un percorso mirato al raggiungimento delle abilità e delle conoscenze, che fossero corrispondenti a quelle effettivamente richieste nell'eventuale proseguimento degli studi.
Infine, è bene sottolineare come abbiamo dedicato ampie parti di ciascun incontro ad attività laboratoriali di apprendimento cooperativo, guidate da schede di lavoro, da cui emergessero i processi cognitivi degli studenti, oltre che i prodotti del loro apprendimento.
Nel creare i gruppi di lavoro, costituiti da 3 ragazzi, si è optato per formare gruppi di apprendimento cooperativo eterogenei per provenienza, facendo collaborare studenti di diverse scuole e classi. I primi quattro incontri tenuti nel Dipartimento si sono svolti con cadenza settimanale: ogni lezione ha avuto un macro-tema centrale, che è stato affrontato proponendo agli studenti le attività descritte nei capitoli successivi.

Ogni studente è stato quindi chiamato a lavorare in gruppo durante gli incontri e autonomamente durante la settimana, provando a svolgere gli esercizi assegnati tramite la creazione di un apposito corso Moodle, ospitato sul sito "DI.FI.MA in rete".[10] Su questa piattaforma gli studenti hanno potuto trovare di volta in volta tutte le slide e i materiali utilizzati durante gli incontri e hanno inviato i loro compiti, in modo che nell'incontro successivo potessero essere discussi.
Gli ultimi due incontri sono stati dedicati allo svolgimento della verifica sommativa e alla sua discussione. Oltre all'attestato di partecipazione, è stato rilasciato un attestato di merito a chi ha conseguito un punteggio maggiore o uguale al 60%. Al termine della correzione è stato proposto un momento conclusivo di orientamento alle scelte universitarie.

IL PERCORSO DIDATTICO

Nella presente comunicazione abbiamo scelto di selezionare alcune attività, che riteniamo significative per la descrizione del lavoro svolto. L'intera descrizione del percorso e dell'analisi che ne è stata fatta è disponibile sul libro *Andiamo a dimostrare. Futuri matematici alla prova,* edito da Ledizioni e disponibile online.[11]
Il primo spunto offerto agli studenti circa il tema dell'assiomatica è stato fornito dall'immagine in **Figura1**, tratta dalla campagna pubblicitaria *Moms Demand Action for Gun Sense in America*, prodotta dall'agenzia Grey Group.

Figura 1. L'immagine fa riferimento a una legge statunitense che, al fine di proteggere i bambini, vieta di inserire oggetti non commestibili all'interno di prodotti alimentari.

La didascalia dell'immagine chiede di indovinare quale tra i due prodotti che i bambini stanno sorreggendo sia vietato negli Stati Uniti d'America. A partire dalla visione dell'immagine è scaturita una discussione, che ha messo a paragone il fatto che, come certi atteggiamenti sono vietati o consentiti

[10] https://difima.i-learn.unito.it/
[11] Link per scaricare il libro: http://www.ledizioni.it/prodotto/andiamo-a-dimostrare-futuri-matematici-alla-prova/

a seconda del sistema di leggi vigente in un determinato contesto, così certe proprietà matematiche sono verificate o no in un determinato sistema di assiomi. È stato dunque proposto agli studenti di lavorare sulla geometria sferica, come contesto di sperimentazione per un sistema assiomatico diverso da quello nel quale sono abituati a muoversi. Nello specifico abbiamo esplorato le nozioni di *punto*, *retta*, *segmento* e *angolo* sulla sfera, lasciando agli studenti il compito di definirle. La discussione che ha seguito questa fase ci ha permesso di sottolineare come una definizione non sia unica e vera di per sé, ma deve essere scelta opportunamente, in funzione del sistema assiomatico nel quale si intende lavorare. Questo lavoro preliminare sulle definizioni ci ha consentito di analizzare la verità o la falsità in geometria sferica di alcune proprietà note della geometria euclidea e di arrivare alla definizione del triangolo e del quadrato sulla superficie sferica.

La seconda parte del lavoro svolto riguarda l'ambito della dimostrazione per assurdo, per la quale abbiamo ritenuto di dedicare un ampio spazio alla trattazione dei fondamenti logici che sottendono a tale pratica dimostrativa. Dopo aver quindi discusso con gli studenti su come individuare ipotesi e tesi in un teorema, e su come negare correttamente una proposizione, si è scelto di sottolineare i principi logici di *non contraddizione* e di *terzo escluso*, attraverso una serie di attività proposte.
Tra queste, ne presentiamo in questa sede una che abbiamo scelto di avviare in maniera tradizionale: abbiamo dimostrato alla lavagna un noto teorema di geometria euclidea. Tuttavia, la dimostrazione proposta è stata viziata da più di un errore di forma. Agli studenti è stato chiesto di trovare eventuali passaggi errati e di correggerli (**Figura 2)**.

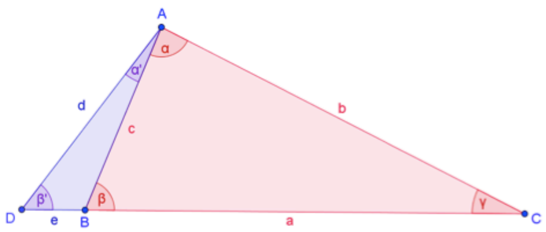
Leggi la seguente dimostrazione. L'enunciato è vero? La dimostrazione ti convince?

TEOREMA:

In ogni triangolo ad angolo maggiore si oppone il lato maggiore.

Consideriamo un triangolo ABC, che abbia l'angolo α maggiore degli angoli β e γ.
Dobbiamo dimostrare che, allora, il lato opposto BC è maggiore dei lati AC e AB.

Hp: $\alpha > \beta \wedge \alpha > \gamma$
Th: $BC > AC \wedge BC > AB$



DIMOSTRAZIONE:

Ragioniamo per assurdo, supponendo $AC > BC$.
Costruiamo il segmento DB come prolungamento di BC, in modo tale che $DC \cong AC$.
Dunque, per costruzione, il triangolo ADC è isoscele di base AD.
La somma degli angoli interni di ADC è pari a $\alpha + \alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, e analogamente la somma degli angoli interni di ABC è pari a $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Quindi $\beta = \alpha' + \beta'$ (in accordo con il teorema dell'angolo esterno), ma β e β' sono angoli corrispondenti tagliati dalla trasversale DC, quindi $\beta = \alpha' + \beta$, da cui $\alpha' = 0$, che è assurdo perché, per costruzione, D non coincide con B.

Figura 2. In questa immagine si riporta il teorema con relativa dimostrazione errata proposto agli studenti.

L'errore nella dimostrazione, peraltro individuato da tutti i gruppi, è consistito nell'assumere che β e β' fossero angoli corrispondenti. È stato fornito un teorema notoriamente vero, al fine di minare le certezze degli studenti e far comprendere loro che una proposizione vera può avere una dimostrazione sbagliata, ma soprattutto che una dimostrazione sbagliata non può bastare a confutare la tesi.
Il secondo errore nella dimostrazione è poi nella negazione della tesi. Negare la proposizione ($BC>AC \wedge BC<AB$) dà luogo alla seguente disgiunzione ($BC\leq AC \vee BC\geq AB$) e non alla negazione proposta nella

dimostrazione. Si faccia attenzione al fatto che quest'ultima disgiunzione è da declinarsi in 4 casi in cui cercare l'assurdo: *(BC<AC* ∨ *BC=AC* ∨ *BC=AB* ∨ *BC>AB)*.
Nei protocolli riportati in **Figura 3** si osservano due diverse vie percorse dai gruppi di studenti per dimostrare il più evidente degli errori presenti nella dimostrazione fornita, mentre il secondo errore non è stato individuato. Dalla discussione che è seguita è emerso come gli studenti, dopo aver trovato il primo errore, abbiano smesso di cercarne altri.

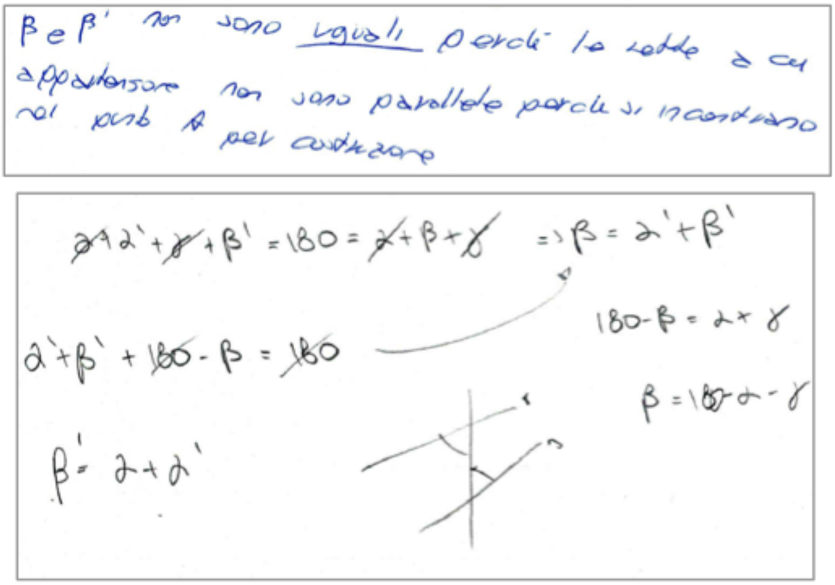


Figura 3. Si osservano in questi due protocolli diversi approcci per dimostrare che β e β' non sono congruenti: uno basato sul linguaggio naturale e l'altro sulla manipolazione formale.

Il terzo e ultimo tema affrontato riguarda la dimostrazione per induzione. In linea con gli obiettivi delle Indicazioni Nazionali, si è scelto di dedicare uno spazio introduttivo alla differenza tra *induzione matematica*, intesa come "invarianza delle leggi del pensiero" e *induzione fisica*, che riguarda invece l'"invarianza delle leggi dei fenomeni".
Mentre l'induzione fisica è un processo per cui si passa dalla constatazione di fatti particolari ripetuti a formulazioni generali, come quando con molti esperimenti verificati si congettura una legge fisica, l'induzione matematica è uno specifico procedimento dimostrativo, che si basa su assiomi e che produce teoremi. L'induzione fisica si basa su un assunto probabilistico, cioè il fatto che se n esperimenti ripetuti nelle stesse condizioni forniscono sempre lo stesso risultato, allora anche l'esperimento $n + 1$ lo produrrà (ovvero si va dal particolare al generale, in senso opposto alla deduzione); ragionamento usato per verificare la congettura di leggi fisiche. Invece, l'induzione matematica è un procedimento per dimostrare proposizioni e teoremi, cioè affermazioni sempre vere all'interno di un certo costrutto assiomatico, che si fonda sugli assiomi di Peano (e quindi non ha a che vedere con la probabilità, ma solo sulla scelta di assumere questi assiomi).
Per sviluppare correttamente questo argomento si è scelto dunque di descrivere gli assiomi di Peano, dapprima facendo uso del linguaggio verbale, e in seguito introducendo il corretto formalismo matematico.
Con gli studenti si è approfondita la necessità, al fine di validare la pratica dimostrativa per induzione, che siano verificati sia il *passo base*, ossia che una certa proposizione è vera per lo 0, sia il *passo induttivo*, cioè che, supposta vera la proposizione per il numero naturale k, essa sia verificata anche per il successore di k.
Riportiamo qui di seguito un *item* di verifica proposto agli studenti al termine del percorso. In questa domanda (**Figura 4**) si è scelto di presentare una proposizione falsa, in cui però è possibile verificare il passo induttivo.

Considera la seguente proposizione e la sua dimostrazione per induzione:

Sia $n \in \mathbb{N}$, allora $1^{-1} + n = \frac{1}{\frac{1}{n-1}} + 1$.

Dim.:

Supponiamo che la proposizione sia vera fino a n. Dobbiamo dimostrare che è vera per $n+1$, cioè: $1^{-1} + (n+1) = \frac{1}{\frac{1}{n}} + 1$. Sottraendo 1 ad ambo i membri otteniamo: $1^{-1} + n = \frac{1}{\frac{1}{n}}$. Per l'ipotesi induttiva: $\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{n}}$. Da cui $\frac{1+\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{n}}$.

In conclusione $\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{n}}$, cioè $n = n$ che è un'identità.

a. La dimostrazione è corretta?

b. La proposizione è vera?

Motiva le tue risposte.

[40 % corretto; 60 % parzialmente corretto; 0 % errato; 0 % non risponde]

"La dimostrazione non è corretta, perché manca il passo base.

La proposizione è falsa, come mostra il caso $n = 0$."

Figura 4. *In questa immagine è riportato il testo di un* item *di verifica, con le percentuali di risposte date e la correzione.*

Benché nessuno studente abbia fornito una risposta errata, sono state considerate solo parzialmente corrette le risposte date da alcuni studenti che evidenziavano la falsità della proposizione indicando che il passo base non era stato verificato nella dimostrazione fornita, come si vede in **Figura 5**.

→ non è verificato il passo base → la proposizione è errata

Figura 5 *Lo studente mostra di non aver compreso il rapporto tra verità di una proposizione e correttezza di una dimostrazione.*

CONCLUSIONI

Al termine del ciclo di due anni durante il quale è stato proposto il percorso didattico, ci riteniamo soddisfatti dei risultati ottenuti. Come si può notare nel grafico riportato in **Figura 6**, la percentuale di studenti che ha fornito risposte corrette e che ha ottenuto esito positivo nel test finale è buona, mentre il gradimento espresso tramite questionario anonimo al termine del percorso ha visto la quasi totalità degli studenti pienamente soddisfatti dell'esperienza.

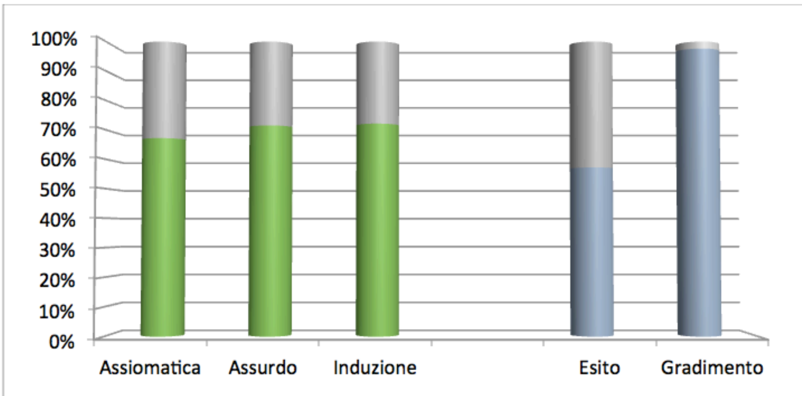


Figura 6. *In questa immagine si riporta il grafico che vede, nelle colonne di sinistra, la percentuale di risposte corrette suddivise per tema, mentre nelle colonne di destra l'esito finale positivo e il gradimento espresso dagli studenti.*

Nel prossimo periodo, trascorsi cinque anni dalla prima edizione di "*Andiamo a dimostrare. Futuri matematici alla prova.*" riteniamo interessante ricontattare i partecipanti per avere un riscontro sulle loro scelte universitarie e sull'andamento del loro percorso di studi.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare la Prof.ssa Ornella Robutti, che ha saputo curare con competenza la realizzazione del percorso didattico e la stesura del libro che ne è scaturito, fornendo preziosi consigli e puntuali correzioni sia nella fase di progettazione, sia nella fase di scrittura.

BIBLIOGRAFIA

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2004). Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario). Lucca: Matteoni stampatore.

Borsero M., Casi R., Pizzarelli C. and Tassoni S. (2019). *Andiamo a dimostrare. Futuri matematici alla prova.* A cura di Ornella Robutti. Milano: Ledizioni.

INVALSI. (2016). Il quadro di riferimento delle Prove di Matematica del Sistema Nazionale di Valutazione. Roma.

MIUR (2010). Decreto interministeriale MIUR-MEF 7 ottobre 2010 n. 211: *Indicazioni Nazionali per i Licei. Allegato B*. Roma.

Paola D. & Robutti O. (2001). La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria. In *Matematica e aspetti didattici, Quaderni del MPI, 45* (pp. 97-201). Lucca: MPI.