"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

MovimentiAmo la matematica: tra teoria e pratica

Francesca Ferrara
Università di Torino

Ketty Savioli
Istituto Comprensivo Chieri III (TO)

E-mail: *francesca.ferrara@unito.it*, *ketty.savioli@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *In questo contributo discutiamo come sia possibile movimentare la matematica, nel suo insegnamento e apprendimento, tenendo in considerazione anche una sua dimensione estetica, di bellezza (di amore). Questa prospettiva si basa su esperienze nelle quali, in questi anni, abbiamo cercato di coniugare ricerca e didattica, elementi di teoria e la pratica in classe. Presenteremo dunque esempi di attività e di processi di pensiero che illustrano, da un lato, quanto sia importante una visione dinamica della disciplina, dall'altro, modi in cui gli studenti possono essere creativi e avere piacere nel fare matematica.*

1. Movimento, estetica e matematica

Il 27 settembre 2018 è stata riaperta al pubblico la Cappella della Sindone a Torino, dopo un restauro durato 21 anni in seguito a un incendio che nel 1997 ne mise a serio rischio la tenuta. Capolavoro di Guarino Guarini, la Cappella colpisce per la sua maestosa bellezza, espressa da una dinamica armonia delle forme che conferisce un piacevole senso di movimento e fluidità allo sguardo che si erge rapidamente verso l'alto, al centro della cupola, dove una punta a dodici stelle racchiude il simbolo di una colomba (Figura 1). Subito sotto, una serie di profili esagonali concentrici cattura l'emergere del movimento dall'apparente fissità strutturale, con la cupola traforata da luci triangolari. L'osservatore ha così l'impressione di partecipare a un gioco di prospettive, di proporzioni e di relazioni, il quale crea movimento laddove sembra esservi staticità. Le geometrie delle zone esagonali sovrapposte e alternate regalano una visione dinamica, intrecciata, avvolgente. Il marmo sembra librarsi, muoversi.

Figura 1. *La maestosa cupola di Guarino Guarini.*

La visione di questo affascinante capolavoro trasmette la sensazione di ciò che significa anche irradiare bellezza attraverso la matematica, di un'estetica che si origina da, e grazie a, intrecci di forme e proporzioni.
Il mestiere di un insegnante spesso richiede di "mobilizzare" strutture, di cogliere geometrie pedagogiche e didattiche, di tradurre punti di vista. Oltre a essere ideatore paziente di metodi e approcci, deve anche aprire alla varietà di molteplici soluzioni e prospettive. Insegnare la matematica implica infatti un continuo dialogo tra la creazione di schemi e la sapiente offerta di

strumenti per rompere, cambiare, ristrutturare tali schemi. In tal senso, la pratica didattica dovrebbe *farsi* movimento, essere movimento del pensiero e delle intuizioni.
Prendiamo l'esempio di una divisione *non standard*, come quella presentata dal noto item INVALSI per la quinta primaria somministrato nel 2017, che chiede di individuare il divisore di 8 affinché il risultato sia 16 (ossia, 0,5). Se si mantengono rigidamente l'approccio e le regole introdotti per i numeri interi, la concezione che la divisione significhi sempre diminuire renderà difficile intuire come sia possibile ottenere un risultato di senso (il quesito ha comunque ottenuto circa il 27% di successo). Come si può "far stare" 16 dentro 8? Chi è riuscito a rispondere correttamente? Le variabili favorevoli possono essere molteplici.
Vincente è certo l'atteggiamento di chi ha imparato a spaccare lo schema dei numeri interi a favore di quello dei numeri decimali, così da immaginare di "spingere" 16 dentro 8. Magari riempiendo lo spazio fisico del foglio di senso e movimento con tentativi, errori e scarabocchi (Figura 2; Ferrara & Savioli, in stampa). Questo è *movimento* del pensiero, oltre che della mano che scrive, cancella, salta, collega, su carta.

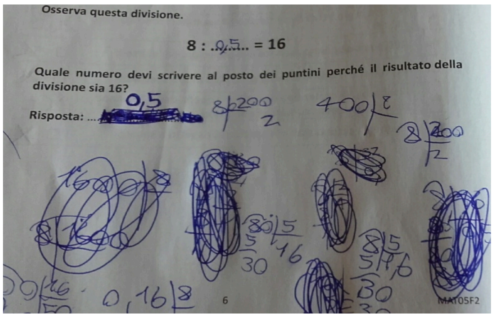

Figura 2. *Esplorazioni che spaccano gli schemi (quesito INVALSI, quinta primaria 2017).*

La ricerca didattica fornisce elementi teorici per comprendere l'importanza del movimento (nella accezione ampia che qui introduciamo) nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Da un lato, numerosi ricercatori hanno messo in luce il ruolo del corpo e dell'*embodiment* in matematica (Radford et al., 2009; Nemirovsky et al., 2013; Edwards et al., 2014; de Freitas e Sinclair, 2014; Kelton e Ma, 2018), caratterizzando il movimento come quello del corpo, spostamento fisico nello spazio, e indagando il contributo di attività percettivo-motorie alla costruzione di senso. Anche la *natura* mobile e dinamica del pensiero e dei concetti matematici sono (e sono stati) oggetto di studio (Châtelet, 1993/2000; Rotman, 2012; Lagacé, 2015; Roth, 2015). Infine, la cosiddetta teoria della *variazione* considera cambiamento e variazione come aspetti cruciali del fare matematica (Marton e Pang, 2013; Kullberg et al., 2017; Mason, 2017). Coniugando teoria e pratica secondo le tre direzioni, in questi anni, abbiamo ideato un progetto che prende il nome di *Matematica in Movimento*, il quale mira a mettere in movimento la matematica e a introdurre il movimento in matematica come prassi nelle attività di classe (si veda anche Ferrara, Ferrari e Savioli, in stampa).
Altra parte della ricerca in didattica mette l'accento sulla dimensione *estetica* (sulla bellezza) della matematica (Sinclair, 2011; Netz, 2009; Pimm e Sinclair, 2009), che è legata anche alla creatività e all'inventiva nel fare matematica (ad es., Hadamard, 1945; Zhang, 2013; Maheux e Roth, 2015). Solitamente, questa dimensione estetica è associata a perfezione, simmetria, pulizia ed efficienza del ragionamento (prevalentemente tecnico, logico), con il rischio di offuscare l'aspetto più legato al lavoro ("labour") umano, di contingenza e temporalità. Maheux (2016) sottolinea invece la necessità di pensare anche a una matematica *Wabi-Sabi*, con riferimento alla prospettiva giapponese che si focalizza sulla bellezza delle cose modeste e semplici, insolite: una bellezza delle cose imperfette, provvisorie e incomplete. *Wabi* indica l'essere puro, *Sabi* l'essere provvisorio. Imperfezioni, difetti, limiti, incompletezza, temporalità, non permanenza e non convenzionalità, insieme a contraddizione e ambiguità, sono elementi

apprezzabili ed esteticamente ricchi per il modo in cui aiutano ad aprire e a sviluppare le nostre sensibilità verso la natura *imprevedibile* e *incontrollabile* delle esperienze, anche in matematica. Si tratta di una visione che riconosce alla matematica una natura non *disembodied* e astratta, non oggettiva e intrinsecamente strutturata, dimostrabile e, dunque, universale. Dai numeri immaginari all’irrazionalità della radice di 2, dalle geometrie non euclidee all’analisi non standard, al teorema di Gödel e alle dimostrazioni basate sul calcolatore, la matematica mostra la sua incompletezza, continuando a eccedere i suoi propri confini. Châtelet chiama questa la *virtualità* della matematica, la sua capacità di andare oltre ciò che è puramente possibile e aprirsi a nuova matematica. La matematica insomma è sempre in uno stato transitorio. I problemi inversi, non finiti o asseriti in modo incompleto, dalla natura non ortodossa e senza risposta precisa, su cui sono richieste da parte dei solutori assunzioni aggiuntive che generano soluzioni molteplici e creative, punti di vista sui punti di vista, e le strade che non esauriscono se stesse, come la causalità propria del pensiero probabilistico, sono tutti esempi di bellezza *Wabi-Sabi*.
Anche le esplorazioni abbozzate della Figura 2, con le rotture di schema, che permettono di cambiare prospettiva e di accettare o scoprire che dividere talvolta significa aumentare, catturano questa dimensione estetica associata al lavoro matematico (quella stessa per cui il matematico di professione prova piacere nell’affrontare problemi difficili).
In quanto segue, discuteremo possibilità di movimentare il pensiero e i concetti matematici nel concreto della classe, rifacendoci a un’idea di bellezza del fare matematica che valorizzi la pluralità e la costellazione di esperienze intuitive e relative degli studenti. Faremo perciò riferimento a tre filoni concettuali su cui abbiamo focalizzato le nostre sperimentazioni, ossia: senso del grafico, senso del numero e senso del simbolo.

2. Senso del grafico, senso del numero e senso del simbolo

Il primo filone, sul *senso del grafico*, fa parte del progetto della Matematica in Movimento e riguarda essenzialmente approcci grafici al concetto di funzione con sensori di movimento. Nel corso di più di un decennio, tali approcci hanno coinvolto decine di studenti dalla scuola dell’infanzia all’università, utilizzando diversi tipi di sensori, dal *CBR* al *Motion Visualizer* a *Go!Motion* e, infine, *WiiGraph*. Queste tecnologie hanno la potenzialità di avvicinare studenti anche molto giovani a grafici di funzione attraverso la modellizzazione di esperimenti che prevedono il movimento di una o più persone (o oggetti) di fronte a un sensore (origine di riferimento). I grafici con i quali è possibile lavorare sono grafici della posizione in funzione del tempo e, se i sensori più diffusi permettono di avere un solo grafico, altri, *WiiGraph* ad esempio, ne creano almeno due in contemporanea sullo stesso piano cartesiano, addirittura tre quando si sceglie di lavorare con operazioni tra funzioni (la Figura 3 mostra più situazioni).

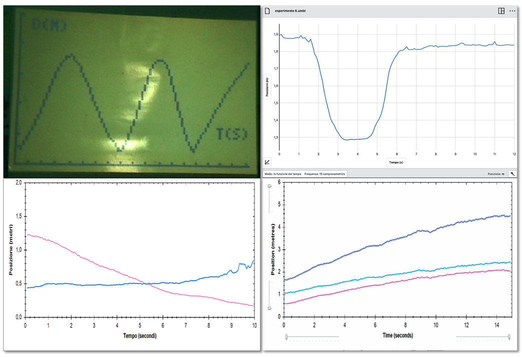

Figura 3. *Grafici forniti da il CBR e Go!Motion (in alto a sinistra e a destra); WiiGraph (in basso).*

Che questo tipo di attività possa essere stimolante per gli studenti è manifestato dalla reazione di stupore ed *emozione* assieme di fronte a un primo movimento dinnanzi a un sensore. Il pensiero si muove e diventa creativo nello sfruttare le potenzialità del corpo, come possiamo osservare nei casi 'limite' delle rette verticali e orizzontali. Ad esempio, Beniamino, alunno di terza primaria che ha utilizzato il *CBR*, per spiegare l'*impossibilità* per la retta verticale di catturare un movimento pensa al grafico come a "una piattaforma, in pratica un posto che ti fa capire che il tempo passa" riuscendo ad associare la retta all'assurda situazione per cui "sarebbe come se tu fermi il tempo, e ti muovi". Così, la possibilità della retta orizzontale è stata legata all'assenza di movimento, per cui "devi stare fermo in un posto per 15 secondi, perché le onde [del sensore] ti colpiscono sempre lì quindi sei distante uguale".
Vediamo come queste attività permettono di costruire senso per il grafico legandolo al corpo. Il concetto di funzione si fa mobile, dinamico, accanto al pensiero, permettendo di toccare nozioni matematiche profonde anche a studenti molto piccoli, che affronteranno formalmente certe tematiche nella scuola secondaria di secondo grado. Un esempio è dato dai significati relazionali che emergono per la velocità: "un fenomeno che può occupare uno spazio e un tempo", "la misura di uno spazio di tempo" (alunni di quarta primaria che usano *Go!Motion*).
Le stesse attività possono essere messe in movimento e sviluppate a livelli scolari diversi: pensiamo al caso emblematico di configurazioni di cinque rette, invece di due, tutte parallele tra loro, o con la stessa origine, situazioni che possono essere considerate come variazioni di rappresentazioni grafiche usuali ottenute con *WiiGraph* e che implicano sforzi *immaginativi* ed *esperimenti di pensiero* da parte degli studenti, inducendoli a ragionare fuori dagli schemi.
Il filone sul *senso del numero* riguarda una sperimentazione che ha coinvolto una classe di studenti nei primi tre anni di scuola primaria in esplorazioni per costruire significati su aspetti relazionali del numero. I bambini hanno utilizzato un'applicazione *multi-touch*, *TouchCounts*, che risponde a più stimoli tattili contemporanei sullo schermo del tablet.

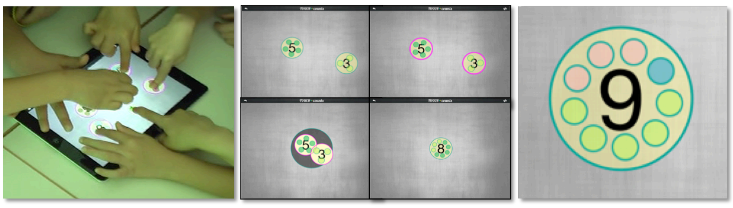

Figura 4. *L'applicazione multi-touch e l'addizione di numeri.*

Focalizziamo l'attenzione sul modo in cui l'applicazione permette di lavorare sulla somma di più numeri alla volta, mediante gesti per addizionare, connettere, unire numeri. La somma è questione di movimento: più dita possono unire più numeri contemporaneamente creando un nuovo numero. Il risultato racchiude in sé i numeri da cui si origina mantenendone il colore dei dischi: il numero 9 in Figura 4, ad esempio, è stato ottenuto a partire da 3, 5 e 1. Questa potenzialità ci ha permesso di lavorare in prima primaria sulla 'storia del numero': così, dato 9, è stato chiesto ai bambini di pensare agli addendi di partenza e di ricostruire la genesi del numero attraverso un disegno. La gestualità utilizzata nei processi esplorativi si è trasformata: il movimento è diventato segno, rappresentazione simbolica, freccia, movimento descritto, persino simbolo di uguale (Figura 5). Il nuovo modo di lavorare con i numeri genera anche nuovi modi di pensare alla somma, *movimenti* che permettono a 9 di essere il risultato dell'unione di 3, 5 e 1, ma nel contempo anche dell'unione di quattro numeri, 3, 4 e "due di sempre uno" (Sofia, alunna di prima primaria, quando il colore di uno dei dischi del numero 5 è cambiato e colorato di rosso, variazione interessante per innescare mobilità di pensiero).

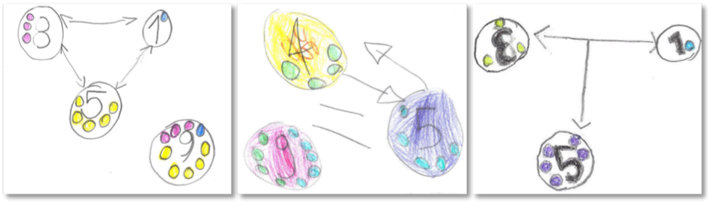

Figura 5. *Disegni che catturano la storia del numero 9.*

Un’attività analoga chiedeva di lavorare sulla somma di quattro numeri dati corrispondente a 18 (i quattro numeri erano 2, 3, 6 e 7). Modi di mettere in movimento l’attività in questo caso, potrebbero essere forniti da richieste del tipo: “Rappresenta almeno un altro modo in cui puoi ottenere 18, con quattro numeri, con tre numeri, …”, oppure: Possiamo ottenere 18 a partire da tre numeri uguali tra loro? E a partire da quattro numeri uguali tra loro?”, richieste che aprono eventualmente il discorso ai multipli e alla divisione con resto. Noi abbiamo utilizzato *TouchCounts*, ma attività analoghe possono essere costruite senza software, facendo giocare ruoli diversi ai bambini e alle loro dita, *come se* fossero addendi diversi.
L’ultimo filone, sul *senso del simbolo*, riprende riflessioni che provengono da un quinquennio di sperimentazioni (alla scuola primaria) sul nucleo Relazioni e funzioni, focalizzate nello specifico sulla ricerca di regolarità, sulla descrizione funzionale di sequenze di numeri o figure, sulla generalizzazione e sulla modellizzazione di strutture (come avvio al pensiero algebrico). Il ‘problema dei tavoli’ è un esempio utilizzato in attività di ricerca di regolarità che permette di mettere “figure in movimento”. Il problema riguarda la modellizzazione di una situazione in cui tavoli a pianta trapezoidale sono utilizzati per creare una grande tavolata dove far sedere gli ospiti che partecipano a una festa. I tavoli sono uniti tra loro lungo due lati obliqui (come in Figura 6, a sinistra). La situazione fornisce il numero totale degli ospiti (524) e pone come problematico il conteggio dei tavoli necessari, proponendo due diverse strategie risolutive, per bocca di due attori: Renzo ed Edouard (Figura 6, a destra). A bambini di quarta primaria è chiesto di pensare a chi, tra Renzo ed Edouard, ha ragione e perché.

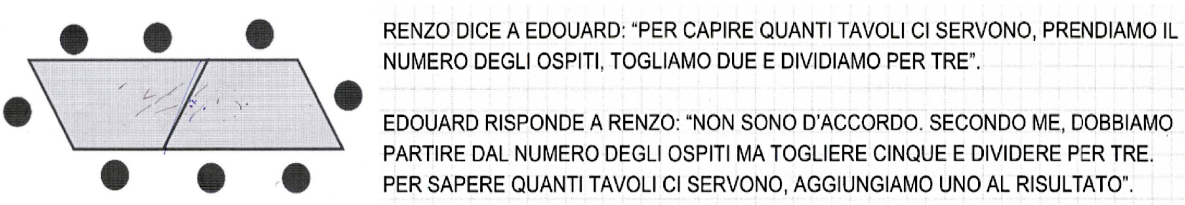

Figura 6. *Due tavoli uniti per il “problema dei tavoli” e le strategie di Renzo ed Edouard.*

Il ragionamento di Renzo è più diretto rispetto a quello di Edouard: si basa sulla ripetizione di tre sedute centrali, per ogni tavolo, cui sono da aggiungere le due sedute laterali della grande tavolata. Il modo di pensare di Edouard invece è di unire una seduta laterale con le quattro sedute del tavolo all’estremo opposto, così da ottenere le cinque sedute di un tavolo libero e da ricondurre il discorso alla presenza di un tavolo in meno (da aggiungere nuovamente alla fine). Essenzialmente, Renzo ed Edouard offrono due strade diverse per vedere e affrontare la stessa situazione: l’uno mette il numero dei tavoli T in relazione con il numero di sedute S, secondo la formula $S=3T+2$; l’altro, ragionando su $S-5=3(T-1)$. La struttura emerge pensando di visualizzare la situazione man mano che il numero dei tavoli aumenta, come accade nel protocollo di Lara e Filippo che hanno lavorato in coppia (Figura 7). Che le due strade siano equivalenti si ottiene trasformando con semplici manipolazioni algebriche la seconda formula nella prima. Non sono questi gli unici modi di innescare movimento: si può ad esempio pensare che cosa cambierebbe se si utilizzassero tavoli separati invece che uniti, oppure a che cosa succederebbe nel caso di tavoli più tradizionali, a pianta quadrata o rettangolare. Dalla primaria alla secondaria, insomma, il problema dei tavoli permette di volgere il pensiero verso nuove possibilità per spingersi sino allo studio di famiglie di funzioni lineari (rette).

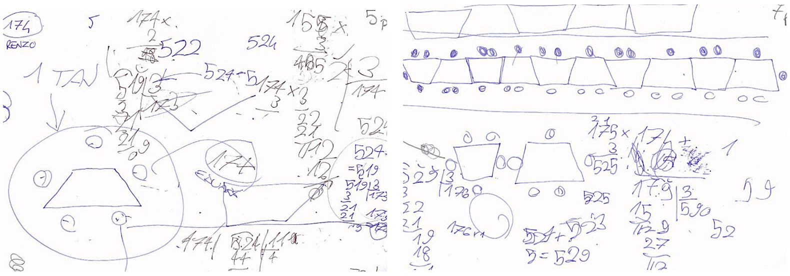

Figura 7. *Protocollo di Lara e Filippo sul problema dei tavoli.*

Quanto abbiamo discusso riguardo al senso del grafico, al senso del simbolo e al senso del numero vuole essere esemplificativo di come sia possibile, nella didattica della matematica, mettere in movimento non solo il corpo, ma anche i concetti e il pensiero, stimolando gli studenti alla creatività e alla bellezza nell'imparare la matematica. In questa prospettiva, è importante (e necessario) dare spazio a modalità espressive e comunicative, a immaginazione ed esperimenti di pensiero, alla variazione, e favorire punti di vista diversi, processi dinamici di cambiamento e cambi di prospettiva. Elementi, il cambiamento e i punti di vista, che hanno un ruolo di primo piano anche nella società moderna, in cui troppo spesso il pensiero critico e l'accettazione della diversità vengono a mancare. Amare la matematica è anche movimentare il pensiero. L'intelligenza infatti "è una forma d'amore, dopo aver separato, collega, unisce, connette" (Valerio, 2016).

Bibliografia

Châtelet, G. (1993/2000). *Les Enjeux du Mobile*. Paris: Seuil (English Transl. by R. Shore & M. Zagha, *Figuring Space: Philosophy, Mathematics and Physics*. Dordrecht: Kluwer, 2000).

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* New York, NY: Cambridge University Press.

Edwards, L., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.) (2014). *Emerging Perspectives on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ferrara, F. & Savioli, K. (in stampa). Dividere non è sempre ciò che sembra. In *Il dato nella didattica delle discipline. II Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"*. Roma: Franco Angeli Editore.

Ferrara, F., Ferrari, G. & Savioli, K. (in stampa). Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2019.

Hadamard, J. (1945) *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, NY: Dover.

Kelton, M.L. & Ma, J.Y. (2018). Reconfiguring mathematical settings and activity through multi-party, whole-body collaboration. *Educational Studies in Mathematics, 98*(2), 177-196.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U. & Marton, F. (2017). *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 559-569.

Lagacé, F. (2015). Mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 21-27.

Maheux, J.F. (2016). Wabi-Sabi Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 6*(1), 174-195.

Maheux, J.F. & Roth, W.M. (2015). Inventing (in) early geometry, or How creativity inheres in the doing of mathematics. *REDIMAT, 4*(1), 6-29.

Marton, F. & Pang, M.F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to test by embedding it into a pedagogical tool. *Frontline Learning Research, 1*(1), 24-41.

Mason, J. (2017). Issues in variation theory and how it could inform pedagogical choices. In R. Huang & L. Yeping (Eds.), *Teaching and learning mathematics through variation. Confusian heritage meets western theories*. Boston, MA: Sense.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Netz, R. (2009). *Ludic Proof: Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic*. New York, NY: Cambridge University Press.

Pimm, D. & Sinclair, N. (2009). Audience, style and criticism. *For the Learning of Mathematics, 29*(2), 23-27.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91-95.

Roth, W.M. (2015). Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 2-7.

Rotman, B. (2012). Topology, algebra, diagrams. *Theory, Culture & Society, 29*(4/5), 247-260.

Sinclair, N. (2011). Aesthetic Considerations in Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 2-32.

Zhang, X.G. (2013). Thinking analysis to the process of mathematical creativity of mathematicians. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* 27. Retrieved from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome27/

Valerio, C. (2016). *Storia umana della matematica*. Torino: Einaudi.