8. Dividere non è sempre ciò che sembra

di Francesca Ferrara, Ketty Savioli

L'esplorazione di aspetti relazionali e concettuali che danno senso e significato alle operazioni numeriche va oltre alla staticità di algoritmi e procedure ed è fondamentale in Matematica, soprattutto nell'apprendimento del calcolo, sin dai primi anni della scuola primaria. Dalla ricerca didattica è evidente che un apprendimento poco flessibile delle operazioni e delle loro proprietà è legato a ostacoli epistemologici e cognitivi. In questo lavoro, tale discorso ci interessa in relazione soprattutto alla complessità dei processi di inversione e all'estensione del significato delle operazioni a domini numerici diversi da quello dei naturali. Prenderemo in esame dati provenienti dalle prove di Matematica SNV riguardanti quesiti sulle operazioni e sulla loro estensione ai razionali, i quali mostrano delle percentuali di risposte corrette molto basse. In particolare, focalizzeremo l'attenzione sull'item D9 della prova del 2017 per la classe quinta, incentrato sulla divisione per un numero minore di 1. Infine, prenderemo in considerazione le strategie utilizzate nella risoluzione di tale quesito da alunni di classe quinta che hanno partecipato a una sperimentazione del percorso didattico "Bersaglio" (tratto dai materiali INDIRE previsti per il piano m@t.abel dedicato alla scuola primaria). Il percorso infatti mira proprio a costruire competenze sugli aspetti concettuali e relazionali delle operazioni e delle loro proprietà, esplorati in un contesto di gioco e di problem solving attraverso attività laboratoriali in classe. L'analisi dei dati a nostra disposizione e delle strategie risolutive ci ha fornito prime intuizioni su una correlazione positiva tra la partecipazione nella sperimentazione e la costruzione di competenze concettuali e relazionali sulla divisione e sulle sue proprietà.

1. Introduzione

L'apprendimento del calcolo, sin dai primi anni della scuola primaria, non passa solamente attraverso l'applicazione rigida e statica di algoritmi e procedure ma si costruisce esplorando gli aspetti concettuali e, soprattutto, relazionali che contribuiscono al "senso" e al significato delle operazioni.

La ricerca didattica ha messo in luce ostacoli sia di tipo epistemologico sia di tipo cognitivo legati a un apprendimento poco flessibile delle operazioni e delle loro proprietà, in particolare, per quanto riguarda la complessità dei processi di inversione e l'estensione del significato delle operazioni a domini numerici oltre quello dei numeri naturali.

Greer (2012) nello specifico prende in considerazione l'importanza centrale dell'inversione nell'aritmetica con i numeri naturali e con le quattro operazioni e la struttura dei sistemi aritmetici, in particolare in relazione alle operazioni inverse. Greer sottolinea che vi è una netta distinzione tra l'essere fluenti nei calcoli e l'avere una comprensione concettuale delle operazioni e mette in luce che quest'ultima si lega anche a un senso della struttura posseduta dai sistemi numerici. Con riferimento alle relazioni inverse tra le operazioni aritmetiche, la struttura può essere esplorata ed esplosa in molti modi, tra cui l'utilizzo delle operazioni inverse per testare calcoli e la derivazione di procedure di calcolo alternative, come per esempio la sottrazione pensata come addizione complementare.

L'inversione ha a che fare strettamente con la proprietà di chiusura di un'operazione, o meglio con la mancanza di tale proprietà, e con lo sviluppo dei sistemi numerici. Così, nei numeri naturali l'addizione è chiusa, nel senso che la somma di due qualsiasi numeri naturali è ancora un numero naturale, ma non lo è la sottrazione, la sua operazione inversa. Questa mancanza di chiusura della sottrazione crea una sorta di disequilibrio, che viene risolto solo con l'aggiunta dei numeri negativi. La moltiplicazione, incontrata dapprima come addizione ripetuta, è ancora chiusa nei numeri naturali, ma la sua inversa, la divisione, non lo è. Questa mancanza è nuovamente superata con l'introduzione dei numeri razionali che formano un insieme numerico chiuso rispetto a tutte e quattro le operazioni (fatta eccezione per la divisione per 0).

Il discorso potrebbe essere ampliato ulteriormente, ma per il nostro scopo in questo lavoro, quanto detto mostra chiaramente come l'inversione sia incorporata in sistemi di numeri che risultano inclusivi in modo crescente e nelle loro strutture algebriche. Per tale ragione, sostiene Greer, l'inversione è un elemento chiave nell'articolazione tra aritmetica e algebra. In aggiunta, l'inversione può essere legata alla struttura semantica di un problema e alla modellizzazione di una situazione, non semplicemente a meri calcoli, con la moltiplicazione e la divisione che forniscono modelli più complessi rispetto ad addizione e sottrazione.

Nell'insegnamento e apprendimento della Matematica, secondo Selter *et al.* (2012), è anche richiesta una prospettiva longitudinale, che rifletta per esempio sull'estensione del significato della moltiplicazione e della divisione oltre il dominio dei numeri naturali. La varietà di situazioni modellizzabili mediante moltiplicazione e divisione è dunque maggiore per due ragioni principali: da un lato, la complessità delle relazioni e, dall'altro, l'interazione con i tipi di numeri coinvolti (anche quando la discussione sia ristretta a numeri positivi). È una complessità che si applica anche all'inversione e già Freudenthal (1983) sosteneva che la relazione della divisione con la moltiplicazione è molto più complessa di quella della sottrazione con l'addizione.

Si tratta di una prospettiva strettamente legata agli aspetti relazionali che concorrono allo sviluppo di senso del numero ed è dunque importante per i processi di insegnamento e apprendimento, per esempio per evitare misconcetti legati alla concezione che moltiplicare significhi sempre *aumentare* e dividere sempre *diminuire* (tipici ostacoli epistemologici); tali attenzioni sono fondamentali sin dai primi anni di scolarizzazione (Greer, 2009; Maher, Powell e Uptegrove, 2010). Come sostengono Nunes *et al.* (2012), può non essere una buona pratica educativa insegnare ad allievi della scuola primaria come fare calcoli e lasciare ai loro mezzi lo sviluppo di capacità relazionali di calcolo.

In questo lavoro, vogliamo proprio focalizzare l'attenzione su dati provenienti dalle Prove di Matematica SNV, relativi a quesiti che coinvolgono le operazioni e la loro estensione ai razionali. Questi dati rilevano una bassa percentuale di risposte corrette e portano alla luce alcuni degli aspetti di complessità discussi. Vedremo quindi il caso di una sperimentazione didattica per lo sviluppo e l'osservazione di competenze numeriche e le strategie messe in campo dai bambini per la risoluzione di un particolare quesito.

2. "Dividere non è sempre ciò che sembra"

Prendiamo dunque innanzitutto in esame nello specifico la domanda D9 della prova SNV del 2017 per la classe quinta primaria, incentrata sulla divisione per un numero minore di uno (fig. 1). Gli allievi devono individuare il numero 0,5 che soddisfa la condizione per la quale dividendo 8 per 0,5 si ottiene come risultato 16. Si tratta di un quesito che lavora proprio sul nodo concettuale introdotto sopra: il risultato della divisione è maggiore del numero di partenza, non minore.

D9.

Osserva questa divisione.

8 : ……… = 16

Quale numero devi scrivere al posto dei puntini perché il risultato della divisione sia 16?

Risposta: ………………………

Fig. 1 – Domanda D9 della prova di Matematica SNV del 2017 per la quinta primaria

Il risultato del campione nazionale rileva che la percentuale di risposte corrette si attesta al 26,7%, le risposte errate sono il 58,5% e le risposte mancanti il 14,8%. Forniamo di seguito le informazioni statistiche dettagliate rilasciate da INVALSI per l'item (tab. 1 e fig. 2).

*Tab. 1 – Indici statistici derivati dall'analisi dell'*Item Response Theory *(IRT)*

Cases for this item: 25.482	Item-Rest Cor. 0.39
Item Threshold(s): 1.22	Item-Total Cor. 0.44
Weighted MNSQ: 0.96	Item Delta(s): 1.22

Label	*Score*	*Count*	*% of tot*	*Pt Bis*	*t*	*sig. p*	*PV1Avg:1*	*PV1 SD:1*
0	0	14.918	58,54	-0,28	-46,8	0,000	**-0,260**	0,930
1	1	6.791	26,65	**0,39**	67,76	0,000	0,700	0,920
7	0	176	0,69	-0,02	-2,56	0,010	-0,220	0,940
9	0	3.597	14,12	-0,09	-15,12	0,000	**-0,260**	0,930

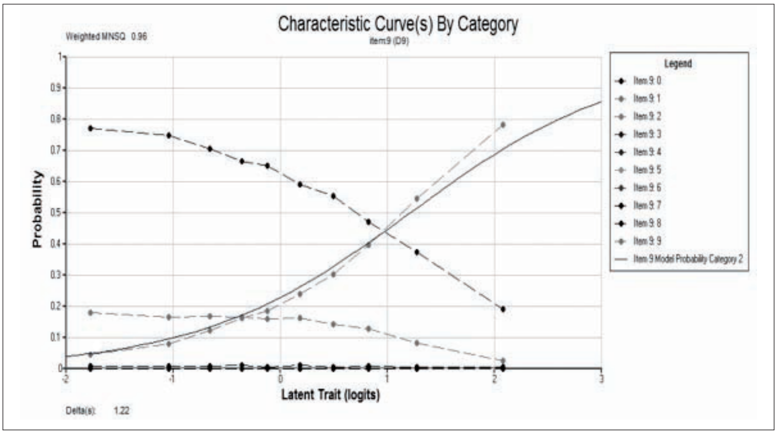

*Fig. 2 – Curve caratteristiche dell'analisi dell'*Item Response Theory *(IRT)*

Seppure la nostra chiave di lettura sia più orientata agli aspetti didattici, i parametri statistici ci permettono di fare le seguenti osservazioni (cfr. i valori in grassetto nella tab. 1):

– la difficoltà dell'item, espressa mediante il parametro *Item Threshold(s)* che vale 1,22, delinea un item difficile, ma non il più difficile della prova di Matematica per la classe quinta nella somministrazione 2017. Infatti, nel Rapporto tecnico (INVALSI, 2017b) si legge: "La difficoltà degli item, che nel modello di Rasch corrisponde al punto del continuum della scala di abilità in cui la probabilità di rispondere correttamente a un item è pari al 50%, varia da un minimo di -2,08 [item più facile] a un massimo di 1,48 [item più difficile], con una difficoltà media pari a -0,25 (dunque leggermente al di sotto dell'abilità media degli studenti del campione, fissata convenzionalmente a 0 in fase di calibrazione)";
– il dato denominato *Weighted MNSQ*, cioè l'indice di adattamento che esprime quanto i dati rilevati su un singolo item siano aderenti al modello complessivo determinato attraverso i dati dell'intero test (valore prossimo a 1), vale 0,96 e ci conferma che l'item è adeguato e coerente;
– la correlazione del punto biseriale (*Pt Bis*) indica quanto l'item riesca a discriminare rispondenti con alte abilità rispetto a quelli con basse abilità; rappresenta la correlazione tra la probabilità di scegliere una data opzione e l'abilità complessiva del rispondente. In questo caso, risulta essere 0,39 per la risposta corretta (maggiore di 0,35, parametro di riferimento) e negativa per le altre opzioni;
– un'indicazione interessante deriva dai valori denominati *PV1 Avg* che rappresentano l'abilità media (nella stessa scala, cioè rapportati a 1) dei rispondenti sia per la risposta corretta (label 1) sia per gli errori (label 0) o le omissioni varie (label 7 e 9). Possiamo osservare che l'abilità media degli studenti che rispondono correttamente è *abbastanza* alta (e questo non ci sorprende), ma in entrambi gli altri casi (di errore e risposta mancante), l'abilità media degli studenti è la stessa (-0,260): per la statistica, chi non risponde non è in media meno abile di chi tenta una risposta errando. Ciò significa che l'item funziona davvero molto bene e il dato potrebbe dare indicazioni preziose per interpretare le strategie degli allievi legate ai tentativi o alle "rese".

Dunque la statistica ci fornisce indicazioni relative alla "robustezza" della domanda e alla sua compatibilità rispetto alle esigenze misuratorie del test (INVALSI, 2017c). Il caso dell'item D9 è il caso di un item fortemente robusto.

Spostiamo ora l'attenzione sulle caratteristiche didattiche e sui contenuti matematici messi in gioco da questa domanda.

Una conoscenza necessaria per risolvere il quesito è legata al fatto che, essendo 8 e 16 numeri interi positivi, se il quoziente di questa divisione è maggiore del dividendo, il divisore sarà necessariamente un numero maggiore di 0 e minore di 1.

L'individuazione del rapporto tra 16 e 8 potrebbe indurre a scegliere come divisore 2 invece di 0,5 o ½, oppure potrebbe indurre gli studenti, consapevoli che il divisore deve essere compreso tra zero e uno, a scrivere 0,2 anziché 0,5. In altri casi, può accadere che alcuni studenti utilizzino 128 calcolando quindi il prodotto tra 16 e 8.

La richiesta prevede appunto una "rottura" rispetto al consueto trattamento delle divisioni con i numeri naturali e implica una comprensione del fatto che, nell'insieme dei razionali, moltiplicare non significa sempre *aumentare* e dividere *diminuire*, come già abbiamo messo in luce nell'introduzione.

Dal punto di vista della ricerca didattica e dello studio dei processi cognitivi che possono accompagnare la risoluzione del quesito, risulta dunque interessante un'analisi delle eventuali strategie di calcolo messe in campo, indipendentemente dalla correttezza della risposta. A tale scopo, in questo articolo mostriamo esempi di come il quesito sia stato affrontato da allievi che hanno preso parte a una sperimentazione didattica, la quale aveva tra i suoi obiettivi lo sviluppo di competenze numeriche, anche sulla moltiplicazione e divisione con i razionali.

3. Studio di caso: dalla didattica alla valutazione

Il nostro studio coinvolge alunni di classe quinta primaria che hanno partecipato a una sperimentazione del percorso didattico "Bersaglio"[1], tratto dai materiali INDIRE previsti per il piano nazionale m@t.abel dedicato alla scuola primaria. La sperimentazione è avvenuta nell'ambito delle attività di formazione e ricerca-azione della rete di scuole del progetto AVIMES Piemonte, che nell'anno 2016/2017 hanno riguardato la *Didattica laboratoriale in Matematica per sviluppare competenze*[2], e ha coinvolto più di 3.000

[1] Il percorso completo è reperibile al seguente indirizzo: http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/il-bersaglio/, data di consultazione 14/11/2019. Il percorso si riferisce al nucleo tematico *Matematica e Lingua* e gli autori sono F. Arzarello, P. Casella, F. Pretelli, K. Savioli.

[2] Il percorso di formazione *Didattica laboratoriale per sviluppare competenze* (di cui le autrici sono responsabili scientifici) ha coinvolto più di 120 insegnanti appartenenti alla Rete Avimes e 3.361 alunni che hanno sperimentato percorsi didattici in "verticale" (tra cui "Bersaglio") volti a costruire competenze chiave, dall'infanzia (tre anni) alla terza classe della scuola secondaria di primo grado (fine del primo ciclo).

alunni e, in particolare, 1260 alunni che hanno lavorato su “Bersaglio”, dalla terza primaria alla prima secondaria di I grado.

L’attività proposta da “Bersaglio” mira proprio a costruire competenze sugli aspetti concettuali e relazionali delle operazioni e delle loro proprietà, esplorati in un contesto di gioco e di problem solving attraverso attività laboratoriali in classe. La struttura additiva e moltiplicativa dei numeri naturali e decimali è esplorata e costruita dagli allievi in un contesto ludico, introducendo via via numeri con ruoli “delicati” quali lo zero, l’uno, i decimali minori di uno: in un insieme numerico di partenza si affrontano gli ostacoli epistemologici tipici di tali numeri (come appunto il fatto che moltiplicare tra di loro due numeri non sempre dà un risultato maggiore di entrambi i fattori ecc.). Inoltre, il contesto è corredato da richieste argomentative in cui vengono a intersecarsi i diversi registri del linguaggio naturale e di quelli grafico e simbolico. Possiamo dunque ipotizzare una correlazione positiva tra la partecipazione nella sperimentazione e la costruzione di competenze concettuali e relazionali sulle operazioni, in particolare per il nostro discorso sulla divisione e sulle sue proprietà.

Il lavoro di “Bersaglio” è articolato in sei attività di complessità crescente. Prendiamo qui in considerazione l’attività 4 (intitolata “Non è ciò che sembra”) che implica l’utilizzo di 0,5.

Attività 4 – Non è ciò che sembra

Scopo e regole del gioco

- Lo scopo del gioco è di ottenere il risultato maggiore, usando le operazioni.
- I numeri possono essere usati una sola volta nell’ordine che si ritiene più opportuno.
- Le 4 operazioni possono essere usate una o più volte.

In questo caso la strategia vincente prevede di: prima sommare 1 e 2 e sommare o sottrarre 0 ($1+2 \pm 0$), poi moltiplicare per 3, 5 e 10 ($(1+2 \pm 0) \times 3 \times 5 \times 10$) e infine dividere il risultato ottenuto per 0,5. Il risultato finale è 900.

Vediamo che cosa hanno fatto e scritto, nella loro spiegazione, diversi gruppi di bambini che hanno trovato 900 come risultato (attribuiamo un numero a ciascuno dei gruppi, le trascrizioni sono fedeli all’originale).

– *Gruppo 1*:
“[la prima parte del protocollo è dedicata ai calcoli e tentativi]
Insieme abbiamo fatto varie espressioni, tutte con la stessa tecnica.
Il primo procedimento, cioè [(1+2+0) × 3 × 5 × 10] è sempre stato giusto; il difficile è arrivato dopo per capire che cosa dovevamo fare con lo 0,5. Lo 0,5 abbiamo provato ad aggiungerlo, sottrarlo, moltiplicando e infine dividendolo. Con la moltiplicazione veniva troppo piccolo, anche sottrazione e addizione e la divisione era quella giusta perché quando ci sono i numeri decimali ce li fa aumentare”.
– Il *gruppo 2* parla esplicitamente di strategia: “La strategia che abbiamo utilizzato è:
Abbiamo capito che moltiplicando 450×0,5 veniva un numero sotto 450 perché 0,5 è la metà di 1, l’operazione contraria della moltiplicazione è la divisione. In questo caso la divisione ci ha fatto ottenere un numero maggiore”.
– Il *gruppo 3* esplicita i calcoli (fig. 3) e poi giustifica la risposta: “Dividere per 0,5 è uguale a moltiplicare per 2 perché 0,5 è contenuto nel dividendo il doppio di quest’ultimo. Esempio 2÷0,5=4 100÷0,5=200 450÷0,5=900”.

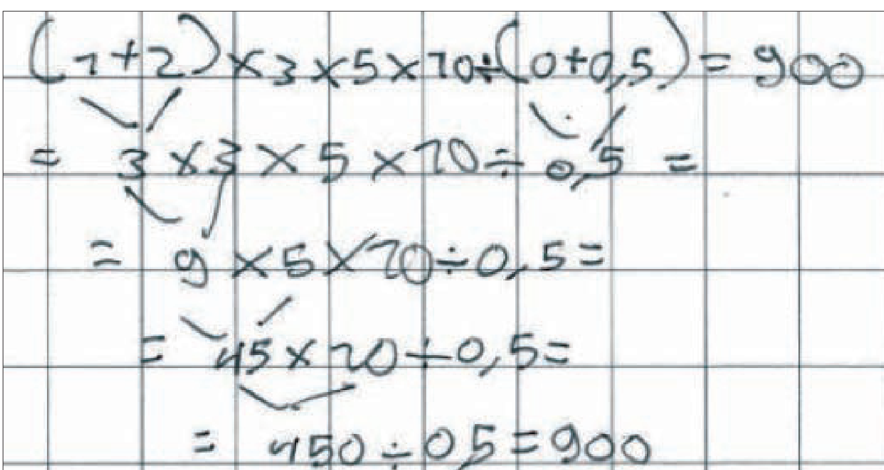

Fig. 3 – Passaggi svolti dal gruppo 3

Analizzando le spiegazioni fornite per iscritto dai tre gruppi, possiamo notare che ognuno dei tre mette in luce la caratteristica peculiare del dividere per 0,5 cioè quella di *far aumentare*. Tuttavia, il *gruppo 1* sembra aver proceduto prima per tentativi (“abbiamo provato”) e, solo dopo, aver collegato tali tentativi con il fatto di dividere per un numero decimale (“quando ci sono i numeri decimali ce li fa aumentare”). Il *gruppo 2* e il *gruppo 3* invece esplicitano una strategia di ragionamento sulle operazioni con lo 0,5, che essenzialmente si basa sul fatto che 0,5 equivalga alla metà di 1. Mentre per il *gruppo 2* il controllo avviene sul risultato della moltiplicazione per 0,5 che fa scegliere la divisione in quanto “operazione contraria della moltiplicazione”, per il *gruppo 3* ciò che discrimina è il fatto che “0,5 è contenuto nel dividendo il doppio di quest’ultimo” e, dunque, dividere per 0,5 è lo stesso di moltiplicare per 2, come mostrato anche dagli esempi scelti, di cui l’ultimo fornisce la risposta.

Per ragioni di spazio, non prendiamo in esame le successive attività di “Bersaglio”, che comunque chiamano in causa ulteriori numeri decimali che aumentano la complessità del compito.

Poco tempo dopo la fine della sperimentazione, gli allievi della stessa classe hanno affrontato la Prova di Matematica SNV 2017. Riportiamo di seguito alcuni dei protocolli relativi al quesito D9 che, come abbiamo visto, chiamava in causa di nuovo la divisione per 0,5. Non ci limitiamo a mostrare protocolli di risposte corrette, ma vogliamo dare anche esempi legati a risposte errate o mancate, che riteniamo comunque interessanti per il tentativo di risposta prodotto o per il riconoscimento di una relazione tra i numeri di partenza. La fig. 4 e la fig. 5 mostrano due diversi tipi di strategie di calcolo adottate. Nel primo caso, vediamo come il bambino faccia diverse prove sebbene sempre utilizzando l’operazione di divisione, dimostrando di averne compreso il significato: 800÷16, 80÷5, 8÷5 (fig. 4a). Nel secondo caso, la risposta sembra essere più diretta ma basarsi esclusivamente sul fatto che la divisione è inversa della moltiplicazione: 16×0,22, 16×0,5 (fig. 4b). In entrambi i casi, possiamo poi sottolineare un’indecisione nei confronti dell’uso del numero 2. Questo processo non stupisce affatto, perché in qualche modo è veicolato dal riconoscimento della relazione tra i due numeri 8 e 16 che sono dati (16 ÷ 8 = 2 oppure 8 × 2 = 16).

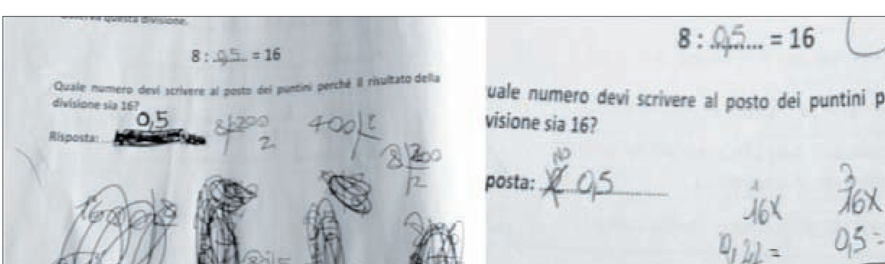

Fig. 4 – Risposta corretta che utilizza: (a) la divisione; (b) la moltiplicazione

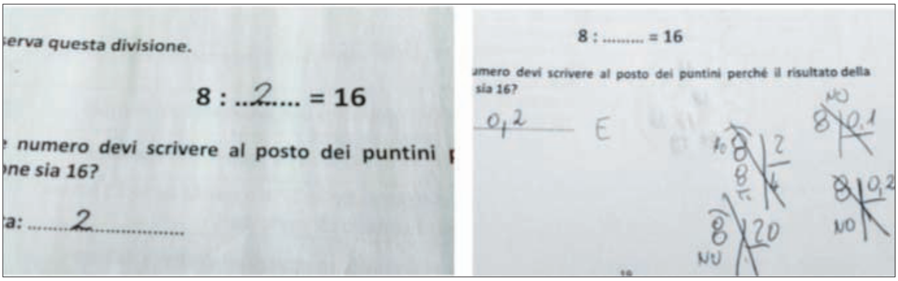

Fig. 5 – Risposta errata: (a) in cui 2 è inserito come divisore; (b) in cui è usato 0,2

Proprio in relazione a questo riconoscimento si ritrovano risposte errate come quelle mostrate nella fig. 5a e nella fig. 5b. Se la prima risposta non riflette in alcun modo sugli aspetti relazionali della divisione quando il dividendo è minore del risultato, la seconda riconosce che tra 8 e 16 c'entra in qualche modo il 2, ma poi confonde la metà con 0,2 (questo può essere visto come un "errore intelligente").

Vediamo quindi due esempi di strategie di risposta in cui, a partire dalla moltiplicazione di 16 e 8 (che dà 128), troviamo chi inserisce 128 come divisore, mostrando una confusione tra moltiplicazione e divisione, e chi, invece, cambia le carte in tavola lasciando vuoti i puntini e completando il quesito con l'aggiunta di "128÷" davanti all'8 fornito nel testo, in modo da rendere vera l'operazione 128 ÷ 8 = 16 (fig. 6).

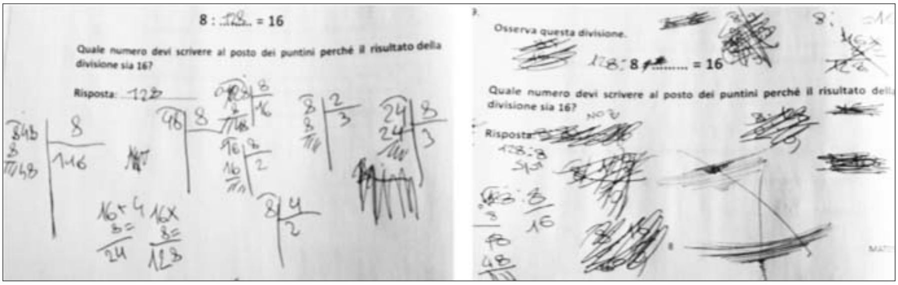

Fig. 6 – Risposte che presentano manipolazioni con il 128

Possiamo ancora fare riferimento alle risposte mancate vista la percentuale del 14% con cui queste si sono presentate nelle statistiche sull'item (percentuale piuttosto alta, raffrontandola con quella di risposte corrette). Una su tutte ci ha particolarmente colpito tra le risposte date dai nostri giovani sperimentatori: "non è divisibile", perché cattura proprio il misconcetto che il risultato di una divisione non possa mai essere maggiore del dividendo.

Quanto abbiamo presentato fin qui (di)mostra quanto la valutazione possa essere preziosa come strumento e, di conseguenza, momento per scoprire e superare misconcetti e difficoltà, mettendo a confronto e in comunicazione le più disparate strategie di soluzione messe in atto dagli studenti.

Chiudiamo le nostre riflessioni didattiche prendendo in prestito il protocollo di un bambino di classe quinta primaria, che, oltre ad aver risposto in modo corretto al quesito della prova, in un lavoro successivo durante un laboratorio di Matematica, fornisce un'argomentazione in cui dispensa consigli per quello che indica come "un buon solutore" (fig. 7).

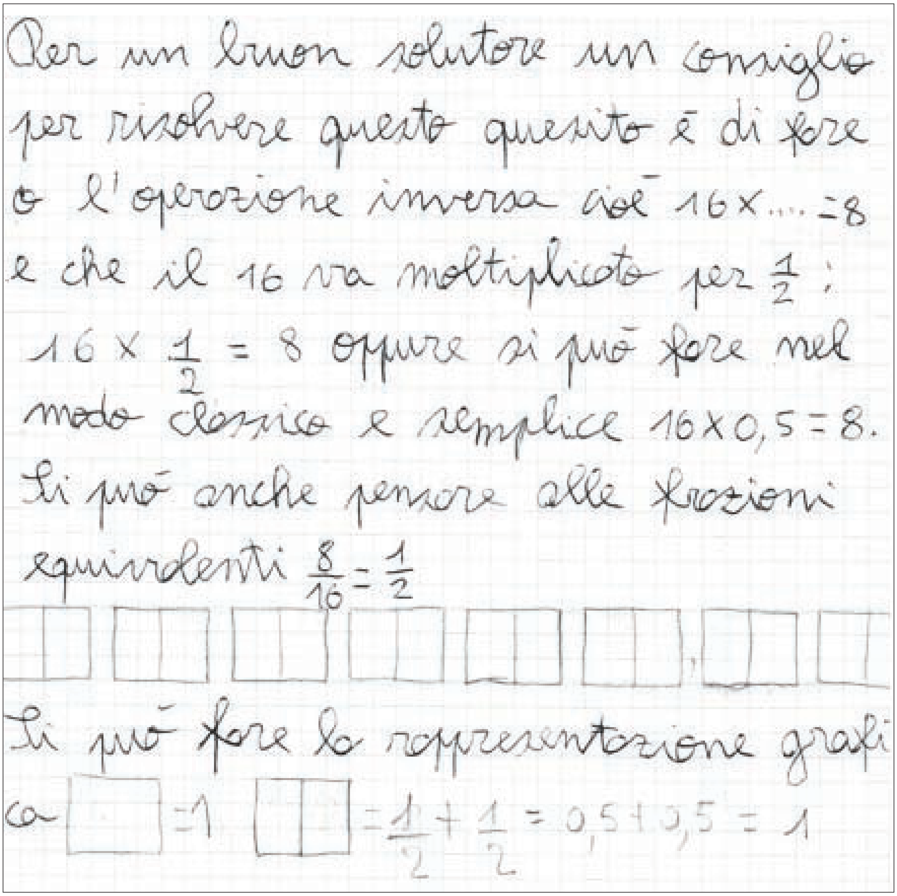
Per un buon solutore un consiglio
per risolvere questo quesito è di fare
o l'operazione inversa cioè 16 × .... = 8
e che il 16 va moltiplicato per $\frac{1}{2}$;
$16 \times \frac{1}{2} = 8$ oppure si può fare nel
modo classico e semplice 16 × 0,5 = 8.
Si può anche pensare alle frazioni
equivalenti $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
Si può fare la rappresentazione grafi
ca $= 1$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,5 + 0,5 = 1$

Fig. 7 – Il protocollo originale con i consigli per il buon solutore

Il protocollo recita così: "Per un buon solutore un consiglio per risolvere questo quesito è di fare o l'operazione inversa cioè 16 × … = 8 e che il 16 va moltiplicato per ½: 16 × ½ = 8 oppure si può fare nel modo classico e semplice 16 × 0,5 = 8. Si può anche pensare alle frazioni equivalenti 8/16 = ½. Si può fare la rappresentazione grafica" e fornisce una rappresentazione che utilizza il fatto che ½ + ½ = 0,5 + 0,5 = 1 (fig. 7).

Il nostro buon solutore è colui che ha compreso gli aspetti relazionali che legano la moltiplicazione e la divisione anche oltre l'insieme dei naturali, che sa anche sfruttare la conoscenza delle frazioni associate a numeri decimali, sa muoversi tra registri diversi ed è perciò capace di scegliere fra più strade possibili tutte equivalenti tra loro.

4. Riflessioni conclusive

In questo articolo abbiamo fatto riferimento nello specifico al quesito D9 della Prova di Matematica SNV 2017, ne abbiamo analizzato gli indici statistici associati e abbiamo infine presentato alcuni esempi di strategie di risoluzione di alunni di una quinta primaria. Questi bambini avevano precedentemente preso parte a una sperimentazione didattica sull'attività "Bersaglio", incentrata sul significato delle quattro operazioni e sulla loro estensione ai numeri decimali. Dal momento che le prove di Matematica per il sistema delle Rilevazioni nazionali mirano a "verificare periodicamente e sistematicamente le conoscenze e abilità degli studenti" (INVALSI, 2017a), ci sembrava interessante monitorare se la partecipazione a una sperimentazione didattica potesse essere correlata a eventuali strategie di calcolo utilizzate per la soluzione del quesito analizzato, indipendentemente dal fatto che la risposta finale fosse corretta. D'altra parte, l'item D9 del 2017 non è l'unico quesito che chiama in causa operazioni con i numeri decimali.

La prova di Matematica SNV 2012 per il primo anno della scuola secondaria di primo grado (allora ancora somministrata), conteneva una domanda per certi versi simile alla D9: l'item D23, che riguarda la moltiplicazione e la divisione per un numero decimale e coinvolge due numeri decimali distinti, 0,1 e 0,5 (fig. 8).

D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?

A. ☐ 10 × 0,5

B. ☐ 10 × 0,1

C. ☐ 10 : 0,5

D. ☐ 10 : 0,1

Fig. 8 – Domanda D23 della prova di Matematica SNV del 2012 per il grado 6

Anche allora, le statistiche condotte su un campione di oltre 20.000 studenti mostravano un item davvero complesso, con una percentuale molto bassa di risposte corrette (l'11%, risposta D) e una percentuale quasi uguale (10%) per la scelta del distrattore C più "vicino" alla risposta corretta, mentre ben il 71% ripiegava sulla risposta A e il 5% sulla risposta B. In quella somministrazione, tuttavia, solo il 3% circa di studenti non rispondeva, contro il 14% attuale del nostro item D9. Se, da un lato, questo potrebbe indurre a pensare che gli studenti del primo anno della scuola secondaria di primo grado possiedano una maggiore capacità di controllo sull'estensione di moltiplicazione e divisione ai razionali rispetto agli allievi della scuola primaria, dall'altro, vale la pena di riflettere sul fatto che, mentre i primi potrebbero essere stati agevolati dalla domanda a scelta multipla, ai secondi era richiesto un maggiore controllo sul risultato per via del quesito a risposta aperta univoca.

Altre due domande che si legano al nostro discorso compaiono nelle prove passate, una per la quinta primaria (D21, SNV 2009) e l'altra per la terza secondaria di primo grado (D22, PN 2015). Il quesito a scelta multipla del 2009 chiedeva di trovare il numero nascosto da una macchia che nella moltiplicazione per 0,5 restituisce lo stesso risultato di 1 × 10 (fig. 9).

21. Qual è il numero nascosto dalla macchia che rende vera la seguente uguaglianza?

$$(1 \times 10) = 0{,}5 \times ✸$$

☐ A. 20.

☐ B. 2.

☐ C. 5.

☐ D. 0.2.

Fig. 9 – Domanda D21 della prova di Matematica SNV del 2009 per il grado 5

Nel quesito del 2015, invece, era richiesto di indicare se le tre affermazioni seguenti sul risultato di 2,85 × 0,92 fossero vere o false: “Il risultato è maggiore di 2,85”; “Il risultato è maggiore di 0,92”; “Il risultato è il 92% di 2,85”. Ci limitiamo a commentare la situazione che si è verificata nel caso della domanda D21 del 2009. In quell’occasione, infatti, la risposta corretta (A) è stata fornita dal 34% degli studenti del campione nazionale, a testimonianza del fatto che si trattava di una domanda abbastanza difficile. Ma la cosa singolare è che gli studenti che hanno risposto non in modo corretto (in totale il 61,4%) si sono “distribuiti” quasi equamente sulle tre opzioni rimanenti, (B, C e D; fig. 10).

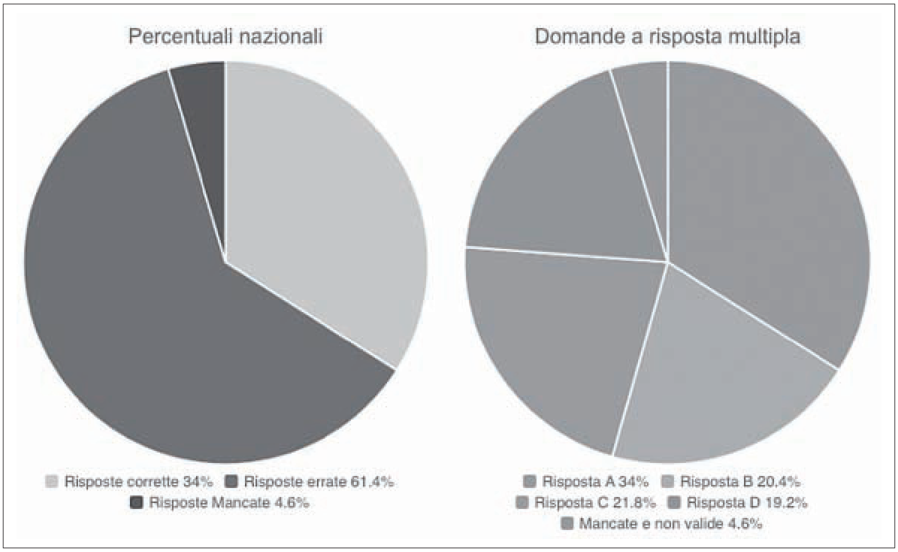

Fig. 10 – Risultati della domanda D21, SNV del 2009 per la quinta primaria

Ciò può indicare, secondo noi, un “senso di smarrimento” dei rispondenti che non evidenziano sistemi di controllo del risultato e dimostrano di trattare quasi indistintamente il prodotto di 0,5 per 2 oppure per 5 oppure per 0,2.

Alla luce di quanto discusso in questo lavoro, ci sentiamo di offrire questa riflessione ultima: sperimentazioni didattiche di attività laboratoriali, che sappiano stimolare l’argomentazione e, con essa, la riflessione sui significati, il confronto tra strategie, il controllo sui risultati, sembrano essere sempre più necessarie e urgenti in vista dello sviluppo di competenze forti, non limitate al mero raggiungimento di prodotti ma favorevoli soprattutto ai processi in linea con quanto espresso anche nelle *Indicazioni nazionali per il primo ciclo* (MIUR, 2012).

Nel contesto da noi analizzato, è privilegiato il processo di pensiero che conduce al risultato di una o più operazioni, non il risultato di per sé perché, giusto o sbagliato che sia, altro non dà che una misura della capacità di saper fare dei nostri studenti. Il processo permette di esaminare le capacità esplorative degli studenti che riflettono anche tentativi di escogitare e mantenere sistemi di controllo.

Riferimenti bibliografici

Freudenthal H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

Greer B. (2009), "Helping Children Develop Mathematically", *Human Development*, 52, 2, pp. 148-161.

Greer B. (2012), "Inversion in Mathematical Thinking and Learning", *Educational Studies in Mathematics*, 79, 3, pp. 429-438.

INVALSI (2017a), *Il Quadro di riferimento delle prove di Matematica del sistema nazionale di valutazione*, https://INVALSI-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_2017_def.pdf, data di consultazione 30 luglio 2018.

INVALSI (2017b), *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2016-17, Rapporto tecnico, La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nella classe III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado*, Roma, luglio.

INVALSI (2017c), *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2016-17, Rapporto Risultati, Rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nella classe III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado*, Roma, luglio.

Maher C.A., Powell A.B., Uptegrove E.B. (2010), *Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms*, Springer, New York.

Nunes T., Bryant P., Evans D., Bell D., Barros R. (2012), "Teaching Children How to Include the Inversion Principle in Their Reasoning About Quantitative Relations", *Educational Studies in Mathematics*, 79, 3, pp. 371-388.

Ministero dell'Istruzione, università e ricerca (MIUR) (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, Roma, settembre.

Selter C., Prediger S., Nührenbörger M., Hußmann S. (2012), "Taking Away and Determining the Difference – A Longitudinal Perspective on Two Models of Subtraction and the Inverse Relation to Addition", *Educational Studies in Mathematics*, 79, 3, pp. 389-408.