Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito

Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito
di
Loredana Biacino* e Gabriella Viola**

" Lorsque du haut d'une colline on jette les yeux sur une valle plaine dont la vue ne peut embrasser toute l'étendue …".
G.S. Gerdil, *L'infini absolue.*

Introduzione

Nel paesaggio culturale dell'Italia della seconda metà del Settecento, spicca la figura di Giacinto Sigismondo Gerdil (Samoëns, Alta Savoia, 1718-Roma, 1802), personaggio di altissimo livello non solo in campo teologico, ma anche più in generale in campo filosofico-letterario e matematico-scientifico.
Nel 1734 entra nell'ordine dei barnabiti; nel 1735, dopo il noviziato, è inviato a Bologna dove compie i suoi primi studi di teologia e si forma scientificamente: può infatti far tesoro dell'amicizia con Francesco Maria Zanotti (1692-1777) e degli uomini più dotti della città che lo indirizzano alle teorie di Cartesio (1596-1650), Newton (1642-1727), Malebranche (1638-1715) e Gassendi (1592-1655).
Questo primo periodo di studi si conclude con la tesi di dottorato in filosofia su "*La dottrina di Cartesio*", dove si avverte l'influsso delle idee di Malebranche. In difesa di tali idee, contro il Locke (1632-1704), scrive nel 1748 la *Défense du sentiment du Père Malebranche sur la nature et l'origine des idées contre l'examen de Mr. Locke*.
È professore nei collegi dell'ordine e nel 1749 diviene titolare dell'insegnamento di Filosofia Morale all'Università di Torino, essendo dopo qualche anno (1754) promosso alla cattedra di Teologia Morale. Molti incarichi prestigiosi costellano la sua attività di religioso, culminata con la nomina a cardinale nel 1777. Alla morte di Pio VI è nella rosa dei papabili nel conclave del 1799.
Nel suo insegnamento è moderno, come pochi attento alle idee che provengono dal mondo della scienza: in particolare sostiene e divulga le teorie di Newton che stima profondamente.
Egli stesso affronta questioni di carattere scientifico e matematico, spesso, pur essendo uomo di chiesa, in maniera non convenzionale. Interessante il giudizio espresso per d'Alembert, definito nel 1755, nell'*Introduzione allo studio della religione* "uno dei più grandi uomini di questo secolo"[1]; la stima è confermata anche nelle edizioni successive, nonostante la condanna all'indice dell'*Encyclopédie* avvenuta nel 1758-59; nella *Mèmoire sur la cause phisique de la cohesion des hemispheres de Magdebourg* "l'illustre d'Alembert" è definito "Un des plus zéles défenseur de la Philosophie de Newton, digne de l'étre par l'élévation, de son génie et l'étendue de ses conoissances." (Gerdil, 1845, Vol.2, p. 812.).
D'altro canto anche d'Alembert guarda con interesse all'uomo e alla sua posizione riguardo al calcolo, come si evince dalle lettere che gli invia il 26 luglio 1754 e il 24 ottobre 1755[2].
In effetti Gerdil è legato all'intellettuale francese, oltre che dalla stima per il valente scienziato e uomo di cultura, da un'identità di vedute di carattere matematico per quanto concerne la teoria degli infinitesimi e dell'infinito, argomento vivacemente dibattuto in tutta la prima metà del Settecento e che è l'oggetto del saggio *Mèmoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761.

[1] Gerdil, 1845, Vol. 2, pag. 54. Le parole usate da Gerdil sono: "*Del celebre Gio. Bernoulli riporterò ciò che scrive nel suo elogio uno dei più grandi uomini di questo secolo (il Sig. d'Alembert)*" Seguono le parole di d'Alembert, riferite al Bernoulli e riportate dal Gerdil in quanto significative del sentire religioso dell'enciclopedista.
[2] In tali lettere si fa riferimento a due scritti fatti pervenire a d'Alembert: uno di essi, in francese, fu poi pubblicato come parte del *Recueil des Dissertations*, nel 1760 da Chaubert a Parigi, e subì una successiva elaborazione nella *Mèmoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761. L'altro, in italiano, è *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*.

Gerdil fu uno dei primi soci della “Società privata torinese”, fondata nel 1757 dal marchese Angelo Saluzzo, da Gianfranco Cigna e dal ventunenne Giuseppe Luigi Lagrange, che sarebbe poi diventata l’Accademia delle Scienze di Torino nel 1783. Egli ne scrisse regole e statuto; inoltre la sua presenza contribuì all’internazionalizzazione dell’Accademia con il costituirsi di una fitta rete di scambi epistolari.
Per altre informazioni di carattere biografico si può consultare ad es. P. Stella, 2013 o Piantoni, 1851. Riportiamo qui una parte delle considerazioni conclusive del saggio di P. Stella, 2013: “… la modernità del cardinale barnabita … è da vedere nell’aver accettato senza riserve il ruolo del sapere matematico ed empirico, frutto di ragionamento e sperimentazione, nell’aver sostenuto con forza il postulato assoluto di Dio, … , nell’averlo discusso e dimostrato nei confronti delle teorie e dei discorsi degli atei e dei materialisti dell’epoca, che erano per lo più nell’ambito dei *philosophes* francesi; di averlo fatto con tutto rispetto per le persone individuando piuttosto quelle che a suo parere erano contraddizioni logiche, non ricorrendo a retorica violenta o a illazioni sulla moralità dei personaggi.” Per uno sguardo complessivo sull’opera filosofica, teologica e pedagogica si può consultare anche R. Valabrega, 2004.
Nel suo recente libro sull’infinito, Bottazzini (Bottazzini, 2018) riserva ampio spazio al filosofo Gerdil e alla sua opera apologetica delle verità di fede che si avvale di argomentazioni di natura matematica e fisica.

Matematica e filosofia in Gerdil

Gerdil afferma solo in conclusione del *Mèmoire de l’Infini Absolu consideré dans la Grandeur* e in modo molto stringato, che la motivazione principale del suo saggio risiede nella Metafisica: afferma infatti che l’impossibilità dell’infinito assoluto, dimostrato in modo geometrico, fornirebbe alla Metafisica un principio luminoso per stabilire verità della più grande importanza. In altre opere è molto più esplicito su quali possano essere alcune ragioni del suo interesse per la matematica. Ad esempio nell’*Essai d’une demonstration mathematique*, (Gerdil, 1845, Vol. II, pag. 351), e nel saggio *Della nozione dell’esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* (Gerdil, 1845, Vol. II, pag. 557), Gerdil, criticando l’idea dell’infinito attuale esposto negli *Eleménts de la Géométrie de l’Infini* di Fontenelle[3], intende dimostrare che non è possibile una successione infinita di rivoluzioni e cambiamenti di stato nell’universo quale dovrebbe risultare dall’eternità del mondo.
Quindi il mondo non è eterno, ha avuto un’origine e avrà una fine. Negli stessi saggi cerca di dimostrare che la materia non può essere infinita[4] e non può esistere indipendentemente da un essere superiore.
Gerdil non ritiene che le prove che egli fornisce siano necessarie per la Religione, che si avvale della fede e delle Scritture, ma se la soluzione dei precedenti problemi (è eterno il mondo? è indipendente la materia da un creatore?) mediante i lumi della ragione è indifferente per la Religione, essa è di

[3] Gerdil afferma nell’*Essai d’une demonstration mathematique* di aver già comunicato il suo pensiero a un Geometra di prim’ordine (n.d.a. d’Alembert) e che *ce grand homme me fit l’honneur de me marquer qu’il etait particuliérement satisfait de cet endroit, ajoutant que les principes que je combats “sont en effect très-faux, et tendroient à jetter du doute sur les vérités Géométriques*.” (tra virgolette le parole presenti nella lettera del 24 ottobre 1754 di d’Alembert a Gerdil).
[4] Aderendo al meccanicismo cartesiano egli ritiene che l’estensione rappresenti ciò che è primitivo e irriducibile nella materia, con la conseguente identità corpo/spazio e eliminazione del vuoto. Nel saggio *Sulla nozione dell’esteso geometrico* sono espresse le seguenti proprietà dell’estensione:
- distinzione delle parti: si può ad esempio distinguere la porzione di esteso che forma la sfera dalla parte di esteso che la circonda;
- ogni porzione di esteso è delimitato da una figura;
- mobilità: ad esempio una sfera può ruotare attorno ad un suo diametro all’interno di un cubo che la contiene;
- divisibilità: ogni parte determinata dell’esteso è divisibile all’infinito ed è quindi impossibile determinare attualmente tutte le parti di una qualsivoglia parte dell’esteso geometrico. (vedi anche S. Fasciolo Bachelet, 2013).

grande rilievo per la Filosofia, rappresentando la questione più importante per lo spirito umano e la meno suscettibile di dimostrazione.
Gerdil sostanzialmente mette in connessione l'infinito nel mondo con l'infinito matematico e intende dimostrare che non può esserci infinito in atto nel mondo reale allo stesso modo in cui non può esservi nelle costruzioni matematiche, essendo esso, l'infinito attuale o assoluto, un attributo riservato esclusivamente a Dio.
Nei saggi di carattere matematico più volte dimostra infatti l'impossibilità di una successione composta da un numero attualmente infinito di termini, sia permanenti che successivi e in definitiva l'impossibilità di un numero attualmente infinito di unità. Una volta che sia assodata tale verità, afferma, l'incredulo dovrà ammettere che il mondo e la materia hanno avuto un inizio e un creatore[5].
Se è vero che l'infinito in atto non è nel mondo, esso è però concepito dalla nostra anima come diretta emanazione dall'infinito che è Dio. L'infinito attuale è un concetto innato nella mente umana e Gerdil sottolinea che l'idea intuitiva e spontanea che ne ha l'uomo lo predispone al ragionamento, al calcolo, al metodo per trattare oggetti matematici e geometrici che, nella loro essenzialità, sono legati all'infinito (numeri naturali, incommensurabilità etc..).
Proprio la concezione di infinito che è in noi è una rivelazione della divinità e allo stesso tempo una sua dimostrazione: poiché abbiamo in noi l'idea di infinito, deve esistere l'essere corrispondente ad essa.
Silvia Fasciolo Bachelet (S. Fasciolo Bachelet, 2001) infatti asserisce che la prova malebranchiana derivante dall'idea di infinito riveste, secondo Gerdil, un duplice valore: gnoseologico, in quanto riconoscimento di Dio come condizione assoluta di ogni possibilità di conoscenza, e metafisico, in quanto dimostrazione dell'esistenza di Dio.
"Per poco che riflettiamo sopra noi medesimi, conosceremo ad evidenza e senza poterne in niuna guisa dubitare, che noi abbiamo l'idea dell'Ente infinito, dell'Ente infinitamente perfetto. [...] Dunque l'idea che noi ne abbiamo prova egualmente che questo essere infinito esiste, e ch'egli è l'oggetto immediato del nostro spirito, quando noi il percepiamo"[6].
Segue da questa premessa che il finito è percepito dall'intelletto come una limitazione dell'idea originaria di infinito, «perché — dice Gerdil — il finito non è finito che per la negazione dell'infinito».
Il problema che si pone allora Gerdil consiste nel sapere se noi conosciamo, oltre all'infinito "in potenza", anche quello "in atto". Al proposito, come già accennato e come vedremo, Gerdil sottopone ad una analisi critica di carattere matematico sia l'infinito numerico che il continuo. Si domanda se lo spazio sia il risultato di una moltiplicazione ripetuta di spazi determinati, di cui abbiamo ricevuto l'idea dall'esperienza sensibile (opinione di Locke), o se invece non sia l'idea di una estensione senza limiti che sorpassa non solo quella che con i sensi abbiamo potuto percepire, ma anche quella che la nostra immaginazione può fissare, qualsiasi sforzo essa faccia per estendere uno spazio determinato che si concepisca sensibilmente. Ora l'esperienza personale dimostra, per Gerdil, la preesistente presenza in noi dello spazio infinito "in atto". Inoltre vi è anche un altro argomento: «che cioè ogni idea determinata di una qualunque estensione determinata, se viene aggiunta ad un'altra idea determinata d'un'altra estensione determinata, forma necessariamente un'idea determinata di una più grande estensione, ma sempre determinata», da tali idee determinate è quindi impossibile inferire l'infinito assoluto[7].

[5] Circa un secolo dopo, sottolinea Bottazzini (Bottazzini, 2018, pag. 204-205), Cauchy nelle sue *Sept Lecons de physique générale* affermerà di condividere pienamente, da credente e da uomo di scienza, l'impianto *della Dimostrazione matematica contro l'eternità della materia*, di Gerdil e definirà addirittura quest'ultimo come "uno dei più profondi filosofi che abbiano prodotto i tempi moderni".
[6] Questa prova cartesiana dell'esistenza di Dio è tratta dalla *Défense du sentiment* ... (Gerdil, 1845, Vol. II, pag. 230).
[7] Nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico* ... (sez. 36,38) Gerdil asserisce che la divisibilità all'infinito dell'esteso geometrico non prova in alcun modo l'esistenza d'un numero attualmente infinito. Infatti un numero attualmente infinito deve constare d'infinite unità; ma l'unità non è applicabile se non a parti attualmente determinate e poiché ripugna che

Risulta allora ben chiara la posizione di Gerdil: finitezza nella realtà che ci circonda e nel tempo, infinito potenziale nei ragionamenti matematici, infinito assoluto in Dio e nella mente umana indipendentemente da sensazione ma anche da riflessione, solo come intuizione e illuminazione diretta da parte della divinità[8].
Non solo la metafisica ma anche il modo in cui si formano le idee e la conoscenza, secondo Gerdil, può trarre giovamento da esempi provenienti dalla matematica. Così nelle *Osservazioni sul modo di spiegare gli atti intellettuali della mente umana per mezzo della sensibilità fisica* (Gerdil, 1845, Vol.II, pag. 21-63), per dimostrare al Locke (1632-1704) che non tutta la conoscenza trae origine dal mondo delle sensazioni, osserva, in linea con la tradizione di ascendenza platonica, già presente ad esempio nel *Teeteto*, che alcune idee che hanno un carattere di assoluto rigore e precisione, e per le quali non è ammessa approssimazione, debbono necessariamente derivare da facoltà mentali non riducibili al genere delle sensazioni che provengono dal mondo esterno. Tali sono le idee precise dell'unità, dell'eguaglianza, dell'affermazione e della negazione e del rapporto di quantità: questo si può constatare, secondo Gerdil, con esempi tratti dalla geometria. Afferma infatti: se un geometra ha sotto gli occhi una figura che rappresenta una retta perpendicolare ad un'altra, descritte entrambe con matita o con inchiostro, saprà distinguere ciò che è oggetto della sensazione e ciò che è oggetto d'intelligenza. E se due uomini diversi guardano la stessa figura non possono essere certi che la sensazione dell'uno corrisponda esattamente alla sensazione dell'altro e neppure potranno affermare che gli angoli che le rette formano siano assolutamente eguali: però con un atto d'intelligenza (quale ad esempio una dimostrazione) concordano sulla loro eguaglianza. Gerdil propone allo stesso modo come esempio un quadrato: l'eguaglianza dei triangoli formati dalla diagonale è da tutti intesa in modo rigoroso, senza le approssimazioni che sono proprie delle sensazioni. Ed è proprio per una differenza minima, che può essere resa arbitrariamente piccola, che non si è trovato il modo di quadrare il cerchio. Anche cogliere le relazioni tra gli oggetti che ci circondano, ad esempio constatare che due colonne sono eguali, è una capacità umana che non è strettamente riducibile all'esperienza stessa.
Diversamente dal filosofo, matematico e vescovo Berkeley[9] che in Inghilterra aveva condotto una critica spietata al nuovo calcolo, sulla base delle effettive lacune di carattere logico di questo, Gerdil affronta la questione in modo molto pacato, non è contrario al calcolo, anzi ne è un sostenitore, e ne discute i termini e le obiettive difficoltà entrando nel vivo di alcuni degli argomenti principali che erano stati materia di riflessione da parte dei matematici di quegli anni e cercando di dimostrare di volta in volta il principio logico dichiarato nell' *Essai d'une demonstration mathématique*: "La

---

siano attualmente determinate le parti possibili in cui il continuo è all'infinito divisibile, non può essere l'unità attualmente loro applicabile e non ne può risultare un numero infinito.
In definitiva ci si allontana dall'infinito attuale sia aggiungendo parti a parti sia dividendo l'esteso.

[8] Gerdil critica aspramente l'uso dell'infinito da parte di Spinoza: contro il pensiero di questo autore scrive una dissertazione: *Sur l'incompatibilité des principes de Descartes et de Spinoza*. Afferma Gerdil che questo autore vuole dimostrare che ogni sostanza è infinita e che non può esserci che una sostanza, la quale essendo assolutamente infinita è indivisibile e di estensione infinita. Per questo scopo Spinoza parte dalla definizione dell'infinito: come Gerdil precisa Nella *Introduzione allo studio della religione* del 1755 (Gerdil, 1845, Vol.II, pag. 429 e seguenti) per Spinoza l'infinito é quello che non è terminato da un'altra sostanza della stessa natura. Quindi Spinoza, secondo Gerdil, pretende di provare che non si possono dare due sostanze della medesima natura: quindi una sostanza non può essere terminata da un'altra del medesimo genere. Dunque ogni sostanza è infinita. Ovviamente Gerdil confuta questa dimostrazione asserendo: allo stesso modo si potrebbe concludere che ogni atomo è infinito. E procede dimostrando la seguente Proposizione: *Vi hanno sostanze distinte le une dalle altre.*

[9] Nel 1734 il Vescovo George Berkeley contro i metodi infinitesimali aveva scritto un opuscolo dal titolo *L'Analista*. Secondo Berkeley i matematici stavano procedendo induttivamente senza giustificare i passi che facevano. Criticava il ragionamento di Newton quando considerava prima il rapporto incrementale in corrispondenza di un incremento non nullo, effettuava le semplificazioni e poneva poi eguale a zero lo stesso incremento considerato prima non nullo. Affermava tra l'altro: "In ogni altra scienza gli uomini dimostrano le loro conclusioni a partire dai loro principi, e non i loro principi a partire dalle loro conclusioni." Concludeva infine: "Certo che chi è in grado di digerire una terza o quarta flussione non può, mi pare, fare lo schizzinoso con una qualunque questione riguardante la Divinità."

supposition de l'infini actuel dans la quantité implique contradition.". Ma, diversamente da Berkeley, trova nella appena nata teoria dei limiti proposta da d'Alembert una soluzione del problema.

L'opera di Gerdil e il problema dei fondamenti del calcolo

È fondamentale per la comprensione del seguito tenere presente l'affinità del pensiero di Gerdil con quello di Malebranche, sia per le sue idee filosofiche che per le sue opinioni circa il calcolo: relativamente alle prime nel 1748 Gerdil aveva scritto la *Défense du sentiment du P. Malebranche sur la nature, et l'origine des idées contre l'examen de M. Locke,* dove aveva confutato la filosofia di Locke secondo la quale tutta la conoscenza avviene tramite i sensi (filosofia, si tenga presente, seguita da d'Alembert e dagli enciclopedisti) e, con forte influsso platonico-agostiniano, aveva svolto la teoria malebranchiana delle idee come presentate all'anima direttamente da Dio, senza intermediazione del corpo con l'esterno.

Padre Malebranche, filosofo e scienziato, appartenente all'Oratorio di Gesù e Maria in Francia, aveva incontrato Leibniz, con cui condivideva una sostanziale identità di vedute, durante il soggiorno di quest'ultimo a Parigi, era stato invogliato da lui a prendere le distanze da una stretta osservanza del cartesianesimo ed indirizzato alla teoria degli infinitesimi. Così i leibniziani dal 1690 godevano del suo appoggio: gli oratoriani si preoccupavano di far circolare le opere di Leibniz e dei suoi seguaci e nel contempo, come loro abitudine, producevano essi stessi testi di carattere pedagogico[10] dove accanto alle tradizionali e consolidate conoscenze, anche le nuove teorie del neonato calcolo trovavano posto. La notorietà di Malebranche ebbe una notevole influenza nel contrastare l'opposizione alla teoria degli infinitesimi di Leibniz sorta in seno all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1706. In quella tenzone Rolle e i suoi seguaci si schierarono nettamente contro il calcolo per l'uso degli infinitesimi in quanto pensavano che questi ultimi non solo teoricamente non fossero giustificabili, ma fossero inoltre, nonostante gli apparenti successi, suscettibili di confutazione con semplici paradossi: riguardo a Rolle, Gerdil nella *Memoria sull'infinito*, osserverà, con il tratto conciliante che lo contraddistingue, che non sbagliava nel far dipendere il calcolo dagli infinitesimi, ma sbagliava nel rifiutare il calcolo in quanto tale. Contro Rolle i leibniziani, ad opera soprattutto del sacerdote matematico Varignon combatterono strenuamente, utilizzando tra l'altro l'indiscusso prestigio di Newton. La controversia sembrava non aver mai termine: l'influente Bernard de Fontenelle, esponente del partito forte degli analisti, chiuse infine la questione nel 1727, proponendo nei suoi *Eléments de la géometrie de l'infini* una teoria alquanto dogmatica, completamente astratta e tecnica, non influenzata da concezioni filosofiche o metafisiche, dove infiniti e infinitesimi attuali venivano introdotti e confrontati nei vari loro ordini, stabilendo una sorta di algebra dell'infinito.

D'Alembert nel suo articolo *Infini* dell'*Encyclopédie* riporta l'argomentazione di Fontenelle fatta all'inizio del suo trattato: "Essendo la grandezza suscettibile di aumento senza fine ne segue che la si possa supporre realmente aumentata senza fine: perché sarebbe impossibile che la grandezza suscettibile di aumento senza fine si trovasse nelle stesse condizioni come se non fosse possibile di aumento senza fine. Ora se non fosse suscettibile di un aumento senza fine essa rimarrebbe sempre finita; dunque la proprietà essenziale che distingue la grandezza suscettibile di aumento senza fine dalla grandezza che non ne è suscettibile è che quest'ultima rimane sempre finita e non può mai essere supposta che finita; dunque la prima di queste due specie di grandezze può essere supposta attualmente *infinita*"[11].

d'Alembert risponde a questo argomento osservando che c'è un errore in esso e sta nel fatto che una grandezza non suscettibile di aumento non è semplicemente finita, ma non potrebbe mai superare una

[10] Ricordiamo che circa sessant'anni dopo Gerdil avrebbe provato il suo impegno pedagogico scrivendo la sua opera più nota: *L'anti-Emile ou Réflexions sur la théorie et la pratique de l'éducation contre les principes de Mr. Rousseau* (1763), dove, in contrasto con le idee del Rousseau, avrebbe posto alla base dell'educazione dei giovani la natura politica e sociale dell'uomo e l'armoniosa comunicazione con la natura.

[11] Anche Gerdil, ad esempio nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico*, riporta questo passo di Fontenelle.

pre-assegnata grandezza, mentre la grandezza suscettibile di aumento senza fine rimane sempre finita ma può essere aumentata fino a superare una qualsiasi grandezza assegnata. Continua affermando che non esiste in natura una grandezza maggiore di qualunque grandezza assegnabile e pertanto tale idea la troviamo solo nel nostro spirito e non esiste in esso che per una specie di astrazione che proviene dal finito e dal limitato, e che quindi ha una connotazione assolutamente negativa, come del resto la parola infinito, non finito, prova[12].

Fontenelle non esprimeva una concezione completamente nuova e originale. Nel Seicento l'infinito attuale aveva avuto molti cultori tra i matematici, che, sulle orme dell'*Arithmetica infinitorum* di Wallis, se ne erano serviti felicemente, semplificando metodi antichi e anticipando nuove scoperte. Fontenelle, ad esempio, come Wallis, scrive ∞ per indicare l'ultimo termine della successione infinita 0, 1, 2, 3,…., calcola non solo potenze intere di ∞, come aveva fatto Wallis, ma anche potenze frazionarie, trascura potenze di ordine inferiore di ∞ rispetto a potenze di ordine maggiore; allo stesso modo di Wallis scrive un infinitesimo come $1/\infty$, e introduce una gerarchia di infinitesimi dedotta dalla precedente gerarchia degli infiniti; costruisce in tal modo un edificio più ardito che solido secondo il giudizio di alcuni successivi studiosi, tra cui Montucla, condiviso da Gerdil.

Comunque, con l'intervento sulla scena di Fontenelle, il calcolo infinitesimale otteneva la sua definitiva consacrazione nell'ambito dell'Accademia della Scienze di Parigi.

Le critiche all'opera di Fontenelle non tardarono però ad arrivare: in Francia, oltre a quelle già accennate di d'Alembert e Gerdil, va ricordata ad esempio la requisitoria contro l'infinito attuale che il naturalista e matematico francese Georges Louis Leclerc conte di Buffon (1707-1788) inserisce nel *Préface de la traduction de la méthode des fluxions de Newton* del 1740.

Anche in Inghilterra, dopo gli attacchi agli analisti da parte di Berkley, il problema degli infiniti e degli infinitesimi era fortemente sentito. Non a caso nel saggio *Mèmoire de l'Infini Absolu*, a pag. 5, è riportata una nota dell'editore delle opere di Mac Laurin il quale parlando del *Trattato delle flussioni* osserva che in esso l'autore ha completamente eliminato termini quali infinito o infinitamente piccolo, divenuti familiari in matematica, ma che celano assurdità reali, e ha invece preferito attenersi agli *Elementi* di Euclide.

Informazioni sui primi anni del calcolo infinitesimale si possono trovare in Boyer, 1959. Uno studio approfondito sul trattato *Nova Methodus* di Leibniz si trova in P. Dupont e C.S. Roero, 1991. Il metodo delle flussioni è esposto in Newton, 1687.

Il saggio "De l'infini absolu considerè dans la Grandeur"

Fondamentalmente è all'approccio di Fontenelle che, come già si è detto, Gerdil fermamente si oppone: egli infatti incomincia il suo saggio con la distinzione, risalente ad Aristotele, tra infinito potenziale e infinito in atto: una quantità è infinita o infinitesima attualmente se ha ricevuto tutti i suoi possibili accrescimenti o rispettivamente tutte le sue possibili diminuzioni; è potenzialmente infinita o infinitesima se non c'è alcun termine che ne limiti l'accrescimento o la diminuzione. Gerdil riporta la distinzione tra i due significati presente in Locke, che usa la parola *infinità* per denotare il primo e *infinito* per il secondo: Locke conclude che l'infinito in atto è impossibile a concepirsi, perché richiederebbe allo stesso tempo che una successione di accrescimenti non abbia mai fine e che pure essa possa pervenire al suo compimento. Allo stesso modo l'enciclopedista inglese Chambers (1680-1740)[13], seguendo i principi di Locke non esita a concludere che l'idea d'un numero infinito è impossibile.

Gerdil passa poi a prendere le difese di Cavalieri: egli ha introdotto l'infinito in geometria, considerando le figure composte di un numero infinito di parti parallele fra loro, che sono gli ultimi

[12] Per Gerdil invece, come si è già detto, l'idea dell'infinito attuale proviene per emanazione diretta dello spirito o divinità, ed è il finito che è concepito per limitazione dell'infinito.

[13] Ephraim Chambers pubblicò a Londra nel 1728 la *Cyclopaedia or Universal Dictionary of Arts and Sciences*.

termini di una decomposizione che se ne può fare, da lui detti *indivisibili*. Diversamente da Andreas Tacquet (1612-1660), secondo il quale (Tacquet, 1651, pp.23-24)[14] gli elementi di una linea devono essere linee e non punti, quelli di una superficie superficie e non linee e infine quelli di un solido solidi e non superficie, cioè una grandezza geometrica è costituita solo da *homogenea* e non da *heterogenea*, e concordemente invece con Antoine Deidier secondo il quale (Deidier, 1740, Preface, pag. XI) Cavalieri non ha mai preteso che i suoi punti fossero assolutamente indivisibili, che le linee non avessero larghezza, né le superficie alcuna profondità, così Gerdil reputa l'opera di Cavalieri niente altro che una traduzione nel vocabolario della matematica in uso del metodo di esaustione di Archimede.
A tale proposito Gerdil cita direttamente d'Alembert, che alla voce *Differentiel* dell'*Encyclopédie* afferma che l'ipotesi che si è soliti fare nel calcolo di grandezze infinitamente piccole ha il solo scopo di abbreviare e semplificare i ragionamenti, essendo di fatto essi riconducibili, in base alla metafisica che d'Alembert esamina in profondità, a niente altro che a limiti di quantità finite.
Gerdil riporta, concordando, l'osservazione dell'enciclopedista francese secondo la quale gli stessi geometri partigiani del calcolo differenziale lo hanno danneggiato, alcuni perché non l'hanno ben capito e altri perché l'hanno male spiegato rendendo possibile un movimento di detrattori. Afferma Gerdil che lo stesso Leibniz, resosi conto delle obiezioni che si potevano portare contro gli infinitesimi, arrivò ad ipotizzare la teoria degli *incomparabili*[15], secondo la quale gli infinitesimi vanno intesi come quantità piccolissime rispetto alle altre grandezze in gioco, come ad esempio un granellino di sabbia in confronto alla terra, ipotesi che è ineccepibile teoricamente, ma che porta di conseguenza risultati approssimati, contro la richiesta del rigore matematico.
Assunto come principio fondamentale che l'impossibilità dell'infinito attuale nella quantità sia una verità suscettibile di dimostrazione, Gerdil mette alla prova tale principio affrontando ad una ad una un certo numero di questioni matematiche: la conclusione è che l'uso dell'infinito e dell'infinitesimo attuale può essere evitato mediante il concetto di limite e ha solo funzione di semplificazione del calcolo. I vari punti sono intitolati da Gerdil con il nome di *prove*: la prima, la seconda, etc. fino alla settima e ultima.

---

[14] Si noti però che quando Gerdil nel saggio *Dell'esteso geometrico* ... considera i segmenti come costitutivi di figure piane, li suppone rettangoli di cui una dimensione sia piccolissima, quasi una riproposizione dell'indivisibile di Torricelli. Però va sottolineato che anche in tale saggio nega la possibilità di parti infinitesime o indivisibili. Il segmento considerato da Gerdil è da lui detto "retta elementare". Esso è inteso come una quantità mentale che nasce dalla divisione del continuo in parti di larghezza piccolissima che conservano la natura del continuo da cui provengono. Vi è quindi una profonda differenza tra la *ligne rigourouse et abstraite*, qual'è il segmento comunemente inteso e la *ligne élémentaire*, differenza che si estende alle curve e ai punti. Nell'*Eclaircissement sur ce que la théorie des incommensurables semble offrir de plus mysterieux* (Gerdil, 1845, vol. II, pag. 639) Gerdil afferma che grazie a tale distinzione si può presentare una semplice soluzione del paradosso che meravigliò lo stesso Galilei: considerato il cilindro ABCD, generato dalla rotazione del rettangolo ABCD attorno all'asse EF, la semisfera DEC, il cono AFB, è ben noto che un piano parallello alla base del cilindro individuata dai punti A e B, determina due sezioni equivalenti del cono e del solido cavo, la scodella, rispettivamente un cerchio e una corona circolare. La meraviglia nasce dal fatto che, avvicinandosi il piano all'altra base del cilindro, la corona va a finire nell'orlo della scodella, la circonferenza di diametro DC, mentre il cerchio finisce nel punto F, circonferenza e punto che debbono allora essere considerate ancora eguali. Afferma Gerdil che se la circonferenza e il vertice F del cono sono considerati uno come una linea elementare, l'altro come un punto elementare, allora non c'è difficoltà a supporre che si conservi ancora per essi il rapporto di eguaglianza che sussiste per tutte le sezioni della scodella e del cono e il paradosso non sussiste. Però bisogna osservare che a tale riguardo Gerdil ha un atteggiamento ondivago; ad esempio nello stesso saggio è detto a pag.614: *Le point est la limite de la ligne*. E' evidente che la spiegazione di Gerdil potrebbe però subire lo stesso apprezzamento di quella che fu fornita anche da Cavalieri, liquidata da Galilei nei *Discorsi* come "un pedantesco affronto" verso la sua "specolazione tanto gentile e peregrina".

[15] Questa concezione è proposta da Leibniz nel *Tentamen* , pag.86 con le seguenti parole: "*si quis nolit adhibere infinite parvas, potest assumere tam parvas quam sufficere judicat, ut sint incomparabiles, et errorem nullius momenti, imo dato minorem, producant. Quemadmodum terra pro puncto seu diameter terrae pro linea infinite parva habetur, respectu cieli, sic demonstrare potest, si anguli latera habeant basin ipsis incomparabiliter minorem, angulum comprehensum fore recto incomparabiliter minorem, etc* ...".

PRIMA PROVA: formazione della successione dei numeri naturali.
Tramite questa prova Gerdil intende dimostrare che non ha senso considerare un numero naturale infinito, né i numeri naturali nella loro totalità. A tale scopo parte dalle proprietà di cui essi debbono godere tra cui:

a) la successione naturale è formata mediante aggiunta di unità a unità e può pertanto essere prolungata indefinitamente;
b) ogni numero che ha un rapporto finito con un numero finito è finito.

Come conseguenza di a) vale la proprietà già enunciata da Euclide per cui dato un qualunque numero se ne può trovare uno più grande. Da a) e da b) Gerdil ricava che non è possibile alcun numero che non sia finito.
L'infinito non è quindi un numero, ma può essere visto come un limite dell'aumento della grandezza, in maniera tale, specifica Gerdil, che tale limite non è mai raggiunto dalla grandezza, né può mai coincidere con essa. Si tenga presente che nella definizione di d'Alembert di limite data nell'omonimo articolo dell'*Encyclopédie* è detto espressamente che il limite non è mai raggiunto dalla grandezza, né può mai coincidere con essa. Precisamente la definizione nel caso finito è la seguente: "*On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus prés que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable*".
La difficoltà di questa definizione sta nella sua generalità: essa s'intende, secondo la moda del tempo, applicabile a quantità di una medesima classe di grandezze omogenee, per le quali è definita la differenza, che nel caso specifico, si richiede sia inassegnabile, cioè, definizione nella definizione, sia una grandezza che non può mai superare una grandezza data comunque piccola la si possa immaginare.
Il difetto principale della definizione precedente consiste nel fatto che essa prescinde dal concetto di funzionalità. La variabilità è insita nel verbo "*approcher*", ma non è specificata la dipendenza da una variabile indipendente e non è colto il gioco della variabilità in funzione di questa[16].

Si presenta di fatto nella successione naturale una situazione simmetrica, ma inversa, a quella che si presenta nel caso di una curva e del suo asintoto: la curva si avvicina all'asintoto sempre di più "*de manière* (Gerdil riporta la definizione di d'Alembert alla voce *Asymptote* dell'*Encyclopédie*) *que la distance à cette courbe ne devient jamais zéro absolu, mais peut être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée".*
A tale proposito Gerdil considera il caso particolare dell'iperbole e osserva che il suo comportamento rispetto all'asintoto non si deduce dall'idea di infinito, ma da un rapporto costante tra quantità finite, precisamente tra la potenza di questa curva e tutti i rettangoli formati da una porzione dell'asintoto

---

[16] Questo punto oscuro è sottolineato ma non risolto da Gerdil, quando, a più riprese, parla di flusso per cui una grandezza varia. Ad esempio nel saggio *Della nozione di esteso geometrico* scrive: "*Bisogna ammettere nell'esteso geometrico un vero flusso: essendo cotesto esteso divisibile all'infinito, né avendo parti attualmente determinate, se ne possono sempre in quello determinare di minori e minori all'infinito. Una parte così determinata, ma che il geometra può sempre supporre minore di qualunque altra, si chiama infinitamente piccola. E così si dice non perché sia attualmente data, ma per la possibilità che v'ha di fare sempre cotesta parte interminatamente minore di qualunque attualmente assegnabile all'infinito*". In questo passo la parte infinitesima non è attualmente data ma dipende da un'altra quantità che varia in modo indipendente.
Tornando alla definizione di limite, un'obiezione secondaria riguarda l'uso da parte di d'Alembert del verbo "*surpasser*" che fa pensare che la grandezza approssimante sia minore della grandezza limite (fatto subito smentito dagli esempi addotti) e, come viene più volte ribadito, che il limite non possa mai essere raggiunto. Le considerazioni di Gerdil forniscono le possibili motivazioni alla base di una simile restrizione: infatti egli asserisce che per quanto possa essere suddivisa la quantità se ne possono ottenere parti minori di ogni grandezza assegnata, ma mai si perverrà allo zero, che ne rappresenta il limite. Allo stesso modo, se si considerano i numeri naturali, se ne potranno aggiungere unità a unità indefinitamente ma mai si perverrà all'infinito, che pure della successione è il limite.

e da una retta condotta dall'asintoto alla curva[17]. Infatti essendo il precedente rapporto costante, per quanto si prolunghino la curva e l'asintoto, la loro distanza non può mai essere nulla.
Quindi, tornando alla definizione di d'Alembert, la differenza tra curva e asintoto non diviene zero assoluto, ma tende al limite zero e la curva e l'asintoto non hanno alcun punto in comune. Bisogna osservare che Gerdil, oltre a negare l'esistenza di un ultimo numero naturale, non prende in considerazione la totalità dei numeri naturali come un insieme chiuso, così come avverrà negli anni 70 del secolo successivo ad opera di Cantor, ma come un insieme aperto cui continuamente si possono aggiungere nuovi elementi. Afferma infatti a pag. 23: "Uno spirito ingiusto potrebbe ritenere che la successione dei numeri naturali non potrebbe crescere all'infinito se essa non esistesse già come un'infinità attuale di numeri. I numeri non si estraggono come le monete da una cassaforte, ma lo spirito forma la successione naturale per la potenza che ha di ripetere le sue idee e di aggiungere unità a unità". Inoltre c'è da tenere presente che Gerdil spesso sembra rimproverare agli altri autori di non rendersi conto che criteri diversi vanno usati quando si passa dal finito all'infinito. È vicino in questo all'*immortale Galileo* (così citato a più riprese nell'*Introduzione allo studio della religione* e in particolare contro i nuovi tolemaici), che, nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[18], osserva con meraviglia che i quadrati dei numeri naturali sono solo una parte dei naturali stessi eppure sono tanti quanto questi. Spesso Gerdil sottolinea la differenza tra proprietà valide per insiemi finiti e proprietà valide per gli insiemi infiniti: ad esempio quando afferma che la proprietà dei numeri naturali di non avvicinarsi mai alla fine, per quanto grande si consideri un numero naturale, non è condivisa dalle successioni finite di numeri.
Altre volte, con lo scopo di pervenire a risultati paradossali, imita le argomentazioni spericolate del Fontenelle, che nel suo trattato aveva spesso trasportato proprietà valide nel caso finito all'infinito: ad esempio Gerdil dimostra che, a differenza delle successioni finite, nella successione naturale non può esservi ultimo termine, ∞, perché non c'è il termine che precede ∞ ; infatti se ∞-1 fosse finito,

[17] Dimostriamo tale proprietà per semplicità nel caso particolare dell'iperbole non degenere di equazione $x^2-y^2=k^2$; si considerino i punti $P=(k,0)$ e $X=(x,0)$ con $x>k>0$. Le rette perpendicolari all'asse x e passanti per P e X incontrano l'asintoto di equazione y=x nei punti $R=(k,k)$ e $S=(x,x)$ e la curva in P e in T.
L'area del quadrato su XT (la potenza della curva) è data da $y^2=x^2-k^2=(x-k)(x+k)$, che, essendo $PR=k$, $SX=x$ e $PX=x-k$, coincide come richiesto con l'area del rettangolo di lati PX e $SX+RP$. Gerdil sostanzialmente afferma che se S fosse in comune con la curva allora ne verrebbe che: area quadrato di lato $SX=x^2$= area rettangolo $=x^2-k^2$, relazione impossibile. Notare che per giustificare che la curva e l'asintoto non hanno in comune il punto all'infinito Gerdil può utilizzare procedimenti che si basano sull'idea d'infinito e presentano pertanto dei lati oscuri, come poi farà anche nel seguito, ma preferisce subito utilizzare, con un'impostazione di carattere cartesiano, l'invariabilità di certi rapporti geometrici, metodo che, come lo stesso Gerdil afferma, spesso userà nel seguito.
[18] Ma contrariamente a Gerdil, Galileo è sostenitore della teoria degli indivisibili che è strettamente legata all'ammissione dell'infinito attuale, pur con consapevolezza della complessità dei problemi connessi. Infatti dice per bocca di Salviati: "*ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gli indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la lor piccolezza*." E ancora: "*l'infinito è per se solo da noi incomprensibile, come anche gl'indivisibili…. E pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprendere nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile*." Chiaro è che "*parti quante attualmente contenute nel lor tutto, se sono infinite, lo fanno di grandezza infinita: … dunque nella (grandezza) finita parti quante infinite né in atto né in potenza possono essere contenute*." Altrove afferma però: "*Nel modo che in una linea di dieci canne si contengono dieci linee d'una canna l'una, e quaranta d'un braccio l'una, e ottanta di mezzo braccio, etc., così contiene ella punti infiniti: chiamateli poi in atto o in potenza, come più vi piace, ché io, Sig. Simplicio, in questo particolare mi rimetto al vostro giudizio.*" E all'obiezione di Simplicio che non è poi agevole dividere la linea in infiniti punti, operazione che quindi gli sembra impossibile tradurre in atto, risponde: "*L'esser cosa fattibile se non con fatica o diligenza, o in gran lunghezza di tempo, non la rende impossibile, perché penso che voi altresì non così agevolmente vi sbrighereste da una divisione da farsi d'una linea in mille parti, e molto meno dovendo dividerla in 937 o altro gran numero primo*." Aggiunge poi che nessuno può risolvere la linea nei suoi infiniti punti seguendo l'ordine che altri ha nel dividerla in due e poi in quattro e così via "*perché con tal progresso né men alla division di tutte le parti quante vi perverrebbe in eterno*." Anzi per questa via più si dividono e moltiplicano le parti, più ci si allontana dalla meta. Non è questo quindi il modo per giungere agli indivisibili o all'infinito.

allora il suo successore dovrebbe parimenti esserlo, se invece fosse infinito non sarebbe più passibile di ulteriori accrescimenti. Questa è un'altra prova che non esiste un ultimo numero naturale[19].

Su questo argomento ritorna più volte; infatti in un altro momento per dimostrare che è assurdo considerare la successione 1,2, 3, ... con ultimo termine ∞, Gerdil asserisce che poiché ogni volta che abbiamo una successione (finita): 1, 2, 3, ... m la somma 1+m è eguale alla somma n+n+1 dei due termini intermedi (a rigore, se m è dispari 1+m è uguale al doppio del termine intermedio), allora deve esistere n tale che $1+\infty=n+n+1$, da cui deduce $2n=\infty$, cioè $n=\infty/2$, valore senza dubbio infinito; iterando il precedente ragionamento si otterrebbe l'esistenza di un $x=\infty/4$, ancora infinito; iterando indefinitamente si determinerebbe l'esistenza di una successione

$$\infty/2, \infty/4, \infty/8, \dots , \infty/\infty=1.$$

Quindi, asserisce Gerdil, discendendo dall'infinito assoluto per tutti i gradi della successione naturale fino all'unità si perverrebbe all'assurdo di termini tutti infiniti, tranne l'unità.

Anche Galileo, dopo le osservazioni riportate nella nota 14, fa un esempio che suscita meraviglia più che chiarire la sua idea e costituisce un paradosso sul tipo di quelli che Gerdil propone nella sua memoria: ha già dimostrato che i quadrati son tanti quanti i numeri e così i cubi e qualsiasi altra potenza. Ora quanto più alto è il grado tanto più rarefatte sono le potenze, pur restando sempre infinite, perché tante quanti i numeri. Eppure "*tanto più ci discostiamo dal numero infinito; dal che ne seguita che, tornando indietro (poiché tal progresso sempre più ci allontana dal termine ricercato), se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l'unità*." Ed infatti l'unità è quadrato, è cubo, è quarta, quinta etc. potenza. "*E queste sono delle meraviglie che superano la capacità della nostra immaginazione, e che devriano farci accorti quanto gravemente si erri mentre altri voglia discorrere intorno a gl'infiniti con quei medesimi attributi che noi usiamo intorno a i finiti*".

Gerdil si oppone alla teoria degli indivisibili proposta da Galileo. Ad esempio nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico* …, al n. 18, considera un rettangolo che ruota attorno ad un suo lato e afferma: non bisogna intendere che esso possa realmente formare un cilindro. Infatti sia *abcd* il rettangolo che ruota attorno al lato *ad*. Allora il punto *b* non potrebbe descrivere una circonferenza "*se non quando lasciasse impresso il vestigio di sé stesso da per tutto dove passa*" e quindi la circonferenza sarebbe costituita da tanti punti eguali a *b*. Ma il punto *e* che divide a metà la linea *ab* segna nel volgersi tanti punti distinti quanti ne segna *b*. Dunque anche supponendo infiniti codesti punti infinitamente piccoli, essendo anche le due infinità eguali e i punti parimenti eguali, dovrebbe la circonferenza descritta da *e* essere eguale a quella descritta da *b*. "*Ciò dimostra apertamente, contro Galileo, il continuo non potere essere composto da indivisibili*". Ovviamente nel suo ragionamento Gerdil non tiene conto che nella teoria di Cavalieri non si possono confrontare indivisibili in figure qualsiasi (come puntualizza molto bene Torricelli in *La teoria degli indivisibili usata a sproposito*, (Torricelli, 1975). La conclusione è: "*Insomma se un arco qualunque di un cerchio concentrico è composto di punti indivisibili gli uni presso gli altri, quei punti posti anche gli uni presso gli altri nella circonferenza di doppio diametro, dovranno solo formare in esso la metà dell'arco omologo; e se debbono essere sparsi in tutto l'arco omologo, debbono lasciare altrettante interruzioni: ma*

[19] Il discorso è simile a quello fatto da Leclerc:" *Ma si potrà dire: l'ultimo termine della successione naturale 1, 2, 3… non è forse infinito? .... Sembra che i numeri alla fine debbano diventare infiniti poiché sono sempre suscettibili di aumento. Risponderò dicendo che questo aumento di cui sono suscettibili prova chiaramente che non possono essere infiniti. Aggiungo anche che in questa successione non esistono ultimi termini, e che supporre l'esistenza di un ultimo termine significherebbe distruggere l'essenza della successione che consiste in un susseguirsi di termini che possono essere seguiti da altri termini, e questi da altri ancora, tutti però della stessa natura dei precedenti, cioè tutti finiti e composti da unità. Così quando si pensa che una successione abbia un ultimo termine, e che questo termine sia infinito, si va contro la definizione di numero e la definizione generale di successione*." E poi aggiunge la seguente osservazione: "*La maggior parte dei nostri errori nel campo della metafisica deriva dal fatto che consideriamo l'idea di privazione come una realtà. Conosciamo il finito e troviamo in esso proprietà reali, lo spogliamo di tali proprietà, e dopo averlo così spogliato non lo riconosciamo più e crediamo di aver creato un nuovo essere mentre invece abbiamo solo distrutto alcune parti di quello che ci era precedentemente noto*."(Newton, 1740, pag.IX e X). Si noti l'assoluta somiglianza con la posizione espressa da d'Alembert nella voce *Infini* dell'*Enciclopédie*.

codeste interruzioni sono anch'esse *estese, e pertanto fanno parte della detta circonferenza continua; dunque una superficie non può essere propriamente formata, ma solo misurata col pensiero della rivoluzione d'una linea*". Quindi la possibilità di ottenere un solido o una superficie per rotazione è esclusivamente un mezzo opportunistico per determinarne la misura: d'Alembert, dopo aver letto il saggio, nella lettera dell'ottobre 1755 dissentirà espressamente su questo punto[20]. E ancora nel n. 20 dello stesso saggio Gerdil considera il caso, sostanzialmente equivalente a quello precedente, di due circonferenze concentriche, delle quali una abbia raggio infinitesimo e l'altra raggio finito, concludendo "*se la somma degli indivisibili nella prima circonferenza, perché infiniti, forma una circonferenza finita, essendo eguale codesta somma nell'altre circonferenze, dovrebbe formare altresì una circonferenza finita, e non infinitamente piccola secondo la supposizione*". Si tratta della situazione limite di quella descritta nel caso delle due circonferenze concentriche da Torricelli, nel passo riguardante *Gli indivisibili* (Torricelli, 1975, pag. 505), a cui possiamo applicare la stessa critica di Torricelli che cioè gli indivisibili (e nel caso in esame si tratta di indivisibili curvi) non sono tutti eguali.

SECONDA PROVA: non esistono in geometria punti all'infinito.
Gerdil ammette che una retta possa essere prolungata indefinitamente ma confuta la credenza di alcuni geometri che si possa trovare su di essa un punto che disti da un prefissato altro suo punto d'una distanza infinita.

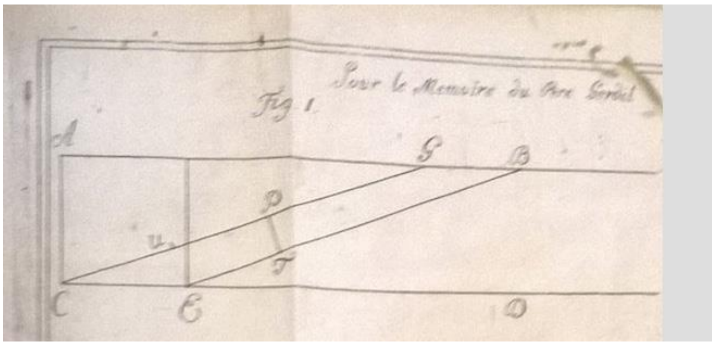

Figura 1 – prolungamento all'infinito delle rette parallele

A questo proposito esegue il seguente ragionamento: si supponga che due rette parallele AB e CD siano esattamente parallele e prolungate all'infinito conservino il loro parallelismo. Ne segue che nessun punto della retta AB a qualunque distanza si trovi dal punto A, potrà mai coincidere con un punto di CD.
Alcuni distruggono questa credenza dicendo che le rette passano per un punto all'infinito.
Ma allora ci saranno dei punti di AB che sono a distanza infinita da A. Dati i punti C ed E (distinti) della retta CD si potranno tracciare le due rette parallele CG, EB che passeranno per i punti G e B supposti a distanza infinita dal punto A, in modo che ci sarà un parallelogramma CGBE formato dalle due rette finite CE, GB e le due infinite CG, EB. Sul lato EB si tracci la perpendicolare TP che misura la distanza dei due lati CG, EB: allora o questa distanza potrà essere ancora diminuita o sarà assolutamente nulla. Se la distanza TP può essere ancora diminuita allora i punti G e B possono essere ancora più spostati indietro sulla retta AB. Dunque essi non sono ancora a distanza infinita da

[20] Scrive infatti: "*Non io vorrei assicurare, così fermamente come voi fate che una superficie non possa generare un solido; di fatti supposto un cubo verbigrazia, il quale si muova dal basso in alto, a me pare evidente che la superficie superiore di questo cubo descriverà un parallelepipedo*." In una nota Gerdil chiarirà il suo pensiero: "*Convien dire che non mi fossi spiegato bastantemente in quel passo. …. Volli soltanto dire che se noi concepiamo delle superficie senza profondità, accumulate le une sulle altre, coteste superficie non potranno mai formare un solido; a quel modo che noi concepiamo come il flusso di un punto descrive o determina una linea sopra una data superficie, né però deve inferirsi da questo che la linea sia composta di punti indivisibili collocati l'uno sopra l'altro*".

A. Se invece TP=0 allora la retta GC deve coincidere con EB. Ora la retta CG non può coincidere con EB a meno che CG non coincida pure con CD. Infatti, se CG coincide con EB allora un punto U della retta CG viene a coincidere col punto E e quindi tutta la retta CG coincide con la retta CD. Quindi i punti G e B della retta AB debbono trovarsi pure sulla retta CD, contro il supposto parallelismo.

Fin qui il ragionamento di Gerdil che si può riassumere al seguente modo: se una retta AB passa per un punto all'infinito, sia esso B, allora una parallela ad essa, sia CD, passa per lo stesso punto all'infinito, contro l'ipotesi che le due rette parallele AB e CD prolungate indefinitamente conservino il loro parallelismo.

L'argomentazione sembra insoddisfacente perché si suppone che addirittura due punti G e B, distinti fra loro, siano a distanza infinita da A sulla retta AB e siano estremi di un segmento di lunghezza finita. Forse Gerdil in questo caso avrebbe potuto risolvere la questione come nel precedente caso dell'iperbole e dell'asintoto.

Gerdil osserva che l'espressione di alcuni geometri che ritengono che due parallele si incontrino all'infinito non è in contrasto con le sue idee; tale espressione va intesa nel senso che se due rette non possono incontrarsi se non a una distanza infinita, allora possono essere riguardate come parallele in quanto essendo infinitamente piccola la loro inclinazione reciproca, non può che essere nulla[21]. Ma tale supposizione non implica che tali rette possano attualmente essere prolungate a una distanza infinita come prova l'esempio seguente. Si suppongano le due rette AC e BD tangenti alle due estremità del diametro AB di un cerchio O e quindi parallele. Se si suppone che queste due rette prolungate ad una distanza assolutamente infinita nella direzione AC, BD debbano concorrere ad un punto infinitamente lontano dal diametro AB si dovrà supporre per la stessa ragione che prolungandole nella direzione opposta AE, BF esse dovranno presentare da quest'altro lato un allontanamento infinito. Detti X e Y i due lati determinati dalla retta AB, si ha che AE e BF non possono concorrere dal lato X senza supporre un'inclinazione infinitamente piccola da tale lato, e non possono essere inclinate dal lato X a meno che non si divarichino dal lato Y. E viceversa. Bisognerebbe quindi considerarle convergenti e divergenti allo stesso tempo, ciò che ripugna.

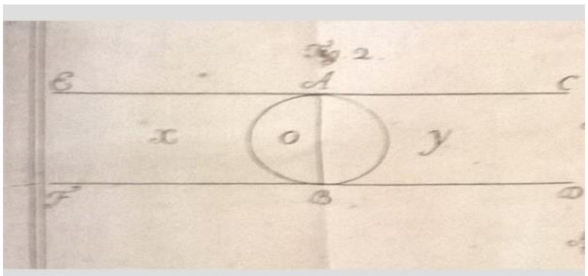

Figura 2 – distanza costante tra due rette parallele

<u>TERZA PROVA: proprietà della curva logaritmica</u>

Gerdil chiama curva logaritmica il grafico della restrizione della funzione 2^x ai valori negativi di x. Confronta le ordinate dei punti di tale grafico osservando che, dividendo l'asse delle ascisse in parti uguali tramite gli opposti dei numeri naturali, si forma la successione 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … delle ordinate, che è una progressione geometrica decrescente.

---

[21] È bene ricordare che nell'*Essai d'une démonstration mathématique*, Gerdil ribadisce che il nulla assoluto dell'inclinazione delle rette parallele esclude ogni inclinazione anche infinitamente piccola (Gerdil, 1845, Vol. II, pag. 356).

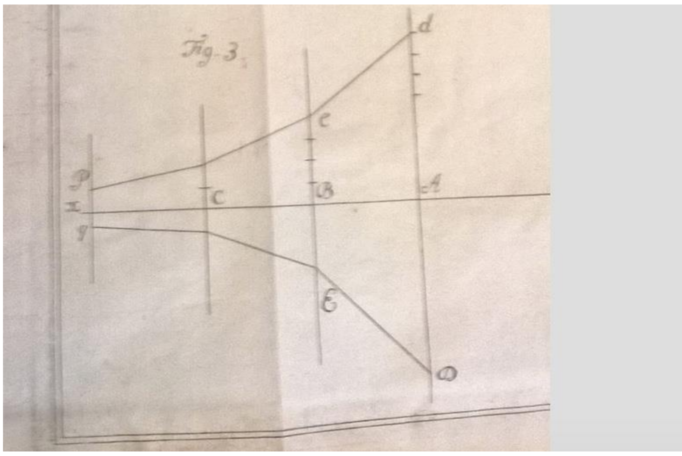

Figura 3 – confronto tra due “curve logaritmiche” di basi diverse e loro comportamento all’infinito

Ciò che Gerdil vuole dimostrare è che la curva logaritmica non può che incontrare l’asintoto ad una distanza assolutamente infinita, quindi, ribadendo quanto detto nella prova precedente, geometricamente non la incontrerà mai, non esistendo alcun punto sulla retta a distanza infinita da un suo punto al finito.
Lo dimostra nel seguente modo: se l’asse x potesse diventare tangente alla curva la frazione $\frac{1}{2^\infty}$ (simbolo usato dallo stesso Gerdil) dovrebbe essere uguale allo zero assoluto, o almeno dovrebbe essere un’entità infinitamente piccola incapace di una ulteriore decrescita, perché se, per assurdo, non fosse così, cioè se l’ordinata potesse ulteriormente diminuire, la sua distanza dall’asse x sarebbe comunque sempre positiva e quindi non ci sarebbe tangenza come supposto.
Ora le due ipotesi precedenti sono entrambe impossibili: infatti l’ordinata $\frac{1}{2^\infty}$ può essere ulteriormente e indefinitamente diminuita in quanto, d’accordo con quanto afferma d’Alembert nella voce *Différentiel* dell’Encyclopédie, supposta infinitesima del primo ordine può dare luogo a infinitesimi di secondo, terzo ordine e, in generale, di qualunque ordine.
Infatti, d’accordo con i geometri, una quantità attualmente infinita é una quantità che avendo ricevuto tutti gli accrescimenti finiti possibili, non può che riceverne infiniti: nello stesso modo le quantità infinitamente piccole non possono che essere diminuite di quantità infinite ottenendo infinitesimi di ordine superiore e, in conclusione, la frazione $\frac{1}{2^\infty}$ da un lato non può ovviamente considerarsi zero assoluto né, d’altro canto, per quanto detto, non può essere ancora diminuita.
Gerdil considera poi, nello stesso piano cartesiano, il grafico della funzione esponenziale di base 3 e lo confronta con il precedente disegnandolo, e distinguendo le due curve, ripete per tale curva le considerazioni precedenti e conclude: se le due curve logaritmiche parimenti dovessero essere tangenti al loro asse comune Ax dovrebbe accadere che i due valori $\frac{1}{3^\infty}$ e $\frac{1}{2^\infty}$ dovrebbero essere eguali, entrambi nulli e questo è assurdo.
Quindi il ragionamento di Gerdil è il seguente: pur considerando una curva logaritmica le cui ordinate sono più vicine all’asse x, il comportamento della curva riguardo alla tangenza con l’asse delle x non cambia.
CONCLUSIONE: non c’è alcun punto di contatto tra una curva logaritmica ed il suo asintoto; una siffatta curva e l’asintoto “s*i potrebbero incontrare se l’asse* delle *ascisse fosse infinito assolutamente, cioè se fosse composto da un numero attualmente infinito di parti*”.
E perciò: “*un insieme composto da un numero attualmente infinito di termini è impossibile*”.

QUARTA PROVA: non è vero che una curva dotata di asintoto lo incontri all'infinito.

Con questa quarta prova vengono ulteriormente chiariti alcuni punti cui si è accennato nella precedente. Gerdil infatti ricorda che nel suo trattato sulle sezioni coniche de l'Hospital aveva asserito che nell'iperbole gli asintoti possono essere riguardati come delle tangenti che toccano l'iperbole nei loro punti estremi, all'infinito (G. de l'Hospital, 1720, Art. 108), ciò che sembra sottintendere la possibilità d'un infinito attuale. Ma nello stesso trattato l'autore afferma pure che l'iperbole e il suo asintoto essendo prolungati si avvicinano sempre di più in modo che la loro differenza diventa minore di qualunque quantità data e che però essi non si possono mai incontrare perché si incontrano solo all'infinito dove non si può mai arrivare[22].

Gerdil critica la prima delle due asserzioni di de l'Hospital secondo la quale l'asintoto diventa tangente alla curva nell'estremità cercando di portarla all'assurdo in svariate maniere. Egli sottolinea il fatto che esattamente della sua idea è Jean Baptiste de la Chapelle nel suo *Traité des sections coniques*, dove anzi la questione è analizzata sottilmente dal seguente punto di vista[23]: quando, dice de la Chapelle, per dimostrare l'eguaglianza di due grandezze ci si serve del principio che due quantità sono eguali se la loro differenza è più piccola di qualunque grandezza data bisogna distinguere se il limite cui le grandezze tendono è al finito o all'infinito; nel primo caso ci sarà eguaglianza, perché si dimostrerà l'impossibilità di assegnare qualsiasi differenza, ma nel secondo caso, poiché il limite è a una distanza infinita è come se non ci fosse limite; dunque i termini di paragone mancano e il principio non ha più luogo e fidarsi di esso porterebbe alla conclusione contraddittoria che gli asintoti dell'iperbole non la possono mai incontrare e che ciò nondimeno l'incontrano[24]. Quindi Gerdil dimostra le assurdità che derivano dall'ipotesi di tangenza.

Infatti essa presuppone da un lato che l'iperbole abbia un'estremità e dall'altro che sia attualmente infinita. È possibile? Ma, osserva Gerdil, questo è ancora un argomento metafisico. Usa allora un argomento strettamente matematico: è ben noto[25], asserisce, che il segmento di tangente all'iperbole

---

[22] In de l'Hospital, 1696, art. 102, Corollario IV, pag.55 viene usata l'espressione ripresa da Gerdil: "*l'on voit que l'Hyperbole … et son asymptote … (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; et que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver*".

[23] Si veda la nota alle pagine 249-250 di de la Chapelle, 1750, che è riportata integralmente da Gerdil. Alla pag. 229 del *Traité* di de la Chapelle è spiegata l'etimologia greca della parola asintoto, letteralmente *senza incontro*.

[24] Si osservi che nel Libro Primo del *De motu corporum* dei Principia di Newton, il Lemma I recita: "*Quantitates ut et quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales*". É il principio cui si riferisce de la Chapelle, che sottolinea sostanzialmente la parola "finito" usata da Newton.

[25] Molto probabilmente Gerdil ha fatto riferimento per questa e la seguente proprietà dell'iperbole oltre che al trattato del de la Chapelle, dove sono esposte alla pag.235, anche al fondamentale *Traité analytique des sections coniques* di de l'Hospital. Si tratta di proprietà che si dimostrano semplicemente con la geometria analitica. Qui ripercorriamo la dimostrazione geometrica svolta nel trattato di de l'Hospital. La Proposizione IV del Libro Terzo, pag. 53 recita: "*Se si tracciano per due punti qualunque M e N di un'iperbole due rette Hh e Ll parallele tra loro e delimitate dagli asintoti, allora i rettangoli $HM\cdot Mh$ e $LN\cdot Nl$ saranno eguali fra loro*".

Per la dimostrazione di questo teorema de l'Hospital fa uso di una proprietà di semplice verifica (art. 91, pag.52) di cui non riportiamo la dimostrazione e precisamente che se da un punto M dell'iperbole si traccia la perpendicolare all'asse principale, dette R e r le intersezioni di tale perpendicolare con gli asintoti, il prodotto $RM\cdot Mr$ è costante al variare di M sull'iperbole. Dimostriamo ora la Proposizione IV come fa de l'Hospital. Tracciate per i punti M e N le perpendicolari Rr e Kk all'asse principale, è chiaro che i triangoli MRH, NKL e Mrh, Nkl sono simili avendo i lati corrispondenti paralleli. Quindi:

RM:KN=HM:LN e Nk:Mr=Nl:Mh.

Ma abbiamo appena osservato che RM· Mr = KN· Nk ossia RM:KN=Nk:Mr.

Confrontando con le precedenti relazioni si ricava HM:LN=Nl:Mh, cioè HM· Mh =LN· Nl c.v.d..

compreso tra gli asintoti è diviso a metà dal punto di tangenza. E questo accade per ogni punto dell'iperbole. Ma allora l'asintoto divenuto tangente all'infinito dovrebbe parimenti essere diviso in due parti eguali dal punto di contatto. Quindi l'asintoto, dopo il punto di tangenza dovrebbe, abbandonata l'iperbole, prolungarsi ancora infinitamente al di là di questo in modo che la parte al di là sia eguale alla parte al di qua. Su questo punto Gerdil sottilmente ironizza affermando che non è il caso di credere ch'egli voglia proclamare la possibilità di un infinito doppio di un altro infinito. Egli intende invece sottolineare la difficoltà che nasce dall'ipotesi di tangenza, contraria alla natura dell'iperbole, come ci si rende conto immaginandola come intersezione di un cono, per cui si vede subito che essa e il suo asintoto debbono egualmente estendersi.
Per provare ancora l'assurdità della concezione dell'asintoto come tangente all'infinito all'iperbole, Gerdil riprende un'argomentazione basata su una proprietà che è una generalizzazione della precedente proprietà delle tangenti all'iperbole. La proprietà è la seguente: considerata un'iperbole e una secante che intersechi gli asintoti nei punti L e l e l'iperbole nei punti N e n allora risulta: $LN = ln$. Asserisce Gerdil che, poiché la precedente proprietà è verificata comunque si considerino i due punti sull'iperbole, se si prende il punto N sulla curva e l'altro coincidente con l'estremità, punto di contatto con l'asintoto, dovrebbe essere ancora $ln=LN$, ma, Gerdil afferma, ciò ripugna (e infatti sarebbe ln=0 mentre LN finito e diverso da 0). E aggiunge: si potrebbe evitare la difficoltà dicendo che nell'estremità *ln* coincide sia con la curva che con l'asintoto, ma allora la curva dovrebbe coincidere con l'asintoto, ciò che è assurdo.
La posizione di Gerdil è stata successivamente sostenuta anche da Lagrange[26]: egli infatti osserva che il fatto che l'asintoto non sia una tangente lo si intuisce quando lo si determina con il calcolo. Lagrange intravede nel calcolo anche una risposta alla credenza di Leibniz, che considera la curva come costituita da infiniti segmenti infinitesimi e la tangente come il prolungamento di uno siffatto di tali segmenti[27]: afferma Lagrange che in tal modo ci si trova in presenza di una secante e non di una tangente, ma nel calcolo l'errore infinitesimo che si commette è compensato da un altro errore che consiste nel trascurare quantità infinitesime. Più rigoroso è il calcolo di Newton: egli considera che una secante diventa tangente solo se i due punti vengono a coincidere e vengono considerate evanescenti le quantità di cui si ricercano le prime e ultime ragioni[28]. La maggiore semplicità del calcolo fa però preferire il primo al secondo metodo.

<u>*QUINTA PROVA: successioni crescenti indefinitamente e regole vere al finito ma non all'infinito.*</u>

Gerdil cerca di giustificare relazioni del tipo $1+1+1+\ldots\ldots=\infty$, sostanzialmente come relazioni di limite e non, come alcuni credono, perché a primo membro dell'eguaglianza precedente compare una quantità che ha preso tutti gli accrescimenti possibili. Al riguardo riporta le idee dell'abate Deidier: questo autore ritiene che si possa calcolare l'andamento delle progressioni infinite crescenti allo stesso modo delle decrescenti e ne calcola i valori infiniti, senza però svelare le ipotesi su cui basa i ragionamenti. Così $1+2+3+4+\ldots\ldots=\infty^2/2$, la somma di un'infinità di quadrati di termini consecutivi è $\infty^3/3$, la somma di un'infinità di cubi di termini consecutivi è $\infty^4/4$ e così via.
Gerdil ritiene che questi calcoli abbiano una loro utilità e quindi cerca di darne una spiegazione in termini di limite. Calcola la somma dei quadrati dei numeri da a a μ utilizzando la formula già nota:

Una conseguenza è il Corollario II, pag.53: "*Se si traccia per un punto qualunque N di un'iperbole una retta che incontra gli asintoti nei punti L e l e l'iperbole in un altro punto n, allora le parti NL e nl di tale retta comprese tra i punti dell'iperbole e le intersezioni con gli asintoti saranno eguali tra loro"*.
Infatti per la Proposizione precedente applicata ai due punti N e n si ha $Nl \cdot LN = nl \cdot Ln$, da cui $Nl:nl = Ln:LN$; sottraendo si ricava da quest'ultima proporzione $(Nl-nl):nl = (Ln-LN):LN$ e quindi, tenendo presente che $Nl-nl=Ln-LN=Nn$, si trae la richiesta eguaglianza $nl=LN$.
La conseguenza immediata del Corollario II è enunciata solo molto dopo, Proposizione XXIII del Libro Sesto, pag. 177: "*Se una linea retta FG delimitata dagli asintoti di una iperbole le è tangente in un punto A, essa è divisa a metà da A"*.
[26] Lagrange, 1797, pag. 3.
[27] Leibniz, *Nova Methodus* (Dupont, Roero, 1991).
[28] Isaac Newton, 1687.

$(a+1)^2+(a+2)^2+ \ldots.+\mu^2= (1+2^2+ \ldots+ \mu^2) – (1+2^2+ \ldots+a^2) = \mu^3/3+ \mu^2/2+\mu/6-(a^3/3+ a^2/2+a/6).$
La formula è rigorosamente vera nel caso di un numero finito di termini. Se ora μ è supposto infinito tutti i termini dopo il primo sono infinitamente piccoli rispetto al primo e si ottiene pertanto il risultato $s^2=\infty^3/3$.
Gerdil giustifica accuratamente tale passaggio con una procedura al limite. Si tratta di rispondere alla domanda: perché nell'espressione $\infty^3+\infty^2$ si può sopprimere ∞^2 ? Egli afferma, se ∞^3 e ∞^2 significassero un ultimo cubo o quadrato, la frazione $\frac{\infty^2}{\infty^3}=\frac{1}{\infty}$ non sarebbe più suscettibile di diminuzione e conseguentemente nell'espressione $\infty^3+\infty^2$ si potrebbe trascurare ∞^2 ottenendo non un risultato esatto, ma solo approssimato. Se invece ∞^3 e ∞^2 sono figure, cioè simboli, che rappresentano piuttosto due successioni indeterminate, l'una di cubi e l'altra di quadrati , che si può sempre supporre grandi quanto si vuole in virtù della loro infinita progressione, allora la frazione $\frac{\infty^2}{\infty^3}=\frac{1}{\infty}$ è tanto piccola quanto si vuole perché rappresenta a sua volta una successione indeterminata, i cui termini positivi col procedere indefinitamente sono a loro volta minori di ogni grandezza prefissata. Non si può meglio esprimere il corso di queste possibili diminuzioni che eliminando i termini che ne limiterebbero la decrescenza senza fine, cioè ponendoli eguali a zero. Così l'eguaglianza $s^2=\infty^3/3$ non deve essere riguardata come un'eguaglianza tra due quantità fisse, ma (dice Gerdil) come la "flussione" di due termini considerati in un corso infinito di accrescimenti, nel quale la differenza del loro rapporto dall'unità[29] può sempre essere dimostrata minore di una qualsiasi quantità data.
Va sottolineato che in quest'ultimo passaggio Gerdil sembra quasi contemporaneo; facendo coincidere la successione con il suo limite, egli considera il limite coincidente con il processo stesso che lo genera. Siamo così ad un passo, per lo meno limitatamente alle successioni, al concetto di limite visto in relazione al concetto di funzione.
Come si è visto, Gerdil accoglie esplicitamente la possibilità di considerare diversi ordini di infinito e di infinitesimo, e di confrontarli, rifacendosi all'articolo *Differentiel* dell'*Encyclopédie*, dove d'Alembert afferma, contro Nieuwentit, che una volta ammessi infinitesimi del primo ordine tutti gli altri ne derivano di necessità. Infatti geometricamente si può subito provare che considerando in un cerchio una corda infinitesima del primo ordine il seno verso è infinitesimo del secondo ordine e se la corda è infinitesima del secondo ordine allora il seno verso è infinitesimo del quarto ordine e così via.
Nell'ultima parte della prova Gerdil discute animatamente, ampiamente e usando paragoni di carattere quasi poetico l'improponibilità di un ultimo termine d'una successione infinita. È un'illusione immaginare l'ultimo termine di una successione come un punto fisso posto a una distanza infinita, che lo spirito potrebbe raggiungere superando l'intervallo che lo separa da noi con operazioni moltiplicate all'infinito. Questo punto è invece un punto mobile che arretra come lo spirito avanza e si trova sempre ad una medesima distanza.

<u>SESTA PROVA: progressioni decrescenti indefinitamente e paradosso di Zenone.</u>

Gerdil considera la progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{1}{2}$ e di primo termine 1:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots$$

ottenuta considerando le lunghezze dei segmenti che si determinano dividendo successivamente a metà il segmento AB di lunghezza unitaria:

[29] Sembra che così si possa correttamente tradurre il termine "*disproportion*".

A____________________C__________D_____E__F__B

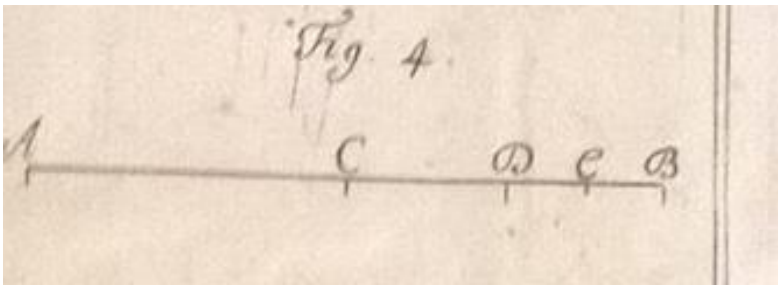

Figura 4 – segmento unitario dicotomizzato

Gerdil afferma che, come concretamente (attualmente) la suddivisione del segmento non può essere portata a termine, così non può esistere un ultimo termine della progressione (cfr. Tacquet, commenti alla XI proposizione del 6° libro di Euclide).

Infatti, se esistesse questo ultimo termine, "0", allora il rapporto tra "0" ed il suo antecedente dovrebbe essere $\frac{1}{2}$, ma ciò è palesemente assurdo perché è assurdo che il rapporto tra 0 ed una qualsiasi quantità finita sia $\frac{1}{2}$.

Ribadisce, quindi, che una progressione decrescente infinita si debba intendere come una successione che non finisce (infinito potenziale) e non una successione attualmente infinita con termini successivi dal primo all'ultimo che la completa.

Affermando la differenza sostanziale tra progressione geometrica finita e progressione geometrica infinita Gerdil osserva, a questo punto, che si potrebbe obiettare che il calcolo per ottenere la somma di una e dell'altra progressione è analogo. Inoltre il numero 0 nel calcolo della somma della progressione infinita ha lo stesso ruolo dell'ultimo termine nel calcolo della somma della progressione finita.

È nota la seguente formula per la somma dei termini di una progressione geometrica finita:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} .$$

A questa formula si arriva mediante la seguente proprietà: "*in una progressione geometrica finita il primo termine meno il secondo sta al secondo, così come il primo termine meno l'ultimo sta alla somma di tutti quelli che lo seguono*" [30]; quindi:

$$(1-a): a = (1-a^n): (a + a^2 + \cdots + a^n) \ , \quad \text{da cui:}$$
$$(a + a^2 + \cdots + a^n)(1-a) = a(1-a^n), \quad \text{e quindi:}$$
$$a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a-a^{n+1}}{1-a} ;$$

ora per ottenere la formula iniziale basta aggiungere 1 ad ambo i membri dell'uguaglianza:

[30] Gerdil ricava la formula dagli "*Elementi*" di Euclide (prop. 35, libro nono).

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = 1 + \frac{a - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Gerdil afferma ancora che per calcolare la somma di una progressione infinita (S) si può ragionare in modo simile: "*come il primo termine meno il secondo sta al secondo così il primo sta alla somma di tutti quelli che lo seguono*" [31]:

$$(1-a): a = (1-0): (S-1)$$

Quindi:

$$S = 1/(1-a)$$

(somma della progressione geometrica di ragione a e di primo termine 1).

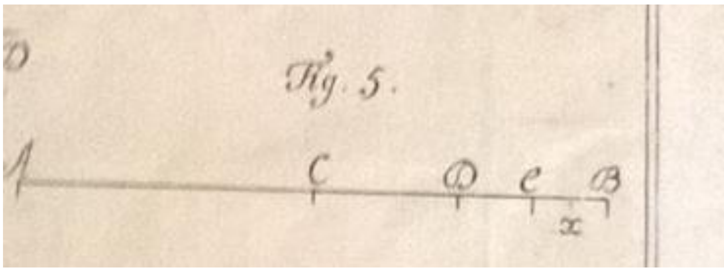

Figura 5 – segmento unitario dicotomizzato con ultimo termine della suddivisione non nullo

Gerdil afferma che tutto ciò non deve portare alla convinzione dell'esistenza di un ultimo termine 0, bensì al fatto che i termini della successione vadano progressivamente decrescendo. Il fatto di considerare 0 come ultimo termine va inteso come un "*artifizio di calcolo*".
Gerdil esamina anche la possibile situazione di un ultimo termine (x) non 0 ma quasi uguale a 0 : sostiene che "*questa non è possibile perché la progressione troverebbe il suo limite nel punto x e ciò è contrario alla natura della progressione che deve oltrepassare il punto x e tendere all'infinito verso il limite B*".
Gerdil ("*mi si consenta di spendere ancora qualche parola per esporre alcune idee relative a questo soggetto*") per ribadire la correttezza del calcolo nell'analogia tra il caso finito ed il caso infinito afferma che ciò che conta nel procedimento non è il susseguirsi di infiniti termini della progressione bensì la proporzione costante che sussiste tra loro ("*ora per trovare questa quantità per mezzo del calcolo non è affatto necessario supporre che nella progressione vengano inclusi tutti i termini che potrebbero comporla: è sufficiente conoscere il rapporto dei primi due termini, rapporto che, essendo lo stesso per tutta la progressione, mostra il limite che la serie dei suoi termini dovrebbe raggiungere, qualora la si potesse sviluppare per intero*").
Inoltre, una volta eseguita la suddivisione del segmento nelle infinite parti, per forza di cosa la somma di tutte queste infinite parti deve ridare il segmento unitario ("*qualora si supponesse che il segmento AB potesse essere assoggettato ad ogni suddivisione possibile, tuttavia questa infinità di parti rimesse insieme non potrebbe dar forma ad altro che allo stesso segmento AB; e non essendo i termini della progressione altro che quelle stesse parti che risultano dalla suddivisione del segmento AB, ne segue che la somma di tutti questi termini, ove li si supponesse completamente sviluppati, altro non potrebbero formare che quello stesso segmento AB*").
In conclusione, questo calcolo è assoggettato a questi due vincoli che sono indipendenti dal numero assolutamente infinito di termini della progressione.

[31] Gerdil ricava la formula per la somma di una progressione geometrica infinita nello stesso modo in cui la ricavò Vieta, in "Varia responsa" del 1593, dalla già citata formula di Euclide, ponendo uguale a zero (*nihil*) l'ultimo termine della successione.

Paradosso di Zenone

Gregorio da San Vincenzo, nel suo "Opus geometricum, 1647" dimostrò che il paradosso di Achille e la tartaruga poteva essere risolto sommando una serie geometrica infinita. La finitezza della somma dimostrava che Achille poteva superare la tartaruga in un istante ed un punto definiti. Gregorio diede la prima enunciazione esplicita del fatto che una serie infinita rappresenta una grandezza, la sua somma, che chiama limite della serie. Egli dice che "*il termine di una progressione è la fine della serie che la progressione non raggiunge, anche se viene continuata all'infinito, ma a cui si può avvicinare in misura inferiore a qualunque intervallo dato*". Gregorio fece molte altre affermazioni che sono meno precise e meno chiare della precedente, ma portò dei contributi all'argomento e influenzò molti allievi.

A tale riguardo Gerdil afferma che il paradosso di Zenone ci aiuta a convincerci della fallacia dell'infinito attuale.

"*Supponiamo, diceva Zenone, che Achille proceda 10 volte più veloce di una tartaruga; se la tartaruga ha una lega di vantaggio, Achille non potrà mai raggiungerla perché mentre Achille percorrerà questa lega, la tartaruga avrà percorso la decima parte della seconda lega e, mentre Achille percorrerà la decima parte della seconda lega, la tartaruga avrà percorso la decima parte di questo decimo, e così via fino all'infinito*".

Se Achille si soffermasse un tempo finito in tutte le infinite posizioni intese in senso attuale allora Zenone avrebbe ragione a dire che Achille non raggiungerebbe la tartaruga. Ma l'esperienza insegna che ciò non succede; anzi è anche possibile calcolare (e in due modi e con risultati coincidenti) il punto in cui Achille raggiunge la tartaruga.

1° MODO: posta uguale a 1 la lunghezza di una lega e indicando con x il cammino percorso dalla tartaruga, quando Achille la raggiungerà $1+x$ esprimerà il cammino della tartaruga e , dato che Achille é 10 volte più veloce, $10x$ rappresenterà il cammino percorso nello stesso tempo da Achille; di conseguenza $10x = 1+x$, il che riporta x ad 1/9 di lega e ciò ci dice che Achille raggiungerà la tartaruga dopo che la tartaruga avrà percorso 1/9 di lega.

2° MODO: consiste nel determinare la somma della progressione geometrica decrescente di ragione 1/10 e di primo termine 1/10: 1/10, 1/100, 1/1000 ….

Usando la formula precedentemente considerata otteniamo: $s = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

Gerdil, quindi, ribadisce in questo modo la compatibilità tra la situazione reale, il calcolo puramente algebrico (il 1° MODO) e il calcolo della somma della progressione geometrica di ragione 1/10 e di primo termine 1/10 "*sottostante al concetto di limite*".

Gerdil rafforza le sue convinzioni sul Paradosso di Zenone citando l'abate Deidié e le sue riflessioni al riguardo: "*L'argomento di Zenone* -dice Deidié- *sarebbe inconcludente se non si scegliesse una tra le due scelte possibili: o Achille avrebbe dovuto impiegare un'infinità di passi per percorrere la prima lega, nel qual caso non sarebbe mai arrivato a percorrerla per intero, oppure i passi che lui avrebbe fatto percorrendo 1/10 di lega sarebbero rimpiccioliti di 10 volte e così via, nel qual caso non avrebbe mai potuto raggiungere la tartaruga…. ma l'una e l'altra di queste supposizioni sono tanto ridicole quanto impossibili*".

A conclusione della teoria delle progressioni: non esiste un ultimo termine della progressione decrescente ma, nel suo "*indefinito evolvere*", essa continua ad avanzare verso il limite a cui tende senza andare oltre e questo non significa che la progressione sia formata da un numero "*attualmente*" infinito di termini.

ULTIMA PROVA: metodi di approssimazione.

Gerdil afferma: "*la radice quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto fornisce un ulteriore e molto significativo esempio dell'impossibilità che una successione sia composta da un numero (attualmente) infinito di termini*". Egli motiva tale affermazione con il fatto che, a detta dei migliori geometri del tempo, il valore esatto della radice è impossibile, e ne deduce come conseguenza che è impossibile una successione di frazioni spinta fino all'infinito assoluto, quale dovrebbe risultare da un processo di approssimazioni portato al suo completamento e quindi all'infinito assoluto. Ne segue che "*Tout assemblage composé d'une infinité absolue de termes est réellement impossible*." (pag. 44). Pertanto a tale "*assemblage*" Gerdil si rifiuta di dare il nome di numero. Le difficoltà sorte nelle prove precedenti sono state superate con l'uso di passaggi al limite. Perché ora Gerdil non pensa agli irrazionali come limiti di razionali? Nella definizione di limite bisogna conoscere il limite cui la successione tende, in modo da poter verificare che la differenza tra tale limite e il termine generale della successione può essere arbitrariamente piccolo. È la stessa difficoltà che incontra circa sessant'anni dopo Cauchy, il quale la risolve introducendo il criterio di convergenza tramite il quale si può stabilire l'esistenza del limite di una successione senza conoscerne l'effettivo valore: la dimostrazione di tale criterio è però non completa se non è fornita una preliminare definizione di numero irrazionale: per Cauchy gli irrazionali, tra cui le radici dei numeri naturali non quadrati perfetti erano definiti, sulla base dell'intuizione geometrica, come limiti di quelle frazioni approssimanti che lo stesso Gerdil considera. Pertanto anche il criterio di convergenza di Cauchy non era completamente indipendente dalla geometria della retta. Solo negli anni 70 dell'800 Cantor e Dedekind definiscono i numeri reali irrazionali mediante uso dell'infinito attuale, con la conseguente completa aritmetizzazione dell'analisi e il superamento definitivo della preclusione di Gerdil.[32].

A proposito è interessante ricordare (Bottazzini, 2018, pag. 233) che Cantor in una lettera del 1885 a Gustaf Enestrem, assistente di Mittag Leffer, pubblicata nella "*Zeitschrift fur Philosophie*" protesta contro coloro che, come Cauchy e Gerdil, per difendere la loro fede, utilizzano una proposizione del tutto falsa quale l'impossibilità dell'infinito attuale.

Ma torniamo alle parole di Gerdil: egli vuole sottolineare la differenza tra il numero infinito di cifre di una progressione geometrica - considerata nella SESTA PROVA - ed il numero infinito di cifre dopo la virgola dell'approssimazione della radice quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto. I termini della progressione sono governati da una determinata proprietà e questo permette il calcolo della loro somma. Invece la successione infinita determinata dall'approssimazione della radice quadrata è composta da termini che, dopo la virgola, si susseguono indefinitamente senza un criterio apparente. Gerdil sostiene che si può calcolare il limite di una successione quando i termini si susseguono seguendo una certa legge e, in tal modo, appare in embrione la necessità di collegare il concetto di limite con la nozione di funzionalità.

Gerdil sottolinea l'importanza di una legge nel susseguirsi dei termini di una successione al fine di individuarne il limite. Questo collegamento è espresso nel saggio "*Dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*" dove considera la circonferenza limite della successione delle poligonali circoscritte sottolineando che essa stessa non può considerarsi una poligonale con infiniti lati attualmente distinti. Viene introdotta una distinzione tra il flusso delle poligonali ed il suo limite: "quando si suppone una differenza minore di qualunque data, non si suppone una cosa stabile, fissa e determinata, ma solo si accenna un processo possibile di moltiplicazioni o divisioni all'infinito, in virtù delle quali, qualunque differenza si vorrà assegnare si troverà per rimanerne ancora all'infinito, per le quali si potrà fare l'errore sempre minore dell'assegnato. E questo è il flusso per cui la circonferenza del poligono si accosta a quella del circolo, non che possa mai diventare circolo, ma perché potendo l'errore farsi sempre minore di qualunque dato, possono esser presi per uguali senza che ne resti viziato il calcolo".

[32] Nel saggio "*Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*" Gerdil dedica molto spazio al problema dell'incommensurabilità e, in particolare, al calcolo delle radici quadrate di numeri non interi, osservando che tali radici possono essere calcolate geometricamente, ma non con i numeri.

Gerdil, in definitiva, avverte che*"l'impossibilità dell'infinito attuale nella grandezza sia discreta sia continua non esclude assolutamente l'idea dell'infinito assoluto in quanto attributo dell'Essere senza restrizioni. Gli scrittori più precisi hanno sempre avuto cura di distinguere l'infinito metafisico dall'infinito matematico: lo stesso Fontenelle riconosce che l'infinito metafisico, di cui afferma che noi abbiamo naturalmente l'idea, non può applicarsi né ai numeri né all'estensione. È proprio dall'idea stessa di questo infinito, considerato nella maniera più astratta, che deriva in qualche forma la possibilità che noi abbiamo di aumentare col pensiero la grandezza all'infinito aggiungendo unità a unità; in modo che è sempre vero dire che l'infinito potenza suppone l'infinito in atto…. Ma sarebbe uscire dai confini di questa memoria l'entrare in discussioni puramente metafisiche*".

Conclusioni.

Al di là dell'intento apologetico delle verità di fede, Gerdil conduce una profonda analisi critica del concetto di infinito, accoglie l'analisi di d'Alembert, ne comprende la forza innovativa e ne presenta in più punti un avanzamento. Innanzitutto nella definizione delle nozioni di infinitesimo e di infinito, nozioni che sono esplicitamente collegate alla variabilità e considerate nel loro significato potenziale di tendenza ad un limite. Quello che manca, ripetiamo, non è l'idea che alla base dei concetti in esame debba esservi la variabilità, che, come è stato sottolineato più volte, è spesso richiamata. Quello che manca è la definizione di che cosa debba intendersi per quantità variabile in termini di quantità numerica variabile. Cauchy inizia il suo Cours d'Analyse con la definizione di funzione, e prosegue chiarendo il concetto di quantità a cui farà riferimento, dicendo: "*Applicheremo la denominazione di quantità unicamente alle quantità reali positive o negative*", specificando subito che ogni grandezza data sarà denotata da un numero. Al di là di questa ovviamente fondamentale precisazione, ci sembra che la successiva definizione di limite non si discosti di molto da quelle di d'Alembert e Gerdil: "*Quando i valori successivamente attribuiti ad una medesima variabile si approssimano indefinitamente a un valore fisso, in modo da differirne tanto poco quanto si vuole, quest'ultimo è detto limite di tutti gli altri*". Il salto conclusivo, con l'esplicazione del gioco svolto da variabile indipendente e variabile dipendente avverrà solo dopo circa altri 50 anni, con la definizione statica di Weierstrass. Così Cauchy si presenta come un elemento di collegamento tra il passato non solo di Leibniz e Newton, ma ancora di più di d'Alembert e Gerdil (e per quest'ultimo è già stata richiamata la profonda contiguità) e il futuro di Weierstrass e degli studi sulle funzioni regolari e patologiche che caratterizza la seconda metà dell'800.
Bisogna altresì tenere presente che con Cantor e la teoria degli insiemi l'infinito attuale ha fatto il suo ingresso definitivo nella pratica e nell'educazione matematica, grazie alla potenza della sua impostazione, che rende tra l'altro possibile una definizione rigorosa degli irrazionali. Nonostante l'opposizione di intuizionisti e costruttivisti, la maggior parte dei matematici oggi ha fatto proprie le parole di Hilbert secondo le quali nessuno può cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.

BIBLIOGRAFIA

SILVIA FASCIOLO BACHELET, 2001, *Il pensiero filosofico di Giacinto Sigismondo Gerdil*, http://www.barnabiti.net/wp-content/uploads/2013/12/Barnabiti_Studi_18.pdf .
GEORGE BERKELEY, 1734, *The Analyst Or A Discourse Addressed To An Infidel Mathematician, Wherein It Is Examined Whether The Object, Principles, And Inferencies Of The Modern Analysis Are More Distincly Conceived, Or More Evidently Deduced Than Religious Mysteries And Points Of Faith. First Cast Out The Beam Out Of Thine Own Eye; And Then Shalt Thou See Clearly To Cast Out The Mote Out Of Thy Brother's Eye*, London (Traduzione italiana di N. de Pisapia, 1997, *L'analista*, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, Napoli).
UMBERTO BOTTAZZINI, 2018, *Infinito, raccontare la matematica*, Il Mulino.
CARL BENJAMIN BOYER, 1959, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York.
CARL BENJAMIN BOYER, 1976, *Storia della matematica*, Isedi, Milano.
GUIDO CASTELNUOVO, 1962, *Le origini del calcolo infinitesimale*, Feltrinelli. In questo volume appare la traduzione in italiano, curata da Ettore Carruccio di *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* di G. W. Leibniz e di *Tractatus de quadratura curvarum* di I. Newton.
JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT, 1754, Lemmi *Asymptote, Différentiel, Infini, Limite, Série*, dell'Encyclopédie.
JEAN-BAPTISTE DE LA CHAPELLE, 1750, *Traité des sections coniques,et autres courbes anciennes*, Quillau, Paris.
ANTOINE DEIDIER, 1740, *Mésure des surfaces et des solides par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité*, Jombert.
PASCAL DUPONT, CLARA SILVIA ROERO, 1991, in "*Leibniz 84", Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*, Mediterranean Press.
GIACINTO SIGISMONDO GERDIL, 1845, *Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil*. Vol. II, Firenze: presso G. Celli.
BERNARD LE BOVIER DE FONTENELLE, 1727, *Eléments de la géometrie de l'infini,* De l'Imprimerie Royale, Paris.
GALILEO GALILEI, 1990, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, a cura di Enrico Giusti, Einaudi, Torino.
JOSEPH-LOUIS LAGRANGE, 1797, *Théorie des fonctions analytiques*, De l'Imprimerie de la République, Prairal, an. V.
GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, 1689, *Tentamen de motuum coelestium causis,* Acta Eruditorum, 1º gennaio 1689.
GUILLAUME DE L'HOSPITAL, 1696, *Analyse des infiniment petits*, De l'Imprimerie Royale, Paris; Montalant, MDCCXV.
GUILLAUME DE L'HOSPITAL, 1720, *Traité analytique des Sections Coniques*, Ouvrage posthume, Paris, Montalant, MDCCXX.
ISAAC NEWTON, 1687, *Philosophiae Naturalis Principia*, London.
ISAAC NEWTON, 1740, *La Méthode des fluxions et des suites infinies par M. le Chevalier Newton*, Paris.
GIOVANNI PIANTONI, 1851, *Vita del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil Barnabita, e analisi di tutte le stampate sue opere*, Roma.
PIETRO STELLA, 2001, *Appunti per una biografia di Giacinto Sigismondo Gerdil*, http://www.barnabiti.net/wp-content/uploads/2013/12/Barnabiti_Studi_18.pdf .
ANDRÈ TACQUET, 1651, *Cylindricorum et annularium libri*, Antwerp.
EVANGELISTA TORRICELLI, 1975, *Opere scelte*, UTET, Torino.

ROBERTO VALABREGA, 2004, *Un anti-illuminista dalla cattedra alla porpora, Giacinto Sigismondo Gerdil, professore, precettore a corte e cardinale*, Deputazione subalpina di storia patria, Torino.
JOHN WALLIS, 1656, *Arithmetica infinitorum*, Oxford.

Nel presente articolo si fa riferimento all'Edizione Fiorentina delle Opere di Gerdil e ad alcuni documenti presenti negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.
Ma le Opere sono anche stampate nelle seguenti edizioni:
- *Delle Opere dell'Eminentissimo sig. Card. Giacinto Sigismondo Gerdil*, 1784-1791, Nuova edizione illustrata di note e accresciuta di opere inedite, a cura di Filippo M. Toselli, vol. 6, Bologna, Istituto delle Scienze.
- *Opere edite ed inedite del Card. Giacinto Sigismondo Gerdil*, 1806-1821, a cura di Leopoldo Scati e Antonio M. Grandi, vol. 20, Roma.
- *Opere edite ed inedite del Card. G.S. Gerdil*. 1853-1856, Nuova collezione a cura di Gaetano Milone e Carlo Vercellone, vol.7, Napoli, Tipografia del Diogene.

In particolare, le figure del testo sono desunte dai:
Mélanges de Philosophie et de Mathématiques de la Société Royale de Turin pour les années 1760-1761, dove è pubblicato il saggio *Mémoire de l'infini absolu considéré dans le grandeur*.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni – Università di Napoli Federico II
loredana.biacino2@unina.it
** Dipartimento di Matematica "G. Peano" – Università di Torino
gabriella.viola@unito.it