Minoration de la hauteur normalisée dans un tore

Published version:

DOI:10.1017/S1474748003000094

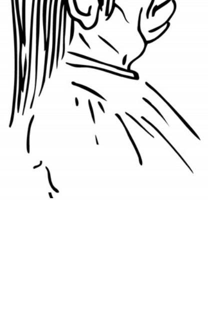
(Article begins on next page)

Minoration de la hauteur normalisée dans un tore

Francesco Amoroso & *Sinnou* David

Résumé : nous démontrons une nouvelle minoration de la hauteur normalisée d'une sous-variété algébrique d'un tore multiplicatif (et par conséquent des petits points d'une telle sous-variété). Si dans le cas torique, une preuve effective de la conjecture de Bogomolov généralisée était déjà connue ainsi que des estimations « pluri-exponentielles » en le degré de la variété (W. Schmidt et E. Bombieri–U. Zannier), puis monomiales inverses (par le deuxième auteur et P. Philippon), notre approche qui est entièrement nouvelle, permet de démontrer à un ε *-près* les conjectures les plus précises (en fonction du degré) que l'on peut formuler dans ce cadre. On obtient ainsi pour ce problème l'exact analogue de ce que l'on sait obtenir dans le cadre du problème de Lehmer. Enfin, nous démontrons pour les sous-variétés de codimension au moins 2 une conjecture du deuxième auteur et P. Philippon.

Abstract : we prove a new lower bound for the normalized height of subvarieties of a multiplicative torus (and thus for the small points of such a subvariety). Effective proofs of the so called generalized Bogomolov conjecture were already known. W. Schmidt and E. Bombieri–U. Zannier, gave first a "pluri-exponential" lower bound in terms of the degree, which the second author and P. Philippon brought down to an inverse monomial using a different approach. Our proof is entirely new in its principle and proves *up to an* ε the sharpest conjectures that can be fomulated in terms of the degree of the variety studied. We thus obtain for this problem the exact analogue of what is already known for the Lehmer problem. Finally, we prove a conjecture of the second author and P. Philippon for subvarieties of codimension at least 2.



1 Introduction

Dans cet article, nous poursuivons l'étude des minorations de la hauteur normalisée des sous-variétés algébriques d'un tore multiplicatif amorcée dans nos textes précédents [Am-Da1], [Am-Da2] et [Am-Da3]. Nous allons commencer par exposer la problématique dans le cadre général d'un plongement projectif quelconque du tore.

On appellera « compactification équivariante » de $\mathbb{G}_m^n$ un plongement projectif $\varphi : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ tel que l'adhérence de Zariski de $\varphi(\mathbb{G}_m^n)$ dans $\mathbb{P}_N$ soit une compactification équivariante lisse de $\mathbb{G}_m^n$; on supposera que φ est $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle. Les compactifications les plus courantes et pour lesquelles on a le plus d'applications arithmétiques sont bien entendu les compactifications « standard » *i. e.* $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ et $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_{2^n-1}$.

Soit V une sous-variété algébrique propre* et réduite de $\mathbb{G}_m^n$, que l'on supposera définie sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible ; on définit sa « hauteur normalisée », notée $\hat{h}_\varphi(V)$, avec des méthodes de géométrie d'Arakelov (*voir* la série [Zha1], [Zha2], [Zha3]), ou à l'aide d'une construction « à la Néron-Tate » (*voir* [Da–Ph2], ou [Phi3] pour une construction analogue sur les variétés abéliennes). Plus précisément, P. Philippon définit la hauteur normalisée† de la variété V par rapport au plongement φ par :

$$\hat{h}_\varphi(V) = \lim_{m \to +\infty} \frac{h_\varphi([m]V)\deg_\varphi(V)}{m \deg_\varphi([m]V)} \quad ,$$

où $h_\varphi(V)$ (respectivement $\deg_\varphi(V)$) est la hauteur projective (respectivement le degré) de l'adhérence de Zariski de $\varphi(V)$ dans $\mathbb{P}_N$.

L. Szpiro a également introduit le *minimum essentiel* de V, noté $\hat{\mu}_\varphi^{\mathrm{ess}}(V)$, comme la borne inférieure des nombres réels $\theta > 0$ tels que l'ensemble des points $\boldsymbol{\alpha} \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur normalisée bornée par θ soit Zariski-dense dans V. Bien évidemment,

* Dans ce texte, le mot « propre » signifie « strict », *i. e.* $\subsetneq$.

† Dans le cas particulier du plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, la hauteur normalisée d'un point coïncide bien sûr avec sa hauteur de Weil logarithmique et absolue.

cette définition généralise la notion de hauteur d'un point : si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$, alors $\hat{\mu}_{\varphi}^{\text{ess}}(\{\boldsymbol{\alpha}\}) = \hat{h}_{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})$.

Le minimum essentiel et la hauteur sont très liés. Soit V une variété définie sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible ; on dispose alors de la relation suivante, montrée dans [Zha2], théorème 5.2 et [Zha3], théorème 1.10‡ :

$$\frac{\hat{h}_{\varphi}(V)}{(\dim(V)+1)\deg_{\varphi}(V)} \leqslant \hat{\mu}_{\varphi}^{\text{ess}}(V) \leqslant \frac{\hat{h}_{\varphi}(V)}{\deg_{\varphi}(V)} \ , \tag{1}$$

Le minimum essentiel et la hauteur normalisée ont la propriété remarquable suivante. Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductible ; alors $\hat{\mu}_{\varphi}^{\text{ess}}(V) = 0$ (ce qui est équivalent à $\hat{h}_{\varphi}(V) = 0$ grâce à l'inégalité (1)) si et seulement si V est une réunion de variétés de torsion (*i. e.* de translatés de sous-tores de $\mathbb{G}_m^n$ par des points de torsion) : c'est un théorème de Lawton (*voir* [Law]) pour les hypersurfaces§ de $\mathbb{G}_m^n$ et de S. Zhang dans le cas général (*confer* [Zha1]). Il est donc naturel de chercher à minorer le minimum essentiel (ou la hauteur normalisée) d'une variété qui n'est pas une réunion de variétés de torsion. Il est facile de voir que l'on ne peut pas s'attendre à des minorations ne dépendant que du degré géométrique de V dans le cas général. En effet pour tout $D \in \mathbb{N}^{\star}$,

$$\hat{h}_{\iota}\left(\{2^{1/D}, \ldots, 2^{1/D}\}\right) = \frac{\log 2}{D} \ ,$$

(où ι est la compactification équivariante $\iota : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$) qui tend vers 0 lorsque D tend vers l'infini, alors que le degré reste égal à 1. Plus généralement, si l'on prend pour V un translaté d'un sous-tore fixé H de $\mathbb{G}_m^n$ par un point d'ordre infini $\boldsymbol{\eta}$, on peut vérifier que la hauteur normalisée de V est essentiellement la hauteur de la projection de $\boldsymbol{\eta}$ dans $\mathbb{G}_m^n/H$; on peut donc faire tendre la hauteur de V vers 0 en faisant varier $\boldsymbol{\eta}$ dans $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ (mais sans changer son degré géométrique).

On doit donc, si l'on souhaite formuler les conjectures les plus précises possible introduire des hypothèses supplémentaires : soit en imposant des conditions de nature « arithmétique » (*i. e.* tenir compte du degré du corps de définition de V), ce qui, comme on le verra plus bas revient à généraliser le problème de Lehmer ; soit en imposant des conditions géométriques portant sur la dimension du stabilisateur de V afin d'éliminer les contre-exemples exposés ci-dessus (et qui sont en fait les seuls possibles), ce qui revient au « problème de Bogomolov pour les tores ».

‡ On pourra également se reporter à [Da–Ph1] §. 3, corollaire 3.2, pour une preuve plus élémentaire de ces inégalités, écrite dans le cadre des variétés abéliennes mais qui s'adapte immédiatement au cas multiplicatif. On notera également que le théorème de S. Zhang est plus fort que ce qui est cité ici : l'inégalité de gauche peut-être renforcée en y remplaçant le minimum essentiel par la somme de tous les minimums successifs de la variété.

§ Pour le plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$. Dans ce cas, la hauteur normalisée coïncide avec la mesure de Mahler d'une équation de V (*confer* [Da–Ph2]).

Dans le sous-paragraphe 1.1 nous nous intéresserons au problème de Bogomolov pour les tores ; nous énoncerons une nouvelle conjecture qui contient celle de [Da–Ph2] et un théorème qui montre que cette conjecture est vraie « à des facteurs log près ». Ensuite, au sous-paragraphe 1.2 nous rappellerons rapidement les conjectures que nous avons proposées et les résultats obtenus dans le cadre du problème de Lehmer dans les travaux [Am-Da1], [Am-Da2] et [Am-Da3] : bien que les méthodes de preuves soient différentes, on peut noter un grand parallélisme entre les conjectures que l'on peut formuler et les résultats obtenus. Enfin, dans le sous-paragraphe 1.3 nous présenterons le plan de cet article et nous introduirons les notations dont nous aurons besoin dans la suite.

Comme nous l'avons fait observer dans [Am-Da1], le degré n'est pas le bon invariant pour ce type de problèmes, mais *l'indice d'obstruction*, qui est plus fin, à savoir :

Définition 1.1 *Soient $V \subsetneq W$ deux sous-variétés algébriques de $\mathbb{P}_n$, définies sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductibles. On appelle* indice d'obstruction de V relatif à W, *noté $\omega_{\mathbb{K}}(V, W)$ le plus petit degré d'un diviseur Z de W défini sur $\mathbb{K}$ et contenant la variété V.*

Rappelons que lorsque $W = \mathbb{P}_n$, l'indice d'obstruction $\omega_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{P}_n)$ (que l'on notera simplement $\omega_{\mathbb{K}}(V)$) a été introduit par M. Waldschmidt (*voir* [Wal]) pour des questions liées aux lemmes de Schwarz. Lorsque $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$, nous omettrons parfois l'indice $\overline{\mathbb{Q}}$, et noterons l'indice d'obstruction $\omega(V, W)$ (ou $\omega(V)$ si $W = \mathbb{P}_n$).

On déduit facilement d'un résultat de M. Chardin (*confer* [Cha], corollaire 2, chapitre 1, page 8 et exemple 1, page 9) l'inégalité :

$$1 \leqslant \omega_{\mathbb{K}}(V) \leqslant n \deg(V)^{1/\operatorname{codim}(V)} , \tag{2}$$

ce qui montre bien que l'indice d'obstruction est un invariant plus précis que le degré.

1.1 Problème de Bogomolov pour les tores

Dans [Da–Ph2], le second auteur et P. Philippon ont proposé une conjecture (*voir* conjecture 1.3 ci-dessous) dans le cadre du problème de Bogomolov pour les tores que nous allons préciser, en tenant compte de l'indice d'obstruction, et généraliser à un groupe multiplicatif muni d'une compactification équivariante (et non plus restreinte aux compactifications standards de $\mathbb{G}_m^n$ dans $\mathbb{P}_n$ ou dans $\mathbb{P}_1^n \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{2^n-1}$ comme dans *loc. cit.*).

La conjecture que nous proposons est la suivante :

Conjecture 1.2 *Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et soit $\varphi : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ une compactification équivariante de $\mathbb{G}_m^n$ et $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle. Il existe alors un nombre réel $c(\varphi)$ strictement positif* *tel que la propriété suivante soit vraie. Soit V une sous-variété propre de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, géométriquement irréductible qui n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. Notons ensuite B le plus petit (par rapport à l'inclusion) translaté d'un sous tore de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V. Alors, on a la minoration :*

$$\hat{\mu}_\varphi^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(\varphi)\deg_\varphi(B)}{\omega_\varphi(V,B)} \quad ,$$

où $\omega_\varphi(V,B) = \omega(\overline{\varphi(V)}, \overline{\varphi(B)})$. De plus, la constante $c(\varphi)$ ne dépend que de la dimension N du plongement projectif induit par φ.

Remarquons que la dépendance en $\omega_\varphi(V)$ dans cette conjecture est optimale : en effet pour V vérifiant les hypothèses de la conjecture et qui de plus n'est pas contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre, et pour tout entier l pour lequel $[l]V$ est irréductible (il y en a une infinité), on a : $\omega_\varphi([l]^{-1}V, \mathbb{G}_m^n) \leqslant l\omega_\varphi(V, \mathbb{G}_m^n)$ et $\hat{\mu}_\varphi^{\mathrm{ess}}([l]^{-1}V) = l^{-1}\hat{\mu}_\varphi^{\mathrm{ess}}(V)$. Ici et dans toute la suite, on note $[l] : \mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m^n$ le morphisme de « multiplication » par l défini par $[l]\boldsymbol{x} := (x_1^l, \ldots, x_n^l)$.

Un raisonnement analogue permet de vérifier plus généralement que l'on ne peut raffiner la dépendance en $\omega_\varphi(V,B)$. De plus, l'un des intérêts de cette question générale est de suggérer que ces minorations peuvent tendre vers l'infini avec le degré projectif de $\mathbb{G}_m^n$ (et plus généralement de B).

Notons enfin que la conjecture 1.2 implique (*voir* la proposition 6.1 dans le paragraphe 6) la conjecture 1.1 de [Da–Ph2] :

Conjecture 1.3 *Soit V une sous-variété algébrique propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, de dimension d et supposons que V ne soit pas un translaté d'un sous-groupe propre de $\mathbb{G}_m^n$. Notons ι la compactification équivariante $\iota : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n \overset{Segre}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{2^n-1}$. Alors :*

(i) *Il existe une constante universelle $c > 0$ telle que :*

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant c \quad .$$

(ii) *Soit s la dimension du plus petit translaté de sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V (par hypothèse, on a donc $s > d$). On a alors :*

$$\hat{\mu}_\iota^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(n)}{\deg_\iota(V)^{1/(s-d)}} \quad ,$$

où $c(n)$ est un nombre réel strictement positif. De façon équivalente :

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant c'(n)\deg_\iota(V)^{1-1/(s-d)} \quad ,$$

où $c'(n)$ est un nombre réel strictement positif.

On notera que l'équivalence entre les deux énoncés du point (ii) se déduit de la relation (1). On remarquera aussi que le point (ii) implique le point (i) (*voir* la preuve de la proposition 6.1 dans le paragraphe 6).

Dans le cadre des conjectures 1.2 et 1.3, le meilleur résultat connu jusqu'ici est celui de [Da–Ph2], théorème 1.2. Le deuxième auteur et P. Philippon y ont montré la minoration :

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant 2^{-41} \deg_\iota(V)^{-2} \log(\deg_\iota(V)+2)^{-2} \ ,$$

valable pour toute sous-variété algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n$ (compactifié *via* $\iota : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{2^n-1}$) géométriquement irréductible, qui n'est pas un translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$.

Notons que cette minoration améliorait des résultats quantitatifs antérieurs dûs d'une part à W. Schmidt (*confer* [Sch2]) et d'autre part à U. Zannier–E. Bombieri (*confer* [Bo–Za]).

Décrivons maintenant les résultats que nous obtenons dans le cadre naturel de la compactification standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$. Ce choix ne fait pas véritablement perdre en généralité en ce qui concerne le paramètre principal qui est le degré géométrique de la variété étudiée, et permet de simplifier considérablement les notations, les énoncés et surtout les preuves. De même, nous supposerons que la variété V n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. Cette réduction simplificatrice n'entraîne pas non plus de perte très significative comme le montre le corollaire 1.6 ci-dessous. Nous reviendrons sur ces questions plus générales dans le cadre d'un travail ultérieur s'il s'avère qu'elles ont d'autres applications arithmétiques.

Pour alléger on omettra donc l'indice correspondant à la compactification dans les symboles deg, ω, $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}$ et $\hat{h}$.

Nous allons établir le résultat suivant :

Théorème 1.4 *Soit V une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. On a alors :*

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(n)}{\omega(V)} \times (\log(3\omega(V)))^{-\lambda(k)} \ ,$$

où $c(n)$ est un nombre réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Dans le cas particulier d'une courbe plane, la démonstration du théorème 1.4 se simplifie et nous obtenons le résultat plus précis (et explicite) qui suit :

Théorème 1.5 *Soit V une courbe $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^2$, de degré D. On suppose que V n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^2$. On a alors :*

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{2^{-70}}{D} \times \frac{\log\log(D+2)^4}{\log(D+2)^5} \ .$$

On déduit du théorème 1.4 le résultat suivant apparemment plus général :

Corollaire 1.6 *Soit V une sous-variété algébrique propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de dimension d et supposons que V n'est pas un translaté d'un sous-groupe propre de $\mathbb{G}_m^n$. Soit s la dimension du plus petit translaté de sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V (par hypothèse, on a donc $s > d$). On a alors :*

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(n)}{\deg(V)^{1/(s-d)}} \times \log(3\deg(V))^{-\lambda(s-d)} \ ,$$

où $c(n)$ est un nombre réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$. De façon équivalente :

$$\hat{h}(V) \geqslant c'(n)\deg(V)^{1-1/(s-d)}\log(3\deg(V))^{-\lambda(s-d)} \ ,$$

où $c'(n)$ est un nombre réel strictement positif.

À l'aide d'un argument de projection (*confer* [Da–Ph2], proposition 3.1), on en déduit également le résultat suivant qui permet de résoudre la conjecture « faible » (conjecture 1.3 point (i)) de [Da–Ph2], en « codimension au moins 2 » :

Corollaire 1.7 *Soit V une sous-variété algébrique propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de dimension d et supposons que V n'est pas contenue dans un translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ de dimension d ou $d+1$ (en particulier, V est de codimension au moins 2). Alors :*

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant \hat{h}(V) \geqslant c \ ,$$

où c est une constante stictement positive, absolue et effectivement calculable et où ι est la compactification équivariante $\iota : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{2^n-1}$.

En ce qui concerne les autres minimums successifs, et en particulier le dernier qui soit de nature « géométrique » (le $\hat{\mu}^\circ$ dans la terminologie de [Da–Ph2]), il suffit de reprendre l'argument développé au paragraphe 5 de [Da–Ph2], en y substituant le théorème 1.5 à la minoration utilisée dans cette référence. Toutefois, on peut noter que même en renonçant à calculer la constante numérique et en utilisant le theorème 1.4 au lieu du théorème 1.5, les améliorations que l'on pourrait obtenir ainsi ne sont (hélas!) pas véritablement spectaculaires si on les compare au théorème 1.3 de [Da–Ph2]. Pourtant le théorème 1.4 est quasiment optimal! Pour pouvoir se rapprocher sensiblement des bornes que l'on pourrait raisonnablement conjecturer, il serait crucial d'être en mesure de contrôler précisément les degrés des translatés de sous-tores qui contiennent certaines sous-variétés de V, ou encore d'être en mesure de remplacer la récurrence utilisée au paragraphe 5 de [Da–Ph2] par un argument plus direct.

Nous proposons donc une conjecture concernant le dernier des minimums successifs pour lequel on peut encore espérer une minoration de nature géométrique de la hauteur et du nombre de points exceptionnels. Il s'agit en effet avec le minimum essentiel, de la quantité qui est la plus utile dans les applications. Avant de formuler cette dernière, rappelons que la hauteur normalisée et la hauteur projective sont comparables. Plus précisément, il existe un nombre réel strictement positif $\theta(\varphi)$ tel que pour tout point $x \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$, on ait

$$\left|\hat{h}_\varphi(x) - h_\varphi(x)\right| \leqslant \theta(\varphi) \ .$$

De plus, l'indice d'obstruction n'est plus l'invariant géométrique qui permet de contrôler ce minimum, mais l'indice suivant (*grosso modo*, il s'agit d'un indice d'obstruction en codimension maximale) :

Définition 1.8 *Soient $V \subsetneq W$ deux sous-variétés algébriques de $\mathbb{P}_n$, définies sur un corps $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$-irréductibles ; on notera s la codimension de V dans W. On appelle* indice d'interpolation de V relatif à W, *noté $\tilde{\omega}_{\mathbb{K}}(V, W)$ le plus petit entier d tel qu'il existe des sous-variétés $Y_1, \dots, Y_s$ de codimension 1 de W, de degré au plus d, définies sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$-irréductibles telles que V soit une composante isolée de l'intersection $Y_1 \cap \cdots \cap Y_s$.*

On pourra se reporter au travail de M. Chardin et P. Philippon [Ch–Ph] pour le lien entre ce type d'invariants et les questions d'interpolation géométriques et de régularité de Castelnuovo. Nous adopterons les mêmes conventions de notations que pour ω lorsque $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$ ou $W = \mathbb{P}_n$.

On peut maintenant proposer :

Conjecture 1.9 *Soit V une sous-variété propre de $\mathbb{G}_m^n \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_N$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et géométriquement irréductible qui n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. Notons ensuite B le plus petit translaté (par rapport à l'inclusion) d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V. Alors, l'ensemble des points x de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ qui n'appartiennent à aucun translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ de dimension au moins 1 contenu dans V et de hauteur :*

$$\hat{h}(x) \leqslant \frac{c_1(\varphi)\deg_\varphi(B)}{\tilde{\omega}_\varphi(V, B)}$$

est de cardinal fini, majoré par

$$\frac{c_2(\varphi)\tilde{\omega}_\varphi(V, B)^b}{\deg_\varphi(B)^{b-1}} \ ,$$

où b est la codimension de B. De plus, $c_1(\varphi)$ et $c_2(\varphi)$ ne dépendent que de N et de la constante de comparaison $\theta(\varphi)$.

Des progrès significatifs dans la direction de la conjecture 1.9 auraient des applications arithmétiques (on pourra pà titre d'exemple se reporter au travail récent de G. Rémond, [Rém]).

1.2 Problème de LEHMER généralisé

SI L'ON NE FAIT PAS d'hypothèse sur le stabilisateur de V, la question de minorer le minimum essentiel de V fait nécessairement intervenir le degré d'un corps de définition de V comme on l'a vu au début du paragraphe 1. On se trouve alors face à des généralisations du problème de LEHMER. Dans les travaux [Am-Da1], [Am-Da2] et [Am-Da3] nous nous sommes intéressés à ce dernier ; bien que les méthodes de preuve soient différentes, on peut noter un grand parallélisme entre les conjectures que l'on peut formuler et les résultats obtenus. Il nous semble donc intéressant de les rappeler ici, afin d'unifier un peu cette théorie. Dans ce cadre, l'invariant clef est l'indice d'obstruction relatif à $\mathbb{Q}$ (qui tient donc compte du degré arithmétique de V).

On supposera que $\mathbb{G}_m^n$ est plongé dans un projectif *via* un morphisme φ, qui induit une compactification équivariante $\overline{\mathbb{G}_m^n}$ de $\mathbb{G}_m^n$, qui fait de $\overline{\mathbb{G}_m^n}$ une sous-variété algébrique $\mathbb{Q}$-rationnelle de $\mathbb{P}_N$. Le pendant arithmétique de la conjecture 1.2 est la conjecture suivante :

Conjecture 1.10 *Soit $\varphi : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ une compactification équivariante de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$. Soit de plus V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible et supposons que V ne soit pas réunion de variétés de torsion. Notons ensuite B la plus petite réunion de variétés de torsion (par rapport à l'inclusion) contenant V. Alors, on dispose de la minoration :*

$$\hat{\mu}_{\varphi}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(N)\deg_{\varphi}(B)}{\omega_{\mathbb{Q},\varphi}(V,B)} \quad ,$$

où $\omega_{\mathbb{Q},\varphi}(V,B) := \omega_{\mathbb{Q}}(\overline{\varphi(V)}, \overline{\varphi(B)})$.

Remarquons que dans le cas particulier d'une variété de dimension zéro

$$V = \{\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\} \quad ,$$

dire que V n'est pas contenue dans un sous-groupe propre de $\mathbb{G}_m^n$ revient à dire que les cordonnées du point $\boldsymbol{\alpha} \in V$ sont multiplicativement indépendantes : la conjecture 1.10 implique dans ce cas (en supposant que φ est le plongement $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$) la conjecture 1.3 de [Am-Da1]. Comme dans le cadre précédent, on peut aussi vérifier que la conjecture 1.10 implique (en supposant toujours que φ soit le plongement $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$) la conjecture 1.4 de [Am-Da2].

Dans [Am-Da1], nous avons montré que si $\dim(V) = 0$ et si $B = \mathbb{G}_m^n$, alors la conjecture 1.10 (toujours dans le cas du plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$) est vraie « à des facteurs log près ». Ce résultat a été ensuite généralisé au cas des hypersurfaces (*confer* [Am-Da2]) et enfin au cas des variétés de dimension quelconque (*confer* [Am-Da3])[¶]. Rappelons les résultats principaux obtenus dans [Am-Da3] (*op. cit.* corollaires 1.2 et 1.3) :

Théorème 1.11 *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible qui n'est pas réunion de variétés de torsion. Alors :*

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)} \times \log(3\omega_{\mathbb{Q}}(V))^{-\kappa(n)} \ ,$$

où $\kappa(n)$ et $c(n)$ sont deux nombres réels > 0 (effectivement calculables).

Notons maintenant d et s les dimensions de V et du plus petit sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V (par hypothèse, on a donc $s > d$). On a aussi :

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant \frac{c'(n)}{\deg(V)^{1/(s-d)}} \times \log(3\deg(V))^{-\kappa(s)},$$

et

$$\hat{h}(V) \geqslant c''(n)\deg(V)^{1-1/(s-d)} \times \log(3\deg(V))^{-\kappa(s)},$$

où $c'(n)$ et $c''(n)$ sont également des nombres réels strictement positifs, effectivement calculables.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut s'interesser au pendant arithmétique du dernier des minimums successifs de V (le $\hat{\mu}^{\star}$ dans la terminologie de [Da–Ph2]). Cela revient à minorer la hauteur des points de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ n'appartenant à aucune sous-variété de torsion contenue dans V (*confer* théorème 1.5 de [Da–Ph2]). Mais, là encore, les corollaires que l'on peut obtenir directement à partir des résultats précités et d'une récurrence comparable à celle de *loc. cit.* ne sont pas satisfaisants.

Nous proposons cependant une conjecture concernant le dernier de ces minimums successifs qui est elle, optimale :

Conjecture 1.12 *Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\varphi : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ une compactification équivariante de $\mathbb{G}_m^n$ que l'on suppose $\mathbb{Q}$-rationnelle. Il existe alors un nombre réel strictement positif $c(N,\theta(\varphi))$ tel que la propriété suivante soit vraie. Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_N$ définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$–irréductible qui n'est pas réunion de variétés de torsion. Notons ensuite B la plus petite réunion de variétés de torsion (au sens de l'inclusion) contenant V. Alors, les points x de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ qui n'appartiennent à aucune sous-variété de torsion de $\mathbb{G}_m^n$ contenue dans V sont de hauteur :*

$$\hat{h}(x) \geqslant \frac{c(N,\theta(\varphi))\deg_{\varphi}(B)}{\tilde{\omega}_{\mathbb{Q},\varphi}(V,B)} \ .$$

¶ Dans les trois articles précités, la quantité $\omega_{\mathbb{Q}}(V)$ était notée $\delta(V)$.

1.3 Plan de l'article

Dans toute la suite de cet article nous fixons la compactification équivariante « standard » $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$. Pour alléger les notations, nous omettrons donc l'indice correspondant à la compactification dans les symboles deg, ω, $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}$ et $\hat{h}$.

Au paragraphe 2 nous avons développé la machinerie de transcendance : lemme de Siegel, estimation du rang et extrapolation. Plus précisément, nous démontrerons (*confer* théorème 2.2) une version absolue (*i. e.* ne dépendant pas du corps de définition) du lemme de Siegel pour une sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$, permettant de construire directement une fonction auxiliaire de petite hauteur s'annulant sur V avec multiplicités. Un tel énoncé a son intérêt propre (son pendant sur $\mathbb{Q}$ était crucial pour conclure dans [Am-Da2] par exemple).

Nous introduisons ensuite un nouvel invariant, *l'indice d'obstruction de V de poids T*, noté $\omega(T;V)$ dans ce texte, qui généralise *l'indice d'obstruction absolu $\omega(V)$* de la variété V : l'indice d'obstruction est crucial en géométrie diophantienne car il s'agit de l'invariant qui intervient naturellement dans les lemmes de zéros. La variante avec poids que nous introduisons est nécessaire ici pour mener à bien la preuve du théorème 1.4 (*voir* la remarque à la fin du sous-paragraphe 5.3). De fait, cet invariant peut se révéler utile chaque fois que l'on doit travailler avec un exposant de Dirichlet très petit pour construire la fonction auxiliaire, et lorsqu'il est crucial de contrôler finement les obstructions de grande codimension (et non plus les premières obstructions) au lemme de zéros.

L'extrapolation repose sur une idée nouvelle : à la différence de l'extrapolation « classique » de Dobrowolski, on extrapolera sur des translatées de V par des points de torsion. Signalons que ce type d'extrapolation a été déjà employé par Bombieri et Vaaler (*voir* [Bo–Va]) dans un contexte différent.

Au paragraphe 3 nous démontrerons le théorème 1.5. Le fait de travailler en petite dimension simplifie la preuve (le lemme de zéro devient trivial) et permet d'améliorer facilement l'exposant du terme d'erreur et de calculer la constante numérique finale.

Dans le paragraphe 4, on trouvera une nouvelle version du lemme de zéros de P. Philippon (*voir* [Phi1], théorème 2.1, et [Phi2], théorèmes 1 ou 2). Nos ensembles de translation sont la réunion de sous-groupes (les noyaux des multiplications par p) dont le cardinal est élevé : nous avons besoin de tirer profit de cette information supplémentaire et pour cela nous avons besoin d'une généralisation du lemme de zéros « classique ». Ce réultat fait l'objet d'un travail distinct (*confer* [Am-Da4]). Afin de conserver un caractère aussi auto-explicite que possible à ce texte, et afin de simplifier les notations, nous démontrons une version simplifiée de ce lemme (*voir* théorème 4.2) contenant les propriétés minimales dont nous aurons besoin ici.

Le paragraphe 5 est consacré à la preuve du théorème 1.4. Tout d'abord, nous choisissons les paramètres au sous-paragraphe 5.1 et nous démontrons un résultat auxiliaire (proposition 5.1) qui montre essentiellement que « si la conclusion du théorème 1.4 est fausse, alors on peut trouver des petits multiples de V pour lesquels l'indice d'obstruction $\omega([l]V)$ est *pathologiquement* petit par rapport à $\omega(V)$ ». Malheureusement, cette proposition ne suffit pas pour conclure la preuve : comme dans [Am-Da1] nous aurons besoin d'un argument de descente, que l'on trouvera dans le sous-paragraphe 5.2.

Enfin, les différents corollaires sont démontrés au paragraphe 6. On y précisera également les liens entre les différentes conjectures (proposition 6.1).

Au cours de diverses discussions P. Philippon a bien voulu nous donner son point de vue sur bien des questions. G. Rémond nous a fait part de ses remarques sur une première version de ce texte et nous a permis d'améliorer la présentation de nombreux points. C'est un plaisir pour nous de pouvoir les remercier chaleureusement ici.

Université de Caen & Université Pierre et Marie Curie

2 La transcendance

Nous rassemblons ici les arguments de nature « analytique » intervenant généralement dans une preuve de géométrie diophantienne dont nous aurons besoin. Nous commencerons par construire la « fonction auxiliaire », c'est-à-dire ici un polynôme nul avec une forte multiplicité sur la variété étudiée, de degré et hauteur controlés. Nous en déduirons, par un procédé dit « d'extrapolation », que ce polynôme auxiliaire est en fait nul (mais pas nécessairement avec une forte multiplicité) sur de très nombreux translatés de la variété de départ. C'est lors de ces deux étapes que nous aurons besoin de supposer (par l'absurde) que la variété V admet un minimum essentiel très faible. L'hypothèse demandant que V n'est contenue dans aucun translaté de sous-groupes propres de $\mathbb{G}_m^n$ n'intervient pour sa part que dans la dernière partie de l'argument, où le lemme de zéros est mis en œuvre.

2.1 Construction de la fonction auxiliaire.

Nous avons démontré dans [Am-Da2], Théorème 4.1, une généralisation d'un lemme classique de Thue–Siegel, qui permet de construire directement des polynômes nuls (avec multiplicité) sur une sous-variété V (et non plus sur un ensemble de points) de $\mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{P}_n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible, ayant une hauteur de Weil « proche » de la hauteur normalisée de V. Dans ce paragraphe, nous montrerons une version « absolue » de ce théorème, qui permet de traiter le cas des variétés définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La preuve de cet énoncé est très proche de celle du Théorème 4.1 de *loc. cit.*; on remplacera cependant la version de Bombieri–Vaaler du lemme de Siegel par sa version « absolue » due à D. Roy et à J. Thunder (*voir* [Ro-Th], Theorem 2.2), énoncé dont on peut obtenir une version plus précise (*confer* le texte du second auteur et P. Philippon [Da–Ph2]) à l'aide du théorème plus général de S. Zhang sur les minimums successifs d'une variété algébrique (*confer* [Zha3], théorème 1.10). Nous commencerons par rappeler précisément cet énoncé, qui est le point de départ de l'argument.

Soit $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension d. On définit la hauteur L_2

de S comme le fait W. Schmidt (*voir* [Sch1], Ch. 1, §. 8) par la formule** :

$$h_{L_2}(S) = \sum_v \frac{[\mathbb{F}_v : \mathbb{Q}_v]}{[\mathbb{F} : \mathbb{Q}]} \log \|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_d\|_v \ ,$$

où $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ est une base de S sur un corps de nombre $\mathbb{F}$ quelconque sur lequel S est rationnel, et $\|\cdot\|_v$ est la norme du sup si $v \nmid \infty$ et la norme euclidienne sinon. Soit $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$; on notera également $h_{L_2}(\boldsymbol{x}) = h_{L_2}(\langle \boldsymbol{x} \rangle)$.

Énonçons maintenant le lemme de Siegel absolu que nous utiliserons :

Lemme 2.1 *Soient S un sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ de dimension d et ε un nombre réel strictement positif. Il existe alors un point non nul $\boldsymbol{x}$ de $S(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur :*

$$h_{L_2}(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{h_{L_2}(S)}{d} + \frac{\log d}{2} + \varepsilon \ .$$

Démonstration : *voir* [Da–Ph2], lemme 4.7 ainsi que la remarque qui le suit immédiatement.

Si $\mathfrak{Q}$ est un idéal homogène de $\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_n]$ et L est un entier $\geqslant 1$, nous noterons $[\mathfrak{Q}]_L$ l'ensemble des éléments homogènes de degré L appartenant à $\mathfrak{Q}$ (auquel on ajoute 0). On notera aussi

$$H(\mathfrak{Q}\,; L) \ : = \binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} [\mathfrak{Q}]_L$$

la valeur en L de la fonction de Hilbert géométrique de $\mathfrak{Q}$.

Si $\mathfrak{P}$ est l'idéal premier, homogène d'une sous-variété propre V de $\mathbb{P}_n$ et T est un entier $\geqslant 1$, nous noterons $\mathfrak{P}^{(T)}$ l'idéal homogène (primaire) engendré par les polynômes nuls à un ordre au moins T sur V. Pour tout n-uplet $\boldsymbol{\lambda}$ notons $\partial_{\boldsymbol{\lambda}}$, l'opérateur différentiel

$$\partial_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\lambda_n} . \qquad (3)$$

Si $V \not\subset \{x_0 = 0\}$, l'idéal $\mathfrak{P}^{(T)}$ est alors engendré par les polynômes P tels que $\partial_{\boldsymbol{t}} P \in \mathfrak{P}$ pour tout $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\boldsymbol{t}| \ : = t_1 + \cdots + t_n$ vaut au plus $T-1$.

Nous pouvons maintenant démontrer :

∗∗ On dit aussi « hauteur de Schmidt de S ».

Théorème 2.2 *Soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{P}_n$, notons $\mathfrak{P}$ son idéal (homogène, premier) de définition dans l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$. Soient L et T deux entiers strictement positifs tels que*

$$H(\mathfrak{P}^{(T)} ; L) < \binom{L+n}{n} \ .$$

Pour tout nombre réel $\varepsilon' > 0$, il existe alors un élément non nul F de $[\mathfrak{P}^{(T)}]_L$ tel que :

$$h_{L_2}(F) \leqslant \frac{H(\mathfrak{P}^{(T)} ; L)}{\binom{L+n}{n} - H(\mathfrak{P}^{(T)} ; L)} \Big((T+n) \log(L+1) + L \left(\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) + \varepsilon' \right) \Big) + \frac{1}{2} \log \binom{L+n}{n} \ ,$$

où, par définition, la hauteur d'un polynôme est la hauteur de la famille de ses coefficients.

Démonstration : fixons un nombre réel $\varepsilon' > 0$, notons $\theta := \hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) + \varepsilon'$ et considérons pour $D \in \mathbb{N}^\star$, l'ensemble fini :

$$\Lambda_D = \{\boldsymbol{\alpha} \in V(\overline{\mathbb{Q}}),\ \text{tels que } h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \theta \text{ et } [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leqslant D\} \ .$$

Par définition, on a $\Lambda_i \subset \Lambda_j$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j$.

Considérons maintenant le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie S_D engendré par les polynômes F appartenant à $\overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]_L$ nuls sur Λ_D à un ordre $\geqslant T$. On dispose des inclusions

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_D \supseteq \cdots \supseteq [\mathfrak{P}^{(T)}]_L \ ,$$

et par suite, il existe $D_0 \in \mathbb{N}$ tel que $S_D = S_{D_0}$ pour $D \geqslant D_0$. Pour alléger, nous notons à partir de maintenant $S = S_{D_0}$ et $\Lambda = \Lambda_{D_0}$. Les polynômes de S sont alors nuls à un ordre $\geqslant T$ sur la réunion des Λ_D et donc sur V, car cette réunion est Zariski-dense dans V, par définition du minimum essentiel. On en déduit que :

$$S = [\mathfrak{P}^{(T)}]_L \ .$$

Puisque $V \subset \mathbb{G}_m^n$, cette variété n'est pas contenue dans $\{x_0 = 0\}$, et l'on peut sans perte de généralité travailler sur la carte affine sous-jacente. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$, $|\boldsymbol{\lambda}| \leqslant T$, notons

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}} = \left(\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n \\ |\boldsymbol{\mu}| \leqslant L}} \in \overline{\mathbb{Q}}^{\binom{L+n}{n}}, \quad \text{où} \quad \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{j=1}^{n} \binom{\mu_j}{\lambda_j} \ .$$

Les $y_{\alpha,\lambda}$ sont donc des générateurs du $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $S^{\perp}$ (dont la dimension est exactement $H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L))$ et leur hauteur L_2 est majorée par

$$(L-|\lambda|))\,h(\alpha)+\frac{1}{2}\log\left(\sum_{|\mu|\leqslant L}\binom{\mu}{\lambda}^2\right)\leqslant(T+n)\log(L+1)+L\theta\ ,$$

comme on peut le voir facilement en utilisant l'inégalité

$$\left(\sum_{|\mu|\leqslant L}\binom{\mu}{\lambda}^2\right)^{1/2}\leqslant\sum_{|\mu|\leqslant L}\binom{\mu}{\lambda}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{\mu_i=1}^{L}\binom{\mu_i}{\lambda_i}=\prod_{i=1}^{n}\binom{L+1}{\lambda_i+1}\leqslant(L+1)^{T+n}\qquad(4)$$

aux places infinies. On en déduit (*voir* [Sch1], Ch. 1, §8) :

$$h_{L_2}(S)=h_{L_2}(S^{\perp})\leqslant\dim(S^{\perp})\max h_{L_2}(y_{\alpha,\lambda})\leqslant H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)\Big((T+n)\log(L+1)+L\theta\Big)\ .$$

Appliquons le lemme 2.1, avec

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\log\frac{\binom{L+n}{n}}{\binom{L+n}{n}-H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L))}\ ;$$

ce dernier nous montre alors qu'il existe un élément non nul $F\in[\mathfrak{P}^{(T)}]_L$ de hauteur :

$$h_{L_2}(F)\leqslant\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)}{\dim(S)}\Big((T+n)\log(L+1)+L\theta\Big)+\frac{1}{2}\log(\dim(S))+\varepsilon\ .$$

Mais, $\dim(S)=\binom{L+n}{n}-H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)$, et

$$\frac{1}{2}\log(\dim(S))+\varepsilon=\frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}\ .$$

Ces relations, jointes à l'inégalité ci-dessus donnent bien le théorème 2.2 qui est donc entièrement démontré. ~

Pour tirer profit de cet énoncé, il nous faudra contrôler la valeur de $H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)$. Pour ce faire, il est utile d'introduire la quantité suivante :

Définition 2.3 *Soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{P}_n$ et soit T un réel strictement positif. On note*

$$\omega(T;V)=\inf\Big\{(T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}\Big\}\ ,$$

où l'infimum *(qui est un minimum) est pris sur l'ensemble des sous-variétés propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V. On appelera l'invariant $\omega(T;V)$* l'indice d'obstruction de poids T de V.

Rappelons [††] que M. Waldschmidt a introduit dans un cadre similaire (*voir* [Wal]) la quantité $\omega(V)$ (que nous avons appelé *l'indice d'obstruction de* V) qui désigne le plus petit degré d'une hypersurface contenant V (c'est-à-dire la première valeur entière pour laquelle la fonction de Hilbert géométrique de V est non triviale).

Le lemme suivant rassemble des propriétés élémentaires concernant les indices d'obstructions qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 2.4 *Soient S, T deux réels strictement positifs, avec $S \leqslant T$. On alors :*

$$\omega(S;V) \leqslant \omega(T;V) \leqslant (T/S)\omega(S;V) \ .$$

En particulier, la fonction $x \mapsto \omega(x;V)$ est croissante. Par ailleurs,

$$n^{-1}T^{1/\operatorname{codim}(V)}\omega(V) \leqslant \omega(T;V) \leqslant T\omega(V) \ .$$

En particulier, $n^{-1}\omega(V) \leqslant \omega(1\,;V) \leqslant \omega(V)$.

Démonstration : choisissons tout d'abord une sous-variété propre et géométriquement irréductible Z de $\mathbb{P}_n$ contenant V, telle que $\omega(T;V) = (T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}$, et de même, une sous-variété Z' telle que $\omega(S;V) = (S\deg(Z'))^{1/\operatorname{codim}(Z')}$. Montrons la première relation : l'inégalité de gauche est évidente puisque

$$\omega(S;V) \leqslant (S\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)} \leqslant (T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)} \ ;$$

par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \omega(T;V) &\leqslant (T\deg(Z'))^{1/\operatorname{codim}(Z')} = (T/S)^{1/\operatorname{codim}(Z')}(S\deg(Z'))^{1/\operatorname{codim}(Z')} \\ &\leqslant (T/S)\omega(S;V) \ , \end{aligned}$$

ce qui montre la majoration de $\omega(T;V)$.

Passons maintenant à la preuve de la deuxième relation. La majoration de $\omega(T;V)$ est évidente ; pour montrer la minoration, rappelons qu'un résultat de M. Chardin (*voir* [Cha], corollaire 2, chapitre 1, page 8 et exemple 1, page 9) nous assure l'existence d'une hypersurface Z_0 de $\mathbb{P}_n$ contenant Z (et donc V), dont le degré est majoré par $n\deg(Z)^{1/\operatorname{codim}(Z)}$. On en déduit :

$$\omega(T;V) = (T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)} \geqslant \frac{T^{1/\operatorname{codim}(Z)}}{n}\deg(Z_0) \geqslant n^{-1}T^{1/\operatorname{codim}(V)}\omega(V) \ .$$

Le lemme 2.4 est donc entièrement établi. ∽

†† *Confer* définition 1.1.

La quantité $\omega(T;V)$ permet de majorer la valeur de la fonction de Hilbert $H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)$ et donc de l'exposant de Dirichlet

$$\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)}{\binom{L+n}{n}-H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)}$$

qui intervient dans le théorème 2.2.

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.5 *Soient V, Z deux sous-variétés propres et géométriquement irréductibles de $\mathbb{G}_m^n$, avec $V\subseteq Z$. Notons $\mathfrak{P}$ l'idéal de définition de V dans l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}[x_0,\dots,x_n]$. Alors, pour toute paire d'entiers strictement positifs L et T, on a :*

$$H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)\leqslant\binom{T-1+\operatorname{codim}(Z)}{\operatorname{codim}(Z)}\binom{L+\dim(Z)}{\dim(Z)}\deg(Z)\ .$$

Démonstration : notons $\mathfrak{Q}$ l'idéal de définition de Z dans l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}[x_0,\dots,x_n]$ et remarquons que

$$H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)\leqslant H(\mathfrak{Q}^{(T)}\,;L)\quad\text{et}\quad H(\mathfrak{Q}\,;L)\leqslant\binom{L+\dim(Z)}{\dim(Z)}\deg(Z)$$

(la première inégalité est évidente, tandis que la deuxième est montrée dans [Cha], chapitre 1, page 5). Pour conclure la démonstration il suffit donc de démontrer que l'inégalité ci-dessous est vraie :

$$H(\mathfrak{Q}^{(T)}\,;L)\leqslant\binom{T-1+\operatorname{codim}(Z)}{\operatorname{codim}(Z)}H(\mathfrak{Q}\,;L)\ . \tag{5}$$

Pour ce faire, notons d'abord k la codimension de Z ; quitte à renuméroter les indices, on peut supposer que les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_k}$ se projettent sur une base de l'espace cotangent†‡ à Z en tous points $\boldsymbol{x}$ parcourant un ouvert de Zariski U de Z.

Nous allons montrer par récurrence sur $T\geqslant 0$ que :

$$\partial_{\boldsymbol{\lambda}}F\in\mathfrak{Q},\ \ \forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{N}^k\quad\text{tel que}\quad|\boldsymbol{\lambda}|\leqslant T\implies F\in\mathfrak{Q}^{(T+1)}\ , \tag{6}$$

où l'on convient que $\partial_{\boldsymbol{\lambda}}$ désigne cette fois $\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}!}\partial_1^{\lambda_1}\circ\cdots\circ\partial_k^{\lambda_k}$ (*i. e.*, on convient que l'on plonge naturellement $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^n$, en complétant les k-uplets par des zéros). Pour $T=0$, cela résulte de la définition des puissances symboliques puisqu'alors $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}^{(1)}$.

Supposons donc cette propriété établie jusqu'à $T-1$ pour un certain $T\geqslant 1$ et montrons qu'elle est vraie pour T. Pour ce faire, il suffit de démontrer que si F est

†‡ Puisque Z est inclus dans $\mathbb{G}_m^n$, on peut travailler sur la carte affine $x_0\neq 0$.

un polynôme tel que $\partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathfrak{Q}$ pour tout k-uplet de longueur au plus T, alors pour tout n-uplet $\boldsymbol{\mu}$ de longueur au plus T, on a également $\partial_{\boldsymbol{\mu}}(F) \in \mathfrak{Q}$, c'est-à-dire :

$$\partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathfrak{Q}, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^k \text{ tel que } |\boldsymbol{\lambda}| \leqslant T \quad \Longrightarrow \partial_{\boldsymbol{\mu}}(F) \in \mathfrak{Q}, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\boldsymbol{\mu}| \leqslant T \ .$$

Nous allons faire une nouvelle récurrence. Si $\boldsymbol{\mu}$ est un n-uplet d'entiers positifs, nous noterons

$$|\boldsymbol{\mu}|' \ : \ = \mu_{k+1} + \cdots + \mu_n \ .$$

Avec cette notation, il suffit de démontrer que pour tout entier $l \geqslant 0$, l'implication suivante est vraie :

$$\partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathfrak{Q}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \begin{cases} |\boldsymbol{\lambda}| \leqslant T \\ |\boldsymbol{\lambda}|' \leqslant l \end{cases} \Longrightarrow \partial_{\boldsymbol{\mu}}(F) \in \mathfrak{Q}, \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \begin{cases} |\boldsymbol{\mu}| \leqslant T \\ |\boldsymbol{\mu}|' \leqslant l+1 \ . \end{cases}$$

En effet, par notre hypothèse de récurrence, dans le cas $l = 0$, le membre de gauche de l'implication ci-dessus est automatiquement vérifié.

Soit donc F un élément de $\overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$ pour lequel l'assertion de gauche de l'implication ci-dessus soit vraie ; soit de plus $l \geqslant 0$ un entier et $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice tel que $|\boldsymbol{\mu}| \leqslant T$ et $|\boldsymbol{\mu}|' = l + 1$.

Quitte à renuméroter les indices, on peut supposer que $\boldsymbol{\mu}!\partial_{\boldsymbol{\mu}}$ est de la forme $\boldsymbol{\lambda}!\frac{\partial}{\partial x_n} \circ \partial_{\boldsymbol{\lambda}}$, où $|\boldsymbol{\lambda}| \leqslant T - 1$ et $|\boldsymbol{\lambda}|' = l$. De plus, pour tout point $\boldsymbol{x} \in U$, puisque les $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ se projettent sur une base de l'espace cotangent à Z en $\boldsymbol{x}$, on peut écrire $\frac{\partial}{\partial x_n} = \delta_{\boldsymbol{x}} + \delta'_{\boldsymbol{x}}$, où $\delta_{\boldsymbol{x}}$ est une combinaison linéaire des $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $\delta'_{\boldsymbol{x}}$ est dans l'espace tangent de Z en $\boldsymbol{x}$.

Par hypothèse de récurrence $\delta_{\boldsymbol{x}} \circ \partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathfrak{Q}$ puisque d'une part la longueur de l'opérateur différentiel $\delta_{\boldsymbol{x}} \circ \partial_{\boldsymbol{\lambda}}$ est égale à $|\boldsymbol{\mu}| \leqslant T$ et d'autre part la « longueur résiduelle » est $|\boldsymbol{\lambda}|' = l$. De plus, par définition de l'espace tangent, $\delta'_{\boldsymbol{x}} \circ \partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$ est nul en $\boldsymbol{x}$ puisque $\partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathfrak{Q}$ par hypothèse de récurrence. On en déduit donc que $\partial_{\boldsymbol{\mu}}(F) = \frac{\boldsymbol{\lambda}!}{\boldsymbol{\mu}!}(\delta_{\boldsymbol{x}} + \delta'_{\boldsymbol{x}}) \circ \partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$ est nul en $\boldsymbol{x}$. Puisque ceci est vrai pour tout $\boldsymbol{x}$ dans U, on en déduit que $\partial_{\boldsymbol{\mu}}(F)$ est nul sur l'adhérence de Zariski de U, à savoir sur Z tout entier. En particulier, $\partial_{\boldsymbol{\mu}}(F)$ est un élément de $\mathfrak{Q}$. Nous avons donc démontré par récurrence la relation (6).

Il est maintenant facile de majorer la fonction de Hilbert géométrique de $\mathfrak{Q}^{(T)}$. Il suffit de remarquer que la relation (6) donne une majoration du nombre de conditions linéaires à écrire pour assurer que l'on se trouve dans $\mathfrak{Q}^{(T)}$. On obtient donc :

$$H(\mathfrak{Q}^{(T)}\,; L) \leqslant \sum_{j=0}^{T-1} \binom{j+k-1}{k-1} H(\mathfrak{Q}\,; L-j) \leqslant \binom{T-1+k}{k} H(\mathfrak{Q}\,; L) \ ,$$

ce qui montre bien la relation (5) ; le lemme 2.5 en découle. ❋

On peut maintenant majorer l'exposant de Dirichlet du système linéaire étudié :

Proposition 2.6 *Soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{P}_n$ et notons $\mathfrak{P}$ son idéal de définition dans l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$. Soient L et T deux entiers strictement positifs tels que*

$$L + 1 \geqslant nT\omega(T; V) \ .$$

On a alors :

$$\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)}{\binom{L+n}{n} - H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)} \leqslant \frac{1}{T-1} \ .$$

Démonstration : choisissons une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible Z de $\mathbb{P}_n$ contenant V, telle que $\omega(T; V) = (T \deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}$. Notons k' la codimension de Z ; le lemme 2.5 donne la majoration :

$$\begin{aligned} \frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)}{\binom{L+n}{n}} &\leqslant \binom{T+k'-1}{k'}\binom{L+n-k'}{n-k'}\binom{L+n}{n}^{-1} \deg(Z) \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k'+1)}{k'!} \times \frac{(T+k'-1)\ldots T}{(L+n)\ldots(L+n-k'+1)} \deg(Z) \ . \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités $T + j \leqslant (j+1)T$ (où j décrit $0, \ldots, k'-1$) on obtient :

$$\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)}{\binom{L+n}{n}} \leqslant \left(\frac{nT}{L+1}\right)^{k'} \deg(Z) = \frac{1}{T}\left(\frac{nT\omega(T;V)}{L+1}\right)^{k'} \leqslant \frac{1}{T}$$

(car $L + 1 \geqslant nT\omega(T; V)$), et donc :

$$\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)}{\binom{L+n}{n} - H(\mathfrak{P}^{(T)}\,; L)} \leqslant \frac{1}{T-1} \ .$$

La proposition 2.6 est donc établie. $\mathfrak{Q}$

Nous pouvons maintenant simplifier l'énoncé du théorème 2.2 :

Corollaire 2.7 *Soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, soit T un entier $\geqslant 6$ et notons $L = [nT\omega(T; V)]$. Supposons que*

$$\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) \leqslant \frac{\log(L+1)}{\omega(T; V)} \ .$$

Il existe alors un polynôme non nul $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_n]$, de degré majoré par L, nul à un ordre $\geqslant T$ sur V, et tel que‡‡ *:*

$$h(F) \leqslant 4n \log(L+1) \ .$$

‡‡ Rappelons que si F est un polynôme non nul à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on note $h(F)$ la hauteur de Weil du point projectif défini par ses coefficients.

Démonstration : la proposition 2.6, le choix de L et l'inégalité $T \geqslant 6$ donnent la majoration :

$$\frac{H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)}{\binom{L+1}{n} - H(\mathfrak{P}^{(T)}\,;L)} \leqslant \frac{1}{T-1} \leqslant \frac{6}{5T} \quad .$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 2.2. Ce théorème nous assure que pour tout nombre réel $\varepsilon' > 0$, il existe un polynôme non nul $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_n]$, de degré majoré par L, nul à un ordre $\geqslant T$ sur V, et tel que :

$$h(F) \leqslant h_{L_2}(F) \leqslant \frac{6}{5T}\left((T+n)\log(L+1) + L(\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) + \varepsilon')\right) + \frac{n}{2}\log(L+1) \quad .$$

Par définition de L, par hypothèse sur le minimum essentiel de V et par l'inégalité $T \geqslant 2$, on en déduit :

$$\begin{aligned} h(F) &\leqslant \frac{6}{5T}\left((T+n)\log(L+1) + nT\omega(T;V)\left(\frac{\log(L+1)}{\omega(T;V)} + \varepsilon'\right)\right) + \frac{n}{2}\log(L+1) \\ &\leqslant \left(\frac{6}{5} + \frac{6n}{5T} + \frac{6n}{5} + \frac{n}{2}\right)\log(L+1) + \frac{6n\omega(T;V)\varepsilon'}{5} \\ &\leqslant \frac{7}{2}n\log(L+1) + \frac{6n\omega(T;V)\varepsilon'}{5} \\ &\leqslant 4n\log(L+1) \quad , \end{aligned}$$

sitôt que ε' est assez petit. Le corollaire 2.7 est donc entièrement établi. ☙

2.2 Extrapolation

Passons maintenant à l'étape dite de l'extrapolation. C'est à ce stade qu'il s'agit d'exploiter une propriété métrique convenable. Dans la méthode introduite par E. Dobrowolski dans le cadre du problème de Lehmer, on exploite le fait que $\boldsymbol{\alpha}^p$ et $\boldsymbol{\alpha}$ sont proches v-adiquement pour toute place v au-dessus d'un nombre premier p dans un corps de nombres contenant $\boldsymbol{\alpha}$ (car le morphisme de Frobenius se relève en caractéristique 0 en l'endomorphisme multiplication par p dans $\mathbb{G}_m$). Cette méthode a l'inconvénient de faire intervenir de manière cruciale le corps de définition de V, ce que nous ne souhaitons pas (car il s'agit ici d'obtenir une minoration *géométrique* de la hauteur normalisée) ; aussi nous la remplacerons par le fait que la translation par un point de p-torsion est proche v-adiquement de l'identité pour toute place au-dessus de p dans un corps de nombres convenable (ce qui se déduit des propriétés galoisiennes des points d'ordre fini). Cette propriété se traduit de manière très élémentaire grâce à l'inégalité suivante, valable pour tout nombre premier p, pour toute racine p-ième de l'unité ξ et pour toute place v divisant p d'un corps de nombres quelconque contenant ξ :

$$|\xi - 1|_v \leqslant p^{-1/p} \quad . \tag{7}$$

Lemme 2.8 *Soient L et T deux entiers strictement positifs, N un réel $\geqslant 3$ et V une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$. Supposons que :*

(i) *le minimum essentiel de V vérifie :*

$$\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) \leqslant \frac{n \log(L+1)}{L} \quad ;$$

(ii) *il existe un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_n]$ non identiquement nul, de degré majoré par L, nul à un ordre $\geqslant T$ sur V et de hauteur :*

$$h(F) \leqslant 4n \log(L+1) \quad ;$$

(iii) *les entiers L, T et N sont liés par l'inégalité :*

$$T^* \; := \frac{\log N}{8nN \log(L+1)} T \geqslant 1 \quad .$$

Alors, pour tout nombre premier p tel que $3 \leqslant p \leqslant N$ et pour tout élément $\boldsymbol{\xi}$ de $\ker[p]$, *le polynôme F est nul à un ordre $\geqslant T^*$ sur $\boldsymbol{\xi}.V$.*

Démonstration : soit p un nombre premier compris entre 3 et N et soit $\boldsymbol{\xi}$ un élément de $\ker[p]$; supposons qu'il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ avec $|\boldsymbol{\lambda}| < T^*$ tel que*** $\partial_{\boldsymbol{\lambda}} F$ ne soit pas nul sur $\boldsymbol{\xi}.V$. Soit enfin ε un nombre réel > 0. Il existe alors (par définition du minimum essentiel) un élément $\boldsymbol{\alpha} \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que $h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \hat{\mu}^{\text{ess}}(V) + \varepsilon$ et vérifiant $\partial_{\boldsymbol{\lambda}} F(\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$. Soit v une place de $\overline{\mathbb{Q}}$; on déduit de l'inégalité (*voir* la relation (4))

$$\sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leqslant L} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \leqslant (L+1)^{T^*+n}$$

pour les places archimédiennes et de l'inégalité ultramétrique pour les places finies, les inégalités :

$$\left|\partial_{\boldsymbol{\lambda}}(F(\boldsymbol{\xi\alpha}))\right|_v \leqslant \begin{cases} |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^L \;, \; ; & \text{si} \; ; v \nmid \infty \; ; \\ (L+1)^{T^*+n} |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^L, \; ; & \text{si} \; ; v \mid \infty \end{cases}$$

*** Se reporter à la formule (3) pour la définition de $\partial_{\boldsymbol{\lambda}}$.

(rappelons que $|F|_v$ désigne le maximum des coefficients de F pour la valeur absolue v).

De plus, si $v \mid p$, la formule de Taylor et l'inégalité (7) nous assurent que :

$$\left|\partial_{\lambda}(F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}))\right|_v \leqslant p^{-(T-T^*)/p}|F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^L \ .$$

On déduit alors de la formule du produit (en faisant tendre ε vers 0) et des hypothèses sur $h(F)$, $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)$ et du fait que $T^* \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant -(T-T^*)\frac{\log p}{p} + h(F) + (T^*+n)\log(L+1) + L\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \\ &< -T\frac{\log p}{p} + T^* + 4n\log(L+1) + (T^*+n)\log(L+1) + n\log(L+1) \\ &\leqslant -T\frac{\log N}{N} + 8T^*n\log(L+1) \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$T^* > \frac{\log N}{8nN\log(L+1)}T \ .$$

Cette contradiction établit le lemme 2.8. ✠

En itérant le lemme 2.8 à partir du corollaire 2.7, on en déduit :

Corollaire 2.9 *Soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, soit ℓ un entier strictement positif et soient enfin $N_1, \ldots, N_\ell$ des nombres réels $\geqslant 3$. Soient de plus u et U deux nombres réels tels que $3 \leqslant u \leqslant U$, $u \leqslant \min\{N_1, \ldots, N_\ell\}$ et Δ un nombre réel. On suppose :*

(i) *les nombres u, U, Δ et les N_i sont liés par les relations :*

$$n\Delta^{2\ell}(N_1 \ldots N_\ell)^2\omega(V) \leqslant U \quad \text{et} \quad \Delta \geqslant \frac{8n\log(U+1)}{\log u} \ ;$$

(ii) *le minimum essentiel de la variété V vérifie :*

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \leqslant \frac{\log(\omega(V)+1)}{\Delta^{2\ell}(N_1 \ldots N_\ell)^2} \ .$$

Il existe alors un polynôme non nul $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_n]$, de degré majoré par

$$n\Delta^\ell N_1 \ldots N_\ell \,; \omega(\Delta^\ell N_1 \ldots N_\ell \,; V),$$

s'annulant sur

$$\bigcup_{p_1,\ldots,p_\ell} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_1 \in \ker[p_1]} \cdots \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_\ell \in \ker[p_\ell]} \boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_\ell . V$$

où la réunion porte sur tous les nombres premiers $p_1, \ldots, p_\ell$ tels que $3 \leqslant p_i \leqslant N_i$.

Démonstration : remarquons que $\Delta \geqslant 8$ et notons

$$T_0 := \Delta^{\ell} N_1 \ldots N_\ell \geqslant 8 \qquad \text{et} \qquad L := [nT_0\omega(T_0;V)] \ .$$

On a donc : $nT_0^2\omega(V) \leqslant U$ (c'est l'hypothèse (i)) et

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \leqslant T_0^{-2} \log(\omega(V)+n)$$

(c'est l'hypothèse (ii)). On en déduit, en tenant compte du lemme 2.4 :

$$\omega(V) \leqslant L \leqslant nT_0\omega(T_0;V) \leqslant nT_0^2\omega(V) \leqslant U \ ,$$

et par suite, on a :

$$\begin{aligned} L\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) &\leqslant nT_0\omega(T_0;V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \\ &\leqslant nT_0^2\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \\ &\leqslant n\log(\omega(V)+1) \\ &\leqslant n\log(L+1) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

A fortiori, l'hypothèse du corollaire 2.7 est satisfaite. Nous pouvons donc appliquer ce dernier, qui nous fournit alors un polynôme non nul $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_n]$, de degré majoré par L, nul à un ordre $\geqslant T_0$ sur V, et tel que

$$h(F) \leqslant 4n\log(L+1) \ . \tag{9}$$

Notons maintenant $T_r = \Delta^{\ell-r}N_{r+1}\ldots N_\ell$ pour $r = 1, \ldots, \ell$ et montrons par récurrence que pour tout $r \in \{0, \ldots, \ell\}$, pour tous premiers $p_1, \ldots, p_r$ tels que $3 \leqslant p_i \leqslant N_i$ et pour tous $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_r$ tels que $\boldsymbol{\xi}_i \in \ker[p_i]$, le polynôme F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_r.V$ avec une multiplicité $\geqslant T_r$ (pour $r = 0$, on conviendra que cette condition signifie que F est nul sur V à un ordre $\geqslant T_0$).

Par construction de F, cette propriété est donc vraie pour $r = 0$. Soient donc $r \in \{1, \ldots, \ell\}$, $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers tels que $3 \leqslant p_i \leqslant N_i$ et $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_r$ avec $\boldsymbol{\xi}_i \in \ker[p_i]$. On suppose par récurrence que F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_{r-1}.V$ avec une multiplicité $\geqslant T_{r-1}$, et l'on se propose d'appliquer le lemme 2.8 à $\boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_{r-1}.V$ et F (en faisant bien entendu $T = T_{r-1}$ et $N = N_r$).

Les deux contraintes (i) et (ii) sur $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(\boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_{r-1}.V)$ et $h(F)$ du lemme 2.8 sont satisfaites grâce aux relations (8) et (9) ci-dessus (en effet, la hauteur normalisée est invariante par translation par des points de torsion, et donc $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(\boldsymbol{\xi}_1 \ldots \boldsymbol{\xi}_{r-1}.V) = \hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)$). Par ailleurs,

$$\frac{\log N_r}{8nN_r\log(L+1)} \geqslant \frac{\log u}{8nN_r\log(U+1)} \geqslant \Delta^{-1}N_r^{-1} \ ,$$

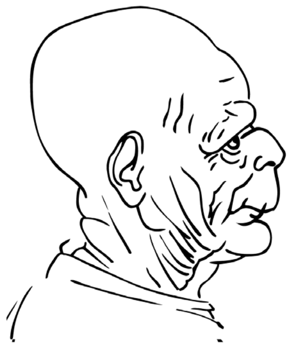
car $N_r \geqslant u$ et $L \leqslant U$. Donc :

$$T^* := \frac{\log N_r}{8nN_r \log(L+1)} T_{r-1} \geqslant \Delta^{-1} N_r^{-1} \Delta^{\ell-r+1} N_r \ldots N_\ell = T_r \geqslant 1 \ .$$

La dernière hypothèse (iii) du lemme 2.8 est donc également satisfaite. Ce dernier nous assure alors que le polynôme F est nul sur $\xi_1 \ldots \xi_r.V$ avec une multiplicité $\geqslant T_r$. Par récurrence on a en particulier démontré que F est nul sur

$$\bigcup_{p_1,\ldots,p_\ell} \bigcup_{\xi_1 \in \ker[p_1]} \cdots \bigcup_{\xi_\ell \in \ker[p_\ell]} \xi_1 \ldots \xi_\ell.V$$

avec une multiplicité $\geqslant T_\ell = 1$. Le corollaire 2.9 est donc entièrement établi.



Université de Caen & Université Pierre et Marie Curie

3 *Intermezzo* : le cas d'une courbe plane

Nous consacrons ce paragraphe au cas particulier des courbes planes, et y démontrons le théorème 1.5. Si ce cas sera également couvert dans les paragraphes qui suivent, consacrés au cas général, il a tout de même son intérêt propre. Tout d'abord, il permet de faire ressortir les propriétés métriques au cœur de l'approche que nous adoptons ici sans l'alourdissement inhérent aux complications techniques liées à la mise en œuvre du lemme de zéros et de la méthode de descente qui lui est associée. Ensuite, comme le montrent les lemmes de projection de [Da–Ph2], une minoration de la hauteur normalisée pour les courbes planes conduit automatiquement à une minoration de la hauteur normalisée dans le cas général, car le minimum pour la hauteur normalisée est atteint pour ces dernières. Nous en profitons également pour fournir une preuve totalement explicite (*i. e.* avec constantes numériques), qui permet de donner un ordre de grandeur des constantes numériques apparaissant naturellement dans ce type d'argument. Toutefois, nous n'avons pas cherché à raffiner les lemmes du paragraphe 2 qui précède pour améliorer les valeurs numériques ci-dessous.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposerons donc que V est une courbe géométriquement irréductible, plongée dans $\mathbb{G}_m^2$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et de stabilisateur fini. Nous noterons D le degré de V, *i. e.* le degré de l'adhérence de Zariski de V dans le plongement naturel de $\mathbb{G}_m^2$ dans $\mathbb{P}_2$ que nous avons privilégié.

On vérifie aisément que dans ces conditions, on a $\omega(V) = D$ et $\omega(V;T) = TD$ pour tout nombre réel T positif ou nul. On choisit dans le corollaire 2.9 $\ell = 1$ et :

$$u := N := 2^{25}\frac{\log(D+2)^2}{\log\log(D+2)} \qquad \text{et} \qquad U := 2^{80}D^2.$$

Remarquons tout de suite l'inégalité :

$$N \geqslant 2^{25}$$

qui sera utilisée plusieurs fois. Nous fixons enfin :

$$\Delta := \frac{2^4\log(U+2)}{\log N} \; .$$

Nous allons appliquer le corollaire 2.9 avec ces valeurs ; pour ceci, commençons par supposer que le minimum essentiel de V vérifie :

$$D\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \leqslant \frac{\log(D+2)(\log N)^2}{2^8 \log(U+2)^2 N^2} \quad . \tag{10}$$

Avec les choix que nous avons effectués, la condition (ii) du corollaire 2.9 est satisfaite par définition de u, U, N et Δ, puisque dans ce cas particulier, nous avons $n=2$ et $k=1$. Il ne reste plus qu'à vérifier la première contrainte (i) afin de pouvoir utiliser cet énoncé. La condition sur Δ est automatiquement vérifiée en vertu de nos choix. On dispose de plus des inégalités :

$$\begin{cases} \log(U+2) = \log(2^{80}D^2+2) \leqslant (80\log 2 + 2)\log(D+2) \leqslant 2^6 \log(D+2) \quad , \\ \text{et} \; : \\ \dfrac{N}{\log N} = \dfrac{2^{25}\log(D+2)^2}{(\log N)\log\log(D+2)} \leqslant \dfrac{2^{25}\log(D+2)^2}{25(\log 2)\log\log 3} \leqslant 2^{25}(\log(D+2))^2 \quad . \end{cases} \tag{11}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{2^4\log(U+2)}{\log N}\right)^2 N^2 D &\leqslant 2^{1+2\times 4+2\times 6+2\times 25}\log(D+2)^6 D \\ &= 2^{71}\log(D+2)^6 D \quad . \end{aligned}$$

Majorons maintenant $\log(D+2)^6$ en fonction de D : on vérifie que pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, on a $\log(x)^6 \leqslant (6/e)^6 x \leqslant 2^7 x$; par ailleurs, $D+2 \leqslant 4D$. Au total, on en déduit donc que $\log(D+2)^6 \leqslant 2^9 D$. En reportant cette inégalité dans l'estimation précédente, on en tire :

$$2\Delta^2 N^2 D \leqslant 2^{71+9} D^2 = U \quad .$$

Ceci nous montre bien que la condition (i) du corollaire 2.9 est également satisfaite.

Nous pouvons donc appliquer le corollaire 2.9 qui nous assure qu'il existe un polynôme non identiquement nul $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x,y]$, de degré majoré par

$$L \; : \; = 2\Delta^2 N^2 D = 2^9 \left(\frac{\log(U+2)N}{\log N}\right)^2 D$$

s'annulant sur

$$\bigcup_{3\leqslant p\leqslant N} \; \bigcup_{\xi\in\ker[p]} \xi.V \quad .$$

Par comparaison des degrés, on en déduit l'inégalié :

$$\deg\left(\bigcup_{3\leqslant p\leqslant N}\ \bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]}\boldsymbol{\xi}.V\right)\leqslant\deg(F)\leqslant 2^9\left(\frac{\log(U+2)N}{\log N}\right)^2 D\ . \tag{12}$$

Soit H le stabilisateur de V ; rappelons que par hypothèse, H est un sous-groupe fini de $\mathbb{G}_m^2$ de cardinal borné par D^2 (*confer* le lemme 4.3, point (ii) pour la majoration du cardinal). Lorsque p décrit l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas le cardinal de H et $\boldsymbol{\xi}$ décrit l'ensemble des points d'ordre exactement p de $\mathbb{G}_m^2$, les courbes $\boldsymbol{\xi}.V$ sont donc deux à deux distinctes. Rappelons de plus que le degré d'une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ est invariant par translation. Par suite,

$$\begin{aligned}\deg\left(\bigcup_{3\leqslant p\leqslant N}\ \bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]}\boldsymbol{\xi}.V\right) &\geqslant \deg\left(\bigcup_{\substack{3\leqslant p\leqslant N\\ p\nmid|H|}}\ \bigcup_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]\\ \boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{\Delta}}}\boldsymbol{\xi}.V\right)\\ &\geqslant \sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant N\\ p\nmid|H|}}\ \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]\\ \boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{\Delta}}}\deg(\boldsymbol{\xi}\cdot V)\geqslant D\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant N\\ p\nmid|H|}}(p^2-1)\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left|\left\{p\ ;\text{premier tel que } p\geqslant 3 \text{ et } p\mid |H|\right\}\right|\leqslant\frac{\log|H|}{\log 3}\leqslant 2\log(D+2)\ .$$

De plus, en utilisant le théorème de Čhebichev (*voir* [Ro-Sc], corollary 1) on dispose de§§ :

$$\begin{aligned}\sum_{3\leqslant p\leqslant N}(p^2-1) &\geqslant \left(\frac{N^2}{4}-1\right)(\pi(N)-\pi(N/2))\\ &\geqslant \left(\frac{N^2}{4}-1\right)\left(\frac{N}{\log N}-1,26\times\frac{N/2}{\log(N/2)}\right)\\ &\geqslant c_2\frac{N^3}{\log N}\ ,\end{aligned}$$

où l'on peut prendre (rappelons que $N\geqslant 2^{25}$)

$$c_2=\left(\frac14-\frac{1}{N^2}\right)\left(1-0,63\times\frac{\log N}{\log(N/2)}\right)\geqslant\left(\frac14-\frac{1}{2^{50}}\right)\left(1-0,63\times\frac{25}{24}\right)\geqslant\frac{1}{12}\ .$$

§§ Le nombre de nombres premiers $\leqslant N$ est noté suivant l'usage $\pi(N)$.

Au total,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant N\\ p\nmid |H|}}(p^2-1) &\geqslant \sum_{3\leqslant p\leqslant N}(p^2-1)-N^2\left|\left\{p\ ;\text{premier tel que } p\mid |H|\right\}\right|\\ &\geqslant \frac{1}{12}\times\frac{N^3}{\log N}-2N^2\log(D+2)\ .\end{aligned}$$

Notons enfin que pour notre choix de N on a :

$$\log N\leqslant\log(2^{29}\log(D+2)^2)\leqslant\left(\frac{29\log 2}{\log\log 3}+2\right)\log\log(D+2)\leqslant 2^8\log\log(D+2)$$

(utiliser deux fois l'inégalité $(\log\log 3)^{-1}\leqslant 2^4$) et donc :

$$\begin{aligned}2N^2\log(D+2) &= \frac{2\log(D+2)\log N}{N}\times\frac{N^3}{\log N}\\ &\leqslant \frac{2^{1+8-25}(\log\log(D+2))^2}{\log(D+2)}\times\frac{N^3}{\log N}\\ &\leqslant \frac{2^{-16}N^3}{\log N}\end{aligned}$$

(utiliser l'inégalité $(\log x)^2\leqslant x$ valable pour $x\geqslant 1$). Par suite, les inégalités ci-dessus nous assurent que :

$$\deg\left(\bigcup_{3\leqslant p\leqslant N}\ \bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]}\boldsymbol{\xi}.V\right)\geqslant D\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant N\\ p\nmid |H|}}(p^2-1)\geqslant\left(\frac{1}{12}-2^{-16}\right)\frac{N^3}{\log N}D\geqslant\frac{2^{-4}N^3}{\log N}D\ .$$

En reportant cette minoration dans la relation de comparaison des degrés (12), on en déduit l'estimation :

$$2^9\left(\frac{\log(U+2)N}{\log N}\right)^2 D\geqslant\frac{2^{-4}N^3}{\log N}D\ ,$$

ce qui se traduit après simplification par :

$$2^{13}\log(U+2)^2\geqslant N\log N\ .$$

Mais, par définition de N, on a (en remarquant que $N>\log(D+2)$)

$$N\log N=2^{25}\log(D+2)^2\frac{\log N}{\log\log(D+2)}>2^{25}\log(D+2)^2\ .$$

Par ailleurs, nous avons montré en (11) que

$$\log(U+2)^2 \leqslant 2^{12}\log(D+2)^2 \ .$$

Les trois inégalités ci-dessus sont contradictoires. L'hypothèse (10) est donc également fausse ; on obtient alors (en tenant à nouveau compte des inégalités obtenues en (11) et de la minoration $\log N \geqslant \log\log(D+2)$) :

$$\begin{aligned} D\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) &\geqslant \frac{\log(D+2)(\log N)^2}{2^8\log(U+2)^2 N^2} \\ &\geqslant \frac{\log(D+2)\log\log(D+2)^2}{2^{8+2\times 6+2\times 25}\log(D+2)^2\left(\frac{\log(D+2)^2}{\log\log(D+2)}\right)^2} \\ &= 2^{-70}\frac{\log\log(D+2)^4}{\log(D+2)^5} \ . \end{aligned}$$

Le théorème 1.5 est donc entièrement établi.

Université de Caen & Université Pierre et Marie Curie

4 Lemme de zéros

Les lemmes de zéros classiques, dont les formulations les plus abouties se trouvent dans les travaux de P. Philippon (*voir* [Phi1], théorème 2. 1, et, pour les versions les plus générales, [Phi2], théorèmes 1 ou 2) ne sont pas suffisants pour conclure (alors que c'est très souvent le cas en géométrie diophantienne) dans ce travail. Nous avons donc été amenés à généraliser les résultats de [Phi2] afin de pouvoir terminer la preuve du théorème 1.4. *Grosso modo*, P. Philippon majore le degré d'une « sous-variété obstructrice », à partir d'un polynôme s'annulant sur $V + P_1 + \cdots + P_k$, où V est une sous-variété donnée d'un groupe algébrique commutatif, et les P_i décrivent des ensembles de points $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ donnés. Nous tirons parti des stabilisateurs des sous-variétés obstructrices pour obtenir de bien meilleures inégalités lorsque les Σ_i sont par exemple des réunions de sous-groupes. Cette généralisation du résultat [Phi2] fait l'objet d'un article distinct en préparation (*voir* [Am-Da4]). Pour la commodité du lecteur, nous énonçons (et démontrons) ci-dessous une version simplifiée de ce lemme, adaptée au cas particulier (groupe multiplicatif, pas de multiplicités, *etc.*) que nous avons à traiter. Le théorème 4.2 n'entraîne donc pas le théorème 1 de [Phi2].

Introduisons tout d'abord la terminologie suivante : soient Z_1 et Z_2 deux sous-ensembles algébriques du groupe $\mathbb{G}_m^n$, on appelle *trace* de Z_1 relativement à Z_2 notée $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2)$, la réunion des composantes isolées de Z_1 contenant au moins une composante isolée de Z_2. Nous rassemblons dans le lemme suivant des propriétés élémentaires de la trace qui nous seront utiles plus avant.

Lemme 4.1 *Soient Z_1 et Z_2 deux sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^n$. On a alors :*

(i) *si $Z_2 \subseteq Z_1$, alors* $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \neq \emptyset$ *et* $\mathrm{codim}(\mathrm{tr}(Z_1, Z_2)) \leqslant \mathrm{codim}(Z_2)$ *;*

(ii) *si Z_1' est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant Z_1, alors* $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1', Z_2)$ *;*

(iii) *si Z_2' est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ contenant Z_2 et si les composantes isolées de Z_2' et de Z_2 ont toutes la même dimension, alors* $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1, Z_2')$ *;*

(iv) *si Σ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}_m^n$, alors* $\Sigma.\,\mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(\Sigma.Z_1, \Sigma.Z_2)$.

Démonstration : laissée au lecteur. ⊛

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de zéros dont nous avons besoin :

Théorème 4.2 *Soient V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, géométriquement irréductible, de codimension k, et $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$. Soit de plus F un polynôme homogène $\in \overline{\mathbb{Q}}[x_0, \ldots, x_n]$ non identiquement nul, de degré $\leqslant L$, s'annulant sur $\Sigma_1 \ldots \Sigma_k.V$. Supposons de plus que les Σ_l soient tous des réunions de sous-groupes de $\mathbb{G}_m^n$,* i. e. *que*

$$\Sigma_l = H_{l,1} \cup \cdots \cup H_{l,s_l}\ , \qquad \forall\, l \in \{1, \ldots, k\}\ .$$

Alors :

(i) *il existe un entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant k$;*

(ii) *il existe un entier k' tel que $r \leqslant k' \leqslant k$;*

(iii) *il existe des indices $j_1, \ldots, j_{r-1}$ avec $1 \leqslant j_l \leqslant s_l$ pour $l = 1, \ldots, r-1$;*

(iv) *il existe des sous-variétés algébriques Z_j ($j = 1, \ldots, s_r$) de $\mathbb{G}_m^n$, propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles, contenant au moins une composante isolée de*

$$H_{1,j_1} \ldots H_{r-1,j_{r-1}}.\Sigma_r \ldots \Sigma_k.V\ ,$$

toutes de codimension k' et telles que :

$$\deg\left(\bigcup_{\boldsymbol{\zeta}_1 \in H_{1,j_1}} \cdots \bigcup_{\boldsymbol{\zeta}_{r-1} \in H_{r-1,j_{r-1}}} \bigcup_{j=1}^{s_r} \bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in H_{r,j}} \boldsymbol{\zeta}_1 \ldots \boldsymbol{\zeta}_{r-1}.\boldsymbol{\xi}.Z_j\right) \leqslant L^{k'}. \qquad (13)$$

Démonstration : l'idée générale est classique : il s'agit de construire une suite d'ensembles algébriques emboîtés (au sens de l'inclusion) de telle sorte que deux d'entre eux au moins aient même dimension, et de comparer les degrés au cran où il y a égalité des dimensions. Le fait que nous souhaitons conserver la trace des stabilisateurs $H_{i,j}$ induit toutefois une complication supplémentaire, et nous allons adopter une construction par récurrence, moins naturelle que celle de [Phi2].

Commençons par poser $s_0 = 1$, ainsi que $H_{0,1} = \{\mathbf{1}\}$. Soit l un entier compris entre 0 et k et $j_0, \ldots, j_l$ une suite d'entiers *admissibles* (*i. e.* tels que $1 \leqslant j_r \leqslant s_r$ pour tout entier r compris entre 0 et l). On définit alors des ensembles algébriques $X_{j_0,\ldots,j_l}$ et $Y_{j_0,\ldots,j_l}$ par :

$$\begin{aligned} X_{j_0,\ldots,j_l} &:= \mathcal{Z}((F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\xi} \in H_{0,j_0} \cdot H_{1,j_1} \cdots H_{l,j_l}))\ , \\ Y_{j_0,\ldots,j_l} &:= \operatorname{tr}(X_{j_0,\ldots,j_l}, H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V)\ . \end{aligned}$$

Nous allons commencer par établir que les propriétés suivantes sont vraies pour toute suite admissible $j_0, \ldots, j_l$:

($\mathcal{P}$-i) $Y_{j_0,\ldots,j_l} \neq \emptyset$;

($\mathcal{P}$-ii) $\operatorname{codim}(Y_{j_0}) \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{codim}(Y_{j_0,\dots,j_l}) \leqslant k$;

($\mathcal{P}$-iii) le groupe $H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l}$ stabilise $Y_{j_0,\dots,j_l}$.

Par hypothèse, on sait que F est nul sur $\Sigma_1 \cdots \Sigma_k \cdot V$, et par suite, puisque $H_{1,j_1} \cdots H_{l,j_l} \subseteq \Sigma_1 \cdots \Sigma_l$, par définition des ensembles $X_{j_0,\dots,j_l}$, on a :

$$\Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V \subseteq X_{j_0,\dots,j_l} \quad .$$

Donc, par définition de la trace,

$$\operatorname{tr}(X_{j_0,\dots,j_l}, \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V) \neq \emptyset \quad .$$

De plus, comme

$$H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V \supseteq \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V \quad ,$$

(et puisque la codimension de les composantes de ces ensembles algébriques est égale à k), la propriété (iii) du lemme 4.1 nous assure que $Y_{j_0,\dots,j_l}$ est non vide, et la propriété (i) du même lemme nous assure que $\operatorname{codim}(Y_{j_0,\dots,j_l}) \leqslant k$. Ceci montre l'assertion ($\mathcal{P}$-i) et une partie de l'assertion ($\mathcal{P}$-ii). Pour montrer la dernière partie de cette assertion, il suffit de montrer que si $l \geqslant 1$, alors on a $Y_{j_0,\dots,j_{l-1}} \supseteq Y_{j_0,\dots,j_l}$. Supposons donc $l \geqslant 1$; par définition on a : $X_{j_0,\dots,j_{l-1}} \supseteq X_{j_0,\dots,j_l}$. Les propriétés (ii) et (iii) du lemme 4.1 jointes à l'inclusion évidente $H_{l,j_l} \subseteq \Sigma_l$ montrent bien que $Y_{j_0,\dots,j_{l-1}} \supseteq Y_{j_0,\dots,j_l}$; d'où ($\mathcal{P}$-ii).

Montrons maintenant la propriété ($\mathcal{P}$-iii). Ce point résulte de la définition de l'ensemble $X_{j_0,\dots,j_l}$; en effet, par construction de cet ensemble algébrique, et puisque $H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l}$ est un groupe, $X_{j_0,\dots,j_l}$ est stabilisé par ce dernier. De même, on a :

$$H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V = H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V \quad .$$

Donc, le point (iv) du lemme 4.1 nous assure que :

$$H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot Y_{j_0,\dots,j_l} \subseteq \operatorname{tr}(X_{j_0,\dots,j_l}, H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V) = Y_{j_0,\dots,j_l} \quad ,$$

et le point ($\mathcal{P}$-iii) suit.

Nous allons maintenant montrer par récurrence sur $l \in \{0, \dots, k\}$ l'assertion :

où bien il existe deux entiers r et k' avec $1 \leqslant r \leqslant l$ et $r \leqslant k' \leqslant k$, tels que les assertions (iii) *et* (iv) *du théorème 4.2 soient satisfaites, où bien il existe une suite admissible $j_0, \dots, j_l$ telle que :*

$$Y_{j_0,\dots,j_l} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \operatorname{codim}(Y_{j_0}) < \cdots < \operatorname{codim}(Y_{j_0,\dots,j_l}) \leqslant k \quad . \tag{14}$$

L'assertion (14) étant clairement fausse pour $l = k$, le théorème 4.2 en découlera.

On commence par poser (on n'a pas le choix !) $j_0 = 1$; alors trivialement $Y_{j_0} \neq \emptyset$ et $\mathrm{codim}(Y_{j_0}) \leqslant k$ (ce sont les propriétés ($\mathcal{P}$-i) et ($\mathcal{P}$-ii)). Supposons maintenant que pour un certain l compris entre 0 et $k-1$ l'hypothèse de récurrence soit satisfaite. S'il existe deux entiers r et k' avec $1 \leqslant r \leqslant l$ et $r \leqslant k' \leqslant k$, tels que les assertions (iii) et (iv) du théorème 4.2 sont satisfaites, alors l'hypothèse de récurrence est aussi satisfaite au cran suivant (et ce, pour tout choix de j_{l+1}). Supposons donc qu'il existe une suite admissible $j_0, \ldots, j_l$ qui satisfait (14). S'il existe un entier $j_{l+1} \in \{1, \ldots, s_{l+1}\}$ tel que $\mathrm{codim}(Y_{j_0,\ldots,j_l,j_{l+1}}) > \mathrm{codim}(Y_{j_0,\ldots,j_l})$, l'hypothèse de récurrence est à nouveau satisfaite au cran suivant. Nous pouvons ainsi également supposer que pour tout entier $j \in \{1, \ldots, s_{l+1}\}$, on a :

$$\mathrm{codim}(Y_{j_0,\ldots,j_l,j}) = \mathrm{codim}(Y_{j_0,\ldots,j_l}) \ .$$

Notons k' cette codimension commune ; on a $k' \geqslant l+1$ par l'assertion (14). Choisissons également $r = l+1$. Cela nous fixe ces entiers, qui vérifient bien évidemment les propriétés (i) et (ii) du théorème 4.2. Les entiers $j_1, \ldots, j_l$ sont imposés par l'hypothèse de récurrence, et vérifient par définition le point (iii) du théorème 4.2.

Pour tout entier j compris entre 1 et s_{l+1}, il existe une composante Z_j de codimension k' commune à $Y_{j_0,\ldots,j_l,j}$ et à $Y_{j_0,\ldots,j_l}$. Un choix quelconque d'une telle variété pour chaque indice j nous donne les variétés dont l'existence est assurée dans le point (iv) du théorème 4.2. De plus, par définition de $Y_{j_0,\ldots,j_l,j}$, nous savons que Z_j contient une composante isolée de $H_{1,j_1} \cdots H_{l,j_l} \cdot \Sigma_{l+1} \cdots \Sigma_k \cdot V$. Il ne reste donc plus, pour montrer l'assertion (iv) du théorème 4.2 qu'à démontrer l'inégalité (13).

Remarquons pour ce faire que puisque le groupe $H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot H_{l+1,j}$ stabilise $Y_{j_0,\ldots,j_l,j}$ (par la propriété ($\mathcal{P}$-iii)), on a :

$$H_{0,j_0} \cdots H_{l,j_l} \cdot H_{l+1,j} \cdot Z_j \subseteq Y_{j_0,\ldots,j_l,j} \subseteq Y_{j_0,\ldots,j_l} \ .$$

On en déduit donc :

$$\left(\bigcup_{\zeta_1 \in H_{1,j_1}} \cdots \bigcup_{\zeta_{l-1} \in H_{l,j_l}} \bigcup_{j=1}^{s_{l+1}} \bigcup_{\xi \in H_{l+1,j}} \zeta_1 \ldots \zeta_l . \xi . Z_j \right) \subseteq Y_{j_1,\ldots,j_l} \ .$$

D'où l'inégalité (puisque toutes ces variétés sont des composantes isolées de $Y_{j_1,\ldots,j_l}$) :

$$\deg \left(\bigcup_{\zeta_1 \in H_{1,j_1}} \cdots \bigcup_{\zeta_{l-1} \in H_{l,j_l}} \bigcup_{j=1}^{s_{l+1}} \bigcup_{\xi \in H_{l+1,j}} \zeta_1 \ldots \zeta_l . \xi . Z_j \right) \leqslant \deg(Y_{j_1,\ldots,j_l}) \ .$$

Par ailleurs, la variété $Y_{j_0,\ldots,j_l}$ est incomplètement définie par des polynômes de degré au plus L et donc :

$$\deg(Y_{j_0,\ldots,j_l}) \leqslant L^{k'}$$

(*voir* [Phi1], proposition 3.3). Ceci démontre donc l'inégalité (13) ; la propriété (iv) du théorème 4.2 est donc aussi satisfaite.

Notre hypothèse de récurrence est donc vraie au cran $l+1$. Ceci achève l'induction, et le théorème 4.2 est maintenant entièrement établi.

Si W est une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ on notera Stab(W) le stabilisateur de W, *i. e.* l'ensemble :

$$\mathrm{Stab}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}_m^n,\ \boldsymbol{x}.W = W\} = \bigcap_{y \in W} \boldsymbol{y}^{-1}.W;$$

on notera également Stab$(W)^0$ la composante neutre de Stab(W), *i. e.* le plus grand sous-groupe connexe de Stab(W). Avant de passer à l'utilisation du lemme de zéros, rappelons les résultats bien connus suivants concernant les variétés et leurs stabilisateurs qui nous seront utiles tout au long de la fin de ce paragraphe ainsi que dans le suivant (§. 5) :

Lemme 4.3 *Soit W une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, et soit $l \in \mathbb{Z}$. On a alors les propriétés suivantes :*

(i) $\dim(\mathrm{Stab}(W)) \leqslant \dim(W)$;

(ii) $\deg(\mathrm{Stab}(W)) \leqslant \deg(W)^{\dim(W)+1}$;

(iii) $\deg([l]^{-1}W) = |l|^{\mathrm{codim}(W)} \deg(W)$;

(iv) $\deg([l]W) = \dfrac{|l|^{\dim(W)}}{|\ker[l] \cap \mathrm{Stab}(W)|} \deg(W)$;

(v) *En particulier, si W n'est pas un translaté d'un sous-groupe propre et si l est premier avec* $[\mathrm{Stab}(W) : \mathrm{Stab}(W)^0]$, *on a :* $\deg([l]W) \geqslant l \deg(W)$.

Démonstration : voir [Hin], lemme 6 et [Am-Da1], lemme 2.1.

Pour pouvoir exploiter convenablement le lemme de zéros 4.2, il convient d'avoir des informations sur les variétés Z_j qui interviennent. En effet, si de trop nombreuses variétés intervenant dans la réunion considérée coïncident, il est impossible de tirer une information intéressante. Aussi, une étude combinatoire est indispensable pour éliminer cette possibilité. On trouvera ci-dessous un corollaire qui résume l'information que l'on parvient ainsi à tirer du lemme de zéros 4.2 :

Corollaire 4.4 *Soient :*

(i) *V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de codimension k ;*

(ii) $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ *des ensembles de nombres premiers* $\geqslant 3$ *deux à deux disjoints ;*

(iii) L *un entier* $\geqslant 10$ *;*

Supposons qu'il existe un polynôme homogène non identiquement nul F *appartenant à* $\overline{\mathbb{Q}}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$*, de degré majoré par* L *qui s'annule sur la réunion*

$$\bigcup_{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathcal{P}_1\times\cdots\times\mathcal{P}_k} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_1\in\ker[p_1]} \cdots \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_k\in\ker[p_k]} \boldsymbol{\xi}_1\ldots\boldsymbol{\xi}_k.V \quad .$$

Alors, il existe un entier strictement positif r*, avec* $r \leqslant k$ *ainsi que*

(iii) d'une part un entier $l \in \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_r$*,*

(iv) et d'autre part une sous-variété algébrique Z *propre et* $\overline{\mathbb{Q}}$*-irréductible de* $\mathbb{G}_m^n$*, de codimension* $k' \geqslant r$ *contenant un translaté de* V *par un point de torsion,*

tels que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$|\mathcal{P}_r|\, l^{k'} \deg([l]Z) \leqslant 3n^2 L^{k'} \log L \quad .$$

Démonstration : posons pour i compris entre 1 et k,

$$\Sigma_i = \bigcup_{p\in\mathcal{P}_i} \ker[p] \quad .$$

La fonction F vérifie toutes les hypothèses du théorème 4.2 avec ces données ; ce dernier nous fournit donc deux entiers r et k' avec $r \leqslant k' \leqslant k$, des nombres premiers $p_1, \ldots, p_{r-1}$ avec $p_i \in \mathcal{P}_i$ et des sous-variétés algébriques Z_p ($p \in \mathcal{P}_r$) propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles de $\mathbb{G}_m^n$, toutes de codimension k', tels que :

$$\deg\left(\bigcup_{\boldsymbol{\xi}_1\in\ker[p_1]} \cdots \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_{r-1}\in\ker[p_{r-1}]} \bigcup_{p\in\mathcal{P}_r} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]} \boldsymbol{\xi}_1\ldots\boldsymbol{\xi}_{r-1}.\boldsymbol{\xi}.Z_p\right) \leqslant L^{k'} \quad .$$

De plus, pour tout $p \in \mathcal{P}_r$, la variété Z_p contient un translaté de V par un point de torsion. En tenant compte des définitions des images directes et inverses, cette expression se simplifie en :

$$\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{P}_r} [p_1\ldots p_{r-1}\cdot p]^{-1}[p_1\ldots p_{r-1}\cdot p]Z_p\right) \leqslant L^{k'} \quad . \tag{15}$$

Les entiers r et k' dont l'existence est prétendue dans le corollaire 4.4 sont ainsi fixés. Reste à trouver l'entier l et la variété Z. L'entier l est déjà presque imposé : ce sera $p_1\ldots p_{r-1}p_r$, pour un certain p_r bien choisi dans $\mathcal{P}_r$ et la variété Z sera alors la variété Z_{p_r} correspondante. Nous allons maintenant choisir ce premier p_r, de manière à assurer un minimum de répétitions dans la réunion et par suite à obtenir l'inégalité voulue : fixons dans $\mathcal{P}_r$, un premier p_r tel que la quantité

$$(p_1 \dots p_{r-1} p_r)^{k'} \deg([p_1 \dots p_{r-1} p_r] Z_{p_r})$$

soit minimale, et posons $Z = Z_{p_r}$ (pour fixer les idées, disons le plus petit des tels premiers). Il reste à montrer l'inégalité annoncée.

Pour ce faire, commençons par noter, pour alléger $l_0 = p_1 \dots p_{r-1}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_r$, de telle sorte que $l = l_0 p_r$. Introduisons maintenant la relation suivante sur $\mathcal{P}$:

$$p \sim q \quad \text{si et seulement si} \quad \exists \boldsymbol{\alpha} \in \ker[l_0 p], \quad \exists \boldsymbol{\beta} \in \ker[l_0 q] \quad \text{tels que} \quad \boldsymbol{\alpha}.Z_p = \boldsymbol{\beta}.Z_q \quad .$$

Comme la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$, on a une partition de ce dernier en classes d'équivalence $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$.

Remarquons tout d'abord que si p et q n'appartiennent pas à la même classe d'équivalence pour $\sim$, alors (par définition de $\sim$), $[l_0 p]^{-1}[l_0 p] Z_p$ et $[l_0 q]^{-1}[l_0 q] Z_q$ n'ont pas des composantes communes, par suite, l'inégalité (15) fournie par le lemme de zéros se résume en :

$$\sum_{j=1}^{s} \deg \left(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} [l_0 p]^{-1} [l_0 p] Z_p \right) \leqslant L^{k'} \quad . \tag{16}$$

Il reste à caractériser les dites « répétitions », puis à les estimer pour minorer correctement les « grandes classes » et les « petites classes » (*i. e.* les classes où il y a trop de répétitions). C'est ce que nous faisons maintenant.

Soit $p \in \mathcal{P}$ et Z_p la sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ associée. Remarquons que le degré et le stabilisateur de Z_p ne dépendent que de la classe d'équivalence de p : en effet, toutes les variétés Z_q pour q dans cette classe sont des translatées de Z_p. Pour chaque indice j compris entre 1 et s, nous noterons donc $\mathcal{S}_j$ ce stabilisateur commun.

Fixons maintenant pour chaque j compris entre 1 et s un premier ρ_j de la classe $\mathcal{C}_j$. Par définition de $\mathcal{C}_j$, et puisque l_0 est premier avec tout élément de $\mathcal{P}$, pour tout $p \in \mathcal{C}_j$ il existe un élément $\boldsymbol{\zeta}_p \in \ker[p]$ et un élément $\boldsymbol{\eta}_p \in \ker[l_0 \rho_j]$ tels que :

$$\boldsymbol{\zeta}_p.Z_p = \boldsymbol{\eta}_p.Z_{\rho_j} \quad .$$

Soient $p, q \in \mathcal{C}_j$ avec $p \neq q$ et soient $\boldsymbol{\omega}_p \in \ker[p]$ et $\boldsymbol{\omega}_q \in \ker[q]$. Dire que $[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}_p.Z_p$ et $[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}_q.Z_q$ ont au moins une composante commune revient à dire qu'il existe un élément $\boldsymbol{\eta}_{p,q} \in \ker[l_0]$ tels que :

$$\boldsymbol{\omega}_p.Z_p = \boldsymbol{\omega}_q.\boldsymbol{\eta}_{p,q}.Z_q \quad .$$

On a alors :

$$(\boldsymbol{\omega}_p.\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}).(\boldsymbol{\omega}_q.\boldsymbol{\zeta}_q^{-1})^{-1}.\boldsymbol{\eta}' \in \mathcal{S}_j \quad ,$$

où $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}_p.\boldsymbol{\eta}_q^{-1}.\boldsymbol{\eta}_{p,q}^{-1} \in \ker[l_0\rho_j]$. Remarquons que $\boldsymbol{\omega}_p.\boldsymbol{\zeta}_p^{-1} \in \ker[p]$ et que p et l_0 sont premiers entre eux. De même, $\boldsymbol{\omega}_q.\boldsymbol{\zeta}_q^{-1} \in \ker[q]$ et q et l_0 sont également premiers entre eux. La relation de BACHET-BÉZOUT nous assure donc que si $p \neq \rho_j$, alors $\boldsymbol{\omega}_p.\boldsymbol{\zeta}_p^{-1} \in \mathcal{S}_j$ (puisque p est alors premier à $l_0\rho_j q$), et de même, si $q \neq \rho_j$, alors $\boldsymbol{\omega}_q.\boldsymbol{\zeta}_q^{-1} \in \mathcal{S}_j$.

Nous avons demontré que si $\boldsymbol{\omega}_p \in \ker[p] \setminus \boldsymbol{\zeta}_p.\mathcal{S}_j$ et $\boldsymbol{\omega}_q \in \ker[q] \setminus \boldsymbol{\zeta}_q.\mathcal{S}_j$, alors $[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}_p.Z_p$ et $[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}_p.Z_p$ n'ont pas de composantes communes. On en déduit :

$$\begin{aligned}\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}[l_0p]Z_p\right) &= \deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}\bigcup_{\boldsymbol{\omega}\in\ker[p]}[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}.Z_p\right)\\ &\geqslant \sum_{p\in\mathcal{C}_j}\deg\left(\bigcup_{\boldsymbol{\omega}\in\ker[p]\setminus\boldsymbol{\zeta}_p.\mathcal{S}_j}[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}.Z_p\right) \quad .\end{aligned} \tag{17}$$

Il reste maintenant à minorer le terme de droite en fonction du degré de $[l]Z$. Soit donc $p \in \mathcal{C}_j$ un nombre premier; en tenant compte du lemme 4.3, point (iii)) on obtient :

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\ker[p]\\ \boldsymbol{\eta}\in\ker[l_0]}}\boldsymbol{\eta}.\boldsymbol{\omega}.Z_p\right) = \deg\Big([l_0p]^{-1}[l_0p]Z_p\Big) = (l_0p)^{k'}\deg\left([l_0p]Z_p\right) \quad .$$

Par ailleurs, en tenant compte de la définition du stabilisateur, ainsi que du lemme 4.3, point (iii) à nouveau,

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\zeta}_p.\mathcal{S}_j\\ \boldsymbol{\eta}\in\ker[l_0]}}\boldsymbol{\eta}.\boldsymbol{\omega}.Z_p\right) = \deg\left(\bigcup_{\boldsymbol{\eta}\in\ker[l_0]}\boldsymbol{\eta}.(\boldsymbol{\zeta}_p.Z_p)\right) = l_0^{k'}\deg([l_0]Z_p) \quad .$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\deg\left(\bigcup_{\boldsymbol{\omega}\in\ker[p]\setminus\boldsymbol{\zeta}_p.\mathcal{S}_j}[l_0]^{-1}[l_0]\boldsymbol{\omega}.Z_p\right) &\geqslant \deg\left(\bigcup_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\ker[p]\\ \boldsymbol{\eta}\in\ker[l_0]}}\boldsymbol{\eta}.\boldsymbol{\omega}.Z_p\right) - \deg\left(\bigcup_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\zeta}_p.\mathcal{S}_j\\ \boldsymbol{\eta}\in\ker[l_0]}}\boldsymbol{\eta}.\boldsymbol{\omega}.Z_p\right)\\ &= (l_0p)^{k'}\deg\left([l_0p]Z_p\right) - l_0^{k'}\deg([l_0]Z_p)\\ &= (l_0p)^{k'}\deg\left([l_0p]Z_p\right)\left(1 - \frac{\deg([l_0]Z_p)}{p^{k'}\deg([l_0p]Z_p)}\right) \quad .\end{aligned}$$

Notons $\tilde{\mathcal{C}}_j$ le sous-ensemble des $p \in \mathcal{C}_j$ tels que p divise $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$; on en déduit alors que pour tout $p \notin \tilde{\mathcal{C}}_j$, on a (en tenant compte du lemme 4.3, point (iv)) :

$$\begin{aligned}\deg\left(\bigcup_{\omega\in\ker[p]\setminus\zeta_p.\mathcal{S}_j}[l_0]^{-1}[l_0]\omega.Z_p\right) &\geqslant (l_0p)^{k'}\deg\left([l_0p]Z_p\right)\left(1-\frac{|\mathcal{S}_j\cap\ker[p]|}{p^n}\right)\\ &\geqslant (l_0p)^{k'}\deg\left([l_0p]Z_p\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\\ &\geqslant \frac{2}{3}(l_0p)^{k'}\deg([l_0p]Z_p)\ ,\end{aligned}$$

et donc, grâce à la relation (17) et aux choix de l (rappelons que $l=l_0p_r$) et de Z,

$$\begin{aligned}\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}[l_0p]Z_p\right) &\geqslant \sum_{p\in\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j}\left(\frac{2}{3}(l_0p)^{k'}\deg([l_0p]Z_p)\right)\\ &\geqslant \frac{2}{3}\left|\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j\right|\min_{p\in\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j}\left((l_0p)^{k'}\deg([l_0p]Z_p)\right)\\ &\geqslant \frac{2}{3}\left|\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j\right| l^{k'}\deg([l]Z)\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a aussi la minoration évidente (*confer* à nouveau le lemme 4.3, point (iii)) :

$$\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}[l_0p]Z_p\right)\geqslant\deg([l_0\rho_j]^{-1}[l_0\rho_j]Z_{\rho_j})\geqslant l^{k'}\deg([l]Z)\ .$$

On déduit des deux minorations précédentes que :

$$\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}([l_0p]Z_p)\right)\geqslant\frac{2}{3}\max\left\{\left|\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j\right|;1\right\}l^{k'}\deg([l]Z)\ .$$

Il reste à estimer le nombre de premiers p qui sont susceptibles de diviser le nombre $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$. Remarquons pour ce faire que

$$\left|\tilde{\mathcal{C}}_j\right|\leqslant\frac{\log([\mathcal{S}_j:\mathcal{S}_j^0])}{\log 3}\leqslant\log\deg(\mathcal{S}_j)\leqslant n\log\deg(Z_{\rho_j})\leqslant n^2\log(L)$$

(*voir* le lemme 4.3, point (ii), et se rappeler que pour tout p dans $\mathcal{P}$, on dispose de $\deg(Z_p)\leqslant L^{k'}$ par le lemme de zéros 4.2). En tenant compte de l'inégalité $\max\{x-n^2y\ ;1\}\geqslant\frac{x}{2n^2y}$, valable pour tout couple de nombres réels (x,y) tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$, on en déduit (rappelons que $L \geqslant 10$ par hypothèse, et donc $\log(L) \geqslant 2$) :

$$\max\left\{\left|\mathcal{C}_j \setminus \tilde{\mathcal{C}}_j\right| ; 1\right\} \geqslant \frac{|\mathcal{C}_j|}{2n^2\log(L)} \quad .$$

Ces remarques étant faites, nous pouvons conclure la preuve du corollaire 4.4. Les calculs ci-dessous donnent :

$$\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}([l_0p]Z_p)\right) \geqslant \frac{2}{3}\max\left\{\left|\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j\right|;1\right\} l^{k'}\deg([l]Z) \geqslant \frac{|\mathcal{C}_j| l^{k'}\deg([l]Z)}{3n^2\log(L)} \quad .$$

En tenant compte de la relation (16), on en déduit :

$$\frac{|\mathcal{P}| l^{k'}\deg([l]Z)}{3n^2\log(L)} = \sum_{j=1}^{s}\frac{|\mathcal{C}_j| l^{k'}\deg([l]Z)}{3n^2\log(L)} \leqslant \sum_{j=1}^{s}\deg\left(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}[l_0p]^{-1}([l_0p]Z_p)\right) \leqslant L^{k'} \quad .$$

Cela achève la démonstration du corollaire 4.4.

5 Conclusion

NOUS ALLONS MAINTENANT mettre ensemble les résultats des paragraphes qui précèdent (§. 2 et §. 4), l'extrapolation nous assurant (en supposant le théorème 1.4 faux) l'existence d'un polynôme s'annulant sur des réunions de translatés de V par des sous-groupes finis et le lemme de zéros une fois simplifié (*voir* corollaire 4.4) nous assurant qu'alors un multiple convenablement choisi de V est de petit degré. Ce sera l'objet du sous-paragraphe 5.1 ci-dessous. Dans un deuxième temps, nous exploiterons cette propriété pour construire une suite de multiples de V dont le degré sera exceptionnellement petit (sous-paragraphe 5.2) ; cette dernière construction nous permettra enfin de conclure (au sous-paragraphe 5.3).

5.1 Le choix des paramètres

DANS TOUTE LA SUITE, nous désignerons par C_0 un nombre réel strictement positif, ne dépendant que de n, « suffisamment grand » (en d'autres termes, les inégalités que nous serons amenés à écrire seront vraies asymptotiquement en C_0). On notera également $c_1, c_2, \ldots$, des nombres réels strictement positifs (effectivement calculables ; on pourra se reporter au paragraphe 3 pour un calcul explicite dans un cas particulier) ne dépendant que de n.

La proposition ci-dessous résume les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent:

Proposition 5.1 *Soit V une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k, soit ρ un nombre réel tel que $\rho \in \left[1, (9(3k)^{k+1})^{k-1}\right]$, soit de plus M un entier strictement positif et soit enfin Δ un nombre réel. Supposons que :*

(i) *la variété V vérifie :*

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) < \Delta^{-4\rho(3k)^{k+1}} \quad ;$$

(ii) *le nombre réel Δ vérifie :*

$$\Delta \geqslant \max\{C_0 \log(3\omega(V)), \log M\} \quad .$$

Alors, il existe un entier strictement positif l *tel que*

(iii) l *est premier avec* M *et majoré par :*

$$l \leqslant \Delta^{2\rho(3k)^{k+1}};$$

(iv) *la variété* V *vérifie la propriété suivante :*

$$\omega([l]V) < \Delta^{-\rho}\omega(l;V) \ .$$

Démonstration : nous allons appliquer le corollaire 4.4 à la fonction F construite grâce au corollaire 2.9. Commençons par poser, pour $j = 1, \ldots, k$:

$$N_j \ : \ = \Delta^{\rho(3k)^{k+2-j}} \ ,$$

et introduisons k ensembles de nombres premiers, en posant pour $j = 1, \ldots, k$:

$$\mathcal{P}_j \ : \ = \Big\{ p \text{ premier}, \ \ ; N_j/2 \leqslant p \leqslant N_j, \ \ p \nmid M \Big\} \ .$$

Enfin, posons :

$$L \ : \ = \Big[n\Delta^k N_1 \cdots N_k \cdot \omega\Big(\Delta^k N_1 \cdots N_k; V\Big)\Big] \ .$$

Avec ces données, nous allons *provisoirement supposer qu'il existe un polynôme homogène et non nul* F*, de degré au plus* L *qui s'annule sur :*

$$\bigcup_{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathcal{P}_1\times\cdots\times\mathcal{P}_k} \ \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_1\in\ker[p_1]} \cdots \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_k\in\ker[p_k]} \boldsymbol{\xi}_1 \cdots \boldsymbol{\xi}_k \cdot V \ .$$

Nous pouvons donc appliquer le corollaire 4.4, qui nous assure qu'il existe trois entiers strictement positifs r, k' et l, avec $r \leqslant k' \leqslant k$ et $l \in \mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_r$, et une sous-variété algébrique Z propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, de codimension k', contenant un translaté de V par un point de torsion, telle que :

$$|\mathcal{P}_r| l^{k'} \deg([l]Z) \leqslant 3n^2 L^{k'} \log L \ .$$

Par construction des ensembles $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_r$, l'entier l est premier avec M ; de plus, on a :

$$l \leqslant N_1 \ldots N_k \leqslant \Delta^{\rho\left[(3k)^2+(3k)^3+\cdots+(3k)^k+(3k)^{k+1}\right]} \ ,$$

et comme

$$\sum_{j=2}^{k+1}(3k)^j \leqslant -k + \sum_{j=1}^{k+1}(3k)^j \leqslant 2(3k)^{k+1} - k$$

(on utilise l'inégalité $1 + x + \ldots + x^h \leqslant 2x^h$ valable pour tout $h \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 2$), on en déduit :

$$l \leqslant N_1 \ldots N_k \leqslant \Delta^{\rho(2(3k)^{k+1}-k)} \leqslant \Delta^{2\rho(3k)^{k+1}} \quad . \tag{18}$$

A fortiori, cela assure la propriété (iii) de la proposition 5.1. Nous allons maintenant établir la propriété (iv).

Par définition de L, on a $\log(L) \leqslant \Delta$. De plus, en tenant compte du théorème des nombres premiers, on a pour tout j compris entre 1 et k :

$$|\mathcal{P}_j| \geqslant \frac{c_1 N_j}{\log N_j} - \frac{\log M}{\log 2} \quad .$$

Par ailleurs, le choix des paramètres N_j et l'hypothèse (ii) nous assurent que

$$N_j \geqslant \Delta^9 \geqslant C_0(\log M)^2 \quad ;$$

et donc :

$$|\mathcal{P}_j| \geqslant \frac{c_1 N_j}{\log N_j} - \frac{\log M}{\log 2} \geqslant \frac{c_1 N_j}{2 \log N_j} \geqslant \Delta^{\rho(3k)^{k+2-j}-1} \quad .$$

Enfin, toujours par définition des ensembles $\mathcal{P}_j$ et par construction de l,

$$l \geqslant 2^{-r} N_1 \ldots N_r \quad .$$

Ces inégalités mises ensemble nous donnent la majoration :

$$\deg([l]Z) \leqslant \frac{3n^2 L^{k'} \log(L)}{|\mathcal{P}_r|\, l^{k'}} \leqslant \frac{2^{rk'+2} \cdot n^{2+k'} \cdot (\Delta^k \cdot N_{r+1} \cdots N_k)^{k'} \omega(\Delta^k N_1 \cdots N_k; V)^{k'}}{\Delta^{\rho(3k)^{k+2-r}-2}} \quad .$$

Par ailleurs, le lemme 2.4 et la définition de $\omega(X)$ montrent que :

$$\omega([l]V) \leqslant n\omega(1; [l]V) \leqslant n(\deg([l]Z))^{1/k'} \quad .$$

On en tire, en tenant compte de l'inégalité ci-dessus :

$$\omega([l]V) \leqslant \frac{2^{r+2} \cdot n^4 \cdot \Delta^k N_{r+1} \cdots N_k \; ; \omega(\Delta^k N_1 \cdots N_k; V)}{\Delta^{(\rho(3k)^{k+2-r}-2)/k'}} \quad .$$

Le lemme 2.4 nous assure de plus que (puisque par définition, $l \leqslant \Delta^k N_1 \cdots N_k$)

$$\omega(\Delta^k N_1 \cdots N_k; V) \leqslant \frac{\Delta^k N_1 \cdots N_k}{l} \; ; \omega(l; V) \leqslant 2^r \Delta^k N_{r+1} \cdots N_k \; ; \omega(l; V) \quad ;$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\omega([l]V) &\leqslant \frac{4^{r+1}\cdot n^4\cdot \Delta^{2k}(N_{r+1}\cdots N_k)^2\omega(l;V)}{\Delta^{(\rho(3k)^{k+2-r}-2)/k'}}\\ &= \frac{4^{r+1}\cdot n^4\cdot \Delta^{2k+2\rho((3k)^2+\cdots+(3k)^{k+1-r})}\omega(l;V)}{\Delta^{(\rho(3k)^{k+2-r}-2)/k'}}\ .\end{aligned}$$

Majorons maintenant l'exposant h de Δ :

$$\begin{aligned}h\ &:= 2k+2\rho((3k)^2+\cdots+(3k)^{k+1-r})-(\rho(3k)^{k+2-r}-2)/k'\\ &\leqslant 2k+2\rho((3k)^2+\cdots+(3k)^{k+1-r})-3\rho(3k)^{k+1-r}+2\\ &\leqslant 2\rho((3k)+\cdots+(3k)^{k+1-r})-3\rho(3k)^{k+1-r}\\ &\leqslant 2\rho(k-r)(3k)^{k-r}+2\rho(3k)^{k+1-r}-3\rho(3k)^{k+1-r}\\ &= -\rho(k+2r)(3k)^{k-r}\\ &\leqslant -3\rho\ .\end{aligned}$$

Au total, nous avons donc bien :

$$\omega([l]V)\leqslant 4^{r+1}\cdot n^4\cdot\Delta^{-3\rho}\omega(l;V)<\Delta^{-\rho}\omega(l;V)\ .$$

Le point (iv) et donc la proposition 5.1 suit, *modulo* la preuve de l'existence de F que nous donnons ci-dessous.

Nous allons appliquer le corollaire 2.9, qui nous garantira l'existence de F grâce aux hypothèses faites sur V. Pour ce faire, choisissons tout d'abord $\ell=k$, $u=3$ et :

$$U\ :=n\Delta^{4\rho(3k)^{k+1}}\omega(V)\ ;$$

pour vérifier que nous sommes dans les conditions d'application de ce corollaire, nous devons vérifier ses hypothèses (i) et (ii), à savoir d'une part que :

$$n\Delta^{2k}(N_1\dots N_k)^2\omega(V)\leqslant U\quad \text{et}\quad \Delta\geqslant\frac{8n\log(U+1)}{\log 3}\ ,$$

et d'autre part que :

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)\leqslant\frac{\log(\omega(V)+1)}{\Delta^{2k}(N_1\dots N_k)^2}\ .$$

L'inégalité (18) donne immédiatement :

$$n\Delta^{2k}(N_1\dots N_k)^2\omega(V)\leqslant U\ ;$$

par ailleurs, l'inégalité $\Delta \geqslant \frac{8n\log(U+1)}{\log 3}$ est triviale à partir des définitions de U et Δ (car $\Delta \geqslant C_0\log(3\omega(V))$ par l'hypothèse (ii)).

Passons donc à la majoration de $\omega(V)\hat{\mu}^{\text{ess}}(V)$: l'hypothèse (i) nous assure que (toujours en tenant compte de la relation (18)) :

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) < \Delta^{-4\rho(3k)^{k+1}} \leqslant \Delta^{-2k}(N_1\ldots N_k)^{-2} \leqslant \frac{\log(\omega(V)+1)}{\Delta^{2k}(N_1\ldots N_k)^2} \ .$$

Ceci nous montre bien que nous sommes dans les conditions d'application du corollaire 2.9 qui nous assure donc de l'existence du polynôme F ; la proposition 5.1 est donc entièrement établie.

Remarque : soit V une sous-variété propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui satisfait l'hypothèse du théorème 1.4. Choisissons $\rho = 1$, $M = 1$ et $\delta = C_0(\log(3\omega(V))$ dans la proposition 5.1 et supposons que la condition (i) soit satisfaite. Cette proposition nous montre en particulier qu'il existe un entier $l \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\omega([l]V) < \omega(l;V)$. Soit Z_0 une hypersurface contenant $[l]V$ de degré minimal $= \omega([l]V)$, et soit Z une composante $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $[l]^{-1}Z_0$ passant par V. On a donc :

$$\deg([l]Z) < \omega(l;V) \ .$$

Par hypothèse, Z n'est pas un translaté d'un sous-groupe propre ; *si l'on savait de surcroît* que

$$l \text{ est premier avec } [\mathrm{Stab}(Z) : \mathrm{Stab}(Z)^0] \ ,$$

le lemme 4.3, point (v) nous assurerait alors que :

$$\deg([l]Z) \geqslant l\deg(Z) \ .$$

Par ailleurs, comme Z contient V, on sait que

$$\omega(l;V) \leqslant l\deg(Z).$$

On en déduirait donc aisément une contradiction, ce qui montrerait que l'hypothèse (i) de la proposition 5.1 est fausse, et donc en particulier que :

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) \geqslant (C_0\log(3\omega(V)))^{-4(3k)^{k+1}} \ .$$

Malheureusement, il semble difficile d'assurer *a priori* cette condition sur le stabilisateur de la « variété obstructrice » Z. En effet, l'entier l et la variété Z sont construits simultanément. Cette particularité nous interdit de conclure grâce à une application directe du lemme de zéros, comme cela est courant en géométrie diophantienne. On notera toutefois, que nous avons déjà rencontré le *même* problème d'inversion des quantificateurs dans [Am-Da1]. Bien que la situation de départ (ainsi que la construction analytique et le lemme de zéros) soit différente dans les deux textes, la conclusion est la même : on construit une variété qui poussée par une multiplication par un entier convenable est de degré « pathologiquement » petit. On peut donc conclure à l'aide du même argument de « descente ». C'est pour pouvoir le mettre en œuvre que nous avons introduit la condition *a priori* très technique sur un entier M fixé à l'avance, avec lequel l'entier l que l'on construit doit être premier (condition (ii) de la proposition 5.1). La méthode de descente permettra grâce à cette hypothèse de coprimalité d'assurer de bonnes propriétés pour les stabilisateurs des variétés obstructrices concernées. C'est l'objet du sous-paragraphe qui suit.

5.2 La descente finale

La dernière étape de la preuve consiste à construire une suite de variétés passant par des multiples convenables de V, dont les stabilisateurs sont contrôlés (afin de contourner la difficulté qui nous a empêché de conclure au paragraphe précédent), vérifiant de bonnes conditions d'inclusion et surtout, de degré « contrôlé ». Pour ceci, on commence par fixer les paramètres pour $i = 1, \ldots, k$:

$$\rho_i \ : \ = (9(3k)^{k+1})^{k-i} \in [1, (9(3k)^{k+1})^{k-1}] \ ,$$

puis

$$\varepsilon_i \ : \ = \Delta(V)^{-\rho_i} < 1 \ ,$$

et enfin :

$$P_i \ : \ = \Delta(V)^{2(3k)^{k+1}\rho_i} \ ,$$

où l'on a noté pour alléger :

$$\Delta(V) \ : \ = C_0^2 \log(3\omega(V)) \ .$$

En pratique, la méthode revient à faire le raisonnement du paragraphe précédent k fois, avec des paramètres très « espacés ». D'où les différents choix de ρ_i. À chacune de ces étapes, la proposition 5.1 nous fournira un multiple par un entier l de la variété étudiée dont l'indice d'obstruction aura « chuté » d'au moins ε_i (par le point (iv)), et l sera au plus égal à P_i (qui vaut donc essentiellement le produit des paramètres N_j du paragraphe précédent). C'est ce qui motive l'introduction de ces deux nouveaux paramètres.

Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$; l'inégalité (*confer* la preuve de la relation (18))

$$\rho_j + \cdots + \rho_k \leqslant 2\rho_j \tag{19}$$

sera utilisée plusieurs fois dans la suite.

Les suites de variétés que l'on peut construire à l'aide d'une application répétée de la proposition 5.1 vérifient en particulier les propriétés énoncées ci-dessous et que l'on peut formaliser en introduisant un ensemble $\mathcal{W}$ défini de la façon suivante :

Définition 5.2 *On note* $\mathcal{W}$ *l'ensemble des triplets* $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W})$*, où* $s \in [0, k]$ *est un entier,* $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ *est un* s*-uplet d'entiers*¶¶ *avec* $0 \leqslant l_i \leqslant P_i$*, et* $\boldsymbol{W} = (W_0, \ldots, W_s)$ *est un* $(s+1)$*-uplet de sous-variétés propres et géométriquement irréductibles de* $\mathbb{G}_m^n$*, tel que* $V \subseteq W_0$ *et tel que :*

(i) l_i *est premier avec* $[\mathrm{Stab}(W_{i-1}) : \mathrm{Stab}(W_{i-1})^0]$ *et* $[l_i]W_{i-1} \subseteq W_i$ *pour* $i = 1, \ldots, s$ *;*

(ii) *Pour* $i = 0, \ldots, s$*, on a :*

$$\deg(W_i) \leqslant \Big((P_{i+1} \ldots P_k)^2 \omega([l_1 \ldots l_i]V)\Big)^{\mathrm{codim}(W_i)} \quad ;$$

(iii) *Pour* $i = 1, \ldots, s$*, on a :*

$$\omega([l_1 \ldots l_i]V) \leqslant \varepsilon_i \omega(l_i; [l_1 \ldots l_{i-1}]V) \ .$$

Cette définition est motivée par les besoins suivants : tout d'abord, le point (iii) permet de récupérer l'information fournie par les étapes précédentes (*confer* la proposition 5.1) ; la condition (ii) pour sa part va assurer que les variétés que l'on va construire sont de « petit » degré. Enfin, le point (i) permet d'assurer que ces variétés sont emboîtées (à multiplication par un entier près) et surtout (puisque l_i est premier avec $[\mathrm{Stab}(W_{i-1}) : \mathrm{Stab}(W_{i-1})^0]$) que leurs degrés se comportent bien par multiplication.

L'inégalité $\omega(T; V) \leqslant T\omega(V)$ du lemme 2.4 permet de revenir aux indices d'obstructions absolus, et la condition (iii) entraîne en particulier (puisque $\varepsilon_i < 1$) :

Scolie 5.3 *Si* $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W}) \in \mathcal{W}$*, et si* $s \neq 0$*, on a :*

$$\omega([l_1 \ldots l_i]V) \leqslant l_i \omega([l_1 \ldots l_{i-1}]V) \ ,$$

pour $i = 1, \ldots, s$.

Le but de ce paragraphe est d'assurer qu'il existe au moins un élément $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W})$ de $\mathcal{W}$, pour lequel on a $\dim(W_{i-1}) = \dim(W_i)$ pour au moins un indice i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Pour ce faire, nous allons définir**** :

$$\mathcal{W}_0 = \Big\{(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W}) \in \mathcal{W}, \ ; \dim(W_0) < \dim(W_1) < \cdots < \dim(W_s)\Big\} \ .$$

¶¶ Pour $s = 0$, $\boldsymbol{l}$ est l'ensemble vide, et les conditions (i) et (iii) ci-dessous sont vides.

∗∗∗∗ Pour $s = 0$, la condition ci-dessous est également vide.

Nous nous proposons de montrer que si le théorème 1.4 est faux, alors $\mathcal{W}_0 \neq \mathcal{W}$. Plus précisément, on montrera la proposition suivante :

Proposition 5.4 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible, qui n'est contenue dans aucun translaté de sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$, et vérifiant :*

$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) < \Delta(V)^{-\left(9(3k)^{(k+1)}\right)^k} .$$

Alors, $\mathcal{W}_0 \neq \mathcal{W}$.

Avant de passer à la preuve de cette proposition, commençons par mettre une relation d'ordre total sur les suites finies de longueur $\leqslant k+1$ d'entiers positifs ou nuls et $< n$. Soient $(v) = (v_i)_{0 \leqslant i \leqslant s}$, et $(v') = (v'_j)_{0 \leqslant j \leqslant s'}$ deux telles suites.

Définition 5.5 *On dira que $(v) \preccurlyeq (v')$ si :*

$$(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant \min\{s,s'\}} < (v'_i)_{0 \leqslant i \leqslant \min\{s,s'\}}$$

pour l'ordre lexicographique, ou, si $(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant \min\{s,s'\}} = (v'_i)_{0 \leqslant i \leqslant \min\{s,s'\}}$ et si la longueur s de la suite (v) est $\geqslant$ à la longueur s' de la suite (v').

La démonstration de la proposition 5.4 va se faire par récurrence sur la suite des dimensions de certaines variétés, en utilisant la relation d'ordre définie en 5.5. L'étape inductive est résumée par le lemme suivant :

Lemme 5.6 *Soient $s \geqslant 0$ un entier, $l_1, \ldots, l_s$ des entiers $\geqslant 1$ et $W_0, \ldots, W_s$ des sous-variétés propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles de $\mathbb{G}_m^n$, telles que $V \subseteq W_0$ et $[l_i]W_{i-1} \subseteq W_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Alors, pour tout entier $l_{s+1} \geqslant 1$ il existe un entier s', $0 \leqslant s' \leqslant s+1$ et une sous-variété propre $Z_{s'}$ et géométriquement irréductible, de degré :*

$$\deg(Z_{s'}) \leqslant l_{s'+1} \ldots l_{s+1} \omega([l_1 \ldots l_{s+1}]V) \deg(W_{s'}) ,$$

telle que $[l_{s'}]W_{s'-1} \subseteq Z_{s'}$ et $\mathrm{codim}(Z_{s'}) = \mathrm{codim}(W_{s'})+1$ (avec les conventions suivantes : $\mathrm{codim}(W_{s+1}) = 0$, $\deg(W_{s+1}) = 1$, $W_{-1} = V$ et $l_0 = 1$). De plus, on a :

$$(\dim(W_0), \ldots, \dim(W_{s'-1}), \dim(Z_{s'})) \prec (\dim(W_0), \ldots, \dim(W_s)) .$$

Démonstration : soit Z_{s+1} une hypersurface contenant $[l_1 \ldots l_{s+1}]V$ de degré minimal égal à $\omega([l_1 \ldots l_{s+1}]V)$. Nous allons construire une suite de variétés $Z_0, \ldots, Z_s$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $Z_i \subseteq W_i$, et $\mathrm{codim}(W_i) \leqslant \mathrm{codim}(Z_i) \leqslant \mathrm{codim}(W_i) + 1$ pour tout $i = 0, \ldots, s$.

(ii) $[l_{i+1} \ldots l_{s+1}]Z_i \subseteq Z_{s+1}$, pour $i = 0, \ldots, s$.

(iii) $[l_i]Z_{i-1} \subseteq Z_i$, pour $i = 1, \dots, s+1$.

(iv) $\deg(Z_i) \leqslant l_{i+1} \dots l_{s+1}\omega([l_1 \dots l_{s+1}]V)\deg(W_i)$, pour $i = 0, \dots, s+1$.

Commençons par construire Z_0. Si $[l_1 \dots l_{s+1}]W_0 \subseteq Z_{s+1}$, on pose $Z_0 = W_0$. Sinon, on coupe la variété W_0 par $[l_1 \dots l_{s+1}]^{-1}Z_{s+1}$, et on choisit pour Z_0 une des composantes $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles de dimension maximale passant par V de cette variété. On en déduit, par le théorème de Bézout :

$$\deg(Z_0) \leqslant \deg(W_0)\deg([l_1 \dots l_{s+1}]^{-1}Z_{s+1}) \leqslant l_1 \dots l_{s+1}\omega([l_1 \dots l_{s+1}]V)\deg(W_0) \ .$$

Pour $i = 0$, les conditions (i) à (iv) sont donc vérifiées. Soit maintenant i un entier, $0 \leqslant i \leqslant s-1$ et supposons $Z_0, \dots, Z_i$ construites. Nous allons construire Z_{i+1}. Comme précédemment, si :

$$[l_{i+2} \dots l_{s+1}]W_{i+1} \subseteq Z_{s+1} \ ,$$

on pose $Z_{i+1} = W_{i+1}$. Sinon, on choisit pour Z_{i+1} une composante $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de dimension maximale de $[l_{i+2} \dots l_{s+1}]^{-1}Z_{s+1} \cap W_{i+1}$ parmi les composantes qui contiennent $[l_{i+1}]Z_i$. Il en existe puisque $[l_{i+1}]W_i \subseteq W_{i+1}$ (par hypothèse), $Z_i \subseteq W_i$ (par hypothèse de récurrence (i)), et puisque :

$$[l_{i+1} \dots l_{s+1}]Z_i \subseteq Z_{s+1}$$

(par hypothèse de récurrence (ii)). Comme auparavant, on obtient par le théorème de Bézout :

$$\deg(Z_{i+1}) \leqslant l_{i+2} \dots l_{s+1}\omega([l_1 \dots l_{s+1}]V)\deg(W_{i+1}) \ .$$

La variété Z_{i+1} vérifie donc la condition (iv) ; les conditions (i) à (iii) sont pour leur part vérifiées par construction. Les variétés $Z_0, \dots, Z_s, Z_{s+1}$ sont donc construites, ce qui achève la récurrence. Pour conclure la preuve du lemme 5.6, il faut encore choisir s' et montrer que la nouvelle suite de variétés est « strictement inférieure » à celle de départ.

La suite des variétés Z_i que nous venons de construire correspond à l'un des deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} W_0 & W_1 & \dots\ W_{s'-1} & W_{s'} & \dots & W_s & \\ \| & \| & \vdots\ \ \| & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\ \multicolumn{4}{|c|}{Z_0 \quad Z_1 \quad \dots\ Z_{s'-1} \quad Z_{s'}} & \dots & Z_s & Z_{s+1}. \end{array}$$

On peut également obtenir :

$$\begin{array}{cccccc} W_0 & W_1 & \dots & \dots & W_s & \\ \| & \| & \vdots & \vdots & \| & \\ \boxed{Z_0} & \boxed{Z_1} & \dots & \dots & Z_s & Z_{s+1}. \end{array}$$

On définit alors s' comme le plus petit entier i pour lequel $Z_i \subsetneq W_i$ si un tel entier existe (ce qui correspond au premier diagramme), et $s' = s+1$ si un tel entier n'existe pas (c'est le deuxième diagramme). Par construction des Z_i, la variété $Z_{s'}$ satisfait toutes les propriétés requises : en particulier la propriété de décroissance de la suite des dimensions est assurée par le choix de s' (dans le premier diagramme, la nouvelle suite est strictement plus petite pour l'ordre lexicographique et dans le deuxième, les suites tronquées sont égales, mais la nouvelle suite est strictement plus longue). Le lemme 5.6 est donc entièrement établi.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 5.4.

Démonstration de la proposition 5.4 : remarquons tout d'abord que $\mathcal{W}_0 \neq \emptyset$. En effet, soit W_0 une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V et telle que $\deg(W_0) = \omega(V)$: le triplet $(0, \emptyset, (W_0))$ appartient alors à $\mathcal{W}_0$. De plus, l'ensemble des suites finies d'entiers compris entre 0 et $n-1$, de longueur au plus k, strictement croissantes (au sens usuel) est fini ; on déduit de ces deux faits††† qu'il existe un élément $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W})$ de $\mathcal{W}_0$ tel que

$$(\dim W_i)_{0 \leqslant i \leqslant s} \preccurlyeq (\dim W_i')_{0 \leqslant i \leqslant s'}.$$

pour tout $(s', \boldsymbol{l}', \boldsymbol{W}') \in \mathcal{W}_0$.

On se propose d'utiliser la proposition 5.1 avec V remplacé par $V' = [l_1 \dots l_s]V$,

$$\rho = \rho_{s+1}, \quad M = [\mathrm{Stab}(W_s) : \mathrm{Stab}(W_s)^0] \quad \text{et} \quad \Delta = \Delta(V) \ .$$

On a

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V') \leqslant l_1 \dots l_s \hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \leqslant P_1 \dots P_s \hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)$$

et

$$\omega(V') \leqslant l_1 \dots l_s \omega(V) \leqslant P_1 \dots P_s \omega(V)$$

(*confer* scolie 5.3). Ces inégalités et l'hypothèse de la proposition (5.4) sur l'invariant $\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)$ montrent que :

$$\begin{aligned} \omega(V')\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V') &\leqslant \omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)(P_1 \dots P_s)^2 \\ &\leqslant \Delta(V)^{-\left(9(3k)^{(k+1)}\right)^k} \times \Delta(V)^{4(\rho_1 + \cdots + \rho_s)(3k)^{k+1}} \\ &= \Delta(V)^{h - 4\rho_{s+1}(3k)^{k+1}} \ , \end{aligned}$$

où, en utilisant l'inégalité (19),

$$h \ : \ = -(9(3k)^{k+1})^k + 4(3k)^{k+1}(\rho_1 + \cdots + \rho_{s+1}) \leqslant 8(3k)^{k+1}\rho_1 - (9(3k)^{k+1})^k < 0 \ .$$

††† Rappelons que l'ordre $\preccurlyeq$ est total.

L'hypothèse (i) de la proposition 5.1 est donc satisfaite. Vérifions maintenant l'hypothèse (ii) de cette proposition. La scolie 5.3 donne :

$$C_0 \log(3\omega(V')) \leqslant C_0(\log P_1 + \cdots + \log P_s + \log(3\omega(V))) \leqslant \Delta(V) \ .$$

Par ailleurs, en utilisant le point (ii) du lemme 4.3, le point (ii) (avec $i = s$) de la définition 5.2 et à nouveau la scolie 5.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\log M &\leqslant (\dim(W_s)+1)\log\deg(W_s)\\ &\leqslant (\dim(W_s)+1)\operatorname{codim}(W_s)\Big(2\log P_{s+1}+\cdots+2\log P_k+\log(3\omega([l_1\dots l_s]V))\Big)\\ &\leqslant n^2\Big(2\log P_1+\cdots+2\log P_k+\log(3\omega(V))\Big)\\ &\leqslant \Delta(V) \ .\end{aligned}$$

L'hypothèse (ii) de la proposition 5.1 est donc aussi satisfaite. On déduit alors de cette dernière qu'il existe un entier l_{s+1} premier avec $[\mathrm{Stab}(W_s) : \mathrm{Stab}(W_s)^0]$, tel que

$$l_{s+1} \leqslant \Delta(V)^{2\rho_{s+1}(3k)^{k+1}} = P_{s+1} \ ;$$

et

$$\frac{\omega([l_1\dots l_{s+1}]V)}{\omega(l_{s+1};[l_1\dots l_s]V)} \leqslant \Delta(V)^{-\rho_{s+1}} = \varepsilon_{s+1} \ .$$

Le triplet $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W}) \in \mathcal{W}_0$, et satisfait donc en particulier toutes les hypothèses du lemme 5.6. Appliquons ce dernier avec l'entier l_{s+1} donné par la proposition 5.1 : on en déduit l'existence d'un entier s', $0 \leqslant s' \leqslant s+1 \leqslant k$, et d'une certaine variété $Z_{s'}$ ayant les propriétés décrites dans ce lemme.

Montrons alors que l'on a :

$$(s', (l_1, \dots, l_{s'}), (W_0, \dots, W_{s'-1}, Z_{s'})) \in \mathcal{W} \ .$$

Pour ce faire, il suffit de vérifier les conditions de (i) à (iii) de la définition 5.2 avec $i = s'$. La première partie de la condition (i) est assurée par le choix de l_{s+1} si $s' = s+1$ et par l'hypothèse $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W}) \in \mathcal{W}$ sinon ; la deuxième partie est assurée par construction de $Z_{s'}$ (et toujours par hypothèse si $s' < s+1$). Un argument similaire s'applique pour la condition (iii). Montrons donc (ii). Les relations sur la codimension et sur le degré de $Z_{s'}$ (lemme 5.6), la majoration du degré de $W_{s'}$ (définition 5.2) et la scolie 5.3, nous assurent que :

$$\begin{aligned}\deg(Z_{s'}) &\leqslant l_{s'+1}\dots l_{s+1}\omega([l_1\dots l_{s+1}]V)\deg(W_{s'})\\ &\leqslant (l_{s'+1}\dots l_{s+1})^2\omega([l_1\dots l_{s'}]V)\deg(W_{s'})\\ &\leqslant (P_{s'+1}\dots P_k)^2\omega([l_1\dots l_{s'}]V)((P_{s'+1}\dots P_k)^2\omega([l_1\dots l_{s'}]V))^{\operatorname{codim}(W_{s'})}\\ &= ((P_{s'+1}\dots P_k)^2\omega([l_1\dots l_{s'}]V))^{\operatorname{codim}(Z_{s'})} \ .\end{aligned}$$

On a donc montré que la variété $Z_{s'}$ vérifie la propriété (ii) de la définition 5.2. Ce qui montre bien que $(s', (l_1, \dots, l_{s'}), (W_0, \dots, W_{s'-1}, Z_{s'}))$ est un élément de $\mathcal{W}$.

D'autre part, le lemme 5.6 nous assure que le triplet :

$$(s', (l_1, \dots, l_{s'}), (W_0, \dots, W_{s'-1}, Z_{s'})) \in \mathcal{W}$$

est tel que la suite de dimensions :

$$(\dim(W_0), \dots, \dim(W_{s'-1}), \dim(Z_{s'}))$$

est strictement inférieure à

$$(\dim(W_0), \dots, \dim(W_s))$$

pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$. Or, par définition, $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W})$ « est minimal » dans $\mathcal{W}_0$; on en déduit que :

$$(s', (l_1, \dots, l_{s'}), (W_0, \dots, W_{s'-1}, Z_{s'})) \notin \mathcal{W}_0 \ ,$$

ce qui établit bien la proposition 5.4. ⊛

5.3 Preuve du théorème principal

SOIT V UNE SOUS-VARIÉTÉ PROPRE et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui satisfait l'hypothèse du théorème 1.4. Supposons que la conclusion de ce théorème soit fausse ; l'hypothèse de la proposition 5.4 est donc verifiée. Appliquons donc cette dernière : il existe donc un élément $(s, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{W})$ de $\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_0$. En particulier, on est donc assuré de l'existence de deux sous-variétés propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles W_{i-1} et W_i de $\mathbb{G}_m^n$, de la même dimension, et de l'existence de certains entiers $l_1, \dots, l_i \in \mathbb{N}^*$ qui vérifient :

$$\dim(W_{i-1}) = \dim(W_i), \qquad [l_i]W_{i-1} \subseteq W_i, \qquad [l_1 \dots l_{i-1}]V \subseteq W_i \ ;$$

de plus, l_i est premier avec $\Big[\mathrm{Stab}(W_{i-1}) : \mathrm{Stab}(W_{i-1})^0\Big]$. Par hypothèse W_i n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$ (car W_i contient $[l_1 \dots l_{i-1}]V$ qui n'est contenu dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$ puisque V vérifie cette propriété par hypothèse). Le lemme 4.3, point (v) nous assure alors que :

$$l_i \deg(W_{i-1}) \leqslant \deg(W_i) \ .$$

Comme W_{i-1} contient $[l_1 \dots l_{i-1}]V$, on en déduit :

$$\omega(l_i; [l_1 \dots l_{i-1}]V) \leqslant (l_i \deg(W_{i-1}))^{1/\operatorname{codim}(W_{i-1})} \leqslant \deg(W_i)^{1/\operatorname{codim}(W_i)} \ . \tag{20}$$

En appliquant les relations (ii) et (iii) de la définition 5.2, on en tire :

$$\omega([l_1 \dots l_i]V) \leqslant \varepsilon_i(\deg(W_i))^{1/\operatorname{codim}(W_i)} \leqslant \varepsilon_i(P_{i+1} \dots P_k)^2 \omega([l_1 \dots l_i]V) \ .$$

Par ailleurs, $\varepsilon_i(P_{i+1} \dots P_k)^2 = \Delta(V)^u$, où (*confer* les choix des P_i et des ε_i et l'inégalité (19)) :

$$u = -\rho_i + 4(3k)^{k+1}(\rho_{i+1} + \cdots + \rho_k) \leqslant -\rho_i + 8(3k)^{k+1}\rho_{i+1} < 0 \ .$$

C'est une contradiction. On en déduit donc que notre hypothèse est également fausse, à savoir qu'en fait, on a bien :

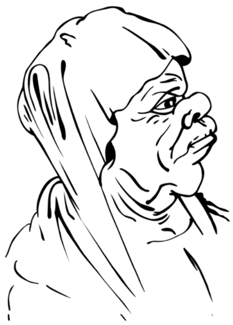
$$\omega(V)\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V) \geqslant (C_0^2 \log(3\omega(V)))^{-\left(9(3k)^{(k+1)}\right)^k} \ .$$

Le théorème 1.4 est donc entièrement établi.

Remarque : la fin de l'argument permet de voir très clairement pourquoi l'introduction des indices d'obstruction avec poids est nécessaire dans cette preuve, alors que dans [Am-Da1] par exemple, son introduction n'est pas indispensable (dans cette dernière référence toutefois, cet invariant aurait peut-être pu permettre de raffiner les minorations). En effet, tout le point de l'argument de descente consiste à utiliser une inégalité de Bézout raffinée car on dispose d'une information supplémentaire sur les stabilisateurs. Cette inégalité raffinée permet de montrer qu'en fait $\deg(W_i)$ est grand par rapport à $\deg(W_{i-1})$ (avec un facteur l_i en notre faveur alors que sans information sur les stabilisateurs, ce facteur jouerait contre nous). Par ailleurs, la proposition 5.1 nous fournit une majoration du degré de W_i non pas en fonction de l'indice d'obstruction de $[l_1 \dots l_{i-1}]V$ (c'est-à-dire essentiellement en fonction du degré de W_{i-1}), mais en fonction de l'indice d'obstruction de $[l_1 \dots l_{i-1}]V$ avec poids l_i. Comme les inégalités de comparaisons entre les deux types d'indice sont faibles, on reperdrait justement le gain dû à la descente (un facteur l_i) et on ne pourrait toujours pas conclure ! Plus précisément, si l'on majore (à l'aide du lemme 2.4) l'indice avec poids $\omega(l_i; [l_1 \dots l_{i-1}]V)$ par $l_i\omega([l_1 \dots l_{i-1}]V)$ l'inégalité (20) devient :

$$l_i\omega([l_1 \dots l_{i-1}]V) \leqslant l_i(\deg(W_{i-1}))^{1/\operatorname{codim}(W_{i-1})}$$

et l'on n'arrive pas à une contradiction si $\operatorname{codim}(W_{i-1}) > 1$.



Université de Caen & Université Pierre et Marie Curie

6 Preuve des corollaires

Nous allons terminer ce texte par une preuve des corollaires 1.6, et 1.7 cités dans l'introduction. Nous allons toutefois commencer par préciser le lien entre la conjecture 1.2 et la conjecture proposée dans [Da–Ph2] (conjecture 1.3). Tous ces énoncés s'obtiennent soit en utilisant des arguments simples de géométrie (projection, fibration), soit en les combinant avec une application directe du théorème de Bézout arithmétique.

Dans tout ce paragraphe, et contrairement au reste du texte, nous fixerons la compactification $\iota : \mathbb{G}_m^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \overset{\text{Segre}}{\longrightarrow} \mathbb{P}^{2^n-1}$, afin de pouvoir utiliser librement les résultats de [Da–Ph2]. On peut encore, quitte à changer la constante numérique, appliquer le théorème 1.4 puisque l'on dispose des inégalités :

$$\begin{cases} \hat{h}(V) & \leqslant \hat{h}_\iota(V) & \leqslant n^{\dim(V)+1}\hat{h}(V)\ , \\ \deg(V) & \leqslant \deg_\iota(V) & \leqslant n^{\dim(V)}\deg(V)\ , \\ \hat{\mu}^{\text{ess}}(V) & \leqslant \hat{\mu}_\iota^{\text{ess}}(V) & \leqslant n\hat{\mu}^{\text{ess}}(V) \end{cases}$$

(*confer* [Da–Ph2], proposition 2.9 pour une preuve du premier encadrement, le deuxième s'obtient de façon similaire et le troisième est élémentaire à partir de *loc. cit.*, proposition 2.9).

Proposition 6.1 *La conjecture 1.2 entraîne la conjecture 1.3.*

Démonstration : supposons la conjecture 1.2 vraie, et montrons le point (ii) de la conjecture 1.3. Soit donc V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et géométriquement irréductible. Notons $\boldsymbol{\eta}\cdot B$ le plus petit translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V, et soit s la dimension de B. Il existe alors une projection linéaire π sur s facteurs de $\mathbb{G}_m^n$ telle que $\pi(\boldsymbol{\eta}\cdot B)$ soit égale à $\mathbb{G}_m^s$. De plus, $\pi(V)$ ne peut être contenu dans un translaté $\boldsymbol{\mu}\cdot C$ d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^s$. Si tel était le cas, la variété V serait contenue dans $\pi^{-1}(\boldsymbol{\mu}\cdot C)\cap\boldsymbol{\eta}\cdot B$ et donc dans un translaté d'un sous-tore strictement contenu dans $\boldsymbol{\eta}\cdot B$ (pour plus de détails sur ces arguments de projection, *confer* [Da–Ph2], paragraphe 2.3). On peut donc faire $B = \mathbb{G}_m^s$ dans la conjecture 1.2. Comme le minimum essentiel et le degré sont décroissants *via* une telle projection linéaire, on a par la conjecture 1.2 et la relation (2) :

$$\hat{\mu}_\iota^{\text{ess}}(V) \geqslant \hat{\mu}_\iota^{\text{ess}}(\pi(V)) \geqslant \frac{c(n)}{\omega_\iota(\pi(V))} \geqslant \frac{c'(n)}{\deg_\iota(\pi(V))^{1/\operatorname{codim}(\pi(V))}} \geqslant \frac{c'(n)}{\deg_\iota(V)^{1/s-d}}\ .$$

Ce qui montre bien le point (ii) de la conjecture 1.3. Maintenant, si V vérifie les hypothèses de la conjecture 1.3, le théorème 1.6 de [Da–Ph2] nous assure‖ que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe plane W_ε dans $\mathbb{G}_m^2$ qui est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, géométriquement irréductible qui n'est pas un translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^2$ et telle que $\deg_\iota(W_\varepsilon) \leqslant \deg_\iota(V)$ et $\hat{h}_\iota(W_\varepsilon) \leqslant \hat{h}_\iota(V) + \varepsilon$. On en déduit, en tenant compte du point (ii) de la conjecture 1.3 que :

$$\varepsilon + \hat{h}_\iota(V) \geqslant \hat{h}_\iota(W_\varepsilon) \geqslant c'(2) \ .$$

On a donc également obtenu le point (i) de la conjecture 1.3 en faisant tendre ε vers 0. La proposition 6.1 est donc entièrement établie.

Le corollaire 1.6 suit en reprenant le même raisonnement, et en utilisant la minoration obtenue au théorème 1.4 au lieu de celle, conjecturale proposée en 1.2.

Passons maintenant au corollaire 1.7 (qu'il suffit une fois de plus de démontrer pour le plongement ι) ; il s'agit encore une fois du même type de raisonnement : soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ irréductible, qui n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. L'argument de projection linéaire exposé dans la preuve de la proposition 6.1 nous assure que si s est la dimension du plus petit translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V, il existe une sous-variété W de $\mathbb{G}_m^s$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible, qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-groupe propre de $\mathbb{G}_m^s$ et telle que $\hat{h}_\iota(W) \leqslant \hat{h}_\iota(V)$ et $\deg_\iota(W) \leqslant \deg_\iota(V)$. Puisque $s \geqslant d+2$ par hypothèse, quitte à poursuivre l'argument de projection linéaire, on peut remplacer W par une sous-variété X de dimension d de $\mathbb{G}_m^{d+2}$ qui vérifie encore les hypothèses du corollaire 1.7, et qui est de degré $\deg_\iota(X) \leqslant \deg_\iota(W)$ et de hauteur normalisée $\hat{h}_\iota(X) \leqslant \hat{h}_\iota(W)$. Cette première réduction effectuée, montrons que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une sous-variété Y de $\mathbb{G}_m^{d+1}$, de dimension $d-1$ qui vérifie encore les hypothèses du corollaire 1.7, et dont le degré et la hauteur normalisée sont bornés par $\deg_\iota(X)$ et $\hat{h}_\iota(X) + \varepsilon$ respectivement. Par récurrence, on en déduira l'existence d'une courbe Z dans $\mathbb{G}_m^3$ qui est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et géométriquement irréductible, qui n'est contenue dans aucun translaté de sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^3$ et qui vérifie *in fine* $\hat{h}_\iota(Z) \leqslant \hat{h}_\iota(V) + \varepsilon$ et $\deg_\iota(Z) \leqslant \deg_\iota(V)$.

Pour ce faire, on utilise l'argument de fibration de [Da–Ph2], proposition 3.1 ; quitte à permuter les facteurs de $\mathbb{P}_1^{d+2}$, on peut supposer que X se projette surjectivement sur le premier facteur et que la composante neutre du stabilisateur de X n'est pas contenue dans $\{1\} \times \mathbb{G}_m^{d+1}$. On en déduit alors qu'au plus un nombre fini de fibres $X_x \ : \ = X \cap \pi^{-1}(x)$ ont un stabilisateur de dimension $d-1$. On fixe

‖ La preuve de *loc. cit.* donne seulement cette estimation. Elle pourrait être remplacée par les arguments de [Phi3]-III pour démontrer le théorème 1.6 de [Da–Ph2] tel qu'il est énoncé, mais cette version plus faible est suffisante pour nos besoins.

ensuite un entier m assez grand, et l'on déduit du théorème de Bézout arithmétique qu'il existe un point de m-torsion ξ de $\mathbb{G}_m$ tel que X_ξ possède un stabilisateur de dimension au plus $d-2$ et tel que $\deg_\iota(X_\xi) \leqslant \deg_\iota(X)$ et $\hat{h}_\iota(X_\xi) \leqslant \hat{h}_\iota(X) + \varepsilon$. Ceci nous montre notre assertion.

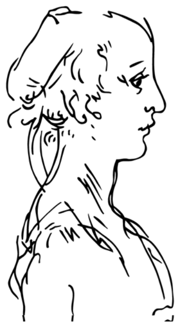
Appliquons maintenant le théorème 1.4 à la courbe Z de $\mathbb{G}_m^3$ ainsi construite. On en déduit :

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant \hat{h}_\iota(Z) - \varepsilon \geqslant \frac{c(3)\deg_\iota(Z)}{\omega_\iota(Z)\log(3\omega_\iota(Z))^{\lambda(2)}} - \varepsilon \ .$$

Maintenant, la relation (2) nous assure que $\omega_\iota(Z) \leqslant 3\sqrt{\deg_\iota(Z)}$. On en tire :

$$\hat{h}_\iota(V) \geqslant \frac{c(3)\sqrt{\deg_\iota(Z)}}{3\log(3\omega_\iota(Z))^{\lambda(2)}} - \varepsilon \geqslant c'(3) > 0$$

sitôt que ε est choisi assez petit. Le corollaire 1.7 est donc entièrement établi.



Université de Caen & Université Pierre et Marie Curie

Références

[Am-Da1] F. Amoroso et S. David. « *Le problème de Lehmer en dimension supérieure* ». J. reine angew. Math. t. **513**, pages 145–179, *1999*.

[Am-Da2] F. Amoroso et S. David. « *Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces* ». Acta Arith. t. **92** n°4, pages 340–366, *2000*.

[Am-Da3] F. Amoroso et S. David. « *Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes* ». Ramanujan Math. Journal. À paraître, *2001*.

[Am-Da4] F. Amoroso et S. David. « *Un théorème de zéros dans les groupes algébriques commutatifs* ». Manuscrit en préparation, *2001*.

[Bo–Va] E. Bombieri et J. D. Vaaler. « Polynomials with low height and prescribed vanishing ». *In Analytic Number Theory and Diophantine Problems, Oklahoma 1984*, A. C. Adolphson, J. B. Conrey, A. Ghosh et R. I. Yager éditeurs. Progress in Math., t. **70**, pages 53–73, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, *1987*.

[Bo–Za] E. bombieri et U. Zannier. « *Algebraic points on subvarieties of* $\mathbb{G}_m^n$ ». Internat. Math. Res. notices, t. **7**, pages 333–347, *1995*.

[Cha] M. Chardin. « *Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique* ». Bulletin de la Société Mathématique de France, t. **117**, pages 305–318, *1988*. *Voir* aussi « *Contributions à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination* », Thèse de doctorat, Université de Paris VI, *1990*.

[Ch–Ph] M. Chardin et P. Philippon. « *Régularité et interpolation* ». J. Algebr. Geom., t. **8**, N°3, pages 471–481, *1999*; « *erratum* », *ibidem*, t. **11**, pages 599–600, *2002*.

[Da-Hi] S. David et M. Hindry. « *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M.* ». J. reine angew. Math., t. **529**, pages 1–74, *2000*.

[Da–Ph1] S. David et P. Philippon. « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes ». *In Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, V. K. Murty et M. Waldschmidt éditeurs. Contemporary Math., t. **210**, pages 333–364, *1998*.

[Da–Ph2] S. DAVID et P. PHILIPPON. « *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores* ». Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, t. **XXVIII** n°3, pages 489–543, *1999* ; « *Errata* », *ibidem* t. **XXIX** n°3, *2000*.

[Hin] M. HINDRY. « *Autour d'une conjecture de S. Lang* ». Invent. Math., t. **94**, pages 575–603, *1988*.

[Law] W. LAWTON. « *A generalization of a theorem of Kronecker* ». J. Sci. Fac. Chiangmai Univ., t. **4**, pages 15–23, *1977*.

[Phi1] P. PHILIPPON. « *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs* ». Bull. Soc. Math. France, t. **114**, pages 355–383, *1986* ; « *Errata et addenda* », *ibidem*, t. **115**, pages 397–398, *1987*.

[Phi2] P. PHILIPPON. « *Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs* ». Rocky Mountain Math. Journal, t. **26** n°3, pages 1069–1088, *1996*.

[Phi3] P. PHILIPPON. « *Sur des hauteurs alternatives I, II et III* ». Math. Ann., t. **289**, pages 255–283, *1991* ; Ann. Inst. Fourier, t. **44** n°4, pages 1043–1065, *1994* ; J. Math. Pures Appl., t. **74** n°4, pages 345–365, *1995*.

[Rém] G. RÉMOND. « *Sur les sous-variétés des tores* ». Prépublication de l'Institut J. FOURIER, Université de Grenoble I, t. **525**, 26 pages, *2001*.

[Ro-Sc] J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD. « *Approximate formulas for some functions of prime numbers* ». . Ill. J. Math. t. **6**, pages 64–94, *1962*.

[Ro-Th] D. ROY et J. THUNDER. « *An absolute Siegel's lemma* ». J. reine angew. Math. t. **476**, pages 1–26, *1996* ; « *Errata and addendum* », *ibidem*, t. **508**, pages 47–51, *1999*.

[Sch1] W. M. SCHMIDT. « *Diophantine approximation and Diophantine equations* ». Springer Lecture Notes in Mathematics, t. **1467**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, *viii* & 217 pages, *1991*.

[Sch2] W. M. SCHMIDT. « Heights of points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$ ». *In* Number Theory *1993–1994*, S. DAVID éditeur, London Math. Soc. Ser., t. **235**. Cambridge University Press, Cambridge, pages 157–187, *1996*.

[Wal] M. WALDSCHMIDT. « Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables, II ». Séminaire Pierre Lelong, année *1975/76*. Springer Lecture Notes in Math., t. **578**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, pages 108–135, *1977*.

[Zha1] S. Zhang. « *Positive line bundles on arithmetic surfaces* ». Ann. of Math., t. **136**, pages 569-587, *1992*.

[Zha2] S. Zhang. « *Positive line bundles on arithmetic varieties* ». J. Amer. Math. Soc., t. **8** n°1, pages 187–221, *1995*.

[Zha3] S. Zhang. « *Small points and adelic metrics* ». J. Algebraic Geom., t. **4**, pages 281–300, *1995*.

Francesco Amoroso,
F. r. e. *2271* (C. n. r. s.),
Structures Discrètes & Analyse Diophantienne,
Département de Mathématiques,
Université de Caen,
Campus II, BP *5186 :*
F–*14032* Caen Cédex
adresse électronique :
amoroso@math.unicaen.fr

Sinnou David
U. m. r. *7586* (C. n. r. s.)–U. f. r. *921*,
Théorie des nombres,
Institut de mathématiques de Jussieu,
Université Pierre et Marie Curie,
4, Place Jussieu,
F–*75005* Paris,
adresse électronique :
david@math.jussieu.fr

Math. subject classification : *11 G 10, 11 J 81, 14 G 40*.