DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

Piano Lauree Scientifiche
In collaborazione con MIUR, con.Scienze, Confindustria

Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2015
in collaborazione con il Dipartimento di Matematica
dell'Università di Torino

Giorgio Audrito, Ubertino Battisti, Massimo Borsero,
Alberto Raffero, Saverio Tassoni, Luisa Testa

ESPLORAZIONE DEI SOLIDI E OLTRE: FARE GEOMETRIA CON GLI ZOMETOOL

A cura di:

Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

Giorgio Audrito, Ubertino Battisti, Massimo Borsero, Alberto Raffero, Saverio Tassoni, Luisa Testa

ESPLORAZIONE DEI SOLIDI E OLTRE: FARE GEOMETRIA CON GLI ZOMETOOL

A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2016

Revisione testi: Monica Mattei

ISBN 978-88-6705-411-4

Immagine in copertina: Bruno Gallizzi

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: www.ledizioni.it

INDICE

PRESENTAZIONE

Ornella Robutti

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Responsabile Piano Lauree Scientifiche Matematica per il Piemonte

1. Il Piano nazionale Lauree Scientifiche

Il "Progetto Lauree Scientifiche" (PLS) nasce nel 2004 dalla collaborazione del Ministero dell'Università e dell'Istruzione, della Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie e di Confindustria, con l'obiettivo iniziale di incrementare le iscrizioni ai corsi di laurea in Chimica, Fisica, Matematica e Scienze dei Materiali.

Nella sua prima attuazione (2005–2008) si è principalmente occupato sia di coinvolgere gli studenti della scuola secondaria di secondo grado in attività laboratoriali che permettessero di migliorare la loro percezione delle materie scientifiche, sia di promuovere la formazione e lo sviluppo professionale dei docenti, attraverso la collaborazione Scuola–Università, sia di favorire il contatto e la collaborazione tra Scuola, Università e Mondo del lavoro, grazie anche alla preziosa collaborazione con l'Unione Industriale.

A seguito del successo ottenuto, testimoniato dai dati in forte crescita degli immatricolati ai Corsi di Laurea scientifica in tutta Italia, nel 2009 il Ministero dell'Università e dell'Istruzione ha rilanciato il progetto trasformandolo in "Piano Nazionale Lauree Scientifiche". Come si evince dalle Linee guida (MIUR, 2010), il progetto ha mantenuto le finalità precedenti e, in particolare, si è concentrato tanto sull'orientamento degli studenti quanto sulla formazione dei docenti.

Il PLS propone attività in cui gli studenti hanno un ruolo attivo nel confronto diretto con temi, problematiche e metodologie proprie delle discipline scientifiche, tramite il loro coinvolgimento nei laboratori. Anche la formazione degli insegnanti viene vista come un percorso in cui i docenti sono protagonisti e per questo vengono coinvolti in esperienze che prendono spunto da problemi concreti e che, anche attraverso la formazione di comunità di pratica, promuovono l'arricchimento professionale, tramite formazione in presenza e sperimentazioni in classe.

Il polo piemontese partecipa al progetto PLS fin dai suoi esordi, prima sotto la guida del Professor Ferdinando Arzarello e, a partire dal 2012, della scrivente.

Il PLS ha avuto nella nostra regione un crescente consenso tra gli insegnanti, segno del desiderio di un rinnovamento che la scuola sta perseguendo in questi ultimi anni, e una ricaduta positiva sugli studenti testimoniata anche da un aumento delle immatricolazioni nei corsi di laurea scientifici.

Per l'anno 2014-2015 il PLS ha previsto per la formazione docenti 6 moduli legati a diversi nuclei concettuali e strutturati in altrettanti corsi organizzati con incontri in presenza, collaborazione a distanza attraverso la piattaforma Moodle DI.FI.MA. in rete (http://difima.i-learn.unito.it) e sperimentazione in classe, il tutto gestito dai docenti universitari e da insegnanti formatori, e 2 moduli per gli studenti: le gare matematiche (per classi intere) e un percorso di esplorazione della geometria solida (per studenti selezionati come particolarmente interessati alla matematica).

2. Questo volume

Questo volume nasce dal modulo “Esplorazione dei solidi e oltre” presente nell’offerta del Piano Lauree Scientifiche di Matematica negli anni 2013-14 e 2014-15 in Piemonte ed è il quinto libro che scaturisce dalle iniziative PLS.

Le attività didattiche presentate sono state tutte ideate e realizzate da un team di dottorandi e ricercatori del Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Torino (Giorgio Audrito, Massimo Borsero, Alberto Raffero, Luisa Testa) e da un assegnista di ricerca dell’Università degli Studi di Torino (Ubertino Battisti). Il laboratorio è poi stato proposto in alcuni licei scientifici piemontesi (“M. Curie” di Pinerolo, “C. Darwin” di Rivoli, “E. Majorana” e “C. Cattaneo” di Torino) tramite una serie di incontri nelle scuole stesse. Gli incontri sono stati documentati con filmati e fotografie e sono stati inoltre raccolti e analizzati gli elaborati degli studenti partecipanti.

Si tratta di una serie di attività rivolte agli studenti del secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado (particolarmente motivati e selezionati dalle scuole - in media circa 20 studenti per istituto) con l’obiettivo di avvicinarli, attraverso una didattica di tipo laboratoriale con l’utilizzo degli ZOMETOOL, all’esplorazione dei solidi geometrici.

Nel volume, oltre alle schede utilizzate per gli studenti, vengono presentate e commentate le soluzioni delle attività, corredate dalle osservazioni degli autori sulla sperimentazione, e vengono offerti interessanti spunti di approfondimento delle tematiche affrontate.

Un particolare ringraziamento va ai dirigenti scolastici degli istituti che hanno ospitato il laboratorio e ai docenti delle classi coinvolte, che hanno iscritto i loro migliori studenti al laboratorio PLS.

3. Gli ZOMETOOL e il Laboratorio di Matematica

Se da una parte gli ZOMETOOL si presentano come degli artefatti molto semplici, dall’altra sono degli strumenti con un enorme potenziale nella didattica della Matematica e della Geometria in particolare.

Essi si prestano facilmente a una didattica di tipo laboratoriale, dove il laboratorio non è da intendersi come un luogo fisico separato dalla classe, ma un ambiente di apprendimento-insegnamento in cui lo studente impara facendo, come accadeva nelle botteghe rinascimentali. Un ambiente che promuove il lavoro cooperativo, attraverso il coinvolgimento attivo di tutti gli studenti nelle varie fasi dell’attività.

Attraverso la manipolazione degli ZOMETOOL gli studenti possono costruire svariate figure geometriche ed esplorarne le caratteristiche; si viene quindi a creare quel processo di esplorazione-congettura-verifica che, pur non essendo ancora una dimostrazione rigorosa, veicola la costruzione attiva del sapere. Caratteristica tipica del laboratorio è infatti il coinvolgimento percettivo-motorio dello studente, nella consapevolezza che l’approccio attivo al sapere lo favorisca nella fase di appropriazione e costruzione di significati.

Nel laboratorio di matematica cambia anche il ruolo del docente: da detentore del sapere a quello di “mediatore semiotico” che aiuta e guida lo studente verso la costruzione di significati matematici.

INTRODUZIONE

Gli ZOMETOOL: uno strumento per la didattica costruttiva

G. Audrito, U. Battisti, M. Borsero, A. Raffero, S. Tassoni, L. Testa

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

1. Gli ZOMETOOL

Frutto di idee creative accompagnate da anni di lavoro, gli ZOMETOOL sono strumenti adatti a costruire figure bidimensionali e tridimensionali. Costituiti da bastoncini di plastica e da palline cave, che fungono da vertici delle figure, la loro particolarità risiede nella precisione di costruzione: *"If it works it works perfectly, if it doesn't work it doesn't work at all"* è il motto. I fori nelle palline-vertici sono infatti diversi e corrispondono a tipi particolari di bastoncini: in questo modo le figure si possono realizzare con molta più cura e il risultato è eccezionalmente preciso.

L'utilizzo degli ZOMETOOL non è limitato alla matematica e alla geometria. Possono essere utili ausili anche nella rappresentazione di molecole e strutture cristalline. Chimici del calibro di Linus Pauling e Dan Shechtman, entrambi premi Nobel, hanno utilizzato questo strumento nella loro ricerca. Anche la NASA ha iniziato a servirsi degli ZOMETOOL per ricerche sulla diffusione del virus dell'AIDS nello spazio e nell'ambito di un progetto per una stazione spaziale. In seguito alla pubblicazione di *An Exceptionally Simple Theory of Everything*, nel 2007, il fisico statunitense Garret Lisi ha più volte utilizzato gli ZOMETOOL per illustrare la complessa struttura a otto dimensioni sostenendo la sua teoria che combina la fisica delle particelle con la teoria della gravitazione di Einstein. Questi piccoli oggetti restano, a ogni modo, un giocattolo divertente e molto stimolante per i più piccoli, oltre che per i più grandi.

Gli ZOMETOOL possono infatti essere utilizzati a diversi livelli e sono adatti anche per giovanissimi studenti. I bambini della scuola primaria, per esempio, riescono già senza troppa fatica a realizzare da soli alcune figure semplici come quadrati e rettangoli; se guidati, possono costruire anche strutture più complesse.

Le palline, che fungono da vertici, sono di colori diversi ma sono tutte di forma uguale (figura 1). Per alcune costruzioni, per esempio poliedri inscritti, avere a disposizione colori diversi può essere utile. Per esempio, per far notare che un cubo può essere inscritto in un dodecaedro, si possono utilizzare palline dello stesso colore per i vertici del cubo e un colore diverso per gli altri vertici.

Figura 1

I bastoncini blu sono i più semplici da utilizzare e presentano estremità di forma rettangolare (figura 2). Vengono utilizzati per costruire quadrati, cubi, ...

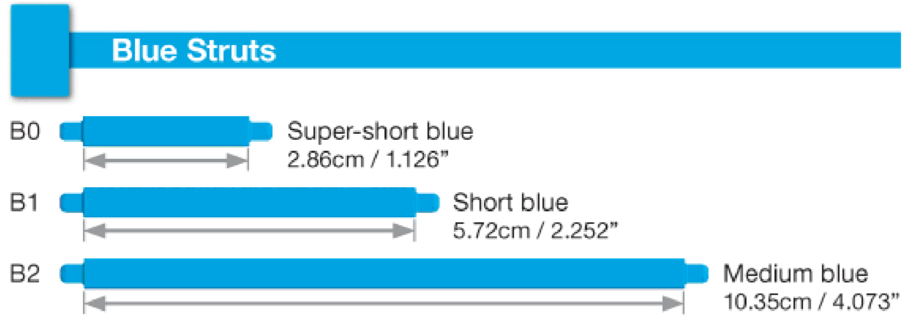


Figura 2

I bastoncini gialli hanno estremità triangolari e presentano una torsione (figura 3). Servono, per esempio, per costruire triangoli isosceli e sono utili come struttura per realizzare il dodecaedro.

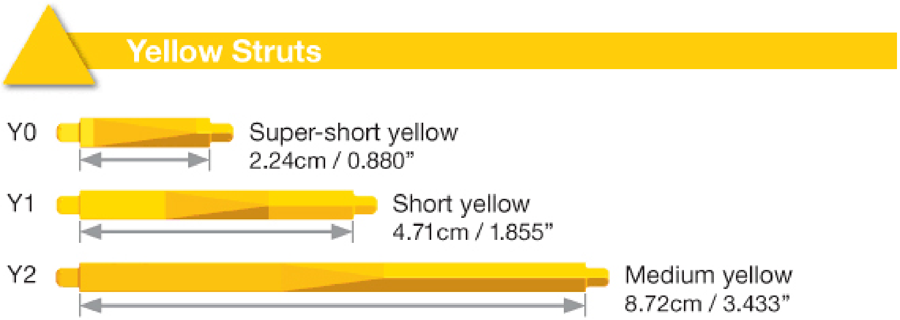


Figura 3

I bastoncini di colore rosso hanno estremità pentagonali e sono realizzati in quattro lunghezze diverse (figura 4). Pur rimanendo rettilinei, hanno la stessa torsione dei bastoncini gialli per agevolare l'ancoraggio al vertice. Servono per esempio per costruire alcuni tipi di prismi.

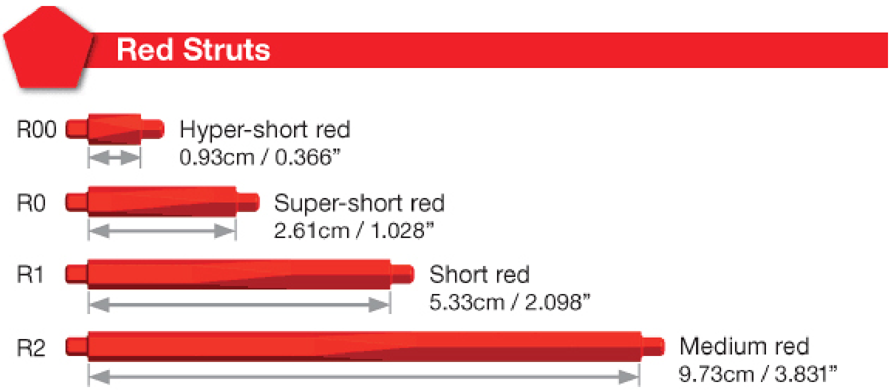


Figura 4

I bastoncini verdi (figura 5) sono stati introdotti in un secondo tempo. Hanno estremità pentagonali e, in prossimità delle estremità, presentano delle significative convessità e concavità. Per questo motivo il posizionamento di un bastoncino all'interno della pallina-vertice non è unico. Ci sono, infatti, cinque modi differenti per incastrare uno stesso bastoncino verde in un unico foro pentagonale. Servono, per esempio, per realizzare il tetraedro.

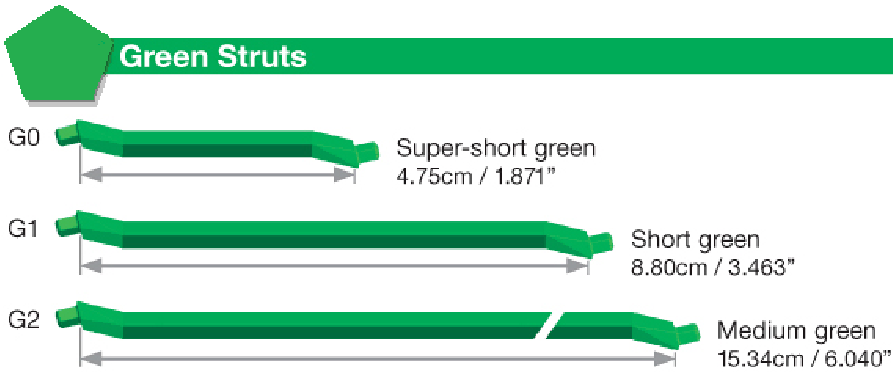


Figura 5

La scelta di utilizzare gli ZOMETOOL è stata dovuta non solo al fatto che permettono di visualizzare strutture tridimensionali ma anche perché si prestano in modo eccezionalmente naturale all'apprendimento cooperativo e all'esplorazione laboratoriale.

2. Modalità di lavoro

Nelle diverse scuole, il lavoro è stato organizzato dividendo i ragazzi in gruppi di tre o quattro studenti. L'attività si è svolta durante l'intera mattinata, rendendo partecipi anche i docenti responsabili delle classi. È stato molto interessante poter coinvolgere non solo professori di matematica ma anche di altre discipline, come chimica e disegno. Alcuni professori di chimica coinvolti sono stati infatti entusiasti di poter far *vedere* agli alunni rappresentazioni di molecole come il metano, il cloruro di sodio e anche, con un po' di lavoro, il fullerene. I professori di disegno, invece, hanno accolto di buon grado ausili capaci di migliorare la visualizzazione tridimensionale, necessaria nella realizzazione di disegni prospettici in assonometria e di proiezioni ortogonali.

Ciascun gruppo di studenti è stato dotato di una scheda di lavoro e di vari recipienti con i bastoncini e le palline ZOMETOOL. All'inizio di ogni incontro, prima di prendere confidenza con il materiale, abbiamo effettuato una presentazione di circa venti minuti per introdurre l'attività. Sono stati descritti gli ZOMETOOL ed è stato sottolineato quanto la visualizzazione di un problema geometrico nello spazio possa aiutare nella sua risoluzione.

Proviamo, per esempio, a trovare in quanti modi si possono intersecare un *quadrato* e una *circonferenza*. Questo rompicapo è agevolmente risolvibile se si hanno a disposizione gesso e lavagna, provando semplicemente a disegnare tutte le possibili configurazioni. La lavagna o il foglio sono spesso sufficienti per il mondo in due dimensioni, infatti, la gran parte dei problemi di geometria piana è modellizzabile attraverso carta e penna.

Il mondo tridimensionale è più complesso. Si pensi a quanti sono i modi possibili per intersecare un *cubo* e una *sfera*. Ecco che, non appena saliamo di dimensione, seppure affrontando un problema piuttosto semplice, la lavagna e il gesso faticano a ritrovare la stessa efficacia di prima. Risolvere questo secondo rebus matematico servendosi solo di carta e penna adesso non è più banale. Un adeguato supporto tridimensionale, come gli ZOMETOOL, agevola di molto la visualizzazione e quindi la risoluzione del problema. È questa una delle chiavi di lettura della didattica dell'attività: *costruire per visualizzare* e *visualizzare per comprendere e verificare*.

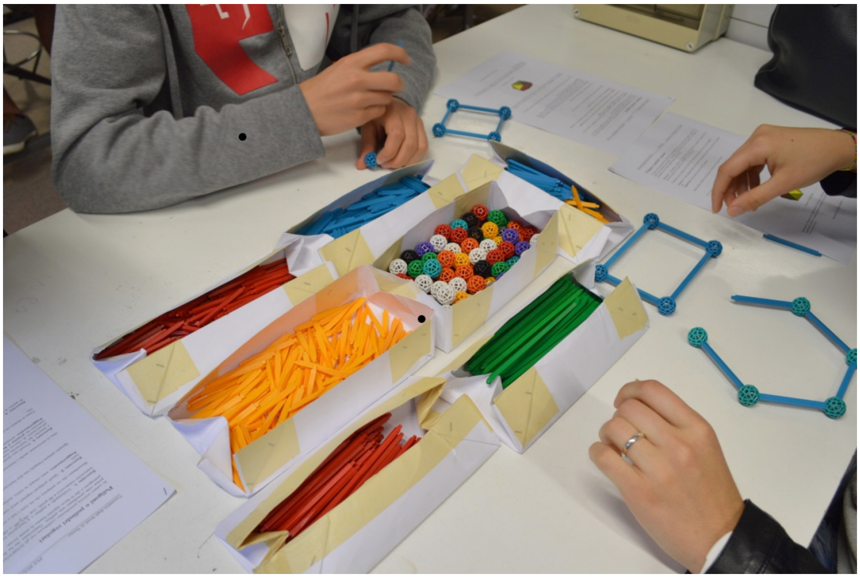


Figura 6
Il materiale a disposizione degli studenti in un tavolo di lavoro

La metodologia didattica che abbiamo scelto per questo laboratorio è l'apprendimento cooperativo. I ragazzi avevano a disposizione delle schede con delle domande e qualche suggerimento ma, per arrivare alla soluzione, era necessaria la discussione con i propri compagni di gruppo. Questa scelta ha contribuito alla creazione di nuovi contenuti che non avevamo previsto al momento dell'ideazione dell'attività. Molti gruppi hanno infatti realizzato solidi regolari che non avevamo previsto nelle schede ma che ne erano il naturale proseguimento.

Gli ZOMETOOL sono stati un utilissimo strumento per permettere ai ragazzi di riflettere durante l'azione. Il processo costruttivo, che implicava manipolare direttamente gli ZOMETOOL, richiedeva di riflettere e dare significato a ogni passo dei compiti richiesti, e in questo l'esplorazione libera dei ragazzi, "per tentativi ed errori", ha giocato un ruolo fondamentale nel guidare l'intuizione. Inoltre, in molti casi, è apparso evidente come i ragazzi stessi nel costruire si appropriassero di concetti studiati in precedenza dandone pieno compimento. L'apprendimento, per essere significativo, ha infatti bisogno di strutturare e dare forma ai concetti. Nel caso della geometria solida, dare forma ai concetti è più difficile ma grazie allo strumento didattico ZOMETOOL è stato possibile.

Figura 7
Un gruppo di lavoro durante la mattinata

3. Il ruolo degli insegnanti durante l'attività

Il nostro compito è stato quello di essere portavoce del sapere matematico necessario alla realizzazione dell'attività. Nel concreto, l'obiettivo è stato introdurre e stimolare una discussione che prendesse spunto dalle schede di lavoro, indirizzando i ragionamenti ed evitando che il discorso diventasse dispersivo.

La discussione matematica all'interno dei vari gruppi di lavoro è diventata davvero "*una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico*" (Bartolini Bussi et al., 2005). Noi abbiamo puntato a orchestrare questa discussione cercando di coinvolgere in ogni gruppo di lavoro anche gli allievi meno partecipi, senza però fornire direttamente le risposte alle domande. Abbiamo infatti lasciato che fossero gli studenti stessi ad arrivarci attraverso il confronto sociale, misurando cioè le proprie idee e ipotesi con quelle di altri compagni, oppure attraverso il confronto diretto con gli ZOMETOOL o con un processo di astrazione da esso derivato. Abbiamo cercato di mantenere questi confronti il più possibile autonomi nella mente dello studente. Il nostro ruolo è stato quello di guidarli, dirigerli e arginarli, come un genitore che insegna al proprio figlio ad andare in bicicletta: egli non deve mantenere l'equilibrio o pedalare al posto del bambino, deve lasciare che sia questi a farlo mentre egli si limita a seguirlo "da lontano", pronto a sostenerlo e a rimetterlo in piedi quando ne ha bisogno.

Con un supporto concreto come gli ZOMETOOL, i ragionamenti autonomi degli studenti sono notevolmente incoraggiati e stimolati e hanno un carattere più spontaneo rispetto agli stessi ragionamenti formulati attorno a un semplice disegno sulla carta o sulla lavagna.

4. La Matematica Laboratoriale

La didattica della Matematica attraverso attività di laboratorio è al centro di un dibattito che ha avuto grande diffusione a livello internazionale negli ultimi anni. L'Unione Matematica Italiana (UMI) ha parlato dell'idea di laboratorio come:

"una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte."

La nostra proposta didattica, in accordo con quanto sostiene il documento UMI, si è focalizzata su una didattica costruttiva e basata sull'interazione tra gli strumenti e i processi cognitivi dei ragazzi, facilitati e guidati dall'insegnante.

CAPITOLO 1

POLIGONI E POLIEDRI REGOLARI

Introduzione

Il più antico documento giunto sino a noi nel quale siano stati menzionati i poliedri regolari è il *Timeo*, uno dei più importanti dialoghi di Platone: è questa la ragione per cui, comunemente, tali oggetti prendono il nome di *solidi platonici*. Sembra evidente, tuttavia, che la forma dei poliedri regolari fosse già stata intuita dall'uomo almeno mille anni prima di Platone, come dimostrano una grande quantità di piccole sorprendenti sculture rinvenute in Scozia e risalenti al neolitico (figura 1).

I poliedri regolari sono cinque:

- il **tetraedro**, avente 4 vertici, 6 spigoli e 4 facce triangolari;
- il **cubo**, avente 8 vertici, 12 spigoli e 6 facce quadrate;
- l'**ottaedro**, avente 6 vertici, 12 spigoli e 8 facce triangolari;
- il **dodecaedro**, avente 20 vertici, 30 spigoli e 12 facce pentagonali;
- l'**icosaedro**, avente 12 vertici, 30 spigoli e 20 facce triangolari.

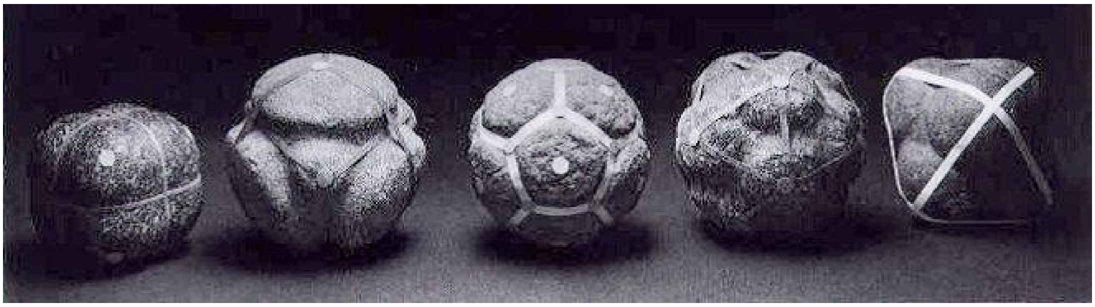


Figura 1. Poliedri regolari preistorici risalenti al neolitico, custoditi nell'Ashmolean Museum a Oxford

Lo scopo di questa prima attività è realizzare con gli ZOMETOOL tutti e 5 i poliedri regolari, comprendere il motivo per cui sono solo 5 e dimostrarlo. La scheda di lavoro fornita richiede come background matematico solo gli elementi base della geometria piana (che comunque sono richiamati in forma implicita) ed è incentrata sulla "pratica" e sull'apprendimento cooperativo degli studenti.

In questa scheda, più che nelle successive, maggiormente incentrate sulle dimostrazioni, si è scelto di presentare esercizi che richiedano l'utilizzo diretto degli ZOMETOOL. Tale scelta è motivata da diverse ragioni. In primo luogo si tratta del primo approccio degli studenti con gli ZOMETOOL ed è importante che essi comprendano appieno il significato delle loro forme e dei loro colori. Poi, si tratta della prima attività che il gruppo appena formato (che, ricordiamo, comprende anche studenti provenienti da classi diverse) intraprende: iniziare con un simile approccio "giocoso" favorisce il dialogo tra i componenti e incoraggia l'approccio cooperativo durante l'attività.

Infine, iniziare con un'attività "pratica" stimola negli studenti la voglia di proseguire e li dispone ad affrontare le attività più concettuali che seguiranno con un atteggiamento positivo.

Non è casuale nemmeno la scelta di cominciare dal piano (i poligoni regolari) per poi andare allo spazio e infine tornare al piano (le condizioni di costruibilità di un poliedro). In questo modo gli studenti colgono le differenze tra due e tre dimensioni (per esempio nel numero di oggetti "regolari" possibili) e, nel costruire e ricostruire poligoni e poliedri, le consolidano nella loro mente.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali […] sia mediante programmi informatici.[…]

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini […]) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.[…]

Saranno inoltre studiati […] i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli.

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Lo studio della geometria proseguirà […] anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare saranno studiate […] le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** costruzione ed esplorazione dei solidi.
- **Ordine di scuola:** primo e secondo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori, ZOMETOOL.
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza delle definizioni di poligono, poliedro, angolo e capacità di misurazione di quest'ultimo;
  - conoscenza della condizione di regolarità di un poliedro;
  - conoscenza, almeno intuitiva, del concetto di angoloide.
- **Obiettivi:**
  - misurare l'ampiezza degli angoli interni di alcuni poligoni dati e capacità di astrazione per dedurre una formula valida per un qualsiasi poligono regolare;
  - visualizzare alcuni enti della geometria solida, in particolare dei poliedri, grazie all'uso di strumenti appositi che permettono la realizzazione di vari modelli tridimensionali;
  - saper riconoscere particolari poliedri, quali prismi, antiprismi e solidi platonici;
  - sviluppare l'intuizione geometrica attraverso l'uso degli ZOMETOOL durante la costruzione dei vari solidi;
  - riconoscere e verificare le proprietà matematiche dei poliedri man mano costruiti;
  - dedurre correttamente la ragione per cui i solidi platonici sono i soli poliedri a essere regolari.

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è concepita come un laboratorio di matematica nel quale gli studenti sono invitati a realizzare forme geometriche tridimensionali sempre più complesse. La chiave di lettura dell'attività è scindibile in due momenti didattici consequenziali: *costruire per visualizzare* e, successivamente, *visualizzare per comprendere* e *verificare*. Gli studenti vengono divisi in gruppi di lavoro composti da 4/5 ragazzi. A ciascun gruppo viene consegnata una grande quantità di ZOMETOOL che dovranno essere opportunamente assemblati al fine di realizzare diverse forme geometriche. Le schede di lavoro, consegnate a ciascuno studente, illustrano brevemente il materiale messo a disposizione e descrivono man mano le varie figure da realizzare e, con domande puntuali, invitano lo studente a riflettere su alcune proprietà inerenti i vari solidi costruiti. Se ci sono sufficienti ZOMETOOL ogni studente realizza le varie forme indicate nelle schede altrimenti, all'interno di un gruppo, si contribuisce in più persone alla costruzione di un unico solido.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 90 minuti.
- **Contenuti matematici:**
    - **poligoni regolari:** vengono realizzati il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, l'esagono, il decagono e viene analizzata l'ampiezza dei loro angoli interni;
    - **poliedri regolari:** vengono realizzati i cinque solidi platonici e si deduce la ragione per cui essi siano i soli poliedri a essere regolari. Si costruiscono e analizzano, inoltre, prismi e antiprismi e si calcolano il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli dei vari solidi realizzati.

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti (UMI, 2003)**	
		disciplinari	**trasversali**
• Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	• Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. • Simmetrie nei poliedri regolari. • Proprietà dei principali solidi geometrici.	Spazio e figure	Misurare, argomentare, congetturare, dimostrare.

Scheda per gli studenti

Poligoni e poliedri regolari

In questa attività prenderemo confidenza con gli ZOMETOOL e costruiremo alcuni poligoni e poliedri. Per prima cosa prendiamo una pallina. Osserviamo che ha dei buchi a forma di triangolo, di rettangolo e di pentagono e che le facce opposte hanno la stessa forma.

Esercizio 1. Utilizzando quattro palline e quattro bastoncini blu piccoli, costruisci un quadrato. L'angolo tra due bastoncini consecutivi è 90 gradi, cioè $\frac{180 \cdot 4 - 360}{4} = 180 - \frac{360}{4}$ gradi.

Ricordiamo che *un* ***poligono*** *che ha tutti i lati e gli angoli congruenti tra loro si dice* ***regolare***.

Esercizio 2. Quali poligoni regolari puoi costruire utilizzando solo palline e bastoncini blu? Costruiscili tutti.

Suggerimento: sono cinque in tutto, incluso il quadrato.

Quanto misura l'angolo tra due bastoncini consecutivi in ciascuno di essi?

Ora ci serviranno anche i bastoncini rossi e quelli gialli.

Esercizio 3. Prendi uno qualsiasi dei poligoni che hai costruito nell'esercizio precedente. Appoggialo sul tavolo e inserisci dei bastoncini rossi o gialli nei buchi posti al polo nord di ciascuna pallina. Poi metti una pallina all'estremità di ciascun bastoncino rosso o giallo e uniscili costruendo un secondo poligono regolare. Hai costruito un **prisma a base regolare**. Quale poligono formano le facce del prisma?

Suggerimento: attenzione alla forma del polo nord!

Come si chiama un prisma a base quadrata con le facce quadrate?

Costruiscilo usando solo palline e bastoncini blu.

Esercizio 4. Un antiprisma è un solido che, come il prisma, ha le due basi uguali ma a differenza di quest'ultimo le sue facce sono dei triangoli. Costruisci un antiprisma a base pentagonale usando solo palline e bastoncini blu, formando dieci triangoli equilateri.

Per avere un antiprisma non è però fondamentale che i triangoli siano equilateri. Si possono costruire antiprismi a base pentagonale con bastoncini di altri colori? Prova a costruirne uno.

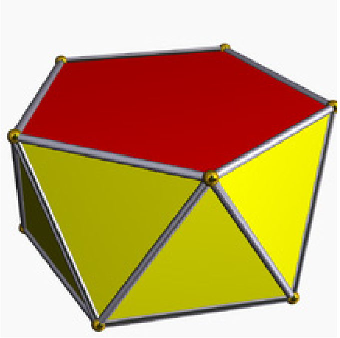


Figura A. Un antiprisma a base pentagonale

Ora costruiremo i cinque poliedri regolari. *Un **poliedro** è detto **regolare** se ha per facce poligoni regolari congruenti e ha tutti gli angoloidi congruenti*. Questi solidi sono detti anche *solidi platonici*, perché Platone parla di loro nella sua opera *Timeo*.

Figura B. Platone e Aristotele,raffigurati da Raffaello nell'affresco "La scuola di Atene"

Esercizio 5. Hai già costruito un solido platonico in un esercizio precedente. Quale?

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 6. Ora prendi una pallina e riempi tutti i buchi a forma di pentagono con dei bastoncini rossi piccoli. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini blu (quanti?). Hai costruito l'***icosaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 7. Ora infila bastoncini gialli medi in tutti i buchi di forma triangolare di una pallina. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini blu (quanti?). Hai costruito il ***dodecaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Per costruire i due solidi restanti ci serviranno i bastoncini verdi.

Esercizio 8. Costruisci un quadrato usando i bastoncini blu piccoli. La diagonale di questo quadrato è un bastoncino verde. Costruisci un cubo usando i bastoncini blu. Inserisci esattamente sei bastoncini verdi come diagonali di altrettante facce del cubo, in modo che ciascuna pallina che è estremità di un bastoncino verde lo sia anche di altri due, come in figura C. Ora rimuovi l'impalcatura formata dai bastoncini blu.

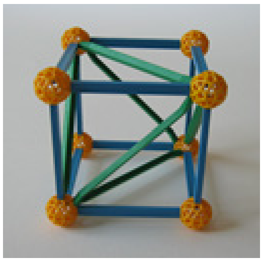


Figura C. Un tetraedro regolare dentro a un cubo

Hai costruito il ***tetraedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 9. Per finire, inserisci sei bastoncini blu piccoli in una pallina in modo da formare tre linee che si incontrano a 90 gradi, come vedi in figura D. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini verdi (quanti?). Hai costruito l'***ottaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

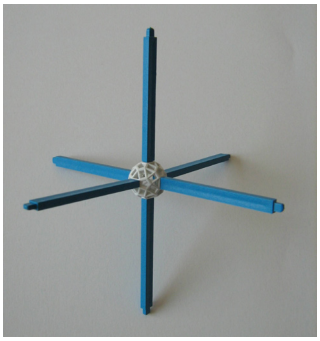


Figura D. La struttura per costruire l'ottaedro regolare

Oltre a questi cinque, non esistono altri solidi regolari. Come mai?

Per prima cosa, osserviamo che in un solido:

- in ogni angoloide le facce concorrenti sono almeno tre;
- in ogni vertice la somma degli angoli che confluiscono in esso è minore di 360°, altrimenti le sue facce giacerebbero su un piano.

Esercizio 10. Costruisci tre esagoni regolari e prova a formare l'angoloide di un poliedro. È possibile farlo? Come mai?

Completando la seguente tabella potrai vedere che gli unici solidi regolari sono quelli che hai costruito negli esercizi precedenti.

Poligono regolare di ogni faccia	Ampiezza degli angoli di ogni faccia	Numero delle facce concorrenti	Somma degli angoli che confluiscono in ogni vertice	Il solido può esistere?
triangolo	60°	3	180°	si
triangolo		4		
triangolo			300°	
triangolo		6 o più	360° o più	
quadrato			270°	
quadrato		4 o più		
pentagono			324°	
pentagono		4 o più		
6 o più lati		3 o più		

Scheda per l'insegnante e soluzione

Di seguito si riportano il testo degli esercizi, la soluzione indicata in grassetto e alcuni commenti degli autori. È bene far notare che in questa attività (e in generale in tutte quelle proposte nel volume) il ruolo dell'insegnante come "facilitatore" è fondamentale e non si riduce a un'osservazione passiva degli studenti che procedono nello svolgere gli esercizi presenti sulle schede. Egli deve "pungolare" i vari gruppi di lavoro con domande che ne consolidino la comprensione dei concetti e fungano da stimolo per nuove riflessioni.

In questa attività prenderemo confidenza con gli ZOMETOOL e costruiremo alcuni poligoni e poliedri. Per prima cosa prendiamo una pallina. Osserviamo che ha dei buchi a forma di triangolo, di rettangolo e di pentagono e che le facce opposte hanno la stessa forma.

Esercizio 1. Utilizzando quattro palline e quattro bastoncini blu piccoli, costruisci un quadrato. L'angolo tra due bastoncini consecutivi è 90 gradi, cioè $\frac{180 \cdot 4 - 360}{4} = 180 - \frac{360}{4}$ gradi.

Ricordiamo che *un* ***poligono*** *che ha tutti i lati e gli angoli congruenti tra loro si dice* ***regolare***.

Esercizio 2. Quali poligoni regolari puoi costruire utilizzando solo palline e bastoncini blu? Costruiscili tutti.

Suggerimento: sono cinque in tutto, incluso il quadrato.

Quanto misura l'angolo tra due bastoncini consecutivi in ciascuno di essi?

Sono, oltre al quadrato, il triangolo, il pentagono, l'esagono e il decagono. Gli angoli misurano rispettivamente 90, 60, 108 e 144 gradi.

In questi esercizi gli studenti si approcciano per la prima volta agli ZOMETOOL. È importante far notare loro che 5 è soltanto il numero di poligoni regolari che si possono costruire con i bastoncini blu (che sono inseriti nei vertici a pallina in angoli prefissati) mentre ovviamente i poligoni regolari sono infiniti. Questa osservazione può essere fatta qui oppure richiamata, per contrasto, nel momento in cui gli studenti costruiranno i poliedri regolari e dimostreranno che sono solo 5.

È inoltre bene domandare loro come hanno ricavato la misura degli angoli, per farli arrivare alla formula che permette di calcolare l'ampiezza degli angoli interni di un generico poligono regolare di n lati, che si chiede poi agli studenti di dimostrare.

Tale risultato può essere ottenuto con questo ragionamento: preso un punto all'interno di un poligono regolare di n lati, è possibile costruire n triangoli congiungendo questo punto con i vertici del poligono. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo misura sempre 180 gradi, la somma degli angoli del poligono è $180 \cdot n - 360$ gradi, avendo sottratto l'angolo giro formato internamente. Infine, per ricavare la misura in gradi di ogni angolo interno occorre dividere per n, ottenendo:

$$\frac{180 \cdot n - 360}{n} = 180 - \frac{360}{n}$$

Per una più agevole visualizzazione della triangolazione del poligono, si consiglia di utilizzare l'esagono o il decagono regolare che gli studenti hanno costruito.

Infatti in questi due casi (e solo in questi due) gli angoli consentono di costruire esplicitamente la triangolazione usando bastoncini blu corti e medi, rispettivamente.

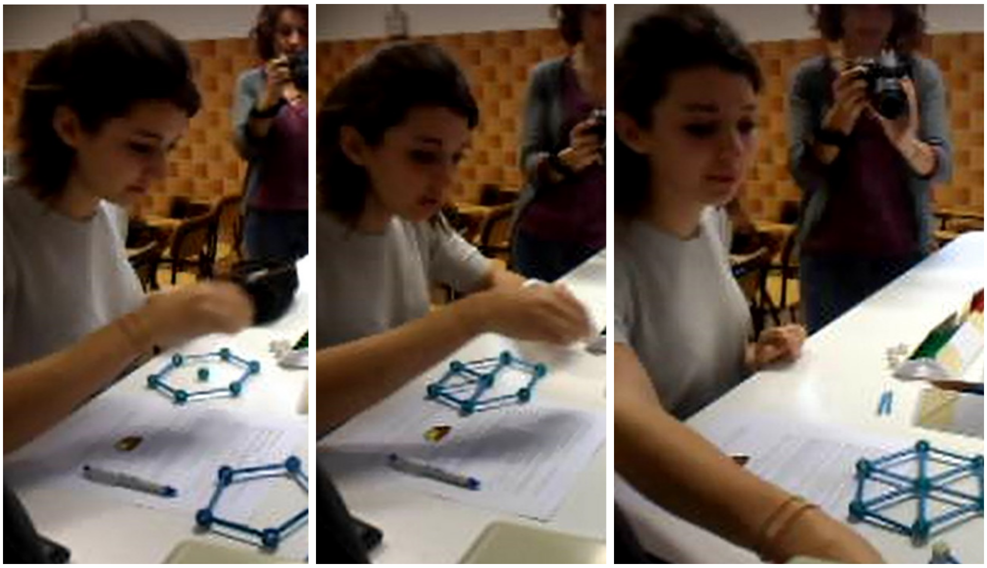


Figura 2. Una studentessa triangola un esagono

Ora ci serviranno anche i bastoncini rossi e quelli gialli.

Esercizio 3. Prendi uno qualsiasi dei poligoni che hai costruito nell'esercizio precedente. Appoggialo sul tavolo e inserisci dei bastoncini rossi o gialli nei buchi posti al polo nord di ciascuna pallina. Poi metti una pallina all'estremità di ciascun bastoncino rosso o giallo e uniscili costruendo un secondo poligono regolare. Hai costruito un **prisma a base regolare**. Quale poligono formano le facce del prisma?

Suggerimento: attenzione alla forma del polo nord!

Come si chiama un prisma a base quadrata con le facce quadrate?

Costruiscilo usando solo palline e bastoncini blu.

Esercizio 4. Un antiprisma è un solido che, come il prisma, ha le due basi uguali ma a differenza di quest'ultimo le sue facce sono dei triangoli. Costruisci un antiprisma a base pentagonale usando solo palline e bastoncini blu, formando dieci triangoli equilateri.

Per avere un antiprisma non è però fondamentale che i triangoli siano equilateri. Si possono costruire antiprismi a base pentagonale con bastoncini di altri colori? Prova a costruirne uno.

Le facce del prisma formano dei rettangoli. Un prisma a base quadrata con le facce quadrate si chiama cubo. È possibile costruire un antiprisma a base pentagonale utilizzando per i lati delle facce laterali i bastoncini gialli.

È bene notare che per costruire un antiprisma (sia con i bastoncini blu che con quelli gialli) è molto importante fare attenzione all'orientazione della base pentagonale, perché i suoi spigoli (a differenza che nel cubo) non sono perpendicolari al piano della base: quando questi puntano verso l'interno il solido è costruibile, quando puntano verso l'esterno no.

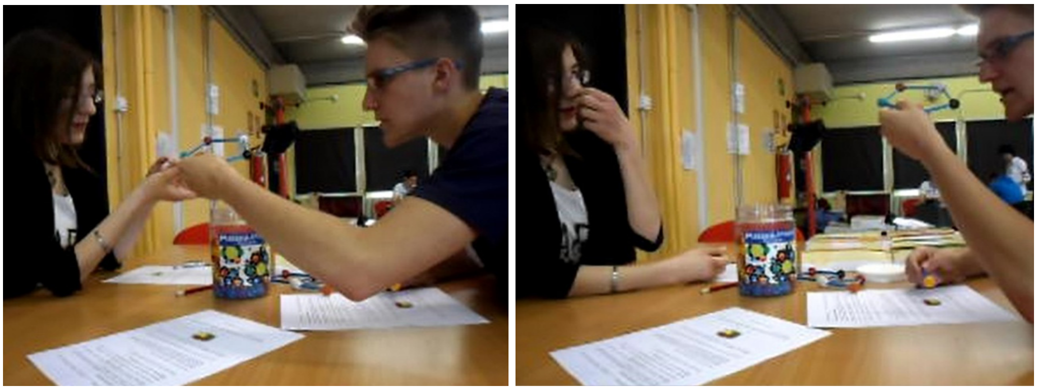


Figura 3. Uno studente in difficoltà con il pentagono ne prende in prestito uno già costruito per osservare attentamente gli angoli che dovrà formare

Ora costruiremo i cinque poliedri regolari. *Un **poliedro** è detto **regolare** se ha per facce poligoni regolari congruenti e ha tutti gli angoloidi congruenti*. Questi solidi sono detti anche *solidi platonici*, perché Platone parla di loro nella sua opera *Timeo*.

Esercizio 5. Hai già costruito un solido platonico in un esercizio precedente. Quale?

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 6. Ora prendi una pallina e riempi tutti i buchi a forma di pentagono con dei bastoncini rossi piccoli. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini blu (quanti?). Hai costruito *l'**icosaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 7. Ora infila bastoncini gialli medi in tutti i buchi di forma triangolare di una pallina. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini blu (quanti?). Hai costruito il ***dodecaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Il cubo (*Esercizio* 5) ha 4 lati per faccia e in ogni vertice si incontrano 3 facce. L'icosaedro regolare (*Esercizio* 6) ha 3 lati per faccia, in ogni vertice si incontrano 5 facce e per costruirlo si utilizzano 12 palline e 30 bastoncini blu. Il dodecaedro regolare (*Esercizio* 7) ha 5 lati per faccia, in ogni vertice si incontrano 3 facce e per costruirlo si utilizzano 20 palline e 30 bastoncini blu.

A partire dall'*Esercizio* 6 gli studenti cominciano a costruire nuovi solidi platonici. È bene far ripetere agli studenti, esplicitamente, quante facce hanno i solidi che hanno appena costruito: cubo (esaedro regolare) 6 facce, icosaedro 20 facce, dodecaedro 12 facce, tetraedro 4 facce e ottaedro 8 facce (questi ultimi due saranno costruiti negli esercizi successivi).

Per contare i vertici (palline) e gli spigoli (bastoncini) di ciascuna figura, è bene che gli studenti utilizzino metodi diversi dal semplice contarli a mano. Una possibilità è suggerita dalla richiesta, che si fa in ogni esercizio, di quale sia il numero di lati per faccia e di quante facce si incontrano in ciascun vertice. Con riferimento per esempio al dodecaedro, che ha 12 facce, si può osservare che ogni faccia ha 5 lati pertanto, per contare gli spigoli, la tentazione potrebbe essere quella di fare $12 \cdot 5 = 60$. Però in questo modo tutti i vertici sono contati 2 volte, poiché ogni lato è in comune con due facce. Quindi, per ottenere il risultato, è sufficiente dividere per due: $\frac{60}{2} = 30$ spigoli.

Analogamente, per determinare il numero di vertici, si osserva che ogni faccia ha 5 vertici ma ogni vertice è in comune con 3 facce, da cui il numero totale $\frac{12*5}{3} = 20$ vertici.

Figura 4. Studenti che contano gli spigoli dell'icosaedro con l'aiuto delle mani. L'insegnante è poi intervenuto per stimolare il ragionamento di cui sopra

Per costruire i due solidi restanti ci serviranno i bastoncini verdi.

Esercizio 8. Costruisci un quadrato usando i bastoncini blu piccoli. La diagonale di questo quadrato è un bastoncino verde. Costruisci un cubo usando i bastoncini blu. Inserisci esattamente sei bastoncini verdi come diagonali di altrettante facce del cubo, in modo che ciascuna pallina che è estremità di un bastoncino verde lo sia anche di altri due, come in figura C. Ora rimuovi l'impalcatura formata dai bastoncini blu.

Hai costruito il ***tetraedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Esercizio 9. Per finire, inserisci sei bastoncini blu piccoli in una pallina in modo da formare tre linee che si incontrano a 90 gradi, come vedi in figura D. Aggiungi le palline (quante?) a tutte le estremità e uniscile con dei bastoncini verdi (quanti?). Hai costruito l'***ottaedro regolare***.

Quanti lati ha ciascuna faccia?

Quante facce si incontrano in ciascun vertice?

Il tetraedro (*Esercizio* 8) ha 3 lati per faccia e in ogni vertice si incontrano 3 facce. L'ottedro regolare (*Esercizio* 9) ha 3 lati per faccia, in ogni vertice si incontrano 4 facce e per costruirlo si utilizzano 6 palline e 12 bastoncini verdi.

Con questi due esercizi si completa la costruzione dei solidi platonici. Per realizzarli è necessario usare i bastoncini verdi, che hanno una curvatura alle estremità e sfruttano il gruppo di simmetria del pentagono. L'uso di questi bastoncini è quello che si è rivelato più ostico per gli studenti poiché può essere necessario ripetere più volte i tentativi di incastro per trovare l'angolo corretto. È bene ricordare che i bastoncini non vanno mai piegati o forzati (se risulta " necessario" piegarli o forzare l'incastro significa che non si sta procedendo nel modo corretto).

Nell'*Esercizio* 8 è bene sottolineare la frase "Inserisci esattamente sei bastoncini verdi come diagonali di altrettante facce del cubo, *in modo che ciascuna pallina che è estremità di un bastoncino verde lo sia anche di altri due*" presente nel testo ma spesso ignorata dagli studenti, che si limitano a costruire le diagonali delle facce del cubo in tutti i modi possibili, senza fare in modo che da ogni vertice escano esattamente tre diagonali. Richiamarli a leggere bene il testo è stato sufficiente, nella maggioranza dei casi, per correggere l'errore.

Si osservi inoltre che, senza averlo detto esplicitamente, attraverso l'*Esercizio* 9 gli studenti hanno fatto la prima esperienza di solido inscritto in un altro e hanno quindi scoperto che un tetraedro è inscrivibile in un cubo.

Oltre a questi cinque, non esistono altri solidi regolari. Come mai?

Per prima cosa, osserviamo che in un solido:

- in ogni angoloide le facce concorrenti sono almeno tre;
- in ogni vertice la somma degli angoli che confluiscono in esso è minore di 360°, altrimenti le sue facce giacerebbero su un piano.

Esercizio 10. Costruisci tre esagoni regolari e prova a formare l'angoloide di un poliedro. È possibile farlo? Come mai?

Completando la seguente tabella potrai vedere che gli unici solidi regolari sono quelli che hai costruito negli esercizi precedenti.

È impossibile farlo perché l'unico modo di collegare 3 esagoni è farli giacere su di un piano.

La risposta all'*Esercizio* 10 è particolarmente significativa: grazie all'uso degli strumenti a disposizione, gli studenti hanno potuto comprendere appieno che un vincolo costitutivo di qualsiasi poliedro è che **la somma degli angoli dei poligoni che delimitano gli angoloidi non può raggiungere i 360°**. Questo perché, altrimenti, l'angolo solido del poliedro non potrebbe che giacere su di un piano, formando così un angolo giro (piano) senza quindi la possibilità di creare un vertice di una figura solida. Questa considerazione non appare molto intuitiva ma grazie al supporto degli strumenti è stata totalmente recepita dagli studenti.

Si può anche osservare che gli studenti apprendono un'altra importante proprietà degli esagoni regolari: essi tassellano il piano. L'insegnante può far osservare, a rovescio, che l'unico modo per realizzare tassellazioni piane è che la somma degli angoli dei poligoni regolari che confluiscono in un vertice della tassellazione sia **esattamente 360°**. Pertanto, volendo utilizzare un solo tipo di poligono per realizzare la tassellazione, ci sono solo 3 possibilità:

- quadrati (4 angoli di 90 gradi);
- triangoli equilateri (6 angoli di 60 gradi);
- esagoni (3 angoli di 120 gradi).

Di seguito si riporta la tabella compilata.

Poligono regolare di ogni faccia	Ampiezza degli angoli di ogni faccia	Numero delle facce concorrenti	Somma degli angoli che confluiscono in ogni vertice	Il solido può esistere ?
triangolo	60°	3	180°	si
triangolo	**60°**	4	**240°**	**sì**
triangolo	**60°**	**5**	300°	**sì**
triangolo	**60°**	6 o più	360° o più	**no**
quadrato	**90°**	**3**	270°	**sì**
quadrato	**90°**	4 o più	**360° o più**	**no**
pentagono	**108°**	**3**	324°	**sì**
pentagono	**108°**	4 o più	**432° o più**	**no**
6 o più lati	**120° o più**	3 o più	**360° o più**	**no**

Compilando correttamente la tabella, gli studenti dimostrano che i poliedri regolari sono esattamente 5. Tale dimostrazione si basa solo sulla considerazione precedente riguardante gli angoloidi di un poliedro e sul fatto intuitivo che in ogni angoloide le facce concorrenti sono almeno tre. È questo lo scopo della tabella: se ci fossero altri poliedri regolari oltre ai cinque noti si arriverebbe facilmente a un assurdo, poiché tali poliedri dovrebbero necessariamente infrangere il vincolo sugli angoloidi.

Dopo aver compilato la tabella e individuato quali solidi esistono, è bene far scrivere agli studenti accanto alla colonna “Il solido può esistere?” anche quale è il poliedro dotato delle caratteristiche indicate e cioè, dall’alto verso il basso: tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.

Approfondimento

Di seguito si fornisce una dimostrazione del fatto che i poliedri regolari sono *al più* 5 diversa da quella vista nell’*Esercizio* 10. Tale dimostrazione è più breve, ma richiede la conoscenza della Formula di Eulero (vedi Cap. 2).

Teorema Esistono al più cinque solidi regolari.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{P}$ un generico poliedro regolare con F facce, ciascuna delle quali sia quindi un poligono regolare avente n lati. Sia b il numero di spigoli che si incontrano in ogni vertice di $\mathcal{P}$ e siano S e V rispettivamente il numero totale degli spigoli e dei vertici di $\mathcal{P}$.

Moltiplicando il numero dei lati di ciascuna faccia del poliedro per il numero totale delle facce si ottiene il doppio del numero degli spigoli totali (ogni spigolo viene contato due volte, poiché due sono le facce adiacenti a uno spigolo), cioè:

$$nF = 2S$$

Moltiplicando il numero dei vertici per il numero degli spigoli che si incontrano in essi si ottiene ancora il doppio degli spigoli totali (ogni spigolo collega esattamente due vertici tra loro), quindi:

$$bV = 2S$$

Ricaviamo dunque che:

$$F = \frac{2S}{n} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{2S}{b}$$

Sostituendo i valori appena trovati nell’equazione di Eulero per i poliedri omeomorfi alla sfera, $V + F - S = 2$, e dividendo poi per $2S$, si ha:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{S}$$

I numeri b e n sono necessariamente maggiori di 3, perché un generico angoloide è formato da almeno tre facce adiacenti e un generico poligono ha almeno tre lati. Inoltre, non può accadere che b e n siano entrambi uguali a 4, altrimenti il primo membro dell’equazione sarebbe 0. Sono da escludere anche i casi in cui n e b sono contemporaneamente maggiori di 4 dato che, altrimenti, il secondo membro dell’equazione, e quindi S, risulterebbe negativo, il che è assurdo.

Rimangono, allora, solo i seguenti casi.

- Se ponessimo $n = 3$ allora si avrebbe:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}$$

  Quindi, per poter soddisfare l'equazione, b potrà assumere solo i valori 3, 4 o 5, casi che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro e all'icosaedro.

- Se scegliessimo $n = 4$ allora risulterebbe:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{4} = \frac{1}{S}$$

  dunque b potrà assumere solamente il valore 3. È questo il caso del cubo.

- Se scegliessimo $n = 5$ allora sarebbe:

$$\frac{1}{b} - \frac{3}{10} = \frac{1}{S}$$

  di conseguenza b non potrà che assumere il valore 3. Questo è il caso del dodecaedro.

- Se n assumesse valori maggiori di 5, allora nessun numero b potrebbe soddisfare l'equazione; di conseguenza, tutti i casi possibili sono già stati esplicitati.

■

Per dimostrare che i solidi platonici sono *almeno* cinque e realizzare la loro costruzione attraverso gli assiomi della geometria euclidea si rimanda al libro XIII degli *Elementi* di Euclide, proposizioni 13 - 14 - 15 - 16 - 17.

Uno sguardo alle attività svolte: strategie e difficoltà riscontrate

In questa attività sono stati molti gli studenti che hanno costruito più di quanto non fosse stato richiesto loro espressamente dagli esercizi. Alcuni hanno provato a triangolare i poligoni costruiti nell'*Esercizio* 1, per poter visualizzare e intuire meglio come giungere alla formula per l'ampiezza degli angoli di un poligono.

Particolare è il caso di uno studente che, non riuscendo a triangolare un pentagono (una figura effettivamente non triangolabile con i pezzi aventi a disposizione) ha creato una piramide a base pentagonale e ha suggerito l'idea di "vedere la piramide dall'alto, ma di vederla da molto lontano", intuendo dunque l'idea che, proiettando gli spigoli di una piramide sul piano del poligono di base si ottiene una triangolazione di quel poligono.

Altri studenti si sono lasciati trasportare dalla creatività e hanno creato spontaneamente altri solidi o hanno assemblato tra loro dei poliedri costruiti precedentemente, formandone di nuovi, più complessi. Uno studente, dopo aver realizzato l'icosaedro, ha osservato che esso è realizzabile incollando tra loro un antiprisma a base pentagonale avente spigoli congruenti e due opportune piramidi pentagonali.

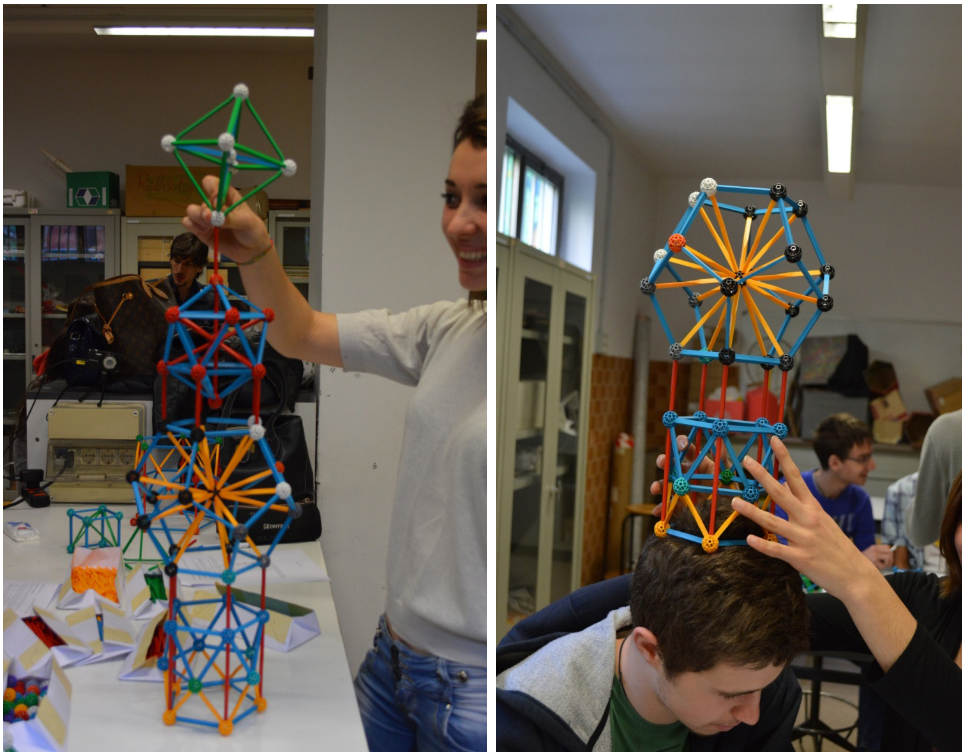


Figura 5. Molti studenti hanno spontaneamente assemblato solidi già costruiti nell'ambizione di costruire una forma sempre più complessa

Alcuni studenti, a fronte della consegna di costruire quanti più poligoni regolari possibile (*Esercizio* 2), hanno erroneamente assemblato, ritenendoli regolari, anche il rombo e il rettangolo.

Il poligono più difficile da costruire è risultato essere il pentagono, molto probabilmente perché, per come sono realizzati gli ZOMETOOL, nel costruire il pentagono con i bastoncini blu, questi ultimi, a differenza di quello che accade negli altri poligoni, devono essere usati con una inclinazione non ortogonale al piano di lavoro. Molti studenti, per assemblare il pentagono, si sono serviti di un pentagono già costruito, così da poter osservare le forme e cercare di replicare l'angolo che era necessario realizzare. La difficoltà, infatti, è stata quella di individuare "a occhio" l'ampiezza dell'angolo giusta per realizzare il poligono: una volta realizzato il primo angolo correttamente la costruzione del poligono è continuata piuttosto agevolmente. Alcuni studenti hanno cercato di sovrapporre il loro poligono in costruzione su di un pentagono già realizzato, sfruttando appieno una delle definizioni di congruenza tra poligoni: se sovrapposti combaciano.

La spontaneità con la quale gli studenti hanno manipolato gli ZOMETOOL, creando autonomamente nuove forme o assemblandone di vecchie, è indice di quanto questi artefatti siano semplici da utilizzare ma soprattutto di come riescano a far scaturire in maniera immediata la curiosità e la sorpresa nella sensibilità dei ragazzi.

Il fatto che la costruzione di nuove forme avvenga come soddisfacimento di un impulso totalmente autonomo stimola l'apprendimento in maniera più incisiva e profonda: altri schemi d'uso si sono innescati e hanno ulteriormente ampliato la discussione matematica.

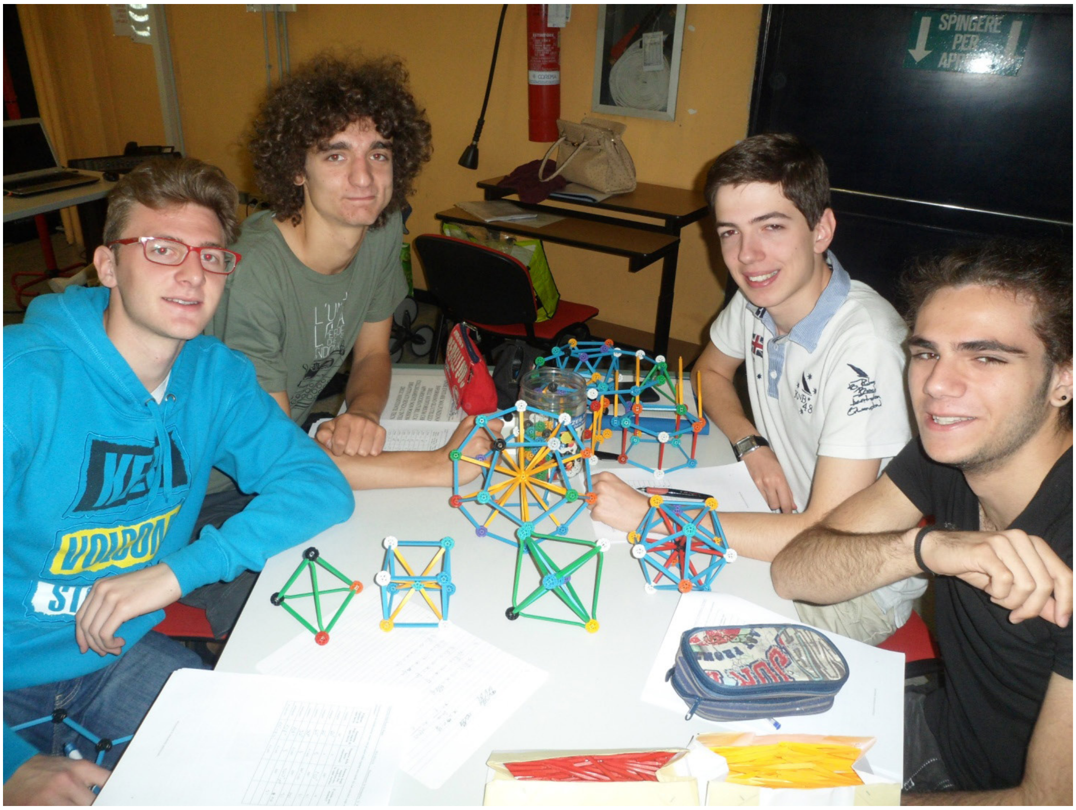


Figura 6. Un gruppo di lavoro dopo aver realizzato i solidi platonici

CAPITOLO 2

Il teorema di Eulero

Introduzione

In questa attività gli studenti devono cercare di dedurre quale sia la formula matematica che lega il numero di facce, spigoli e vertici in un poliedro convesso, risultato dimostrato da Leonhard Euler a metà del XVIII secolo.

Dal punto di vista matematico, la formula è valida non solo per i poliedri convessi ma per tutti i poliedri il cui bordo è omeomorfo alla superficie sferica, ovvero tutti i poliedri il cui bordo può essere deformato in modo continuo (cioè senza effettuare dei tagli) nella superficie che racchiude la palla 3-dimensionale.

L'attività è articolata nel seguente modo: si introduce il concetto di convessità di un poliedro e si chiede agli studenti di verificare se i poliedri costruiti con gli ZOMETOOL nel corso della prima attività sono tutti convessi. Viene quindi consegnata una tabella dove ciascuna riga della prima colonna contiene il nome di un diverso poliedro: quelli già costruiti con gli ZOMETOOL, altri costruibili con i pezzi a disposizione e, infine, due poliedri generici (il prisma e la piramide a base n-gonale). Le tre colonne rimanenti sono invece vuote e dovranno essere riempite dagli studenti con il numero di facce, spigoli e vertici di ciascun poliedro indicato nella riga corrispondente. Una volta che gli studenti hanno completato la tabella, viene chiesto loro di determinare una formula che leghi il numero F di facce, S di spigoli e V di vertici di ciascun poliedro e che sia valida per tutti i poliedri considerati. La formula richiesta è proprio quella dimostrata da Eulero, ovvero:

$$F - S + V = 2$$

L'esercizio che chiude la sezione riguarda la costruzione di un poliedro qualsiasi sul quale verificare se la formula di Eulero è valida o meno.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali […] sia mediante programmi informatici.[…]

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini […]) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.[…]

Saranno inoltre studiati […] i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli.

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Lo studio della geometria proseguirà […] anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare saranno studiate […] le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** costruzione ed esplorazione dei solidi e delle loro proprietà.
- **Ordine di scuola:** primo e secondo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori, ZOMETOOL.
- **Prerequisiti:**
  - capacità di riconoscere proprietà di poliedri precedentemente costruiti;
  - capacità di calcolare il numero di facce, di spigoli e di vertici di un poliedro dato, in funzione di un parametro variabile;
  - capacità di costruire un poliedro generico che non sia riconducibile alle famiglie di poliedri già incontrate.
- **Obiettivi:**
  - apprendere il concetto di convessità di un poliedro attraverso la visualizzazione dei solidi tridimensionali realizzati;
  - saper distinguere se un dato poliedro è convesso o concavo;
  - congetturare una relazione geometrica a partire dall'evidenza empirica di una grande quantità di casi semplici;
  - apprendere il teorema di Eulero per i poliedri convessi;
  - verificare concretamente la relazione di Eulero sui solidi realizzati.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è concepita come un laboratorio di matematica nel quale gli studenti sono invitati a realizzare forme geometriche tridimensionali sempre più complesse. La chiave di lettura dell'attività è scindibile in due momenti didattici consequenziali: *costruire per visualizzare* e, successivamente, *visualizzare per comprendere* e *verificare*. Gli studenti vengono divisi in gruppi di lavoro composti di 4/5 ragazzi. A ciascun gruppo viene consegnata una grande quantità di ZOMETOOL che dovranno essere opportunamente assemblati al fine di realizzare diverse forme geometriche. Le schede di lavoro, consegnate a ciascuno studente, illustrano brevemente il materiale messo a disposizione e descrivono man mano le varie figure da realizzare e, con domande puntuali, invitano lo studente a riflettere su alcune proprietà inerenti i vari solidi costruiti. Se ci sono sufficienti ZOMETOOL ogni studente realizza le varie forme indicate nelle schede altrimenti, all'interno di un gruppo, si contribuisce in più persone alla costruzione di un unico solido.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 40 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **poliedri concavi e convessi:** vengono riconosciute le proprietà di convessità o di concavità dei vari solidi costruiti, grazie alla visualizzazione;
  - **il teorema di Eulero:** viene congetturata la relazione di Eulero per i poliedri il cui bordo è omeomorfo a una sfera ($F - S + V = 2$) ragionando su un gran numero di singoli casi e su poliedri dati in funzione di un parametro variabile.

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti (UMI, 2003)	
		disciplinari	**trasversali**
• Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. • Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. • Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. • Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. • Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni.	• Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. • Simmetrie nei poliedri regolari. • Proprietà dei principali solidi geometrici.	Spazio e figure	Misurare; argomentare, congetturare, dimostrare.

Scheda per gli studenti

Il Teorema di Eulero

Nel 1750 il matematico svizzero Leonhard Euler scoprì un'interessante relazione che lega il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro convesso. In questa attività vedremo di che cosa si tratta.

Per prima cosa abbiamo bisogno di introdurre il concetto di *convessità*; intuitivamente possiamo dire che un poliedro è convesso se non presenta concavità. Se vogliamo formalizzare questa affermazione in termini geometrici possiamo dire che: *un poliedro è convesso se, comunque presi due punti al suo interno, il segmento che li congiunge è contenuto interamente nel poliedro.*

Esercizio 11. I poliedri costruiti con gli ZOMETOOL nelle precedenti attività sono tutti convessi?

Esercizio 12. Aiutandoti con i poliedri costruiti con gli ZOMETOOL (e con dei disegni se può servirti) completa la seguente tabella, dove F indica il numero delle facce del poliedro, S il numero degli spigoli e V il numero dei vertici. In alcuni casi il dato da inserire dovrà essere espresso in funzione di un generico numero n.

Poliedro	F	S	V
Tetraedro			
Ottaedro			
Cubo			
Icosaedro			
Dodecaedro			
Prisma a base triangolare			
Prisma a base pentagonale			
Prisma a base n-gonale			
Piramide a base quadrata			
Piramide a base pentagonale			
Piramide a base n-gonale			

Esercizio 13. Determina una formula generale che lega i numeri F, S e V e verifica che è valida per i dati contenuti in ogni riga della precedente tabella, anche quando sono espressi in funzione di n.

Suggerimento: è sufficiente utilizzare addizione e sottrazione.

La soluzione dell'esercizio precedente è proprio la formula contenuta nel teorema di Eulero.

Esercizio 14. Inventa tu stesso un poliedro (per esempio unendo i poliedri che hai a disposizione) e verifica se il teorema di Eulero è valido. Il poliedro che hai costruito è convesso?

Scheda per l'insegnante e soluzione

Riportiamo di seguito le soluzioni ai quesiti posti nella scheda per gli studenti con alcuni commenti.

Esercizio 11. I poliedri costruiti con gli ZOMETOOL nelle precedenti attività sono tutti convessi?

Sì.

Esercizio 12. Aiutandoti con i poliedri costruiti con gli ZOMETOOL (e con dei disegni se può servirti) completa la seguente tabella, dove F indica il numero delle facce del poliedro, S il numero degli spigoli e V il numero dei vertici. In alcuni casi il dato da inserire dovrà essere espresso in funzione di un generico numero n.

Poliedro	***F***	***S***	***V***
Tetraedro	**4**	**6**	**4**
Ottaedro	**8**	**12**	**6**
Cubo	**6**	**12**	**8**
Icosaedro	**20**	**30**	**12**
Dodecaedro	**12**	**30**	**20**
Prisma a base triangolare	**5**	**9**	**6**
Prisma a base pentagonale	**7**	**15**	**10**
Prisma a base n-gonale	$\boldsymbol{n+2}$	$\boldsymbol{3n}$	$\boldsymbol{2n}$
Piramide a base quadrata	**5**	**8**	**5**
Piramide a base pentagonale	**6**	**10**	**6**
Piramide a base n-gonale	$\boldsymbol{n+1}$	$\boldsymbol{2n}$	$\boldsymbol{n+1}$

Esercizio 13. Determina una formula generale che lega i numeri F, S e V e verifica che è valida per i dati contenuti in ogni riga della precedente tabella, anche quando sono espressi in funzione di n.

Suggerimento: è sufficiente utilizzare addizione e sottrazione.

La formula è $F - S + V = 2$.

Dopo che gli studenti hanno individuato la formula, è bene far notare loro che non hanno dimostrato il risultato di Eulero, ma lo hanno solamente dedotto a partire dai dati in loro possesso.

Esercizio 14. Inventa tu stesso un poliedro (per esempio unendo i poliedri che hai a disposizione) e verifica se il teorema di Eulero è valido. Il poliedro che hai costruito è convesso?

Per risolvere questo esercizio gli studenti possono costruire un qualunque poliedro con gli ZOMETOOL che hanno a disposizione. Questa operazione potrebbe portarli a ottenere poliedri elaborati e diventa quindi fondamentale, per il conteggio dei numeri F, S e V, capire quali sono le facce, i vertici e gli spigoli. Infatti, a differenza degli oggetti costruiti in precedenza, potrebbe capitare per esempio che una pallina sia stata utilizzata per unire due bastoncini che formano un unico spigolo; tale pallina non sarà quindi un vertice del poliedro e non dovrà essere contata per determinare il numero V. Inoltre, gli studenti potrebbero costruire un poliedro concavo che soddisfa la formula di Eulero; bisogna quindi sottolineare il fatto che l'ipotesi di convessità è solo sufficiente ma non necessaria. Esistono infatti dei poliedri concavi (quelli il cui bordo è omeomorfo alla superficie sferica) per cui la formula è valida, mentre ne esistono altri per cui non vale, ma difficilmente gli studenti costruiranno poliedri di tale tipo in questa attività.

Uno sguardo alle attività svolte: strategie e difficoltà riscontrate

I solidi previsti dall'attività erano tutti convessi e gli studenti hanno saputo riconoscere facilmente questa proprietà. Il poliedro che ha creato qualche dubbio in più è stato l'antiprisma a base pentagonale ma, anche qui, dopo un'attenta osservazione tutti hanno concluso correttamente indicandolo come convesso. Alcuni studenti, nella precedente attività, si erano divertiti ad assemblare solidi differenti per formare un unico poliedro. Ecco che, in alcuni casi, non è stato così immediato riconoscere se il poliedro risultante fosse convesso oppure no. Per esempio, un gruppo di lavoro aveva assemblato due antiprismi, aventi la stessa base, ponendoli uno sopra l'altro. Nonostante si fosse partiti da due solidi convessi, il risultato è stato un poliedro concavo (figura 1).

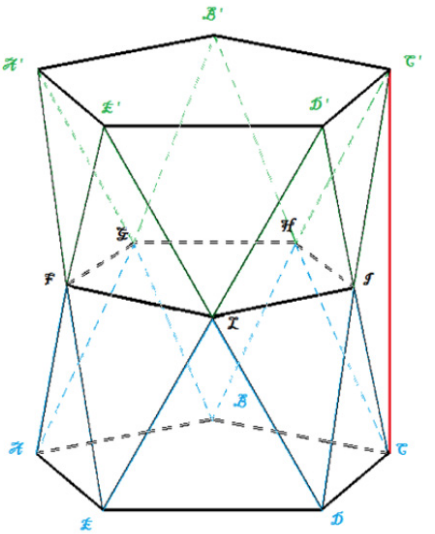


Figura 1. Il poliedro che si ottiene assemblando due antiprismi a base pentagonale. Si osservi che il segmento rosso congiungente due punti del poliedro non è interamente contenuto al suo interno

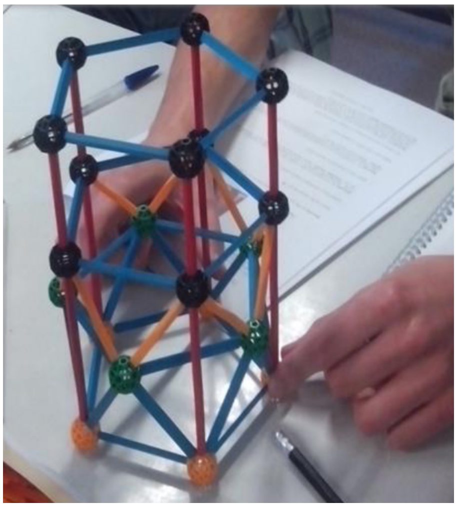
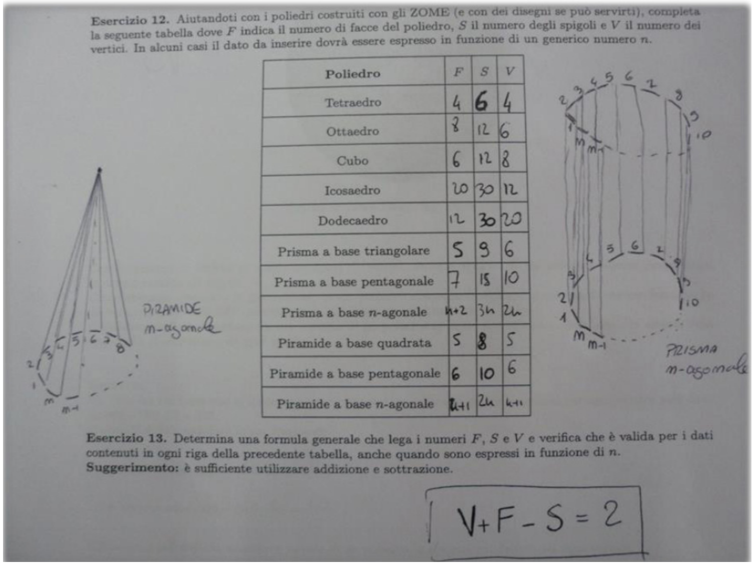


Figura 2. Uno dei poliedri complessi in cui i ragazzi hanno trovato difficoltà nel riconoscere la convessità. È stato ottenuto unendo due antiprismi a base pentagonale e un prisma retto a base pentagonale

Nell'*Esercizio 12*, per stabilire il numero di facce, spigoli e vertici dei poliedri facilmente realizzabili (prime righe della tabella), alcuni studenti hanno cercato di assemblare i solidi in questione per eseguire il conto manualmente, mentre la maggior parte ha cercato di immaginarli, sfruttando quanto osservato in precedenza. Evidentemente, per il calcolo dei componenti della piramide a base n-gonale e del prisma a base n-gonale, l'astrazione è stata l'unica via percorribile. In alcuni degli elaborati ci sono delle bozze di disegni che provano a modellizzare questo problema (figura 3), mentre un gran numero di studenti ha immaginato i poliedri e ha provato a descriverli tracciandoli virtualmente nello spazio servendosi quindi, come strumento per arrivare alla soluzione, non già di carta e penna ma del proprio corpo (le proprie mani) e dello spazio dinanzi a sé (figura 4).



Esercizio 12. Aiutandoti con i poliedri costruiti con gli ZOME (e con dei disegni se può servirti), completa la seguente tabella dove F indica il numero di facce del poliedro, S il numero degli spigoli e V il numero dei vertici. In alcuni casi il dato da inserire dovrà essere espresso in funzione di un generico numero n.

Poliedro	F	S	V
Tetraedro	4	6	4
Ottaedro	8	12	6
Cubo	6	12	8
Icosaedro	20	30	12
Dodecaedro	12	30	20
Prisma a base triangolare	5	9	6
Prisma a base pentagonale	7	15	10
Prisma a base n-agonale	n+2	3n	2n
Piramide a base quadrata	5	8	5
Piramide a base pentagonale	6	10	6
Piramide a base n-agonale	n+1	2n	n+1

Esercizio 13. Determina una formula generale che lega i numeri F, S e V e verifica che è valida per i dati contenuti in ogni riga della precedente tabella, anche quando sono espressi in funzione di n.
Suggerimento: è sufficiente utilizzare addizione e sottrazione.

$$\boxed{V+F-S=2}$$

Figura 3. Uno degli elaborati degli studenti in cui compaiono i "disegni" del prisma e della piramide a base n-gonale.

Figura 4. Lo studente conta, mimando, le facce di un prisma a base n-gonale. Prima, con un movimento circolare della mano, individua la superficie laterale, poi indica in su e in giù per intendere le due superfici di base

Come ampiamente prevedibile, le difficoltà nella risoluzione di questo esercizio si sono presentate solo per i due poliedri i cui dati dipendevano dal parametro n. È proprio in questi casi che si sono riscontrati alcuni errori: pochi studenti hanno lasciato parzialmente o totalmente vuote le caselle relative a questi solidi mentre alcuni hanno commesso errori nel calcolo. È da notare che, nelle risposte errate, il numero indicato era sempre minore di quello corretto, come se la conta fosse stata parzialmente giusta ma all'appello fosse mancato qualcosa (ricorrente è stata la risposta "n" invece della corretta "$n + 1$" alla richiesta del numero di facce della piramide a base n-gonale).

L'*Esercizio 13* si è spesso rivelato assai spinoso per coloro che non conoscevano già la formula e, nella stragrande maggioranza dei casi, le varie formule congetturate dai ragazzi non si sono rivelate corrette per tutti i poliedri e l'esercizio è stato lasciato irrisolto. Inoltre, molti hanno avuto alcune difficoltà a comprendere correttamente cosa chiedesse il testo dell'esercizio.

La tecnica utilizzata per congetturare la formula giusta è stata semplicemente quella di provare delle varie combinazioni lineari a coefficienti unitari dei parametri F, V e S. Come detto, giungere alla relazione $F - S + V = 2$ è stata una meta conquistata da non molti studenti (tra quelli che non conoscevano già il teorema). Per quei gruppi di lavoro che invece hanno brillantemente dedotto la formula in maniera del tutto autonoma, la soddisfazione è stata davvero grande. È interessante notare come questo esercizio sia stato il più soddisfacente in termini di compiacimento personale: lo si è notato soprattutto quando gli studenti hanno verificato che la relazione da loro ipotizzata era valida anche per i poliedri espressi in funzione di n.

Lo svolgimento dell'*Esercizio 14* è stato un momento puramente creativo, dove non si sono presentate difficoltà e alcuni studenti più volenterosi hanno cercato di approfondire le condizioni per le quali vale il teorema di Eulero.

Approfondimento

Alla luce di quanto detto relativamente all'*Esercizio 14*, un ulteriore problema che si potrebbe porre agli studenti è il seguente:

Riesci a costruire un poliedro per cui la formula di Eulero non è valida?

Come abbiamo già osservato, qualunque poliedro il cui bordo è omeomorfo alla superficie sferica soddisfa la formula di Eulero. Bisogna quindi spiegare intuitivamente agli studenti questo risultato e fornire loro un esempio di superficie che non può essere deformata in modo continuo nella superficie sferica. Il caso più semplice è dato dal *toro*, ovvero la superficie a forma di ciambella una cui immagine è riportata nelle schede di lavoro alla fine dell'attività sul Teorema di Cartesio (Cap. 3).

Gli studenti possono provare a costruire un poliedro il cui bordo sia omeomorfo al toro e verificare quale risultato ottengono calcolando il numero $F - S + V$. In questo caso la risposta corretta è:

$$F - S + V = 0$$

Anche qui vale l'osservazione fatta in precedenza per l'*Esercizio 14*, si raccomanda quindi una grande attenzione nel conteggio dei numeri F, S e V.

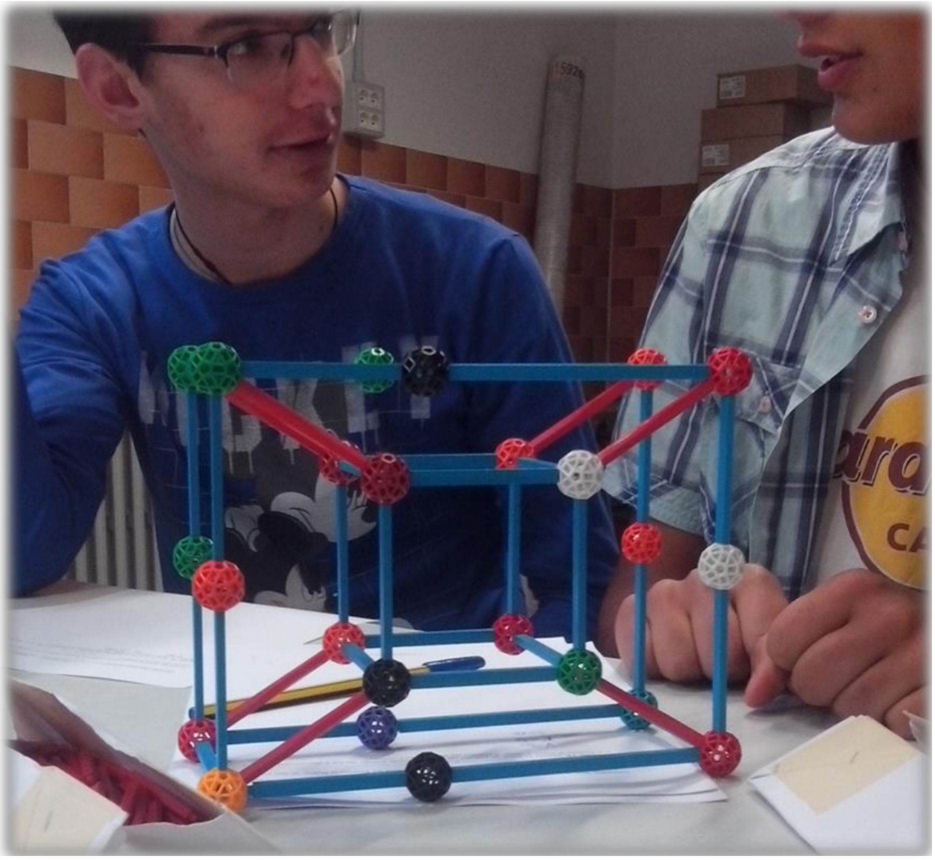


Figura 5. Uno dei poliedri costruiti dagli studenti in cui la formula di Eulero non è valida. Si noti il buco all'interno del poliedro realizzato unendo, tramite i bastoncini rossi, i vertici di un cubo con i vertici di un prisma a base rettangolare

CAPITOLO 3

Il teorema di Cartesio

Introduzione

L'attività si propone di introdurre agli studenti il concetto di deficit angolare di un solido e il teorema di Cartesio per un poliedro convesso.

Lo scopo principale è guidare lo studente nell'esplorazione di quel processo di "osservazione-congettura-dimostrazione" tipico delle scienze induttive, tra cui la Matematica.

In secondo luogo, come per l'attività precedente, diventa fondamentale la capacità dello studente di saper modellizzare, attraverso equazioni, proprietà geometriche di un poliedro.

L'attività dello studente non si limita però a una semplice formalizzazione di relazioni geometriche a partire dall'osservazione del solido costruito, ma si arricchisce di un ulteriore processo di astrazione, necessario alla risoluzione del problema generalizzato. Il modello costruito si riduce a essere punto di partenza per questo processo. Se nelle precedenti attività sono stati presi in considerazione vertici, facce e spigoli di un poliedro, adesso l'attenzione è posta sugli angoli e sulla loro misura.

L'attività è pensata per essere proposta a piccoli gruppi collaborativi di 4-5 studenti; è indipendente dalle due attività presentate nei capitoli precedenti, ma si consiglia di proporla a classi che abbiamo già preso dimestichezza con gli strumenti ZOMETOOL, magari attraverso le attività precedentemente illustrate.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali […] sia mediante programmi informatici.[…]

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini […]) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.[…]

Saranno inoltre studiati […] i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli.

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Lo studio della geometria proseguirà […] anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare saranno studiate […] le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** costruzione ed esplorazione dei solidi e delle loro proprietà.
- **Ordine di scuola:** primo e secondo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori, ZOMETOOL.
- **Prerequisiti:**
  - capacità di calcolare l'ampiezza degli angoli delle facce di un poliedro dato, in funzione di un parametro variabile;
  - conoscenza delle strutture dei solidi platonici e di generici prismi e piramidi;
  - saper ricavare la misura di un angolo di un poligono regolare e aver appreso che la somma degli angoli che confluiscono in un vertice di un poliedro convesso deve essere strettamente minore di 360°.
- **Obiettivi:**
  - apprendere il concetto di deficit angolare in un vertice e di deficit angolare totale;
  - calcolare il deficit angolare totale di poliedri noti;
  - congetturare una relazione geometrica a partire da un'evidenza empirica;
  - apprendere il teorema di Cartesio per i poliedri convessi;
  - verificare concretamente la relazione di Cartesio su famiglie di solidi descritti al variare di un parametro;
  - apprendere intuitivamente il concetto di omeomorfismo;
  - generalizzare una proprietà osservata per un singolo solido a una famiglia di poliedri.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è concepita come un laboratorio di matematica nel quale gli studenti sono invitati a realizzare forme geometriche tridimensionali sempre più complesse. La chiave di lettura dell'attività è scindibile in due momenti didattici consequenziali: *costruire per visualizzare* e, successivamente, *visualizzare per comprendere e verificare*. Gli studenti vengono divisi in gruppi di lavoro composti da 4/5 ragazzi. A ciascun gruppo viene consegnata una grande quantità di ZOMETOOL che dovranno essere opportunamente assemblati al fine di realizzare diverse forme geometriche. Le schede di lavoro, consegnate a ciascuno studente, illustrano brevemente il materiale messo a disposizione e descrivono man mano le varie figure da realizzare e, con domande puntuali, invitano lo studente a riflettere su alcune proprietà inerenti i vari solidi costruiti. Se ci sono sufficienti ZOMETOOL ogni studente realizza le varie forme indicate nelle schede altrimenti, all'interno di un gruppo, si contribuisce in più persone alla costruzione di un unico solido.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 40 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **deficit angolare:** vengono calcolati i deficit angolari dei vertici dei principali solidi realizzati, per ottenere il deficit angolare totale del poliedro;
  - **il teorema di Cartesio:** viene congetturata la relazione di Cartesio per i poliedri convessi (deficit angolare totale = 720°).

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti (UMI, 2003)**	
		disciplinari	**trasversali**
• Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. • Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. • Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. • Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. • Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni.	• Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. • Simmetrie nei poliedri regolari. • Proprietà dei principali solidi geometrici	Spazi e figure	Misurare, argomentare, congetturare, dimostrare.

Scheda per gli studenti

Il Teorema di Cartesio

Sicuramente conoscerai il criterio di Cartesio per determinare il numero di radici positive e negative di un'equazione. Andremo ora a esplorare un altro teorema formulato dal matematico e filosofo René Descartes (detto Cartesio) che prende appunto il suo nome.

Figura E. René Descartes (1596-1650)

Con il teorema di Eulero ci siamo occupati di vertici, facce e spigoli di un poliedro, adesso prenderemo in considerazione gli angoli.

Come abbiamo osservato in precedenza, in un poliedro la somma degli angoli che confluiscono in un vertice è minore di 360° (altrimenti le facce giacerebbero su un piano).

Si definisce ***deficit angolare in un vertice*** *di un poliedro la differenza tra un angolo giro e la somma degli angoli che si incontrano in quel vertice.*

Esempio

Un cubo ha tre facce che si incontrano per ogni vertice, allora il deficit angolare per ogni vertice sarà dato da 360° – (90° · 3) = 90°

Calcola il deficit angolare in un vertice di:

- un ottaedro: 360° – (…… · 4) = ……
- un icosaedro: 360° – (…… · ……) = ……

Chiamiamo poi ***deficit angolare totale*** *di un poliedro la somma dei deficit per ogni vertice.*

Con l'aiuto delle costruzioni completa la tabella.

Poliedro	Numero di vertici	Deficit in un vertice	Deficit angolare totale
Cubo	8	90°	720°
Icosaedro			
Tetraedro			

Ottaedro			
Dodecaedro			
Prisma a base triangolare			
Prisma a base pentagonale			
Prisma a base *n*-gonale			

A partire dalla tabella puoi fare un'ipotesi sul deficit angolare di un poliedro?

La risposta corretta alla domanda precedente rappresenta l'enunciato del ***teorema di Cartesio.***

Esercizio 15. Considera una piramide a base pentagonale e superficie laterale costituita da 5 triangoli isosceli. Se indichiamo con x l'angolo alla base, allora:

- quanto vale l'angolo al vertice di ogni triangolo?
- quanto vale il deficit angolare totale della piramide?

Esercizio 16. Verifica il teorema di Cartesio per una piramide che ha come base un poligono di n lati e n triangoli isosceli come facce laterali.

Approfondimento

Noi ci siamo limitati ad applicare il teorema ai soli poliedri convessi, ma esso può essere esteso a tutti i poliedri che possiamo ritenere equivalenti alla sfera, ossia quei poliedri che possono essere trasformati in una sfera deformandoli senza effettuare tagli o strappi. In linguaggio matematico si parla di poliedri *omeomorfi* alla sfera.

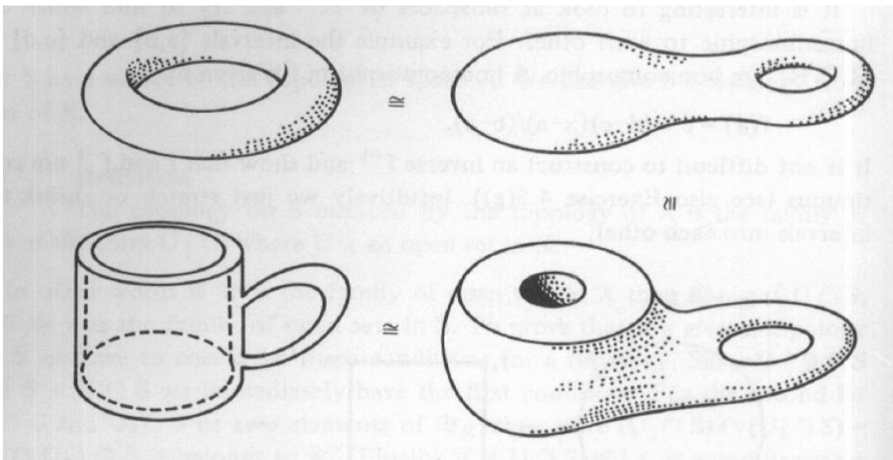


Figura F. Esempio di tazza omeomorfa a un toro

Scheda per l'insegnante e soluzione

L'attività è fondamentalmente suddivisa in 3 parti.

Prima parte

Il Teorema di Cartesio

Sicuramente conoscerai il criterio di Cartesio per determinare il numero di radici positive e negative di un'equazione. Andremo ora a esplorare un altro teorema formulato dal matematico e filosofo René Descartes (detto Cartesio) che prende appunto il suo nome.

Figura E. René Descartes (1596-1650)

Con il teorema di Eulero ci siamo occupati di vertici, facce e spigoli di un poliedro, adesso prenderemo in considerazione gli angoli.

Come abbiamo osservato in precedenza, in un poliedro la somma degli angoli che confluiscono in un vertice è minore di 360° (altrimenti le facce giacerebbero su un piano).

Si definisce ***deficit angolare in un vertice*** *di un poliedro la differenza tra un angolo giro e la somma degli angoli che si incontrano in quel vertice.*

Esempio

Un cubo ha tre facce che si incontrano per ogni vertice, allora il deficit angolare per ogni vertice sarà dato da $360° - (90° \cdot 3) = 90°$

Calcola il deficit angolare in un vertice di:

- un ottaedro: $360° - (\mathbf{60°} \cdot 4) = \mathbf{120°}$
- un icosaedro: $360° - (\mathbf{60°} \cdot \mathbf{5}) = \mathbf{60°}$

Chiamiamo poi ***deficit angolare totale*** *di un poliedro la somma dei deficit per ogni vertice.*

Nella prima parte dell'attività vengono introdotti agli studenti i concetti, del tutto nuovi, di *deficit angolare* di un vertice (o *difetto angolare* di un vertice) e di *deficit angolare totale* di un poliedro. Attraverso semplici esempi gli studenti prendono confidenza con le nuove definizioni.

È molto utile che l'insegnante focalizzi l'attenzione degli studenti sul significato che hanno questi nuovi strumenti. Il deficit di un angoloide non è altro che una misura di "quanto manca" all'angoloide per giacere su di un piano. Tanto maggiore sarà il deficit quanto minore sarà l'ampiezza dell'angoloide.

Seconda parte

Nella seconda parte dell'attività gli studenti sono chiamati a completare la tabella che li guiderà alla scoperta del teorema di Descartes (per poliedri convessi).

Con l'aiuto delle costruzioni completa la tabella.

Poliedro	Numero di vertici	Deficit in un vertice	Deficit angolare totale
Cubo	8	90°	720°
Icosaedro	**12**	**60°**	**720°**
Tetraedro	**4**	**180°**	**720°**
Ottaedro	**6**	**120°**	**720°**
Dodecaedro	**20**	**36°**	**720°**
Prisma a base triangolare	**6**	**120°**	**720°**
Prisma a base pentagonale	**10**	**72°**	**720°**
Prisma a base *n*-gonale	**2*n***	**360°/*n***	**720°**

A partire dalla tabella puoi fare un'ipotesi sul deficit angolare di un poliedro?

La risposta corretta alla domanda precedente rappresenta l'enunciato del ***teorema di Cartesio.***

Il deficit angolare totale di un poliedro convesso è 720°.

In questa seconda fase non è necessario costruire nuovi modelli con gli ZOMETOOL. Gli studenti possono utilizzare i poliedri precedentemente costruiti per la visualizzazione del problema. Sarebbe utile che gli studenti facessero ricorso alle formule scoperte nelle attività precedenti per il calcolo del numero di vertici e dell'ampiezza degli angoli.

Terminata la fase di formalizzazione del teorema di Descartes da parte di tutti i gruppi, l'insegnante può aprire una discussione collettiva volta a:

1. far riflettere gli studenti sul processo induttivo che hanno seguito per giungere alla formulazione del teorema;
2. far assumere agli studenti la consapevolezza che, a rigore, aver verificato che una certa proprietà vale per un numero (anche grande) di poliedri non è sufficiente a dimostrare che tale proprietà è valida per ogni poliedro convesso.

Questa riflessione può essere seguita dalla presentazione della dimostrazione del teorema di Descartes (Si veda il paragrafo: “Uno sguardo alle attività svolte: strategie e difficoltà riscontrate”).

Terza parte

Esercizio 15. Considera una piramide a base pentagonale e superficie laterale costituita da 5 triangoli isosceli. Se indichiamo con x l'angolo alla base, allora:

- quanto vale l'angolo al vertice di ogni triangolo?

  $\mathbf{180° - 2x}$

- quanto vale il deficit angolare totale della piramide?

  $\mathbf{5 \cdot [360° - (2x + 108°)] + [360° - 5 \cdot (180° - 2x)] = 720°}$

Il primo addendo rappresenta il deficit angolare dei 5 angoli alla base, mentre il secondo il deficit angolare dell'angolo al vertice.

Esercizio 16. Verifica il teorema di Cartesio per una piramide che ha come base un poligono di n lati e n triangoli isosceli come facce laterali.

Deficit angolare di un angolo alla base: $\mathbf{360° - (2x + (1 - 2/n) \cdot 180°)}$

Deficit angolare dell'angolo al vertice: $\mathbf{360° - n \cdot (180 - 2x)}$

Deficit angolare totale:
$\mathbf{n \cdot [360° - (2x + (1 - 2/n) \cdot 180°)] + [360° - n \cdot (180 - 2x)] = 720°}$

Gli ultimi due esercizi presenti nell'attività mirano a mobilitare progressivamente le capacità di generalizzazione e di modellizzazione di un problema geometrico attraverso l'uso massiccio del calcolo letterale.

Infatti, mentre nell'*Esercizio 15* allo studente è richiesto di saper modellizzare un problema che riesce concretamente a visualizzare (costruendo eventualmente la piramide con gli ZOMETOOL), nell'*Esercizio 16* (non potendo costruire una piramide che ha come base un poligono di n lati) lo studente deve compiere un ulteriore passaggio di astrazione e generalizzazione del problema prima di passare alla sua modellizzazione algebrica.

Approfondimento

Molteplici sono gli spunti di approfondimento che possono scaturire da questa attività.

Approfondimento
Noi ci siamo limitati ad applicare il teorema ai soli poliedri convessi, ma esso può essere esteso a tutti i poliedri che possiamo ritenere equivalenti alla sfera, ossia quei poliedri che possono essere trasformati in una sfera deformandoli senza effettuare tagli o strappi. In linguaggio matematico si parla di poliedri *omeomorfi* alla sfera.

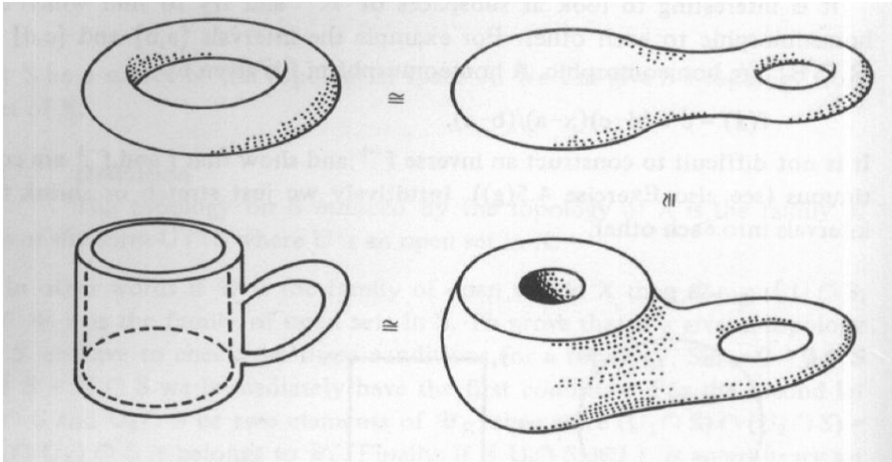


Figura F. Esempio di tazza omeomorfa a un toro

Nella scheda viene presentato il concetto di *omeomorfismo*. Tale nozione, oltre a rappresentare un chiaro esempio di formalizzazione matematica di un'idea intuitiva, rappresenta il punto di partenza per presentare agli studenti il teorema di Cartesio nel suo enunciato più generale:

"Il deficit angolare totale di un poliedro omeomorfo a una sfera è 4π."

La dimostrazione classica di tale teorema richiede l'introduzione di alcuni concetti di trigonometria sferica, non è dunque riportata in quanto esula dagli scopi di questo volume. Una dimostrazione, non meno generale, ma con prerequisiti meno avanzati, la si può trovare nella sezione successiva dedicata alle attività svolte dagli studenti.

Ulteriori spunti di approfondimento a partire da questa attività sono:

- la figura storica di René Descartes (1596-1650);
- il metodo induttivo e il metodo deduttivo.

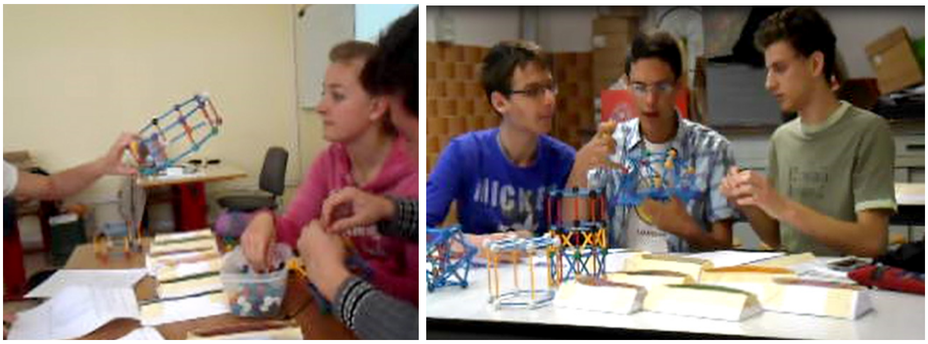


Figura 1. A sinistra, studenti che verificano il teorema di Cartesio per un prisma a base decagonale. A destra, per un poliedro a piacere

Uno sguardo alle attività svolte: strategie e difficoltà riscontrate

La definizione di *deficit angolare di un vertice* è stata una delle poche definizioni di tutta l'attività a non essere mai stata incontrata precedentemente da parte di alcuno studente. La sua comprensione, pertanto, non è stata priva di qualche piccola difficoltà o ambiguità. In particolare, la maggioranza degli studenti, in un primo momento, pur avendo accettato la definizione non aveva ben capito il suo significato.

La tabella proposta è risultata di immediata comprensione: la strategia utilizzata per completarla è stata sempre quella di osservare i poliedri realizzati e calcolare a mente il corrispondente deficit angolare.

Gli ultimi due esercizi, invece, sono stati quelli con la più bassa percentuale di risoluzione tra tutti gli esercizi proposti nelle varie attività. La difficoltà è stata principalmente nel sapersi avvalere del calcolo letterale, dal momento che non si sono rilevate difficoltà di comprensione del testo dell'esercizio. Gli studenti avevano ben chiaro in mente i metodi di risoluzione ma non sempre li hanno tradotti correttamente in equazioni che modellizzassero i due problemi.

Come già sottolineato, in quest'attività non è stato necessario realizzare nuovi modelli con gli ZOMETOOL, ma ci si è limitati a osservare quelli precedentemente costruiti. Ancora una volta, avere a disposizione un modello tridimensionale si è rivelato quasi indispensabile per il conteggio dei vertici dei poliedri più complessi.

Per la risoluzione dell'*Esercizio 15*, per esempio, è stato utile poter osservare una piramide a base pentagonale e immaginare, per evidenziare la dipendenza dal parametro x, di lasciar scorrere la punta della piramide sulla perpendicolare al pentagono passante per il suo centro, abbassandola e alzandola.

Questa terza attività è stata significativamente ricca di iniziative da parte degli studenti. La proposta più gettonata è stata quella di voler verificare il teorema di Cartesio per i poliedri costruiti a piacere durante tutte le precedenti attività. Sfortunatamente questo non è stato sempre possibile, perché difficilmente gli angoli di solidi assemblati a piacere sono agevolmente calcolabili.

Una volta introdotto il concetto di omeomorfismo e aver sottolineato che il teorema di Cartesio vale per tutti i poliedri omeomorfi a una sfera, alcuni studenti hanno voluto cimentarsi autonomamente con tale dimostrazione. Con slancio ancora maggiore hanno anche dimostrato come, per poliedri omeomorfi a un toro, il deficit angolare totale sia sempre 0°.

Di seguito la trascrizione fedele tratta dall'elaborato degli studenti.

Teorema 1. In un poliedro omeomorfo a una sfera il deficit angolare totale è 720°.

Dimostrazione

Siano F il numero di facce del poliedro, S il numero di spigoli e V il numero di vertici. In un poliedro omeomorfo a una sfera vale, per il teorema di Eulero:

$$F - S + V = 2 \qquad \text{da cui} \qquad V = 2 + S - F$$

Se A_i è la somma degli angoli piani che si incontrano nel vertice i e D_i il deficit angolare di quel vertice, allora:

$$D_i = 360° - A_i$$

Dunque, il deficit totale del poliedro è:

$$D_{TOT} = 360° - A_1 + 360° - A_2 + \ldots + 360° - A_V$$

Ma $V = 2 + S - F$, quindi:

$$D_{TOT} = 360° - A_1 + \ldots + 360° - A_{2+S-F}$$
$$= 360°\,(2 + S - F) - \sum_{i=1}^{2+S-F} A_i$$

Diciamo che α_j è la somma degli angoli interni della *j*-esima faccia del poliedro. Allora:

$$\sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=1}^{F} \alpha_j\,.$$

Diciamo inoltre che la faccia j ha x_j lati, allora $\alpha_j = (x_j - 2)\,180°$ per una nota identità[1]. Dunque:

$$\sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=1}^{F} \alpha_j = (x_1 - 2)180° + (x_2 - 2)180° + \ldots + (x_F - 2)180° =$$

$$= 180° \left(\sum_{j=1}^{F} x_j - 2F \right) = 180° \sum_{j=1}^{F} x_j - 360°\,F\,.$$

Ma:

$$\sum_{j=1}^{F} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_F = 2\,S$$

perché, sommando tutti gli spigoli del poliedro faccia per faccia, conto ogni spigolo due volte in quanto ogni spigolo è condiviso da due facce.

$$\sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=1}^{F} \alpha_j = 360°\,S - 360°\,F = 360°(S - F)$$

$$D_{TOT} = 360°\,(2 + S - F) - 360°(S - F) = 720° + \cancel{360°\,(S - F)} - \cancel{360°\,(S - F)}$$
$$D_{TOT} = 720°.$$

■

Teorema 2. In un poliedro omeomorfo a un toro il deficit angolare totale è di 0°.

Dimostrazione

In un poliedro omeomorfo a un toro $F - S + V = 0$ e $V = S - F$.

Allora, con un procedimento identico a prima risulta che:

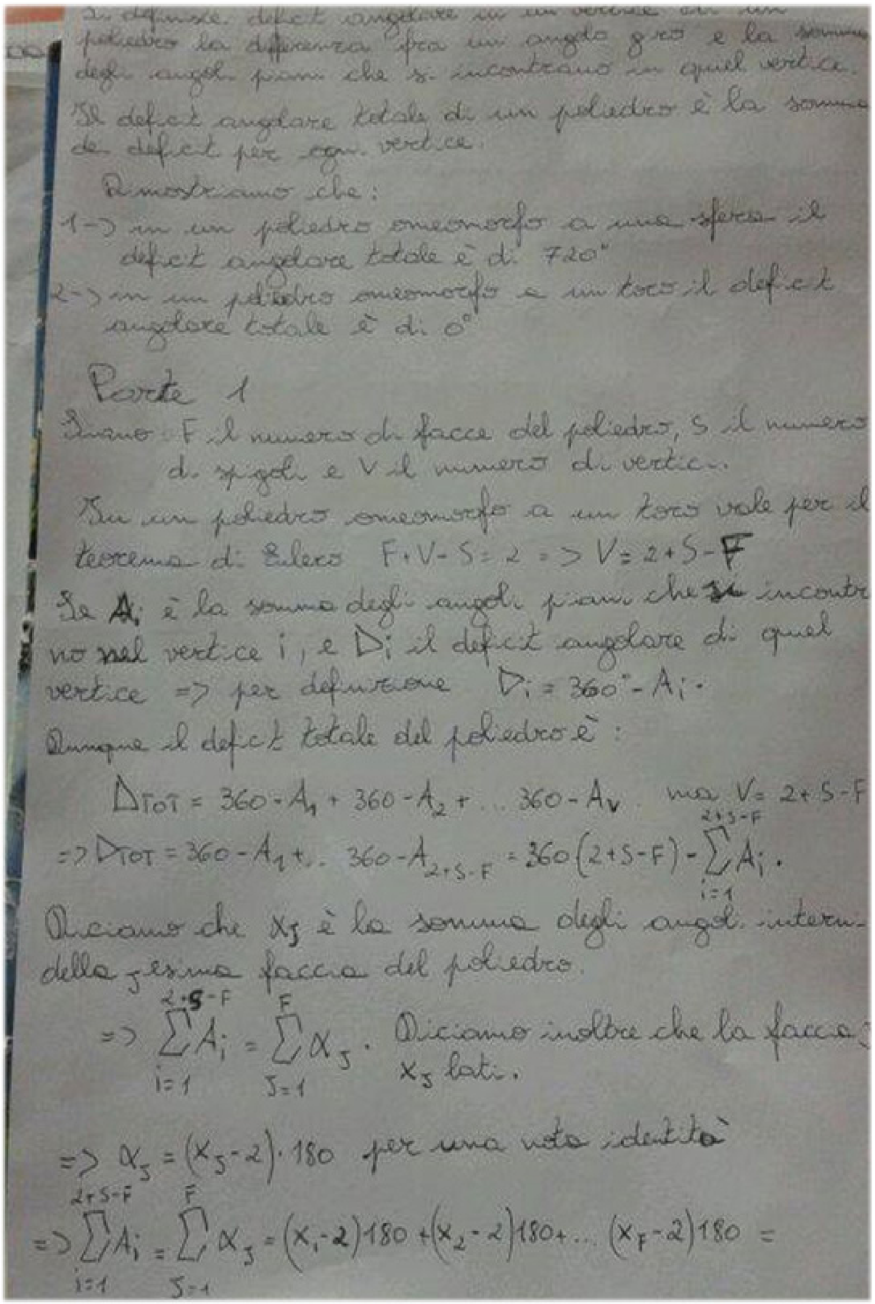
$$D_{TOT} = 360°\,\cancel{(S - F)} - 360°\,\cancel{(S - F)} = 0°$$

■

[1] Somma degli angoli interni di un poligono.

Tali risultati sono stati conseguiti in un tempo relativamente breve (circa 30 minuti) e la qualità del risultato è stata molto alta: le dimostrazioni sono formalmente corrette e particolarmente dettagliate, inoltre ogni affermazione è stata motivata con cura. Occorre sottolineare che l'iniziativa è stata presa in totale autonomia dagli studenti che non hanno voluto accettare nessun suggerimento nella stesura della dimostrazione.

Nelle successive immagini sono riprese le pagine con la dimostrazione elaborata dagli studenti.



Si definisce deficit angolare in un vertice di un poliedro la differenza fra un angolo giro e la somma degli angoli piani che si incontrano in quel vertice.

Il deficit angolare totale di un poliedro è la somma dei deficit per ogni vertice.

Dimostriamo che:

1 -> in un poliedro omeomorfo a una sfera il deficit angolare totale è di 720°

2 -> in un poliedro omeomorfo a un toro il deficit angolare totale è di 0°

Parte 1

Siano F il numero di facce del poliedro, S il numero di spigoli e V il numero di vertici.

Su un poliedro omeomorfo a un toro vale per il teorema di Eulero $F+V-S=2 \Rightarrow V=2+S-F$

Se A_i è la somma degli angoli piani che si incontrano nel vertice i, e D_i il deficit angolare di quel vertice $\Rightarrow$ per definizione $D_i = 360° - A_i$.

Dunque il deficit totale del poliedro è:

$$\Delta_{TOT} = 360 - A_1 + 360 - A_2 + \dots 360 - A_V \quad \text{ma } V = 2+S-F$$

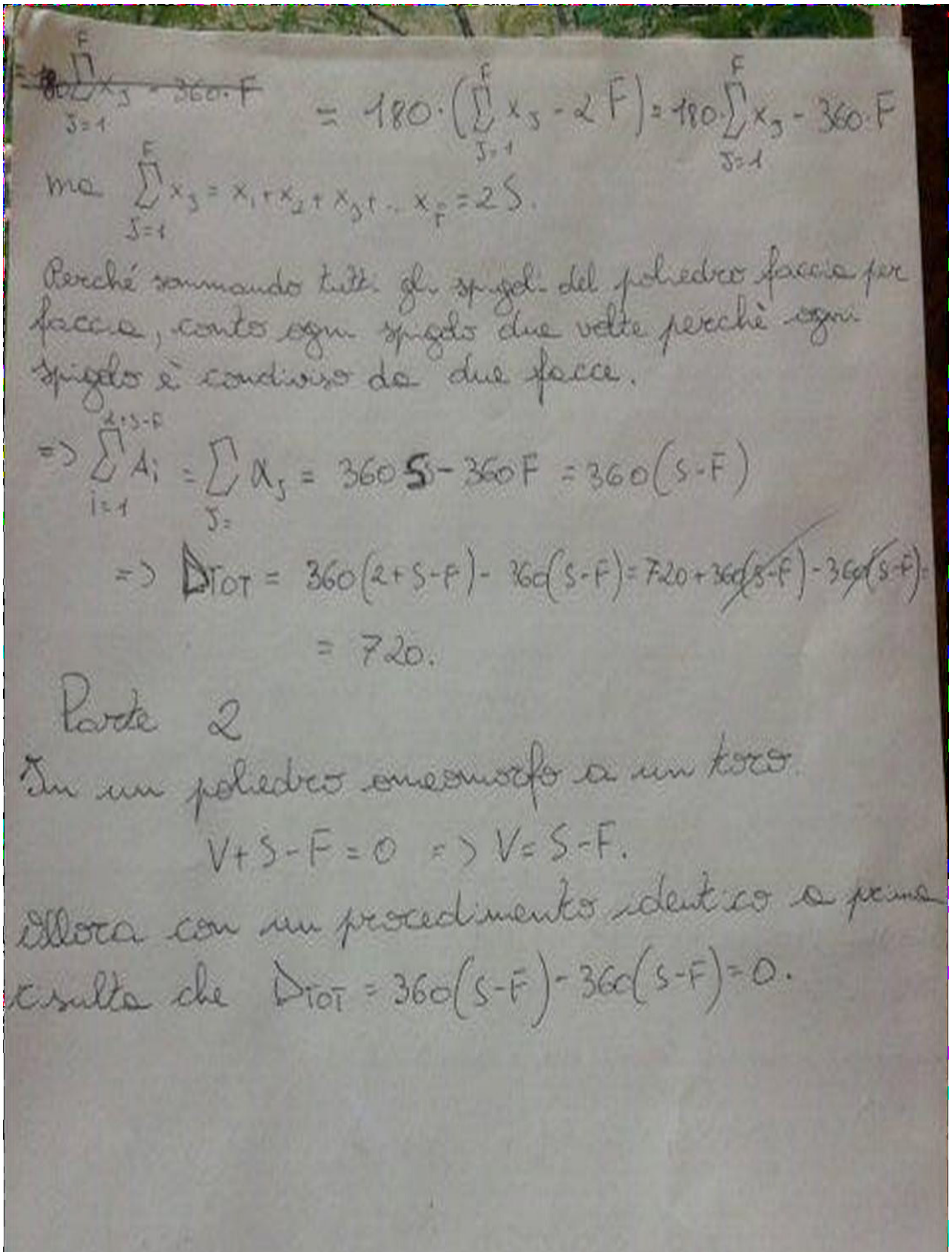
$$\Rightarrow \Delta_{TOT} = 360 - A_1 + \dots 360 - A_{2+S-F} = 360(2+S-F) - \sum_{i=1}^{2+S-F} A_i.$$

Diciamo che α_j è la somma degli angoli interni della j-esima faccia del poliedro.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=1}^{F} \alpha_j.$$ Diciamo inoltre che la faccia ha x_j lati.

$$\Rightarrow \alpha_j = (x_j - 2)\cdot 180$$ per una nota identità

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=1}^{F} \alpha_j = (x_1-2)180 + (x_2-2)180 + \dots (x_F-2)180 =$$



$\cancel{\sum_{j=1}^{F} x_j - 360\cdot F}$ $= 180\cdot\left(\sum_{j=1}^{F} x_j - 2F\right) = 180\sum_{j=1}^{F} x_j - 360\cdot F$

ma $\sum_{j=1}^{F} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_F = 2S.$

Perché sommando tutti gli spigoli del poliedro faccia per faccia, conto ogni spigolo due volte perché ogni spigolo è condiviso da due facce.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2+S-F} A_i = \sum_{j=} \alpha_j = 360S - 360F = 360(S-F)$

$\Rightarrow \Delta_{TOT} = 360(2+S-F) - 360(S-F) = 720 + \cancel{360(S-F)} - \cancel{360(S-F)} =$

$= 720.$

Parte 2

In un poliedro omeomorfo a un toro

$V+S-F=0 \Rightarrow V=S-F.$

Allora con un procedimento identico a prima risulta che $\Delta_{TOT} = 360(S-F) - 360(S-F) = 0.$

Figura 2. La dimostrazione elaborata dagli studenti

CAPITOLO 4

Poliedri inscritti

Introduzione

Questa attività si propone di far scoprire agli studenti le molteplici relazioni che intercorrono tra i diversi poliedri, in particolare il concetto di poliedro duale. La scheda di lavoro fornita si basa fortemente sui contenuti elaborati nelle precedenti schede, in particolare sulla costruzione e sull'analisi dei poliedri regolari (Capitolo 1) e sulla formula di Eulero (Capitolo 2).

Il taglio dell'attività è prevalentemente pratico ed evita di affrontare direttamente i dettagli dimostrativi delle nozioni coinvolte, in modo da compensare alla stanchezza che gli studenti potrebbero aver accumulato in seguito allo svolgersi delle tre attività precedenti. Tuttavia, non manca di richiamare allo schema "sperimentazione-generalizzazione", per esempio rendendo gli studenti protagonisti della scoperta della nozione di poliedro duale.

Nella prima parte dell'attività, alcuni esercizi sulla ricerca e costruzione di poliedri inscritti (tetraedri e cubi in un dodecaedro) si propongono di porre gli studenti di fronte alla difficoltà di visualizzare oggetti tridimensionali; difficoltà che per costruzioni di questo tipo è presente anche qualora ci si possa aiutare con gli ZOMETOOL. Per mezzo di una ragionata sperimentazione, gli studenti possono risolvere il problema e passare agli esercizi successivi.

Nella seconda parte dell'attività si introducono due possibili definizioni di poliedro duale $\mathsf{P}^{\#}$ di un dato poliedro P:

1. il poliedro i cui vertici giacciono nei centri delle facce di P, collegati da spigoli qualora le due facce corrispondenti siano adiacenti;
2. il poliedro i cui spigoli incontrano perpendicolarmente e si dimezzano scambievolmente con gli spigoli di P.

Sebbene la definizione 1 sia molto più comunemente usata, e anche più precisa e naturale nella definizione del concetto, la definizione 2 si rivela molto utile da applicare nel caso degli ZOMETOOL. Infatti, la richiesta che gli spigoli si dimezzino scambievolmente consente di unire i due poliedri in un un'unica struttura rigida, mentre l'altra definizione lascerebbe i due poliedri scollegati, dato che le strutture ZOMETOOL sono costituite dai soli vertici e spigoli mentre lasciano all'immaginazione dell'utente il compito di visualizzare le facce.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali [...] sia mediante programmi informatici.[...]

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini [...]) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.[...]

Saranno inoltre studiati [...] i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli.

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

Lo studio della geometria proseguirà [...] anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare saranno studiate [...] le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** costruzione ed esplorazione dei solidi e delle loro proprietà.
- **Ordine di scuola:** primo e secondo biennio della scuola secondaria di II grado.
- **Materiale:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori, ZOMETOOL.
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza approfondita dei solidi platonici e capacità di realizzarli concretamente in base a quanto appreso nelle precedenti attività;
  - saper riconoscere la regolarità di un poliedro costruito.
- **Obiettivi:**
  - apprendere la definizione di poliedro regolare inscritto;
  - riconoscere l'effettiva inscrivibilità di molti poliedri;
  - apprendere la definizione di poliedro duale;
  - riconoscere le proprietà del poliedro duale;
  - comprendere il concetto di dualità attraverso la costruzione e la visualizzazione di un modello tridimensionale;
  - intuire quale sia il duale di un dato poliedro (relativamente semplice) attraverso la capacità di astrazione, senza la sua realizzazione concreta;
  - riflettere sul carattere involutorio della costruzione duale.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è concepita come un laboratorio di matematica nel quale gli studenti sono invitati a realizzare forme geometriche tridimensionali sempre più complesse. La chiave di lettura dell'attività è scindibile in due momenti didattici consequenziali: *costruire per visualizzare* e, successivamente, *visualizzare per comprendere* e *verificare*. Gli studenti vengono divisi in gruppi di lavoro composti da 4/5 ragazzi. A ciascun gruppo viene consegnata una grande quantità di ZOMETOOL che dovranno essere opportunamente assemblati al fine di realizzare diverse forme geometriche. Le schede di lavoro, consegnate a ciascuno studente, illustrano brevemente il materiale messo a disposizione e descrivono man mano le varie figure da realizzare e, con domande puntuali, invitano lo studente a riflettere su alcune proprietà inerenti i vari solidi costruiti. Se ci sono sufficienti ZOMETOOL ogni studente realizza le varie forme indicate nelle schede altrimenti, all'interno di un gruppo, si contribuisce in più persone alla costruzione di un unico solido.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 40 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **poliedri inscritti:** vengono realizzati vari poliedri inscritti all'interno di solidi precedentemente costruiti;
  - **poliedri duali:** a partire dalla costruzione di solidi già realizzati vengono costruiti e analizzati i relativi poliedri duali.

Nuclei coinvolti, conoscenze e abilità interessate

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti (UMI, 2003)**	
		disciplinari	**trasversali**
• Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	• Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. • Simmetrie nei poliedri regolari. • Proprietà dei principali solidi geometrici.	Spazio e figure	Misurare; argomentare, congetturare, dimostrare.

Scheda per gli studenti

Poliedri inscritti

Le proprietà di simmetria dei poliedri regolari fanno sì che spesso sia possibile inscrivere un poliedro regolare all'interno di un altro. Un poliedro **P** si dice ***inscritto*** in un poliedro regolare **Q** se *tutti* i suoi vertici coincidono con *alcuni* dei vertici di **Q** e tutti gli spigoli giacciono all'interno del volume di **Q**.

Un esempio di poliedro inscritto è già stato visto precedentemente nell'esercizio 8, in cui abbiamo costruito un tetraedro regolare inscritto in un cubo (figura C).

Esercizio 17. Prendi il dodecaedro che hai precedentemente costruito, smonta l'impalcatura di bastoncini gialli e costruisci un tetraedro regolare inscritto in esso.

Suggerimento: inizia cercando un triangolo equilatero e poi completa la costruzione a tutto il tetraedro. Il lato che serve è il verde lungo.

Il tetraedro che hai trovato non è l'unico: all'interno di un dodecaedro se ne possono costruire ben cinque differenti senza vertici in comune. Inoltre, questi cinque tetraedri possono essere scelti in più modi diversi. Trovare tetraedri inscritti può sembrare semplice, ma la casistica dei poliedri inscrivibili non si ferma qui!

Esercizio 18. Dopo aver smontato il tetraedro inscritto, prendi il dodecaedro che hai precedentemente costruito e costruisci un cubo inscritto in esso.

Suggerimento: inizia cercando un quadrato e poi completa la costruzione al resto del cubo. Il lato che ti serve è il blu medio.

Come nel caso precedente, è possibile trovare diversi cubi inscritti in un dodecaedro. Più precisamente ne esistono cinque che, in questo caso, si intersecano tra loro.

Oltre ai poliedri inscritti, vi sono altri modi di mettere in relazione diversi poliedri tra loro, il più interessante è senza dubbio la costruzione del ***poliedro duale.***

Classicamente, dato un poliedro, il suo poliedro duale si ottiene congiungendo con uno spigolo i centri di ogni coppia di facce adiacenti. In questo modo gli spigoli dei due poliedri non si intersecano, rendendo la costruzione non direttamente effettuabile con gli ZOMETOOL.

Per realizzare il poliedro duale utilizzeremo allora un'altra tecnica: costruiremo gli spigoli del poliedro duale in modo che siano perpendicolari agli spigoli del poliedro originario nel loro punto medio.

Esercizio 19. Costruisci un cubo con il lato formato da due bastoncini blu piccoli. Partendo dai punti medi degli spigoli, costruisci su ogni faccia una piramide a base quadrata (senza costruire gli spigoli della base) in modo che i due spigoli che partono dallo stesso punto medio giacciano sulla stessa retta. Che poliedro hai ottenuto?

Suggerimento: il lato che ti serve è il verde medio.

Esercizio 20. Cosa puoi dire del numero di spigoli del cubo e dell'ottaedro? Cosa puoi dire invece del numero di facce e di vertici delle due figure?

Esercizio 21. In base a quanto hai scoperto sopra e riguardando la tabella che hai compilato nell'esercizio 12, quali puoi immaginare che siano i poliedri duali del dodecaedro, dell'icosaedro e del tetraedro?

Scheda per l'insegnante e soluzione

Di seguito si riportano gli esercizi con le soluzioni indicate in grassetto, insieme ad alcuni commenti degli autori.

Le proprietà di simmetria dei poliedri regolari fanno sì che spesso sia possibile inscrivere un poliedro regolare all'interno di un altro. Un poliedro **P** si dice ***inscritto*** in un poliedro regolare **Q** se *tutti* i suoi vertici coincidono con *alcuni* dei vertici di **Q** e tutti gli spigoli giacciono all'interno del volume di **Q**.

Un esempio di poliedro inscritto è già stato visto precedentemente nell'esercizio 8, in cui abbiamo costruito un tetraedro regolare inscritto in un cubo (figura C).

Esercizio 17. Prendi il dodecaedro che hai precedentemente costruito, smonta l'impalcatura di bastoncini gialli e costruisci un tetraedro regolare inscritto in esso.

Suggerimento: inizia cercando un triangolo equilatero e poi completa la costruzione a tutto il tetraedro. Il lato che serve è il verde lungo.

Il tetraedro che hai trovato non è l'unico: all'interno di un dodecaedro se ne possono costruire ben cinque differenti senza vertici in comune. Inoltre, questi cinque tetraedri possono essere scelti in più modi diversi. Trovare tetraedri inscritti può sembrare semplice, ma la casistica dei poliedri inscrivibili non si ferma qui!

Esercizio 18. Dopo aver smontato il tetraedro inscritto, prendi il dodecaedro che hai precedentemente costruito e costruisci un cubo inscritto in esso.

Suggerimento: inizia cercando un quadrato e poi completa la costruzione al resto del cubo. Il lato che ti serve è il blu medio.

Come nel caso precedente, è possibile trovare diversi cubi inscritti in un dodecaedro. Più precisamente ne esistono cinque che, in questo caso, si intersecano tra loro.

In questa prima parte dell'attività viene introdotta agli studenti la nozione di *poliedro inscritto* e viene messa alla prova la loro capacità di visualizzazione tridimensionale nella ricerca di cubi e tetraedri inscritti in un dodecaedro. Inoltre, l'accenno ai molteplici modi differenti di inscrivere questi poliedri si presta a un approfondimento da parte dell'insegnante sul tema delle trasformazioni geometriche.

Il modo più semplice per convincersi che vi sono diversi modi per inscrivere questi poliedri, infatti, è semplicemente quello di ruotare il poliedro composito ottenuto intorno alla faccia di base, 72 gradi alla volta. In questo modo, si ottengono 5 diversi tetraedri e cubi all'interno del dodecaedro.

Tuttavia, i tetraedri presenti all'interno del dodecaedro sono in realtà 10. Un'accurata sperimentazione può rivelare che questi ulteriori 5 tetraedri non sono ottenibili per rotazioni a partire dagli altri 5, ma sono ottenibili per riflessione. In pratica, si rivela necessario smontare il tetraedro e rimontarlo in una differente configurazione, come mostrato in figura 1.

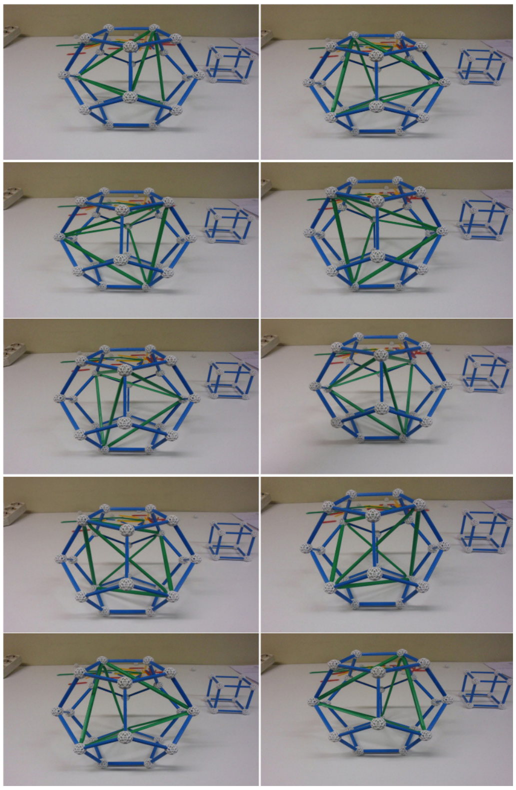


Figura 1. Le 5 + 5 possibili configurazioni: esattamente simmetriche da sinistra a destra

Questo fenomeno si presta a far scaturire riflessioni anche interdisciplinari (per esempio riguardo al fenomeno della chiralità in alcune molecole organiche).

Con l'aiuto dell'insegnante, gli studenti possono notare che il motivo per cui queste costruzioni sono possibili è da ricercarsi nel fatto (già noto a Euclide) che tutti i poliedri regolari sono inscrivibili (e circoscrivibili) in una sfera e nelle loro notevoli proprietà di regolarità (in particolare, invarianza per trasformazioni geometriche).

Oltre ai poliedri inscritti, vi sono altri modi di mettere in relazione diversi poliedri tra loro, il più interessante è senza dubbio la costruzione del ***poliedro duale.***

Classicamente, dato un poliedro, il suo poliedro duale si ottiene congiungendo con uno spigolo i centri di ogni coppia di facce adiacenti. In questo modo gli spigoli dei due poliedri non si intersecano, rendendo la costruzione non direttamente effettuabile con gli ZOMETOOL.

Per realizzare il poliedro duale utilizzeremo allora un'altra tecnica: costruiremo gli spigoli del poliedro duale in modo che siano perpendicolari agli spigoli del poliedro originario nel loro punto medio.

Esercizio 19. Costruisci un cubo con il lato formato da due bastoncini blu piccoli. Partendo dai punti medi degli spigoli, costruisci su ogni faccia una piramide a base quadrata (senza costruire gli spigoli della base) in modo che i due spigoli che partono dallo stesso punto medio giacciano sulla stessa retta. Che poliedro hai ottenuto?

Il poliedro ottenuto è un ottaedro.

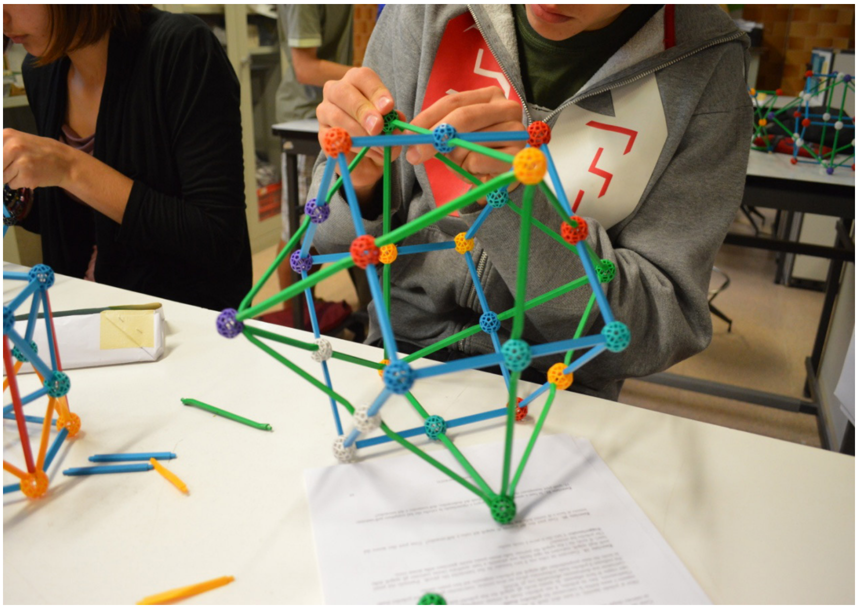


Figura 2. Uno studente al lavoro nella realizzazione del poliedro duale del cubo

In questa seconda parte dell'attività viene introdotto il concetto di poliedro duale, prima tramite le due definizioni presentate all'inizio del capitolo e poi tramite una realizzazione concreta.

Come spesso accade in matematica, la definizione si giova dell'esempio rendendo più efficace la trasmissione del concetto allo studente. In questo caso l'esempio si rivela essere di particolare importanza, per via della difficoltà di visualizzazione mentale di oggetti tridimensionali complessi.

L'equivalenza di queste due definizioni si rivela intimamente collegata alla proprietà di involuzione della relazione di dualità (che verrà approfondita maggiormente nei seguenti due esercizi). Infatti, mentre la definizione 1 sembra essere intrinsecamente non involutiva, producendo figure sempre più piccole a ogni passaggio, la definizione 2 è evidentemente simmetrica e palesa il carattere involutivo di questa relazione. Una rappresentazione grafica di questo concetto si può ritrovare nella figura 3, in cui si vede come la dualità secondo la definizione 2 è in un certo senso "intermedia" tra le due dualità corrispondenti secondo la definizione 1.

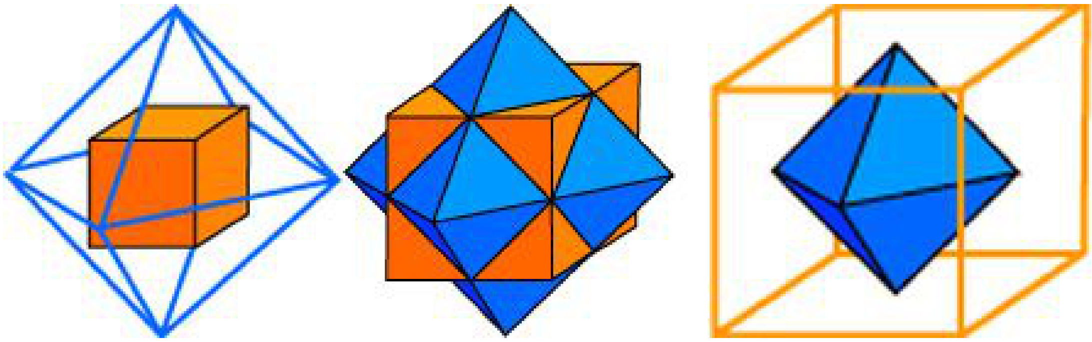


Figura 3. La dualità tra cubo e ottaedro nei tre modi presentati

Esercizio 20. Cosa puoi dire del numero di spigoli del cubo e dell'ottaedro? Cosa puoi dire invece del numero di facce e di vertici delle due figure?

Sia il cubo che l'ottaedro hanno 12 spigoli. Invece, il numero di facce e vertici nelle due figure si ritrova scambiato: 6 e 8 per il cubo, 8 e 6 per l'ottaedro.

Esercizio 21. In base a quanto hai scoperto sopra e riguardando la tabella che hai compilato nell'esercizio 12, quali puoi immaginare che siano i poliedri duali del dodecaedro, dell'icosaedro e del tetraedro?

Il poliedro duale del dodecaedro è l'icosaedro (e viceversa), mentre il poliedro duale del tetraedro è se stesso.

In quest'ultima parte dell'attività si cerca di stimolare lo studente a trovare autonomamente la relazione che intercorre tra un poliedro e il suo duale.

L'*Esercizio* 20 si presenta quasi in forma di suggerimento, indirizzando lo studente a concentrarsi sugli aspetti che si riveleranno salienti nella risoluzione dell'*Esercizio* 21. Per la realizzazione di questi esercizi non è necessario costruire poliedri o contare direttamente lati e spigoli, dato che questo è già stato fatto e riportato nella tabella dell'*Esercizio* 12 dell'attività sul teorema di Eulero.

Con l'ausilio di questa tabella, gli studenti possono accorgersi della relazione tra un poliedro e il suo duale (stesso numero di spigoli e numero di facce e vertici scambiato) arrivando a riportare la soluzione dell'*Esercizio* 21. Con l'aiuto dell'insegnante, si può far notare ai ragazzi il carattere involutivo della dualità (discusso precedentemente) e come questo fatto "sperimentale" da loro appena scoperto sia giustificato (e in realtà dimostrabile) proprio a partire dalle definizioni date a inizio scheda. Infatti, la definizione 1 costruisce un vertice per ogni faccia (e il viceversa ci viene garantito dalla proprietà di involuzione), mentre la definizione 2 (oltre a palesare la proprietà di involuzione) costruisce uno spigolo di un poliedro per ogni spigolo dell'altro.

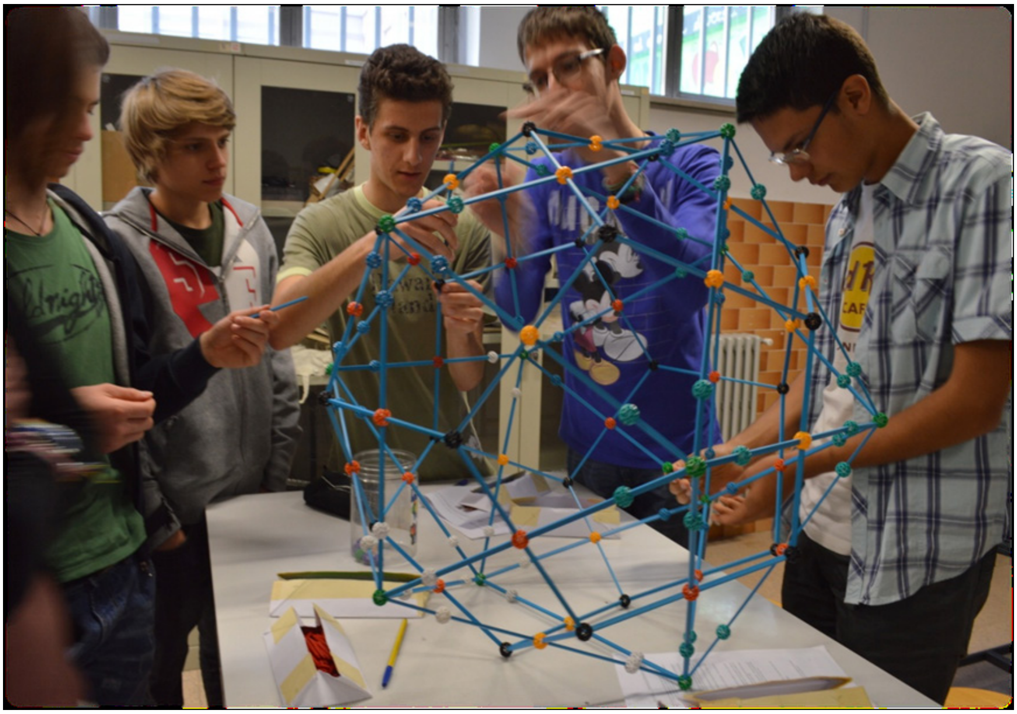


Figura 4. Studenti alle prese con la costruzione del poliedro duale del dodecaedro

Ormai convinti della relazione trovata e parzialmente dimostrata, l'insegnante può esortare gli studenti a verificare le loro ipotesi, realizzando anche le altre coppie di poliedri regolari duali congetturate, a conferma pratica dell'intuizione avuta. Una particolare attenzione va data al caso del dodecaedro e dell'icosaedro che, sebbene siano entrambi costituiti da bastoncini blu, nella costruzione del poliedro duale data dalla definizione 2, hanno spigoli di lunghezza diversa, essendo lo spigolo dell'icosaedro più lungo di quello del dodecaedro. Pertanto, si può effettuare la costruzione sia partendo da un icosaedro con spigoli pari a due bastoncini blu medi sia da un dodecaedro con spigoli pari a due bastoncini blu corti (ma non viceversa).

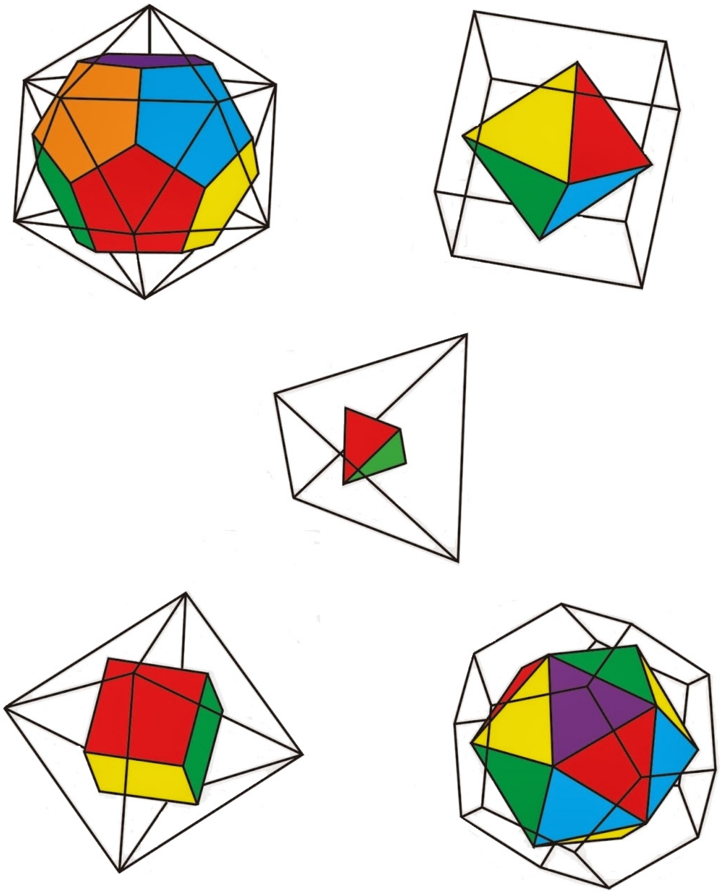


Figura 5. Solidi platonici con la costruzione dei relativi poliedri duali

Approfondimento

Dimostriamo che il passaggio al poliedro duale è una involuzione.

Sia $\mathbb{P}$ un poliedro con vertici V_1, V_2, …, V_m e facce F_1, F_2, …, F_n. Il suo poliedro duale $\mathbb{Q}$ ha facce G_1, G_2, …, G_m e vertici U_1, U_2, …, U_n ed esisterà una biezione φ che manda V_i in G_i ($\forall\, i = 1 \dots m$) e F_l in U_l ($\forall\, l = 1 \dots n$) che preserva le adiacenze.

Il poliedro $\mathbb{R}$, duale di $\mathbb{Q}$, avrà vertici Z_1, Z_2, …, Z_m e facce H_1, H_2, …, H_n ed esisterà una biezione ψ tra G_i e Z_i ($\forall\, i = 1 \dots m$) e tra H_l e U_l ($\forall\, l = 1 \dots n$) che preserva le adiacenze.

Con la composizione di φ e ψ si ottiene una biezione ω da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{R}$ che manda V_i in Z_i ($\forall\, i = 1 \dots m$) e F_l in H_l ($\forall\, l = 1 \dots n$). Se V_h è adiacente a F_k (con h, k naturali fissati) in $\mathbb{P}$ allora U_k è adiacente a G_h in $\mathbb{Q}$ poiché $\mathbb{P}$ è duale di $\mathbb{Q}$; anche Z_h è adiacente a H_k in $\mathbb{R}$ perché $\mathbb{Q}$ è duale di $\mathbb{R}$.

Ricapitolando, se V_h è adiacente a F_k allora Z_h è adiacente a H_k. Dunque, i poliedri $\mathbb{P}$ e $\mathbb{R}$ hanno il medesimo numero di spigoli, di vertici e di facce ed esiste una biezione che preserva le adiacenze. In definitiva, a meno di omeomorfismi, vale:

$$(\mathbb{P}\#)\# = \mathbb{R} = \mathbb{P} \qquad \forall \mathbb{P}$$

Uno sguardo alle attività svolte: strategie e difficoltà riscontrate

Anche in questa attività molti studenti hanno costruito più di quanto non fosse stato loro richiesto. In alcuni casi, questo è avvenuto per una errata interpretazione delle consegne, in altri casi per pura iniziativa personale.

Per esempio, alcuni studenti alle prese con la costruzione del poliedro duale del cubo hanno male interpretato le consegne, costruendo le piramidi sulle facce di modo che i punti della base coincidessero con i vertici delle facce del cubo, invece che con i punti medi degli spigoli. Questo processo erroneo ha portato però gli studenti alla scoperta di un poliedro molto interessante: il *dodecaedro rombico* (figura 6).

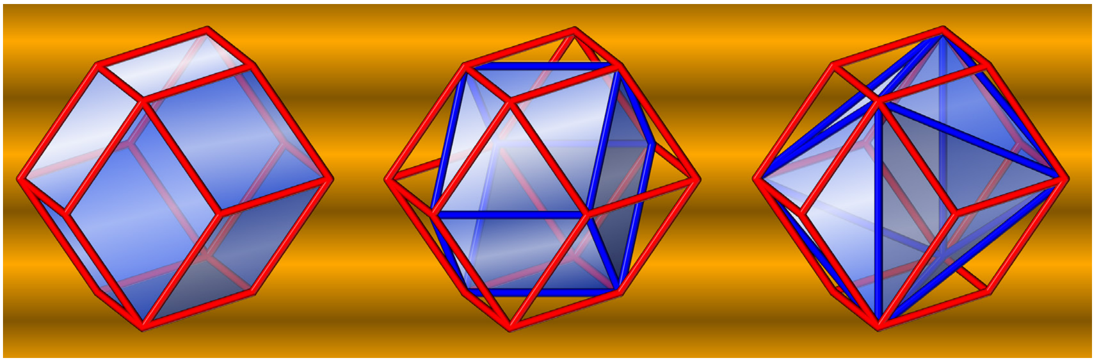


Figura 6. Il dodecaedro rombico, ottenibile stellando un cubo o un ottaedro

Questo poliedro è ottenibile stellando sia un cubo che il suo ottaedro duale e racchiude, infatti, i vertici di entrambi i poliedri. Risulta quindi essere una costruzione molto interessante che racchiude in sé entrambi i concetti di poliedro inscritto e di poliedro duale. Una simile costruzione è anche effettuabile a partire da un dodecaedro e icosaedro duali, ottenendo un *triacontaedro rombico*, e a partire da due tetraedri duali ottenendo un cubo (figura 7).

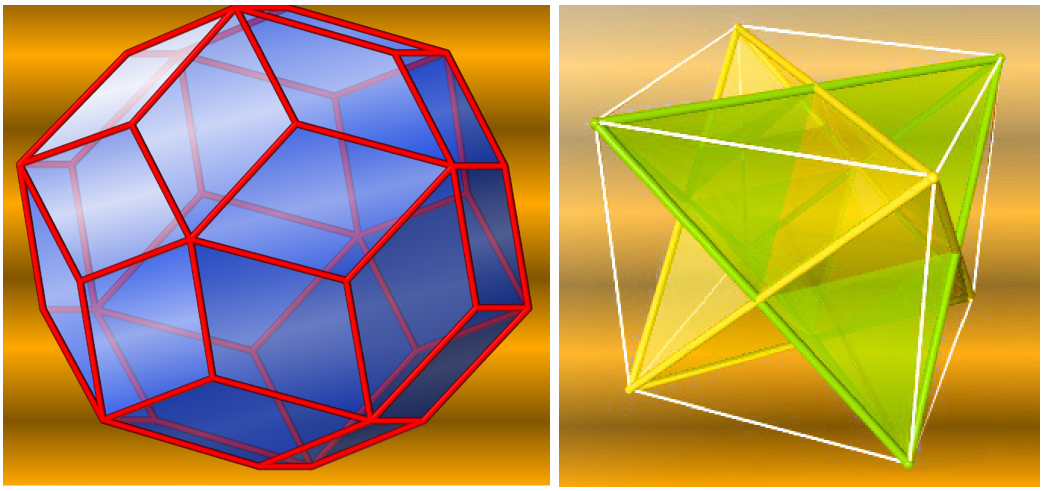


Figura 7. Il triacontaedro rombico e un cubo

Gli studenti, con il suggerimento dell'insegnante, sono stati in grado di costruire un triacontaedro rombico e di esaminarne la struttura. Si è potuto così fare un approfondimento sui *poliedri di Catalan*, poliedri duali dei più noti poliedri Archimedei, caratterizzati dalla proprietà di essere composti da facce tutte equivalenti tra loro: prese comunque due facce, esiste un'isometria del solido che sposta la prima faccia nella seconda. Questa proprietà garantisce che siano dadi equi, e infatti vengono utilizzati nello sviluppo di dadi (il triacontaedro rombico è commercialmente reperibile come dado a 30 facce).

In altri casi, gli studenti hanno cercato di unire insieme le diverse costruzioni che avevano affrontato in un'unica struttura complessa riassuntiva. Per esempio, è stato realizzato un tetraedro inscritto in un cubo inscritto in un dodecaedro con relativo icosaedro duale: una struttura che si è rivelata essere molto più voluminosa del previsto (occupando un volume di poco più di 60 cm^3) e di difficile lettura (figura 8). Sapientemente, gli studenti hanno scelto i colori dei vertici dei diversi poliedri (nero per il dodecaedro e verde per l'icosaedro) in modo da renderli più facilmente riconoscibili.

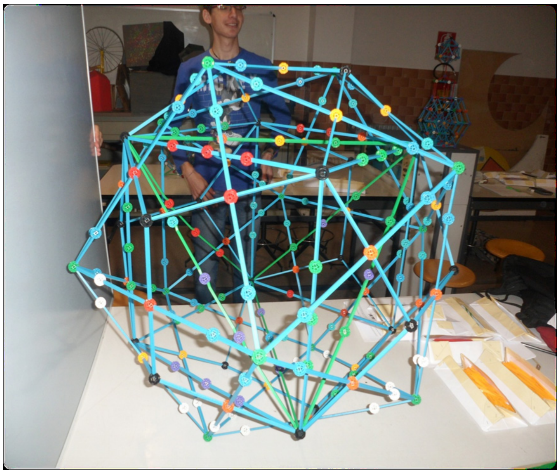


Figura 8. Un tetraedro inscritto in un cubo inscritto in un dodecaedro con relativo icosaedro duale

Nella prima parte dell'attività, quasi mai gli studenti sono stati in grado di individuare immediatamente i vertici necessari per costruire i poliedri inscritti richiesti. La strategia è stata dunque quella di scegliere un vertice a caso, prendere il bastoncino suggerito e cercare tra tutti gli incastri possibili quelli in grado di collegare quel vertice a un altro. Tuttavia, questa parte non ha in genere destato troppe preoccupazioni, in parte perché il concetto di poliedro inscritto si è potuto appoggiare sulla controparte bidimensionale di "poliedro inscritto", già nota agli studenti, e sulla costruzione di un tetraedro in un cubo già effettuata nella prima attività.

Al contrario, la nozione di poliedro duale, come prevedibile, si è rivelata essere del tutto nuova agli studenti e anche per questo ha destato qualche difficoltà di comprensione. La costruzione pratica di un esempio, richiesta dall'*Esercizio* 19, si è rivelata fondamentale facendo luce sul concetto e consentendo agli studenti, tramite i successivi esercizi, di congetturare le altre relazioni di dualità tra solidi platonici senza doverli costruire. Anche in questo caso gli ZOMETOOL si sono rivelati un ottimo strumento didattico: infatti, la costruzione richiesta dall'*Esercizio* 19 è stata portata a termine senza particolari difficoltà dalla maggior parte degli studenti, anche quando il concetto di poliedro duale ancora non era chiaro, e ha loro consentito poi di comprenderlo più facilmente.

Una particolare difficoltà è stata riscontrata nel determinare il poliedro duale del tetraedro: alcuni studenti, infatti, sono andati alla ricerca di un poliedro con quattro facce, sei spigoli e quattro vertici *che non fosse un tetraedro*, giungendo all'errata conclusione che al tetraedro non è associabile alcun duale. Tale considerazione nasce dal fatto che la trasformazione nel duale viene percepita come deformazione concreta, rendendo non banale il pensiero che tale deformazione possa portare a ottenere lo stesso identico solido di partenza.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Baer, S. (1970). *Zome Primer.* Zomeworks Corporation. Albuquerque.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Centro Documentazione Educativa, Modena.

Bartolini Bussi, M. G., Chiappini, G., Paola, D., Reggiani, M., & Robutti, O. (2004). *Teaching and Learning Mathematics with Tools.* In: Cannizzaro, L., Pesci, A., & Robutti, O. *Research and Teacher Training in Mathematics Education in Italy: 2000-2003*. pp. 138-169.

Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular polytopes*. Courier Corporation.

Dedò, M. (2000). *Forme.* Bologna: Zanichelli.

Edwards, L. D. (2003). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science.* Working Group Paper, Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Euclide. *Elementi* (a cura di F. Acerbi) *libro XIII.* Bompiani, 2007.

Hart, G.W., & Picciotto, H. (2001). *Zome Geometry: hands-on learning with Zome models.* Key Curriculum press.

Hildebrandt, P., & Richert, C. (2012). Domes, Zomes, and Drop City. In *Proceedings of Bridges 2012: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. Tessellations Publishing.

Kosniowski, C. (1988). *Introduzione alla topologia algebrica.* Bologna: Zanichelli.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. (2003). *Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Abilità e conoscenze matematiche per la Scuola Secondaria di secondo grado.* Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Il Piano Lauree Scientifiche -Linee guida.* Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nel piano degli studi previsto per il liceo scientifico*. Roma.

Noble, T., Di Mattia, C., Nemirovsky, R., & Barros, A. (2006). *Making a Circle: Tool Use and the Spaces Where We Live.* Cognition and instruction, *24*(4), pp. 387-437.

Norman, D. A., & Blum, I. (1995). *Le cose che ci fanno intelligenti. Il posto della tecnologia nel mondo dell'uomo.* Feltrinelli.

Platone. *Timeo* (a cura di G. Reali). Bompiani, 2000.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (1997). *Gli strumenti dell'uomo dal progetto all'uso*. Ergonomia, 9.

http://www.progettolaureescientifiche.eu/

http://www.zometool.com/

http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/zometool.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Zome

http://umi.dm.unibo.it/

http://www.sis-statistica.it/

http://www.matematicamente.it/

https://www.vismath.eu/en/zometool

http://www.sbu.edu/academics/schools/arts-and-sciences/departments-majors-minors/mathematics/mathematical-resources/zometool-resources