AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

Volume monografico della rivista La Matematica nella società e nella cultura: "Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica, Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà

This is a pre print version of the following article:

Original Citation:

Availability:

This version is available http://hdl.handle.net/2318/1572477 since 2017-11-28T11:03:39Z

Publisher:

Unione Matematica Italiana

Terms of use:

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

03 May 2024

Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica
Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà

a cura di

GIUSEPPE ANICHINI, LIVIA GIACARDI e ERIKA LUCIANO

INDICE

Perché questo volume

Presentazione del Presidente della Unione Matematica Italiana

Nel 2015 ricorreva il trentesimo anniversario della scomparsa di Bruno de Finetti. De Finetti è stato un grande cultore del Calcolo delle Probabilità, di Statistica Matematica e di Matematica Finanziaria ed Attuariale. I suoi contributi a queste discipline, oltre che di grande valore e originalità, sono stati cruciali dal punto di vista fondazionale, basti ricordare la sua concezione soggettiva operazionale del concetto di probabilità. Ma de Finetti fu, oltre a ciò, soprattutto un esempio di "umanista a tutto tondo", attento ad ogni aspetto – sociale, culturale e politico, della vita del suo tempo – pronto a impegnarsi, tra l'altro, in prima persona in importanti battaglie per i diritti civili nel nostro paese.

In occasione di questa ricorrenza l'Unione Matematica Italiana ha inteso tributargli un sentito e reverente omaggio promuovendo varie iniziative.

Innanzitutto è stato istituito un premio dedicato ad onorarne la memoria. Il premio – destinato ad un docente di ruolo di discipline matematiche di scuola secondaria di secondo grado in servizio in Italia, distintosi per la diffusione della cultura matematica o della storia della matematica tra i giovani e più in generale nella società o nella comunità scientifica – è stato assegnato al professor Domingo Paola.

È stata poi organizzata, frutto di una collaborazione dell'Unione Matematica Italiana con l'Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali (di cui de Finetti fu socio fondatore e poi presidente onorario) e con la Società Italiana di Statistica, una giornata di studio in suo onore, tenutasi il 30 Aprile 2015 presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, di cui de Finetti fu socio. La giornata ha visto i contributi dei professori Carla Rossi (Università di

Roma Tor Vergata), Eugenio Regazzini (Università di Pavia), Flavio Pressacco (Università di Udine), Massimo De Felice (Università di Roma “La Sapienza”) e Domingo Paola (vincitore del premio intitolato a Bruno de Finetti), che hanno illustrato vari aspetti degli interessi e dei contributi scientifici di questo intellettuale.

Infine l’Unione Matematica Italiana ha pensato di dedicare a de Finetti il presente volume della Rivista “La Matematica nella Società e nella Cultura”. Esso indaga un aspetto tutt’altro che secondario dell’impegno culturale e sociale di de Finetti, ossia quello relativo all’insegnamento della matematica. Negli anni sessanta e settanta del secolo scorso, infatti, de Finetti animò un gruppo di ricerca sulla didattica della matematica, molto attivo nell’ambiente romano, e che ha lasciato un segno importante non solo a livello nazionale ma anche internazionale. Tra i nomi da ricordare in questo gruppo, vi è soprattutto quello della indimenticabile Emma Castelnuovo. Insieme a lei e ad altri collaboratori, de Finetti, riattaccandosi ad una tradizione che fa capo a Guido Castelnuovo e a Federigo Enriques, si fece portatore dell’esigenza di un insegnamento della matematica che, andando al cuore dei problemi, fosse scevro da ogni inutile formalismo e facesse invece ricorso ad un uso avveduto e sapiente della intuizione. Istanze, queste, che non hanno perso il loro valore e vigore anche ai giorni nostri. Oggi magari non è tanto dal formalismo (ormai assorbito e digerito dalla matematica moderna) che occorre difendersi, ma da una (pur essa formale) eccessiva tendenza al cosiddetto “problem solving”, che, se male interpretato, può portare a rendere il ruolo della matematica puramente ancillare, spogliandone l’insegnamento dai più profondi valori concettuali che, da sempre, hanno reso la nostra disciplina fondamentale per la formazione dei giovani e per la consapevole preparazione alla vita del cittadino.

Questo volume raccoglie gli scritti e le testimonianze di vari autori, alcuni dei quali furono molto vicini a de Finetti. Oltre a ciò, vi è una bella galleria fotografica e, soprattutto, si è inteso qui dare voce allo stesso de Finetti, ripubblicandone alcuni scritti di grande interesse per la didattica della matematica, tra i quali lo splendido *Il “saper vedere” in Matematica*, che, ne sono certo, ancora oggi costituirà fonte di ispirazione per coloro che amano la matematica e il cui lavoro è quello di farla amare ai giovani. Sono sicuro che questo volume, che peraltro chiude un ciclo di questa Rivista (che a partire dal primo numero del 2016 cambia, seppur di poco, il nome e soprattutto la veste grafica), sarà un importante punto fermo nella biblioteca dei soci dell'Unione Matematica Italiana, e di chiunque sia interessato ai problemi dell'insegnamento della matematica.

In conclusione, voglio qui ringraziare coloro che hanno contribuito con i loro scritti a questo volume. In particolare un ringraziamento va alla sig.ra Fulvia de Finetti che, oltre ad aver anche lei contribuito con un toccante ricordo personale al volume, ha reso possibile sia la realizzazione del premio sia la ristampa delle opere qui riprodotte del Padre. Infine un sentitissimo riconoscimento va ai colleghi Giuseppe Anichini, Livia Giacardi ed Erika Luciano che hanno curato con competenza e passione questa raccolta: a loro va la riconoscenza mia personale e di tutta l'Unione Matematica Italiana.

Ciro Ciliberto

De Finetti: un matematico che "vedeva lontano"

Presentazione del Presidente della International Commission on Matematical Instruction

Rileggendo a mezzo secolo di distanza i contributi di de Finetti alla didattica della matematica si comprende meglio quanto "vedesse lontano": in effetti egli fu un precursore di molti temi oggi ampiamente studiati dagli specialisti del ramo, come i saggi nel volume ampiamente dimostrano.

Riusciva a fare questo con intuizioni profonde, in cui si coglie l'elaborazione delle esperienze acquisite nei diversi contesti in cui fu attivo, e basandosi sulle quali lavorò indefessamente per migliorare l'insegnamento della matematica. Dall'esperienza con le Assicurazioni, alla ricerca e all'insegnamento in Università, alla direzione della Mathesis e del suo giornale, alle commissioni varie per i "Nuovi Programmi" di Matematica del tempo, ai corsi di aggiornamento per insegnanti, alla produzione di numerosi articoli e libri, al gruppo di ricercatori brillanti e creativi con cui interagiva: tutto concorre a farne una figura fondamentale anche in didattica della matematica, accanto a quella importantissima che ricopre nella ricerca matematica.

Incredibilmente, egli riusciva a fare tutto ciò con una modestia personale incredibile, con un linguaggio nello stesso tempo "leggero" (nel senso di Italo Calvino) e pregnante che gli permetteva di comunicare pensieri profondi in modo semplice e illuminante: le sue metafore, le sue invenzioni linguistiche, mai gratuite e sempre folgoranti e incisive lo avvicinano in questo a Carlo Emilio Gadda mentre la sua "sensibilità emozionale", come egli la chiamava, lo accosta a poeti delicati (ad esempio William Butler Yeats), che amava citare.

L'originalità della sua scrittura è la controparte espressiva dei pensieri che egli riesce così a "raccontare", quasi a far vedere. Infatti, un principio ispiratore che lo guidava nello scrivere le sue opere didattiche si rifaceva a un principio che, citando Eric T. Bell, egli attribuiva a Lagrange: “un matematico non ha interamente compreso la propria opera finché non l’abbia resa così chiara da potere esser spiegata al primo passante in cui s’imbatta per la via” (de Finetti 1954°, p. 211). Egli così la commenta, mostrando di condividerne la sostanza, sia pure con qualche riserva: “Si prenda pure tale affermazione con un grano di sale, ma in fondo è possibile dire quel tanto che interessa far capire a ciascuno secondo l’intendimento” (*Ibidem*).

Promuovere quello che chiama ‘l’intendimento’ è l’obiettivo che de Finetti propone agli insegnanti per i loro allievi. Il suo grande pregio è che egli riusciva a osservare questo principio anche nei suoi scritti per gli insegnanti stessi: era capace così di comunicare pensieri importanti in forma semplice, ma senza concessioni alle approssimazioni e alle banalità. I suoi principi psicologico-didattico-culturali, come li chiamava (de Finetti 1969, p. 16, cfr. in questo volume l’Appendice 1.5), sono molto precisi e a volte controcorrente: ricorso all’intuizione (polemizza con chi ritiene che l’intuizione non vada d’accordo col rigore (de Finetti 1954°, p. 207); partenza dal concreto; legami con tutte le altre scienze e con le applicazioni; visione storico-genetica dello sviluppo della matematica (de Finetti 1969, p. 16).

I suggerimenti che dà agli insegnanti sono altrettanti capitoli oggi studiati in profondità da molti studiosi: la visualizzazione, l’insegnamento per problemi, il ruolo degli esempi, ecc.. In questo de Finetti precorre davvero i tempi.

Vorrei fare un esempio concreto tra i tanti possibili per illustrare il de Finetti anticipatore. Il suo meraviglioso volume *Il “saper vedere” in Matematica* (cfr. in questo volume l’Appendice 1.4) si apre con due capitoli che si intitolano rispettivamente “Riflettere per giungere a un risultato” e “Dopo, riflettere ancora”, in cui egli discute come la risoluzione di problemi può portare a costruire conoscenza matematica (oggi si parlerebbe di ‘Problem solving’). Mentre il primo illustra esempi di risoluzione di problemi, il secondo capitolo inizia in questo modo:

> *Risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo: ogni successo rende più facili ulteriori successi. Ma il vantaggio è molto più grande se ci si sofferma a* riflettere, *su ogni problema che ci si presenta, non soltanto quanto occorre per risolverlo ma poi ancora per* far tesoro di tutte le osservazioni che

siamo capaci di trarne sviscerandolo. *Praticamente, si tratta solo di domandarsi vari "perché":*

- ***perché** vale la conclusione trovata* (*ossia: s*ussisterebbe oppure varierebbe, e come se modificassi i dati in questo o quel modo);
- ***perché** ho incontrato difficoltà e poi le ho superate (cioè: dov'era 'il bandolo della matassa" e* com'è che prima mi sfuggiva e poi l'ho visto*)?*

Riflettendo su cose del genere ogni esempio arricchisce l'esperienza in misura moltiplicata ed in modo assai più profondo. *Più profondo che mai, forse, se si giunge a riflettervi quasi senza accorgersene (come quando si cerca invano l'impostazione di un problema prima di addormentarsi, e al risveglio vediamo di averla già trovata).* (p. 3; tondo mio).

Qui de Finetti non sottolinea soltanto il 'Problem Solving', ma le sue osservazioni, sviluppate appunto nel secondo capitolo, ne suggeriscono un ampliamento che molti anni dopo sarebbe diventato una proposta metodologica discussa scientificamente nella ricerca didattica e di qui passata nelle proposte curricolari de *La Matematica per il Cittadino*, preparate dall'Unione Matematica Italiana negli anni 2001-2005. Semplificando un po', è quello che oggi si chiama 'Problem Posing': si tratta di un aspetto che troviamo, ad esempio, sviluppato a livello di ricerca internazionale, nel libro di S.I. Brown e M.I. Walter, *The Art of Problem Posing* (Mahwah (NJ) and London: Lawrence Erlbaum Associates), corredato da una ricca bibliografia: la prima edizione è del 1983; nel 2005 è uscita la terza edizione ampliata, il che dimostra la vitalità del tema. Su questo punto il Nostro ha anticipato i tempi di quasi venti anni, esprimendo un nodo cruciale per l'apprendimento della matematica in una forma piana e semplice, nascondendone l'importanza sotto una veste comunicativa colloquiale e apparentemente sotto tono.

Ma v'è di più: nelle affermazioni sopra riportate, in particolare nelle frasi in tondo, troviamo un'altra gemma, che appena oggi, perlomeno in Occidente, sta assumendo un interessante sviluppo a livello di ricerca e di proposte didattiche concrete. I commenti di de Finetti contengono 'in nuce' una parte di quello che si chiama *metodo della variazione*, desunto dalla pedagogia cinese classica e che, nella sua divulgazione occidentale iniziata solo da pochi anni, si basa su quattro principi:

– Contrasto: *Per avere esperienza di qualcosa una persona deve fare esperienza di qualcosa di diverso per fare un confronto.*
– Generalizzazione: *Per capire che cosa è 'tre' devo fare esperienza di una varietà di situazioni in cui 'tre' appare.*
– Separazione: *Per fare esperienza di un certo aspetto di qualcosa e al fine di separare questo aspetto da altri aspetti, bisogna variarlo mentre gli altri aspetti non cambiano.*
– Fusione: *Se ci sono vari aspetti critici che chi apprende deve prendere in considerazione insieme, di essi deve fare esperienza simultaneamente.*

(Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M., 2004. *Classroom Discourse and the Space of Learning*, Mahwah (NJ) and London: Lawrence Erlbaum Associates, p. 16)

Sembra di leggere frasi di de Finetti!

Credo che la rilettura di de Finetti e dei saggi che inquadrano i suoi lavori didattici alla luce della ricerca così come è oggi possa essere molto utile a quanti, studiosi e insegnanti, si occupano in un modo o nell'altro di insegnamento della matematica. Siamo quindi tutti grati all'Unione Matematica Italiana per avere proposto e promosso la pubblicazione di questo volume.

Ferdinando Arzarello

Prefazione

Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà. È in questo spirito che riesce possibile presentare la Matematica nella forma più straordinariamente ricca e affascinante, tale da far invidiare chi può impararla così. (de Finetti A1976b, p. 43)

Il mondo reale è sempre presente nelle riflessioni didattiche – e non solo – di Bruno de Finetti. Come egli stesso scrive, riportando le parole di Emma Castelnuovo e di Mario Barra, "si prende spunto *dalla* realtà, si indaga *nella* realtà, si traggono, dopo aver matematizzato, regole di comportamento *per* la realtà" (de Finetti A 1976b, p. 45).

Di qui nasce la scelta del titolo di questo volume dedicato all'impegno profuso da de Finetti per migliorare l'insegnamento della matematica in Italia; impegno che si concretizzò in svariati articoli in cui, da un lato si stigmatizzano i difetti della scuola italiana coniando folgoranti neologismi e incisive metafore e, dall'altro, si propongono soluzioni che affondano le loro radici in una fitta trama di letture, riflessioni, dialoghi. A questa attività si affianca l'impegno di de Finetti nella direzione dell'associazione Mathesis (1970-1981) e del suo giornale *Il Periodico di Matematiche* (1972-1981), nella stesura dei programmi, nella formazione degli insegnanti, nella partecipazione alle attività della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (1968-1982) e nella redazione di testi che traducessero in pratica la sua visione didattica e metodologica.

Il fusionismo, il metodo genetico, la valorizzazione dell'intuizione e della fantasia, la visione dinamica della scienza e dell'insegnamento, il metodo socratico, l'importanza del significato e l'approccio storico sono i principali assunti che ispirano de Finetti insieme, al "continuo trapasso dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto finché si fondano nell'intuizione di un'unica magica realtà, in cui tutte le risorse concettuali vengono messe al servizio della visione pratica dei problemi e tutti i problemi pratici concorrono a servizio della elaborazione concettuale, questa e quella, volta a volta, mezzo e fine, superando ogni antagonismo" (de Finetti L (1944), 1959, p. IX).

Questo volume ha dunque lo scopo di attrarre l'attenzione sui contributi didattici di questo eminente matematico e intellettuale, che pose la sua intelligenza acuta e anticonvenzionale al servizio della società, nell'auspicio – perché no? – della pubblicazione di un terzo volume di *Opere scelte di Bruno de Finetti*, ad essi interamente dedicato.

Il saggio di Mario Barra, che ebbe una lunga frequentazione con de Finetti a partire dalla tesi di laurea, serve da cornice a quelli che seguono e ripercorre, attraverso citazioni e ricordi, le tappe fondamentali della vita e dell'opera scientifica di questo matematico, evidenziando in particolare i suoi contributi fondamentali in teoria delle probabilità, in economia e in didattica della matematica.

Michele Pellerey, che collaborò con de Finetti alla direzione del *Periodico di Matematiche*, esplora nel suo articolo la visione epistemologica della matematica che guidò il Nostro nell'esame dei programmi della scuola secondaria e nella formulazione delle proposte di radicale revisione degli anni Sessanta e Settanta, sottolineando la sua speciale attenzione ai processi di costruzione delle conoscenze matematiche nella prospettiva psicologica.

La probabilità, che è stato il *leit motiv* di tutta la vita di de Finetti, è il tema centrale del saggio di Carla Rossi che, essendo stata sua allieva, attinge a piene mani ai ricordi per illustrare l'approccio 'per problemi' adottato da Bruno de Finetti nell'insegnamento della probabilità e, in generale, della matematica, focalizzando l'attenzione sul ruolo importante che egli attribuiva agli esempi, tratti sia dalla vita d'ogni giorno, sia da differenti campi scientifici e sociali, come pure al coinvolgimento degli allievi.

I due successivi articoli sono dedicati al "saper vedere" in matematica, quale lo concepiva de Finetti, alla luce degli studi attuali in didattica. Maria Alessandra Mariotti intende offrire una riflessione sui processi cognitivi e didattici coinvolti nell'uso di immagini in geometria, così come fu delineato dal matematico. Nel quadro della teoria dei *Concetti Figurali*, Mariotti affronta il problema della concettualizzazione geometrica, il ruolo del disegno e in particolare il contributo che viene dalle nuove tecnologie. Abraham Arcavi, invece, a partire dagli assunti che emergono dall'opera "visionaria" di de Finetti sul ruolo della visualizzazione nell'insegnamento, illustra e discute nel suo saggio tre aspetti salienti della corrente ricerca in didattica della matematica: la relazione fra visualizzazione e *sense-making*, il ruolo della visualizzazione nel conseguire risultati sistematici e generali, e le dimostrazioni visuali.

Fulvia de Finetti, figlia dell'illustre matematico, ci regala un ricordo fresco e vivace dell'impatto che ebbe su di lei, bambina di nove anni, la prolusione sulla funzione vivificatrice della matematica, tenuta dal padre all'Università di Trieste in apertura dell'anno accademico 1948-49 (de Finetti A 1949a, cfr. Appendice 1.2).

Livia Giacardi e Erika Luciano presentano l'edizione critica di alcune lettere provenienti, quasi per intero ([1]), dal ricco zibaldone di documenti inediti conservati fra i *Bruno de Finetti Papers* presso gli Archives of Scientific Philosophy dell'Università di Pittsburgh. L'obiettivo è duplice: da un lato si intende offrire un spaccato del dialogo scientifico-didattico che intercorse fra de Finetti e i colleghi E. Frola, L. Geymonat, G. Pólya, G. Prodi e F. Tricomi e dall'altro si forniscono ulteriori evidenze dell'importanza che egli annetteva all'insegnamento della matematica.

A conclusione di questa prima parte del volume abbiamo accolto la testimonianza di un insegnante di matematica, Domingo Paola, che per il suo impegno nella scuola è risultato vincitore del Premio Bruno de Finetti, bandito nel 2015 dalla Unione Matematica Italiana. Nel suo articolo, che riproduce l'intervento tenuto in occasione della consegna del Premio il 30 aprile 2015, Domingo Paola mostra come, nonostante il contesto scolastico e le esigenze sociali siano profondamente cambiati rispetto ai tempi in cui Bruno de Finetti visse e operò, le sue idee siano ancora oggi attuali, anche se, purtroppo, non sempre messe in pratica.

Il volume è completato, per cortesia di Fulvia de Finetti, da una Galleria fotografica che offre una documentazione iconografica, in parte inedita, delle varie fasi della vita del nostro matematico, e da due Appendici.

Nella prima di esse si dà la parola a Bruno de Finetti stesso, riproponendo oltre al volumetto *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e Appendice 1.4), altri sette scritti che delineano dal

([1]) Una delle lettere pubblicate proviene dall'Archivio privato della Famiglia de Finetti, per gentile concessione della figlia Fulvia.

1944 al 1976 la sua visione didattica, mostrandone tutta l'originalità e la profondità. La scelta dei testi da ripubblicare non è stata facile, sia per la molteplicità dei contributi lasciati da de Finetti in quest'ambito, sia per il carattere fortemente innovativo e anticonvenzionale dei suoi scritti. La selezione cui siamo approdati è volta a documentare la visione del ruolo che de Finetti attribuì alla matematica nella cultura e nella scienza (Appendice 1.2), le caustiche critiche che rivolse alla scuola italiana (Appendice 1.3, 1.6), gli assunti metodologici e didattici cui si ispirò (Appendice 1.1, 1.4, 1.6), e la sua celebre concezione della probabilità soggettiva, cui improntò la sua decennale docenza universitaria (Appendice 1.7). Chiude la sezione uno scritto biografico inedito (Appendice 1.8).

La seconda appendice presenta l'elenco delle pubblicazioni di de Finetti – libri e articoli, compresi i "pezzulli" apparsi sul *Periodico di Matematiche* – a carattere didattico, metodologico e epistemologico.

Al termine di questa impresa che abbiamo fortemente voluto per rendere omaggio all'appassionata opera di Bruno de Finetti in favore dell'educazione matematica, desideriamo rivolgere un vivo ringraziamento al Presidente della Unione Matematica Italiana Ciro Ciliberto per aver accolto il nostro progetto, agli autori per la loro collaborazione, agli anonimi recensori, a Fulvia de Finetti per averci generosamente messo a disposizione preziosi materiali fotografici e documentari, al Presidente dell'International Commission on Mathematical Instruction per gli utili consigli e suggerimenti, ad Andrea Astesiano per aver migliorato la risoluzione di alcune fotografie e a Claudia Benedetti per la trascrizione dei testi di de Finetti. Un sentito grazie va a tutto il personale della Biblioteca matematica "Giuseppe Peano" del Dipartimento di matematica dell'Università di Torino, e in particolare ad Antonella Taragna che ci ha aiutati nel reperimento di vari articoli di de Finetti, a Brigitta Arden degli Archives of Scientific Philosophy dell'Università di Pittsburgh e a Rita Zanatta dell'Archivio della Accademia Nazionale dei Lincei di Roma.

31 marzo 2016

Giuseppe Anichini
Livia Giacardi
Erika Luciano

Saggi

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 15-42

Bruno de Finetti: tappe di una vita al servizio della Ricerca, della Scuola e della Società

MARIO BARRA

1. – Bruno de Finetti: profilo biografico

Bruno de Finetti nasce il 13 giugno 1906 a Innsbruck, al tempo capitale della Contea del Tirolo, con il nome di Bruno Johannes Leonhard Maria von Finetti. Entrambi i genitori e i nonni sono italiani, ma cittadini austriaci. Suo nonno, Giovanni Battista von Finetti, era un ingegnere a Trieste al tempo nell'Impero austro-ungarico e suo padre Walter von Finetti, ugualmente ingegnere, aveva progettato e diretto la costruzione della ferrovia Innsbruck-Fulpmes. Nel 1911 Walter trasferisce la famiglia da Innsbruck a Trieste per essere vicino ai suoi genitori che stavano diventando anziani, ma muore nel 1912. Poco dopo la morte del padre, la famiglia si trasferisce a Trento, allora Contea del Tirolo nell'Impero austro-ungarico, città natale della madre, Elvira Menestrina, sorella del Professor Francesco, docente universitario di Diritto, e dell'avvocato Giuseppe, futuro sindaco della città.

La famiglia, 'irredentista' fino alla fine dell'Impero Austro-Ungarico, prosegue la tradizione della nonna paterna, nipote di Carlo Alberto Radaelli, patriota e generale, che aveva partecipato all'insurrezione di Venezia nel 1848 e alla caduta della Repubblica Veneta nel 1849.

Alla morte del padre, Bruno ha sei anni non ancora compiuti, e la madre è incinta di una bambina che si chiamerà Dolores per ricordare la morte del padre. A Trento, a sei anni appunto, Bruno de Finetti inizia i suoi studi direttamente in II classe, dove viene ammesso, previo esame, con la qualifica di 'distinto'. Nella stessa scuola frequenta anche la III e la IV classe.

Nel 1915 inizia la prima guerra mondiale e in seguito all'ordine di evacuazione della 'Imperiale Regia Fortezza di Trento', de Finetti si ritira con la famiglia a Coredo, località di villeggiatura, dove studia da solo per la V classe e per la I e II ginnasio, aiutato, solo per il latino, dal colto curato di Sfruz (una frazione dove si recava a piedi o con lo slittino). Alla fine della guerra, Trento si ricongiunge all'Italia.

Questi eventi, tanto attesi dalla famiglia de Finetti, hanno però un riflesso negativo sul modesto bilancio della famiglia a causa del cambio molto sfavorevole delle corone austriache in lire.

Rientrato a Trento, de Finetti supera l'esame di ammissione alla III ginnasiale (equivalente alla III media) e consegue la promozione *con distinzione* nel 1919. Subito dopo, all'età di tredici anni, de Finetti viene colpito da febbre alta, da gonfiore e dolori alla gamba sinistra e viene operato per osteomielite acuta con asportazione della testa del femore. Per ben nove mesi dura l'andirivieni fra ospedale e casa, e di nuovo, per non perdere l'anno, deve studiare privatamente. Il conseguente accorciamento della gamba di ben sette centimetri, lo costringerà per sempre all'uso di un bastone per camminare.

Terminata la II liceo, nel giugno del 1923, Bruno de Finetti si prepara da solo durante l'estate per l'esame di maturità che consegue a ottobre dello stesso anno. La commissione gli assegna i seguenti voti: Lingua italiana (9;7) ([1]), Lingua latina (9;7), Lingua tedesca (6;7), Geografia e Storia 8, Matematica 7, Storia naturale 8, Fisica 6, Propedeutica filosofica 8.

Nel novembre del 1923, a soli diciassette anni, de Finetti si iscrive al Politecnico di Milano e, superato il biennio preparatorio, inizia il primo anno del triennio di Ingegneria.

Seguendo alcune lezioni del secondo biennio del corso di laurea in Matematica, matura però la convinzione di abbandonare Ingegneria per dedicare la sua vita alla Matematica, che apprezza sempre di più. Comunica la sua decisione a sua madre in tre lettere, molto belle, scritte in soli quattro giorni, di cui riportiamo alcuni stralci significativi ([2]).

([1]) I due numeri indicano rispettivamente il voto ottenuto nello scritto e nell'orale.
([2]) Gli stralci provengono dalle lettere pubblicate in F. de Finetti 2000, pp. 728-740.

Milano, 25 novembre 1925

Carissima Mamma,
[...] *sono bastati questi primi venti giorni per capire che gli studi della Scuola d'Applicazione, pur senza dispiacermi, non ànno per me nessuna attrattiva particolare, mentre, seguendo le lezioni di Analisi superiore e parlando con un mio ex compagno che ora è iscritto all'Università ò visto che i corsi della Facoltà di Matematica applicata sembrano fatti apposta per appassionarmi* [...]. *All'Università avrei ancora solo 2 anni, e orari molto meno gravosi, cosicché mi sarebbe anche facile guadagnare qualche cosa nelle ore libere. Di più, mentre al Politecnico siamo in oltre 200 per corso, alle lezioni di Vivanti – che è il corso più importante che certo frequentano tutti gli scritti – eravamo in tre, me compreso, oltre due preti e un gruppo di signorine. Anche questo va tenuto in conto in tempo di crisi e date le nostre condizioni* [...]

Ciao Bruno

Milano, 26 novembre 1925

Carissima Mamma,
[...] *in tal modo la carriera sarebbe più rapida e sicura, anche senza disporre di capitali, mentre nel ramo dell'ingegneria c'è crisi, e trovar posti è difficile; solo che in compenso ci sarebbe anche la possibilità – coll'aiuto della fortuna e di un po' di spirito commerciale – di raggiungere un grado di ricchezza che un professore non può aspettarsi, ma io per fare affari sai che non sono molto bravo, e a diventare un pescecane ci terrei assai poco* [...]. *È stato verissimo che la decisione è stata tutta in un colpo, né poteva essere altrimenti. Forse era già maturata nella subcoscienza* [...]

Saluti baci Bruno

Milano, 28 novembre 1925

Cara Mamma,
è arrivata oggi la tua nuova lettera. Per quella che chiami franchezza non mi offendo, e molto meno mi pento della mia decisione che mi à fatto rinascere. Ma mi fa veramente schifo vedere come misuri tutto in carta straccia come un bottegaio, e mi rincresce di vedere che non mi capisci proprio niente davvero, mentre cominciavo a sperare d'essermi sbagliato, e di volerti bene più sinceramente e più spontaneamente. Per essere sincero altrettanto che te, dirò subito che non mi saprei adattare a un impiego di nessun genere, e ciò indipendentemente dalla circostanza che sia più o meno lucroso, e che studio Matematica, non studio aritmetica. In particolar modo il mondo degli affari mi ripugna, e non c'è pericolo che mi ci infogni dopo essere stato a contatto con quello dell'Alta Scienza... Può davvero sembrarti meno la Matematica che non l'ingegneria? Troverai centinaia di capimastri che sanno lavorare come e

meglio d'ingegneri, ma non troverai in tutto il mondo e in tutti i tempi nessuna sublime astrazione più perfetta di quelle che solo il matematico à il divino privilegio di afferrare [...]. *E se vuoi allargare un po' lo sguardo, dimmi di quanti ingegneri è passato alla Storia il nome, in confronto a tanti di matematici che – da Pitagora ad Einstein – vivranno in eterno nelle loro concezioni superbe. Perché non è vero che la Matematica sia ormai un campo esplorato da imparare e tramandare ai posteri tale e quale. Progredisce, si arricchisce, si snellisce, è una creatura viva, vitale, in pieno sviluppo, e solo perciò la amo, la studio, e voglio dedicarle la mia vita; per capire quello che spiegano i professori e poi spiegarlo, basta chiunque non sia di una meravigliosa asinità in fatto di matematica, e giuro che ben altro farò, perché so di poterlo fare e lo voglio fare* [...]. *Ma non perdiamoci in queste piccole e pettegole analisi del pro e del contro; io sento, io so, io ti dico che quello per cui mi sono deciso è l'unico campo per cui mi sento adatto, che solo in esso potrò servire la Nazione con tutte le mie forze; e non ti vergogneresti di me se con sordido egoismo volessi soffocare questa mia prepotente passione per un pugno di monete?* [...] *sento ora solo di essere io, di essere fra i miei compagni veri, nel mio posto vero, di avere di fronte a me l'orizzonte libero sereno, luminoso, dove la realtà è più bella di qualsiasi sogno. Lo avevo sentito l'anno scorso due volte, quando il prof. Voghera tenne una conferenza sulla costituzione dell'atomo e quando sentii il prof. Marcolongo – ottantenne – che con lucidità sorprendente assimilò e si fece divulgatore in Italia delle ardite e sconcertanti Teorie dell'Einstein, un senso di sconforto, di ammirazione, di commozione* [...]. *Singoletti, multipletti, tensori covarianti e controvarianti, calcolo variazionale* [...] *mi sembrava d'essere un bimbo povero che vede, alzandosi in punta di piedi, un giardino fatato di sopra un muro insormontabile. E poi ti pare comoda, monotona, piatta la vita di uno studioso di matematica? Forse esteriormente sì, ma della vita del mio corpo non me ne preoccupo se non in quanto se lui morisse morrei anch'io, e se lui stesse male io stesso non potrei studiare, o almeno non potrei studiare con uguale profitto e assiduità. Ma ogni formula, almeno per chi sente la matematica come la sento io è un'opera d'arte, è una favilla di un Mondo superiore che l'uomo conquista e assimila con voluttà divina. Ogni parola e ogni formula del lavoro che ò fatto è sangue del mio sangue, frutto di ebrezza volitiva e di sofferenza profonda e creatrice* [...] *e l'intimo tormento si purificava in una gioia indefinita in cui mi sembrava di nuotare trasognato* [...]

Saluti baci Bruno

Malgrado questa accorata difesa della sua volontà di iscriversi a Matematica, la madre di de Finetti rimane contraria, forse perché pensa che suo marito avrebbe preferito che il figlio divenisse anche lui ingegnere, continuando la professione del padre e del nonno.

Bruno de Finetti (nel seguito a volte indicato con l'acronimo BdF) invia alla madre un telegramma, ripetendo la risposta di Garibaldi a Vittorio Emanuele II: "Obbedisco".

Non abbandona tuttavia il suo obiettivo, così, nel 1926, sempre al Politecnico, cerca di seguire gli esami che gli possono consentire di iscriversi al IV anno del corso di laurea in Matematica, seguendo anche gli insistenti suggerimenti di Tullio Levi-Civita.

Appreso l'uso del diagramma ternario, ove in un triangolo equilatero le distanze dai tre lati di un punto interno possono indicare le proporzioni di tre metalli di una lega, e influenzato dai lavori del biologo Carlo Foà, rappresenta le percentuali dei tre genotipi per esprimere la propagazione dei caratteri mendeliani attraverso equazioni differenziali e scrive il suo primo lavoro ([3]). Si tratta di un articolo di 39 pagine che verrà letto con grande interesse da biologi, matematici e statistici famosi, come Carlo Foà, Giulio Vivanti ([4]), Giorgio Mortara e Corrado Gini, Presidente dell'Istituto Centrale di Statistica, che lo pubblica nel 1926 nella sua rivista *Metron*.

"I have noted with interest your important paper" ([5]), scrive, nel 1927, il celebre Alfred J. Lotka, rivolgendosi al "Professor Bruno de Finetti", che risponde di essere uno studente di Matematica che ha scritto il suo lavoro a vent'anni.

Gini assicura a de Finetti che, appena laureato, lo avrebbe assunto all'Istituto Centrale di Statistica e, forse per questo motivo, il giovane ottiene finalmente il consenso della madre ad iscriversi al 4° anno del corso di laurea in Matematica Applicata, neocostituito nel 1925 presso l'Università di Milano. In quella sede si laurea con lode a soli ventuno anni, avendo al suo attivo altre tre pubblicazioni che saranno apprezzate particolarmente anche dal famosissimo

([3]) de Finetti A 1926, pp. 3-41. Tale metodo verrà ripreso ad es. negli articoli: E. Castelnuovo 1969, E. Castelnuovo 1970 e de Finetti A 1971a. Un'applicazione in dimensione qualsiasi si trova in: M. Barra 2001.

([4]) Giulio Vivanti è uno dei curatori di Berzolari *et alii* (1930-1950). Con il professor Vivanti, de Finetti discuterà, nel 1927, la sua tesi su una rielaborazione dell'analisi vettoriale in campo affine.

([5]) F. de Finetti 2000, p. 726.

Jacques Hadamard, che scriverà nel ’29 a Vivanti: “je suis tout convaincu de sa valeur. Je serai très heureux de le voir avec nous à Paris” ([6]).

Gini assume de Finetti, nel dicembre del 1927 a Roma, prima in prova e poi, nel 1928, con un contratto a tempo determinato di tre anni, rinnovabile sotto la direzione di Luigi Galvani, con retribuzione di 14.000 lire lorde l’anno. L’indole di de Finetti è poco adatta al lavoro d’ufficio, e “per fortuna” il contratto non viene rinnovato, anche perché il comportamento di Gini è inaccettabile. Su tale argomento de Finetti così scrive alla madre:

15. IV. 29 VII

Mamma carissima,
[...]. *È uscito in questi giorni quel volume degli Annuali di Statistica in cui è pubblicato il primo studio al quale lavorai all’Istituto. Due Appendici sono tutte mie, anzi lo zio Francesco* ([7]) *era molto spiacente e un po’ indignato con Gini che le ha messe a nome suo e di Galvani; io so però troppo bene che sarebbe stato inutile e anzi dannoso protestare. Galvani capisce bene che gran parte, anzi la parte più difficile del lavoro, è mia, già prima si era quasi scusato perché non compariva il mio nome, appena uscito il volume mi offrì la prima copia “Al valente dott. D. F., per ricordo della sua intelligente collaborazione”, e disse di aver consigliato Gini di farmi fare qualche lavoro da svolgere da me, e pubblicare a nome mio, dicendo che ormai sono “in grado di fare tutto quello che vuole”. Ma per il momento c’è sempre parecchio da lavorare per altre cose d’ufficio* [...]

Saluti e baci affettuosi dal Vostro Bruno

Pur lavorando, de Finetti continua a portare avanti quando può le sue ricerche, ricevendo consensi da molti matematici.

([6]) Bruno de Finetti non si reca subito a Parigi perché non ha ricevuto la prevista borsa di studio della Rockefeller Foundation di New York. Vi si recherà invece nel ’35, su invito di Maurice Fréchet (con il quale aveva avuto il suo famoso dibattito a proposito dell’estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili) a tenere un ciclo di conferenze all’Institut Henri Poincaré, su *La previsione: le sue leggi logiche, le sue fonti soggettive* (*La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*), il suo tema prediletto. Soltanto altri quattro studiosi italiani: E. Fermi, V. Volterra, G. Castelnuovo e A. Cantelli avevano ricevuto prima di lui tale invito. Vedi F. de Finetti 2000, p. 739.

([7]) Lo zio, Francesco Minestrina, all’epoca è Avvocato Generale dello Stato a Roma.

Riprendiamo in proposito l'intervento di Fulvia, figlia di de Finetti, in occasione di un convegno tenutosi nel centenario della sua nascita ([8]):

> *He immediately gained the attention of the great mathematicians that worked in Rome at that time: Guido Castelnuovo, Tullio Levi-Civita, Federigo Enriques* [...] *it will not surprise you to know that Castelnuovo often invited Bruno at his home to see the progresses in the works of this promising young mathematician. To open the door was a little girl wearing her hair in pigtails. She was Emma the daughter of Castelnuovo. In a letter dated July 28, 1928 Castelnuovo examines the work of Bruno, recognizes his capabilities as analyst, gives advices on how to present the work and concludes, "I feel sure that you will be able to give important contributions to Probability Calculus and its applications"* ([9]).

Dopo meno di un anno dalla sua assunzione a Roma, al Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi a Bologna nel settembre 1928, il ventiduenne de Finetti presenta il suo teorema più famoso, il "teorema di rappresentazione" ([10]), che contiene tutto quello che si può affermare nell'ambito dell'impostazione soggettiva e coerentemente nel ragionamento induttivo, tenendo presenti sia le informazioni iniziali, sia quelle successive.

Il teorema di Bernoulli, (anche noto come *legge dei grandi numeri*) afferma che conoscendo la probabilità p di un evento, tende a uno la probabilità che in n prove, la frequenza relativa dell'evento differisca sempre meno da p. La dimostrazione si basa semplicemente sul fatto che lo scarto quadratico medio delle possibili frequenze relative indica uno scostamento da p che va a zero secondo $1/\sqrt{n}$.

([8]) *Bruno de Finetti Centenary Conference Rome, November 15-17,* 2006, Università La Sapienza, Roma.

([9]) Bruno de Finetti inviava buona parte dei suoi lavori a Guido Castelnuovo. Lo fece ad esempio donando al collega un esemplare dei volumi: *Introduzione matematica alla statistica metodologica,* (1930); *Probabilismo* (1931) [firmato da de Finetti il 24 XI 1929, con la chiosa: "*Fin dall'aprile 1928 avevo pronta un'esposizione completa dei fondamenti della teoria delle probabilità secondo il mio punto di vista*" e *Calcolo delle probabilità,* Corso tenuto all'Università di Padova nell'a.a. 1937-38.

([10]) de Finetti A 1932a.

Cosa si può dire se, come afferma de Finetti, "la probabilità non esiste"? ([11]) Come e quando i risultati ottenuti dagli statistici tenderanno verso un valore teorico e coerente?

Bruno de Finetti risponde che, dopo un numero indefinitivamente grande di prove, la probabilità di un fenomeno aleatorio tende a divenire uguale alla frequenza relativa se e soltanto se:

1) tale fenomeno aleatorio dipende da varie ipotesi fra loro incompatibili, a ciascuna delle quali si assegna un valore x;
2) la distribuzione di probabilità di x non è nulla nell'intorno della frequenza relativa;
3) rispetto a ciascuna delle ipotesi ci sia indipendenza stocastica.

Da queste premesse deriva che, subordinatamente a ogni ipotesi, cioè supponendo di conoscere il valore della x, la probabilità di h successi in n prove è data da una distribuzione bernoulliana, ottenuta con l'ipotesi dell'indipendenza stocastica a prescindere da quando sono stati ottenuti gli h successi. Per questo motivo si parla di *indipendenza stocastica subordinata* e di *scambiabilità.*

Senza la subordinazione a una singola ipotesi e quindi ad un valore della x, la probabilità di h successi su n prove risulta una "mistura" di bernoulliane, cioè la somma dei prodotti fra queste e le rispettive probabilità x delle ipotesi da cui dipendono. Sono queste probabilità che cambiano in funzione dell'esito delle prove e sono queste, quindi, che modificano anche il calcolo effettuato con la mistura, di cui sopra.

Poiché in questo modo la probabilità si modifica, non c'è indipendenza stocastica. La possibilità di abbandonare tale concetto e considerare invece la probabilità subordinata, rende molto più generale il modello matematico, amplia le possibilità di approfondimento scientifico e lascia invariata una sola proprietà delle prove: la *scambiabilità*. Nelle ipotesi precisate che la caratterizzano, gli esiti delle

([11]) Tale espressione è stata pronunciata da de Finetti in diverse occasioni, per esempio nella prefazione all'edizione inglese del suo trattato: de Finetti L 1970. Il senso è: non esiste una probabilità come caratteristica oggettiva di un fenomeno in quanto essa può essere valutata unicamente in modo soggettivo in funzione del nostro stato incompleto di informazione.

prove possono essere scambiati, cioè possono essere considerati tenendo presente soltanto i numeri dei successi e degli insuccessi che contengono, indipendentemente dall'ordine in cui sono stati ottenuti, semplicemente perché questa proprietà è valida in ciascuna distribuzione bernoulliana, e quindi anche in una loro mistura. Questa proprietà vale ad esempio considerando un'urna la cui percentuale p di palline bianche o nere sia nota, oppure ignota (con una distribuzione di probabilità $\mathrm{F}(p)$), sia quando la pallina estratta non viene rimessa nell'urna, sia nel caso contrario, oppure ancora se viene rimessa nell'urna assieme ad una pallina (o m palline) con lo stesso colore di quella estratta (*probabilità contagiose*).

In tutti i casi precedenti, la percentuale di palline bianche dipende da quante ne sono uscite in n estrazioni, non importa in quale ordine.

Questa impostazione può "giustificare" le assicurazioni quando considerano la percentuale d'incidenti indipendentemente dall'ordine in cui sono avvenuti. Più tecnicamente, la *scambiabilità* esiste se, per ogni $h(0 \leq h \leq n)$, la probabilità $\omega_h^{(n)}$ che si verifichino h successi su n eventi qualsiasi, è uguale per tutte le $\binom{n}{h}$ successioni di questi esiti. Il teorema è così importante che ancora oggi ne derivano molte conseguenze. Così vale la pena di ricapitolare in breve quanto detto ed indicare in fondo all'articolo un esempio semplicissimo.

Nel 1928 de Finetti dimostra che la scambiabilità vale se e soltanto se si tratta di una *mistura* di distribuzioni bernoulliane, cioè di una loro combinazione lineare a coefficienti non negativi e somma unitaria.

Tali coefficienti si *possono soggettivamente* assegnare *come se* fossero le probabilità p_i (e nel continuo, x) di ipotesi H_i che esprimono una incertezza: *se è vera l'ipotesi H_i di probabilità p_i, si considera questa bernoulliana, se vale H_j, ... quest'altra ...* Per l'indipendenza stocastica degli eventi in ogni bernoulliana, la probabilità non varia scambiando gli esiti degli eventi, che così risultano *scambiabili* anche nella mistura di tali distribuzioni. Non si conserva invece l'indipendenza, perché le informazioni modificano le probabilità p_i delle ipotesi H_i. Adesso l'esperienza permette quell'apprendimento impedito dall'indipendenza stocastica. Occorre solo la formula di Bayes – che de Finetti dimostra *per coerenza* – che richiede semplicemente di non accettare una serie di scommesse che comportino una perdita certa. L'intento cui tiene de Finetti, a suo dire, è didattico:

> *ogni mistura di 'prove ripetute' con 'probabilità costante ma incognita' (come si direbbe in modo improprio ma tradizionale e perciò 'comprensibile') dà luogo a un processo scambiabile; ed anche viceversa: un processo scambiabile è sempre interpretabile come una tale "mistura". È questa chiarificazione concettuale, illustrata qui sull'esempio più banale, ma estensibile ed estesa a casi molteplici e complessi, la cosa cui tengo (modestia a parte) perché contribuisce a dissipare i concetti (o almeno le terminologie) di sapore superstizioso, di pretesa metafisica, di espressione contraddittoria. Anche se, per coloro che sono più accentuatamente dei "matematici" (per cui la matematica è "scopo" non "strumento") conta più il risultato analitico che hanno battezzato "de Finetti's representation theorem".* (de Finetti A 1976f, p. 268)

La scambiabilità costituisce un concetto fondamentale nel calcolo delle probabilità, nella teoria dei processi aleatori, nella statistica matematica e nella teoria della misura e dell'integrazione. Il contributo riveste una grande importanza, come ebbe a dire Olav Kallenberg nel suo intervento alla *Conference on Exchangeability* del 1981:

> *Per quasi mezzo secolo la scambiabilità è stata considerata un ramo isolato della probabilità, includente essenzialmente un unico risultato* [il teorema di de Finetti, n.d.r]*, ed interessante solo perché quel risultato è una perla* [...]. *L'importanza della scambiabilità è stata enormemente sottostimata* [...]. *Presto verrà il momento in cui essa sarà considerata uno dei settori fondamentali della probabilità* ([12]).

A Roma de Finetti frequenta il Seminario Matematico nella sala dell'Istituto di Fisica a via Panisperna, tiene una conferenza dal titolo *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo*, e conosce Enrico Fermi, che rivedrà a Chicago nel 1950.

de Finetti consegue la libera docenza in Analisi Matematica a ventiquattro anni, nel 1930, e tiene per incarico diversi corsi universitari

([12]) Vedi l'intervento di Giorgio Koch sul sito: http://www.assculturale-arte-scienza.it/Testi/Kock-Per%20una%20societ%E0%20scambiabile.pdf, fra Padova e Trieste, quando ha già pubblicato molti articoli ([13]) fondando le basi per i suoi contributi principali alla sua teoria delle probabilità. Dal 1931 al 1946 de Finetti è attuario presso le Assicurazioni Generali di Trieste, ove si trasferirà, con stipendio annuo lordo di 24.000 lire.

Contemporaneamente, dal 1932, tiene a Trieste i corsi di Calcolo delle probabilità, Matematica generale, Matematica finanziaria, Matematica attuariale e tecnica delle assicurazioni, Analisi matematica e anche un corso di Sociologia, ispirato dalla sua passione per Vilfredo Pareto. Dal '42 al '45 insegna Matematica generale e Matematica finanziaria a Trieste nella Facoltà di Economia e Commercio.

Dal 1946, con la costituzione della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali a Trieste, si dedica principalmente all'insegnamento universitario. Per più anni incaricato in quella Facoltà dell'insegnamento di Analisi matematica, vi ricopre la cattedra di Matematica attuariale e tecnica delle assicurazioni libere sulla vita umana. Già nel 1939 aveva vinto il concorso a cattedra per Matematica finanziaria, ma entrerà di fatto nel ruolo dei professori ordinari solo dopo otto anni, nel 1947, con nomina retrodatata al 1939, perché celibe, e per una legge del fascismo che impediva agli uomini senza moglie di ricoprire posizioni nel servizio pubblico. Nel 1945 de Finetti

> *ha una parte importante nella fondazione della DOXA incontrandosi più volte subito dopo la fine della guerra, con Guido Sadar, Diego Guicciardi, Luzzatto Fegiz, per "trovare qualcosa", e scoprire qualche nuova iniziativa che aiutasse l'Italia a risorgere rapidamente dalle proprie rovine. Collaborò alla scelta delle metodologie essenziali, alla formazione del campione di comuni e di famiglie, ed alla stessa organizzazione dell'Istituto, che prevedeva fin dall'inizio la massima meccanizzazione possibile dei servizi. Attuò un piano preciso imperniato sull'uso di moderni procedimenti di elaborazione, dapprima con semplici selezionatrici e tabulatrici a schede perforate, in seguito con computer sempre più perfezionati. Nelle prime settimane il personale si componeva di sole quattro persone, ma vi erano già perforatrici di schede e selezionatrici IBM, completate poco dopo da tabulatrici meccaniche. De Finetti continuò sempre a interessarsi della DOXA (in qualità di*

([13]) Si possono trovare ad es. in de Finetti O 1981.

membro del Comitato Scientifico), sia dal punto di vista tecnico, sia per la scelta degli argomenti di studio, specialmente nel campo dei problemi politici e sociali ([14]).

Nell'estate del 1950, il CNR invia negli USA una Commissione presieduta da Mauro Picone, comprendente de Finetti e Gaetano Fichera, con lo scopo di rendersi conto delle caratteristiche e delle capacità degli elaboratori elettronici operanti nei vari centri scientifici, onde, poi, acquistare quello più adatto all'Istituto di Calcolo del CNR, diretto da Picone. Sempre nel 1950, de Finetti partecipa al Convegno per la fondazione della *Association for Computing Machinery* a Washington.

Dal 1951 al 1954 de Finetti insegna Matematica finanziaria nella Facoltà di Economia e Commercio di Trieste. Nel 1954 è in ruolo nell'Università La Sapienza di Roma, nella Facoltà di Economia e Commercio; dal 1961 passa a quella di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, nell'Istituto di Matematica G. Castelnuovo, dove insegna Calcolo delle probabilità fino al 1976.

Gaetano Fichera così scrive in proposito ([15]):

Picone, che sebbene fuori ruolo seguiva sempre con sollecito interesse le vicende della Facoltà [di Scienze dell'Università di Roma La Sapienza] *riteneva che l'Istituto matematico romano non potesse permettersi di non avere fra i suoi professori un Uomo della statura di de Finetti e volle che, assieme a lui, mi adoperassi perché questi fosse trasferito dalla Facoltà di Economia e Commercio alla nostra. L'impresa non fu facile. Nell'Istituto matematico di Roma era allora figura di grande spicco Beniamino Segre, matematico assai autorevole, che, sforzandosi di continuare la nobile tradizione geometrica romana, iniziata da Cremona e proseguita da Castelnuovo, Enriques e Severi, pensava piuttosto a potenziare le Cattedre di Geometria, che non ad aprire nuovi indirizzi. Fu forse ricordandogli che Castelnuovo era stato, oltre che Geometra sommo, distinto cultore di Calcolo delle Probabilità, che potemmo superare le sue resistenze a far sì che de Finetti potesse, alla fine, trasferirsi presso di noi. In poco tempo si stabilì fra Segre e de Finetti una*

([14]) Bollettino della Doxa, Istituto per le ricerche statistiche e l'analisi dell'opinione pubblica, anno XXXIX, n° 16-17, 3 settembre 1985, pp. 91-92.

([15]) Vedi la Biografia [C], Fichera 1987, p. 29.

grande amicizia ed è proprio a Segre che de Finetti volle, in seguito, dedicare il suo fondamentale trattato sul Calcolo delle Probabilità ([16]).

Bruno de Finetti si interessa di calcolo delle probabilità, statistica, teoria delle decisioni e ricerca operativa, calcolo automatico, geometria, logica, analisi, economia teorica ed economia matematica, matematica finanziaria e attuariale, biologia, ingegneria, fisica, scienze attuariali, teoria dei giochi, psicologia, pedagogia, epistemologia, storia, filosofia, didattica e politica.

In special modo, in economia, la sua ampia pubblicazione *Il problema dei "pieni"*, del 1940, è la prima importante espressione dei contributi all'attuale *teoria del portafoglio*. Tale lavoro, la cui importanza è oggi riconosciuta a livello internazionale, può essere considerato come la fondazione della moderna teoria della finanza. In tale volume, infatti, sono illustrati dei metodi e dimostrati alcuni risultati, che, circa dodici anni dopo, saranno ottenuti indipendentemente da H. Markowitz. Saranno questi risultati a fruttare a Markowitz, nel 1990, il premio Nobel per l'Economia e l'appellativo di "padre fondatore della moderna finanza", che poteva essere assegnato a de Finetti, assieme al premio Nobel, se il suo *Il problema dei "pieni"* avesse avuto quell'attenzione e quella diffusione che meritava ([17]).

In molti scritti di de Finetti, e in special modo di Economia, emerge un collegamento stretto fra ideali, utopie e loro realizzazioni, anche in collegamento con la didattica ([18]). Bruno de Finetti guarda infatti ogni problema dal suo interno, senza farsi condizionare dagli strumenti esistenti per affrontarlo. Seleziona anzi gli strumenti più semplici, convinto che siano gli unici che permettano di mantenere una visione completa e autonoma di tutti gli aspetti del problema oggetto di studio, senza creare schermi che ne nascondano alcuni. Se l'esistente è in-

([16]) Fichera parla della dedica pubblicata in de Finetti L 1970, p. 1.

([17]) Si vedano i due articoli di Markowitz 2006 e Presacco, Serafini 2007.

([18]) Si può comprendere meglio il pensiero di de Finetti leggendo: *L'utopia come presupposto necessario per ogni impostazione significativa della scienza economica. Requisiti per un sistema economico accettabile in relazione alle esigenze della società*, 1973, pp. 13-87; *Crisi dell'energia e crisi di miopia*, 1975, pp. 9-23; *Dall'utopia all'alternativa* (1971-1976), 1976, pp. 7-51.

soddisfacente, de Finetti si crea nuovi concetti e nuove modalità operative. Può farlo perché possiede quell'umiltà, modestia, semplicità e generosità – naturali e formidabilmente esercitate – necessarie per risolvere un numero impressionante di problemi assolutamente nuovi. Chi ha avuto la fortuna di partecipare a discussioni nelle quali de Finetti era presente, non può dimenticare il senso di sorpresa e di ammirazione suscitato dai suoi commenti e dalle sue critiche originali, che spesso presentavano sotto un angolo visuale completamente nuovo, problemi lungamente studiati e conclusioni apparentemente definitive.

Bruno de Finetti si è interessato anche di aspetti molto particolari (ad esempio di biglietti ferroviari), testimoniando l'impegno sociale di una persona che sa che è importante costruirsi una visione generale dei problemi, ma che è altrettanto necessario 'rimboccarsi le maniche'.

Egli ci dice:

> *Diressi* [...] *il centro di Calcolo (IBM) di quella Compagnia che man mano estese la sua attività a tutte le elaborazioni: tecnico attuariali, contabili, statistiche ecc. ... Riguardo all'introduzione di calcolatori nella Pubblica Amministrazione, tenni una relazione (in un convegno all'EUR* [Roma] *sull'argomento) giudicata "coraggiosa" (specie dagli stranieri) per le critiche ai criteri antiquati delle procedure e dei concetti seguiti dalla Pubblica Amministrazione per scegliere e decidere il da farsi* [...]. *Promossi l'introduzione di un "numero anagrafico" per i cittadini, che venne introdotto poi assai meglio, con l'attuale codice fiscale alfanumerico. Per finire accenno a un'idea ... che sviluppai in relazione al problema dei mezzi di trasporto entro l'area della prevista Esposizione all'EUR (per il 1942). Consisteva in nastrovie: strisce scorrevoli (più rapide di quelle attuali, tipo aeroporto), ma con "imbuti" di entrata* ([19]).

Un solo episodio a proposito dell'interesse di de Finetti per la politica. Il 19 Novembre 1977, egli fu arrestato a causa di un articolo a favore dell'obiezione di coscienza, pubblicato su *Notizie Radicali*. Il suo arresto durò soltanto qualche ora, fortunatamente per lui, ma anche per l'Italia, che in caso contrario avrebbe mostrato di impedire la libertà di pensiero, colpendo proprio lui, "l'ultimo dei giusti", come ha osservato affettuosa-

([19]) Biografia [B], pp. 7-8.

mente Massimo Piattelli Palmarini ([20]). All'uscita dell'Accademia Nazionale dei Lincei un intervistatore chiese a Bruno de Finetti:

– *Che vuol dire un episodio di questo genere per lei?*
– *Per me è il riconoscimento che non sono soltanto un matematico, sono anche un cittadino che si preoccupa delle sorti dell'Italia, ridotta in questo stato da governanti che non stimo* ([21]).

Com'era nel suo stile, egli stesso, nel 1979, in occasione di un Congresso internazionale a Parigi, accennò con garbato umorismo al pericolo che aveva corso di finire nelle patrie galere.

Bruno de Finetti si è spento a Roma il 20 luglio del 1985.

Studiosi che lavorano sui temi sviluppati da de Finetti si trovano in molte Università, e fra queste, in particolare, in quelle di Stanford, Harvard, Berkeley, Cambridge, Zurigo, Costanza e Pittsburgh.

Le pubblicazioni di de Finetti sono più di 400 fra articoli e libri. La maggior parte dei manoscritti, delle lettere, degli appunti, e alcuni volumi della biblioteca privata di Bruno de Finetti, sono stati acquistati dall'Università degli Studi di Pittsburgh (USA) e ordinati nella *Bruno de Finetti Collection* assieme a quelli di Rudolf Carnap, Hans Reichenbach e Franck P. Ramsey. Il materiale è già stato microfilmato e catalogato. L'elenco è disponibile telematicamente (*A Guide to the Papers of Bruno de Finetti, 1924-2000*) nel sito dell'Università degli Studi di Pittsburgh ed è in parte accessibile anche presso l'Archivio dell'Accademia dei Lincei.

2. – L'impostazione soggettivistica di de Finetti

L'impostazione soggettivistica ([22]) del calcolo delle probabilità di de Finetti, comprende al suo interno le altre impostazioni e ne amplia le possibilità applicative fornendo una guida per pensare ed agire nelle

([20]) Piattelli, Palmarini 1995.

([21]) de Finetti A 1977d.

([22]) Bruno de Finetti ha usato anche l'espressione "impostazione soggettiva", ma preferiva "impostazione soggettivistica" tanto da correggere spesso la prima espressione in tal senso. Si veda anche l'articolo di Carla Rossi nel presente volume.

condizioni di incertezza che rappresentano la maggior parte dei problemi che affrontiamo.

> *La prima illustrazione (in termini discorsivi, ma abbastanza completa come abbozzo introduttivo) del proprio punto di vista riguardo alla probabilità – punto di vista in radicale contrapposizione nei riguardi di tutte le svariate, imperversanti concezioni "oggettiviste" – si trova nel saggio* (*senza formule né formulazioni matematiche*): *Probabilismo: saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza* ([23]).

La prima ampia esposizione, in forma anche tecnica, delle vedute di de Finetti è quella da lui presentata nel 1935 a Parigi, in una serie di cinque conferenze all'Institut Poincaré: *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives* (1937, pp. 1- 68) e, in forma di trattato, in *Teoria delle probabilità* (Einaudi, 1970, 2 volumi).

La sua teoria viene anche riconosciuta come modello dell'apprendimento induttivo e traduce in forma matematica il punto di vista raggiunto nella filosofia con la penetrante critica di Hume. Tutto discende dalla 'coerenza' delle decisioni da prendere con la mente, ma anche d'istinto:

> *un falso pudore vieta di menzionare la parte del processo della scoperta che si svolge più o meno nella sfera dell'inconscio, o del subconscio, per esibire soltanto la dimostrazione fossilizzata nella sua forma scheletrica di logica freddamente deduttiva e formalistica* [...]. *Occorre* [...] *riconoscere l'insostituibile funzione del ragionamento inconscio che permette di individuare congetture.* (de Finetti A 1974a, p. 34)

La probabilità ha senso soltanto a partire dalle proprie conoscenze ed esplicitando il proprio grado di fiducia nell'avverarsi di un evento, che può essere considerato in termini economici. Per essere coerenti,

([23]) de Finetti A 1931. In de Finetti A 1976f, aggiungerà: *Sostanzialmente, non ho mai trovato nulla da modificare e aggiungere (pur estendendola e approfondendola) alla concezione che mi sono andato formando tra il 1926 e il 1928, il triennio a cavallo della laurea.*

come già detto, basta non essere disposti a pagare un prezzo positivo per un guadagno certamente negativo. Di più, si è coerenti se e solo se i nostri gradi di fiducia si combinano secondo le regole del calcolo delle probabilità. Tale impostazione è alla base dell'induzione bayesiana, di cui de Finetti afferma:

> *a mio avviso è l'unica corretta* [e non] *esistono altre forme accettabili, non erronee, di ragionamento induttivo*. (de Finetti A 1977e, p. 174)

Oggi tale impostazione è predominante e mostra sempre nuovi sviluppi matematici, ottenendo apprezzamenti da economisti, filosofi, psicologi e pedagogisti che vi riscontrano sia il superamento di altre posizioni difficilmente giustificabili, sia il riconoscimento del sostrato psicologico dei nostri convincimenti e atteggiamenti, sia infine, un modello dell'apprendimento induttivo, impossibile qualora venga utilizzata l'indipendenza stocastica degli eventi (Barra 2006, p. 10). Non mancano contrapposizioni o riconoscimenti soltanto parziali dell'impostazione di de Finetti. A tale proposito egli afferma:

> *Forse è troppo ottimistica la mia stima, secondo cui per superare la situazione attuale occorrerà ancora mezzo secolo. Tale stima è basata sulla considerazione che occorsero circa trenta anni perché delle idee sorte in Europa (Ramsey, 1926, de Finetti, 1931) cominciassero ad attecchire in America (nonostante vi fosse pervenuto, in forma simile, B.O. Koopman nel 1940). Supponendo che possa occorrere altrettanto tempo perché ivi si affermino, e poi ancora altrettanto per il viaggio di ritorno, si giungerebbe circa al 2020*. (de Finetti L 1970, p. 4)
>
> *Sembra proprio* [...] *che tutti si preoccupino col massimo impegno di non lasciar vedere la probabilità come Dio l'ha fatta, munendola di una foglia di fico* [...] *forse temendo l'incriminazione per oltraggio al 'comune senso del pudore'* [...]. *Dell'attenzione prestatami, vi ringrazio sentitamente, e prego di scusarmi se – dato l'assillo di dire sia pur succintamente tutto o quasi tutto ciò che mi appariva essenziale – di tale attenzione ho certamente abusato*. B. d. F. ([24]).

([24]) Sono le ultime parole e la 'firma' dell'articolo de Finetti A 1976f.

3. – Cenni alla concezione didattica di Bruno de Finetti [25]

Ci limitiamo qui ad accennare ai punti più salienti della concezione didattica di de Finetti, rimandando per ulteriori dettagli agli altri saggi del presente volume.

Nel suo impegno per il miglioramento della società, Bruno de Finetti dedica molto tempo alla scuola e organizza Gare e Club di Matematica per abituare gli studenti a risolvere problemi e per esercitarli alle valutazioni di probabilità. Dal 1970 al 1981 è presidente della Mathesis e dal 1972 al 1981 è direttore della rivista *Periodico di matematiche*. In questa, e in molte altre riviste e libri, pubblica un numero veramente notevole di lavori di didattica della matematica, molto apprezzati anche all'estero.

In de Finetti si realizza l'unione fra le componenti del pensiero induttivo e deduttivo, fra teoria e pratica, assieme ad una visione unitaria, anzi ad una 'fusione' di molti aspetti della conoscenza, che gli permettono di risultare anche eccezionalmente efficace dal punto di vista didattico, e di "fare scuola" ([26]). Persino gli autori che parlano di lui sono spesso meno comprensibili del suo messaggio diretto.

In particolare de Finetti considera fondamentale l'"apprendere per problemi", il collegamento con le applicazioni e il ragionamento induttivo, e cerca di fondere insieme gli argomenti e i metodi risolutivi (*fusionismo*), lasciando molto spazio alle possibilità di scoperta ([27]). Lo strumento preferito è la geometria (anche in dimensione qualsiasi). A questo proposito egli afferma:

> *La nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico, ma stati-*

([25]) Chi scrive ha consigliato di pubblicare integralmente nel presente volume de Finetti A 1974a.

([26]) Ad esempio chi scrive si è ispirato a de Finetti nel proporre "IN-DE" come nome di una rivista [induzione e deduzione], modificato in *Induzioni* ..., e nell'esprimere la stessa necessità nella propria premessa alla ristampa della *Enciclopedia* a cura di L. Berzolari *et alii*. (1930-1950).

([27]) Si rimanda a: de Finetti L 1944 e de Finetti L 1967.

stico, economico ecc.; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi pratici la cui impostazione scientifica richiede lo strumento matematico. (de Finetti L (1944) 1959, p. 256)

Ciò che occorre è suscitare interesse e curiosità con visioni ampie e suggestive, insegnare, più per problemi che per teorie, usare ogni metodo utile ad ampliare le prospettive (e anche, certo, i metodi propri della «matematica moderna», ma in quanto utili, non in quanto sedicentemente «moderni»). (de Finetti A 1971b, p. 101.)

... le mie preferenze consisterebbero nel rendere tutto semplice, intuitivo, informale, e, se sollevo questioni "sottili", vuol dire che mi sembra proprio che non se ne possa fare a meno. (de Finetti L 1970, p. 5)

In uno degli ultimi lavori di de Finetti intitolato *Ciò che ritengo essenziale raccomandare agli insegnanti* ([28]), nel paragrafo intitolato: *Più che parole, esempi*, egli si rivolge anche a chi deve "insegnare ad insegnare" dicendo:

Più che le parole, per persuadere, occorrerebbero esempi. E non solo per persuadere, ma per aiutare: è chiaro che un insegnante, se legge dei consigli in termini generici, e ne rimane convinto, non per questo è in grado di trovare il modo e il tono in cui svolgere, rinnovandosi, il proprio insegnamento. (de Finetti A 1977f, p. 94)

4. – Bruno de Finetti e ...

In questo paragrafo desidero accennare, attraverso citazioni che credo significative, alle interazioni di de Finetti con alcuni matematici del suo tempo particolarmente interessati alla didattica.

4.1 – *Bruno de Finetti e Emma Castelnuovo*

Comandato a Roma all'Istituto di Calcolo Picone, de Finetti tiene molto che la figlia Fulvia frequenti la terza classe di Emma Castelnuovo al Tasso, nel 1952-53.

([28]) de Finetti A 1977f, p. 94.

Chi scrive ha avuto informazioni dirette da Emma e da Bruno ([29]), ad esempio nei lunghi viaggi con Emma per presentare tredici Esposizioni di Matematica, sette in Italia e sei all'estero, o mentre scriveva con lei un libro, e per aver tenuto le esercitazioni al corso di de Finetti dal 1973 al 1976, e, unico fra i matematici del gruppo, per aver trascorso con de Finetti un mese del 1976 in un luogo stupendo nella foresta di Fontainebleau dove, dopo un Convegno Internazionale in suo onore, si doveva costituire un Centro di Ricerca, che poi non fu realizzato. Poche le occasioni vissute insieme con Emma e Bruno, ma sicuramente molto istruttive.

Figura 1. Bruno de Finetti (a destra) e Mario Barra a Fontainebleau nel 1976

Ho potuto ad esempio constatare che l'approccio "empiristico e induttivistico", e in generale, didattico, di Emma sono più vicini a quelli di de Finetti, che alle posizioni analoghe del padre Castelnuovo

([29]) Chi scrive, alla CIEAEM del 1974 di Bordeaux, organizzata da Guy Brousseau sull'insegnamento della probabilità, ha portato un intervento scritto da de Finetti. La stima di Emma nei confronti di BdF si rivela in particolare in: E. Castelnuovo 1967.

e dello zio Enriques. Basta leggere l'elenco delle 'caratteristiche' dell'insegnamento di Emma, indicate in numerosi articoli ([30]), per rilevare una notevole concordanza con le idee di de Finetti. D'altra parte, a casa di Emma si tenevano alcune riunioni con gli insegnanti, cui partecipavano regolarmente anche Lucio Lombardo Radice, Bruno de Finetti e Michele Pellerey. Qui è possibile aggiungere soltanto alcune citazioni ([31]):

> *"Matematica e realtà"*: *tre volumi di testo per la scuola media* [...]. *È un avvenimento che va segnalato: la diffusione di una impostazione di questo genere nella scuola italiana significherebbe un "salto di qualità" di portata inestimabile* [...] [questo] *esempio di tipo diverso e grandemente ammirevole, è dato dai libri di Emma Castelnuovo*. (de Finetti A 1974a, p. 31)
> *Che occorrano doti eccezionali di capacità e di volontà per iniziare, sempre in ambiente più o meno ostile, attività di tipo non convenzionale, è indubbio. Questo merito è immenso, e la miglior prova ne è il livore di critici boriosi e velenosi. Ma il seguire, anche in modo indipendente, tali esempi, non è difficile. I laureandi e laureande che collaborano (in una specie di "tirocinio") ai corsi di Emma Castelnuovo (o di altre insegnanti del suo gruppo) o alla preparazione delle «Mostre» (cfr. PdM, 1973, n. 5 e 1974, n. 4-5) si permeano subito, senza forzature, del suo modo di pensare e parlare ai ragazzi, e lo applicano poi naturalmente divenendo insegnanti. La superiorità (presunta) di Emma Castelnuovo usata come alibi per "la pigrizia" di chi la ritiene irraggiungibile, non sta nel fatto di essere onnisciente e infallibile, ma proprio nel non avere (come purtroppo quasi tutti gli "insegnanti" di fronte agli allievi) la debolezza di volerlo far credere. Quando, nel dialogare tra lei e gli allievi, si presenta un problema nuovo, una circostanza imprevista, lei non ha nessun disagio a dire che non le viene subito la risposta, a cercarla insieme a loro, a discutere insieme se risposte ovvie di ricerca pensate da lei o da altri si rivelino esatte o errate. Questo è saper "essere se stessi"; questo è saper educare; questo, e non la ridicola pretesa di farsi ritenere infallibili, incute rispetto e fiducia e simpatia*. (de Finetti A 1975a, p. 16)

([30]) Barra 2013a, Barra 2013b e Barra 2014. Si veda anche il volume recentemente uscito Giacardi, Zan 2013.

([31]) Si può vedere anche Barra 2013a.

4.2 – *Bruno de Finetti e Giovanni Prodi*

In poco spazio si riporta solo una lettera di Giovanni Prodi a de Finetti:

Sono lieto di constatare le coincidenze delle nostre opinioni in materia di insegnamento della matematica. Il fatto, del resto, non è del tutto casuale, perché sulle mie opinioni hanno molto influito i tuoi scritti. Soprattutto mi ha interessato quel tuo sforzo di esemplificare, di tracciare linee concrete per un insegnamento della matematica veramente vivo e attuale [...]. *Adesso, dopo i successi dell'algebra in tutti i rami della matematica, si pensa che i nostri adolescenti debbano occuparsi con fervore e gioia di gruppi, anelli, moduli, ecc. Naturalmente, non nego che i concetti fondamentali debbano entrare nell'insegnamento secondario, ma non in misura e forma superiori alle capacità che hanno i giovani di ESEMPLIFICARE e di farne APPLICAZIONE A CONCRETI PROBLEMI. Se l'insegnamento dell'algebra si dovesse attuare con il fanatismo di certi suoi banditori, nel liceale divenuto ingegnere, avvocato o medico "rimarrebbe, nei riguardi della matematica, un senso di vuoto e di incubo PEGGIORE di quello che si produce ora* [...]"

Segue una considerazione di de Finetti:

Non occorrono commenti. Mi si consenta solo di ringraziare anche pubblicamente il collega PRODI per avermi autorizzato a presentare per la pubblicazione queste parole destinate inizialmente solo a me, e chiare come un guanto di sfida. (de Finetti A 1965e, pp. 9-11)

4.3 – *Bruno de Finetti e Lucio Lombardo Radice*

Due brevi citazioni a proposito della stima di de Finetti per Lucio:

Ben vengano dunque i "rompiscatole" – quelli come me – che sgonfiano i palloncini che fanno stare in piedi ciò che non sta in piedi [...]. (de Finetti A 1975c, p. 35)

Deploro profondamente la stoltezza e l'autolesionismo delle correnti di pensiero che si mummificano riducendosi a chiese dogmatiche e intolleranti [...]. *Onore a chi non si piega, a chi resiste all'involuzione faziosa e mortifera. Onore a "Gli accusati" come sono chiamati, nel titolo del libro del collega e amico Lucio Lombardo Radice, gli scrittori sovietici perseguitati o emargi-*

nati per insufficiente acquiescenza alle autorità imperversanti nel loro paese. Onore a Lombardo Radice che, pur essendo membro del Comitato centrale del PCI, si mise in tal modo apertamente dalla loro parte. Ed, in certa misura, onore anche al PCI, che non si comportò come il confratello francese [...] *né per tale libro, né per il rifiuto di Lombardo Radice di votare per la scomunica ai compagni de "il Manifesto".* (de Finetti A 1975c, pp. 23-24)

5. – Alcuni riconoscimenti, premi e cariche onorifiche

Dennis V. Lindley ha affermato:

This book is not a text on probability in the ordinary sense ... is destined ultimately to be recognized as one of the great books of the world ([32]).

Robert Nozich analogamente:

Fra i pensatori italiani che mi hanno maggiormente influenzato colloco al primo posto Bruno de Finetti e al secondo Giovan Battista Vico ([33]).

Franco Modigliani, intervistato in occasione del Nobel per l'Economia, disse che anche de Finetti avrebbe meritato il premio ([34]).

Bruno de Finetti ha ottenuto numerosi premi e riconoscimenti. In particolare ha ricevuto il Premio Toja dell'Istituto nazionale delle ricerche, nel 1939, il Premio internazionale per le scienze assicurative dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni presso l'Accademia Nazionale dei Lincei nel 1964, un premio dall'Associazione degli attuari svizzeri nel 1978, un Premio della Società francese di Statistica nel 1979. Nel 1980 fu nominato professore emerito dell'Università di Roma. Fu inoltre membro dell'Istituto Internazionale di Statistica, membro del Centro Studi Metodologici, Fellow dell'Institute of Mathematical Statistics, corrispondente degli Istituti attuariali francese e svizzero, socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei e socio na-

([32]) Dalla prefazione di Lindley al libro di de Finetti L (1970) 1975.

([33]) Dall'intervista: *de Finetti, il Maestro delle probabilità*, di M. Piattelli Palmarini a R. Nozich (filosofo, docente all'Università di Harvard), Corriere Della Sera, 25 luglio 1985.

([34]) F. de Finetti 2000, p. 727.

zionale dal 1980, presidente della Mathesis (1970-1981) e direttore del *Periodico di matematiche* (1972-1981), organo della Mathesis stessa.

A de Finetti è stata affidata nel 1968 la redazione della voce *Probability interpretations* della International Encyclopaedia of Social Sciences, successivamente aggiornata in International Encyclopaedia of Statistics.

L'European Association for Decision Making, con sede ad Amsterdam, assegna ogni due anni, a partire dal 1995, un premio internazionale in onore di Bruno de Finetti, cui partecipano scienziati e psicologi di tutto il mondo.

Il 21 Marzo 2015 il volume di de Finetti *Teoria della probabilità* (1970) è stato nominato *Italy24 Book of the week* (Il Sole 24 Ore del 21/03/2015).

6. – Un impegno e una previsione di de Finetti

> *Urge impegnarci. Urge riuscire. Altrimenti saremo ben presto sopravanzati e distanziati anche dai paesi "in via di sviluppo". Nel cammino verso la civiltà moderna essi incontrano infatti difficoltà immani, ma possono tuttavia percorrere una scorciatoia senza intoppi.* (de Finetti A (1965b) 1969, p. 301)

de Finetti ci ricorda una poesia di un autore che gli è caro:

Oggi essere avanti trent'anni
– e forse mille – significa
sapere contestare costruendo.

Danilo Dolci, *Il limone lunare*, Laterza, 1970, p. 131.

Appendice

L'esempio più semplice di mistura di "bernoulliane": in ciascuna la probabilità non cambia, mentre si modifica nella loro mistura

Un questionario rivolto, durante più di 40 anni, ad almeno 1000 fra studenti (all'inizio dell'ultimo anno del Corso di laurea in Matematica) e insegnanti, presenta il seguente problema:

in un'urna U ci sono 2 palline considerate di estrazione equiprobabile: bianche (B) o nere (N). Le composizioni possono essere: NN, BN, BB e, in base alle informazioni disponibili, si assegna ad esempio, uguale probabilità 1/3 alle 3 ipotesi, rispettivamente: H_0, H_1, H_2 ([35]).

(1) Si estrae da U una pallina a caso. Qual è la probabilità, p(B), che sia bianca?

(2) Dall'urna precedente, vengono estratte una pallina Bianca, [B_1], che si rimette nell'urna (estrazione *con reimbussolamento*), e poi ancora una pallina bianca, [B_2], anch'essa rimessa nell'urna. Si effettua una terza estrazione. Qual è ora la probabilità di estrarre una pallina bianca? Cioè quanto vale $p(B/B_1B_2)$ [indicata anche con $p(B_3/B_1B_2)$]?

La risposta corretta alla prima domanda è $p(B) = 1/2$, ed è individuata quasi sempre per simmetria, oppure perché:

$$p(B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Alla domanda (2) moltissimi continuano ad indicare 1/2, perché c'è *reimbussolamento*, non considerando ad esempio che, già dopo l'estrazione della prima pallina bianca, si annulla la probabilità dell'ipotesi che l'urna contenga due palline nere.

L'esempio credo sia significativo e "opportuno" del perché "nessuno" fornisce la risposta corretta che è: $p(B/B_1B_2) = 9/10$.

$$\text{Infatti: } p(B_3/B_1B_2) = \frac{p(B_1B_2B_3)}{p(B_1B_2)} = \frac{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{24}}{\frac{5}{12}} = \frac{9}{10}.$$

([35]) Tali probabilità poste uguali da Laplace sono ora adottate solo per semplificare i calcoli.

Oppure, in altro modo:

$$p(H_0/B_1B_2) = 0,\ p(H_2/B_1B_2) = \frac{p(B_1B_2/H_2)p(H_2)}{p(B_1B_2)} = 1 \cdot \frac{1}{3}/5/12 = 4/5,$$

quindi, $p(H_1/B_1B_2) = 1/5$, da cui:

$$p(B_3/B_1B_2) = \sum_0^2 p(B_3/H_i)p(H_i/B_1B_2) = 1/2 \cdot 1/5 + 1 \cdot 4/5 = \frac{9}{10}.$$

Supponiamo invece che dall'urna U siano state estratte, sempre *con reimbussolamento*, ***b*** bianche in 10 estrazioni, con $1 \leq b \leq 9$ e $b \neq 5$.

A questo punto ogni persona direbbe che la probabilità di estrarre una pallina bianca in una successiva estrazione è 1/2, perché l'urna contiene soltanto due palline e sono usciti entrambi i colori! [Risulta così anche dal tipo di calcolo precedente].

Tuttavia, guardando soltanto la frequenza relativa in queste 10 estrazioni, si dovrebbe invece concludere che la probabilità è divenuta b/10, che negli 8 casi nei quali $b \neq 5$, risulterebbe assurdo.

Se poi si obietta che, per conoscere una probabilità, sono necessarie molte prove, certo non infinite, si richiede di farne un *mucchio*.

Tale richiesta è inconsistente. Forse serve soltanto per negare l'importanza della formula di Bayes,

> [...] *si tratterebbe di una proprietà legata all'esistenza di un mucchio: finché si hanno pochi oggetti essi non costituiscono un mucchio e nulla si potrebbe concludere, ma se sono molti il mucchio c'è e allora, ma soltanto allora, tutto il ragionamento fila,* [...] *quando finalmente il nonmucchio si trasforma in mucchio* [...] passando da *piùforsechesìcheforsechenomucchio* [...]. (de Finetti L 1970, p. 570)

BIBLIOGRAFIA

1) Alcune biografie di Bruno de Finetti

[A] DE FINETTI, B. (1981a), *Nota biografica* a cura di de Finetti, in B. DE FINETTI, *Scritti (1926-1930)*, Padova: Cedam, XVII-XXIV. Questa nota biografica era già stata stampata nella *Raccolta degli scritti di Bruno de Finetti*, INA, 11 vol., Roma, 1979, 1-7.

[B] DE FINETTI, B. (1981b), *Chi sono "Io"?* Intervento di de Finetti (distribuito ma non pubblicato) al Convegno ai Lincei *In Honour of Professor Bruno de Finetti, Rome, 6-9 April, 1981, Exchangeability in Probability and Statistics*, in de Finetti 1982.

[C] FICHERA, G. (1987), Ricordo di Bruno de Finetti Professore nell'Ateneo triestino, *Atti*, *2631*, Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali, Università di Trieste, n. 1, 27-31.

[D] DABONI, L. (1987), Necrologio di Bruno de Finetti, *Bollettino dell'UMI*, I-A (7), n. 2, 283-308.

[E] DE FINETTI, F. (2000), Alcune lettere giovanili di B. de Finetti alla madre, *Nuncius, Annali di Storia della Scienza, Istituto e Museo di Storia della Scienza*, XV, 2, 2000, 721-740.

2) Altri riferimenti bibliografici

BARRA, M. (2001), Coordinate ternarie, ennarie e coordinate proiettive omogenee. Tassellazioni, Elezioni con la legge elettorale proporzionale pura e suoi paradossi. La situazione italiana e il caso asintotico di n partiti, *Progetto Alice*, n. 4, v. 2, 3-24.

BARRA, M. (2006), Bruno de Finetti, un matematico geniale al servizio della società, *Induzioni, demografia, probabilità, statistica a scuola*, I parte, n. 33, 9-20; II parte, N. 34, 9-24.

BARRA, M. (2013a), Emma Castelnuovo e Bruno de Finetti visti da chi scrive, *Progetto Alice*, N. 41, v. 14, 195-216.

BARRA, M. (2013b), Moltissime proposte didattiche collegate agli insegnamenti di Emma Castelnuovo, Bruno de Finetti e Lucio Lombardo Radice, *Progetto Alice*, n. 42, v. 14, 419-541.

BARRA, M. (2014), Approfondimenti degli insegnamenti di Emma Castelnuovo, *Progetto Alice*, n. 44, v. 15, 205-222.

BERNARDI, C. (2012). La nascita della cattedra di Matematica e Scienze e la sua storia, *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI*, V (1), 197-296.

BERZOLARI, L., VIVANTI, G., GIGLI, D. a cura di (1930-1950), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, Milano: Hoepli, 7 volumi, rist. 2003.

CASTELNUOVO, E. (1967), È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica? *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 22, n. 4, 539-549.

CASTELNUOVO, E. (1969), Différentes représentation utilisant la notion de barycentre, *Educational Studies in Mathematics*, 2, Issue 2-3, 307-332.

CASTELNUOVO, E. (1970), Le applicazioni del calcolo baricentrico, *Le Scienze*, III, n. 18, 11- 21.

FREUDENTHAL, H. (1974), The crux of Course Design in Probability, *Educational Studies in Probability*, Amsterdam, 5, 261-277; Trad. it. Il buon senso e le foglie di fico: Hans Freudenthal sull'insegnamento della Probabilità, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 12, 1975, Suppl. fasc. 3, 1-9.

GIACARDI, L., ZAN, R. (ed.) (2013), *Emma Castelnuovo - L'insegnamento come passione*, La Matematica nella Società e nella Cultura, (1) 6, N. 1 Fascicolo speciale.

HARASIM, G. (1975), Il carro Avanti ai buoi, *Periodico di Matematiche*, 51, n. 1-2, 5-10.

MARKOWITZ, H. (2006), de Finetti scoops Markowitz, *Journal of Investment Management*, 4, 5-18.

MURA, A. ed. (1995), *Filosofia della Probabilità*, Milano: Il Saggiatore.

PIATTELLI PALMARINI, M. (1995), *Scienza come Cultura, Galleria dei filosofi*, Milano: Mondadori-D'Agostini.

PRESACCO, F., SERAFINI, P. (2007), The origins of the mean-variance approach in finance: revisiting de Finetti 65 years later, *Decisions in Economics and Finance*, 30, 19-49.

PRODI, G. (2003), Evoluzione di un progetto da "Matematica come scoperta" a "Scoprire la matematica", in *Associazione Subalpina Mathesis, Seminario di storia delle Matematiche Tullio Viola, Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, 13-20.

WHITEHEAD, A.N. (1898), *Universal Algebra*, Cambridge: The University Press.

Mario Barra
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze,
Università di Roma La Sapienza
e-mail: barra@mat.uniroma1.it

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 43-72

Bruno de Finetti e i programmi d'insegnamento della matematica nella scuola secondaria

MICHELE PELLEREY

Il primo problema non è tanto quello di far apprendere la matematica, ma di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero, che vi risponde a bisogni insostituibili della mente e cui si fondono i motivi pratici che ne danno occasione e l'elaborazione scientifica e concettuale che ne ricava costruzioni di limpida eleganza e bellezza quasi sovrumana. E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce.

(Bruno de Finetti, Trieste, 24 novembre 1943) (1)

1. – Introduzione

Il mio contributo intende esplorare quale epistemologia della matematica, considerata nel contesto dell'educazione scolastica, caratterizzasse il pensiero di de Finetti nell'esaminare e proporre i vari contenuti propri dei programmi della scuola secondaria.

A mio avviso la sua impostazione epistemologica si era sviluppata durante il duro lavoro di costruzione della sua opera didattica fondamentale, *Matematica logico intuitiva*, elaborata per gli studenti universitari negli anni Quaranta (2). In questa prospettiva è di grande in-

(1) De Finetti B., *Prefazione* alla prima edizione di de Finetti L (1944), 1959, p. X. Si veda nel presente volume la sezione "La parola a Bruno de Finetti".

(2) Ne ha data una testimonianza la figlia nel suo contributo del 2010: Fulvia de Finetti, L'insegnamento della matematica secondo de Finetti, *Periodico di matematiche*, 3, 2010, p. 12.

teresse evidenziare anche la sua particolare attenzione ai processi di costruzione delle conoscenze matematiche nella prospettiva psicologica.

Da quest'ultimo punto di vista, vorrei subito dedicare qualche riga a quanto egli mi ha insegnato per il mio lavoro di studioso dei processi di apprendimento, soprattutto non matematici. L'idea che si parta sempre dalle opinioni (o dalle intuizioni, o dai giudizi) che abbiamo nel merito della possibilità del verificarsi d'un evento futuro, mi ha portato a estendere tale assunto alla considerazione più generale della plausibilità delle nostre affermazioni o conclusioni. Ricordo un incontro tra de Finetti e George Polya avvenuto poco dopo l'assunzione da parte di de Finetti della Presidenza della Mathesis nel 1971. Polya era a Roma per presentare le sue idee in merito all'euristica presso la Mathesis (3). Discutendo dei loro approcci, il primo sulla dinamica del pensiero nel caso della probabilità, il secondo sul processo in base al quale si viene a elaborare un giudizio di plausibilità nei riguardi di specifiche conclusioni, essi si trovarono d'accordo sul ruolo nelle loro riflessioni di due punti di appoggio: la qualità delle informazioni che derivano dall'esperienza e il ragionamento che su di esse si può sviluppare (certo non un ragionamento di natura logico-formalista). Nel caso della probabilità, secondo de Finetti era importante che l'opinione presente circa il grado di fiducia, che si poteva avere riguardo al verificarsi di un evento futuro, potesse rinforzarsi, o depotenziarsi, sulla base di un corretto uso delle informazioni rilevanti pro o contro tale assunto. Polya ricordava come il grado di fiducia da dare alle affermazioni, anche di carattere scientifico, oltre che a quelle normali quotidiane, derivasse da un soppesare le prove favorevoli o contrarie a tale conclusione. Se le evidenze a favore fossero state per peso e numerosità maggiori di quelle contrarie e convergenti verso la stessa conclusione, la plausibilità dell'affermazione sarebbe aumentata di conseguenza. Era evidente l'analogia tra le due affermazioni. Alla loro base stava l'apertura verso il miglioramento delle proprie opinioni, dei propri giudizi: un atteggiamento decisamente antidogmatico. Credo che molte delle battaglie che

(3) Una sintesi della conferenza di Polya dal titolo *Deviner et démontrer* è stata pubblicata da de Finetti sul Periodico di matematiche nel 1972 (de Finetti A 1972c).

de Finetti ha ingaggiato trovavano qui la loro radice e il perché egli parlasse di "imbecillità" ([4]) dei comportamenti chiusi, magari formalmente corretti, ma insensati, incapaci di rivedere le proprie assunzioni e i propri pregiudizi, e proprio per questo rigidi e inflessibili.

Ebbene lo sviluppo della psicologia dell'apprendimento concettuale ha messo in luce come il formarsi dei concetti e dei giudizi, sia basato su un lungo percorso, che parte da intuizioni molte volte confuse, a volte anche distorte, ma che progressivamente vanno chiarendosi e precisandosi sulla base della considerazione di nuovi casi a favore o contro l'iniziale assunzione e grazie alla riflessione critica innestata da tali nuovi apporti. In questo percorso la parola ha un suo ruolo puntuale come riferimento. Un esempio può essere quello del formarsi del concetto di rapporto. Ben presto si hanno intuizioni sotterranee, che spesso non sono linguisticamente espresse in modo chiaro, ma l'accumularsi dell'esperienza può portare alla fine a una riflessione critica, che ne permette una definizione sufficientemente chiara. Lucio Lombardo Radice, riprendendo un'espressione cara a de Finetti, parlava di concetti astratti come multi-concreti ([5]), nel senso che emergono dal confronto tra casi diversi ed esperienze molteplici, tramite la ricerca di analogie e differenze, onde far emergere con più chiarezza e precisione il nucleo concettuale essenziale e la relativa espressione linguistica. Così a poco a poco la frazione, la percentuale, il numero decimale, appaiono modalità di rappresentazione simbolica dello stesso nucleo concettuale, quello di rapporto.

Rileggendo le prese di posizione di Bruno de Finetti, spesso si ritrova proprio questa impostazione come elemento centrale nel suo pensiero, fin dai suoi primi interventi. Nel 1954 scriveva su Archimede:

> *vera istruttiva astrazione è soltanto quella che parte da molte nozioni concrete e mostra il concetto comune che se ne può trarre come astrazione.* [...]. *Astrazione significa sintesi da molte cose che hanno alcunché in comune,*

([4]) Era diventata comune questa definizione, dopo la pubblicazione di de Finetti A 1965b.

([5]) Per esempio si può citare: G. Catalano, L. Lombardo Radice, *Minialgebra*, Milano: Feltrinelli, 1967, p. 23.

non vaniloquio creato su nulla e per nulla. È questo in certo senso il punto capitale, perché «capire la matematica», a mio avviso, non significa tanto essere in grado di eseguire certi calcoli o certi ragionamenti, quanto il saper associare nel subcosciente ad ogni vuota formula o teorema la più ricca moltitudine delle sue concrete possibili interpretazioni e applicazioni. (de Finetti A 1954a, p. 207)

Mi è parso essenziale richiamare subito questo elemento di riferimento, per chiarire il perché di certe posizioni che a molti erano sembrate un po' estremistiche, come la sua insistenza sul fusionismo definito, anche dai suoi amici, 'confusionismo' (de Finetti A 1978a, pp. 10-11). In realtà, de Finetti riteneva che la potenza di un concetto fondamentale non potesse essere racchiusa in un'interpretazione riduttiva o in un'espressione formale astratta, spesso impedendo con ciò la possibilità di una sua valorizzazione esplicativa più generale. Non solo, ma credeva che dietro ogni concettualizzazione esistesse una storia, molto spesso soggettiva, d'incontro con l'esperienza, con la realtà. E la stessa cosa valeva per ogni giudizio di probabilità, così come di plausibilità: occorreva considerarlo nel suo sviluppo e nella sua provvisorietà. Ogni concetto o giudizio era sempre possibile rivederlo, precisarlo, allargarlo ad altri casi.

2. – La partecipazione di Bruno de Finetti al movimento di rinnovamento dell'insegnamento della matematica degli anni Sessanta

Per capire le questioni poste nel corso degli anni Sessanta del secolo scorso dalla definizione dei programmi di matematica sia per la secondaria inferiore o di primo grado, sia per la secondaria superiore, e le posizioni assunte da Bruno de Finetti in tale occasione, sembra utile richiamare a grandi linee qual era il dibattito in corso, in particolare in ambito europeo. Dagli anni dell'immediato dopoguerra si discuteva della necessità di un rinnovamento profondo dell'insegnamento della matematica. In seguito al cosiddetto *Sputnik shock* del 1957 si era accentuato tale discussione sia negli Stati Uniti d'America, sia in Europa. In particolare nel 1959 si era tenuto a Royaumont (23 novembre - 4 dicembre) in Francia un seminario organizzato dall'OEEC (*Organisation for European Economic Cooperation*), ora diventato OCSE, dedicato proprio a tale argomento ([6]). Per l'Italia parteciparono Luigi Campedelli e Emma Castelnuovo. In tale occasione si rimise in discussione l'insegnamento della geometria sulla base degli *Elementi* di Euclide per insistere su un approccio basato sull'algebra lineare e sugli spazi vettoriali, considerati in un contesto affine e non metrico. Fu in quell'occasione che Jean Dieudonné lanciò la sfida: "À bas Euclide".

Come vedremo, de Finetti fu del tutto favorevole a questa svolta. Mi sono sempre domandato come mai, a parte le considerazioni legate alle possibili applicazioni economiche. Ho trovato una risposta, constatando che la tesi di laurea conseguita presso l'Università di Milano nel 1927 sotto la guida di Giulio Vivanti, verteva proprio su un tema di analisi vettoriale in ambito affine.

Una delle conclusioni fondamentali del seminario di Royaumont sancì "la necessità di modernizzare 'insegnamento della matematica. Per realizzare questo proposito, è indispensabile che ogni Paese redigesse nuovi libri di testo e nuovi manuali" ([7]). Al fine di realizzare un coordinamento europeo in tale impresa venne costituito un gruppo di studio e realizzato un altro seminario a Dubrovnik dal 21 agosto al 19 settembre del 1960. In tale occasione ci si dedicò ai programmi per la scuola secondaria, ma anche si insistette sulla centralità in tale prospettiva della teoria degli insiemi:

> *La nozione di oggetti o elementi in quanto distinta dalla nozione di insiemi composti di oggetti, proprietà degli insiemi; relazioni fra gli oggetti di differenti insiemi o fra gli insiemi stessi, relazioni tra oggetti e insiemi ...* [tutto ciò] *rende più chiare numerose nozioni matematiche, talvolta mal comprese, e può essere usato per formulare teorie matematiche* [...]. *Sin da*

([6]) Per una sintesi sia del seminario di Royaumont e dei suoi risultati, sia di quello di Dubrovnik si può consultare Pellerey, 1989, pp. 47-52. Gli atti del seminario di Royaumont furono pubblicati nel 1961 (OEEC, 1961) e quelli di Dubrovnik nel 1962 (OEEC, 1962). Di questi ultimi si ha una traduzione italiana della prima parte dedicata alla scuola secondaria di primo grado (OCSE, 1963).

([7]) Le conclusioni del seminario di Royaumont sono contenute nel quinto capitolo di OEEC, 1961. Nell'Introduzione di OCSE, 1963, si riportano tali conclusioni presentando i lavori del seminario di Dubrovnik, pp. 9-13.

quando comincia a insegnare la matematica, il professore dovrebbe aver cura che gli alunni acquisiscano [...] *una comprensione della nozione di insieme.* (OCSE, 1963, pp. 22-23)

Con la legge 1859 del 31 dicembre 1962 in Italia fu approvata la cosiddetta scuola media unica per tutti, a completamento dell'obbligo scolare previsto dalla Costituzione. Nell'aprile del 1963 (D.M. 24 aprile 1963) furono decretati i nuovi programmi di matematica e si aprì contemporaneamente la questione dell'abbinamento dell'insegnamento di matematica e di osservazioni ed elementi di scienze naturali. Ne derivava anche la problematica connessa con la formazione e il reclutamento degli insegnanti ([8]).

Nel 1964 si svolsero a Frascati due convegni. Il primo nel mese di marzo dal 19 al 21 fu dedicato alla nuova scuola media e alla formazione dei docenti. Il secondo, tenutosi dall'8 al 10 ottobre, dedicato ai programmi della scuola secondaria superiore, ebbe carattere internazionale. Il tema era: "La matematica all'ingresso dell'università: situazione reale e situazione desiderabile". Al Convegno parteciparono noti studiosi europei come André Lichnerowicz, presidente del convegno, Georges Papy e André Revuz, che tennero relazioni generali, e italiani (tra cui Luigi Campedelli, Carlo Felice Manara, Angelo Pescarini). De Finetti tenne una relazione, riassunta nel 1965 sul *Periodico di Matematiche* (de Finetti A 1965a), aggiungendo commenti vari e i risultati dei suoi colloqui con i partecipanti. L'argomento da lui sviluppato era "In che senso e fino a qual punto è utile una differenziazione di programmi a seconda dei tipi di scuola e dei futuri studi degli allievi?".

Come conseguenza della riforma della scuola media, sembrava necessario procedere a una riforma della scuola secondaria superiore, in

([8]) Una ricostruzione a varie voci del dibattito relativo sia all'abbinamento tra l'insegnamento della matematica e quello delle osservazioni scientifiche, sia alla relativa formazione dei docenti e costituzione di un nuovo corso di laurea, si può trovare sul sito dell'Università Bocconi di Milano: www.matematica.unibocconi.it/pubblicazioni/pristemstoria-32-33-aprile-2013 (consultato il 20 febbraio 2015, verificato il 7 dicembre 2015). Il lettore interessato può trovare nei lavori raccolti in tale sito molti riferimenti, che consentono un adeguato approfondimento delle varie questioni coinvolte.

particolare dei licei. Nel caso dell'insegnamento della matematica si riteneva urgente redigere nuovi programmi. A questo fine, a cura della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) furono tenuti due incontri dal 23 al 26 febbraio 1966 e dal 16 al 18 febbraio 1967, rispettivamente sul primo biennio della scuola secondaria superiore e sul triennio liceale. A tali incontri partecipò attivamente anche Bruno de Finetti, oltre a numerosi docenti universitari e secondari di matematica e membri della Pubblica Amministrazione. I programmi elaborati in tali incontri furono nel seguito denominati: "I programmi di Frascati". Nell'immediato rimasero tuttavia in attesa di tempi migliori. De Finetti dedicò un lungo commento a tali programmi su il *Periodico di Matematiche* dell'aprile del 1967 (de Finetti A 1967a). Nel 1974, in un articolo intitolato "... attendendo Godot", rilevò come il progetto della commissione Biasini ([9]), che delineava una unificazione sostanziale di tutta la fascia secondaria, era già una "versione piuttosto annacquata" delle proposte di Frascati; ma ora si era verificato un "pauroso passo indietro riguardo alla riforma dell'insegnamento secondario superiore" (de Finetti A 1974e, p. 4).

Nel seguito prenderò lo spunto dagli interventi di de Finetti pubblicati in quel periodo per chiarire alcuni dei suoi orientamenti in merito all'impostazione di tali programmi e più in generale all'insegnamento della matematica, evidenziandone, come precedentemente detto, la prospettiva epistemologica e psicologica.

3. – L'abbinamento dell'insegnamento di matematica e osservazioni scientifiche, derivante dalla riforma della scuola media del 1962

Come accennato, la riforma della scuola media prevista dalla legge 1859 del 31 dicembre 1962 poneva alla matematica due sfide fondamentali: l'istituzione dell'insegnamento congiunto di matematica e

([9]) La Commissione Oddo Biasini, allora sottosegretario alla P.I., composta da 57 membri, rappresentanti delle diverse correnti sindacali e politiche, era stata nominata dal Ministro Misasi nel 1970 al fine di delineare una riforma della secondaria superiore. Il testo del Documento conclusivo si può consultare in *Annali della Pubblica Istruzione*, (novembre-dicembre) 1971, pp. 607-632.

osservazioni ed elementi di scienze naturali e la definizione dei programmi di matematica per i tre anni previsti. Sulla prima sfida de Finetti, contrariamente a molti matematici e alla stessa Emma Castelnuovo ([10]), era decisamente favorevole. Anche se, dato lo stato di preparazione degli insegnanti allora disponibili, sul piano attuativo occorreva andare cauti. La soluzione, che egli caldeggiava, era quella di costituire un nuovo canale formativo universitario diretto specificatamente a preparare i docenti nell'insegnamento congiunto di matematica e osservazioni scientifiche ([11]). In occasione del Colloquio di Frascati del 19-21 marzo 1964 sui problemi dell'insegnamento matematico, Roberto Giannarelli commentava su *Archimede*:

> *In sintesi, si può affermare che i pedagogisti e l'amministrazione sono favorevoli all'abbinamento e assai favorevoli anche i naturalisti. I matematici sono in maggioranza contrari, ma anche fra essi si trovano sostenitori dell'abbinamento soprattutto per il maggior peso che danno alle ragioni sociali e a quelle più attinenti alle necessità organizzative.* (Giannarelli 1964, p. 40)

L'essere tra i pochi matematici favorevoli non disturbava più di tanto de Finetti. In effetti, egli aveva sostenuto tale impostazione con decisione:

> *L'aspetto forse più controverso, nella formazione universitaria dei docenti, sarà quello relativo alle conoscenze in altri campi della scienza, non strettamente matematici. A mio avviso un professore di matematica dovrebbe risultare tanto più aperto e interessato a tutto il campo della scienza quanto più giovani sono gli studenti cui deve insegnare. Infatti l'insegnamento della matematica appare ostico ed arido alla maggior parte dei giovani (e purtroppo tale rimane nel loro ricordo e nel giudizio quando divengono adulti) proprio perché non si cerca, ma anzi si evita, di far comprendere il senso della matematica come strumento che «fa presa sulle cose», anziché come insulso sproloquio per costruire perfetti arzigogoli nel vuoto. Quale*

([10]) Posso testimoniare tale contrarietà, avendola sentita più volte dalla sua viva voce. Inoltre, Emma non accettò mai di insegnare anche osservazioni scientifiche.

([11]) Già nel 1963 presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma era stata nominata una commissione di studio in proposito e i suoi risultati erano stati approvati in linea di massima dalla stessa facoltà (de Finetti 1964, 73).

migliore rimedio che far constatare ai ragazzi che qualunque discorso incidentalmente avviato col professore di matematica (sulla fisica o l'economia, la biologia o la statistica, e via dicendo) avrà un tono di consistenza e di penetrazione diverso (anche senza un grado di conoscenza troppo esteso in ogni specifico campo) che riveli l'apporto della visione matematica? (de Finetti A 1964c, p. 35)

E già nel 1964 de Finetti vagheggiava quanto poi tentò di realizzare a cavallo del nuovo decennio:

Guardando invece verso il futuro, ritengo che sia preferibile e raccomandabile la preparazione di insegnanti specificatamente indirizzati verso tale insegnamento abbinato, rispondente sia alle esigenze di introduzione ed esemplificazione di concetti e strutture matematiche attraverso diretta derivazione dal concreto, sia alle esigenze dell'osservazione scientifica che attraverso misure, diagrammi, schemi di ragionamento ecc., avvia alla «visione» scientifica imperniata su concetti matematici. (*Ibidem,* p. 36)

L'occasione per progettare un simile corso di laurea venne alla fine degli anni Sessanta. Nel 1969 egli scrisse su *La Riforma della Scuola*:

Una possibilità di creare persone qualificate in tal senso dovrebbe presentarsi ora, con l'istituzione di corsi di laurea abilitanti all'insegnamento della Matematica e osservazioni scientifiche nella scuola media (istituzione contemplata nella legge istitutiva dell'Università della Calabria e valida per tutte le altre sedi). (de Finetti A 1969, p. 17) ([12])

Avendo collaborato con de Finetti in tale impresa, sono testimone diretto del notevole impegno speso da lui nel progettare e cercare di attivare tale corso di laurea presso l'Università di Roma, l'attuale Sapienza. Vennero anche identificate alcune scuole medie pilota, presso le quali svolgere le attività di tirocinio pratico, e il Senato accademico dell'Università giunse ad approvare tale progetto. Ma si

([12]) L'Università di Calabria citata da de Finetti era stata autorizzata con legge n. 442 del 12 marzo 1968 ad istituire presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali un diploma di laurea al quale era attribuito valore abilitante all'insegnamento nella scuola media per la cattedra di Matematica e Osservazioni ed Elementi di Scienze Naturali.

misero di traverso questioni molto concrete: quale collocazione avrebbero avuto gli insegnanti abilitati da tale corso di laurea nei riguardi delle graduatorie costituite da docenti precari, già allora fonte di forti tensioni e polemiche? E non se ne fece più nulla.

La seconda sfida riguardava i programmi d'insegnamento, non solo per la neonata scuola media unica, ma anche per la futura scuola secondaria superiore, quando essa avrebbe dovuto accogliere i giovani diplomati da tale nuovo segmento scolastico obbligatorio per tutti. Quanto ai programmi per la nuova scuola media essi erano stati pubblicati nell'aprile del 1963 (D.M. 24 aprile 1963). Quelli di matematica erano considerati da de Finetti accettabili, anche se egli si poneva seriamente la questione metodologica: come procedere didatticamente per promuovere quanto previsto per ciascuna delle tre classi. Questa era anche la ragione dell'interesse da lui dimostrato in relazione alla preparazione degli insegnanti come osservava Giannarelli:

> *Emanati da pochi mesi i programmi di insegnamento delle diverse discipline nella Scuola Media, non è certo il caso di proporne immediate modifiche anche perché detti programmi sono stati ispirati a modernità.* Tuttavia non si è agito *secondo l'opinione di un certo gruppo di studiosi, in maniera sufficientemente decisa, essendosi le innovazioni limitate a dare un'impronta aggiornata alle «premesse» dei programmi più che ai programmi stessi.* (Giannarelli 1964, p. 41)

4. – Alla radice delle ragioni di de Finetti nel sostenere l'abbinamento tra insegnamento della matematica e scienze: il fusionismo

Spesso nei suoi interventi orali e scritti de Finetti insisteva su una visione complessiva del sapere umano. Partendo dal concetto di fusionismo elaborato da Felix Klein ([13]) egli estese tale prospettiva a una visione integrata non solo delle matematiche, che in questo modo diventavano "la matematica", ma anche di tutte le scienze sia matema-

([13]) De Finetti mi confidò che aveva approfondito le sue idee in merito all'insegnamento della matematica a partire dalla lettura dell'originale tedesco della celebre opera in tre volumi di Felix Klein, pubblicata tra il 1908 e il 1909 a Leipzig, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*.

tiche, sia fisiche, sia chimiche, sia naturali. Spesso collocava tutto ciò nel quadro complessivo della cultura umana. Mi sono chiesto il perché di questa insistenza. La spiegazione che mi sono data è questa. La sua attenzione al soggetto discente lo portava a considerare la necessità di valorizzare tutta la sua esperienza precedente e, su questa base, cercare di fondare il suo patrimonio culturale, aiutandolo a elaborare le fondamentali categorie d'interpretazione della realtà e di strutturazione del pensiero. Il patrimonio conoscitivo, poi, che ne deve risultare, non può essere sviluppato in compartimenti stagni per non perderne la significatività e l'applicabilità alla risoluzione dei vari problemi che si possono incontrare, dentro e fuori dalla matematica.

Già nel 1954, tenendo a Trieste una conferenza presso l'Associazione Laureati dell'Università locale, de Finetti affermava:

> *Il difetto di collegamento fra diversi capitoli della matematica è la causa prima dello scarso profitto degli studi. Cose facili, che, introdotte con chiarezza una volta sola, permetterebbero di dominare senza fatica vasti orizzonti* [...], *sembra vengano presentate appositamente in modo mutilato e offuscato per obbligare ogni volta a cominciare da capo e creare disorientamento. Molti argomenti risulterebbero facili e interessanti mostrandone subito la rappresentazione geometrica*, ... [ma se si arriva tardi], *diventa una fatica in più apprenderla, ed è troppo tardi perché il danno della separazione dei due aspetti formale e sostanziale, possa annullarsi in una semplice sintesi. La tendenza a ovviarvi ha avuto un nome, fusionismo, ed è autorevolmente presentata nientemeno che da Felix Klein.* (de Finetti A 1954a, pp. 209-210)

Spesso nei successivi interventi de Finetti ha ripreso tale tematica. Ben 24 anni dopo, in un testo del 1978, che rappresenta una sintesi matura del suo pensiero in merito all'insegnamento della matematica, egli lo ha ripreso in maniera puntuale. Egli citava, a tale proposito, il cosiddetto "Piano B" di Felix Klein:

> *contenuto in una sua celebre opera (1908) sulla Matematica elementare da un punto di vista superiore (tre volumi). Egli contrappone tale «Piano B» al «Piano A», che è quello scolastico tradizionale, irto di formalismo e povero di fantasia, del quale ancor oggi dobbiamo deplorare la sopravvivenza come faceva Klein fin dall'inizio del secolo. Egli afferma (Vol. I, Parte 1a, IV, 5) che «ogni movimento verso la riforma dell'insegnamento della matematica (nelle*

scuole secondarie) deve porre enfasi» ... sul «metodo genetico d'insegnamento» ..., sulla «fusione della percezione dello spazio e della percezione del numero», ... sulla «preminenza alla nozione di funzione». (de Finetti A 1978a, p. 9)

Per fusionismo – egli scrive – *si intende principalmente* [...] *la completa fusione degli argomenti geometrici e di quelli analitici (aritmetici, algebrici, ecc.), tradizionalmente tenuti separati, spesso addirittura con bigottismo puristico quasi per timore che al contatto si contaminassero a vicenda.* [...]. *È chiaro che apprendere simultaneamente un argomento analitico ed uno geometrico, visti come due aspetti di un unico argomento, significa ridurre la fatica a metà e ottenere una conoscenza doppiamente efficace per il chiarimento che ogni aspetto apporta alla comprensione dell'altro* [...]. *Meglio ancora se, procedendo ulteriormente nella stessa direzione, intenderemo, come intendiamo intendere, il fusionismo in una accezione del tutto generale, come visione unificata di tutte le interpretazioni e applicazioni di uguali od analoghi schemi o procedimenti.* (*Ibidem*, pp. 10-11)

Alle obbiezioni che mettevano in luce una sorta di "confusionismo" e di disordine nel procedere, egli ribatteva:

Possiamo ora spiegare meglio come e perché la trattazione dovrà risultare (apparentemente) disordinata. Volendo seguire un criterio più ambizioso collegato al fusionismo, dovremmo far procedere di pari passo (o almeno portandole a riaffiancarsi dopo ogni momentaneo sfasamento) le trattazioni degli aspetti aritmetico-analitici e di quelli geometrici, ed anche tutti gli argomenti applicativi che converrà inserire. E ciò converrà, in genere, sia per persuadere sempre meglio della validità e flessibilità dei metodi analitici e delle raffigurazioni geometriche e della loro fusione per imparare a vedere e risolvere problemi di non importa quale campo. (*Ibidem*, p. 11)

Nel commento ai "programmi di Frascati" del 1967 egli affrontava anche la questione

del grado di connessione da stabilire (o almeno da cercar di stabilire) tra l'insegnamento di diversi capitoli o parti della matematica e tra quello della Matematica e delle altre scienze (in particolare la Fisica). (de Finetti A 1967a, p. 82)

Egli richiamava a questo proposito il fusionismo di Klein e aggiungeva:

il problema sembra ora estremamente attuale perché il misoneismo che ha impedito finora una ragionevole evoluzione nel senso del fusionismo rischia *ora di farne accettare acriticamente una versione completamente formalizzata e astrattizzata (nel senso deteriore del termine, cioè «svuotata di ogni valore significativo», «privata di ogni nesso con visioni intuitive che consentano di vedere sinteticamente i risultati e il loro senso anziché affidarsi bruscamente a pedestri passaggetti su formulette e formulacce»).* (*Ibidem*)

In questo passaggio egli sembra accennare a una versione dell'impostazione algebrica della geometria. Ne riparliamo subito.

5. – I programmi della scuola secondaria superiore e il ruolo degli spazi vettoriali in ambiente affine

Come premessa a una ricostruzione del suo intervento al Convegno di Frascati dell'ottobre 1964, de Finetti scriveva:

In succinto, la tesi è questa: se c'è, come purtroppo indubbiamente c'è, un atteggiamento d'incomprensione e d'ostilità quasi generale dei profani contro la matematica, la colpa è nostra, dei matematici, perché non vogliamo e non cerchiamo o non sappiamo presentare la matematica in modo rispondente alle esigenze del profano. [Occorre affermare invece] la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che dovrebb'essere la cultura. [...]. *Principalmente responsabile di tale lacerazione è la malintesa aspirazione al purismo, all'autonomia, alla specializzazione, all'isolamento.* (de Finetti A 1965a, p. 120)

Quanto alla specializzazione dei programmi della scuola pre-universitaria, egli assumeva questa posizione:

programma sostanzialmente unico, salvo differenziazioni marginali. Oltre che per il programma, la stessa risposta va data anche per riguardo ai criteri e metodi d'insegnamento, e forse anzi in modo ancora più reciso.

E precisava che:

occorre mostrare la matematica come strumento per approfondire e dominare lo studio [...] *dei problemi concreti di ogni genere, nel modo più utile e concreto specie grazie alla creazione di appropriati concetti astratti* [...] *sintesi dell'aspetto comune che riesce utile isolare per ridurre a unità e semplicità di visione fatti apparentemente disparati.* (*Ibidem*, p. 122)

Questa posizione, secondo de Finetti, venne sostanzialmente assunta poi dai "programmi di Frascati" in quanto rispetto a una forte differenziazione tra i diversi indirizzi dei licei:

> *Prevalse* [...] *largamente la tendenza opposta, intesa, nell'interesse della cultura nel suo insieme, a superare la deprecata scissione e incomprensione, e, nell'interesse particolare della comprensione per la matematica, a preoccuparsi anzitutto che essa divenisse patrimonio intellettuale e fecondo per tutti. Il programma poteva e doveva essere unico come elencazione di argomenti* [...] *la differenziazione potrà riguardare il modo, più o meno "tecnico" e dettagliato, di studiare i medesimi argomenti.* (de Finetti A 1967a, p. 77)

Partendo da queste premesse egli appoggiò l'orientamento allora assai diffuso in Francia e in Belgio ([14]), restio a fondare l'insegnamento della matematica su Euclide e la geometria metrica.

> *Il ruolo principale* – egli scrive – *per una radicale semplificazione e revisione dello strumentario matematico e della visione, resa unitaria, di quasi tutti gli argomenti, spetta senza dubbio alla nozione di sistema (o spazio) lineare (affine) da introdursi immediatamente ed esclusivamente in ogni occasione.* [...]. *Il tutto, beninteso, in forma intrinseca (senza coordinate o sistemi di riferimento); solo successivamente* [...] *si può notare che i punti (e i vettori) di un piano, spazio, ecc., si possono rappresentare come coppie, terne, n-ple, di numeri reali.* [...]. *La geometria di Euclide, tanto innaturale e pesante causa la mancata distinzione iniziale tra proprietà affini e metriche, può quindi essere lasciata in disparte.* [...] *diretta derivazione della nozione iniziale di sistema lineare è quella che conduce ad equazioni lineari, determinanti, ecc.* (de Finetti 1967, pp. 123-124)

Questi ultimi, in particolare, devono essere illustrati in forma intrinseca, come espediente. Su questa impostazione, secondo de Finetti, molti dubbi e contrarietà vennero espressi in tale occasione da Campedelli, Manara e Pescarini, preoccupati di "non abbando-

([14]) Si possono citare a questo proposito i cinque volumi di Georges Papy per la secondaria superiore *Mathématique moderne*, pubblicati a Bruxelles presso l'editore Didier tra il 1963 e il 1965.

nare la geometria di Euclide come argomento tradizionale e per ciò stesso culturalmente importante" (*Ibidem*, p. 141).

In una nota al testo del 1974 *Contro la «matematica per deficienti»* de Finetti in qualche modo rispondeva alle numerose obbiezioni che negli anni successivi si erano moltiplicate a questo proposito:

> *Pensando alla geometria dello spazio fisico, dove esiste una metrica (perché esistono corpi «rigidi» che permettono di confrontare la lunghezza di segmenti anche non paralleli), può apparire artificioso pensare a un piano privato di tale ovvietà. Ma, a parte che in matematica si deve spesso studiare le cose prescindendo volutamente da qualche cosa, considerata per il momento estranea (addirittura nella geometria proiettiva, si prescinde dalla distinzione tra punti propri e «impropri», o «all'infinito»), il piano può rappresentare situazioni per le quali la nozione metrica non ha senso. Se il vettore xa + yb indica che ho consumato x grammi di pane e y minuti di telefonate, che senso ha chiedere se i due vettori sono ortogonali, e le qualità uguali?* (de Finetti A 1974c, p. 118)

Nel già citato testo del 1978 de Finetti affrontò di nuovo l'argomento rifacendosi proprio al fusionismo:

> *La conseguenza più diretta del fusionismo, nel senso di fusione tra analisi e geometria, sarà l'impostazione della geometria sistematicamente basata sulla forma vettoriale (intrinseca) che consente di partire dalla nozione ovvia di sistema lineare. E tale punto di partenza mette automaticamente in condizione di impostare lo studio della geometria in modo immune da due gravi difetti altrimenti difficili da eliminare.* (de Finetti A 1978a, p. 11)

I due difetti sono: da una parte la separazione tra geometria piana e geometria dello spazio ("basta adottare l'impostazione vettoriale: allora non c'è più differenza e difficoltà di principio nel passare da 2 a 3 o più dimensioni"); dall'altra, "la tradizionale frammistione delle nozioni affini con quelle metriche introdotte (come in Euclide) fin da principio" (*Ibidem*).

Nel testo de Finetti cita l'opera di Jean Dieudonné, dalla quale prende le distanze. Redatta all'inizio degli anni Sessanta (Dieudonné, 1964), tradotta in italiano a cura di Angelo Pescarini nel 1970, l'*Algebra lineare e geometria elementare* di Dieudonné (Dieudonné 1970), aveva costituito, insieme alle opere di Emil Artin (Artin, 1968) e di Gustave Choquet (Choquet, 1967), l'approccio più diffuso di interpretazione della nuova visione della geometria, che rifacendosi alla proposta di Klein contenuta nel *Programma di Erlangen*, portava a una forte algebrizzazione, tale da oscurarne un approccio più intuitivo, basato su visualizzazione e operatività fisica. La frase di de Finetti riportata alla fine del precedente paragrafo sembra proprio alludere a tale approccio. D'altra parte lo stesso Pescarini, nella *Premessa all'edizione italiana*, parlava:

> *di sostanziale riducibilità all'algebra lineare* [della geometria. Non solo, ma adottando] *direttamente gli assiomi che caratterizzano uno spazio vettoriale e l'algebra lineare che ne consegue,* [...] *constata la «morte» della geometria, ma decreta anche la inutilità di una sua effettiva sopravvivenza nell'insegnamento.* (Pescarini 1970, p. X)

Naturalmente l'impianto che de Finetti propone è opposto all'interpretazione della cosiddetta "matematica moderna", "basata completamente sul logicismo, sull'astrazione formalistica, sulla deduzione formalizzata", in quanto, come vedremo, la sua impostazione assume come riferimento metodologico il cosiddetto "metodo genetico". Quanto all'impianto geometrico, egli scrive:

> *le geometrie da prendere in considerazione sono soltanto due: l'*affine *e la* metrica*; ma è forse opportuno menzionare anche quella* proiettiva *per completare i raffronti di possibili punti di vista.* (de Finetti A 1967a, p. 112)

Quanto agli schemi possibili di trattazione, vale a dire passare dalla geometria metrica, alla affine, alla proiettiva, oppure passare dalla geometria proiettiva alla affine, alla metrica, egli preferisce uno schema intermedio: partire dalla geometria affine per passare poi a quella metrica e a quella proiettiva. Tale percorso non va sviluppato in forma algebrica (calcolo matriciale o simili), bensì "in forma intrinseca (operando su punti, vettori, ... senza usare necessariamente un riferimento fisso)" (de Finetti A 1967a, p. 114). Nei riguardi di Euclide egli dichiara:

> *L'unico motivo che rimane valido in favore della conoscenza dell'impostazione di Euclide è, a mio avviso, quello storico.*

Quindi, si tratta di un argomento complementare e

> *non per iniziare in modo innaturale lo studio che deve portare a padroneggiare la geometria con mezzi più moderni e adeguati.* (*Ibidem*, pp. 115-116)

Quanto all'impostazione dei programmi di Frascati: per il primo biennio "la distinzione tra geometria affine e metrica è esattamente rispettata nella ripartizione degli argomenti"; nel triennio

> *si ha l'introduzione dei metodi vettoriali* [...], *piano vettoriale geometrico nel III anno, spazio nel IV, caso astratto nel V.* [...]. *Senza alterare tale ripartizione, sembra opportuno e lecito un semplice accenno iniziale (al principio del III anno) per dire che quanto viene esposto (intanto) per 2 dimensioni si estende immediatamente al caso di 3 (IV anno) o più (V anno) dimensioni.* (*Ibidem*, p. 117)

6. – Il metodo genetico e la questione dell'assiomatica e del formalismo

Una descrizione assai efficace della metodologia suggerita spesso da de Finetti nell'apprendere la matematica, e di conseguenza nell'insegnarla, si trova in un discorso rivolto "ai giovani e ai loro insegnanti", in cui chiede loro "il superamento di alcuni pregiudizi derivanti dall'abitudine ad uno studio più passivo, meccanico, mnemonico" a favore di uno sforzo "più facile e costruttivo". Spesso si dice ai giovani "voi non sapete niente".

> *Gli è che* – scrive de Finetti – *la tendenza ai compartimenti stagni viene spesso spinta fino all'assurdo di ricominciare da capo ogni argomento in ogni nuovo grado di scuole, confondendo le idee con nuove impostazioni e terminologie incuranti dei legami con le nozioni precedenti di cui si vorrebbe fare tabula rasa e che rimangono come inquietanti relitti. Quello che è utile e necessario è invece richiamarsi al già appreso per fare il punto e ripartire, dando la sensazione rassicurante che anche tutto il nuovo si innesterà naturalmente su ciò che più o meno grossolanamente e intuitivamente vi è già noto e comunque vi riuscirà comprensibile.* [...]. *Tutto il resto potrà scaturire naturalmente, spontaneamente, da quello che già sapete, purché sappiate e vogliate ascoltare lo stimolo a riflettervi sopra.* [...] *dovrete sempre riflettere per far vostra ogni acquisizione come se l'avreste scoperta voi. Infatti, essa*

> *per voi effettivamente ha senso non dal momento in cui venite a sapere che altri hanno fatto un certo ragionamento che sareste in grado di passivamente ripetere, bensì dal momento in cui quel ragionamento lo rifarete per persuadere da voi voi stessi, e ne vedete il perché e le implicazioni che vi interessano.* (de Finetti A 1978a, pp. 8-9)

Io non so se de Finetti avesse letto un'opera di David Paul Ausubel tradotta in italiano proprio nell'anno in cui egli tenne questo discorso, ma una frase centrale di questo psicologo cognitivo afferma che: "il fattore di gran lunga più importante nell'influenzare l'apprendimento è ciò che l'alunno conosce già. Verifichiamo quindi le sue conoscenze preesistenti e istruiamolo di conseguenza" (Ausubel 1978, p. 4).

Una questione assai dibattuta nell'impostare i programmi di matematica riguardava il ruolo dell'assiomatica. In una discussione con Papy a Frascati nel convegno dell'ottobre del 1964, de Finetti tendeva a escludere d'introdurla troppo presto "prima di una buona conoscenza intuitiva dell'argomento che permetta di giudicare dell'appropriatezza e del ruolo degli assiomi e dei concetti astrattizzati che ne derivano" (de Finetti 1965, p. 9). Con Papy certamente concordava sul ruolo fondamentale della considerazione prioritaria dello spazio affine rispetto quello metrico, ma su altri punti divergeva dallo studioso belga, il quale sviluppava un sistema ben impiantato sulla falsariga dell'assiomatica elaborata da Jean Dieudonné ([15]). Così de Finetti riassume il suo pensiero:

> *Lo studio sistematico, specie nella sua forma più perfetta consistente nella trattazione assiomatica, deve sopravvenire come coronamento di un processo di assimilazione e familiarizzazione già maturato almeno nel subcosciente, il quale non può essere violentato coll'introduzione di aridi congegni intellettualistici privi di appetibilità psicologica.* [...]. *Una trattazione che prendesse degli assiomi come punto di partenza sarebbe gratuita e manchevole anche dal punto di vista scientifico.* (de Finetti A 1965a, p. 123)

Carla Rossi ha ben sintetizzato questo ruolo dell'assiomatica, come pure quello del pensiero astratto e formalizzato:

([15]) Cfr. Papy 1963, 1965.

> *Se vuoi essere un buon insegnante, devi agire in modo tale che lo studente percepisca che astrarre, sviluppare un sistema assiomatico, formalizzare e dedurre seguendo regole logiche è la conclusione della sua esperienza, quando ha bisogno di vedere dall'alto e semplificare ciò che egli ha già appreso, non certo per introdurre complicazioni tecniche inutili. Si tratta della strada per scoprire l'unità che sta dietro l'apparente diversità. É il punto di arrivo, come sempre è capitato nella storia della matematica, non quello di partenza.* (Rossi 2001, pp. 3665-3666)

Come accennato nel quinto paragrafo, il suo "metodo genetico" veniva considerato come antitetico a quello assiomatico.

> *Come criterio didattico* – asserisce de Finetti – *la via che dovrebbe venire prescelta è l'opposto di quella usualmente seguita dai fautori della «matematica moderna», basata completamente sul logicismo, sull'astrazione formalistica, sulla deduzione formalizzata. Tale via pretesamente moderna sembra piuttosto una parodia peggiorativa del metodo tradizionale, arido e deduttivo.* [...]. *Tuttavia, l'opposizione alla via sedicente moderna non significa incomprensione o sottovalutazione delle esigenze di sistemazione logica cui essa sacrifica tutte le altre. Pensiamo, e speriamo che si riuscirà a provare che le sistemazioni logiche si possono costruire gradualmente, man mano che la via genetica fa incontrare il momento in cui tale conquista appare matura e si presenta una occasione propizia.* (de Finetti A 1978a, p. 16)

Anche nei commenti alle Avvertenze ai "Programmi di Frascati" si può trovare tale orientamento. Esse raccomandavano di procedere con molta misura dall'intuitivo al razionale, tenendo conto che i concetti astratti si formano lentamente, evitando l'adozione di schemi prefabbricati abituando a cercare i mezzi che consentono la soluzione più rapida ed elegante. Tuttavia, nei programmi veniva anche ribadito "il valore formativo che è proprio del metodo deduttivo". De Finetti commenta:

> *Davvero? Il metodo deduttivo da sì la certezza, che è sì un requisito necessario. Ma* [...] *la deduzione è solo un momento del ragionamento matematico, è il momento conclusivo della verifica, che è però preceduto e preparato dal lavorio costruttivo nel corso del quale certe verità appaiono plausibili e si cercano vie per cui sembra plausibile si possa giungere alla dimostrazione. È troppo unilaterale, è un fraintendimento diseducativo, apprezzare solo l'attimo che suggella il successo e non degnare di menzionare il lungo intelligente travaglio di cui è frutto.* (de Finetti A 1967a, p. 93)

Se poi alla prevalenza della deduzione, della dimostrazione, rispetto alla costruzione del significato, alla ricerca della soluzione, si accompagna l'eccesso di formalismo allora ci si perde nel vuoto:

> *Benché da un punto di vista formalistico, una nozione matematica si possa (o debba) considerare pienamente acquisita conoscendone le proprietà deducibili dalla definizione o dagli assiomi, ritengo non meno essenziale (e dal punto di vista psicologico e culturale e pratico ancor più), agli effetti di una vera conoscenza e comprensione, il sapere associare alla nozione formale una visione quanto più ampia possibile delle sue interpretazioni e applicazioni (e del perché della applicabilità) nei più disparati campi della scienza, della tecnica, della vita quotidiana.* (*Ibidem*, p. 103)

Nel quadro della logica, spesso veniva collocata anche quella che negli anni Sessanta del secolo scorso veniva chiamata l'insiemistica. Fino al Congresso dell'ICMI di Exeter del 1972 (29 agosto – 2 settembre) sembrava che il cammino di un'impostazione dell'insegnamento della matematica fondato sulla logica, a partire dalla teoria degli insiemi, fosse inarrestabile. La relazione di René Thom segnò però per l'insiemistica e in genere per la matematica moderna l'inizio di una crisi che portò a bandire nei programmi francesi del 1985 ogni riferimento a insiemi e relazioni. Addirittura in una circolare ministeriale del 17 luglio 1987 si affermava: "I simboli $\cup$, $\cap$, $\subset$ sono fuori dal programma, così come tutte le nozioni riguardanti gli insiemi e le relazioni" ([16]). Thom, infatti, nel suo intervento aveva criticato la matematica moderna e, in particolare, la tendenza a far scomparire la geometria (Thom 1973) ([17]).

De Finetti partecipò per la prima e unica volta a Exeter nel 1972 a un Congresso dell'ICMI. Nel rendiconto che fece di tale partecipazione, egli scrive a proposito delle posizioni di René Thom:

> *Sarei d'accordo* [...] *nel deprecare l'insistenza su generalità di insiemistica e di logica, cioè a dire, su di una matematica che è quanto di più povero, di*

([16]) Arrêté du 17 juillet 1987 modifiant les programmes de mathématiques.

([17]) René Thom aveva già espresso le sue osservazioni critiche tre anni prima: R. Thom, Les mathematiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique?, *L'age de la science*, 1970, 3, 225-236.

> *più vuoto, di più deprimente per l'intuizione, che sia possibile immaginare.* (de Finetti A 1973l, p. 18)

Quanto alla logica e al formalismo afferma:

> *in ogni buon insegnamento si introducono nuovi concetti, nuove idee, facendone uso ...; solo dopo si è in grado di dare una definizione formale valida a controllare la consistenza logica della teoria.* (*Ibidem*)

Circa il rigore de Finetti concordava con la posizione di Thom:

> *l'assoluto rigore non si raggiunge che eliminando ogni significato; ma dovendo scegliere, non si può esitare nel preferire il significato. Perciò l'enfasi posta dai "modernisti" sull'assiomatica è non solo un'aberrazione dal punto di vista pedagogico (il che è evidente) ma anche da quello prettamente matematico.* (de Finetti A 1973l, pp. 18-19)

7. – La centralità del concetto di funzione

Nello sviluppo della conoscenza e della competenza matematica secondo de Finetti il concetto di funzione occupa un ruolo centrale.

> *Dire che per vedere funzionare la matematica, per vederla in funzione, occorre «dar preminenza alla nozione di funzione» (secondo la raccomandazione di Felix Klein ...), sarebbe un gioco di parole* [...]. *Tuttavia l'asserzione fila benissimo* [...]. *Il concetto di funzione (nel senso della matematica) non è però qualcosa di astruso e di artificioso creato nella matematica e per la matematica: esso è usato sempre da tutti, nel linguaggio comune*. (de Finetti A 1978a, p. 13)

Per esemplificare meglio il processo di rappresentazione simbolica cita il caso dell'espressione "il padre di Ernesto" che diventa P(x) per indicare "il padre di x", "dove per x si può intendere qualunque persona [...] per cui la frase appaia, in qualche senso, dotata di senso" (*Ibidem*, 14). Scrivere "in simboli anziché a parole, significa solo usare una forma abbreviata e maneggevole che facilita i ragionamenti col mettere in evidenza ciò che è essenziale". (*Ibidem*). La rappresentazione simbolica può far "scaturire quasi automaticamente concetti e risultati inattesi anche da chi li ha introdotti". (*Ibidem)*. De Finetti cita il caso di una funzione di funzione osservando che PPx può essere interpretato come il nonno paterno di x, mentre MPx può significare la sua nonna paterna. E così via. Si tratta dello stesso approccio al concetto di funzione che trentacinque anni prima aveva inserito nella sua *Matematica logico intuitiva.* "Sia x un individuo (definiamo cioè delle funzioni nel campo costruito dagli individui); indicando ad es.: Px = padre di x; Mx = madre di x; [...] abbiamo semplici funzioni esprimenti relazioni di parentela..."(de Finetti L (1944) 1959, p. 17).

La rappresentazione cartesiana fa sì che tutte le nozioni interessanti acquistino "un rilievo particolarmente intuitivo e istruttivo (purché non lo si voglia nascondere come talvolta, purtroppo, accade" (de Finetti A 1978a, p. 14). Più in generale egli afferma che:

> *Tutte le nozioni di analisi utili per rendersi conto dell'andamento di una funzione, e descriverlo, o ragionarvi sopra, si possono introdurre in modo geometrico intuitivo (riferendosi al diagramma) assai più istruttivamente che con metodi « rigorosi» (che, tra l'altro, apparendo inidonei per ragazzi, ritardano l'acquisizione di fatti ovvi a troppo tardi e limitandola a troppo pochi).* (de Finetti A 1974c, p. 115)

Nel commento ai "Programmi di Frascati" si può trovare un passaggio interessante sull'argomento:

> *Inoltre, quanto alla significatività, va notato come un'espressione letterale, considerata come funzione di una o più delle lettere che vi intervengono (o anche di tutte), di cui interessi vedere cosa accade facendole variare, permette più o meno agevolmente di vedere come varia il risultato. Si potrà vedere ad es. che variando x (oppure a, k, y, ...) il risultato varia in modo direttamente, o inversamente, proporzionale, oppure semplicemente che cresce o diminuisce, o che è sempre positivo, ecc. Oppure si può vedere quand'è (cioè: per quali valori dati alle lettere) diviene nullo (e in questo e simili casi si parlerà di equazioni da risolvere).* (de Finetti A 1967a, p. 107)

Se poi si giunge alla considerazione di particolari funzioni:

> *Sarà dalla molteplicità di interpretazioni significative e praticamente importanti che certe funzioni* [...] *si considereranno meritevoli di particolare studio, scoprendone proprietà analitiche interpretabili significativamente anche per riguardo alle applicazioni già viste da prima e ad altre che da tali analisi si sarà portati a individuare.* (de Finetti A 1974c, p. 109)

Quali di queste vanno subito esplorate?: "anzitutto, le funzioni y = x ed y = 1/x vanno considerate e rappresentate fin da quando si comincia a parlare di *proporzionalità diretta* e di *proporzionalità inversa*". E poi:

> *Il quadrato e il cubo (intendo le funzioni $y = x^2$ e $y = x^3$) appariranno come indicazione del modo in cui variano aree a volumi di figure qualsiasi variandone la «scala» (ad es. modelli di una nave); il quadrato anche come energia cinetica in funzione della velocità; e via dicendo. La funzione esponenziale (e il logaritmo, come sua inversa) si presentano naturalmente come «legge della crescita naturale».* (*Ibidem*)

Il piano cartesiano deve essere introdotto per rappresentare l'andamento di fenomeni vari, partendo da esempi non matematici. Per poi: "chiarire in generale i concetti di equazione (zeri di una funzione) massimi e minimi ecc., evitando il formarsi di concetti restrittivi difficilmente poi eliminabili". Infine:

> *La nozione di convessità si presenta come fondamentale e naturale per introdurre in forma diretta ed intrinseca molti ulteriori concetti e problemi su insiemi, linee, funzioni; probabilmente dà anche la via più indovinata per la prima introduzione dei concetti dell'analisi.* (de Finetti A 1965a, pp. 124-125)

In questo contesto, può anche essere evocata la questione dell'introduzione dei vari insiemi numerici. (de Finetti, A 1967a, pp. 101-102) È una problematica che dal punto di vista didattico ha spesso coinvolto, anche emotivamente, de Finetti. In particolare, nel commentare i "Programmi di Frascati", in numerose pagine egli manifesta la sua contrarietà alla tradizionale maniera di presentare i numeri razionali:

> *Ciò che mi ripugna, e che ritengo non possa non creare confusione ai giovani, è l'idea artificiosa di presentare i numeri razionali come una specie privilegiata di oggetti concepibili come tali prima e indipendentemente dalla considerazione della totalità (naturale e intuitiva) dei numeri reali di cui fanno parte.* (de Finetti A 1967a, p. 101)

Quale approccio allora sembra valido per introdurli sulla base delle prime intuizioni? "Partendo dalla forma più pratica di rappresentazione dei numeri reali – quella di allineamenti decimali (rispondente a familiari procedimenti di misura)." De Finetti insiste, tenendo conto delle perplessità che un bambino può avere di fronte alle presentazioni tradizionali:

> *Ora che ogni bambino sa che un numero è razionale o irrazionale a seconda che la successione delle sue cifre decimali è o non è definitivamente periodica (e può costruirsi in base a ciò quanti esempi vuole di irrazionali, e ha sentito dire che sono irrazionali le radici di interi non intere, e π, ecc.) come può sopportare e spiegarsi delle perplessità per lui superate?* (*Ibidem*, p. 102)

Anche in questo caso si può trovare un analogo approccio nella *Matematica logico intuitiva.*

8. – Il calcolo delle probabilità

Leggendo gli interventi di de Finetti su questo argomento, si può cogliere una certa riluttanza ad affrontare il problema dell'introduzione dei concetti e dei procedimenti propri della probabilità nell'insegnamento non solo secondario. Ricordo una presa di posizione in occasione di un incontro della CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) a Bordeaux dal 19 al 26 agosto 1974, dedicato proprio all'insegnamento della probabilità e della statistica. I discorsi partivano in gran parte dalle idee di Jean Piaget in proposito ([18]). La base concettuale di riferimento era la concezione classica della probabilità basata sul concetto di rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. De Finetti era del tutto contrario a impostare un insegnamento a partire da un impianto definitorio di questo tipo. Attento agli aspetti soggettivi dell'esperienza e alle forme linguistiche ingenue che li accompagnavano, su questa base proponeva un cammino di sviluppo progressivo di un apparato concettuale e operativo che aiutasse a comportarsi in maniera coerente in condizioni d'incertezza. Egli non partecipò a tale incontro, ma inviò due paginette in cui manifestava i suoi

([18]) Le idee di Jean Piaget in merito alla probabilità si possono cogliere nell'opera: J. Piaget, B. Inhelder, *La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Paris: PUF, 1951.

dubbi relativi alla tendenza allora in atto. Lette in pubblico, tali paginette suscitarono tra gli specialisti presenti non poche discussioni, sollecitando proprio la questione centrale da dibattere: qual è la natura specifica del pensiero probabilistico a cui andrebbero educate le giovani menti?

Nel 1967 in occasione dell'elaborazione dei "Programmi di Frascati" de Finetti dichiarava a proposito della probabilità:

> *Mi trovo maggiormente in difficoltà e in imbarazzo nell'esprimere pareri e suggerimenti sul modo di concretare le generiche indicazioni del programma* [...] *nessuna spiegazione per quanto accurata sembra sufficiente a garantire dal rischio di fraintendimenti purtroppo assai frequenti.* [Per questo si era trattenuto] *dall'associarsi espressamente e pressantemente alla proposta di vari colleghi* [...] *di inserire nei programmi tale argomento.* (de Finetti A 1967a, pp. 118-119)

Alla fine, tra gli argomenti da svolgere nel quinto anno furono inseriti: "Elementi di calcolo della probabilità e semplici applicazioni alla statistica, alla teoria degli errori, ecc."

Nel commentare tale introduzione de Finetti in primo luogo metteva in guardia da alcune ingenuità:

> *Occorre quindi evitare, tra l'altro, che i tradizionali esempietti su giochi e estrazioni facciano sprecare tempo e – peggio – indurre a un'idea del tutto inadeguata della nozione di probabilità.* (*Ibidem*, p. 121)

Invece:

> *Il modo più significativo per introdurre la nozione di probabilità e dare un'idea del suo significato nei più disparati campi di applicazione è, a mio avviso, quello che si collega alle moderne assiomatizzazioni riguardanti il comportamento coerente in condizioni di incertezza.* [...]. *Ciò darebbe l'accesso più rapido (e più protetto dal rischio di fraintendimenti) alle applicazioni di natura economica, di statistica applicata, di ricerca operativa.* (*Ibidem*)

Sul piano formativo, egli insisteva nel ritenere:

> *essenziale far sapere come l'ingresso del calcolo delle probabilità nel campo fisico, dapprima limitato alle innocue applicazioni agli errori di misura,*

> *abbia poi messo in crisi le concezioni classiche deterministiche contrapponendovi una visione indeterministica.* [...]. *Sarebbe bene far sapere come ciò abbia avuto inizio con la teoria cinetica dei gas* [...], *e raggiunto l'apice con la fisica quantistica.* (*Ibidem*, p. 122)

Continuava poi accennando a questioni di teoria dell'informazione, a modelli stocastici nei vari ambiti scientifici, ecc. Concludeva suggerendo: "una precoce iniziazione dei giovani alla pratica del valutare le probabilità (cioè: di esprimere il proprio stato d'animo d'incertezza su circostanze della vita comune) e di perfezionare l'attitudine istintiva di regolarsi in base ad esse" (*Ibidem*, p. 123).

9. – Conclusione

La rilettura dei testi di Bruno de Finetti riferibili all'insegnamento della matematica, dal punto di vista dei suoi contenuti e dei suoi metodi, evidenzia una concezione della conoscenza matematica e del suo sviluppo, così come del suo insegnamento, che si basa su un'epistemologia specifica. Per comprenderla appieno credo sarebbe necessario ripercorre l'esperienza sviluppata da lui durante il periodo triestino, soprattutto quando i suoi studi e le sue riflessioni accompagnavano gli impegni presso le Assicurazioni Generali. Lo sviluppo del carattere applicativo dei concetti e dei procedimenti matematici nasceva nella e dalla sua attività: la loro forza esplicativa e risolutiva era constatazione quotidiana nel suo lavoro di economista, attuario, statistico e filosofo. Alla base di ciò, un approccio al pensiero, che da qualcuno è stato definito "pragmatista" ([19]), ma che mirava a cercare, nella varietà dei problemi e delle esperienze nuclei di riferimento e percorsi esplicativi e risolutivi unitari. La tendenza alla riflessione sulla propria esperienza e la frequentazione di alcuni autori di riferimento, come Felix Klein, lo portarono anche verso una concezione del

([19]) Per esempio questa è l'opinione di Giulio Giorello. Cfr. G. Giorello, *"Inventare la verità": Bruno de Finetti e la filosofia*, reperibile sul sito http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/DOCUMENT/DeFinetti/Giorello_DeFinetti.pdf (controllato il 22 febbraio 2015).

pensiero matematico di natura dinamica ed evolutiva, basata sull'intuizione, ma che nella sua ricerca di unità e di sintesi giungeva all'assiomatica. La logica entrava in ciò come controllo e garanzia di coerenza, non certo come processo costruttivo di significati. Qualcosa di simile era stato già delineato da Gaston Bachelard nel 1934:

> *Ormai lo sviluppo scientifico è accompagnato da un'assiomatica. L'accompagnamento è stato scritto dopo la melodia, ma il matematico suona a due mani. Ed è una musica del tutto nuova, che esige piani di coscienza diversi, un inconscio simulato ma operante. È anche troppo facile ripetere continuamente che il matematico non sa di che cosa parli: in realtà finge di non saperlo, ha l'obbligo di parlare come se non lo sapesse, respinge l'intuizione, sublima l'esperienza.* (Bachelard 1934, p. 4)

Nel 1965 commentando i risultati del colloquio internazionale di Frascati dell'ottobre 1964 de Finetti sottolineava l'importanza delle applicazioni nel testare l'efficienza di una teoria:

> *Sull'atteggiamento verso le applicazioni pesa tuttora il vieto pregiudizio aristocratico che contrappone come incolmabili la sublime dignità anche culturale di tutto ciò che è fine a se stesso e la volgare e spregevole strumentalità di tutto ciò che partecipa all'onta di essere utile per qualcuno o qualcosa.*

Nel seguito sembrava alludere alla contrapposizione del concepire la matematica come serva o regina, osservando che il servizio della matematica è necessario a "*quanti servono la scienza*", e aggiungeva:

> *E le applicazioni sono ancor più necessarie alla matematica che a chi se ne avvantaggia: "perché solo mettendola alla prova si può vagliare l'efficienza, la funzionalità, la fecondità di una teoria; e sono queste qualità essenziali che ne costituiscono il pregio anche dal punto di vista estetico, come occorre spesso ricordare perché il gusto non degeneri nel decadentismo di sterili raffinatezze, di pretenziosi e goffi ornamenti, di macchinose e fumose invenzioni.* (de Finetti 1965, pp. 189-191)

In poche parole, la matematica è uno degli strumenti fondamentali per leggere, interpretare e valutare la realtà e per intervenire in essa al fine di risolvere i problemi cruciali che pone all'uomo, non solo nell'ambito delle differenti discipline scientifiche. In questo credo che il pensiero di de Finetti sia in linea con le tendenze attuali nel rivalutare il cosiddetto "realismo" filosofico, dopo un periodo intenso in cui si preferiva "inventare la realtà", costruendone un'interpretazione mai sottoposta a controllo empirico. Più che di pragmatismo, come talora si è considerato il pensiero di de Finetti, io preferisco parlare di realismo critico in cui esperienza e interpretazione si confrontano e dialogano continuamente nella ricerca di soluzioni umanizzanti.

C'è però un aspetto del pensiero di de Finetti che merita sottolineare nella prospettiva delle attuali ricerche sulla costruzione concettuale. Egli ha sempre insistito, valorizzando il cosiddetto metodo genetico mutuato da Felix Klein, sulla necessità di dare spazio e tempo allo sviluppo dei concetti e dei procedimenti matematici, partendo da una situazione esplorativa, spesso incerta e intuitiva, per molti versi bisognosa poi di analisi critica al fine di poterli padroneggiare. Già negli anni Settanta David Paul Ausubel (Ausubel 1978) aveva descritto un percorso simile. Nello sviluppo della conoscenza, si parte da elementi spesso confusi, poco collegati tra loro, connessi a situazioni particolari. Il successivo passaggio implica quello che è stato da lui chiamato "processo di differenziazione progressiva", cioè di identificazione più chiara e precisa del concetto stesso, differenziandolo da altri e specificandone il suo significato. Infine, attraverso il "processo di riconciliazione integrativa", occorre integrare il nuovo apporto nel contesto della struttura conoscitiva complessiva del soggetto, al fine di renderlo non solo stabile, ma anche utilizzabile nell'affrontare nuove situazioni. Oggi, a seguito degli studi sul cosiddetto carico cognitivo (Sweller 1988, 2009) ([20]), si è ancora più attenti a non voler procedere troppo velocemente e superficialmente nel proporre nuovi elementi conoscitivi, impedendo la necessaria elaborazione profonda, che ne consente un'acquisizione significativa, stabile e fruibile.

([20]) Il carico cognitivo designa la quantità totale di attività imposta in un dato istante alla memoria di lavoro di un soggetto. Dati i limiti sia temporali, sia quantitativi, che caratterizzano la memoria di lavoro, un eccessivo carico cognitivo può impedire la comprensione e/o la valorizzazione di quanto proposto dal docente.

Ci piace terminare questa rievocazione del pensiero di de Finetti, citando un passo assai pregnante dei suoi discorsi.

> *Chi vuole aprirsi una via in una regione inesplorata non può disporre di una mappa; la costruzione di una mappa segnerà la conclusione del suo viaggio di esplorazione* [...]. *Così, per chi vuole apprendere e comprendere una teoria matematica, conviene procedere poco a poco seguendo precise effettive esigenze, coordinare man mano l'insieme delle idee acquisite, finché alla fine dell'opera, raggiunta una visione globale ormai chiaramente delineata, potrà, come ripensamento finale, cercar di individuare e confrontare diversi gruppi di semplici proposizioni atti a fungere da «sistemi di assiomi».* (de Finetti A 1978a, p. 10)

In questa impresa, a livello scolastico:

> *è utile e necessario* [...] *richiamarsi al già appreso per fare il punto e ripartire, dando la sensazione rassicurante che anche tutto il nuovo si innesterà naturalmente su ciò che più o meno grossolanamente e intuitivamente vi è già noto e comunque vi riuscirà comprensibile. (Ibidem,* p. 8)

BIBLIOGRAFIA

ARTIN, E. (1968), *Algebra geometrica*, Milano: Feltrinelli.

AUSUBEL, D. P. (1978), *Educazione e processi cognitivi*, Milano: Franco Angeli.

BACHELARD, G. (1934), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: Vrin.

CATALANO, G., LOMBARDO RADICE, L. (1967), *Minialgebra*, Milano: Feltrinelli.

CHOQUET, G. (1967), *L'insegnamento della geometria*, Milano: Feltrinelli.

DE FINETTI F. (2010), L'insegnamento della matematica secondo de Finetti, *Periodico di matematiche*, 3, 11-18.

DIEUDONNÉ, J. (1964), *Algèbre lineaire et géométrie élémentaire,* Pais: Hermann.

DIEUDONNÉ, J. (1970), *Algebra lineare e geometria elementare*, Milano: Feltrinelli.

GIANNARELLI, R. (1964), In margine agli ultimi colloqui, *Archimede*, 16, 39-42.

HOWSON, A. G. (Ed) (1973), *Developments in Mathematical Education.* Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge: Cambridge University Press.

KLEIN, F. (1908, 1909), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (3 Bände)*, Leipzig: Teubner.

OCSE (1963), *L'insegnamento matematico. Un nuovo programma per la scuola secondaria inferiore*, Roma: Armando.

OEEC (1961), *Les Mathématiques nouvelles*, Paris: OEEC.
OEEC (1962), *Une programme moderne des mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Paris: OEEC.
PAPY, G. (1963, 1965), *Mathématique moderne* (cinque volumi), Bruxelles: Didier.
PELLEREY, M. (1989), *Oltre gli insiemi*, Napoli: Tecnodid.
PESCARINI, A. (1970), Prefazione all'edizione italiana. In J. Dieudonné, *Algebra lineare e geometria elementare*, Milano: Feltrinelli, VII-XIX.
PIAGET, J., INHELDER, B. (1951), *La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.
ROSSI, C. (2001), Bruno de Finetti: The mathematician, the statistician, the economist, the forerunner, *Statistics in Medicine*, 20, 3651-3666.
SWELLER, J. (1988), Cognitive load during problem solving: Effects on learning, *Cognitive science*, 12(2), 257-285.
SWELLER, J. (2009), What human architecture tells us about constructivism. In S. Tobias & T.M. Duffy (Eds.), *Constructivist Instruction. Success or Failure?*, New York, Routledge, 127-143.
THOM, R. (1970), Les mathématiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique?, *L'age de la science*, 3, 225-236.
THOM, R. (1973), Modern mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematical Education*. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge: Cambridge University Press, 194-209.

Michele Pellerey
Università Pontificia Salesiana, Roma
pellerey@unisal.it

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 73-108

La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti

CARLA ROSSI

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, *e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di sapersi regolare in ogni circostanza afferrando gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.*

Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli e costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere *per dominare un problema.*

(de Finetti L 1967, p. 1)

1. – Premessa: ricchezza e complessità della personalità di de Finetti; matematica, probabilità, didattica

De Finetti è stato definito da tantissimi ricercatori, noti e non, "matematico, economista, filosofo, precursore" (Rossi 2001) e, invero, la sua curiosità intellettuale e operativa non aveva limiti e la sua intuizione e le sue capacità anche tecniche erano grandissime in molti campi. Ma soprattutto era, ed è tuttora, impressionante la sua propensione a trarre spunti di riflessione da una qualsiasi questione per riutilizzarli in un'altra, nonché la capacità di guardare lo stesso fenomeno sotto angolazioni e con lenti diverse: il suo "fusionismo", come lo chiamava mutuando il termine da Felix Klein; un fusionismo che talvolta sconcertava l'interlocutore.

De Finetti, nato da una famiglia di ingegneri, trasse verosimilmente da quelle radici la sua visione operativa ai problemi. Aveva anche dimestichezza con il mondo dell'arte, suo zio era pittore, lui stesso disegnava molto bene e fu in contatto con il grande architetto Luigi Moretti.

Sotto un profilo più tecnico, la sua *forma mentis* trasse anche molto dalla "nuova" fisica del primo Novecento; da lì desunse l'importanza dei concetti di "relatività", "osservabilità" e "verificabilità"; anche la biologia lo occupò: quasi incidentalmente, ma con esiti rilevanti.

Un campo che profondamente lo interessò e influenzò fu l'economia, intesa come problematica delle scelte preferibili in relazione allo scopo da conseguire, soprattutto in condizioni di **incertezza**; da lì possiamo vedere l'origine del suo orientamento anche teorico verso la "decisione", più che verso la conoscenza meramente speculativa. Il campo della decisione non ha praticamente limiti, giacché ovunque si pongono questioni di "convenienza": dalla vita di ogni giorno alla grande politica, dalle arti alle scienze, non esclusi la matematica, il diritto, l'etica stessa. Dal campo della finanza (lavorò per lunghi anni alle Assicurazioni Generali) de Finetti trasse spunti di carattere generale sui rischi e la loro diversificazione, per i quali, ormai è ampiamente accettato e sostenuto, avrebbe meritato il premio Nobel.

De Finetti conosceva la filosofia e ne criticava soprattutto l'oscurità di tante sue parti; nella sua visione di tipo pragmatista, attaccò le illusioni del "razionalismo" (esistono verità immutabili che trascendono i fenomeni, raggiungibili con il puro ragionamento) e del "realismo" (una proprietà del mondo osservata fin qui senza eccezioni costituisce un immutabile fatto di natura). Dalle più elevate dottrine morali, politiche e religiose trasse la tensione ideale e la spinta pratica ad operare per il bene collettivo, che lo portarono anche ad azioni assai "costose" sul piano personale.

De Finetti scelse consapevolmente di dedicare la sua vita alla matematica e si considerò sempre un matematico. Dalla prassi della matematica trasse certo l'importanza della "coerenza" come premessa normativa all'analisi e alla decisione; conseguentemente ne fece il criterio che impronta tutta la sua teoria delle probabilità. Tuttavia egli diede soprattutto rilievo alla capacità, che per lui era l'essenza della matematica, di immaginare traduzioni di questioni pratiche in schemi mentali, conferendo dunque un primato all'intuizione e alla comprensione dei meccanismi essenziali dei fenomeni: la creatività, caratteristica umana per eccellenza, in qualsiasi campo. Ciò non toglie che fosse disposto a introdurre lui stesso tecnicismi matematici anche spinti, quando lo riteneva necessario (es.: la "complicazione" teorica dovuta all'uso dell'assioma di additività solo finita delle probabilità).

La sua decisione di passare dallo studio dell'ingegneria a quello della matematica è così evidenziata in una lettera alla madre in cui spiega le sue motivazioni:

> *E se vuoi allargare un po' lo sguardo, dimmi di quanti ingegneri è passato alla Storia il nome, in confronto a tanti matematici che – da Pitagora ad Einstein – vivranno in eterno nelle loro concezioni superbe. Perché non è vero nemmeno che la Matematica sia ormai un campo esplorato da imparare e tramandare ai posteri tale e quale. Progredisce, si arricchisce, si snellisce, è una creatura viva, vitale, in pieno sviluppo, e solo perciò la amo, la studio, e voglio dedicarle la mia vita.* (F. de Finetti 2000, p. 733)

La matematica, disciplina che informa di sé tutti i campi della scienza, era il terreno ideale per il suo fusionismo. Il calcolo delle probabilità, naturale strumento per inquadrare questioni dei campi più svariati, tutti quelli in cui si presenta l'incertezza e la logica induttiva, fu per lui un terreno di elezione, quello adatto a fondare la logica dell'intera Scienza.

Dalla matematica, suprema "arte dell'imparare", e dalla sua propensione al bene di tutti trasse il suo impegno nella didattica e nella vita collettiva. Di questo si occupa principalmente questo articolo senza pretesa e neppure volontà di tracciare un unico rigoroso percorso, bensì inteso a esemplificare i mille rivoli di un pensiero dal quale abbiamo ancora moltissimo da trarre.

In particolare è interessante citare come per la definizione della probabilità de Finetti sia partito, in un suo corso a Trieste nel 1932/33, da un esempio tratto dalla vita collettiva.

2. – Della nozione di probabilità

Che cos'è la probabilità?

Dice un'antica sentenza latina, "tot capita, tot sententiae"; in nessun campo essa è tanto vera quanto nella teoria delle probabilità, e fin dai principi, fin da questa stessa domanda sul significato della probabilità. Tuttavia, fra un matematico che la definisca come rapporto tra il numero di casi favorevoli e possibili, uno statistico che la interpreti come un valore più o meno ideale della frequenza, e l'uomo della strada che dica "è la sensazione che mi guida in tutta la vita", non esito a dire che la risposta migliore, più completa, più sensata, è proprio quella dell'uomo della strada. (de Finetti L 1933, p. 1)

Come si vede, già a 26 anni, de Finetti esprime la sua nozione di probabilità, in modo ampio, coerente e completo, con un esempio comprensibile a tutti, facendo riferimento anche alle decisioni cui si dedicherà moltissimo.

3. – Complessità di de Finetti: interesse per la creatività, il benessere collettivo, la didattica, la matematica come terreno di creatività, impegno politico

Per cercare di capire l'approccio di de Finetti all'insegnamento della matematica e, in particolare, del calcolo delle probabilità (per qualunque ordine di studi, e per chiunque) occorre tenere presente la vastità e varietà dei suoi interessi e la sua capacità di collegarli. ll fusionismo e, in particolare, il legame fra intuizione e logica ritornano sempre nei suoi scritti, come nelle lezioni che teneva. La personalità di de Finetti non può essere descritta a partire da aspetti particolari, ma solo complessivamente, approfondendo poi, di volta in volta, un tema specifico, ma solo per ragioni pratiche di brevità.

Nel suo scritto intitolato *Chi sono io?*, elaborato nel 1981, in occasione del convegno "International Conference on Exchangeability in Probability and Statistics", organizzato dal 6 al 9 Aprile 1981 presso l'Accademia dei Lincei per il suo 75esimo compleanno, dice:

Chi sono?, la prima cosa che mi sembra di dover dire come punto di partenza è che di me stesso, come persona qualunque, m'importa assai di meno che di ciò che attiene al benessere collettivo, all'equilibrio ecologico secondo la linea *tenacemente difesa da Aurelio Peccei, al progresso sociale e civile secondo la linea ispirata a Lelio Basso (membro tra l'altro del tribunale Russell); linea cui vorrei che tutti mirassero per aver diritto a goderne quanto a ciascuno può ragionevolmente spettare. Uno per tutti e tutti per uno, senza eccessive differenze o rivalità tra individui o classi o nazioni: rivalità utili soltanto se mirano a migliorare ovunque il benessere collettivo anziché curarsi soltanto di quello egoisticamente (e miopemente) individuale o settoriale o classista.* (si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

Ne deriva l'interesse per la didattica, in particolare per la matematica e il calcolo delle probabilità, ma non solo, per mettere a disposizione di tutti la propria conoscenza ed elaborarla con tutti. Ne deriva, soprattutto, la sua attenzione ai "profani", così chiamati da lui in un articolo importante di cui si parlerà dopo, e agli studenti che a lezione, ma non solo, cercava di coinvolgere anche su argomenti almeno in parte nuovi e non trattati esplicitamente nei suoi scritti e nelle precedenti lezioni.

Il nome di de Finetti è ora conosciuto in tutto il mondo, non solo per la matematica, in particolare la probabilità, ma, ancor più, per l'economia. Non è troppo sorprendente, essendo vissuto in un'epoca in cui in matematica prevaleva l'impostazione formalista. Anche in campo economico tuttavia, il suo contributo è stato compreso con notevole ritardo, anche perché molti suoi lavori giovanili importanti e pionieristici furono scritti in italiano e pubblicati su riviste italiane.

Secondo Franco Modigliani, che nel 1961 lo propose come Fellow dell'Econometric Society dove risultò eletto al primo scrutinio, per i suoi studi in campo economico, de Finetti avrebbe meritato il premio Nobel, come accadde ad altri matematici: John Nash, Robert Aumann, Lloyd Shapley. Il Nobel Harry Markowitz riconobbe che un lavoro di de Finetti del 1938 (*Il problema dei pieni*, de Finetti 1938, http://www.brunodefinetti.it/Opere/Il%20problema%20dei%20pieni.pdf), di cui venne a conoscenza solo molto tardi, anticipava i suoi risultati degli anni '50 sulle "scelte di portafoglio", per i quali gli fu attribuito il Nobel nel 1990!

Il 21 maggio del 1967 de Finetti intervenne pubblicamente contro la dittatura instaurata in Grecia. In una lettera aperta a *L'Espresso*, insieme agli economisti Federico Caffè, Siro Lombardini, Luigi Pasinetti, Antonio Pedone e Luigi Spaventa, espresse solidarietà ad Andreas

Papandreu riportando le parole da questi espresse proprio durante la lezione tenuta nel 1966 al Centro Internazionale Matematico Estivo (*CIME*) ([1]). Vicino per vari anni alla sinistra cattolica di Livio Labor, simpatizzò anche per il Partito Radicale di Pannella e il 5 ottobre 1972 divenne addirittura direttore responsabile di *Notizie Radicali*, malgrado non fosse iscritto all'Ordine dei giornalisti, in deliberata violazione dell'obbligo previsto dalla legge.

Proprio per avere pubblicamente sostenuto, dalle pagine di *Notizie Radicali*, i diritti degli obiettori di coscienza, nel novembre 1977 fu clamorosamente incluso, assieme ad altre 89 persone, in un mandato di cattura con l'accusa di "associazione a delinquere, attività sediziosa, istigazione verso i militari a disobbedire alle leggi". Avvertito del mandato di cattura, fece sapere che si sarebbe fatto arrestare a Roma di fronte alla sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei, alle ore 11, alla fine della seduta inaugurale del nuovo anno accademico. E così fu: alla fine dell'adunanza fu arrestato e, seguito da un folto corteo di radicali e giornalisti, fu condotto nel carcere romano di Regina Coeli, che si trova proprio a poche decine di metri, e lì attese la revoca del provvedimento che, fortunatamente, era già stata diramata. Raccontava poi a noi allievi di aver chiesto di entrare almeno in una cella, ma che non gli fu permesso e attese in "anticamera".

Quel giorno dovetti sostituirlo io nella seduta di Laurea ([2]).

4. – Il coinvolgimento degli studenti: il mio esame

L'interesse e la capacità didattica di de Finetti si manifestavano attraverso il coinvolgimento degli studenti in discussioni su svariati temi a partire da esempi concreti e curiosi della vita di ogni giorno.

([1]) Importante iniziativa sull'Economia organizzata da de Finetti inizialmente a Villa Falconieri (Frascati) e poi a Urbino ogni estate. La prima edizione si tenne all'Aquila con la presenza di premi Nobel.

([2]) Era previsto l'esame di uno studente, con media molto alta, che avevo seguito anche io nel preparare la tesi. Ricordo che la madre dello studente mi telefonò molto preoccupata che io non fossi all'altezza di far avere la lode al figlio, il quale l'avrebbe avuta comunque solo per la sua media alta, come in effetti è avvenuto.

Posso metterli in luce raccontando come si svolse il mio esame e come cambiò la mia vita "pubblica", tenendo presente l'affermazione educativa "*scatenare l'intelligenza, non soffocarla*".

Il suo modo di procedere risultava in realtà frustrante per molti, che non riuscivano a interpretare i suoi suggerimenti e a interagire "naturalmente" con lui.

Eravamo solo due ragazze a dover sostenere l'esame di calcolo delle probabilità; l'altra aveva paura di essere interrogata da de Finetti, e preferì essere interrogata dall'assistente Giandomenico Majone. L'esame, che si teneva alla lavagna, era comunque alla presenza del professore, che mi invitò a sedere vicino a lui per aspettare il mio turno e assistere **attivamente,** insieme a lui, all'interrogazione dell'altra allieva, chiedendomi se ero disponibile a commentarla con lui. Naturalmente uno studente il giorno dell'esame dice di sì a qualunque richiesta del professore, anche se un po' "nuova" e inaspettata. Va considerato che io avevo seguito pochissime lezioni del suo corso e mi ero preparata quasi solo sul suo testo *Teoria delle probabilità* (1970), appena uscito; de Finetti non mi conosceva affatto.

Da una domanda, con risposta corretta da parte dell'altra studentessa, sulle funzioni di ripartizione in due dimensioni derivò, per de Finetti e per me, una divagazione/discussione molto ampia. Quando mi chiese come avrei fatto a dare un'immagine geometrica delle varie proprietà delle funzioni in modo da poterle rappresentare nel piano, io dissi che avrei riferito le proprietà alle curve di livello della funzione e cominciai a evidenziare l'andamento ammesso per le curve, derivandolo dalle proprietà analitiche della funzione. La discussione durò più di mezz'ora, ma le persone presenti chiaramente non potevano seguire perché parlavamo piano per non disturbare l'interrogazione dell'altra studentessa, che il professore seguiva contemporaneamente, mentre nessuno poteva seguire la mia. Conclusosi l'esame della mia collega, fui invitata da de Finetti a ripetere alla lavagna tutto quello che avevo derivato nella nostra chiacchierata, come fosse un seminario per tutti i presenti, mentre invece era la mia interrogazione ufficiale. Erano emerse alcune proprietà, non ancora trattate geometricamente, delle funzioni di ripartizione in due dimensioni "leggendo" le note proprietà analitiche con approccio "visuale" ("saper vedere" in matematica! Fondamentale, per de Finetti).

Sostenuto l'esame, ho comunque seguito il suo successivo corso (dove introdusse anche le proprietà geometriche emerse dalla mia interrogazione); mi fu utilissimo, perché con il suo modo di insegnare non si finiva mai d'imparare e maturare interessi di varia natura, soprattutto perché i suoi esempi riguardavano applicazioni in vari campi e nella vita di tutti i giorni.

5. – Presentare la matematica e la probabilità in modo rispondente alle esigenze del profano

Per spiegare l'approccio di de Finetti all'insegnamento della probabilità, basta illustrare il suo pensiero sull'insegnamento in generale e su quello della matematica in particolare. Se interessa specificamente l'insegnamento del calcolo della probabilità, basta sostituire probabilità a matematica nella maggior parte dei testi di de Finetti.

Vale la pena di riportare una sintesi da *Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze* (de Finetti A 1965a) che suggerisco di leggere completamente perché, purtroppo, è attuale anche oggi nelle sue critiche:

> [...]. *In succinto la tesi è questa: se c'è, come purtroppo indubbiamente c'è, un atteggiamento d'incomprensione e d'ostilità quasi generale dei profani verso la matematica, la colpa è nostra, dei matematici, perché non vogliamo o non cerchiamo o non sappiamo presentare la matematica in modo rispondente alle esigenze del profano. La miope e autolesionista visione specialistica ci induce a vantare come un pregio la possibilità di presentare la matematica come un campo reso autonomo e staccato da ogni nesso colle altre scienze grazie alla completa astrattizzazione, mentre sarebbe essenziale superare questa visione ristretta e caricaturale affermando la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che sarebbe la cultura* [...]. *La situazione derivante da tale lacerazione della cultura, in umanistica contro scientifica, e poi perfino tra i vari campi della scienza, dovrebbe essere più generalmente sentita come fonte di angosciosa preoccupazione.* (de Finetti A 1965a, p. 120)

Per dire dell'attualità della sua preoccupazione: alla fine di gennaio 2015 ho seguito diverse conferenze nell'ambito del "Festival della Scienza" (Tema: *L'ignoto - La scienza e l'importanza del non sapere*), organizzato presso l'Auditorium di Roma. Un importante conferenziere, forse solo per semplificare, sostenne che la scienza si impara dopo il linguaggio e, quindi, la cultura umanistica nascerebbe prima di quella scientifica, anche parlando di preistoria e di popolazioni antiche. Basta però tenere presente che, per "sopravvivere" alla vita di ogni giorno, anche per i neonati, è necessario possedere una *forma mentis* di impronta "scientifica" e un approccio alla conoscenza basato sulla logica induttiva. Credo che ciò sia evidente per chi, come i neonati, impara il linguaggio in modo "sperimentale". Ma anche per l'evoluzione stessa del linguaggio ci sono prove di uno sviluppo su base induttiva: si può parlare di induzione nella scienza egizia pre-ellenica, con concomitante creazione di linguaggio adeguato, a partire da problemi della vita; ci sono prove di pratica induttiva nell'evoluzione tecnica durante la preistoria; per non dire di quanto emerge dall'osservazione del comportamento animale. Naturalmente, la scienza moderna, come già quella antica, è essa stessa uno sviluppo del linguaggio; a conferma dell'inammissibilità della "lacerazione" fra cultura umanistica e scientifica (totale approccio fusionista anche qui).

Prosegue de Finetti:

Principalmente responsabile di tale lacerazione è la malintesa deleteria aspirazione al purismo, all'autonomia, alla specializzazione, all'isolamento. Per il profano, come per ogni altra persona normale, il pregio di ogni cosa deriva dalla sua collocazione, utile o necessaria, nel più vasto tessuto di interessi e di conoscenze capace di attirarne l'attenzione, ed è questo l'aspetto della matematica che va sottolineato in primo luogo; l'eventuale ricorso all'astrattizzazione può essere giustificato solo se e quando, in un secondo momento, tale espediente tecnico si possa dimostrare apportatore di ulteriore utilità come economia e potenza di pensiero, come creatore di nuove facoltà di visione delle cose prima e più ancora che come strumento formale per dominarle [...].

Queste esigenze, illustrate per riguardo al profano, sussistono anche nel caso opposto, e cioè per la preparazione dei futuri specialisti, ossia di coloro che in vario senso e misura, avranno bisogno di sviluppare gli studi matematici e di utilizzare effettivamente la matematica nel corso della loro vita [...].

La risposta alla domanda costituente il titolo della relazione sarebbe quindi: programma sostanzialmente unico, salvo differenziazioni marginali [...] *la stessa risposta va data anche per riguardo ai criteri e metodi di inse-*

> *gnamento, e forse anzi in modo ancora più reciso, perché l'incomprensione che potrebbe derivare da diversità del campo delle conoscenze è meno profonda di quella cui darebbe luogo una frattura tra i modi di vedere le stesse impostazioni di partenza.* (de Finetti A 1965a, pp. 120-122)

L'articolo poi sviluppa ampiamente il tema; credo che sia utilissimo che gli insegnanti di ogni ordine e materia lo leggano con la massima attenzione.

5.1 – *Valore degli esempi: il panettone di Poisson*

Quello che de Finetti credeva fondamentale per lo sviluppo della scienza lo pensava tale anche per l'approccio didattico; molti spunti li ha forniti nei suoi scritti e possiamo elencarli e ampliarli con esempi concreti trattati nelle sue lezioni o in discussioni con i suoi allievi:

> [...] *le esemplificazioni pratiche più semplici (ridotte magari a cenni)* – afferma de Finetti – *devono precedere ogni teorizzazione per creare anzitutto una motivazione, atta a predisporre all'accettazione di astrazioni che appaiono giustificate, ed evitare così la reazione di rigetto che la via opposta spesso produce, non del tutto ingiustificatamente.* (de Finetti A 1974a, p. 31; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

Un esempio tratto dalla vita comune gli servì per parlare, in una lezione nel dicembre del 1969, della distribuzione di Poisson in modo concreto e intuitivo, introducendo addirittura la nozione di *scomponibilità* e di *indefinita scomponibilità* di distribuzioni, poi naturalmente delineata anche in modo più formale e lasciata da approfondire per proprio conto agli studenti.

Poiché era dicembre inoltrato ed erano già in vendita i panettoni, spiegò che il numero (aleatorio!) di canditi e chicchi di uvetta in un panettone di prefissati peso e marca seguiva la distribuzione di Poisson; spiegava poi come doveva essere trattato lo stesso problema per una *fetta* con un peso dato, riportando la media del numero di chicchi alla frazione di peso. La somma di numeri aleatori poissoniani indipendenti è ancora poissoniana, e, viceversa, qualunque distribuzione poissoniana è scomponibile in una convoluzione di poissoniane.

Questo esempio non solo permetteva di parlare della distribuzione di Poisson, ma introduceva direttamente un processo fatto di *eventi rari* (la comparsa di chicchi) nell'ambito di una grandezza (la massa pastosa) con un *peso* unitario (o *fetta* unitaria). Avendo compreso la distribuzione di Poisson dall'esempio del panettone, il passaggio a concepire un **processo aleatorio**, dove la grandezza in cui sono immersi gli eventi rari diventa il *tempo* risulta facile; e così lo è l'ulteriore generalizzazione che si ha passando al piano, allo spazio e ad altri ambienti.

5.2 – *Contro la mania del rigore: dimostrare in modo intuitivo e comprensibile, sui casi principali; solo dopo affinare e generalizzare; processo Testa e Croce, approssimazione di distribuzioni a varianza finita; teorema centrale*

> *Il rigore è indubbiamente necessario, ma la mania del rigore è spesso controproducente. Una dimostrazione ineccepibilmente logica, valida sotto condizioni estremamente generali, è in genere complicata e priva di prospettiva, nascondendo il concetto intuitivo essenziale nella foresta di minuzie occorrenti solo per includere o casi marginali o estensioni smisurate.*
> (de Finetti A 1974a, p. 34; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

È una critica costruttiva della base astratta dell'insegnamento della matematica. I libri di de Finetti di *Teoria delle probabilità* (1970) evitano le lunghe dimostrazioni matematiche di molte proprietà, utilizzando molto più l'approccio diretto e intuitivo a partire da esempi e problemi, che, comunque, pongono le basi per la dimostrazione che viene spesso accennata o trattata dopo. Per esempio, rappresentando geometricamente, se possibile con l'utilizzo della funzione di ripartizione, il numero standardizzato di successi nel caso binomiale, si vede, al crescere di n, la tendenza alla distribuzione normale standardizzata. Naturalmente de Finetti era bravissimo nel fare grafici, come si vede dai suoi scritti; ora è molto più facile procedere con Excel in aula, utilizzando esempi statistici adeguati. Un esempio è dato dalle distribuzioni di caratteri biometrici quantitativi dovuti al contributo additivo di molti geni (per esempio l'altezza), come evidenziato nel 1846

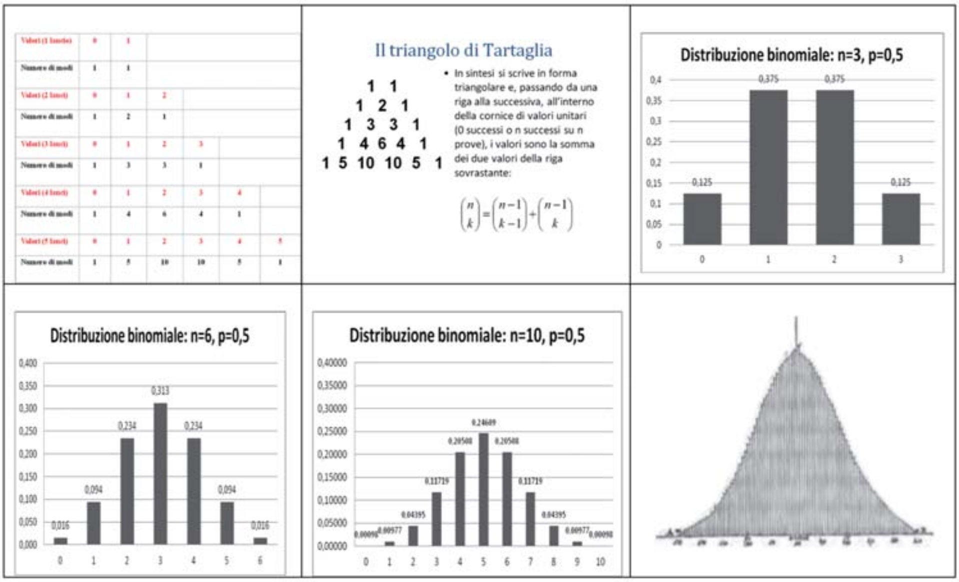


Figura 1. Esempi didattici sul Teorema Centrale: Testa e Croce (T-C), con tendenza alla forma a campana fin da n abbastanza limitato, e grafico di Quételet (Quételet 1846, p. 103) che riporta la distribuzione normale suggeritagli dall'osservazione delle tavole relative alle misure toraciche di 5.738 soldati scozzesi, distribuite intorno alla media con un andamento simile alla legge degli errori

da L.A.J. Quételet che, essendo astronomo, matematico, statistico e sociologo, conosceva la distribuzione gaussiana e evidenziò l'adattamento a tale distribuzione teorica dell'altezza dei coscritti scozzesi (fusionismo!). La Figura 1 è tratta da una mia lezione sulla binomiale, utilizzando da un lato l'esempio definettiano del processo di “Testa e Croce” (T-C), con tendenza alla forma a campana fin da n abbastanza limitato, e dall'altro il grafico di Quételet che riporta la distribuzione normale relativa a misure corporee (Quételet, 1846). Quételet illustra come, in una popolazione omogenea, i caratteri dei singoli si distribuiscano secondo un istogramma, avente ordinate proporzionali ai successivi termini dello sviluppo del binomio di Newton, e conclude che i caratteri umani si possono studiare con il calcolo delle probabilità e che per essi vale l'approssimazione con i minimi quadrati già formulata da Gauss e Legendre per trattare le discordanze tra diverse misure di un fenomeno fisico.

Bruno de Finetti usava ampiamente il processo Testa e Croce (T-C). Chiariva anche (ma forse senza la necessaria enfasi ...) che qualunque processo a varianza finita è approssimabile con esso, almeno asintoticamente. Una distribuzione con varianza finita si può approssimare con una semplice coppia di masse concentrate a distanza σ dalla media, conservandone le caratteristiche del second'ordine. Con una semplice trasformazione affine (cambio di origine e di unità di misura) ci si può addirittura ridurre al caso di media pari a 0 e varianza pari a 1 (standardizzazione). Se si suppone di sommare un gran numero di numeri aleatori, indipendenti e le cui distribuzioni, diverse, siano però identiche quanto a caratteristiche di media e varianza, ecco che appare il processo T-C; e, su un gran numero di numeri aleatori, appare la inevitabile tendenza alla "campana"; e, su un numero ulteriormente ampliato di numeri aleatori, il processo diventa quello di Wiener-Lévy ([3]).

Naturalmente poi nel suo libro, già citato, *Teoria delle probabilità* si trovano anche dimostrazioni rigorose del "teorema centrale". La più semplice e interessante utilizza la funzione caratteristica (trasformata di Fourier); funzione su cui de Finetti aveva dato anche contributi importanti fin dagli anni giovanili (de Finetti A 1932a). In questo scritto si trova anche la prima versione del risultato noto in tutto il mondo come "teorema di de Finetti", di cui parleremo in seguito.

5.3 – *Dall'astratto al concreto: un contributo suggerito da de Finetti il cui interesse si manifesta, fuori Italia, più di 40 anni dopo*

> [...] *il significato degli assiomi* – scrive de Finetti – *non è "astratto" se non nel senso di "multiconcreto": esprime e idealizza proprietà riscontrabili in svariati casi e che è ragionevole prevedere troveranno analoga applicazione in molte altre applicazioni più o meno analoghe.* (de Finetti A 1974a, p. 32; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

([3]) Il cambio di origine e di unità di misura, di cui de Finetti faceva uso continuo e estremamente disinvolto, molto spesso risulta ostico perfino a studenti di matematica del terz'anno, che pure hanno frequentato fior di corsi di geometria. Questo perché spesso tali corsi presentano le varie trasformazioni (metriche, affini, proiettive) in modo completamente astratto, trascurando di far comprendere con adeguati esempi quali situazioni reali (fisiche, sociali) possano essere così trattate e quale sia il senso delle invarianze sottostanti.

De Finetti era in grado di intuire la potenza applicativa di talune costruzioni astratte (assiomatiche o no), che magari sfuggiva ad altri, matematici o specialisti. Ne ho avuta una conferma recentemente.

Le proprietà geometriche delle superficie di ripartizione, di cui parlai con de Finetti nel corso del mio esame, le ho poi formalizzate, ulteriormente sviluppate e pubblicate sul *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* (Rossi 1973); rivista dove anche de Finetti ha pubblicato vari lavori importanti, conosciuti ora, con molto ritardo, anche a livello internazionale. Essendomi poi occupata di altro, non ho più continuato su quel tema e avevo quasi dimenticato il lavoro. Mi sono molto sorpresa quando, all'inizio degli anni '90, mi ha cercato la ricercatrice di Torino Luisa Tibiletti per chiedermi una copia del lavoro. Ma ciò che mi ha sorpreso molto di più è stata la richiesta dello stesso lavoro fatta alla fine del 2014 da un ricercatore russo (Victor Mingazov), attualmente in Germania a Ulm per un master in finanza; ho avuto qualche problema ad inviarlo, perché, a 41 anni dalla pubblicazione, non ne avevo copia digitale, né cartacea. Il motivo della richiesta era la citazione di quel lavoro italiano in un articolo internazionale (Cousin e Di Bernardino 2013), che tratta di applicazioni in finanza matematica, con riferimento anche a diversi articoli di Luisa Tibiletti, oltre al mio. Come si vede, dalla mia dimostrazione di proprietà geometriche, ispirata da de Finetti, si è passati poi ad un utilizzo molto applicativo.

5.4 – *Concreto vs. astratto; intuizione vs. logica; fusionismo vs. purismo*

Precisiamo ora quanto accennato sopra relativamente al rapporto fra concreto e astratto, partendo dalle parole stesse di de Finetti in proposito:

> *Quanto detto, sia pur succintamente, contro la contrapposizione fra concreto e astratto, conduce in modo naturale, e analogamente, a rivalutare gli aspetti più attivi, più creativi (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può (né dovrebbe; altrimenti esorbiterebbe dal campo su cui si estende il suo diritto di sovranità) condurre a nessuna*

conclusione "nuova", cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse. (de Finetti A 1974a, p. 32; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

Ho sempre indicato nel fusionismo il principale concetto di base per il miglioramento dell'insegnamento e della comprensione della matematica. Nel senso più specifico, in cui fu introdotto da Felix Klein, il fusionismo consiste nella fusione dello studio di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc. dall'altra; più in generale si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinarmente), mentre le tendenze antiquate predicavano il «purismo». (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

Un approccio fusionista non disdegna l'intuizione, pur non contrapposta al rigore:

Un altro preconcetto e movente del ragionare in astratto è per molti la preoccupazione di 'bandire l'intuizione, perché talvolta induce in errore'. La preoccupazione può essere giustificata in delicate questioni di critica dei principi; ma fuori di tali situazioni eccezionali è ben maggiore il rischio di errare per mancanza dell'intuizione. Volerla bandire sarebbe come cavarsi gli occhi perché esistono le 'illusioni ottiche' senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente. (de Finetti A 1965a, p. 133)

I punti trattati fin qui compaiono espressamente anche in *Chi sono io ?*:

Quanto al mio modo di pensare, di prospettarmi i problemi ed esporre le mie tesi, dirò che cerco sempre di rendere quanto più possibile chiari e semplici e "naturali" e "intuitivi" – magari presentandoli in modi concreti e divertenti – i concetti e i ragionamenti in ogni campo, soprattutto in quello della probabilità che particolarmente mi interessa, e che è, purtroppo, una delle nozioni più esposte al rischio di velleitari fraintendimenti e distorsioni e addirittura travisamenti di ogni peggiore specie. (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

5.5 – *Insegnamento tramite esperimenti; Previsione vs. "Tirare a indovinare"; Concorso pronostici calcistici e diagramma ternario*

Per quanto riguarda la comprensione della probabilità, l'insegnamento di de Finetti comprendeva veri e propri "esperimenti" comportamentali. Uno di questi, che era in atto quando studiavo, era il "concorso pronostici" sulle partite di calcio di serie A. Così egli ne parla in *Chi sono io?*:

> [...] *Col medesimo intento di imparare ad usare valutazioni di probabilità, di abituare le persone a pensare e ragionare (e conseguentemente, comportarsi) in base a valutazioni (ragionate, ma naturalmente soggettive) di probabilità, è stato ripetuto per diversi anni all'Università di Roma un esperimento di pronostici probabilistici con riferimento ai risultati delle partite del campionato di calcio* [...] *secondo il mio punto di vista l'esperienza era educativa perché non solo non era basata sul banale e anti-educativo malvezzo del "tirare a indovinare" (come al Lotto e al Totocalcio), ma, al contrario,* ***obbligava a indicare la probabilità [dei diversi possibili risultati] numericamente*** $[p_1, p_2, p_x]$. (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

La classifica dei partecipanti era basata sulla funzione di penalizzazione ottenuta da ciascuno, per ciascuna partita, come una distanza euclidea al quadrato tra la valutazione di probabilità espressa (coerente secondo la definizione di de Finetti: $0 \leq p_i \leq 1$ e $p_1 + p_2 + p_x = 1$) e il risultato osservato (1,0,0 = vittoria della squadra 1; $0, 1, 0$ = vittoria della squadra 2 e 0,0,1 = pareggio); essa si può rappresentare geometricamente sul triangolo (Figura 2), ormai denotato "di de Finetti" in gran parte della letteratura, essendo stato da lui usato nel primo lavoro pubblicato quando aveva 20 anni (de Finetti A 1926). La **previsione** (altra parola chiave che ritorna nel ragionamento sull'induzione) relativa al risultato di una partita da parte di un partecipante all'esperimento, si rappresenta geometricamente come un punto P all'interno di un triangolo equilatero di altezza pari a 1, in modo che le lunghezze dei segmenti uscenti da P e perpendicolari ai lati, PA, PB e PC siano uguali ai tre valori delle probabilità, mentre i risultati possibili sono rappresentati dai tre vertici del triangolo. La funzione di penalizzazione è la lunghezza al quadrato del segmento che unisce P al vertice che si è verificato, per esempio $0, 1, 0$. Emerge sempre il saper vedere in matematica. Naturalmente è possibile dimostrare che "tirare a indovinare" (cioè, assegnare probabilità 1 a un risultato, e 0 agli altri due) ha una penalità *media* maggiore che non l'esprimere la probabilità che si attribuisce ai tre risultati (Rossi 1999). Per praticità, nel concorso pronostici che si svolse dal 1961 al 1969, si usava valutare la

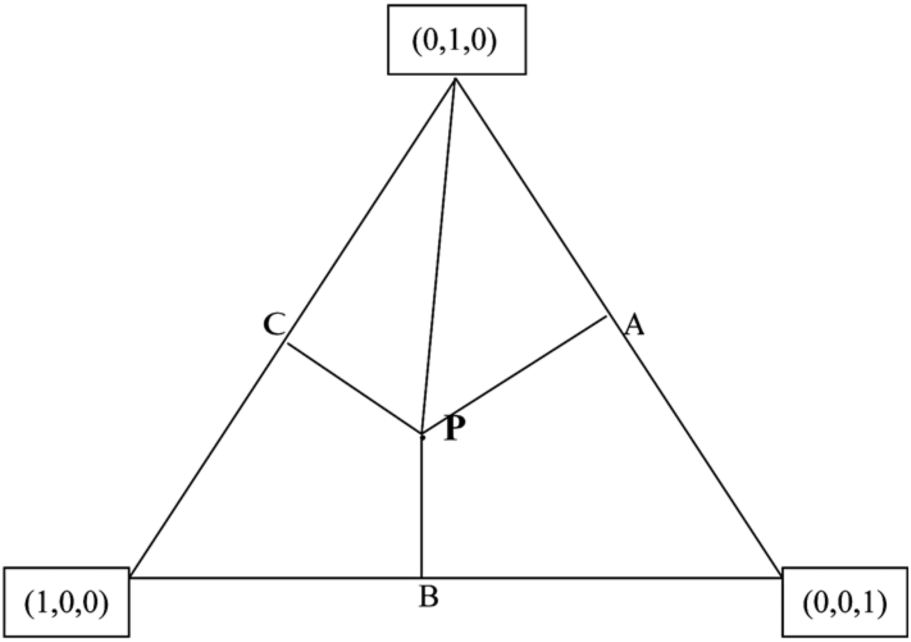


Figura 2. Triangolo di de Finetti per i pronostici calcistici in forma geometrica

probabilità in forma percentuale, come si può verificare nell'ampia documentazione relativa (http://digital.library.pitt.edu/u/ulsmanuscripts/pdf/31735033466487.pdf).

L'esperimento permetteva di far toccare con mano diversi aspetti fondamentali della probabilità e della sua valutazione. In particolare, questo esperimento esemplifica bene ciò che per de Finetti caratterizza la probabilità:

- la probabilità è *soggettiva* (ciò non toglie che una valutazione di probabilità possa essere anche ampiamente intersoggettiva); il soggetto che la valuta ha a disposizione alcune regole di *coerenza*, contravvenendo alle quali incorre in perdite certamente superiori al minimo possibile;
- ogni valutazione di probabilità dipende dall'*informazione* che si possiede; in altre parole è una "probabilità condizionata", concetto fondamentale;

– l'acquisizione di notizie (nell'esempio: quelle dovute ai risultati delle partite già effettuate; ma anche altre) fornisce ulteriori informazioni e permette di modificare la valutazione delle probabilità sugli eventi futuri; lo strumento analitico per questi calcoli è il teorema di Bayes; si possono anche efficacemente introdurre la probabilità a priori e la funzione di verosimiglianza;
– ogni nuova informazione (sulle partite effettuate, sulle squadre) influisce non solo insieme alle altre (alla fine del campionato; ovvero quando la ricerca è conclusa), ma anche singolarmente e dinamicamente, mediante il calcolo della sua verosimiglianza da combinare con la probabilità a priori (qui si ritrovano le basi teoriche per l'induzione e l'approccio bayesiano all'intera statistica!);
– una considerazione diversa, ulteriormente istruttiva, riguarda l'ordine di acquisizione delle informazioni sui risultati delle partite: per taluno può essere influente ai fini della valutazione delle probabilità per la prossima partita; per talaltro invece può non esserlo. Questo secondo caso corrisponde alla situazione di "scambiabilità" (inizialmente chiamata "equivalenza" da de Finetti), che, se verificata, agevola fortemente molte valutazioni di inferenza statistica. Infatti l'informazione globale che si possiede non dipende dall'ordine con cui si sono ottenute le singole informazioni dello stesso tipo che la costituiscono.

6. – Probabilità condizionate e induzione; centralità del concetto di evento contro la riduzione a aggregato di "casi elementari", che tali non sono mai; diagrammi di Venn

Il concetto di probabilità condizionata, centrale nel calcolo delle probabilità, è quello che lo caratterizza in modo specifico nell'approccio di de Finetti, rispetto a una pura e semplice branca della teoria della misura.

La probabilità, come qualsiasi altro concetto matematico, è uno strumento particolarmente utile a misurare le variazioni di una quantità in ragione delle variazioni di altre. Nel nostro caso: la variazione del grado di fiducia nel verificarsi di un evento in ragione delle variazioni dei nostri elementi conoscitivi e psicologici. L'induzione altro non è che il calcolo delle variazioni di probabilità.

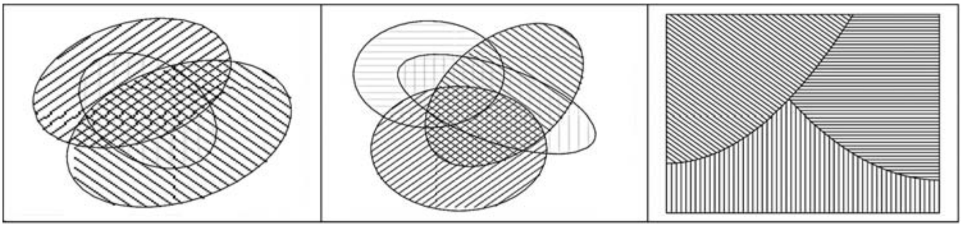


Figura 3. Diagrammi di Venn per l'unione e l'intersezione di più eventi e la scomposizione dell'evento certo nei costituenti (de Finetti L 1986)

Per capire la differenza fra l'approccio al calcolo delle probabilità di de Finetti e quello, tuttora più diffuso, basato sull'assiomatica di Kolmogorov (e conseguente riconduzione a teoria della misura), si possono utilizzare i "diagrammi di Venn" a cui de Finetti era affezionato e che usava sempre a lezione. Consideriamo i diagrammi in cui si rappresentano l'intersezione e l'unione di eventi e la scomposizione dell'evento certo nei costituenti, fondamentali da illustrare e capire bene (Figura 3).

Attraverso i primi due diagrammi è facile illustrare le proprietà base della probabilità a cominciare dall'unione di due o più eventi, la cui probabilità è data dalla somma di quelle dei singoli eventi sottratta la probabilità dell'intersezione di due, aggiungendo l'intersezione di tre. Ciò permette di definire esattamente la probabilità dell'intersezione come probabilità condizionata ad A di B, moltiplicata per la probabilità di A prima del suo verificarsi, sicché non risulta necessario introdurre una "autonoma" definizione di probabilità condizionata, formale ma senza un significato costruttivo, tramite l'espressione analitica

$$P(B \mid A) = P(AB)/P(A).$$

Una tale definizione fornita come se fosse autonoma dal resto impedisce agli studenti di capire fino in fondo il significato fondamentale dell'evento condizionante e della stessa probabilità condizionata, e anche quello di indipendenza.

Se, guardando i diagrammi di Venn, si interpreta la probabilità come area, è immediato anche derivare la formula suddetta. Analogamente si ricava subito la formula della probabilità dell'unione per casi diversi.

Per quanto riguarda gli eventi costituenti, de Finetti insisteva molto su di essi, perché sono utilissimi per la probabilità totale, per il teorema di Bayes e le applicazioni statistiche. È sempre fondamentale esplicitarli per evidenziare la necessità di considerare tutte le possibilità osservabili per un evento di interesse abbastanza complesso. Questo succede per esempio nelle decisioni diagnostiche. Si sente, ahimé, parlare di errori medici dovuti ad eventualità trascurate.

La teoria delle probabilità condizionate e il teorema di Bayes hanno un'ampiezza applicativa come poche altre teorie: su di esse si basa tutta l'induzione (o Inferenza, come si usa dire in ambito statistico) e cioè, in sostanza, tutta la Scienza. Non a caso, insieme ai colleghi statistici, ho chiamato INDUZIONI la rivista fondata per la didattica della probabilità, della statistica e della demografia, che ha ripubblicato diversi articoli didattici di de Finetti.

La **logica induttiva**, che regola le variazioni di probabilità conseguenti a nuove informazioni, è il legame fondamentale tra la probabilità e la statistica inferenziale, considerate spesso congiuntamente da de Finetti nel suo approccio fusionista. Si tratta di una logica che, in modo intuitivo ma non particolaristico, si può far emergere dall'esperimento dei pronostici sul campionato di calcio. L'induzione e i fondamenti dell'inferenza statistica facevano parte del corso di calcolo delle probabilità di de Finetti: il capitolo 11 di *Teoria delle probabilità* si intitola *Ragionamento induttivo; inferenza statistica*. Già dal titolo si capisce il legame tra statistica e probabilità e infatti il capitolo inizia così:

> *La forma di ragionamento valida nell'ambito della logica del certo, ossia della logica propriamente detta, è quella del ragionamento deduttivo. Non si può giungere, col ragionamento, a conclusioni certe se non provando che sono incluse in cose già note, ossia facendo scendere il particolare dal generale. Ma è anche evidente che, in questo modo, non si può mai giungere ad allargare il campo delle nostre conoscenze (salvo nel senso di rendere esplicita qualche conoscenza implicitamente acquisita, ma rimastaci inavvertita).*
>
> *Quello che porta a concludere, partendo da ciò che si sa o che si è accertato, qualcosa che vada oltre, è soltanto il cosiddetto ragionamento induttivo*; [...]. *Il campo dell'induzione si estende in ogni ambito e ad ogni livello: dal vaglio pro e contro l'attendibilità di diverse teorie scientifiche o pro e contro la colpevolezza di questo o quell'indiziato di un crimine, ai metodi per stabilire in base all'osservazione le condizioni per determinati tipi di assicurazione e a quelli per ottenere valutazioni adeguatamente precise di una grandezza mediante misure inevitabilmente imprecise.* (de Finetti L 1970, p. 559)

Particolarmente istruttivo è pensare al processo con cui nuove *ipotesi* o *teorie* scientifiche vengono formulate in base a intuizioni suggerite da qualche particolare circostanza osservata, che possiamo definire *fatto*, e poi discusse, spesso con alterne vicende, in base a *nuove risultanze* da confrontare con le *previsioni* offerte dalla teoria. Questo procedimento è quello applicato in fisica da Galileo per la legge dell'isocronia del pendolo, avendo osservato l'oscillazione dei lampadari del duomo di Pisa.

Seguendo i suggerimenti di de Finetti sugli ambiti di applicazione del ragionamento induttivo, ho scelto a fini didattici due esempi facilmente utilizzabili: una teoria scientifica, quella di Darwin sulla formazione degli atolli, e il giudizio di Salomone (La Bibbia, 3° Re). Non riporto qui il primo esempio (Rossi 1999), ma il secondo è importante e semplice soprattutto a fini didattici.

Il giudizio di Salomone (sintesi)

In quel tempo vennero due donne meretrici al re. Una di esse disse: "io e questa donna abitavamo nella medesima casa, e io partorii presso di essa nella stessa stanza. Tre giorni dopo che io ebbi partorito, anche costei ebbe un figliolo. Ora morì il figliolo di questa donna durante la notte. Levatasi allora nel cuor della notte, di nascosto tolse il mio figlio dal fianco della tua ancella, che dormiva, e se lo collocò sul suo seno, mentre il suo figlio, che era morto, lo pose sul mio seno. Il mattino, lo vidi morto; ma avendo guardato con maggior diligenza alla luce del giorno, m'accorsi che non era quello che io aveva generato". L'altra donna rispose: "Non è vero quanto tu dici, ma il figlio tuo è morto; il mio vive" [...] *e così litigavano alla presenza del re.*
Allora il re disse: "Portatemi una spada". Quando ebbero portata la spada, egli soggiunse: "Dividete il bambino vivo in due parti e datene una metà all'una e una metà all'altra". La donna, madre del figlio vivo, disse al re: "Te ne scongiuro, o signore, dà a lei il bambino vivo e non volerlo uccidere". Al contrario l'altra diceva: "Non sia né mio, né tuo, ma sia diviso". Rispose allora il re e disse: "Date a costei il bambino vivo e non si uccida, poiché costei è la vera madre".
Tutto Israele seppe del giudizio e temette il re, vedendo che la sapienza di Dio era in lui per amministrare la giustizia.

Si tratta di *statistica forense bayesiana*, usata da Salomone seguendo un paradigma logico induttivo che può essere così schematizzato:

– Donna A e Donna B inizialmente equiprobabili come madri.

Poi, dal teorema di Bayes:

– P (A è la vera madre | A accetta la suddivisione del bambino) = = K × P(A è la vera madre) × P (Accetta la suddivisione del bambino | A è la vera madre).

Il valore di P(A accetta la suddivisione del bambino | A è la vera madre) è per Salomone pari a 0, quindi la decisione implica l'esclusione di A e la restituzione del figlio a B.

Tutto si riduce, allora, alla nozione e alla valutazione di probabilità condizionate e all'utilizzo dello schema induttivo di Bayes per incorporare ogni nuova informazione acquisita recuperando informazioni già esistenti (dati osservazionali) oppure effettuando nuove prove (dati sperimentali); l'esempio di Salomone rientra in questo secondo caso. Il ragionamento induttivo è tutto qui. Esso indica come imparare dall'esperienza, consentendo di aggiornare le nostre **previsioni** su fatti non osservati, cioè realizzazioni di "eventi": schema al quale, con opportune formulazioni, sono riconducibili anche la teoria corretta dell'apprezzamento ("test") di ipotesi e delle valutazioni ("stime") di numeri aleatori. L'esperienza non insegna a creare dal nulla un'opinione, ma soltanto ad aggiornare un'opinione precedentemente formulata. Chi partisse "senza nessuna opinione", neppure vaghissima, non potrebbe far nulla! Ed è ovvio; non capirebbe neppure di cosa si sta parlando!

L'esperimento definettiano dei pronostici calcistici permette di introdurre tutti i concetti base. In particolare, insegna che opinioni iniziali anche molto vaghe, per esempio "per me, che non conosco la forza di tutte le squadre di serie A, i tre risultati possibili di ogni partita sono equiprobabili", gradualmente possono modificarsi, seguendo la regola di Bayes, in seguito ai primi risultati acquisiti. Non solo: se l'opinione iniziale è molto vaga, come la precedente, le modifiche sono subito molto rilevanti, visti i primi risultati; le modifiche invece sono meno importanti se l'opinione iniziale è più marcata. A lungo andare, l'esperienza finisce per prevalere su qualunque opinione iniziale ... tranne il caso in cui l'opinione iniziale sia così marcata da assegnare probabilità 0 a un certo evento; in tal caso, *nessuna* evidenza acquisita potrà più modificare quello 0! L'esperimento calcistico è estremamente istruttivo, a tal proposito.

Il risultato di un'induzione di rado permette di decidere deterministicamente per un'ipotesi; nel migliore dei casi, se un fatto osservato risulta incompatibile con qualche ipotesi, come la probabilità pari a zero nel giudizio di Salomone, si può escludere qualche ipotesi con certezza, ma non si può mai essere certi, nell'accettare una spiegazione plausibile, che non ce ne sia un'altra plausibile anch'essa, magari meno dell'altra.

In *Probabilismo* (de Finetti 1931) de Finetti sottolineava come la nozione di **previsione** consentisse di uscire dal "ferreo dilemma" ("o distruggere la Scienza o negare alla logica la pretesa di informare di sé la Scienza"): essa non comportava, infatti, di "rinunciare alla Scienza"; bensì imponeva di "assumere come strumento fondamentale del pensiero scientifico, in luogo della logica ordinaria, categorica, rigida, fredda, una logica viva, elastica, psicologica": la logica induttiva.

7. – Modelli matematici in situazioni reali di incertezza: genetica di popolazioni

L'esperimento calcistico serviva a de Finetti per introdurre anche l'idea di modello matematico della realtà, di cui si era magistralmente servito già nel suo primo lavoro (de Finetti, 1926). Là il ventenne de Finetti, ancora studente, usava un modello matematico deterministico, basato sulla previsione della media di un fenomeno aleatorio, che più tardi sarebbe stato classificato nella "genetica di popolazioni". In tale campo, per impostare le equazioni, si fa uso di valutazioni di probabilità effettuate sia con lo schema classico (casi favorevoli/casi possibili: genetica mendeliana) sia con quello frequentista (frequenza "limite": distribuzione dei geni in una popolazione numerosa).

Dato che la genetica di base è abbastanza nota a tutti, il suo primo modello può essere utilizzato per introdurre concetti matematici e probabilistici anche ai profani. Consente di introdurre due tipi di valutazione di probabilità, facendo capire quando si possono utilizzare. Soprattutto, è possibile illustrare le equazioni differenziali con importanti risultati, mostrati geometricamente come traiettorie nel triangolo di de Finetti, modernamente utilizzato anche da ricercatori in genetica a livello internazionale (Fonteneau et al. 2008). La rappresentazione tramite triangolo, appresa da de Finetti studiando la chimica, era stata da lui introdotta nel 1926 proprio in quel primo lavoro che riguardava la genetica-matematica o genetica di popolazioni. Il modello matematico si basava su un sistema di equazioni differenziali non lineari per la diffusione di caratteri ereditari, determinati da un paio di alleli autosomici in un *locus*, in una popolazione con accoppiamento mendeliano panmittico (*random mixing*, che presuppone la valutazione frequentista della probabilità di coppia e la valutazione classica per la distribuzione dei geni nei figli). Il triangolo veniva utilizzato per illustrare graficamente le principali proprietà del modello e le traiettorie, dipendenti solo dal punto iniziale, assegnato con valutazione di probabilità frequentista. Immediatamente dopo de Finetti pubblicò due altri lavori (de Finetti A 1927a, A 1927b e de Finetti A 1928) che generalizzavano il modello per situazioni non panmittiche, permettendogli alcune congetture sull'andamento asintotico del fenomeno (dimostrate in parte 50 anni dopo). Tra l'altro, il suo primo modello del 1926 dimostrava una relazione fondamentale della genetica, nota come legge di Hardy-Weinberg, che veniva ricavata negli stessi anni con modelli molto più restrittivi, per generazioni anziché nel tempo. La parabola di Hardy-Weinberg appare nel triangolo del 1926 (Figura 4) dove il punto (x,y,z) rappresenta un punto di equilibrio sulla parabola, intermedio tra p_1 e p_2, mentre la semplice media dei due punti starebbe sul segmento che li unisce. Naturalmente dal punto di vista genetico i punti, che rappresentano la composizione della popolazione, sono espressi in coordinate baricentriche con somma 1. I vertici del triangolo rappresentano le popolazioni che contengono solo uno dei tre possibili genotipi.

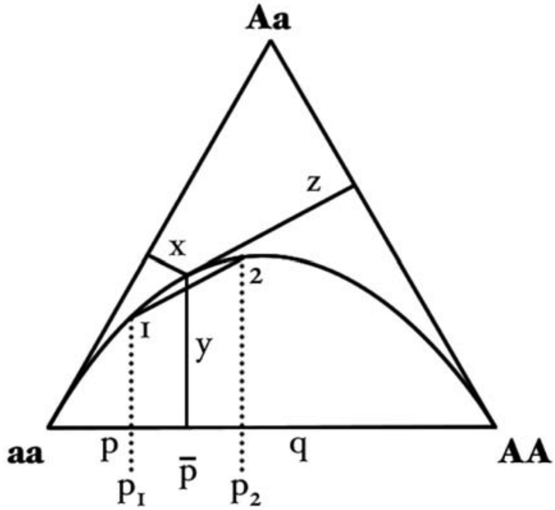


Figura 4. Triangolo di de Finetti nel lavoro de Finetti A 1926

Purtroppo questi suoi contributi alla genetica di popolazioni rimasero sconosciuti all'estero (per la lingua in cui erano scritti).

Nel 1973 de Finetti fu invitato dal suo amico genetista Giuseppe Montalenti a riprendere quei lavori e a presentarli al *Colloquio su Genetica di popolazioni* che stava organizzando. Poiché non si accontentava di presentare semplicemente i suoi vecchi lavori e risultati, mi coinvolse suggerendo alcune generalizzazioni dei modelli, che presentammo presso l'Accademia Nazionale dei Lincei (de Finetti, Rossi 1976) (4). Per illustrare risultati nuovi al pubblico, molto misto ma soprattutto di formazione genetica, all'Accademia dei Lincei de Finetti produsse per i diversi tipi di modello un grafico doppio che, ancora una volta, mette in luce il suo interesse a rendere agevole a chiunque (anche profano) la comprensione del

(4) In seguito ho continuato a lavorare su questo argomento per qualche anno e finalmente ho avuto l'opportunità di portare all'estero i suoi lavori, dimostrando che quello che si stava sviluppando in quegli anni (anni '70) nel mondo, con modelli con generazioni sovrapposte, rappresentati da equazioni differenziali, anziché da equazioni alle differenze dei modelli per generazioni, era già stato pensato e scritto in Italia da 50 anni.

Carla Rossi e Bruno de Finetti all'Accademia dei Lincei il giorno della presentazione del lavoro comune sulla genetica di popolazioni

suo pensiero mediante rappresentazioni geometriche (de Finetti, Rossi de Finetti A 1976g, p. 30 e 31).

Nella genetica di popolazioni si usano prevalentemente modelli deterministici, ma nei lavori di de Finetti emerge il loro fondamento, consistente nel considerare la media di processi aleatori in popolazioni ampie, in cui si può trascurare la semplice fluttuazione stocastica, come per esempio la cosiddetta deriva genetica, che emerse nelle osservazioni di Darwin sulle caratteristiche (successivamente attribuite a fattori genetici) osservate sulle popolazioni animali isolate in piccole isole.

8. – Modellizzazione del processo di produzione dei dati; la scambiabilità e l'inferenza

La **scambiabilità** è un altro concetto definettiano molto importante e utile per schematizzare i fenomeni. Tutti i fenomeni sono, a rigore, differenti e irriducibili gli uni agli altri ("Non ci si può bagnare due volte nello stesso fiume", Eraclito, V secolo a.C.).

La condizione di scambiabilità consiste nel considerare equivalenti e indipendenti dall'ordine le informazioni raccolte. Può essere "parziale" (es.: *trial* clinici condotti su pazienti raggruppabili in base al sesso, all'età, ecc.); in tal caso, la casistica si amplia moltissimo rispetto al caso di scambiabilità "totale"; purtroppo crescono anche enormemente le difficoltà analitiche, come de Finetti riconosceva. Tutta la sperimentazione di nuovi farmaci e nuove terapie si fonda sulla scambiabilità parziale.

Posto dunque che, per fare inferenza, ci siamo posti in un contesto di scambiabilità, si presenta ora un'altra questione: quand'è che l'accumulo di nuove conoscenze diventa "adeguato"? Intanto, va precisato, adeguato a che cosa? In generale: adeguato a una decisione, tenuto anche conto di costi e tempi dell'acquisizione di informazione.

Nel libro *Teoria delle probabilità* c'è un bellissimo passaggio, conosciuto in tutto il mondo, anche se la traduzione inglese (de Finetti L (1970) 1975) ha qualche debolezza per quanto riguarda parole originali e innovative.

Riguarda la necessità della statistica classica di basarsi su "numerose" osservazioni analoghe per poter produrre inferenze adeguate, quasi si potesse evitare di farsi influenzare da ogni singola informazione ottenuta dinamicamente:

> [...] *si tratterebbe di una proprietà legata all'esistenza di un mucchio: finché si hanno pochi oggetti essi non costituiscono un mucchio e nulla si potrebbe concludere, ma se sono molti il mucchio c'è e allora, ma soltanto allora,tutto il ragionamento fila. Se si pensa di aggiungere un oggetto per volta, nulla si potrà dire finché il numero è insufficiente per formare un mucchio, e la conclusione balzerà fuori (d'improvviso? Passando da 99 a 100? o da 999 a 1000?...!) quando finalmente il nonmucchio si trasforma in mucchio. No, si dirà; questa versione è caricaturale; non c'è un salto netto, bensì sfumato; il nonmucchio attraverserà una fase di forsechesìforsechenomucchio da piùforsechenocheforsechesìmucchio a piùforsechesìcheforsechenomucchio e solo poi diverrà gradualmente un vero mucchio. Ma ciò non toglie il difetto d'origine, cioè la distinzione,*

concettualmente posta come fondamentale, tra «effetto di massa» e «effetto dei singoli elementi»; il riconoscere che non può esistere una separazione netta, se elimina forse, apparentemente, una circostanza paradossale, non ne estirpa la radice ed anzi mette in luce la debolezza e contraddittorietà del concetto di partenza .... (de Finetti L 1970, p. 570)

Per gli studenti, la comprensione di questo discorso derivava in modo abbastanza immediato, dall'esperimento sul campionato di calcio. Come si vede dal testo, de Finetti spesso inventava termini linguistici nuovi ed efficaci per aiutare la comprensione di concetti e la memorizzazione, oltre che utili per la divulgazione, suscitando l'attenzione del pubblico. Si può pensare alle parole: *burofrenia scolastica*, *imbecillocrazia*, *trinomite* e tante altre.

Tornando all'esperimento calcistico, si può dire che è possibile utilizzarlo anche oggi; soprattutto andrebbe svolto nella scuola media, anche inferiore, e permetterebbe di introdurre la probabilità concretamente e correttamente.

L'inferenza statistica "classica" e quella definettiana (bayesiana "rigorosa") presentano importanti aspetti comuni, ma anche differenze che, soprattutto nelle situazioni di "scarse" evidenze empiriche, possono diventare rilevanti. Per esemplificarle, senza eccessiva perdita di generalità, ci si può riferire allo schema delle "prove ripetute" (misure di laboratorio, sondaggi su campioni di popolazione, estrazioni da urne, ecc.). Sono le situazioni in cui le diverse prove, prima che siano effettuate, sono fra loro equivalenti quanto a contenuto informativo e per le quali, in particolare, non conta l'ordine di acquisizione dei risultati: ogni permutazione dell'n-pla dei dati osservati è equivalente ai fini della soluzione del problema inferenziale. Sono le situazioni di "*scambiabilità*", nella terminologia di L.J. Savage, adottata da de Finetti; chiamate invece, in modo distorto e scorretto, di "*indipendenza*", nella terminologia classica.

Nel trattare questo caso, qualunque sia l'approccio inferenziale, c'è un fase iniziale (fase "diretta") di *modellizzazione del processo di produzione dei dati* (fatti osservabili). Per questa operazione non esistono regole: è sempre un'arte, un momento di creatività, corrispondente a quello della scelta degli assiomi in una teoria matematica nuova. Nella costruzione dello schema, non ci sono reali differenze fra l'approccio classico e quello bayesiano. Però c'è già una differenza concettuale nella tecnica: nell'approccio classico, sono centrali i *parametri*, cioè i coefficienti delle relazioni simboliche che costituiscono il modello; i dati osservati sono considerati *"indipendenti"* essendo i parametri considerati sconosciuti, ma non aleatori. Nell'approccio bayesiano, la centralità resta per i dati osservabili, che sono numeri *aleatori*, prima di essere osservati, e sono detti *scambiabili* proprio a significare che *non sono indipendenti* poiché, man mano che alcuni di essi vengono osservati, la distribuzione degli altri varia.

La fase successiva dell'inferenza (fase "inversa"), nell'impostazione classica procede con la *"'identificazione" del modello*, attraverso la *stima* dei parametri. La si svolge mediante l'*ottimizzazione di opportuni indicatori*, che misurano l'adeguatezza del modello a rappresentare i dati effettivamente osservati. Nell'impostazione classica i parametri sono quantità in qualche modo "oggettive", anche se non osservabili. Nell'impostazione di de Finetti, al contrario, l'attenzione resta centrata sui dati già osservati e su quelli futuri, osservabili. I parametri, ammesso che vengano introdotti, sono anch'essi numeri *aleatori* (essendo sconosciuti), che tali sempre resteranno, strumentali, e come tali vengono trattati.

Il fondamentale "teorema di rappresentazione di de Finetti", dimostrato per la prima volta nel 1928, chiarisce peraltro che, sotto ipotesi abbastanza generali, la condizione di scambiabilità è rappresentabile attraverso una cosiddetta "mistura" (combinazione lineare probabilistica) di situazioni di "indipendenza subordinata alla conoscenza dei parametri" di tipo classico. Lo schema della scambiabilità attraverso misture è enormemente più generale e flessibile di quello classico, senza precludere la possibilità di ricondursi ad esso attraverso l'adozione di opportune assunzioni restrittive (anche molto restrittive) sulla composizione della mistura.

Teorema di de Finetti (come esteso da Hewitt e Savage):

(Nota: nella versione originale di de Finetti, il teorema è riferito al caso di numeri aleatori a esito 0-1, cioè a "eventi".)

Se $X_1, X_2, ... X_k$ ... formano una successione di infiniti numeri aleatori scambiabili, la distribuzione congiunta di n fra essi può essere rappresentata come combinazione lineare convessa (detta "mistura") delle distribuzioni di n numeri aleatori "condizionatamente indipendenti" alla conoscenza di un "parametro"; il parametro è da intendersi come quantità aleatoria θ (scalare in R^1 o vettoriale in R^n), la cui distribuzione fornisce i pesi nella mistura. In particolare, nel caso in cui la distribuzione degli n numeri aleatori sia dotata di densità si ha

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(x, |\theta) p(\theta) d\theta$$

e conseguenza statistica fondamentale:

dopo aver osservato i dati del campione, la distribuzione a posteriori è:

$$g(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) p(\theta)$$

e la densità predittiva per una nuova osservazione Y della stessa natura delle X è:

$$h(y | x_1, x_2, ..., x_n) \propto \int_{\Theta} f(y|\theta) g(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) d\theta$$

De Finetti trattava le misture nel suo corso, e io ho avuto modo di apprezzarne la potenza in varie situazioni di ricerca. È quindi molto importante trattarle nell'insegnamento della probabilità, almeno a livello universitario. È anche utilissimo per la teoria delle decisioni, anch'essa accennata nel suo corso.

Pertanto, anche se i parametri, come le ipotesi, sono enti non osservabili, ci si può riferire ad essi per ottenere una rappresentazione valida che esprime la probabilità dei futuri eventi o dati futuri osservabili.

Questo contesto predittivo definettiano è la base dello sviluppo del "prequential probability approach", che si basa sull'idea che "we can judge the quality of an inference method by converting it into a forecasting system and assessing the empirical success of the sequence of one-step-ahead forecasts that it implies" (Dawid, Vovk 1999, p. 126); come si vede, si parla di previsione nello stile di de Finetti.

Se i parametri sono letti come numeri aleatori, la loro "stima" è rimpiazzata dalla valutazione della distribuzione, o di qualche suo indice sintetico. Valutazione che avviene applicando il teorema di Bayes, cioè partendo da una distribuzione iniziale che si modifica proporzionalmente alla verosimiglianza dei dati via via osservati. Questo approccio è stato sviluppato inizialmente da Dennis Victor Lindley ed è ormai abbastanza diffuso, in varie forme talvolta discutibili; si avvia a diventare quello prevalente. Pur apprezzando gli sforzi in tal senso, de Finetti non si stancò mai di ricordare l'elemento di artificio che vi è contenuto e soprattutto mise sempre in guardia dal conferire eccessivo valore alle valutazioni dei parametri, rammentando che gli elementi osservabili, i dati, devono sempre restare al centro di ogni analisi. A essere davvero rigorosi, non ha senso valutare la probabilità di un parametro non osservabile direttamente, ma la probabilità va attribuita ad un evento futuro sulla base degli eventi osservati. Niente di nuovo rispetto a quello che de Finetti insegnava con l'esperimento sul campionato di calcio: quello che davvero serve valutare non è il "valore di una squadra" (il parametro), ma le probabilità dei risultati di una specifica partita!

È molto istruttivo rileggere *La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni!* (de Finetti A 1976f; si veda l'Appendice 1.7 nel presente volume), il testo della "ultima lezione" tenuta da de Finetti, in occasione del collocamento fuori ruolo, all'Istituto Matematico Guido Castelnuovo in Roma il 29 novembre 1976.

9. – De Finetti e il relativismo di Pirandello; coerenza interna e assiomatica matematica

Il fusionismo culturale di de Finetti emerge anche considerando la sua originale visione dell'opera di Pirandello, che lui amava molto e con cui aveva sorprendenti affinità culturali, come dimostra il primo degli "Incontri tra Arte e Scienza: dalla logica pirandelliana al relativismo di de Finetti", tenutosi a Monte Compatri il 15 dicembre 2007 (5).

A un anno dalla morte di Pirandello de Finetti scriveva in un articolo del 5 dicembre 1937, sulla rivista *Quadrivio*:

> *Considero Pirandello come uno dei più grandi spiriti matematici; così dicevo a un collega nel giorno della sua morte, e tale affermazione mi parve accolta con meraviglia. Ed essa non può infatti non sembrare paradossale se, cullandosi nelle inveterate illusioni razionalistiche, si considera la matematica come un complesso di verità assolute che col relativismo pirandelliano sarebbe addirittura agli antipodi.* (de Finetti, 1937, http://digitale.bnc.roma.sbn.it/tecadigitale/rivista/RML0034377/1937/Dicembre%20n.%206/7

Le "inveterate illusioni razionalistiche" a cui accenna de Finetti sono le concezioni della matematica di derivazione platonica e kantiana, dove, per esempio, la geometria euclidea è l'unica possibile; de Finetti attribuisce a Pirandello uno 'spirito matematico' perché nessuno prima di lui aveva voluto "dare una rappresentazione drammatica più perfettamente aderente al pensiero del matematico" attraverso i suoi "lavori [...] in cui ogni personaggio procede sino in fondo colla sua logica, magari allucinante, ma tuttavia strumento tagliente e perfetto che nulla può sulla logica altrui se è diversamente impostata" (de Finetti A 1937b).

Il parallelismo con l'assiomatismo matematico è molto evidente: ogni personaggio pirandelliano ha la sua verità. I personaggi pirandelliani sono, dunque, la trasposizione sulle scene teatrali di altrettanti e diversi 'sistemi assiomatici', ciascuno fondato su premesse differenti e sviluppato deduttivamente. La verità di ogni personaggio va valutata

(5) Cfr. http://terzadecade.it/download/probabilmente_de_finetti/20%20-%20Pirandello%20e%20de%20Finetti%20-%20Atti%20del%20Convegno%20di%20Monte%20Compatri%202007.pdf.

al pari della verità in un sistema ipotetico-deduttivo, e Pirandello sostituisce alla verità unica ed eterna la pluralità mutevole delle verità soggettive degli uomini.

L'influsso di Pirandello si ritrova anche meglio in un articolo di de Finetti che nel titolo richiama i *Sei personaggi in cerca d'autore.* Si tratta di *Tre personaggi della Matematica* apparso su *Le Scienze* (de Finetti A 1971b) con sottotitolo: *Perché i numeri e, i, π s'incontrano in matematica strettamente uniti?* La risposta che diede a chi gli chiedeva conferma di tali origini del titolo del suo articolo rivela, in maniera molto elegante e sottilmente polemica, la critica ch'egli oppose durante tutta la vita, con irriducibile passione, alla "contraffazione involontariamente umoristica, scostante, repellente" della matematica negli ambienti scolastici e nella società:

> *E certamente – ammisi – c'è una reminiscenza della magia pirandelliana di evocare i suoi personaggi, essenziali, veri, reali, ma troppo veri per non essere considerati da spettatori grossolani come fantocci, simboli, fantasmi. Ed è forse per lo stesso motivo che molti non comprendono e non apprezzano la matematica, e che molti non riescono a farla comprendere e farla apprezzare. Forse non per inettitudine o cattiva volontà, ma per la preoccupazione di farla apparire come una cosa più che seria: seriosa, arcigna, superba (il che non è un gradino più alto della serietà, ma la sua contraffazione involontariamente umoristica, scostante, repellente).*

10. – Criteri economici: coerenza e massimizzazione dell'utilità sperata; problema del giornalaio per insegnare bene la probabilità con la teoria delle decisioni

Le decisioni, questione centrale in ogni aspetto del vivere, trovano il loro più facile ambito di discussione trattando di economia, intesa come calcolo dei "costi" e "benefici" (incerti!) di un'azione. Certo, soprattutto quando i valori in questione non sono monetari, le cose non sono scontate. Però, è indiscutibile, qualunque soggetto (persona, corpo collettivo, animale) in qualche modo decide; dunque, possiamo ritenere che si faccia un calcolo, magari molto implicito, dei valori dei diversi esiti possibili e della loro probabilità. Se il pregio fondamentale della scienza, come sembra ormai riconosciuto, è la sua trasparenza operativa, ne consegue che l'esplicitazione e la ponderazione dei valori in gioco è comunque esercizio utile, soprattutto in un contesto collettivo. Le decisioni in ambito economico-finanziario sono comunque le più agevoli da tradurre in linguaggio matematico, dunque è utile partire da esse per esemplificare l'intera vastissima problematica.

Appassionato e influenzato dall'economia fin da giovanissimo e lungamente impegnato professionalmente in campo assicurativo, de Finetti riteneva essenziale che tali concetti fossero familiari a tutti. Come logica conseguenza, i suoi corsi di calcolo delle probabilità comprendevano anche elementi ed esempi di teoria delle decisioni, importanti anche solo per ben comprendere la probabilità. Così spiegava nel libro *Il "saper vedere" in Matematica*:

> *Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male.*
>
> *In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare (come ha notato acutamente uno psicologo, John Cohen) un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza (probabilità, statistica), oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.* (de Finetti L 1967, p. 52; si veda l'Appendice 1.4 nel presente volume)

Prosegue facendo un esempio concreto di tipo matematico per spiegare il concetto di guadagno sperato: "nella preferenza fra decisioni economiche alternative, le cui conseguenze sono incerte, il criterio logicamente **coerente** (per chi si prefigge il guadagno; eventuali altri scopi andrebbero se del caso valutati come equivalenti, per l'interessato, a un certo guadagno) sta nella scelta fatta in modo da avere il massimo **guadagno sperato**; criterio che va corretto (se gli importi in gioco sono rilevanti) in quello di render massima l'**utilità sperata** (ove l'utilità di un guadagno grande si valuti meno che proporzionalmente accresciuta per tener conto dell'avversione al rischio)" (p. 53).

Trascurando la questione dell'utilità, possiamo esprimere il "guadagno sperato" di una scelta a esito aleatorio con la formula:

Guadagno sperato = (Probabilità di avere un Guadagno) × (Valore medio dell'eventuale Guadagno) – (Probabilità di avere un Costo) × (Valore medio dell'eventuale Costo).

Questa formula consente già alcune considerazioni operative, semplici ma non banali, che de Finetti riprendeva spesso nei suoi corsi.

Se due azioni hanno guadagni simili, conta la loro probabilità (*idem* scambiando i due termini); quindi, sono inutili approfondimenti minuziosi (e magari costosi) della grandezza meno influente e sono invece necessari quelli dell'altra! (Una considerazione quasi ovvia per chi ha un minimo di basi matematiche; ma che pare non esserlo affatto, talvolta, per le burocrazie e le autorità politiche).

Poi, in molti casi applicativi, guadagno totale e costo totale derivano da una serie di componenti abbinate. In tal caso la soluzione può semplificarsi e chiarirsi molto confrontando tali coppie di componenti; de Finetti fa un esempio concreto e facile in una sua lezione di "teoria delle decisioni per giovani ricercatori" (1964): il "problema del giornalaio". Questi deve decidere quante copie (X) acquistare, a un prezzo dato C, per rivenderne un certo numero (aleatorio) N, a prezzo G (maggiore di C). Si può esplicitare l'intera distribuzione di N e eseguire calcoli potenzialmente lunghi. Ma è molto più semplice, e perfettamente corretto, ragionare in termini "marginali": detta p_X la probabilità di vendere almeno X copie, converrà acquistare la X-esima copia se e solo se $p_X \times G > C$. Qui de Finetti innesta un'altra considerazione a proposito della valutazione (soggettiva!) delle probabilità:

> *Il giornalaio avrà un'esperienza, ma potrà ad es. ritenere o no significativa la manifestazione di una tendenza recente all'aumento, o avrà motivi particolari per attendere minori o maggiori richieste nel caso particolare di "domani", e via dicendo: Imparare praticamente, esercitandosi, a saper apprezzare i gradi di probabilità ed esprimere meditatamente le proprie valutazioni in fatto di probabilità, sarebbe una delle più preziose conquiste di un progresso nell'educazione: il senso del ragionamento probabilistico è infatti, come detto, deplorevolmente manchevole e distorto se non si ha cura di coltivarlo e affinarlo.* (de Finetti L 1967, p. 54; si veda l'Appendice 1.4 nel presente volume)

Con questo esempio semplice ma concreto e efficace, nel suo stile, concludo questo ricordo del mio Maestro. E ribadisco qual è stato, per me, il cuore del suo insegnamento matematico, formale e informale: immaginare traduzioni di questioni pratiche in schemi di analisi, conferendo dunque un primato all'intuizione e alla comprensione dei meccanismi essenziali dei fenomeni; è la creatività, caratteristica umana per eccellenza, in matematica e in qualsiasi altro campo.

Ringraziamenti. – Ringrazio tutti gli allievi di de Finetti con cui ho avuto occasione di parlare spesso in tutti questi anni e, in particolare, Fabrizio Fabi per i suoi contributi a questo lavoro e la revisione del testo. Un ringraziamento particolare a Fulvia de Finetti, che mi ha fornito molte informazioni importanti.

BIBLIOGRAFIA

DE FINETTI, F. (2000), Alcune lettere giovanili di B. de Finetti alla madre, *Nuncius*, XV, 2, 721-740.

BISCHI, G.I. (2011), *A tutto tondo. Un ritratto di Bruno de Finetti (attraverso interviste e testimonianze*, http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/urbino2011/Bischi_de_Finetti_Pristem_Aprile2011.pdf.

COUSIN, A., DI BERNARDINO, E. (2013), On multivariate extensions of Value-at-Risk, *Journal of Multivariate Analysis,* http://arxiv.org/abs/1111.1349.

DAWID, A.P., VOVK, V.G. (1999), Prequential probability: principles and properties, *Bernoulli*, 5.1 125-162.

FONTENEAU, A., CHASSOT, E., ORTEGA-GARCIA, S., DELGADO DE MOLINA, A., BEZ, N. (2008), On the use of de Finetti ternary diagrams to show the species composition of fee and FAD-associated tuna schools in the Atlantic and Indian oceans, *IOTC-2009-WPTT*-2008, http://www.brunodefinetti.it/Bibliografia/IOTC2009.pdf.

HEWITT, E., SAVAGE, L.J. (1955), Symmetric measures on Cartesian Products, *Transaction of the American mathematical Society*, 80, 470-501.

QUÉTELET, L.A.J. (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, Bruxelles: M. Hayez.

ROSSI, C. (1973), Sulle curve di livello di una superficie di probabilità in due variabili, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 87-108.

ROSSI, C. (1999), *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica*. Bologna: Zanichelli.

ROSSI, C. (2001), Bruno de Finetti: the mathematician, the statistician, the economist, the forerunner, *Statistics in Medicine*, 20.24, 3651-3666.

Carla Rossi
Consiglio Italiano per le Scienze Sociali (CSS)
e-mail: prof.carla.rossi@gmail.com

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 109-142

Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica Visualizzare in geometria come problema didattico

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI

Ho bisogno di un'immagine al fine di avere una visione simultanea di tutti gli elementi ... tenerli insieme, farne un tutto, raggiungere la sintesi ... e dare al concetto la sua fisionomia.

Hadamard 1949, p. 77

La geometria che qui si studia non è tanto la geometria propriamente detta, la geometria dello spazio fisico [...]; *la nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dare corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi* [...].

de Finetti L (1944) 1959, p. 258

1. – Introduzione

Leggere, o magari rileggere il libro *Il "saper vedere" in Matematica* che Bruno de Finetti scriveva nel 1967, suscita sempre grande piacere, anche perché ci riporta ad un momento molto vivace del dibattito sul tema del curriculum, ed in particolare sui contenuti e le metodologie dell'insegnamento della matematica. L'autore parte dalla discussione di problemi matematici decisamente non comuni per l'esperienza scolastica di allora, e certamente ancora attuali, e propone alcune riflessioni generali sul pensiero matematico, accompagnate da suggerimenti didattici.

La metafora del vedere, che appare nel titolo e corre lungo tutto il libro, è assai comune, soprattutto quando si vuol richiamare il ruolo dell'intuizione, ed in particolare il processo euristico che accompagna la soluzione di un problema. Per dirla con le parole di de Finetti:

> *È la tendenza* [euristica] *che intende rendere* viva *la matematica e il modo di insegnarla e di apprenderla: di* vederla *e farla* vedere *con l'intuizione e con riferimento a svariate e interessanti applicazioni pratiche; di cogliere i fatti essenziali e le relazioni tra essi quali servono per dominare l'insieme di questioni che ci si presentano.* (de Finetti A 1979a, p. 3, la sottolineatura è nel testo)

L'interesse per un approccio euristico è forse uno dei tratti caratteristici dell'impostazione didattica suggerita da de Finetti, sulla scia di autori assai noti al tempo come George Pólya, e forse un po' meno noti allora, ma molto noti adesso, come Alan H. Schoenfeld. Al momento in cui de Finetti scriveva, questa impostazione metodologica, che vede come elemento chiave dell'apprendimento e insegnamento della matematica il risolvere problemi (*problem solving*), trovava molti sostenitori, sia a livello internazionale che a livello nazionale. Ricordiamo ([1]) la strada indicata da Emma Castelnuovo, il cui libro *Didattica della Matematica* esce lo stesso anno di *Il 'saper vedere' in Matematica*. Ed è proprio alla Castelnuovo e al suo metodo che de Finetti dedica uno dei suoi esempi introduttivi, riportando la soluzione proposta da uno dei suoi allievi (de Finetti L 1967, p. 2) al problema di ricavare l'espressione del volume dell'ottaedro: la soluzione è ottenuta attraverso il completamento dell'ottaedro mediante quattro tetraedri regolari giustapposti all'ottaedro per ottenere un tetraedro di lato doppio. L'interesse didattico, come osserva de Finetti, sta nel fatto che la produzione di tale soluzione possa essere considerata il frutto di un metodo di insegnamento che "tende a stimolare l'intelligenza, anziché soffocarla [...]" (*Ibidem*, p. 3). Un metodo che porti a "vedere" la matematica.

È innegabile che le immagini, in varia forma e natura, abbiano un ruolo fondamentale per il pensiero ed in generale per le attività intellettuali dell'uomo. Molti sono i racconti di celebri 'scoperte' che

([1]) Un approccio euristico sarà comune anche ai vari progetti per la scuola secondaria superiore che vedranno la luce proprio in quegli anni, come ad esempio il progetto "Matematica come scoperta" (G. Prodi, *Matematica come scoperta*, 3 voll., Messina-Firenze: Casa Editrice D'Anna, 1981) che poneva la soluzione dei problemi al centro della propria metodologia didattica.

hanno avuto origine nella contemplazione di un'immagine interiore o nel rapido apparire di essa. Ma forse più familiare ancora è l'esperienza personale di immagini che accompagnano i nostri pensieri, siano essi un tranquillo fantasticare senza scopo, o la ricerca insistente e intrigante della soluzione di un problema di matematica. È proprio nella ricerca della soluzione di un problema che spesso si ricorre alle immagini, ad esempio disegni prodotti su un foglio di carta. Così ad esempio interviene Polya all'inizio di un paragrafo dedicato alle figure in geometria, nel suo libro *Come risolvere i problemi di Matematica*:

> *Le figure costituiscono non solo il fondamento dei problemi di geometria sintetica, ma anche un elemento ausiliario fondamentale in ogni problema, non necessariamente geometrico. Quindi ci sono due validissimi motivi per apprezzare il ruolo delle figure nella risoluzione dei problemi.* (Polya 1967, p. 111)

In modo del tutto coerente con quanto affermato da Polya, il ruolo particolare assegnato alla geometria è chiarito in modo efficace proprio nelle prime pagine de *Il "saper vedere"*; scrive de Finetti:

> *Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo* ***geometricamente*** *in modo* ***opportuno****.* (de Finetti L 1967, p. 4; il grassetto è nel testo)

Il registro assertivo di questa affermazione ben testimonia quanto per de Finetti fosse evidente la sua verità. In effetti la frase può suonare semplice e del tutto evidente all'orecchio di un matematico, ma non appena ci si pone il problema di chiarire che cosa significa rappresentare geometricamente, e in che cosa consiste produrre tale rappresentazione ci rendiamo conto che il compito si fa complesso. Il processo di *rappresentazione, geometrica,* come lo intende e lo sollecita a buona ragione de Finetti, richiede conoscenze matematiche e competenze specifiche che variano molto da problema a problema, che sono difficilmente descrivibili, e che per questo possono risultare ancor più difficili da raggiungere come obiettivi di insegnamento e apprendimento. In altri termini, affermare la necessità e l'efficacia di rappresentare geometricamente un problema, pone immediatamente un problema didattico: rappresentare geometricamente un problema è un processo spontaneo? E se non lo è, è possibile sviluppare tale capacità? E come è possibile farlo?

Consideriamo, ad esempio, la soluzione proposta da de Finetti al problema di trovare la somma dei primi 100 numeri naturali (ibidemibidem, p. 2); tale soluzione richiede di rappresentare un numero come un rettangolino di base 1 e altezza che ne esprime il valore, e la somma di più numeri come la figura ottenuta dalla giustapposizione dei rettangolini corrispondenti. La rappresentazione di un numero come un rettangolo non è comune, come lo è invece quella tramite un segmento. È ragionevole domandarsi come può venire in mente di utilizzarla. È sufficiente conoscere i rettangoli e le loro proprietà geometriche, e conoscere i numeri e saperli sommare, per avere l'idea di una rappresentazione come quella proposta? Inoltre, basta disporre di immagini perché queste si traducano in rappresentazioni *geometriche opportune* e perché diventino strumenti euristici, ossia rendano un risultato *chiaro* ed *intuitivo*?

La complessità del problema sollevato dall'affermazione di de Finetti, citata sopra, si presenta da tempo come una sfida nel campo della didattica della matematica. Proprio perché il principio affermato risulta condiviso, assumono particolare interesse gli studi che negli anni hanno cercato di chiarire come il pensiero utilizzi le immagini, ed in particolare come nel caso del pensare in matematica sia la geometria di tali immagini a rendere il loro contributo efficace. Questo porta a riconoscere un ruolo molto importante all'educazione geometrica e alla necessità di contrastare una pericolosa tendenza ad abbandonare lo studio della geometria nella scuola pre-universitaria. Vorrei ricordare, accanto alle parole di de Finetti, le parole di un altro matematico:

> *La geometria (la geometria Euclidea elementare) occupa una posizione specifica tra le altre branche della matematica e tra tutte le altre discipline per il suo carattere unico che consiste nella unione di logica immaginazione e pratica.* [...]. *In tutto questo sta l'importanza di insegnare un corso di geometria in tutte le scuole* [...]. (Alexandrov 1992, p. 365)

2. – Visualizzazione

L'uso di immagini, intendendo prevalentemente immagini interne, ma non solo, viene di solito detto visualizzazione, e su tale tema si discute da tempo nell'ambito dell'educazione matematica.

I primi studi sistematici sul tema della visualizzazione appaiono quando Alan Bishop pubblica alcuni lavori (Bishop 1979, 1983) originati da interessanti confronti tra modi di rappresentare diversi in culture diverse. Tali ricerche aprirono una pista che è rimasta a lungo non molto praticata, come ricorda Norma Presmeg (2006), ma che conta comunque contributi importanti. Negli ultimi tempi gli studi sulla visualizzazione sembrano essersi concentrati su aspetti specifici del funzionamento delle immagini in ambiti particolari del pensiero matematico. In particolare gli studi legati alle nuove tecnologie hanno aperto un filone di ricerche molto promettente su come l'uso di particolari ambienti tecnologici possa influenzare i processi di concettualizzazione matematica e sulla soluzione di problemi matematici (Arcavi, Hadas 2000).

La riflessione generale sul tema della visualizzazione ha avuto come primo risultato quello di chiarire e condividere il senso di termini complessi come visualizzazione, visualizzatore o immagine, che nel linguaggio corrente hanno un uso assai vario e vago, in una continua oscillazione tra contesto interno (immagini mentali, pensiero, concettualizzazione ...) ed esterno (diagrammi, schemi, disegni, immagini sullo schermo, ...).

Seguendo Presmeg possiamo accettare la seguente caratterizzazione:

> [...] *visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics (Presmeg, 1997a). This characterization is broad enough to include two aspects of spatial thinking elaborated by Bishop (1983), namely, interpreting figural information (IFI) and visual processing (VP).* (Presmeg 2006, p. 206)

Come chiarito da Bishop (1989) sembra esserci fin dall'inizio un'opposizione tra gli aspetti positivi e le criticità legate al fenomeno della visualizzazione. Da un lato, soprattutto basandosi sull'esperienza acquisita, si sottolinea il valore e il potere dei processi di visualizzazione (Krutetskii 1976), dall'altro, sin dai primi lavori riguardanti il comportamento degli allievi, si mettono in luce le difficoltà. A questo proposito, Presmeg in un lavoro del 1986 ne elencava alcune e tra le altre citava la seguente:

> *Especially if it is vague, imagery which is not coupled with rigorous analytical thought processes may be unhelpful.* (Presmeg 1986, p. 45)

Nel seguito, prendendo spunto dal testo di de Finetti *Il "saper vedere" in Matematica*, intendo proporre qualche riflessione sul tema della visualizzazione e, restringendomi all'ambito specifico della geometria, focalizzare alcuni aspetti che riteniamo fondamentali per comprendere un problema complesso e intravedere qualche possibile risposta alle molte domande che emergono.

3. – Visualizzazione e pensiero spaziale

Dal punto di vista dell'educazione matematica è possibile trovare molti riferimenti al ruolo chiave della 'visualizzazione' nell'attività del matematico, ma anche molti riferimenti alle difficoltà e addirittura alla riluttanza (Eisemberg, Dreyfus 1991) che è possibile osservare da parte degli allievi in classe. Alcuni ricercatori (Presmeg 2006) mettono in evidenza il fatto che, a differenza di quanto sembra accadere per i matematici, gli allievi solo raramente ricorrono a supporti visivi e sfruttano le grandi potenzialità che tali supporti possono offrire per svolgere un ragionamento, per risolvere un problema. La differenza tra il comportamento degli allievi e quello dei matematici non è difficile da comprendere e, come sottolineato da Healy a Hoyles (1996) e con loro da altri, ad esempio Presmeg (1997b), è riconducibile al processo interpretativo della sensazione visiva, processo nel quale consiste la visione, ovvero la *percezione* di una immagine. Ogni matematico sa cosa *vedere*, ossia come interpretare un diagramma; in particolare, in geometria l'esperto ha familiarità con il processo di generalizzazione che rende l'immagine che osserva una rappresentazione del concetto generale che sta trattando. Inoltre, a partire da un dato problema, l'esperto cercherà di orientare il processo percettivo in modo che sia utile alla soluzione, in altre parole cercherà di avvalersi dell'immagine in modo euristico.

In questo senso le difficoltà rilevate negli studi svolti con gli allievi non risultano sorprendenti, ma proprio perché la realtà dell'esperto ci parla di comportamenti tanto semplici e naturali, quanto efficaci, è ragionevole domandarsi se sia possibile educare gli allievi nel campo della visualizzazione, aiutandoli a superare i possibili ostacoli osservati e sviluppando modi di pensare che ricorrono a rappresentazioni geometriche opportune, e in generale matematicamente efficaci. Per rispondere a questa domanda dobbiamo in primo luogo cercare di capire meglio come funziona la visualizzazione.

3.1 – *Due esempi*

Iniziamo la nostra riflessione da un esempio proposto da de Finetti e da lui discusso. L'autore riporta con stupore come un certo problema non abbia trovato solutori su circa 250 studenti che partecipavano ad una gara di matematica. Il problema "richiedeva, sostanzialmente che si avesse un'idea di come si sarebbe disposto un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso basso (ad es. mediante un peso), come indicato nella fig. 18 [si veda la Figura 1]. Nessuno vi riuscì [...]." (de Finetti L 1967, p. 12).

Secondo quanto riportato, immaginare la disposizione del filo determinando la forma esatta del cappio, sembra andare al di là delle possibilità di visualizzazione degli allievi: anche se non sembrano esserci difficoltà ad evocare l'immagine di un cono e di un filo disposto a cappio intorno ad esso, quando si richiede un maggior dettaglio dell'immagine che permetta di determinare le caratteristiche geometriche della curva che modellizza il filo, il pensiero si blocca e l'allievo non risponde.

Un caso molto simile di blocco nell'elaborazione efficace di un'immagine si ritrova nell'affrontare il problema seguente: determinare se le diagonali di un cubo si incontrano e se si incontrano perpendicolarmente.

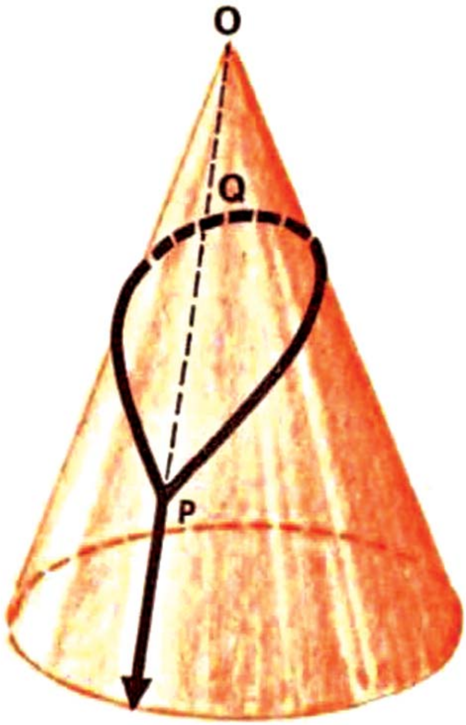


Figura 1. L’immagine del cono utilizzata da de Finetti

Anche in questo caso, i soggetti intervistati mostrano grandi difficoltà nell’elaborazione di un’immagine che superi la rappresentazione generica di un cubo e riesca a determinare se l’angolo tra due diagonali è o meno retto. In effetti, si ottiene un gran numero di risposte positive, oppure uno sconsolato “non saprei ...” .

In entrambi i casi stupisce e lascia perplessi, il contrasto tra la sensazione di familiarità che suscita il riferimento ad oggetti come un cono e un cappio, o un cubo e le sue diagonali, e la difficoltà a dare la risposta al quesito; da un lato la sensazione precisa di ‘vedere’ gli oggetti di cui si parla, dall’altro la sensazione di non riuscire a mettere a fuoco l’immagine in modo soddisfacente per rispondere alla domanda. Nel caso del cubo i soggetti che partecipavano ad un’intervista riportavano proprio l’esperienza del tentativo di centrare l’immagine sul dettaglio del punto di incontro delle diagonali e di fallire nel riprodurlo

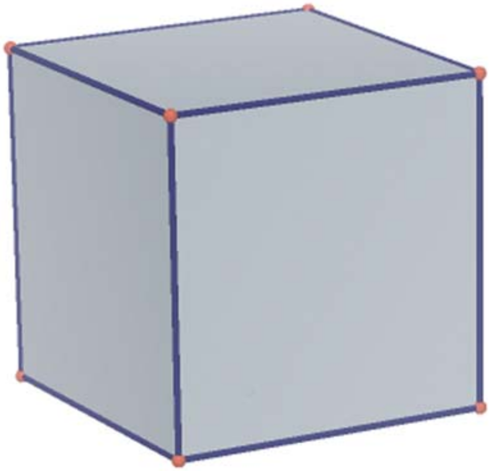


Figura 2. Immagine di un cubo del quale considerare le diagonali

mentalmente con sufficiente dettaglio per poter stabilire se le diagonali fossero o meno perpendicolari (Mariotti 2005).

Vediamo di chiarire meglio qualche aspetto riguardante la percezione e le immagini mentali per introdurre il problema specifico del rapporto tra immagini e concetti in geometria attraverso la nozione di *Concetti Figurali* che ci aiuterà a descrivere il ragionamento in geometria e a spiegare possibili blocchi o errori come quelli che abbiamo descritto nei due esempi precedenti.

4. – Immagini mentali e percezione

Nell'ambito della psicologia il termine immagine mentale è usato per particolari "prodotti dell'attività della mente" quando questi riguardino principalmente "la rievocazione e la riproduzione di fatti e oggetti che per molteplici aspetti sono simili alla percezione di quei medesimi fatti e oggetti ...". (Marucci 1995, p. 18)

La nozione di immagine mentale è molto antica, possiamo trovare un primo cenno sistematico di tale idea in Aristotele (Denis 1991) che parla delle immagini mentali come raffigurazioni interne, figurali e non simboliche, della realtà esterna. Questa posizione ha influenzato molte delle interpretazioni successive e può essere ricondotta a quella che oggi si chiamerebbe una interpretazione "analogica". In effetti, pur con molte differenze, è possibile tracciare una linea comune tra le concezioni filosofiche che dagli empiristi arrivano fino ad oggi: le immagini mentali sono rappresentazioni figurali interne che possiedono caratteristiche simili a quelle delle rappresentazioni interne generate durante il complesso processo cognitivo comunemente detto percezione.

Il problema della relazione tra le immagini e gli oggetti rimanda al problema generale di come un'informazione viene elaborata per essere percepita e immagazzinata dall'organismo, ovvero al rapporto tra sensazione, percezione e memoria, e di come tutto ciò si riconduca al fenomeno delle immagini mentali. Per quanto riguarda la percezione sembra essere condivisa la caratterizzazione seguente:

> [...] *è il processo che determina il significato degli stimoli che ci colpiscono.* [...] *nella percezione è in gioco più della semplice determinazione del fatto che qualcosa esiste nell'ambiente, il che chiameremo rilevazione.* (Moates, Schumacher 1983, pp. 20-21)

Possiamo distinguere due tipi di processi a seconda che dai dati sensoriali si vada verso la categorizzazione (= costruzione di schemi categoriali) o viceversa, dagli schemi categoriali si vada verso i dati sensoriali (tali processi sono di solito detti, rispettivamente, processi *bottom-up* e processi *top-down*). Per quanto riguarda la percezione sembra esserci una costante interazione tra i due tipi di processi e una descrizione del processo percettivo in questi termini è fornita ad esempio da Neisser in questo modo:

> *le strutture cognitive cruciali per l'attività visiva sono gli schemi anticipatori che preparano il percettore ad accettare determinati tipi di informazioni piuttosto che altri* [...]. *Dal momento che possiamo vedere ciò che sappiamo come cercare, sono questi schemi (insieme con l'informazione effettivamente disponibile) che determinano ciò che verrà percepito.* (Neisser 1981, p. 44)

Di conseguenza, per quanto riguarda le immagini mentali, sembra esserci consenso sul considerarle come frutto di un processo di elaborazione che parte dai prodotti della percezione organizzati in modo sistematico rispetto alle conoscenze disponibili. Con le parole di Neisser, le immagini mentali sono

> *le immagini come le risposte interpretate dei processi percettivi, le quali sono poi ulteriormente prese in esame dalle strutture concettuali di ordine superiore, prese in carico dai sistemi di conoscenza organizzati in memoria semantica e confrontate con le informazioni possedute stabilmente dal soggetto nella memoria a lungo termine.* (*Ibidem*, p. 30)

Possiamo sintetizzare quanto detto finora con la definizione operativa di immagine mentale data da Finke:

> [*l'*]*invenzione o la ricostruzione mentale di un'esperienza che, almeno per alcuni aspetti assomiglia all'esperienza di un oggetto o di un evento che si sta realmente percependo, sia congiuntamente che in assenza di stimolazioni dirette.* (Finke 1989, cit. da Massironi 1995 p. 47)

Questa definizione esprime il legame stretto tra immagini mentali e percezione; per analizzare meglio questo legame, consideriamo la distinzione tra l'oggetto fisico e l'oggetto fenomenico, così come viene introdotta da Massironi (1995, p. 49 segg.).

Il primo, l'oggetto fisico, è l'oggetto in sé e, come tale, origine di dati sensoriali (informazioni visive, uditive, ecc.) indipendentemente dal soggetto che lo percepisce. Il secondo, oggetto fenomenico, è da intendersi come il risultato delle operazioni di organizzazione, ristrutturazione, aggregazione, ecc. Operazioni che costituiscono il processo percettivo compiuto dal soggetto sui dati sensoriali e che danno luogo all'oggetto come lo vediamo, ossia al rendimento percettivo, come dicono gli esperti. Ed è tale oggetto fenomenico che è all'origine della concettualizzazione dello spazio.

Esperimenti classici mostrano l'importanza di questa distinzione; ad esempio il caso delle illusioni ottiche, ma anche le differenze riscontrate nel caso di esperienze riguardanti la ricostruzione mentale di configurazioni. In particolare il caso delle forme 'ben organizzate' che richiedono lo stesso tempo di trattamento anche al crescere degli elementi. Le immagini mentali, in quanto prodotto dell'elaborazione di percezioni, sembrano dunque essere legate agli ‘oggetti fenomenici’ piuttosto che all’oggetto fisico. Ovvero le immagini mentali in un processo circolare e continuo (a spirale) trattano materiale già elaborato dal sistema percettivo e poi modificato dal trattamento e immagazzinamento mnestico (*Ibidem*, p. 56).

5. – Realtà e Geometria

Dopo la breve divagazione su percezione ed immagini mentali, torniamo ai nostri esempi e alle difficoltà che si possono incontrare nel risolvere problemi come quelli proposti, che solo apparentemente possono considerarsi semplici. In entrambi i casi, per molti dei soggetti coinvolti – studenti che partecipavano alla gara matematica, o studenti che rispondevano al test o all’intervista – le capacità di visualizzazione non erano sufficienti a risolvere i problemi posti. Potremmo dire che l’immagine mentale evocata dal problema non sembrava essere adeguata per permettere una risposta, in altre parole possiamo dire che per molti l’oggetto fenomenico, risultato dell’esperienza comune di percezione, non sembrava aver generato un’immagine mentale, di un cono o di un cubo, adeguata ad elaborare una risposta. Tornando alla distinzione tra oggetto fenomenico e oggetto fisico, dovremo dunque aggiungere un ulteriore elemento, in relazione con gli altri due: l’oggetto geometrico, inteso come il concetto formalizzato dalla geometria e elemento di riferimento per la soluzione di problemi come quelli proposti.

In questo modo si mette a fuoco il problema chiave che riguarda l’educazione geometrica e il suo rapporto con la visualizzazione: intendo la distinzione tra lo sviluppo e l’elaborazione di concetti spaziali, così come emerge dall’esperienza quotidiana dello spazio fisico nel quale viviamo e lo sviluppo e l’elaborazione di concetti geometrici così come sono formalizzati dalla geometria in quanto teoria matematica.

Ovviamente, il legame tra concettualizzazione dello spazio e concettualizzazione in geometria è molto stretto, ma la distinzione tra i due ambiti è necessaria per comprendere non solo i punti di contatto, ma anche le differenze e di conseguenza le difficoltà che emergono. La complessità della relazione tra geometria ed esperienza fisica è stata più volte affrontata nella letteratura riguardante l'educazione matematica (Vinner, Herschcovitz, 1983; Herschcovitz, 1989; Vinner, 1991; Clements, Battista, 1992) e recentemente da Houdement, Kuzniak (2003) e da Kuzniak (2013).

L'analisi fine del rapporto tra concettualizzazione spontanea dello spazio e concettualizzazione in geometria risulta fondamentale per una corretta interpretazione del ruolo della visualizzazione nel ragionamento geometrico, ovvero per dar ragione di ciò che spesso in modo un po' troppo semplicistico, è classificato come intuizione geometrica e che troppo spesso e in modo superficiale è considerata una abilità innata. Le conseguenze di questo modo di considerare la visualizzazione in geometria portano fatalisticamente a dividere gli allievi in quelli che *vedono* e in quelli che *non vedono* e dunque a far svanire il problema didattico di un possibile intervento educativo. Cerchiamo allora di analizzare meglio la natura dei concetti geometrici e dei processi mentali coinvolti nella soluzione di problemi geometrici come quelli presentati sopra, per cercare di capire come si potrebbe intervenire in modo adeguato.

6. – La nozione di Concetti Figurali

Vorrei cominciare con due citazioni che riprendo da Hans Freudenthal e che mi sembra descrivano molto bene la complessità del pensiero geometrico riconducibile alla doppia natura della geometria intesa come disciplina ed in particolare come disciplina scolastica.

> *I would rather ask what geometry is on the lowest level, the bottom level? ... Geometry is ... grasping the space in which the child lives and moves. The space that the child learns to know, explore, conquer in order to live, breathe and move better in it.* (Freudenthal 1973, p. 403)
> *In fact, if experimental geometry means that the student makes experiments, then a great part of his mathematical activity should be experimental, as is the activity of the creative mathematician. If it should remind us of experimental physics, it is wholly mistaken.* (*Ibidem*, p. 405)

Freudenthal riconosce l'origine della concettualizzazione geometrica nell'esperienza dello spazio fisico nel quale viviamo, ma chiarisce anche i limiti del riferimento alla realtà. Similmente si esprime Laborde:

> *Le savoir géométrique s'intéresse à deux champs de savoir: l'espace matériel, voir physique et l'espace théorique qui – après la découverte des géométries non-euclidiennes – se centre sur l'analyse de relations logiques antre des énoncés, relations déroulantes partialement de l'analyse de l'espace matériel.* (Laborde, 1988 pp. 341-45)

Anche se il legame è innegabile, una netta distinzione deve essere fatta tra lo spazio fisico nel quale avvengono le nostre esperienze e lo spazio astratto ed ideale della geometria. Così scriveva Henri Poincaré:

> *On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie: mais ce serait une erreur d'en conclure que la Géométrie est une science expérimentale, même en partie.* (Poincaré 1902, p. 90)
> [...] *les principes de la géométrie ne sont pas des faits expérimentaux* [...]. *Quelque péremptoires que me paraissent les raison déjà données, je crois devoir insister parce qu'il y a là une idée fausse profondément enracinée dans bien d'esprits.* (*Ibidem*, p. 92) ([2])

Certo è che la geometria, come teoria matematica, non dipende in alcun modo dalla verità o meno di una sua interpretazione in termini di spazio fisico, ma la geometria non può fare a meno di assumere significato proprio come scienza dello spazio reale. Il legame tra oggetti geometrici e realtà resta dunque molto stretto, in particolare il rapporto tra oggetti geometrici e oggetti fisici, o meglio oggetti fenomenici, come appena detto.

Per questo motivo i concetti geometrici non possono essere considerati puri concetti ma conservano aspetti figurali, rappresentabili

([2]) Ma la lunga e complessa discussione che Poincaré dedica a questo problema ne testimonia la rilevanza in una prospettiva epistemologica, la stessa nella quale ritroviamo qualche anno più tardi gli studi di Jean Piaget e Bärbel Inhelder (1947). Il secolo XIX e l'inizio del XX sono stati caratterizzati da un generale interesse dei matematici per il problema della natura delle idee geometriche; articoli di ricerca che introducono nuove idee trattano spesso della loro origine sottolineandone il legame con l'esperienza . Per una discussione di questo tema rimando al contributo di Umberto Bottazzini (2001).

pittoricamente, provenienti dalla loro origine, lo spazio reale. Ad esempio la retta o il cerchio acquistano nel processo di concettualizzazione simultaneamente caratteri di concetto, astrazione delle proprietà di rettilineo o di rotondo, e di immagine, provenienti dall'esperienza (la percezione del bordo di un tavolo o di una ruota), di modo che il concetto geometrico risultante sembra ricondursi contemporaneamente a due componenti, la componente figurale riconducibile all'esperienza sensoriale e la componente concettuale riconducibile al processo di astrazione di caratteristiche comuni. In altri termini, nel ragionare in geometria i concetti in gioco, le figure e le relazioni geometriche, sono caratterizzati da una duplice natura, a un tempo logica e spaziale, simultaneamente concettuale e figurale. Ci riferiremo a tali entità mentali con il termine introdotto da Fischbein *Figural Concepts*. Traduciamo tale termine con *Concetti Figurali*. I concetti figurali sono caratterizzati dal fatto di essere

> *mixture of two independent, defined entities that is abstract ideas (concepts), on one hand, and sensory representations reflecting some concrete operations, on the other.* (Fischbein 1993, p. 140)

Secondo tale ipotesi, possiamo interpretare il ragionamento geometrico come interazione tra i due aspetti, quello figurale e quello concettuale. L'efficienza e la flessibilità del ragionamento sono allora da intendersi in termini di armonia tra questi due aspetti, mentre difficoltà ed errori possono essere interpretati in termini di disarmonia o conflitto (*Ibidem*, p. 150).

Dal punto di vista educativo assume importanza studiare tali processi interattivi e come sia possibile arrivare ad una buona armonizzazione, in particolare ha importanza delineare le variabili in gioco sulle quali sia possibile intervenire a livello didattico.

Consideriamo dunque come quadro di riferimento per descrivere la natura dei concetti geometrici quello introdotto da Fischbein (1993) e sviluppato in (Mariotti 1992) ed interpretiamo i due esempi introdotti precedentemente.

Per quanto riguarda il problema del cono e del cappio, de Finetti si chiedeva: "non è forse ovvio che il filo si dispone secondo *la linea più* *breve* (o, come si dice, 'geodetica') e che la linea più breve *è la retta* (ossia: la linea che diventa retta spianando il mantello del cono" (de Finetti L 1967, p. 12; il corsivo è nel testo). De Finetti interpretava poi la difficoltà osservata in termini di frattura tra esperienza del mondo fisico ed esperienza scolastica, in particolare riconduceva la difficoltà alla separazione tra quel molto che è stato già appreso e le nozioni teoriche che vengono relegate "nel limbo delle astrazioni scolastiche". In questo modo metteva in chiara evidenza il problema della mancata armonizzazione tra una componente figurale ed una componente concettuale, ossia l'inadeguatezza del controllo teorico sulle immagini, ed in particolare sulle immagini mentali, che la situazione evocava; controllo concettuale che permette in primo luogo di trasformare la domanda riguardante una situazione tridimensionale (un cono e un cappio) in una domanda riguardante una situazione bidimensionale (il mantello del cono, ossia la sua superficie, e la curva corrispondente al cappio); in realtà, il passaggio dall'immagine di un solido alla sua superficie (di solito parliamo di sviluppo di un solido) risulta un processo molto complesso (Mariotti 2005) e molto poco spontaneo. Certo, c'è un problema di inadeguatezza dell'intervento didattico, ma si tratta di capire meglio in cosa possa consistere un intervento opportuno.

Per comprendere meglio, consideriamo il secondo esempio e continuiamo l'esperimento mentale che abbiamo iniziato. Proviamo a seguire un ragionamento geometrico che cerca di chiarire la mutua relazione tra le diagonali di un cubo.

Sempre utilizzando solo l'immagine mentale del cubo evocata dalla domanda, consideriamo due delle diagonali del cubo e i vertici che le

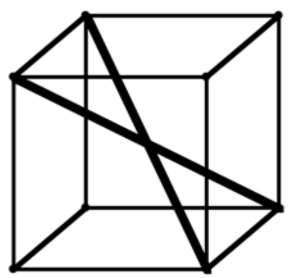


Figura 3. Due diagonali di un cubo

individuano, questi sono anche i vertici di un quadrilatero che ha per diagonali le due diagonali del cubo. Una volta individuato, è possibile focalizzare l'attenzione su questo quadrilatero e identificare i suoi lati rispettivamente come una coppia di spigoli (paralleli) del cubo e come una coppia di diagonali di due facce (parallele) del cubo. Tutto questo ci dice che il quadrilatero è un parallelogrammo con coppie di lati opposti di lunghezza diversa, dunque le sue diagonali si incontrano ma non sono perpendicolari. In realtà, il quadrilatero è un rettangolo, perché i suoi lati consecutivi appartengono a due facce adiacenti del cubo, ma ciò poco importa perché è proprio il fatto che avendo i lati a coppie paralleli e lati consecutivi diversi, il quadrilatero non può avere le diagonali perpendicolari.

Una volta completata la nostra riflessione, possiamo domandarci che cosa avviene dell'immagine mentale del cubo mentre elaboriamo questo ragionamento geometrico, in particolare che cosa accade all'immagine delle due diagonali, immagine che prima non si riusciva a mettere a fuoco. L'esperienza, ripetuta molte volte con soggetti diversi (Mariotti 2005), mostra che a seguito del ragionamento geometrico, anzi proprio mentre tale ragionamento è elaborato, l'immagine mentale del cubo subisce un processo di trasformazione: l'elaborazione concettuale del cubo e delle mutue relazioni tra spigoli e diagonali, porta ad una conseguente rielaborazione della componente figurale del cubo, di modo che alla fine l'armonia tra figurale e concettuale rende disponibile un'immagine mentale del cubo diversa da quella evocata precedentemente, e soprattutto perfettamente adeguata a rispondere alla domanda, tanto che si ha la sensazione di 'vedere' l'angolo tra le due diagonali e di riconoscerlo come 'non retto'. A generare tale immagine non è stata un'esperienza diretta, ma un'esperienza mentale mediata da un'elaborazione concettuale, il cui punto chiave è dato dalla individuazione del quadrilatero e della relazione geometrica tra i suoi lati; il ragionamento geometrico si è svolto a livello concettuale, ma mantenendo l'armonia tra componente figurale e componente concettuale, ha trasformato l'immagine mentale del cubo, fino a renderla adeguata a rispondere alla domanda.

Si comprende allora quanto complesso possa essere il percorso educativo che segua la raccomandazione espressa da Bruno de Finetti:

“Bisogna assimilare e render valido ciò che la scuola dà, e che ciascuno può far sì di venirne arricchito anziché soffocato: basta che renda concrete le cose astratte fondendole con ciò che vede e che sa”. (de Finetti L 1967, p. 13)

Già, ma come fondere ciò che si vede con ciò che si sa, come armonizzare la componente figurale e la componente concettuale?

Cercando di capire meglio come rendere operativa questa raccomandazione, spostiamo la nostra attenzione sul ruolo molto delicato che può svolgere la produzione o l’interpretazione di immagini, così come la sua elaborazione a fini euristici.

7. – Disegno

Se pensiamo al rapporto tra geometria e realtà, e in particolare al rapporto tra concettualizzazione geometrica ed esperienza, quale quello vissuto da un allievo nel contesto scolastico, dobbiamo riconoscere il ruolo centrale svolto da un oggetto fisico molto particolare: il disegno, ossia una traccia scritta su un foglio e che rappresenta un oggetto geometrico. Il disegno ha da sempre accompagnato il pensiero geometrico in diverse forme e con diversi ruoli: un disegno accompagna l’introduzione di un nuovo concetto geometrico, un disegno accompagna o sostituisce un testo verbale scritto che esprime un problema, un disegno è usato a supporto del processo di risoluzione di un problema. In ognuno di questi casi il disegno svolge una funzione semiotica: fornisce un mezzo per rendere in qualche modo percepibile e comunicabile un concetto geometrico, altrimenti per sua natura non immediatamente ostensibile. Si tratta di una caratteristica comune a tutti i concetti della matematica. La natura intrinsecamente generale degli oggetti matematici fa dell’attività matematica un’attività essenzialmente simbolica. Certo è che nessuna attività matematica è pensabile senza il ricorso a una qualche traccia che in qualche modo renda percepibile ai nostri sensi (vista, tatto, udito), e per questo comunicabile, un’idea matematica o, come più spesso amiamo dire un oggetto matematico. Senza *segni* è impossibile fare matematica. Ma, allo stesso tempo, la matematica non è solo un gioco di segni, dato che un segno designa qualche cosa (Radford 2006) ed è su questo qualcosa che si dirigono i nostri pensieri.

Il ruolo chiave svolto dalle diverse forme di rappresentazione necessarie allo svolgimento di attività matematiche, ci porta con Duval (2006, p. 105) ad affermare che in matematica, a differenza di altri domini del sapere, l'origine delle difficoltà è da cercare non solo nella specificità dei concetti, ma anche nel funzionamento dei sistemi semiotici utilizzati per la presentazione di un concetto. In particolare, nel caso della geometria, prima tra tutte abbiamo la difficoltà che gli allievi hanno a distinguere un concetto geometrico dalla sua rappresentazione.

In questo senso risulta molto pertinente e chiarificatrice la distinzione introdotta da Parzysz (1988) tra *figura* e *disegno;* ossia la figura intesa come "[...] the geometrical object which is described by the text defining it" e il disegno inteso come tracciato materiale, come una delle possibili rappresentazioni di una figura. Il rapporto complesso tra figura e disegno così intesi ha trovato riscontro in molti studi che considerano il problema del disegno in ambito didattico. Di particolare interesse, anche per le proposte didattiche presentate, sono quegli studi che riguardano il disegno inteso come rappresentazione bidimensionale di oggetti tridimensionali, o più in generale il disegno tecnico, come oggetto di studio specifico in modo da esplicitare il rapporto tra disegno ed oggetto, in termini geometrici (Parzysz 1991; Audibert 1992; Gutiérrez 1996).

Lasciando da parte il problema del disegno nel caso di figure (oggetti geometrici) tridimensionali, limitiamo la nostra attenzione al caso bidimensionale, e domandiamoci cosa caratterizza il disegno di una figura geometrica, ad esempio il disegno di un triangolo inteso come rappresentazione del concetto geometrico di triangolo.

A differenza delle rappresentazioni verbali o simboliche, la rappresentazione grafica di un concetto geometrico come quello di triangolo è una particolare istanza del concetto figurale di triangolo, del quale condivide la componente figurale, pur non godendo delle proprietà fondamentali della componente concettuale, principalmente la generalità. In altre parole, il disegno di un triangolo è triangolare ([3]).

([3]) Usando la terminologia corrente che la semiotica ha ripreso da Pierce, possiamo dire anche che il disegno di un triangolo è un segno classificabile come un'icona. Per una discussione più ampia si veda (Mariotti 2005).

Si tratta, in effetti, di un caso molto particolare, estraneo ad altri domini della matematica; in algebra ad esempio, le possibili rappresentazioni del concetto di numero pari in nessun senso possono essere considerate a loro volta pari. Nel caso dei concetti geometrici, concetti figurali, le loro rappresentazioni esterne pur restando particolari condividono con l'oggetto geometrico la componente figurale, e per questo possono offrire un supporto forte, perché diretto, alla componente figurale; ma affinché tale supporto sia anche produttivo, il disegno deve essere sottoposto al controllo concettuale. Ad esempio, solo attraverso un atto mentale, un disegno può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità e fornire un contributo efficace nella soluzione di un problema. Tornerò su questo aspetto più avanti, nella discussione delle potenzialità degli ambienti di geometria dinamica.

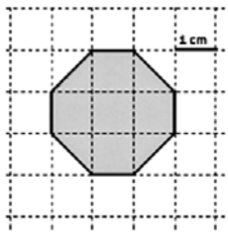
Come chiaramente descritto da alcuni studi ormai classici, il disegno ha una funzione complessa nel processo di concettualizzazione: è pratica comune introdurre un concetto geometrico fornendo esempi e questo avverrà soprattutto attraverso disegni che lo rappresentano. Si innesca così un duplice processo: da un lato la concettualizzazione è guidata da una definizione espressa verbalmente, dall'altro la concettualizzazione è guidata dall'esperienza percettiva di disegni dai quali astrarre le proprietà caratterizzanti. Come abbiamo visto, tale esperienza percettiva è frutto di un processo fortemente individualizzato che può restare completamente fuori dal controllo del soggetto, e a maggior ragione fuori dal controllo dell'insegnante. Accade così che, indipendentemente dalla definizione geometrica, il processo percettivo selezioni determinati elementi e ne tralasci altri in modo da limitare il concetto in questione, rendendo certi *elementi critici* (Vinner, Hershkowitz 1983; Hershkovitz 1989), seppure non pertinenti rispetto alla definizione matematica, indispensabili per il riconoscimento, e infine caratterizzanti il concetto stesso. Esempi classici sono quelli che includono come elemento critico la posizione della figura rispetto ad un sistema di riferimento canonico: ad esempio, l'altezza di un triangolo è riconosciuta come tale solo se nel disegno ha una *posizione verticale*. Altri esempi riguardano il riconoscimento di particolari poligoni; ad esempio, il caso del triangolo isoscele che è riconosciuto come tale solo se ha esattamente due lati uguali. Il caso del riconoscimento del triangolo isoscele fa parte di un fenomeno più ampio riguardante le difficoltà degli allievi ad accettare le classificazioni geometriche dei poligoni. È risultato ben noto che il compito della classificazione dei quadrilateri risulti particolarmente difficile (de Villiers 1994; Currie, Pegg 1998; Erez, Yerushalmy 2006; Monaghan 2000; Fujita, Jones 2007).

È possibile interpretare tale difficoltà come originata da un possibile conflitto tra componente figurale e componente concettuale. La componente concettuale, seguendo una specifica definizione geometrica, impone di considerare l'inclusione della classe dei quadrati nella classe dei rombi, e dunque impone di riconoscere un quadrato come un particolare rombo; al contrario, la componente figurale trae origine dall'esperienza percettiva che, selezionando elementi critici in relazione ai disegni, induce a differenziare nettamente un quadrato da un rombo (per una discussione più approfondita che affronta il problema della definizione nel quadro dei concetti figurali vedi Mariotti, Fischbein 1997).

Vediamo un esempio interessante che mostra la complessità del problema di riconoscimento. Consideriamo il problema seguente che compare tra i quesiti delle prove Invalsi del 2013 ([4]). Pur non essendo la rappresentazione di un poligono regolare, l'immagine proposta presenta molte simmetrie che la fanno apparire alquanto regolare. Questa apparente regolarità può costituire un elemento chiave nel riconoscimento del poligono e può indurre in errore nella scelta della risposta. In effetti, la maggioranza delle risposte (circa l'80 %, come riportato dai dati nazionali) sembra essere basata su questa inter-

([4]) La raccolta alla quale ci riferiamo è reperibile al seguente URL:
http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/SNV2013_MAT_06_FASCICOLO_1.pdf
I risultati che INVALSI rende pubblici sono di natura campionaria, ovviamente rappresentativi, su base statistica, dell'intera popolazione studentesca di riferimento. Le prove nelle classi-campione sono svolte in presenza di un osservatore esterno. Per maggiori dettagli è possibile consultare il Rapporto INVALSI 2013: http://www.invalsi.it/snvpn2013/rapporti/Rapporto_SNV_PN_2013_DEF_11_07_2013.pdf

D11. Giulio dice che l'ottagono rappresentato in figura ha il perimetro di 8 cm.



Giulio ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ Giulio ha ragione perché ....

....

....

☐ Giulio <u>non</u> ha ragione perché ....

....

....

Figura 4. Testo del quesito come della prova INVALSI

pretazione che esaspera gli aspetti di regolarità del disegno e porta a considerarlo come la rappresentazione di un ottagono regolare. In altri termini, sembra essere accaduto che nella concettualizzazione di poligono regolare la componente figurale sia stata associata a una condizione di regolarità più generale rispetto a quella definita dalla geometria, che chiede che tutti i lati di un poligono siano di uguale lunghezza. Questa evenienza, combinata con la tendenza a regolarizzare l'immagine percepita, ben descritta dalle leggi della Gestalt, spiega come si possa essere indotti a riconoscere nel disegno un ottagono regolare.

8. – Disegnare in un ambiente di Geometria Dinamica

Le considerazioni fatte sopra si limitavano al caso di disegni nell'ambiente carta e penna, che ancora resta l'ambiente di disegno più familiare per gli allievi della scuola italiana. Seppure non così diffusi come forse ottimisticamente si pensava al loro primo apparire, ormai da anni sono disponibili ambienti grafici digitali, e in particolare sono disponibili ambienti software di geometria dinamica. Attualmente ne esistono diversi. Tanto per citare i più famosi, ai classici *Cabri*

(Laborde, Straesser 1990) ([5]), *The Geometer's Sketchpad* (Jackiw 2001) ([6]), si è recentemente affiancato *GeoGebra* ([7]). Questi software presentano differenze più o meno grandi rispetto alle funzionalità base, ma hanno tutti una caratteristica comune: la dinamicità, ossia la possibilità di muovere e trasformare le immagini prodotte sullo schermo. Tale funzione base, detta *trascinamento*, è riconducibile ad un principio che solo superficialmente può sembrare semplice ed immediatamente chiaro, ma che in realtà è assai complesso. Cercherò di chiarire come sia importante didatticamente rendersi conto di tale complessità per ben sfruttare potenzialità che un AGD può offrire nella pratica didattica.

8.1 – *La funzione trascinamento*

Lo spazio grafico virtuale è costituito dallo schermo di un computer, da un particolare ambiente software che offre strumenti per disegnare e da una particolare funzione, che trasforma le immagini disegnate sullo schermo. Tale funzione, per come è realizzata ed in particolare per come è attivata, agendo sull'immagine che appare sullo schermo attraverso mouse, dà all'utilizzatore la sensazione di trascinare il disegno e per questo è detta funzione di *trascinamento*.

L'effetto del trascinamento è dovuto al fatto che la macchina realizza una successione di nuove immagini, ciascuna ottenuta tramite la stessa procedura di costruzione, ma ogni volta a partire da un nuovo punto base. Il numero elevato di immagini e la velocità della loro apparizione sullo schermo permettono di ottenere l'effetto visivo di una immagine in movimento. Il movimento è percepito sulla base del gioco tra proprietà che variano e proprietà che non variano; sono queste ultime, dette *invarianti*, che costituiscono l'identità della immagine sullo schermo, ossia ciò che permette di riconoscerla come un oggetto (fenomenico) in movimento e che permettono eventualmente di rico-

([5]) http://www.cabri.com
([6]) http://www.chartwellyorke.com/sketchpad/x24070.html
([7]) http://www.geogebra.org

noscerla come la rappresentazione di un oggetto geometrico. La dialettica tra variazione e invarianti che sta alla base del sistema di rappresentazione realizzato in un ambiente di geometria dinamica (AGD) è la stessa che sta alla base di ogni processo di categorizzazione; è tale dialettica che permette di riconoscere come istanze dello stesso concetto elementi anche molto diversi tra loro. Osserviamo più da vicino le caratteristiche degli invarianti di un AGD, per comprendere la maggiore ricchezza semiotica offerta da tali ambienti rispetto all'ambiente carta e penna. In primo luogo, se consideriamo la caratterizzazione data di un concetto geometrico come *concetto figurale*, una figura dinamica di un AGD costituisce una rappresentazione che non solo supporta la componente figurale, ma offre anche un supporto alla componente concettuale: mediante il trascinamento infatti è possibile avere accesso non solo ad una particolare istanza del concetto, ma ad una vasta gamma di esempi tutti tra loro legati dalla comune definizione realizzata dalla procedura di costruzione. In particolare, mediante la sua dinamicità un disegno in un AGD riesce a rappresentare la generalità di un concetto figurale, seppure non completamente. Il controllo concettuale che per un disegno in carta e penna chiedeva all'utilizzatore un atto mentale, spesso molto, troppo difficile per lui, nel caso di un AGD viene ad essere a carico della macchina, che automaticamente varia ciò che non è definito ma mantiene ciò che è definito esplicitamente dai passi di costruzione. Ogni immagine che appare sullo schermo ha dunque una realtà potenziale che offre una rappresentazione, ad un tempo figurale e concettuale, dell'oggetto geometrico in gioco. Ma c'è di più, le proprietà invarianti di un'immagine dinamica hanno un corrispettivo nei comandi utilizzati per la loro realizzazione, di modo che è possibile stabilire in modo esplicito una relazione tra proprietà caratteristiche di una immagine e comandi utilizzati nella costruzione.

Si comprende così quanto grandi siano le potenzialità offerte da simili ambienti grafici rispetto al problema della concettualizzazione e del suo rapporto con la definizione in geometria: è possibile promuovere immagini mentali più flessibili e meno influenzabili da stereotipi, ma anche rendere accettabili quelle classificazioni inclusive che generano tante difficoltà. Ad esempio, la costruzione di un triangolo isoscele come triangolo con due lati uguali, permetterà di osservare, tra le tante immagini generate da tale costruzione, le immagini che rappresentano i casi particolari dei triangoli equilateri (Bardone et al. 1998; Fujita, Jones, 2007; Fujita 2012), rendendo accettabile il considerare un triangolo equilatero come un caso particolare di triangolo isoscele.

Questi particolari sistemi di rappresentazione sembrano offrire grandi potenzialità per sviluppare quella visione dinamica auspicata da de Finetti, e che lui chiamava “ultravedere” (de Finetti L 1967, p. 30):

> *Il punto che dobbiamo ora imprimerci bene in testa è proprio che, anche se forse più che mai nella matematica, il modo più semplice e appropriato per rispondere a un problema particolare consiste nel risolvere un problema molto (o moltissimo) più generale.* [...] *l'aspetto più saliente e istruttivo consiste non tanto nella maggiore generalità in e per sé quanto piuttosto nel fatto che essa si consegue vedendo il problema sotto una forma che si può dire* ***dinamica*** *(quale cercano di dare anche dei semplici ausili didattici, come le figure deformabili).* (*Ibidem*, p. 31)

Certamente un ambiente di geometria dinamica (AGD) offre un ausilio assai più sofisticato di quanto non faccia una figura deformabile come un quadrilatero articolato costruito con aste incernierate. È per questo che certamente l'uso didattico di un AGD avrebbe trovato in de Finetti un sostenitore, proprio come mezzo per favorire quella visione dinamica nella soluzione ai problemi da lui più volte auspicata.

Un uso didattico efficace di tali ambienti, proprio per il loro carattere sofisticato, presuppone una progettazione attenta delle situazioni didattiche che ne vogliano sfruttare le potenzialità.

La letteratura in questo settore è ampia e tocca vari aspetti connessi all'uso delle tecnologie ed in particolare all'uso didattico di un AGD (Laborde 2000; Hollebrands et al. 2007; Clements et al. 2008; Ruthven et al. 2008), ma qui desidero spostare l'attenzione su un ulteriore aspetto, ancora legato alla dinamicità e che credo chiarisca come le esperienze in un AGD possano favorire lo sviluppo di competenze specifiche riconducibili a ciò che comunemente chiamiamo visualizzazione in geometria. Si tratta dell'uso di immagini dinamiche per la soluzione di problemi aperti che chiedono di formulare congetture.

8.2 – *Formulare congetture in un AGD*

Gli invarianti, ossia le proprietà geometriche che si mantengono per trascinamento, sono di due tipi: il primo è costituito dalle proprietà definite tramite i comandi usati per effettuare la costruzione di partenza, il secondo è costituito dalle proprietà che sono deducibili delle proprietà costruite all'interno della teoria geometrica classica. Ad esempio, la costruzione di un poligono che abbia due lati paralleli provocherà il fenomeno di una figura che muovendosi mantiene tali lati paralleli; diremo allora che il parallelismo tra i due lati è un *invariante per trascinamento*. Inoltre, la costruzione effettuata provocherà anche il fenomeno di *mantenere tutte le conseguenze del parallelismo tra i due lati, intendendo per conseguenze le proprietà che sono geometricamente derivabili (deducibili nella teoria) dalla proprietà costruita*. Anche queste conseguenze, ossia le proprietà derivate, costituiranno degli invarianti per trascinamento ([8]). Ad esempio, se oltre a due lati paralleli costruiamo anche i due assi di tali lati, otteniamo una figura che mostra chiaramente il parallelismo tra tali assi, anche se non sono stati esplicitamente costruiti come paralleli.

Alla simultaneità delle proprietà invarianti corrisponde la relazione di conseguenza logica che lega le proprietà invarianti per costruzione (premesse) alle proprietà invarianti derivate (conseguenza); la distinzione tra premesse e conseguenza ha un corrispettivo nella asimmetria che sussiste tra i due tipi di proprietà invarianti: proprietà invarianti che possiamo dire *dirette*, cioè definite esplicitamente nella costruzione, e proprietà invarianti che possiamo dire *indirette*, ossia quelle che appaiono invarianti nel trascinamento senza però essere state definite nella costruzione. Quello che appare sullo schermo è

([8]) Come discusso ad esempio da Hoelz (1996) o da Straesser (2001) caratteristiche specifiche della realizzazione informatica del micromondo possono indurre regolarità e far apparire invarianti per trascinamento proprietà che non sono conseguenze delle proprietà di costruzione compatibili con la Geometria Euclidea. Si tratta di casi limitati e per non appesantire il discorso qui non ne terremo conto anche se aprono un interessante filone di ricerca riguardo alla nuova geometria che da tali esperienze potrebbe avere origine.

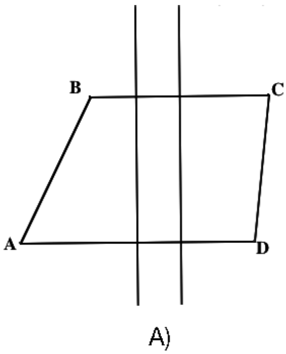


Figura 5a. L'immagine che si ottiene dalla costruzione dei due assi

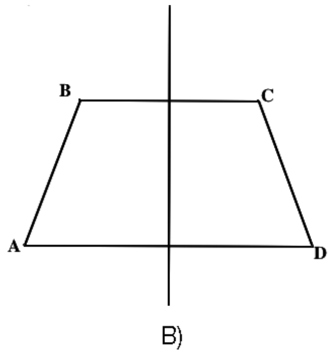


Figura 5b. Cosa si ottiene cercando di far coincidere i due assi

l'invarianza della relazione tra invarianti (invarianti di costruzione e invarianti derivati) e questo invariante, che possiamo dire di secondo livello, corrisponde nella geometria alla validità logica della relazione di implicazione che lega gli invarianti di costruzione con gli invarianti derivati.

Si comprende allora la complessità di interpretazione che si presenta all'osservatore, e in particolare ad un allievo poco esperto di geometria, quando di fronte ad un'immagine che si muove, sia richiesto di formulare una congettura. Nell'esempio della costruzione precedente una congettura possibile potrebbe essere: "in un quadrilatero, se due dei suoi lati sono paralleli allora i loro assi sono paralleli". In un compito di questo tipo, la complessità sta nel fatto di rendersi conto che, nonostante le proprietà invarianti siano percepite simultaneamente, esiste tra queste una gerarchia logica indotta dalla costruzione. In effetti, quello che si richiede è una interpretazione del comportamento delle diverse parti della figura sotto l'azione del trascinamento, che tenga conto della distinzione tra movimento diretto ed indiretto.

Nonostante l'indubbia difficoltà di mantenere il controllo sulla diversa natura delle proprietà invarianti, mi pare che appaia chiaramente la potenzialità didattica offerta dalla natura tutta particolare della rappresentazione di oggetti geometrici in un AGD. Strategie diverse di esplorazione sono state studiate e classificate (Arzarello et al. 2002) mettendo in luce non solo l'elaborazione geometrica delle relazioni tra invarianti di costruzione ed invarianti derivati, ma l'emergere di nuove categorie di invarianti insieme a particolari modi di trascinamento. Si parla dunque di strategie di invarianti molli (*soft*) o robusti (*robust*), dove un invariante molle è una proprietà ottenuta intenzionalmente, sotto il controllo percettivo, in modo da permettere che l'insieme delle figure possibili sia costruito empiricamente, ma sotto il controllo del solutore (Laborde 2005). Si parla anche di trascinamento guidato (*lieu muet*, o *dummy locus dragging*) (Arzarello et al. 2002; Lopez-Real, Leung 2006; Baccaglini-Frank, Mariotti 2010) rispetto al quale le condizioni sotto le quali una certa proprietà si mantiene vengono ad essere rappresentate come traiettorie percorse dal punto variabile. Ritroviamo così quel pensar per *luoghi* di cui parla de Finetti (L 1967, p. 36), per descrivere il modo di "affrontare le questioni una per volta" quando le condizioni devono valere simultaneamente: ogni condizione non individua la soluzione ma darà "il luogo dei punti soddisfacenti a tale condizione".

9. – Conclusioni: educare a vedere

Per concludere vorrei tornare su due aspetti che mi pare sintetizzino bene il discorso didattico di de Finetti e costituiscano per noi ancora una chiara indicazione rispetto alla quale orientare la ricerca in didattica della matematica. Il primo aspetto riguarda la centralità del risolvere problemi: "risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo" scriveva de Finetti (L 1967, p. 3). Il secondo riguarda l'importanza della geometria, proprio per quel ruolo chiave giocato dalla rappresentazione geometrica di un problema: "Qualunque risultato matematico riesce più chiaro [...] rappresentandolo geometricamente in modo opportuno" (*Ibidem*, p. 4).

Alla luce di quanto discusso sopra possiamo osservare però che quanto sostenuto da de Finetti, in modo lucido e argomentato, sembra emergere da una riflessione acuta e sensibile del pensiero matematico, basata forse su un'attenta analisi introspettiva, oltre che su un'analisi epistemologica, ma non tanto da una osservazione e da uno studio sistematico dei processi messi in atto dagli allievi nel contesto scolastico.

Quello che forse appare non essere stato sufficientemente considerato è il problema del come si possa arrivare a perseguire certi obiettivi. La riflessione didattica offre suggerimenti che seppure condivisibili restano troppo generici per risultare operativi, vista la complessità del problema.

Ecco come egli si esprime a proposito di cosa si deve fare perché il "saper vedere" serva a veder meglio:

> [...] *occorre avere immaginazione, e farne uso per saper vedere ogni esempio e problema.*
> [...]. *Se un'idea risulta particolarmente importante* [...] *perché non fissarla meglio in testa (ed anche, perché no, sulla carta) sotto forma di enunciato preciso, di regola comoda, di convenzione servizievole* [...]. *Basta solo considerare tutto ciò come continuazione delle riflessioni precedenti.* (*Ibidem*, p. 21)

Più che suggerimenti sul cosa fare abbiamo una lista di richieste la cui attuazione in classe pone complessi problemi didattici per i quali non è immediatamente chiara la soluzione.

Non deve però stupire tanto ottimismo, era perfettamente in sintonia con quanto in quel momento si andava sviluppando nel campo della didattica della matematica e il rapporto sul congresso di Exeter (de Finetti A 1973l) ci offre un documento molto interessante in questo senso. La selezione degli interventi e i commenti riportati mostrano come de Finetti si collocasse nel contesto della ricerca internazionale, con una particolare sensibilità rispetto ai problemi di innovazione per il curriculum, lasciandosi però incuriosire e affascinare da problematiche più squisitamente psicopedagogiche come quelle emerse nel gruppo su *La psicologia dell'apprendimento della Matematica*, in particolare quelle proposte dal presidente del gruppo, Efraim Fischbein (*Ibidem*, p. 20) sul tema dell'intuizione e del rapporto tra intuizione e formalizzazione.

Quanto ho cercato di mostrare, dunque, è come la ricerca svolta fino ad ora sia in sintonia con il discorso didattico di de Finetti: mettendone in luce la complessità offre anche qualche strumento in più per delineare qualche possibile soluzione ai problemi didattici che si aprono. In questo senso sono da considerare le analisi svolte nei paragrafi precedenti, e soprattutto l'interpretazione del vedere in geometria che abbiamo cercato di caratterizzare sulla base della nozione di *Concetti Figurali.* In particolare, un'interpretazione che considera lo sviluppo del pensiero geometrico come il raggiungimento di abilità e competenze che permettano una interpretazione adeguata delle immagini disponibili e una loro elaborazione efficace rispetto alla soluzione del problema. Questo significa curare uno sviluppo 'armonico' dei concetti geometrici di modo che la componente figurale si mantenga in armonia con la componente concettuale, ossia facendo sì che nell'elaborazione di un ragionamento geometrico si possa disporre di immagini vivide e flessibili e di un controllo teorico adeguato – permettendo ad esempio di fronteggiare possibili interferenze di stereotipi.

Il ruolo del disegno, sia come prodotto che come processo, emerge chiaramente dai numerosi studi presenti in letteratura. Pur tenendo in conto i possibili ostacoli che il disegno, e in generale le rappresentazioni esterne, possono creare, il disegno può essere considerato come un elemento chiave che si pone tra l'oggetto fenomenico e il concetto geometrico e alimenta la dialettica tra componente figurale e componente concettuale.

Infine, un settore particolarmente promettente sembra essere quello legato all'uso del disegno in un AGD. In generale, risolvere problemi in un AGD – siano questi problemi di costruzione o problemi di congettura – richiede di mobilitare la dialettica tra componente figurale e componente concettuale per permettere un uso efficace delle immagini dinamiche disponibili. In questo senso attività di soluzione di problemi in un AGD appaiono particolarmente promettenti, proprio perché offrono esperienze significative per lo sviluppo di abilità e competenze specifiche nell'ambito della geometria, che possono essere fruttuosamente reinvestite in altri ambiti della matematica, ad esempio ogni qualvolta sia necessaria una interpretazione *geometrica* di immagini dinamiche. È per questo che ci piace pensare che questi nuovi strumenti didattici avrebbero attratto la curiosità e la fantasia di de Finetti, che ne avrebbe immediatamente colto le potenzialità didattiche per raggiungere obiettivi ambiziosi di educazione al pensiero matematico a lui cari.

BIBLIOGRAFIA

ALEXANDROV, A.D. (1994), Geometry as an element of culture, in *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*: Québec, 17-23 August 1992, Presses de l'Université Laval.

ARCAVI, A., & HADAS, N. (2000), Computer mediated learning: an example of an approach, *International Journal of Computers for Mathematical learning*, 5(1), 2000, 25-45.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. & ROBUTTI, O. (2002), A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43, n. 3, 66-72.

AUDIBERT, G. (1986), L'enseignement de la géométrie de l'espace, *Bullettin APMEP*, n. 355, 501-526.

BISHOP, A. (1979), Visualizing and mathematics in a pre-technological culture, *Educational Studies in Mathematics*, 10, 135-146.

BISHOP, A. (1983), Space and geometry, in Lesh, R., Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics concept and processes*, New York: Academic Press, 176-203.

BISHOP, A. (1989), Review of research on mathematics education, *Focus on learning problems in mathematics*, 11.1, 7-15.

BOTTAZZINI, U. (2001), I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, s. 8, 4-B, 545-570.

CLEMENTS, D.H., BATTISTA, M.T. (1992), Geometry and spatial reasoning, in Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of reasearch on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan Pub. Co.

CLEMENTS, H.H., SARAMA, J., YELLAND, N.J. & GLASS, B. (2008), Learning and teaching geometry with computers in the elementary and middle school, in M.K. Heid & G. Blum (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Research syntheses.* vol. 1, IAP, 109-154.

CURRIE, P., PEGG, J. (1998), Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals, in C. Kanes, M. Goos and E. Warren (Eds.), *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, 1, 177-184.

DE VILLIERS, M. (1994), The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

DENIS, M. (1991), *Image & Cognition, Harvester Wheatsheaf* (Trad. inglese di Denis, M. *Image et cognition*, Paris : Presses Universitaires de France, 1989), Ney York: Harvester-Weatcheaf.

DUVAL, R. (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103-131.

EISENBERG, T., DREYFUS, T. (1991), On reluctance to visualize in mathematics, in Zimmermann, W. & Cunnigham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, MAA Notes, N. 19, 25-38.

EREZ, M., YERUSHALMY, M. (2006), “If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle”: young students’ experience the dragging tool, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299.

FINKE, R.A. (1989), *Principles of Mental Imagery*, Cambridge: The MIT Press (MA).

FISCHBEIN, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies* 24 (2), 139-162.

FREUDENTAL, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Dodrecht: Reidel.

FUJITA, T., JONES, K. (2007), Learners’ understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, 9(1-2), 3-20.

GUTIÉRREZ, A. (1996), Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, in *Proceedings of PME*, 18.1, 3-20.

HADAMARD, J. (1954), *The psychology of invention in the mathematical field*, New York: Dover.

HEALY, L., HOYLES, C. (1996), Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking, in *Proceedings of PME*, 18.3, 3-67.

HERSCKOVITZ, R. (1989), Visualization in geometry. Two sides of the coin, *Focus on learning problems in mathematics*, 11, n. 1, 61-76.

HOELZ, R. (1996), How does “dragging” affect the learning of geometry, *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 1.2, 169-87.

HOLLEBRANDS, K., LABORDE, C., & STRAESSER, R. (2007), The learning of geometry with technology at the secondary level, in *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives,* Greenwich, CT: Information Age Publishing, 155-205.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (1999), Un exemple de cadre conceptuel pour l’étude de l’enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics,* 40(3), 283-312.

JACKIW, N. (2001), *The Geometers Sketchpad* (version 4.0) [Computer software], Emeryville.

KRUTETSKII, V.A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago: University of Chicago Press.

KUZNIAK, A. (2013) Teaching and Learning Geometry and Beyond, in *CERME 8 Proceedings*, 33-49.

LABORDE, C. (1988), L’enseignement de la géométrie en tant que terrain d’exploration de phénomène didactiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9, n. 3, 337-364.

LABORDE, C. (2000), Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-2), 151-161.

LABORDE, C. (2005), Robust and Soft Constructions, *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics,* Korea, National University of Education, 22-35.

LABORDE, J.M., STRAESSER, R. (1990), Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 22 (5), 171-177.

LEUNG, A., BACCAGLINI-FRANK, A., MARIOTTI, M.A. (2013), Discernment of invariants in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, 84.3, 439-460.

LOPEZ-REAL, F., LEUNG, A. (2006), Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 665-679.

MARIOTTI, M.A. (1992), Immagini e concetti in geometria, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15 (9), 863-885.

MARIOTTI, M.A. (2005), *La Geometria in classe*, Bologna: Pitagora Editrice, 2005

MARIOTTI, M.A., FISCHBEIN, E., (1997), Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.

MARUCCI, F.S. (1995), *Le immagini mentali: teorie e processi*, Roma: La Nuova Italia Scientifica.

MASSIRONI, M. (1995), Il "fisico" e il "fenomenico" nelle immagini mentali, in F.S. Marucci, *Le immagini mentali*, Roma: NIS, 45-78.

MOATES, D.R., SCHUMACHER, G.M. (1983), *Psicologia dei processi cognitivi*, Bologna: Il Mulino, 1983 (Trad. da: *An Introduction to cognitive psychology*, Belmont, 1980).

MONAGHAN, F. (2000), What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals, *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179-196.

NEISSER, U. (1981), *Conoscenza e realtà*, Bologna: Il Mulino (Trad. da: *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*. New York: WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co., 1976).

PARZYSZ, B. (1988), Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 266-299.

PARZYSZ, B. (1991), Representation of space and students' conceptions at High School level, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

PIAGET, J., INHELDER, B. (1947), *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris : Presses Universitaire de France.

POINCARÉ, H. (1902), *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

PÓLYA, G. (1967), *Come risolvere i problemi di Matematica*, Milano: Feltrinelli. (Trad. da: *How to solve it*, Princeton (New Jersey): Princeton Univ. Press, 1945).

PRESMEG, N. C. (1986), Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

PRESMEG, N.C. (1997a), A semiotic framework for linking cultural practice and classroom mathematics, in J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie and A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, Ohio, 151-156.

PRESMEG, N.C. (1997b), Generalization using imagery in mathematics, in L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images,* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum, 299-312.

PRESMEG, N.C. (2006), Research on visualization in learning and teaching mathematics, in *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

RADFORD, L. (2006), Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij, *Rassegna*, 29, 34-39.

RUTHVEN, K., HENNESSY, S., & DEANEY, R. (2008), Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice, *Computers & Education*, 51(1), 297-317.

STRAESSER, R. (2001), Cabri-géomètre: does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning?, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 319-333.

VINNER, S., HERSHKOWITZ, R. (1983), On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83 (1), 20-25.

VINNER, S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D.O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 65-81.

Maria Alessandra Mariotti
Dipartimento di Ingegneria Informatica e Scienze Matematiche,
Università degli Studi di Siena
e-mail: mariotti21@unisi.it

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 143-160

Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education

ABRAHAM ARCAVI

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi e allora è instrutiva e anche divertente.
(de Finetti L 1967, p. 1)

Words can "cite," but never "sight" their objects.
(Mitchell 1994, p. 152)

1. – Introduction

Bruno de Finetti's prescient contribution to mathematics and mathematics education regarding visualization is notable. This chapter is intended as an homage to his pioneering ideas. In his lovely book *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967), among other things, de Finetti describes and exemplifies four main features of visualizing in mathematics:

– How to see easy things ("Saper vedere le cose facili", p. 8)
– How to see concrete things ("Saper vedere le cose concrete", p. 12)
– How to exploit dynamic vision ("Sfruttare una visione dinamica", p. 30)
– How to exploit global vision ("Sfruttare una visione globale", p. 35)

These are indeed basic premises which led the foundation of the subsequent work on what visualization may be in mathematics education and how can be integrated into its teaching and learning. The easiness and the concreteness enable to us to envision abstract ideas and strategies, and the globality and the dynamism of images enable us to perceive and comprehend mathematical nuances. The visionary (double entendre intended) work of Bruno de Finetti re-emerged with full vigor more than two decades after he published his book.

In the last two decades, visualization in the teaching and learning of mathematics became a very central and active area of study. Only recently an entire issue of the *International Journal on Mathematics Education* (ZDM, Rivera et al. 2014) was devoted to the latest developments on visualization. A search of "visualization in mathematics education" in Google Scholar, restricted to 2014, yielded (in February 2015) almost 16,000 results (books, articles, reports). About the same number of entries can be found by searching overarching and important topics such as "socio cultural theories in mathematics education". In comparison, a similar search of "misconceptions in mathematics education" – a very heartfelt topic just a few decades ago – yielded only about half that number of entries.

The recent growing interest in visualization is possibly due to the inherent attractiveness of the topic to mathematicians, mathematics educators and textbook and software designers. It can be also attributed to the well-known truism that we live in a world dominated by the visual, to the point that "the potential for 'visual culture' to displace 'print culture' is an idea with implications as profound as the shift from oral culture to print culture." (Kirrane 1992, p. 58).

In the mathematics education community, the growing interest can also be attributed to the many still open research questions. Presmeg (2014, p. 151) lists thirteen "significant questions" and claims that "Many of the questions... identified...are still in need of investigation". She also stresses the need for addressing "newer questions that inevitably emerge, starting with – but not confined to – those I have suggested." (Presmeg 2014, p. 156).

This chapter is intended as a modest contribution to visualization, following up on previous work (Arcavi 2000) and addressing (at least partially) four of the questions from Presmeg's list.

– "What aspects of pedagogy are significant in promoting the strengths and obviating the difficulties of use of visualization in learning mathematics?" (Question 1)

- "What aspects of the use of different types of imagery and visualization are effective in mathematical problem solving at various levels?" (Question 3)
- "What conversion processes are involved in moving flexibly amongst various mathematical registers, including those of visual nature, thus combating the phenomenon of compartmentalization?" (Question 5)
- "How may be visualization be harnessed to promote mathematical abstraction and generalization?" (Question 10)

2. – A definition of visualization

On the basis of many studies, we have proposed in the past the following definition: "Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings." (Arcavi 2000)

Given the complexity of this definition, some parsing of it may be in place. As in previous exercises that we undertook in order to make sense of multi-layered concepts such as variable (see, Arcavi & Schoenfeld, 1987), we can start by constraining ourselves to just one word to complete the following sentence: Visualization is ________. Such word should capture the essence of the term. According to the definition proposed above, we have three candidates for the one word: 'ability', 'process' and 'product'. Still these three descriptors require, as shown above, to be completed by 'of what'?, and they are: creation, interpretation, use and reflection upon pictures, images, diagrams. The definition also includes an answer to a "where?": in our minds, on paper or with technological tools. Finally, the definition also includes purpose and goals: communication of information, thought, learning and understanding (whatever theoretical perspective is taken to define these loaded terms). At this point, it might be useful to apply some visual means to our proposed definition of visualization. Figure 1 is offered as a visually convenient arrangement of the verbal statements (a "diagram on paper") intended to help perceive and better communicate both the components of our proposed definition and the interconnections therein. It also reflects the parsing proposed above:

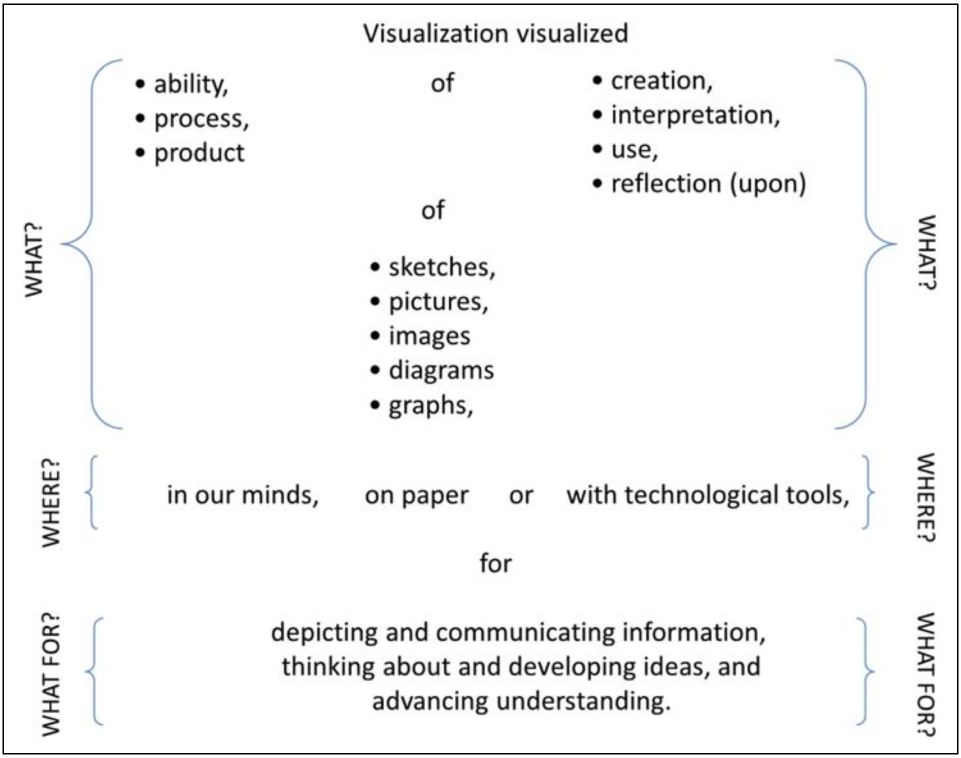


Figure 1. A visual display of the proposed definition of visualization

Following on this definition, we concentrate on some aspects of pedagogy, use and conversion process (to use Presmeg's formulations). Specifically, we address three themes:

- visualization and sense making,
- visualization and systematicity, and
- visualization and proof.

These issues will be discussed on the shoulders of some illustrative examples, and are proposed as the basis for further developments and examination.

3. – Visualization and sense making

As human beings, we sometimes have the feeling or the intellectual experience that leads us to say: 'this makes sense to me' or alternatively 'this does not make sense to me' (or paraphrasing de Finetti's: this is easy to me, this is concrete to me). What does this saying entail? It may refer to what some describe as an 'aha! moment', an insight, in which we *feel* how pieces fall into place, how ideas suddenly cohere and connect to each other. It may consist of the impression that something resonates with what we think, and is aligned with previous experiences and understandings. It may be reflected by our ability to explain something to ourselves or to others in a way that satisfies our inner intellectual demands, dispelling 'haziness' and uncertainty, and producing intellectual satisfaction. Making sense may also imply the perception or the recognition of something through the senses or through the intellect, regarding it as reasonable, plausible, akin to what can be expected, and producing a sense of meaningfulness for oneself. One of the main challenges of mathematics education is to provide repeated opportunities for students to participate in experiences which support the development of this inner feeling, and not only to engage in the reproduction (for themselves or for others) of ideas and strategies that are expected of them.

Sense making may involve some of our five senses, especially vision. It is perhaps in that respect that the English expression "I see" is sometimes also a synonym of "I understand", rather than the mere act of sensorial vision, but possibly intricately connected to it.

Consider the following example from elementary arithmetic, to calculate:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}\,.$$

This is a simple exercise which can be solved in several ways, for example:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{8+1}{72}=\frac{1}{8}\,.$$

Or,

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{8}\,.$$

Some sophisticated savant suggested replacing the multiplication by a subtraction and that yields the result directly as follows:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1}{8}\,.$$

This substitution is warranted once we know that the product of two unit fractions with consecutive denominators is equal to their positive difference.

So far we have shown different arithmetic solutions. There is a very interesting visual solution which appears in Smudge (1999, p. 8) without any further explanation, as shown in Figure 2.

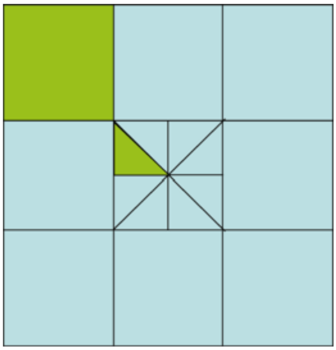


Figure 2. A visualization of $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{8}$

As is the case with other visual solutions, this diagram may require some consideration before it 'makes sense'. The large square is divided into nine equal squares, thus each of them constitutes a ninth of the whole. The central small square is subdivided into eight congruent triangles, thus each of them constitutes an eighth of it. If we take the larger square as the unit, then the triangular subdivision of the central small square constitutes an eighth of a ninth of the large square.

Therefore, the painted area (see Figure 3) is a geometrical representation of the expression $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}$.

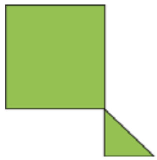


Figure 3. A visualization of $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}$

If one observes carefully in order to make sense of the representation, one realizes that the whole square is made up of eight combinations of one small square and a small triangle attached to it. Thus, $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{8}$.

It can be claimed that the graphical display 'makes more sense' than a concatenation of operations since it visually connects the operation to the meaning of a fraction as part of a whole and provides a global insight of what is being calculated and how. Moreover, depending on how we look, the visual diagram offers a representation of either the left hand side of the equality or its right hand side (or both simultaneously): if one looks at the small square and the attached triangle as two separate figures, we see the addition of $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}$ $\left(\frac{1}{9}\text{ being the small square and }\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}\text{ the small triangle}\right)$. However, if we look (globally) at the two figures as a single 'unit', one sees the eighth of the large square, and thus the figure highlights the result of the calculation, namely, $\frac{1}{8}$. In other words, the figure is reasonable and resonates with our inner feeling of understanding because it represents both the calculation (a process), its result (a product) and thus is also constitutes an explanation of it. In this case Visualization is a mediator, a catalyzer, and a facilitator for sense making.

At this point, it might be fair to point out a limitation of visualization as it emerges from this particular example. Our aim in mathematics is generalization, can we make the case that $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}$ for any integer n that is the square of an odd number (recall that the square in the visualization had a central a small square)? As in the previous case, the sense making intended can be further nurtured by comparing and contrasting with other representations. Such comparisons may highlight not only how algebra lends itself well to generalizations, but also may inspire us to look for visualization of this property for numbers that are not necessarily squares of odd numbers. For example, it may inspire to create a representation for $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, as follows (see Figure 4) as well as for other cases.

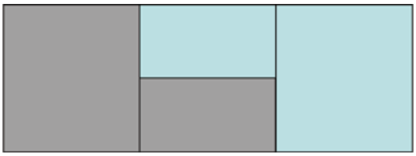


Figure 4. A visualization of $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

4. – Visualization and systematicity

Much has been said about the limitations of visualization. For example, consider the rough sketches of the graphs of the two functions $y = log_{\frac{1}{16}}x$ and $y = (\frac{1}{16})^x$ (Eisenberg, 2000) as shown in Figure 5.

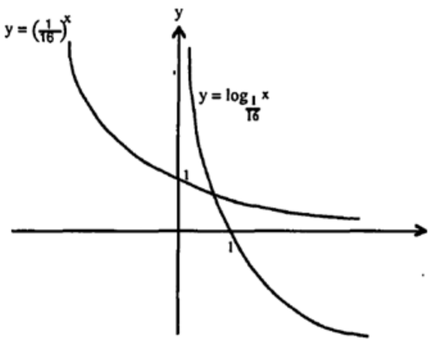


Figure 5. Sketch of the graphs of $y = log_{\frac{1}{16}}x$ and $y = (\frac{1}{16})^x$

According to the sketched graphs, there is one solution for the equation $log_{\frac{1}{16}}x = (\frac{1}{16})^x$. However, this equation has three solutions!

Some of us may find difficult to visualize two concave curves of this type intersecting three times. Graphing these particular functions may not be helpful due to scaling problems. However, changing the basis of the logarithms to 0.01, one can produce a satisfactorily visually convincing image (Figure 6), showing the relative positions of the two graphs, and thus illustrating how two concave curves can intersect in three points.

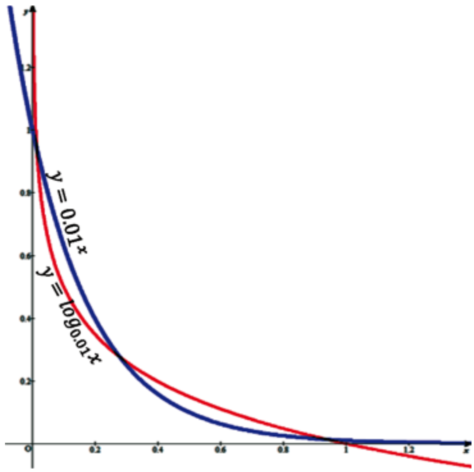


Figure 6. Sketches of two concave graphs with three intersections

In this case, the moral that "visualization graphs can sometimes be misleading" (Eisenberg 2000, p. 100) can be contested: comparing and contrasting different representations (or different sources for the same piece of knowledge) should serve as a monitor for the ways we make use of visual images. In this case, the initial misleading conclusion from the rough sketch was amended by such monitoring which in turn led us to look for a graph that is more visually enlightening and convincing.

We would like to claim also that sometimes, visualization tools can provide us with a systematic means to tackle and solve a problem. Consider, for example, the following version of the three jugs problem (one of its first sources is Coxeter & Greitzer 1967, p. 89).

The problem presents us with three jugs with the capacity of holding 8, 5 and 3 liters respectively. At the beginning, the largest jug is full and the other two are empty, and we are requested to end up with two jugs holding exactly 4 liters each without using any measuring instrument, just by pouring liquid between the jugs.

Once we realize that the only measuring instruments are the jugs themselves, we are limited to two "operations": to empty a jug and/or to fill it. We assume that no liquid is wasted during the pouring, thus, at any time of the pouring process, the sum of the volumes contained by the three jugs should be 8.

This problem can be solved by trial and error. Table 1 describes an example of successive pouring steps which solve the problem (each line in the table shows the amount held by each of the jugs, and by looking at successive steps one can deduce what was poured from where to where).

Table 1: Steps of the solution for the three jugs problem

8-liter jug	5-liter jug	3-liter jug
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

This is indeed a satisfactory solution. However, is it the only one? Is it the shortest one? Is there a "method" to solve the problem other than by trial and error? A visual display of information that helps answer this question in a systematic way is called a ternary diagram, a barycentric diagram or a de Finetti diagram, in honor of its proposer. This diagram consists of an equilateral triangle of height 8 which serves as a "coordinate system" as shown in Figure 7:

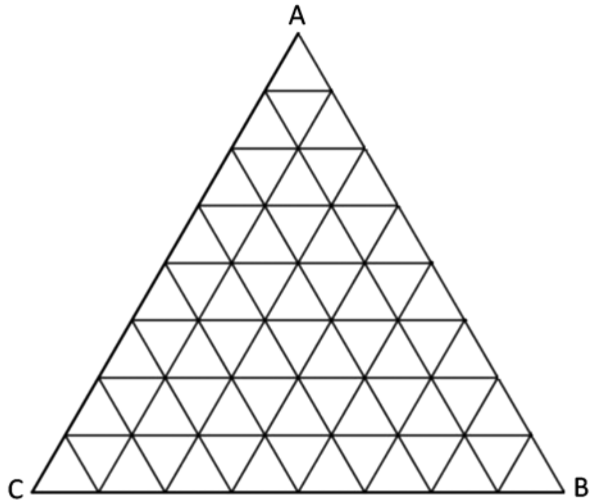


Figure 7. de Finetti diagram

The distances from a point to the sides of the triangle will constitute its "coordinates", as follows: the distance of a point to the sides AB, AC and CB will be the first, second and third coordinate respectively. Thus the triangular coordinates of points A, B and C are (0, 0, 8), (0, 8, 0) and (8, 0, 0) respectively. Also the coordinates of points H are (2, 1, 5) and those of point G are (4, 4, 0) as shown in Figure 8:

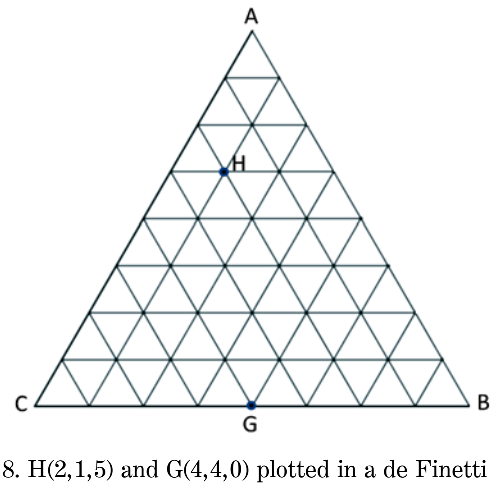


Figure 8. H(2,1,5) and G(4,4,0) plotted in a de Finetti diagram

Viviani's Theorem states that in an equilateral triangle, the sum of the distances from any interior point to the sides is equal to the length of the triangle's altitude. Thus, in our case, the sum of the three coordinates will always be 8, which makes this an appropriate precondition to represent different steps of the pouring of the jugs: the distance from AB will represent the amount of liquid in the 8-liter jug, the distance from AC the amount in the 5-liter jug and the distance from CB the amount in the 3-liter jug.

The initial stage of the jugs in the problem can be then represented by point C, and the final stage by point G(4, 4, 0).

A few observations are in place:

- Given the capacity of the jugs, the domain of our problem (i.e. the points whose three coordinates represent a possible situation for the three jugs) is not the whole triangle ABC (only one jug has the capacity of 8 liters) but the parallelogram highlighted in Figure 9.

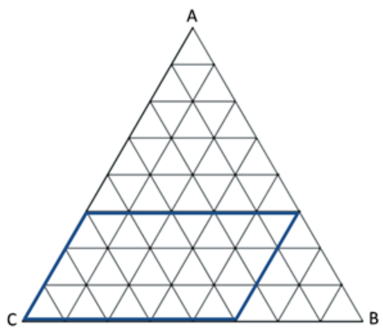


Figure 9. The domain of representation of the three jugs problem

- Any action of pouring leaves the content of one of the jugs unchanged, whereas it brings one of the other two jugs to its maximum or minimum capacity (full or empty). Thus only points on the perimeter of the parallelogram represent legitimate states. The change in the volume of liquid is represented in the diagram by moving along a "coordinate line", that is a line parallel to one of the sides of the triangle (because it leaves unchanged the contents of one jug), until we reach the border of the domain.

A solution would consist of departing from C, towards G, according to the two rules above. The solution found above by trial and error can be described as the following steps in the diagram (Figure 10):

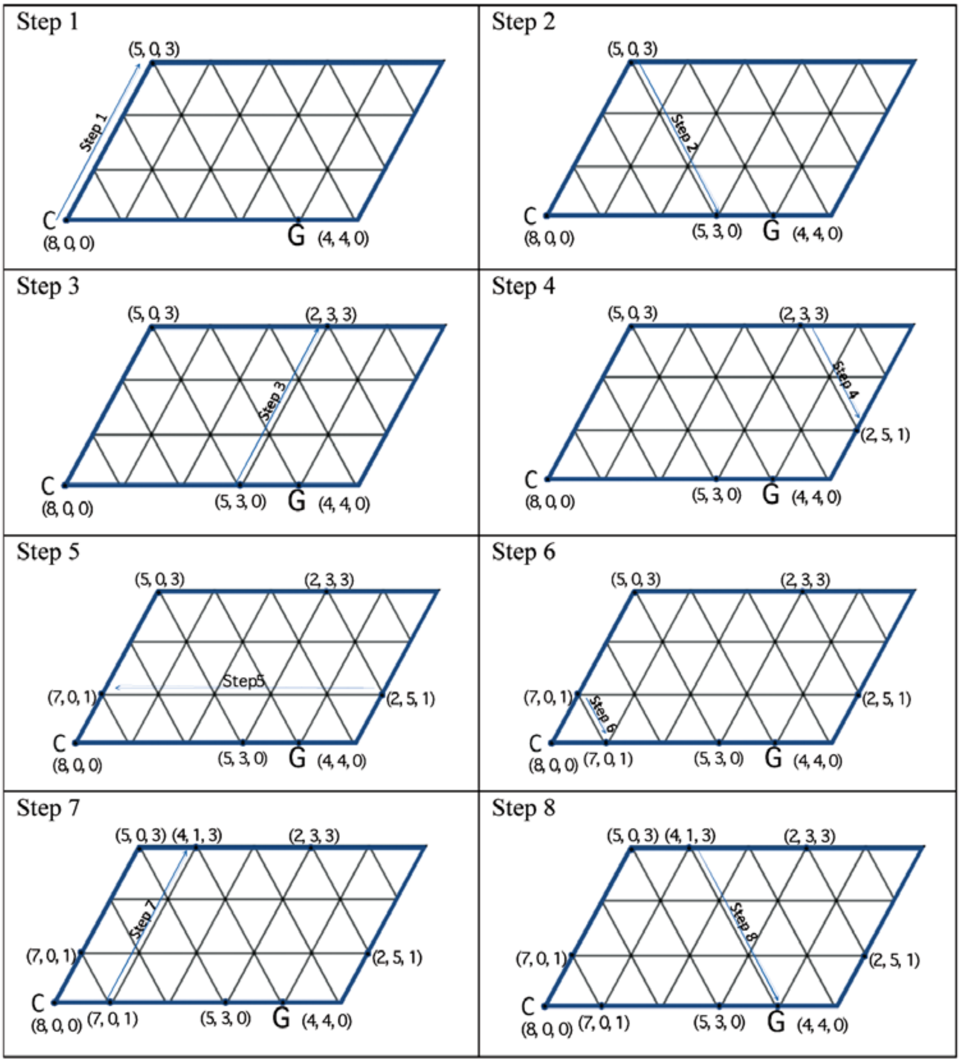


Figure 10. Steps in the systematic solution of the three jugs problem

The de Finetti diagram supports a systematic method for solving this and similar problems. It is easy to see, at any stage, what are possible moves and where is the goal. Also, it is immediately obvious when a move takes you back to a situation you have already been in. By this method one can find other solutions to the same problem, compare the number of steps, and make sure one exhausts the possibilities. Thus, in some cases, visual methods can and do achieve the generality and the systematicity we seek in mathematics.

5. – Visualization and Proof

"The mathematicians insisted that proofs are crucial to ensure that a result is true. The high school teachers demurred, pointing out that students no longer considered traditional, axiomatic proofs to be as convincing as, say, visual arguments." (Horgan, 1993, p. 103)

In a similar vein, Hanna (1990) argues for stressing explanatory proofs, whose main goal is not only to allow students to follow the deductive links in a chain, but also to provide insight, to support understanding and to make connections to previous experiences.

Much has been investigated about the teaching and learning of proof - see, for example, just two seminal undertakings: a special issue of ZDM (2008) and the 19th ICMI Study (Hanna & de Villiers 2012). In particular, the link between proofs and visualization has been studied and many beautiful examples have been put forward in a series entitled "proofs without words" (e.g. Nelsen 1993 and 2000).

The following is such a proof taken from Alsina and Nelsen (2006, pp. 39-40):

To prove that $S = |S_x - S_y|$ in the following Figure 11.

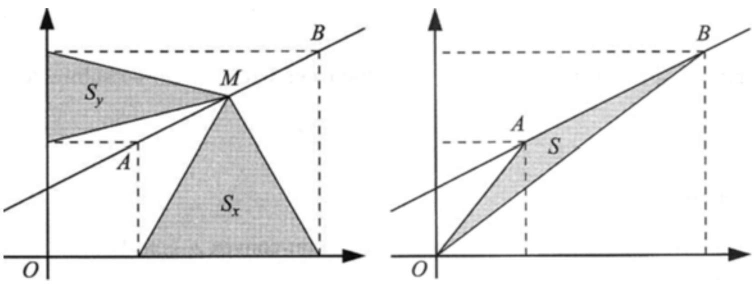


Figure 11. Statement of the theorem to be visually proven

The proof step by step is shown in Figure 12:

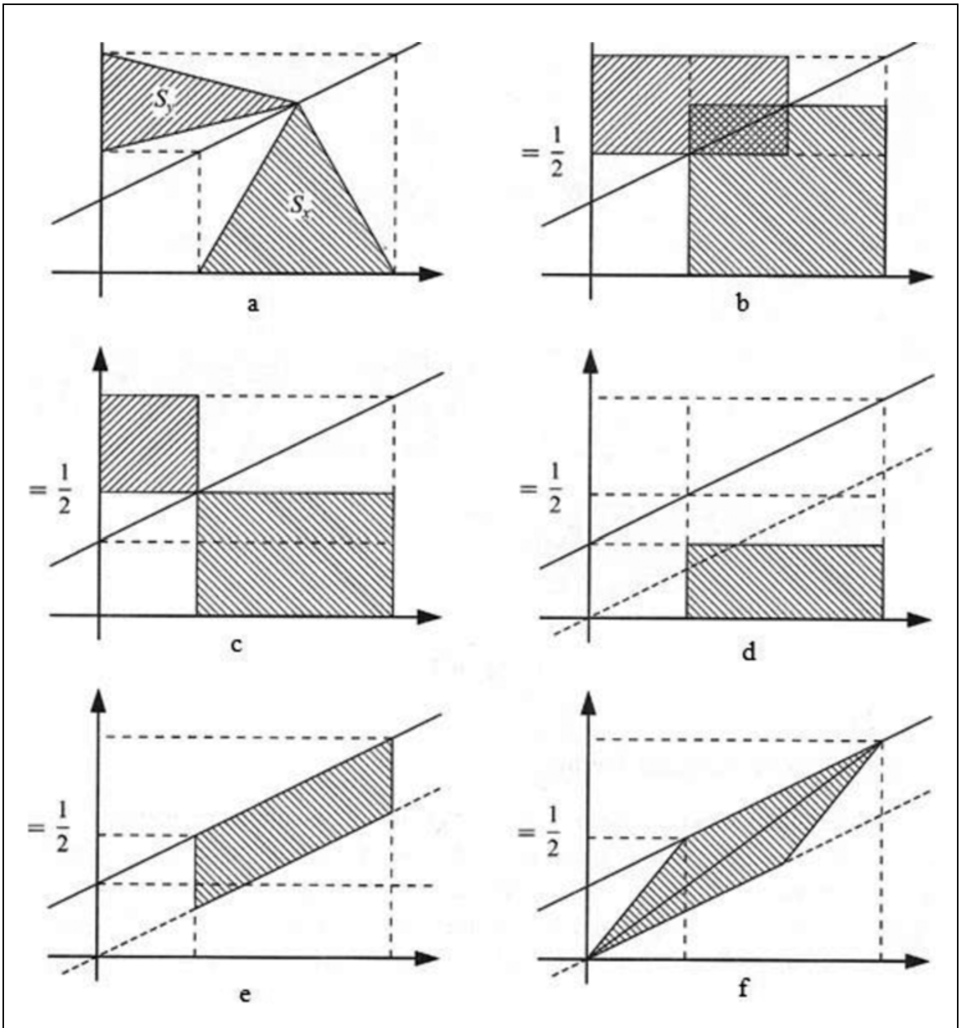


Figure 12. The visual proof step by step

This visual proof is based on the following:

From a to b: The areas of the rectangles are twice the areas of the triangles.

From b to c: The difference of areas is unchanged when we subtract equal areas from the two rectangles.

From c to d: We again subtract equal areas as follows: The given straight line bisects three rectangles into pairs of congruent right angle triangles. The shaded rectangle above the straight line is made up of the large triangle less the two small triangles. Similarly, the shaded rectangle below the straight line has the same area – it too is made up of the same large triangle less the two smaller ones.

From d to e: The rectangle has the same area as the parallelogram.

Indeed for many students, the visual transformation can be not only part of a deductive chain but also an explanatory sequence of steps that convincingly leads from the premise to the statement to be proven.

There is much to be discussed here from both the mathematical and the pedagogical points of view. However, I would like to call the attention to what may be considered an inaccurate description of these types of proofs when it is said of them that they are "without words". As an exercise, we invite the reader to carefully follow step by step the above proof and to notice the amount of verbal description (see above) needed (out loud or in our minds) in order to follow it.

Thus, in order to profit and learn from the potential explanatory power of visual proofs, they should be accompanied by verbal descriptions, comments, and arguments that make clear what is visually provided. We claim that in many cases, it is only during or after the verbal explanations are explicitly developed, that the global and convincing nature of these proofs becomes apparent and makes sense.

The complementarity between visually powerful displays of mathematical ideas and the verbal description or arguments produced to accompany them has been noticed and advocated by researchers (Zaskis et al. 1996, Mudaly 2010). This also became very apparent to us when working with visually impaired students. We concluded then that: "Verbal explicitness may avoid the too common phenomenon of two persons looking at the same object and seeing different things while being completely unaware of that" (Figueiras and Arcavi 2014).

In advocating the blending of the visual and the verbal ways of communication and of doing mathematics, we borrow an interesting idea from the field of the arts: *ekphrasis*. Simply stated, this construct refers to the verbal representation of a visual representation, which may add not only explicitness but also "rhetorical vividness" to what an image may depict.

6. – Conclusion

In this paper, we attempted to focus on several aspects of visualization which are still the object of widespread interest and study.

In particular we proposed tentative partial answers to some of Presmeg's questions through morals from rather simple examples, as follows.

Promoting the pedagogical strengths of visualization should first and foremost include a thorough search of enlightening examples which relate and are relevant to the classroom curriculum and which should involve alternative ways to approach concepts, problems and thinking strategies. The examples we brought are just a few illustrations which among other things should involve and stimulate students invocation of their common sense (the fraction calculation), should refine the visualization of what at a first glance can be considered as hard to visualize (two concave curves that cross each other three times), should present a systematic way to solve a problem (de Finetti diagrams) and should integrally blend the strengths of other representations (e.g. verbalizations of the visual). This will in itself support the practice of changing registers as natural and rewarding in terms of the sense making they may nurture.

The examples above can also serve as springboards for generalizing. For example, one can attempt to visualize $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}$, for several values of n, or one may attempt to use de Finetti diagrams for other values of the original jug problem.

These proposals need to be accompanied by long term empirical follow ups, in which visualization and its many functions (including bypassing the potential limitations and difficulties) are thoroughly scrutinized from the early years of mathematics education onwards.

These studies should be enhanced by a prolific collection of enriching examples that we need to continue developing as the repertoire upon which the many still unanswered questions should be approached.

REFERENCES

ALSINA, C. and NELSEN, R. (2006), *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

ARCAVI, A. (2000), The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* 52 (3), 215-241.

COXETER, H.S.M. and GREITZER, S.L. (1967), *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America.

EISENBERG, T. (2000), On torpedoes and non-intuitive problems, *Teaching Mathematics and its Applications*, 19 (3), 98-103.

FIGUEIRAS, L. and ARCAVI, A. (2014), A touch of mathematics: coming to our senses by observing the visually impaired, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 46 (1), 123-133.

HANNA, G. (1990), Some pedagogical aspects of proof, *Interchange*, 21 (1), 6-13.

HANNA, G. and DE VILLIERS, M. (2012), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*, Dordrecht: Springer.

HORGAN, J. (1993), The death of proof, *Scientific American*, October.

KIRRANE, D.E. (1992), Visual Learning, *Training and Development*, 46(9).

MITCHELL, W.J.T. (1994), *Picture Theory: Essays on Verbal and Visual Representations*, The University of Chicago Press.

MUDALY, V. (2010), Thinking with diagrams whilst writing with words, *Pythagoras, Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 71, 65-75.

PRESMEG, N. (2014), Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 46 (1), 151-157.

RIVERA, F.D., STEINBRING, H. and ARCAVI, A. (Guest Editors) (2014), Visualization as an Epistemological Learning Tool, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education.*

SMUDGE, S. (1999), *Junior Maths Medicine*, Dexter Graphics.

ZAZKIS, R., DUBINSKY, E. and DAUTERMANN, J. (1996), Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-456.

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science, Israele
e-mail: abraham.arcavi@weizmann.ac.il

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 161-164

Una giornata memorabile

FULVIA DE FINETTI

Non c'è forse giorno più adatto di quello del proprio compleanno per rendere omaggio a chi ti ha dato la vita, una vita colma di amore e di comprensione. Per questo, ed anche per cedere alle numerose sollecitazioni di pubblicare un mio scritto in questo numero monografico dedicato a Bruno de Finetti e l'insegnamento della matematica, ho deciso di farlo prendendo lo spunto da una lettera nella quale si racconta quali effetti produsse, nella famiglia di Bruno, la sua prolusione all'anno accademico 1948-49 dell'Università di Trieste.

Di quella prolusione troverete in questo stesso volume cosa ne scrisse Ludovico Geymonat e la maggior parte dei lettori troverà molto più importante conoscere cosa ne pensasse un filosofo della scienza piuttosto che leggere le reazioni di una bambina di nove anni, di fronte alla funzione vivificatrice della matematica.

Ebbene mi cimenterò nell'ardua impresa di dimostrare che, riuscire a suscitare tanta emozione in un pubblico non qualificato, è il segno di aver raggiunto il più alto risultato.

Non è la prima volta, questa, nella quale ricordo quella prolusione; lo feci già in occasione della cerimonia in omaggio a Bruno de Finetti nel ventennale della sua scomparsa, che si tenne a Trieste il 20 luglio 2005, nella sala del Ridotto del Teatro Lirico "G. Verdi". In quell'occasione paragonai l'*incipit* de *La funzione vivificatrice della matematica* (1) nientemeno che al famoso passo: "Scendeva dalla soglia d'uno di quegli usci e veniva verso il convoglio, una donna, il

(1) *Nulla, forse, quanto la matematica, dà ai più l'impressione di qualcosa di arido e freddo, necessariamente estraneo e sterile nei confronti del perpetuo agitarsi e rinnovellarsi delle correnti del pensiero e dello spirito.* (de Finetti A 1949a, p. 19).

cui aspetto rivelava una giovinezza avanzata ma non trascorsa ...” dei *Promessi Sposi* del Manzoni, che studiai l’anno dopo in preparazione dell’esame di ammissione alla scuola media. Ricordo che quel brano mi piacque tanto che nelle vacanze volli leggermi per conto mio tutto il romanzo. Oggi mi chiedo se quel brano mi piacque tanto perché il mio orecchio vi percepiva la stessa musicalità riscontrata nella prolusione e mi chiedo anche, ahimè senza possibilità di risposta, se per caso mio padre a quel brano si fosse in qualche modo ispirato. In alcuni suoi scritti si trovano numerosi riferimenti a passi dei *Promessi Sposi*, ma non a questo.

Ma veniamo alla lettera che mi dà l’occasione per tornare a raccontare di quella memorabile giornata. È la lettera che, all’indomani, mia mamma scrisse alla “Gentile Signora Elvira”, la mamma di Bruno, per farle “un po’ di cronaca [...] circa il discorso di Bruno”:

> *Le avrebbe fatto piacere vedere Bruno dapprima un po’ commosso, proseguire sempre più spedito, seguito con convinta attenzione dal pubblico e infine applaudito con calore. Il discorso* [...] *è veramente bello e ne avevo perciò predetto il successo. Naturalmente è venuta anche Fulvia che già a Pisa si era rammaricata che il papà non facesse nessuna comunicazione, ed è rimasta tutta intenta durante la lettura imprimendosi bene in mente un pezzo del principio e ripetendolo con una certa enfasi a casa, per dar modo alla presta servizi di conoscere l’avvenimento e raccontando (cosa che ci ha fatto ridere di cuore) che era vestito con la tonaca, non ricordando bene la parola giusta. Voglio rassicurarla che Bruno ha parlato forte e chiaro e nessuna parola è andata perduta. Di questo passo diventerà una specie di “Giove tonante”.*

Il motivo di questa rassicurazione mi è stato chiaro avendo sentito da alcuni suoi studenti della facoltà di Economia e Commercio di Roma che, per riuscire ad udire la sua voce in un aula gremita, si contendevano i posti nei primi banchi. Doveva essere un fatto noto da sempre alla madre, e da ciò discende la rassicurazione che in quell’occasione Bruno era riuscito a superare questo suo limite vocale.

La lettera continua con la descrizione dei festeggiamenti per il successo – “una bella cenetta” – e termina con “i saluti e a mia volta le congratulazioni per questo suo capolavoro di figlio! Renata”.

Fulvia de Finetti con il padre Bruno, Torino 1949

Su quella stessa lettera Bruno aggiunse di suo pugno:

Sembra anche a me che sia andato tutto bene, e anzi avevo fiducia già prima perché contrariamente al solito, che sono scontento di ciò che ho scritto, di questo discorso sono rimasto soddisfatto da subito.

Ritengo interessante poter conoscere anche il parere dell'autore.

Se mi è concesso vorrei riportare quanto ne disse al convegno *Ricordo di Bruno de Finetti Professore nell'Ateneo triestino 30-31 maggio 1986* (2) il professor Giacomo Borruso, Preside della Facoltà di Economia e Commercio:

È una relazione veramente brillante, eccezionalmente brillante, che meriterebbe di essere riportata integralmente; io evidentemente non lo farò e mi limiterò alla citazione finale in cui il prof. de Finetti riprende la similitu-

(2) *Atti del Convegno "Ricordo di Bruno de Finetti Professore nell'Ateneo triestino" Trieste 30-31 maggio 1986*, Trieste: Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali "Bruno de Finetti", Pubblicazione n. 1, p. 13.

> *dine, del Whitehead, ove la matematica è paragonata ad Ofelia, essenziale nell'opera shakespeariana, molto seducente e un po' folle, ma è – dice il prof. de Finetti* – "nel nostro caso, la follia apparente di chi costruisce per l'avvenire, precorrendo ciò che ad altri non è ancora dato intravvedere. La matematica sgretola, scava, corrode con la sua critica le certezze di oggi il cui crollo ci può atterrire, ma essa sta già tessendo, spesso anche senza rendersi conto di tale destinazione, la tela di ragno della nuova, provvisoria certezza". *Mi piace moltissimo questa frase e mi pare di poter vedere in quella frase "costruisce per l'avvenire, precorrendo ciò che ad altri non è ancora dato intravvedere" una sorta di cenno autobiografico del professor de Finetti, un professore talmente avanzato rispetto ai suoi contemporanei da non essere in alcuni casi compiutamente e correttamente interpretato.*

Spero così di aver assolto il mio compito di umile cronista.

Fonti

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 167-236

Dialoghi sull'insegnamento della matematica. Lettere inedite

LIVIA GIACARDI e ERIKA LUCIANO

I meet again the question about my attitude being philosophical, and your pedagogical. I add (in the same spirit of what I said formerly) that in my opinion my attitude is also (and perhaps chiefly) pedagogical.

(de Finetti a Pólya, lettera 25)

1. – Introduzione

I *Bruno de Finetti Papers,* conservati negli Archives of Scientific Philosophy dell'Università di Pittsburgh (d'ora in avanti ASP *BdFP*), costituiscono un ricco e prezioso zibaldone di documenti inediti – lettere, appunti e abbozzi di lavori – purtroppo non ancora esplorato quanto meriterebbe. Nella scelta delle lettere che abbiamo deciso di pubblicare siamo state guidate da due obiettivi principali: presentare una testimonianza del dialogo fra de Finetti e alcuni importanti uomini di scienza – Frola, Geymonat, Pólya, Prodi e Tricomi – e, nello stesso tempo, fornire un corollario inedito ai saggi che precedono, offrendo una ulteriore evidenza dell'importanza che egli attribuì all'insegnamento della matematica.

Le prime lettere, risalenti alla fine degli anni Quaranta, documentano i rapporti fra de Finetti, Ludovico Geymonat (1908-1991) ed Eugenio Frola (1906-1962), due fra i padri fondatori del Centro di Studi Metodologici, nato a Torino nell'estate del 1945 per iniziativa di un gruppo di studiosi (1) animati da una profonda esigenza di rinnovamento sia culturale, sia sociale. Lo scopo che si prefiggevano era la revisione critica di discipline già consolidate al fine di migliorare gli strumenti di lavoro e "di giungere, se

(1) Nicola Abbagnano, Piero Buzano, Eugenio Frola, Ludovico Geymonat, Prospero Nuvoli e Enrico Persico, cfr. Giacardi, Roero 1997-1998.

possibile alla creazione di nuovi strumenti concettuali, in particolare attraverso l'analisi del linguaggio [...] e lo sfrondamento dei problemi fittizi che sorgono [...] dall'uso improprio o insufficientemente definito del linguaggio stesso" ([2]). Il substrato filosofico che caratterizzava il Centro era quel particolare atteggiamento nei confronti della realtà che Geymonat denotava con l'espressione di *neorazionalismo*. Per il filosofo *neorazionalista*, la razionalità non deve essere "studiata a priori come facoltà a sé, generale ed astratta", ma piuttosto "attraverso le sue concrete realizzazioni, cioè attraverso le conquiste della scienza moderna" ([3]), respingendo pertanto sia le formule di tipo crociano, sia quelle di natura metafisico scientifica. È dunque naturale che de Finetti trovasse un terreno consono alla sua visione epistemologica, già ben tratteggiata fin dal 1934, quando aveva scritto *L'invenzione della verità* (de Finetti A 2016 [1934]) ([4]) dove delineava quali, a suo parere, avrebbero dovuto essere i rapporti fra scienza e filosofia e denunciava "l'illusorietà e la dannosità delle concezioni filosofiche diverse dall'empirismo" (p. 64). Mentre "la Scienza allarga il campo dei fatti conosciuti – sostiene de Finetti – arricchendo la rete delle relazioni scorte fra essi, la Filosofia restringe il campo delle verità ammesse senza discussione, arricchendo la rete delle spiegazioni critiche e spingendola sempre più in profondo" (p. 70). Vale a dire, da un lato si ha lo sviluppo costruttivo del pensiero scientifico, come per l'albero quello della chioma, per usare la suggestiva immagine di de Finetti, e dall'altro l'affondarsi sottoterra delle radici cioè, fuor di metafora, l'analisi critica dei principi, dei concetti e dei metodi.

Il contatto fra il nostro matematico e il Centro di Studi Metodologici ebbe origine dall'invio ([5]) a Geymonat, da parte di Fernando Giaccardi Giraud (1903-1970), di una copia della prolusione pronunciata da de Finetti a Trieste il 5 dicembre del 1948 sulla funzione "vivificatrice" della matematica (de Finetti A 1949a, qui Appendice 1. 2). Geymonat lesse quel discorso nella notte del capodanno 1949 e, condividendone appieno lo spirito, propose di invitare il collega a tenere una conferenza a Torino.

A partire dall'anno accademico 1949-1950 de Finetti divenne membro onorario del Centro e nel marzo 1949 tenne presso il Centro di Studi Metodologici la conferenza *Visione unitaria e visioni frammentarie sul*

([2]) Leoni 1954, p. 13.
([3]) Geymonat 1953, p. 33.
([4]) Cfr. Bruno, Giorello 2016.
([5]) Lettera 1.

ruolo delle probabilità nelle applicazioni (de Finetti A 1950), suscitando un vivace dibattito sulla sua visione soggettiva della probabilità, di cui si trova eco nelle lettere della primavera del 1949 ([6]). Geymonat, per quanto preferisse alla concezione definettiana quella di Wittgenstein e di Waismann ([7]), era consapevole dell'importanza della questione tanto che tornò sull'argomento nella conferenza *Considerazioni metodologiche sul concetto di probabilità*, che tenne in occasione del Congresso di studi metodologici svoltosi a Torino a fine 1952 (Geymonat 1954). Al congresso partecipò anche de Finetti che trattò il tema *La nozione di «evento»*. (de Finetti A 1954c)

Al di là dell'interesse per i fondamenti della probabilità, Geymonat condivideva con de Finetti le preoccupazioni per la "lacerazione" fra cultura umanistica e cultura scientifica (de Finetti A 1965a, p. 120), e la convinzione del valore profondamente formativo della matematica, sostenuta, fra l'altro, nel suo intervento durante il convegno che si tenne presso il Centro europeo dell'educazione a Villa Falconieri nel marzo del 1964, cui parteciparono entrambi. Nel resoconto dei lavori si nota come alle affermazioni dell'uno facessero da contrappunto le parole dell'altro: "se l'insegnamento della matematica – affermava Geymonat – si preoccupa di illustrarne la reale complessità e il profondo dinamismo [...] allora esso diventa uno strumento fondamentale per la formazione dell'uomo, per lo sviluppo del suo senso critico, della sua fiducia nella ragione" (Geymonat 1964, p. 16); "l'insegnamento della matematica – sosteneva a sua volta de Finetti – appare ostico ed arido alla maggior parte dei giovani proprio perché non si cerca, ma anzi si evita, di far comprendere il *senso* della matematica come strumento che «fa presa sulle cose», anziché come insulso sproloquio per costruire perfetti arzigogoli nel vuoto". (de Finetti A 1964c, p. 35)

I contatti fra de Finetti e il Centro di Studi Metodologici proseguirono fino al 1972 quando di fatto quell'istituzione aveva ormai esaurito la sua fase più vitale. Nel 1954-1955 egli fu nominato membro effettivo, nel 1956-1957 fu ospite di un incontro promosso dal Centro sui rapporti fra eco-

([6]) Lettere 2-7. De Finetti diede la prima esposizione completa, sia dal punto di vista concettuale, sia da quello tecnico della sua visione soggettiva della probabilità nel 1935 a Parigi, in cinque conferenze all'Institut Henri Poincaré, pubblicate due anni dopo: La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, VII [1937], 1-68. Trad. inglese *Studies in subjective probability*, a cura di H. E. Kyburg, H. E. Smokler, London, 1964.

([7]) Cfr. lettera 4, note 21 e 22.

nomia e matematica ([8]), e il 14 marzo 1972 partecipò a un'importante tavola rotonda su *Concezione soggettivistica della probabilità e logica induttiva*, presieduta da Geymonat. Il tema della probabilità secondo la visione definettiana compare anche più volte in conferenze e discussioni a tema organizzate dal gruppo torinese, soprattutto attraverso gli interventi di Piero Buzano ([9]).

Le attività del Centro di Studi Metodologici sono pure occasione di incontro fra de Finetti e Francesco Tricomi (1897-1978), professore di Analisi all'Università di Torino. Entrambi parteciparono al primo Congresso di metodologia organizzato a Torino nel 1952 e Tricomi tenne in quell'occasione la conferenza, *Intuizione e logica nella scoperta matematica* (Tricomi 1954), non risparmiando accenti polemici ai recenti sviluppi della matematica astratta. È proprio questo il tema delle lettere da lui scambiate con Bruno de Finetti. Tricomi era, infatti, decisamente avverso alla matematica moderna ([10]):

> [...] *non posso invece nascondere* – egli sostiene – *che alcuni recenti sviluppi della matematica astratta o, meglio, astrattissima, mi lasciano assai perplesso e temo che non si riveleranno mai veramente fecondi. E ciò non perché essi siano attualmente privi di applicazioni concrete, bensì per la loro stessa natura intrinseca, e cioè pel fatto che, sotto una forma di alta generalità e un linguaggio e un simbolismo insolito, talvolta si nasconde in essi una grande scarsità di pensiero e si può perfino temere che ci sia dentro del* bluff. [...]. *La matematica viva è ben altro! Non è un bizantino gioco di dimostrare faticosamente cose che sono, o almeno sembrano, evidenti per se stesse. E invece un'ardua lotta contro l'ignoto e contro l'errore in cui riusciamo talvolta a strappare qualche vittoria, piccola o grande che sia, a patto di essere modesti, cioè di non disdegnare alcuno dei mezzi a nostra disposizione, siano essi razionali o sperimentali, che ci sono tutti parimenti indispensabili* ([11]).

([8]) Cfr. Nuvoli 1958, p. 16.

([9]) Cfr. per esempio le discussioni seguite alla conferenza di Buzano, *Le decisioni nelle scienze esatte* (11 gennaio 1958), a quella di Geymonat, *Convenzione e non convenzione nella dimostrazione* (24 gennaio 1959), e a quella di *Fausto Penati, La dimostrazione in campo medico-biologico* (6 giugno 1959), o ancora gli interventi nella riunione di studio su *Linguaggio e introspezione* (30 aprile 1960) riportati, sulla base di documenti inediti, in Paolini Merlo (in preparazione).

([10]) Cfr. lettera 10 e lettera 15. In merito alla posizione di Tricomi nei confronti della matematica moderna cfr. per esempio Tricomi 1967, pp. 112-113, 152, 157, 158, 162-163.

([11]) Tricomi 1954, p. 252 e 254; cfr. anche Tricomi 1967, p. 112: "In questa conferenza risuonano, per la prima volta nei miei scritti, degli accenni polemici (molto intensificatisi in epoca successiva) contro le moderne tendenze della matematica (e non solo della matematica!) che non mi sentivo di incoraggiare".

La posizione di de Finetti era più articolata. Nella lettera del 17 maggio 1964, che qui pubblichiamo, egli faceva espressamente riferimento a una memorabile conferenza tenuta da Tricomi a Siracusa ([12]), che paragonava a una "esplosiva eruzione"; pur augurandosi che essa desse origine a una "colata di lava fiammeggiante e purificatrice", affermava in quell'occasione:

> *Ritengo di essere favorevole in misura maggiore di quanto tu dimostri di esserlo a sostituire cose vecchie con cose nuove (anche bourbakiste), però sempre e soltanto nello spirito in cui tu stesso su alcuni esempi le approvi. Ad esempio, far uso sistematicamente della nozione di insieme non per introdurre cose pesanti ed inutili ma per parlare in modo più intuitivo di angoli, cerchi, rette, poliedri e ogni altra figura come insieme.* (lettera 10)

Se è vero che de Finetti concordava con René Thom nel porre l'accento sul 'significato' in matematica e nell'affermare che l'enfasi posta dai modernisti sull'assiomatica è non solo un'aberrazione dal punto di vista pedagogico, ma anche da quello puramente matematico (de Finetti A 1973l, pp. 18-19), pur tuttavia egli rilevava:

> *Il ruolo principale per una radicale semplificazione e revisione dello strumentario matematico e della visione, resa unitaria, di quasi tutti gli argomenti, spetta senza dubbio alla nozione di sistema (o spazio) lineare (affine) da introdursi immediatamente ed esclusivamente in ogni occasione.* [...]. *Il tutto, beninteso, in forma intrinseca (senza coordinate o sistemi di riferimento); solo successivamente* [...] *si può notare che i punti (e i vettori) di un piano, spazio, ecc., si possono rappresentare come coppie, terne, n-ple, di numeri reali.* [...]. *La geometria di Euclide, tanto innaturale e pesante causa la mancata distinzione iniziale tra proprietà affini e metriche, può quindi essere lasciata in disparte.* (de Finetti A 1965a, pp. 123-124)

Questa visione fu più volte sostenuta da de Finetti: per esempio, si veda l'appendice all'articolo (de Finetti A 1964a, pp. 100-114) dove egli suggerisce la struttura per un libro di testo, da cui emerge come pensasse di introdurre intuitivamente, già rivolgendosi a ragazzi di 11, anni le notazioni e le operazioni più elementari dell'algebra lineare per vettori; oppure si rileggano i suoi suggerimenti alle proposte di nuovi programmi liceali e le 'tracce esemplificative' (de Finetti A 1967a, pp. 124-153); oppure ancora, a un livello superiore, si consideri l'approccio adottato in certi capitoli del libro *Matematica logico intuitiva* (de Finetti L 1944).

Riferendosi espressamente a Tricomi, de Finetti osservava:

([12]) Cfr. lettera 10, nota 45.

Riguardo *a* TRICOMI *(diverse conferenze: Siracusa, Cagliari, Palermo): i punti precedenti possono chiarire come, paradossalmente, pur essendo favorevole al 'nuovo', io condivida quasi completamente le preoccupazioni e avversioni di* TRICOMI. *IO trovo vantaggioso appoggiarsi su concetti più potenti e unitari per alleggerire al massimo le pedantesche e abominevoli sovrastrutture formaliste frapposte tra l'intuizione pratica di problemi concreti e le tecniche da utilizzare per inquadrarli e risolverli.* (de Finetti A 1966c, pp. 10362-10363) ([13])

Con una delle sue folgoranti metafore, riguardo alla matematica moderna egli affermava:

Per spiegarmi con un esempio, mi trovo nello stato d'animo di chi apprezza le automobili se servono a procedere speditamente, ma non l'effetto contrario cui dànno luogo se il loro uso sregolato conduce a bloccare tutto il traffico in un ingorgo, dove esse servono soltanto per far girare a vuoto il motore consumando benzina e ammorbando l'aria. (de Finetti A 1966c, p. 10363)

Più esplicitamente, in una lettera alla direzione del *Periodico di matematiche*, de Finetti distingueva tre aspetti in relazione al movimento bourbakista: "*il panorama della matematica secondo Bourbaki,* il ruolo prevalente che esso dà alla *formalizzazione*, l'introduzione di *metodi assiomatici formalizzati ed astratti come base dell'insegnamento*" e concludeva "pienamente SI al primo, piuttosto NO al secondo, decisamente NO al terzo". (de Finetti A 1965d, p. 337)

La consonanza con il pensiero di Tricomi è invece totale quando de Finetti insiste sull'importanza del momento induttivo e dei processi euristici. Voler bandire l'intuizione, egli sostiene, "sarebbe come cavarsi gli occhi perché esistono le 'illusioni ottiche' senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente" (de Finetti A 1966c, p. 10362), e ancora, in un articolo dedicato proprio alla matematica moderna nell'insegnamento secondario, ribadisce che "il ragionamento deduttivo non è *tutta* la matematica" (de Finetti A 1968d, p. 1) ([14]). Lo conferma anche la seconda lettera che qui pubblichiamo ([15]) dove si fa riferimento ai commenti di Tricomi a *Il "saper vedere" in Matematica*, come pure altri articoli nei quali de Finetti richiama il punto di vista del collega e, fra l'altro cita (de Finetti A 1965e, p. 407) e commenta (de Finetti A 1965d, pp. 336-338) passi di alcune sue lettere.

([13]) Cfr. lettera 10, nota 45.
([14]) Sulla matematica moderna si veda anche de Finetti A 1978f.
([15]) Lettera 15.

Nel primo di questi scritti il nostro matematico trascrive (de Finetti A 1965e, pp. 412-414), evidenziandone alcune frasi, la lettera di Giovanni Prodi (1925-2010) del 20 giugno 1965, che riproduciamo nel seguito ([16]), dove quest'ultimo riconosce l'influenza che i lavori di de Finetti avevano avuto sul suo modo di pensare in materia di insegnamento, apprezzando in particolare lo "sforzo di esemplificare, di tracciare linee concrete per un insegnamento della matematica veramente vivo e attuale". Ciò che de Finetti sottolinea nella lettera del collega, definendolo "un guanto di sfida" (*Ivi*, p. 414), sono le critiche che Prodi indirizza a certi professori, soprattutto universitari:

> *in questo momento sono preoccupato* – scrive Prodi – *più che dei conservatori (i quali fatalmente dovranno presto arrendersi) di certi innovatori a schema fisso. C'è un modo di innovare che costa poco sforzo e che è caratteristico, purtroppo, di molti professori universitari: consiste nel considerare l'insegnamento della propria materia (sia a livello secondario che universitario) solo come una introduzione al proprio settore di ricerca* ([17]).

Per esemplificare come "l'insegnamento possa diventare una caricatura della ricerca", Prodi menziona il caso della geometria algebrica che qualche, decennio prima, "generava, a livello universitario, un sottoprodotto decisamente brutto: lo studio delle curve algebriche (parlo di quelle stereotipate curve "da concorso", che tuttora imperversano). Il sotto-sotto-prodotto a livello liceale era costituito da quelle noiose e formali discussioni dei problemi di secondo grado (in cui il parametro adombrava la seconda variabile dell'equazione)".

La lettera a de Finetti è del 1965; Prodi insegnava all'epoca all'Università di Pisa da due anni e, come risulta anche dal *postscriptum*, si interessava già di problemi connessi con l'insegnamento della matematica ([18]). Programmava infatti di occuparsi della sezione didattica di un seminario organizzato dalla Scuola Normale superiore, dedicato anche alla logica e alla storia della matematica ([19]). Nel 1968 egli sarebbe entrato a far parte della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica presieduta all'epoca da Luigi Campedelli e di cui era membro

([16]) Lettera 11.

([17]) Un passo della lettera verrà nuovamente inserito da de Finetti come pezullo in *Periodico dei Matematiche,* (IV) 50, nn. 1-2, 1972, 109.

([18]) Si rimanda a Mariotti 2011.

([19]) Infatti nell'anno accademico 1962-1963 fu istituito, sotto la direzione di Francesco Cecioni, con la collaborazione di Ennio De Giorgi e Landolino Giuliano, il "Seminario di logica, critica e didattica matematica, cfr. lettera 11, nota 52.

anche de Finetti. Ne sarebbe divenuto presidente nel 1980, impegnandosi nell'organizzazione di convegni, favorendo i contatti con ricercatori in didattica di livello internazionale, quali Efraim Fishbein e Zofia Krygowska, e collaborando con il Ministero della Pubblica Istruzione ([20]).

Le riflessioni sviluppatesi a partire dagli anni Sessanta iniziarono a prendere forma nel 1975, quando Prodi avviò la sperimentazione nelle scuole, che lo portò a elaborare il progetto *Matematica come scoperta* ([21]). L'approccio adottato da Prodi era "per problemi", una metodologia didattica che consiste nel partire da situazioni problematiche atte a conferire un significato ai concetti matematici che si vogliono introdurre, per poi formalizzarli. Egli metteva però in guardia dal fraintendere tale approccio:

> *la locuzione "insegnamento per problemi" può prestare il fianco a fraintendimenti, come se si volesse indicare un insegnamento estemporaneo, privo di un'ossatura teorica, in balia di stimolazioni occasionali: ciò che è quanto mai lontano dalla mia proposta!* (Prodi 1977, p. 3)

Il frutto delle sperimentazioni, che via via coinvolsero più insegnanti e più sedi universitarie, furono quattro volumetti pubblicati dalla casa editrice D'Anna (Prodi 1975 vol. 1 e 2, Prodi 1977, 1978). Ancora prima che apparisse il primo di questi, de Finetti, allora presidente della Mathesis e direttore del *Periodico di Matematiche*, presentò le proposte di Prodi, elogiandole perché:

> [...] *i giovani acquistano il senso di che cosa sia e di come e perché possa interessare e giovare la matematica se intesa come strumento per affrontare problemi reali e non come mero strumento di tortura, come arida congerie di astruserie non giustificate agli occhi dei discenti.* (de Finetti A 1975a, p. 29, cfr. anche pp. 42-43)

Per quanto riguarda la geometria, l'impostazione metodologica adottata da Prodi è quella assiomatica (delle trasformazioni), con preferenza per

([20]) Si vedano gli interventi M. Ferrari, A. Marino, M.A. Mariotti, M. Menghini e l'intervista di N. Lanciano a M. Pellerey sul sito del Convegno organizzato nel 2010 dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dedicato a Prodi (ATTI CIIM 2010). Si vedano anche gli articoli di A. Ambrosetti, A. Marino, M. A. Mariotti e di G. Prodi stesso apparsi su *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI*, 4.3, 2013.

([21]) Cfr. Prodi 1975 vol. 1 e 2, Prodi 1977, Prodi 1978. Il progetto subì una evoluzione e sfociò nei volumi *Scoprire la matematica* curati da Prodi con la collaborazione di A. Bastianoni, M. Berni, D. Foà, L. Mannucci, L. Prodi, M. T. Sainati, M. Sciolis, N. Tani, pubblicati da Ghisetti e Corvi nel 2003. Cfr. anche Prodi 2003.

un'assiomatica di tipo metrico piuttosto che di tipo affine, perché la prima è quella che maggiormente conserva il "sapore geometrico" (Mariotti 2011, pp. 415-420), una scelta, questa, che rese difficile la diffusione del progetto nelle scuole. Egli stesso ne era consapevole, tanto da scrivere: "molte delle difficoltà che essa presenta dipendono dal fatto che tutte le proprietà, ivi comprese quelle che si enunciano in termini analitici, devono essere dedotte dagli assiomi posti all'inizio" (Prodi 1978, *Introduzione*) ([22]). Tale approccio lo differenziava parzialmente da de Finetti che, nell'articolo sulle proposte per la matematica nei nuovi licei, affermava :

> [...] *la distinzione risiede nel fatto che il 'punto di attacco' (la geometria affine) consente di prendere come intelaiatura, fin dalla presentazione iniziale, la struttura di* sistema lineare *(spazio vettoriale), senza esser mai più obbligati a cambiare cavallo. Per passare alla geometria metrica basta introdurre un 'prodotto scalare', per la geometria analitica basta scegliere un riferimento fisso; volendo scendere alla geometria proiettiva basta pensare alla stella di rette che proietta lo spazio da un punto esterno.* (de Finetti A 1967a, p. 113)

Per contro molti altri aspetti accomunavano i due matematici: la valorizzazione della componente euristica, la centralità del 'significato', la didattica per problemi, l'importanza annessa alla teoria della probabilità nell'insegnamento secondario, l'impegno nella organizzazione delle gare matematiche e il desiderio "di fare qualcosa di concreto prima che fosse troppo tardi", anche per quanto riguardava l'insegnamento universitario ([23]). A questo proposito de Finetti, scrivendo all'amico, auspicava che fossero i matematici 'puri' a impegnarsi in prima persona:

> [...] *sotto certi aspetti, le mie opinioni possono apparire viziate dal fatto che sono un "matematico applicativo": penso sarebbe opportuno che fossero soprattutto dei matematici puri ma ragionevoli a contrapporsi agli analoghi specialisti troppo spinti nel temuto senso di tendenze antididattiche (algebristi contro algebristi, geometri contro geometri, analisti contro analisti).* (lettera 12)

L'approccio per problemi adottato da Prodi era fortemente ispirato ai lavori di George Pólya ([24]) (1887-1985), in particolare ai volumi *How to*

([22]) Cfr. anche Prodi 1975, vol. 1, capp. 13, 14, 15, in particolare pp. 178-188.
([23]) Lettera 11.
([24]) Cfr. per esempio Prodi 1977, p. 3.

solve it (Pólya 1945) e *Mathematical discovery* (Pólya 1962, 1965), che furono tradotti in italiano rispettivamente nel 1967 e nel 1970, 1971. L'interesse e l'apprezzamento per l'opera di Pólya sono un altro dei tratti che accomunano Prodi e de Finetti.

Matematico ungherese autore di contributi rilevanti alla teoria dei numeri, all'analisi numerica e alla teoria delle probabilità, Pólya è ben noto anche per l'apporto significativo della sua ricerca nel campo della didattica della matematica. Il duplice interesse per la probabilità e l'insegnamento non potevano che attrarre de Finetti. Il loro primo incontro molto probabilmente avvenne nel 1928 a Bologna durante il Congresso Internazionale dei Matematici, cui presero entrambi parte, presentando una comunicazione. Nel 1951 de Finetti scrisse un articolo dove, prendendo spunto da un lavoro in cui Pólya delineava le caratteristiche di una "logica del plausibile", ricollegava le idee del matematico ungherese a una sua impostazione assiomatica del calcolo delle probabilità, basata su confronti qualitativi (de Finetti A 1951). La prima lettera che riportiamo qui risale al dicembre del 1961. Pólya comunica a de Finetti di essere rimasto colpito dal noto saggio *Does it make sense to speak of 'good probability appraisers'* del 1962 ([25]) e auspica di poter proseguire il dialogo a distanza. Gli scambi epistolari riprendono, almeno sulla base dei documenti fino ad ora ritrovati, nel 1970 e toccano soprattutto i problemi dell'insegnamento della matematica, con particolare riferimento alla realizzazione di un film didattico avente come protagonista il pupazzo "genietto Giorgetto", ispirato a Polya stesso, e al progetto per un altro film dedicato a Galileo ([26]).

La sintonia fra la visione didattica di de Finetti e quella di Pólya emerge già nella prima edizione del 1967 di quel piccolo capolavoro che è *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e Appendice 1.4). L'approccio per problemi, tipico del matematico, ungherese è richiamato nel capitolo intitolato *Come riflettere su di un problema* (de Finetti L 1967, p. 8, cfr. Appendice 1.4) e le principali opere di Pólya – *Mathematics and Plausible Reasoning*, *How to solve it?*, *Mathematical Discovery* – sono citate e commentate nella Nota Bibliografica (*Ibidem*, pp. 66-67), dove il loro autore è definito come

([25]) Cfr. Lettera 8, nota 38.

([26]) Lettere 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 31 e relative note. Cfr. anche F. de Finetti 2010, p. 18, e Lucchini 2010.

"impareggiabile per genialità e infaticabilità nell'esaminare e illustrare le esigenze di un'intelligente educazione nello spirito della matematica." (*Ibidem*, p. 66).

In *Come risolvere i problemi di matematica* (Pólya [1945] 2016, pp. 9-11), come è ben noto, Pólya analizza le fasi della risoluzione di un problema: capirlo; programmare un piano di risoluzione cercando i legami tra dati e incognita e introducendo eventuali problemi ausiliari; eseguire il piano verificando ogni passaggio; esaminare la soluzione per appurare se è accettabile e se il risultato e il procedimento possono servire in casi analoghi. Soprattutto, il matematico ungherese valorizza il momento euristico e l'attività del congetturare, invita a trarre ammaestramenti dal fallimento – che può suggerire cambiamenti di approccio – e sottolinea l'importanza della flessibilità. Egli scrive:

> *I said that it is desirable to teach guessing, but not that it is easy to teach it.* [...]. *Still, it is not impossible to teach guessing.* (Polya 1954, p. 159)

La traduzione italiana di questa frase fu ripresa da de Finetti nell'articolo sulle proposte per la matematica nei nuovi licei (de Finetti A 1967a, p. 93) e ancora, nella sua versione inglese, durante il Convegno della C.I.I.M. (Viareggio, 24-25-26 ottobre 1974) (de Finetti A 1974a, p. 33). Il richiamo a Pólya è un motivo ricorrente negli scritti del nostro matematico dedicati alla didattica, soprattutto da quando egli incominciò a dirigere il *Periodico di Matematiche*. Fin dall'apertura della V serie della rivista, da lui inaugurata, de Finetti presentò nell'articolo *I messaggi di Jean Piaget e di George Pólya al Congresso di Exeter di Mathematical Education* (*Periodico di Matematiche,* (V) 49, 1972, nn. 1-2, pp. 11-14) la traduzione di varie parti degli interventi di Piaget e di Pólya al Second International Congress on Mathematical Education (Exeter, 29 August-2 September 1972) e, in quello stesso anno, invitò il collega ungherese a Roma a tenere una conferenza intitolata *Deviner et Démontrer.* Un resoconto piuttosto ampio di questa fu inserito da de Finetti nel *Periodico di Matematiche*. Illustrando l'esempio scelto da Polya – la scoperta della relazione di Euler per i poliedri – egli evidenziava i punti di contatto fra la propria visione didattica e quella del celebre matematico, sottolineando in particolare i seguenti punti: "ricondursi ai casi più semplici, cercar di intuire, fare congetture, infine dimostrare" (de Finetti A 1972d, p. 85). Nelle parole introduttive che de Finetti pronunciò, come presidente della Mathesis ribadì questa sintonia di vedute e fece riferimento al film matematico che aveva come protagonista Giorgetto ([27]). Le varie tappe della realizzazione di questo film e l'entusiasmo che le accompagnò emergono in tutta la loro freschezza dal dialogo epistolare fra i due matematici.

Vale la pena riportare quelle parti del discorso introduttivo di de Finetti da cui traspaiono gli intenti che accomunano i due matematici:

> *Sarebbe già un avvenimento importante avere qui Pólya per il fatto che egli è uno dei più grandi matematici, ma la sua presenza acquista per noi un particolare risalto in questo momento perché egli è l'ispiratore di quel modo vivo e intelligente – e, in un certo senso, informale, pratico, intimo – di vedere e capire la matematica, che rappresenta la meta cui tendono tutti i tentativi di rinnovamento della pedagogia della matematica.*
> *Se, infatti, questo rinnovamento può e deve anche riguardare i contenuti e il rigore, esso deve consistere anzitutto nel mirare – insieme a questo e qualche volta* nonostante *questo – a conservare e valorizzare quello che è il significato primo della matematica, intesa come forma di pensiero naturale e necessaria che va sviluppata – anche indipendentemente dalle esigenze formali e specialistiche – per dare modo a tutti di porsi dei problemi, di vederli, di approfondirli, di impostarli, e di arrivare possibilmente fino a risolverli con un'opera e una comprensione veramente spontanee.*
> *Più o meno, a parte qualche sfumatura, è questo l'ideale che ci anima e accomuna e che ci fa ritenere importante diffondere la coscienza del ruolo della matematica.* (de Finetti A 1972d, pp. 85-86)

L'attenzione di de Finetti alla produzione di film didattici si inserisce in un programma sostenuto dal presidente della Unione Matematica Italiana Guido Stampacchia, fin dal 1967 ([28]). La gestazione del film con il pupazzo Giorgetto fu lunga e laboriosa ed è documentata, oltre che dalle lettere

([27]) Cfr. (de Finetti A 1972d, p. 85): "Prima dell'inizio della conferenza il Prof. de Finetti ha presentato l'oratore con le parole sotto riprodotte, ed ha informato che, pochi giorni prima, Pólya aveva "tenuto a battesimo" Giorgetto.

Si tratta del piccolo protagonista di una progettata serie di filmini matematici – della Corona Cinematografica – intesi a realizzare le vedute didattiche di Giorgio Pólya: da ciò il nome di Giorgetto. Nel film del "battesimo" Giorgetto era un pupazzo colla cui collaborazione Pólya illustrò – sul solito ben scelto esempio del tronco di piramide – la sua indovinata rappresentazione schematica del procedimento di risoluzione di un problema (cfr. G. Pólya, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano 1970, vol. II, pp. 250-261). In altri film Giorgetto potrà essere ancora lo stesso pupazzo, oppure apparire come personaggio di cartoni animati".

([28]) Cfr. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, (3) 22, 1967, 552.

che qui pubblichiamo, da un dossier specifico degli ASP *BdFP* ([29]). Il cortometraggio, della durata di nove minuti, fu realizzato dalla società *Corona cinematografica* con il titolo *How to solve it*. La versione inglese del film fu proiettata a Milano nel 1972 e quella italiana nel 1973 a Roma. La traccia parlata del film è edita negli atti dei due convegni su *Il cinema d'animazione e l'insegnamento della matematica* (1972, 1973) ([30]). Per quanto riguarda il film su Galileo, *Galileo batte Simplicio: i frutti dopo tre secoli,* esso fu realizzato dalla medesima società e de Finetti ne curò la sceneggiatura ([31]).

La corrispondenza fra de Finetti e Polya si protrasse fino al 1974 toccando anche altri temi, e in particolare le traduzioni inglese e tedesca del trattato *Teoria delle probabilità* (de Finetti L 1970, 1975, 1981) ([32]) e le trattative per la versione del volumetto *Il "saper vedere" in Matematica* ([33]), che non andò in porto nonostante i tentativi dell'autore di coinvolgere varie case editrici e di affidarne la traduzione a Jean Strickland, moglie dell'amico L. Jimmie Savage.

Questa corrispondenza, per la sua frammentarietà, non consente di trarre vere conclusioni, nonostante ciò essa offre un vivido spaccato del lungo dialogo intrecciato da de Finetti con alcune figure di rilievo del suo tempo, un dialogo che conferma come la passione per un insegnamento della matematica, radicato nella realtà, abbia permeato tutta la sua attività scientifica ([34]).

Ringraziamenti. – Rivolgiamo prima di tutto un sentito grazie alle nostre rispettive famiglie cui abbiamo sottratto tanto del nostro tempo. La nostra più viva riconoscenza va anche a tutti coloro che in varia misura ci hanno coadiuvate in questo lavoro: Brigitta Arden, Mario Barra, Silvia Capuzzo, Antonella Gambini, Fulvia de Finetti, Michele Pellerey, Maria Alessandra Mariotti, Silvio Paolini Merlo, Carla Rossi, Antonella Taragna.

([29]) ASP *BdFP*, Box 11, Folder 15, *Corona Cinematografica, 1970-1974*.
([30]) Cfr. lettera 25, note 174 e 175.
([31]) Cfr. F. de Finetti 2010, p. 18.
([32]) Lettere 17, 19, 20, 25.
([33]) Lettere 17, 18, 19, 21, 22.
([34]) Lettera 25.

Le Lettere

1. L. Geymonat a F. Giaccardi, s.l., 1.1.1949
2. B. de Finetti a E. Frola, Trieste, 25.3.1949
3. B. de Finetti a L. Geymonat, Trieste, 25.3.1949
4. L. Geymonat a B. de Finetti, [Torino], 2.4.1949
5. E. Frola a B. de Finetti, Torino 10.4.1949
6. B. de Finetti a E. Frola, s.l., 25.4.1949
7. B. de Finetti a L. Geymonat, s.l., 25.4.1949
8. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.12.1961
9. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 18.12.1961
10. B. de Finetti a F. Tricomi, s.l., 17.5.1964
11. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 20.6.1965
12. B. de Finetti a G. Prodi, s.l., 7.7.1965
13. G. Prodi a B. de Finetti, Longiarù, 19.7.1965
14. G. Prodi a G. Ricci, Pisa, 19.4.1967
15. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 14.5.1967
16. B. de Finetti a F. Tricomi, s.l., 16.7.1967
17. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970
18. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971
19. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 30.5.1971
20. G. Pólya a B. de Finetti, Palo Alto, 9.10.1971
21. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972
22. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 29.12.1972
23. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 1.2.1973
24. G. Pólya a B. de Finetti, Palo Alto, 13.5.1973
25. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.11.1973
26. G. Pólya a B. de Finetti, s.l., 25.5.1974
27. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 2.9.1974
28. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974
29. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.10.1974
30. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.10.1974
31. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 13.11.1974

1. L. Geymonat a F. Giaccardi, 1.1.1949 (1)

1-1-1949

Caro Giaccardi (2),
ieri sera prima della mezzanotte, per trascorrere bene le ultime ore dell'anno, ho letto la conferenza di de Finetti (3).

Sono proprio molto lieto che tu me l'abbia fatta avere, perché è senz'altro interessantissima e sprizza in ogni pagina l'acutissimo ingegno dell'autore.

Tu sai che su tutto ciò che de Finetti scrive circa la funzione vivificatrice della matematica sono completamente d'accordo con lui, anche se propendo verso un'interpretazione logicistica di essa più che su un'interpretazione psicologistica. E trovo perfetti gli esempi che cita in favore della sua (e mia) tesi; tutt'al più vorrei osservargli che ... io ne avrei aggiunto un altro a mio parere non meno significativo: la scossa vivificatrice che la matematica ha saputo dare, specie negli ultimi decenni, alla vecchia logica tradizionale, mettendone in crisi i principi più "sacri e intoccabili". Io sono dell'opinione che, se non si "vivono" un po' in concreto le questioni logiche fondamentali della matematica moderna (quelle accennate da de Finetti a pag. 2), ben difficilmente si viene a rendersi vero conto dell'enorme passo compiuto dagli studi logici in questi ultimi tempi.

Ne concludo che ... sarei davvero lietissimo di poter conversare un po' a lungo su tutto ciò con un uomo del valore e della preparazione di de Finetti; e, poiché siamo in molti a desiderare di trovarci con lui, non vi è che da augurarsi di poterlo avere tra noi, nel prossimo 1949, per una conferenza al nostro Centro di Metodologia.

Ancora mille grazie, e vivissimi auguri a te e alla tua Signora,

L. Geymonat

(1) Archivio privato della famiglia de Finetti. Dobbiamo alla cortesia di Fulvia de Finetti la segnalazione di questa lettera. Dattiloscritto con firma autografa, c. 1r, di Renata Errico, moglie di Bruno de Finetti, che aggiunge un commento.

(2) Fernando Giaccardi Giraud (1903-1970) si laureò a Torino nel 1927 in Scienze economiche e commerciali. Nel 1940 fu professore incaricato di Economia e finanza delle imprese di assicurazione presso la Facoltà di Scienze Economiche e Commerciali di Torino e professore incaricato di Matematica finanziaria presso la Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Trieste. Dopo il 1950, si trasferì all'Università di Torino quale ordinario di Matematica finanziaria. Fu tra i membri onorari del Centro di Studi Metodologici fin dal 1947-48.

(3) Cfr. de Finetti A 1949a e Appendice 1.2 in questo volume.

Ho copiato questa lettera sicura che le farà molto piacere conoscerla e perché sono stata colpita dalla maniera originalissima di trascorrere bene le ultime ore dell'anno. Benché Bruno sia quasi arrabbiato per questa mia idea, io che non ho conosciuto di queste soddisfazioni, ritengo che chi può, debba averle.
Auguri anche da parte mia

Renata (4)

2. B. de Finetti a E. Frola (5), Trieste, 25.3.1949 (6)

Trieste, 25 marzo 1949

Caro Frola,

rientrato a Trieste, ripenso con piacere alle giornate torinesi e apprezzo soprattutto il fatto di averti conosciuto, sia per l'importanza e la concordanza con mie vaghe aspirazioni riscontrata nell'impostazione di una generale geometria affine che stai sviluppando, sia per la vicinanza di atteggiamenti in materia di probabilità.

Certo è un argomento ove occorrerebbe del tempo per passare in rassegna tutti i punti che occorrerebbe chiarire per essere certi di sanare i possibili latenti equivoci nell'interpretare questo o quel concetto e questo o quell'aspetto di un ragionamento o di una teoria. E purtroppo il tempo rimasto per discuterne, dopo la conferenza (7)*, era breve e a tarda ora, senza dire che l'accavallarsi degli argomenti, delle necessarie parentesi che poi ne prolificano altre prima di potersi chiudere, ecc., riduceva ancor più, inevitabilmente, il profitto del colloquio.*

(4) Renata Errico (1904-1994), moglie di Bruno de Finetti.

(5) Eugenio Frola (1906-1962) si laureò in Ingegneria civile al Politecnico di Torino nel 1926 e in Matematica presso l'Università nel 1933. Studioso di notevole acume e profondità, non giunse mai alla cattedra per i troppo frequenti cambiamenti di campi di ricerca. Fu fra i protagonisti della nascita del Centro di Studi Metodologici nell'estate del 1945 insieme a N. Abbagnano, P. Buzano, L. Geymonat, P. Nuvoli e E. Persico. Sulle origini e gli sviluppi del Centro di Studi Metodologici cfr. Giacardi, Roero 1997-1998, 289-355; Paolini Merlo (in preparazione).

(6) Cfr. ASP *BdFP*, *Centro Studi Metodologici Torino 1949*, BD6-01-11. Minuta di lettera dattiloscritta, c. 1r.

(7) Si tratta della conferenza *Visione unitaria e visioni frammentarie sul ruolo delle probabilità nelle applicazioni*, tenuta da de Finetti a Torino, il 22 marzo 1949, presso il Centro di Studi Metodologici a Palazzo Carignano, e pubblicata in *Saggi di critica delle scienze,* Torino: De Silva, 1950, 153-172. La traccia manoscritta della conferenza e il suo testo dattiloscritto con note autografe di de Finetti sono conservati in ASP *BdFP*, *Centro Studi Metodologici Torino 1949*, BD6-01-01, BD6-01-02, BD6-01-03, BD6-01-04, BD6-01-05, BD6-01-06.

Ho cercato perciò di condensare le risposte a quelle che mi pare fossero le principali obiezioni, la più parte provenienti da Geymonat e relative all'intera concezione; una specifica da parte tua, che riguardava la costruzione dei principi del calcolo delle probabilità sulla base della definizione come "quote di scommessa".

Ho scritto in fretta per non far svanire il ricordo del colloquio in me e in voi; non so se sono abbastanza chiaro e a proposito nel rispondere; continuerò volentieri lo scambio d'idee per corrispondenza se vi interessa anziché recarvi disturbo (8).

RISPOSTE A DOMANDE DI CHIARIMENTI DEGLI ASCOLTATORI (9)

(particolarmente: Frola, Geymonat, Buzano (10)*, Thaon De Revel* (11)*)*

1. Quali sono i punti di contatto e di divergenza col punto di vista del Reichenhach? (12)

Nessuna differenza finché lo si enunci genericamente dicendo che ogni conoscenza ha un carattere contingente, e ogni teoria non ha che il valore che le diamo col ritenere di doverci affidare ad essa nel regolarci per le nostre previsioni.

(8) Le risposte sono trascritte qui di seguito.

(9) ASP *BdFP*, BD6-01-10, appunti dattiloscritti, cc. 1r-3r.

(10) Piero Buzano (1911-1993), amico di Geymonat e Persico, aderì al Centro di Studi Metodologici fin dall'inizio. Buzano aveva compiuto gli studi universitari di Matematica all'Università di Torino, frequentando fra l'altro i corsi di Matematiche complementari di G. Peano e laureandosi nel 1931 con una tesi diretta da A. Terracini. Dopo esser stato assistente e poi professore incaricato di Istituzioni di matematiche per Scienze Naturali, di Geometria analitica, differenziale e superiore, nel 1945 passò al Politecnico come ordinario di Analisi matematica.

(11) Paolo Ignazio Maria Thaon di Revel o De Revel (1888-1973), cultore di studi economici e finanziari, oltre che famoso schermidore, fu podestà e prefetto di Torino (1929-1935), senatore del Regno (1933) e ministro delle Finanze e del Tesoro dal 1935 al 1943.

(12) Hans Reichenbach (1891-1953), filosofo della scienza tedesco, si laureò presso l'Università di Erlangen nel 1915. Diede importanti contributi alla teoria della probabilità e all'interpretazione filosofica della relatività, della meccanica quantistica e della termodinamica. Fu uno dei principali esponenti del positivismo logico. Nel 1935 pubblicò il volume *Wahrscheinlichkeitslehre. Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leiden: Sijthoff, 1935. De Finetti aveva fatto allusione alla posizione di Reichenbach nella conferenza *Visione unitaria e visioni frammentarie sul ruolo delle probabilità nelle applicazioni*, in *Saggi di critica delle scienze,* Torino: De Silva, 1950, 171.

Ma il fatto [*che*] *Reichenbach accetti la concezione della probabilità basata sulla frequenza porta a due divergenze essenziali:*

- *all'esclusione di tutti gli altri correnti metodi di valutazione delle probabilità, restringendo enormemente il campo d'applicazione rispetto a quello necessario,*
- *alla mancata analisi delle ragioni su cui si basa lo stesso metodo basato sulle frequenze, per cui neppure in quel caso l'impostazione tiene conto della situazione che si presenta nelle effettive applicazioni, ma si riduce a schematizzazioni illusorie.*

Conseguenza: che non risulta neppure il carattere soggettivo di tali previsioni, essendo esso mascherato dal valore oggettivo della frequenza e dalla mancata analisi per cui essa, anziché "influire" sul giudizio di probabilità, sembra "identificarvisi".

2. Vi sono effettivamente casi importanti di valutazioni di probabilità (soggettive) non basate sulla frequenza, o non si tratta invece di una questione accessoria di voler specificare se si dia un valore oggettivo o no alle valutazioni basate sulla frequenza?

La maggior parte delle nostre attività e istituzioni si basa su valutazioni di probabilità non riconducibili a frequenze, e indubbiamente soggettive. Tali ad es. le impressioni personali su cui si basano:

- *la polizia nell'arrestare e i tribunali nel giudicare gli indiziati d'aver commesso dei crimini,*
- *dirigenti di aziende private o pubbliche, capitalisti e speculatori, e giù giù fino ai consumatori, nel subordinare programmi investimenti acquisti ecc. a previsioni (speranze, timori) di svariati fatti economici, politici, ecc.,*
- *genitori ecc. nello stimare le attitudini alle diverse attività e le possibilità di riuscita, e indirizzare di conseguenza figli ecc. secondo diverse carriere di studi o altro,*
- *e tutti, insomma, in ogni caso del genere.*

Ogni valutazione, in casi siffatti, si basa su apprezzamenti personali relativi a svariate circostanze, in genere concernenti fatti non ripetibili, e pei quali comunque seppure si conosce qualche cosa d'analogo alla frequenza v'è largo margine di libertà per le singole opinioni.

3. Gli altri casi, in cui la valutazione di probabilità si basa sulla frequenza, hanno però, dunque, una posizione in certo senso privilegiata anche nella teoria soggettiva?

No. Vi sono dei casi in cui è più o meno facile l'accordo o per meglio dire un riavvicinamento fra le opinioni di diversi individui. Ma non v'è alcun criterio sensato per dire che un'opinione su cui s'avverasse sia pure un perfetto accordo fra i diversi individui cessi perciò d'essere un'opinione.

Ciò vale anche per le "valutazioni basate sulla frequenza".

Anche a prescindere dal fatto che in pratica esistono sempre altri elementi di giudizio oltre la frequenza (p. es. a parità di successi avremo più fiducia in un farmaco studiato da uno specialista in base a cognizioni eziologiche anziché nello specifico di un ciarlatano, e crederemo più facilmente al carattere non accidentale di un aumento di mortalità riscontrato per gli alcoolizzati che non per coloro che sono nati di sabato), il criterio stesso della frequenza non dice nulla senza interpretarlo in modo più o meno soggettivo.

– Tra l'altro (per non entrare in aspetti che richiederebbero uno svolgimento più ampio), la delimitazione dei "casi analoghi" su cui considerare le frequenze è largamente arbitraria: ad es. per le probabilità di morte terremo conto dell'età, sesso, epoca, nazione, o anche di stato civile, professione, località, caratteristiche fisiche, abitudini di vita, ecc.? e infine, se vedremo che (nel gruppo comunque voluto delimitare) la "probabilità" di morte fornita dalla frequenza per quella data età x è molto inferiore a quelle delle età prossime prima o dopo, non le innalzeremo con una "perequazione" che esprimerà una nostra opinione sull'andamento della mortalità alla quale sacrificheremo il brutale criterio di adottare tal quali le frequenze come "probabilità"?

Circostanze del genere esistono sempre. Si possono nascondere solo nelle trattazioni ove certe "premesse" sono avanzate in modo da rendere tautologico il seguito. La frequenza (o la frequenza-limite) non è e non ha nulla a che fare con una probabilità, se non se ed in quanto una valutazione soggettiva di probabilità sia fatta scegliendo come valore quello della detta frequenza. In altre parole, se non se ed in quanto ad essa corrisponde una previsione del soggetto.

4. Ma come si può definire una probabilità soggettiva?

Con definizione perfettamente operativa, atta a sondare l'opinione del soggetto che si considera. Se avverto un soggetto A di scegliere un numero p *in base al quale sarà poi obbligato ad accettare qualunque scommessa pro o contro di un evento E (ossia: sarà tenuto a ricevere o pagare un importo pS per pagare o ricevere, se E si verificherà, l'importo S scelto dal competitore), diremo per definizione che egli attribuisce all'evento E la probabilità p.*

È una definizione perfettamente analoga a quella di "prezzo". Si potrebbe anzi dire, un po' succintamente, che p è il prezzo, valutato dal soggetto A, dal possesso di una lira subordinato al realizzarsi di E.

5. Ma come si può stabilire, se le probabilità vengono valutate secondo tale concezione soggettiva, che valgano per esse le note leggi?

Le leggi del calcolo delle probabilità, nella concezione soggettiva, sono le condizioni che un individuo deve rispettare, nel fissare i valori che attribuisce alle probabilità di diversi eventi, onde evitare che il competitore possa approfittare di una incoerenza per vincere a colpo sicuro. Ciò avviene ad es. se le probabilità di tre casi incompatibili vengono valutate in modo che la loro somma superi l'unità: posso allora infatti pretendere da colui che abbia così fissato le probabilità, l'importo $p' + p'' + p'''$ *per tre scommesse di cui perderò una sola, pagando "uno" e guadagnando in ogni caso l'eccedenza.*

6. Ma che valore, che interesse, può presentare la considerazione di simili probabilità soggettive? Quali sono i "protocolli" su cui ci si basa?

Che presenti interesse o meno l'occuparsi del tipo di ragionamenti su cui tutti continuamente ci basiamo (cfr. punti 2 e 3), chiunque può giudicare a suo piacimento. Ma la scelta è fra un pieno SI e un pieno NO. Non è possibile (cfr. punto 3) illudersi che una parte si possa salvare sotto etichetta oggettiva:

Se un'indagine sul ragionamento probabilistico, ossia sul ragionamento effettivo di tutta la vita pratica, non si vuole bandire (direi per settarismo filosofico) dal campo delle nostre indagini scientifiche, i "protocolli" sono le valutazioni fatte in base alle interrogazioni del punto 4. Si tratta di esperimenti sull'atteggiamento dell'individuo A rispetto ai diversi eventi E.

Le leggi del calcolo della probabilità (punto 5) permettono di concludere quali probabilità il medesimo individuo A deve attribuire ad altri eventi per mantenersi coerente. E quali devo attribuire io, se in particolare prendo A = "io".

Naturalmente nessun valore sono obbligato ad attribuire alle valutazioni di probabilità di un individuo A nei riguardi di altri individui o *in particolare delle previsioni mie. Può però darsi che la conoscenza di opinioni altrui abbia una certa influenza: è questo uno dei tanti fattori che (come la frequenza, le simmetrie per l'equiprobabilità, ecc.) si possono considerare come problemi accessori.*

Che le leggi del calcolo delle probabilità abbiano enorme importanza anche fuori dai campi dove (secondo me ingiustificatamente, o almeno trasfigurando circostanze favorevoli non assolute) si ritiene che le valutazioni abbiano un valore più o meno "oggettivo", basti chiarire con un solo esempio. La valutazione del peso di ogni indizio agli effetti della probabilità di colpevolezza di un imputato dipende dal teorema di Bayes: se, per ignoranza di esso, accusatori, difensori, giurati ecc. sbagliano il ragionamento cosa avviene? E badiamo di precisare: dicendo "sbagliano" non intendo dire che possano esservi valutazioni più o meno "giuste" di date probabilità, ma solo che, prese per "buone" le probabilità quali essi le valutano, ne derivino un'altra in modo "incoerente" non rendendosi conto del legame che deve sussistere.

Trieste, 25 marzo 1949

Bruno de Finetti

3. B. de Finetti a L. Geymonat (13), Trieste, 25.3.1949 (14)

Trieste, 25 marzo 1949

Caro Geymonat,

Rientrato a Trieste, ho un ottimo ricordo di Torino e di tutti voi, e solo mi rammarico che non ci sia stato il tempo per approfondire la discussione sull'argomento delle probabilità e chiarire i malintesi che ancora sussistevano. Mi premerebbe in particolare che il mio punto di vista riuscisse chiaro a te, che per la posizione a cavallo tra matematica e filosofia sei particolarmente in causa nel prendere posizione. Natu-

(13) Ludovico Geymonat (1908-1991), laureatosi in Filosofia presso l'Università di Torino nel 1930 con Annibale Pastore, discutendo una tesi sul positivismo, compì successivamente studi di Matematica presso la Facoltà di Scienze, dove seguì, fra gli altri, il corso di Matematiche complementari tenuto da Giuseppe Peano. Si laureò con Guido Fubini, discutendo nel 1932 una tesi di Analisi. L'interesse per il Circolo di Vienna e per la corrente di pensiero neo-positivistica spinse Geymonat a recarsi nel 1934 nella capitale austriaca, dove familiarizzò con le nuove concezioni filosofiche che costituirono il punto di partenza per elaborare una visione più attenta agli sviluppi e ai metodi delle scienze. Una delle opere principali cui il gruppo torinese del Centro di Studi Metodologici si ispirò fu proprio il volume in cui Geymonat raccolse i suoi scritti sul Circolo di Vienna, *Studi per un nuovo razionalismo* (Torino: Chiantore, 1945).

(14) ASP *BdFP*, BD6-01-11. Minuta di lettera dattiloscritta, c. 1r.

ralmente hai ogni diritto di prenderla in un senso o nell'altro, ma avrei piacere di vedere che prima ti risulti il senso esatto di ciò che afferma la teoria soggettiva e di ciò che essa critica in quelle di diverso indirizzo.

Ho cercato perciò di condensare le risposte che darei a quelle che mi sembra fossero le principali obiezioni ([15]). *Non so se bastano, se c'erano altri punti, se danno luogo ad altri dubbi. Se la cosa ti interessa, mi farai piacere a scrivermene e risponderò cercando di giungere a una chiarificazione. Avrei particolarmente caro che al Centro torinese queste questioni attecchissero, dato che fu proprio Persico* ([16]) *quello fra i cultori di questioni analoghe che più esplicitamente mi espresse la sua adesione alla concezione soggettiva.*

Non so poi se riterrai che i punti dell'allegato debbano opportunamente inserirsi nella conferenza ([17]) *per evitare nei lettori i dubbi che hai avuto, o aggiunti come sunto di discussione, o come note in calce, o elaborati diversamente, o se non si ha da farne nulla.*

4. L. Geymonat a B. de Finetti, [Torino], 2.4.1949 ([18])

2 aprile 1949

Caro de Finetti,

ti ringrazio vivamente della cara lettera e dell'interessante dattiloscritto inviatomi attraverso l'amico Giaccardi ([19]). *Approfitterò anch'io della gentilezza di Giaccardi per farti pervenire questa risposta.*

([15]) Cfr. B. de Finetti a E. Frola, Trieste, 25.3.1949, lettera n. 2 di questo carteggio e il dattiloscritto allegato *Risposte a domande di chiarimenti degli ascoltatori (particolarmente: Frola, Geymonat, Buzano, Thaon De Revel).*

([16]) Enrico Persico (1900-1970) laureatosi in Fisica a Roma nel 1921, fu chiamato nel 1930 a Torino per ricoprire la cattedra di Fisica Teorica dell'Università. Qui rimase fino al 1947, anno in cui lasciò l'Italia per recarsi in Canada presso l'Università di Québec. Durante il periodo torinese egli si occupò principalmente di dinamica ondulatoria e fu fra i promotori del Centro di Studi Metodologici, di cui fece parte fino al 1958, quando rassegnò le dimissioni con la motivazione che un eccesso di critica gli toglieva lo slancio per la ricerca e lo bloccava psicologicamente.

([17]) Si tratta della conferenza *Visione unitaria e visioni frammentarie sul ruolo delle probabilità nelle applicazioni*, tenuta da de Finetti a Torino il 22 marzo 1949, presso il Centro di Studi Metodologici, e pubblicata in *Saggi di critica delle scienze,* Torino: De Silva, 1950, 153-172.

([18]) ASP *BdFP*, BD6.01.12. Lettera autografa, cc. 1r-v.

([19]) Cfr. B. de Finetti a E. Frola, Trieste, 25.3.1949, lettera n. 2; il dattiloscritto allegato *Risposte a domande di chiarimenti degli ascoltatori (particolarmente: Frola, Geymonat, Buzano, Thaon De Revel)* e B. de Finetti a L. Geymonat, Trieste, 25.3.1949, lettera n. 3 di questo carteggio.

La concezione soggettivistica della probabilità venne sempre ritenuta, da me, come una fra le più importanti; e cercai di attrarre fin da parecchi anni fa l'attenzione del pubblico su di essa, attraverso un articolo sulla rivista "Il saggiatore" (ediz. Einaudi) ([20]). *Se non mi sento di seguirla, è perché ho trovato una concezione che appaga meglio le mie esigenze logiche nelle opere di Wittgenstein* ([21]) *e di Waismann, particolarmente nell'articolo di quest'ultimo "Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs" pubblicato sulla rivista Erkenntnis (ed. Meiner, Lipsia), vol. I, 1930-31* ([22]). *Sto ora traducendo un'opera che dedica larghe pagine a tale concezione, e, pur criticandola, la espone abbastanza bene; si tratta di un grosso volume di J. Weinberg dal titolo "An examination of Logical Positivism" (London, Kegan, 1936)* ([23]) *di cui uscirà – spero per la fine dell'anno – la mia traduzione presso l'ed. Einaudi.*

Mi sembra che l'articolo su citato di Waismann risponda a molte delle tue domande in modo diverso dal tuo (ma, forse, poi non tanto lontano dal tuo), e non vedo bene dove sia l'errore delle sue risposte.

Comunque, il problema della definizione del concetto di probabilità è, per il nostro Centro di Studi metodologici, del più vivo interesse; e vorremmo dedicarvi una serie di discussioni, nelle quali verrebbero esaminate a fondo le tue risposte ([24]). *Ci proponiamo di comunicarti, subito dopo, i risultati delle nostre discussioni, per continuare con te il*

([20]) L. Geymonat, Il concetto di probabilità, *Il Saggiatore, rivista mensile di attualità scientifica*, a. 1, v. 1, 1940, 320-330.

([21]) Ludwig Wittgenstein (1889-1951) illustre filosofo e logico austriaco, autore di contributi di fondamentale importanza nei settori della logica e della filosofia del linguaggio. Non pubblicò opere specificamente dedicate alla teoria della probabilità, tuttavia alcune pagine del *Tractatus Logico-Philosophicus* (London: Kegan, 1921) e alcune riflessioni emerse dalle conversazioni che intrattenne con esponenti del Circolo di Vienna influenzarono notevolmente le interpretazioni logiche della probabilità di F. Waismann e R. Carnap.

([22]) Friedrich Waismann (1896-1959) filosofo neopositivista, allievo ed assistente a Vienna di M. Schlick, insegnò a Cambridge (1937) e a Oxford (1939), prima come *lecturer* e poi come *university reader* in Filosofia delle matematiche. Geymonat allude qui al saggio di F. Waismann, Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, *Erkenntnis*, 1, 1930-1931, 228-248.

([23]) Julius Rudolph Weinberg (1908-1971) conseguì un PhD in Filosofia presso la Cornell University con una tesi di dottorato intitolata *Logical positivism of the Viennese Circle* (1935); fu poi docente di Filosofia presso l'Università del Wisconsin. Si allude qui all'opera di J.R. Weinberg, *An Examination of Logical Positivism*, London: Kegan, 1936, tradotta da Geymonat con il titolo *Introduzione al positivismo logico*, Torino: Einaudi, 1950.

([24]) Geymonat riprese l'argomento nella conferenza che tenne in occasione del Congresso di studi metodologici che si svolse a Torino nel dicembre del 1952: Considerazioni metodologiche sul concetto di probabilità, in *Atti del Congresso di studi metodologici promosso dal Centro di Studi Metodologici, Torino, 17-20 dicembre 1952*, Torino: Ramella, 1954, 189-202.

dibattito per scritto. Il tuo punto di vista è per noi tutti, e non solo per l'amico Persico, molto serio; e, anche se qualcuno di noi non lo condivide appieno, siamo unanimi nel ritenerlo assai significativo per la metodologia moderna.

Di nuovo mille grazie di tutto, e, prima di ogni altra cosa, di essere venuto a Torino. Speriamo, ora, di poterci rivedere presto.

Molti ossequî alla tua Signora e auguri alla cara bimba.

A te la più viva cordialità
tuo L. Geymonat

5. E. Frola a B. de Finetti, Torino 10.4.1949 ([25])

Torino 10 – Aprile – 49

Caro de Finetti.

Grazie della tua gentile lettera, io sono assai lieto di potere continuare con te la interessante discussione sui fondamenti della teoria della probabilità. Come ti avrà detto Giaccardi ([26]) *sarebbe mi pare interessante che la discussione epistolare venisse condotta in modo da poter poi essere eventualmente stampata.*

Penso che anche Geymonat e gli altri amici metodologi torinesi saranno del mio avviso. Credo che avrai forse non prestissimo una o più nostre lettere in argomento.

Ossequi alla signora de Finetti, a te molti cordiali saluti

aff. Eugenio Frola

6. B. de Finetti a E. Frola, 25.4.1949 ([27])

25 aprile 1949

Caro Frola,
ho ricevuto con piacere la tua gentile lettera del 10 corr. ([28]).

Io sarei lieto di proseguire la discussione in modo proficuo, o almeno di fornire ogni chiarimento necessario sui punti che apparissero oscuri o

([25]) ASP *BdFP*, BD6-01-13. Lettera autografa, c. 1r.

([26]) Cfr. L. Geymonat a B. de Finetti, [Torino], 2.4.1949, lettera n. 4.

([27]) ASP *BdFP*, BD6-01-15. Minuta di lettera dattiloscritta, c. 1r. Sia questa lettera sia quella indirizzata a L. Geymonat (B. de Finetti a L. Geymonat, 25.4.1949, lettera n. 7) furono inviate da de Finetti a F. Giaccardi e trasmesse da quest'ultimo ai colleghi del Centro di Studi Metodologici. Cfr. B. de Finetti a F. Giaccardi, 25.4.1949, ASP *BdFP*, BD6-01-14.

([28]) Cfr. E. Frola a B. de Finetti, Torino 10.4.1949, lettera n. 5.

criticabili in quanto già scritto. Solo che occorrerebbe per ciò che avessi delle obiezioni o richieste precise, altrimenti temerei di tediarvi ripetendo o aggiungendo chiarimenti superflui o toccando punti che non v'interessano o non vi appaiono essenziali o controversi, o viceversa passando ad altri punti supponendo raggiunto l'accordo su premesse già spiegate che invece non vi appaiono accettabili.

Per questa volta, dato che su argomenti circa identici dovevo dare dei chiarimenti al Fréchet (29)*, accludo una copia parziale della lettera a lui diretta* (30)*, che potrà servire a continuare lo scambio di idee pure in mancanza di questioni poste direttamente da voi stessi.*

Se la discussione potrà procedere in modo ordinato, sarà facile al caso, estrarre un sunto pubblicabile meglio ordinato.

7. B. de Finetti a L. Geymonat, 25.4.1949 (31)

25 aprile 1949

Caro Geymonat,

ti ringrazio della gentile lettera avuta da Giaccardi (32) *e prego scusare il ritardo nella risposta. Come pregai di riferirti lo studente Zannini* (33)*, che ebbi piacere di conoscere, stavo scrivendo qualcosa di*

(29) Maurice Fréchet (1878-1973) celebre matematico francese, diede importanti contributi nel campo della topologia, dell'analisi e del calcolo delle probabilità. De Finetti e Fréchet intrattennero un lungo e proficuo dialogo scientifico a partire dagli anni Trenta. Cfr. ad esempio E. Regazzini, *The Origins of de Finetti's Critique of Countable Additivity*, in *Advances in Modern Statistical Theory and Applications: A Festschrift in honor of Morris L. Eaton*, vol. 10, 2013, 63-82. In occasione del Congrès International de Philosophie des Sciences, svoltosi a Paris nei giorni 17-22 ottobre 1949, Frechét si rivolse a de Finetti invitandolo a tenere una conferenza. La scelta del tema (*Rôle et domaine d'application du théorème de Bayes selon les différents points de vue sur les probabilités*, pubblicata in *Actes du XVIII Congrès International de Philosophie des Sciences tenu à Paris en 1949*, Paris: Hermann, 1951, vol. IV, 67-82), i diversi punti di vista di Frechét e di de Finetti, e le reazioni dei congressisti all'intervento di quest'ultimo sono oggetto della corrispondenza conservata in ASP *BdFP*, *Congrès International de Philosophie des Sciences*, *Paris, 1949-1950*, Box 6, Folder 3.

(30) B. de Finetti a M. Frechét, Trieste, 18.4.1949, ASP *BdFP*, BD6-03-10, c. 1-7 numerate.

(31) ASP *BdFP*, BD6-06-15. Minuta parziale di lettera dattiloscritta, c. 1r. Sia questa lettera sia quella indirizzata a E. Frola (B. de Finetti a E. Frola, 25.4.1949, lettera n. 6) furono inviate da de Finetti a F. Giaccardi e trasmesse da quest'ultimo ai colleghi del Centro di Studi Metodologici. Cfr. B. de Finetti a F. Giaccardi, 25.4.1949, ASP *BdFP*, BD6-01-14.

(32) Cfr. L. Geymonat a B. de Finetti, [Torino], 2.4.1949, lettera n. 4.

(33) P. Zannini, triestino, già allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa, frequentava il quinto anno di studi al Politecnico di Torino. Interessato alle questioni metodologiche, Geymonat lo presentò a de Finetti per chiedergli di dargli consigli sulla sua carriera scientifica. Cfr. L. Geymonat a B. de Finetti, 3.4.1949, ASP *BdFP*, BD06-01-07.

analogo a Fréchet (34) *che mi invitò a tenere una comunicazione al Congresso di Filosofia scientifica di Parigi (ottobre), e pensavo fosse la cosa migliore inviare una copia di detta lettera per voi. E la lettera, con varie interruzioni, richiese parecchi giorni ...*

Non so se riuscirò a procurarmi o a vedere prossimamente le opere che mi citi, e che m'interesserebbero assai. Comunque mi premerebbe poter individuare quale sia il punto dove le due concezioni divergono, e quali sono le ragioni cui dovrei opporre obiezioni non ancora svolte o quali obiezioni porresti alle ragioni che adduco.

In particolare: c'è qualche punto concreto, nel testo della mia conferenza, negli appunti precedenti, nella lettera a Fréchet, su cui continuare la discussione, o su cui occorre qualche ulteriore chiarimento, ecc.?

8. G. Pólya (35) a B. de Finetti, Zurigo, 5.12.1961 (36)

(Extrait d'une lettre de M. le Prof. Georg Pólya à M. B. de Finetti)
(Zürich, le 5 décembre 1961)

[*Seguito di n. 13. oppure nuovo n. 14. – Applicabilità in campi più lontani. Lo stesso problema si pone (anche se più vagamente formulabile in termini concreti, per ogni decisione, anche non di natura economica. Ad esempio, per le "decisioni di ricerca", problema cui Georg Pólya ha*

(34) Cfr. B. de Finetti a E. Frola, 25.4.1949, lettera n. 6.

(35) George Pólya (1887-1985), matematico ungherese, iniziò gli studi universitari di Matematica e Fisica a Budapest, dove fu allievo di L. Eötvös e L. Fejér, proseguendoli poi a Vienna (1910-11) e Gottinga (1912-13). Fu professore presso l'Eidgenössische Technische Hochschule di Zurigo (1914-1940) e successivamente presso la Stanford University (1940-1953). La sua attività di ricerca spaziò dall'analisi (celebre in particolare la cosiddetta congettura di Pólya-Szegö) alla teoria dei numeri, dal calcolo combinatorio alla probabilità. Nella seconda parte della sua carriera si occupò inoltre di epistemologia e didattica della matematica, cercando di caratterizzare i metodi generali che i matematici usano per risolvere i problemi, e descrivendo come il procedimento del 'problem solving' dovrebbe essere insegnato e appreso. Fra i suoi volumi più celebri si ricordano: *How to Solve It* (1945); *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics, Vol. 2: Patterns of Plausible Inference* (1954) e *Mathematical discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (1962-1965). Fra i molti profili biografici di Pólya cfr. ad esempio: G.L. Alexanderson, *The random walks of George Pólya*, Washington DC: The Mathematical Association of America, 2000 e H. Taylor, L. Taylor, *George Pólya: Master of Discovery*, Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1993.

(36) ASP *BdFP*, BD10-15-37. Estratto di lettera dattiloscritto, c. 1r. Stralci delle due lettere di G. Pólya a B. de Finetti del 5.12.1961 e del 18.12.1961 (lettere n. 8 e 9 di questo carteggio) furono pubblicati da de Finetti nel saggio *Does it Make Sense to Speak of 'Good Probability Appraisers'?*, in I.J. Good et al. (eds.), *The Scientist Speculates. An Anthology of Partly-Baked Ideas*, New York: Basic Books, 1962, 357-364.

sempre dedicato tanta penetrante attenzione. Così egli scrisse all'a. in due lettere del 1961 (di cui consentì l'eventuale pubblicazione) a proposito dell'articolo "Does it make sense ...".] (37).
Votre article est bien intéressant (38)*. Comme l'exemple de "Drilling decisions" montre d'une manière très convaincante, il y a des cas où il y a un intérêt pratique d'obliger les gens de traduire leur estimation de "probabilité subjective" en chiffres palpables (finalement, en actions) et d'adapter (d'une manière quelconque) leurs estimations aux réalités.*
Le système que vous proposez pour atteindre ce but me parait à première vue bien adapté – il est certainement clair, simple et sûrement nouveau, comme le but même est nouveau à ma connaissance. On y verra encore plus clair lorsque vous aurez ramassé assez d'expérience sur son fonctionnement pratique.
Votre article m'intéresse spécialement parce que mon sujet préféré (ou "hobby") pourrait être désigné comme "Research decisions": j'ai tâché, comme vous savez, et je tâcherai encore, de voir comment les gens traduisent leur estimation des (39) *"plausibilités subjectives" en procédures de recherche.*
Pourrons-nous un jour discuter l'analogie et la différence entre "Drilling decisions" et "Research decisions"? J'espère mais, hélas, ce n'est pas sûre (40).

9. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 18.12.1961 (41)

Zürich, 18 dec 61

Je crois aujourd'hui, comme lors de notre conversation à Harvard (42) *(que j'aime à me rappeler) que les "research decisions" n'impliquent rien*

(37) Il paragrafo fra parentesi quadre è scritto dopo l'estratto della lettera di G. Pólya a B. de Finetti del 18.12.1961 (lettera n. 9 di questo carteggio), con un rinvio nel testo.

(38) B. de Finetti, *Does it Make Sense to Speak of 'Good Probability Appraisers'?*, in I.J. Good et al. (eds.), *The Scientist Speculates. An Anthology of Partly-Baked Ideas*, New York: Basic Books, 1962, 357-364.

(39) Pólya cancella qui "probabilités".

(40) Nel margine superiore compare la seguente aggiunta autografa di de Finetti: "*stesso problema si pone (anche se più vagam. formulabile) in ogni decisione, anche non economica, per es. nelle decis. di ricerca, problema cui Pólya ha dedicata attenzione. Così infatti egli dice (in due lettere) del 1961 riguardo a "Does it ...".*

(41) ASP *BdFP*, BD10-15-37. Estratto di lettera dattiloscritto, c. 1r.

(42) De Finetti si recò due volte negli Stati Uniti d'America: la prima nel 1950, per tre mesi, usufruendo di una borsa Fullbright. Durante quel soggiorno partecipò all'undicesimo Congresso Internazionale dei Matematici a Cambridge e al Second Berkeley Symposium

de clairement quantitatif – l'effort nécessaire pour prouver un théorème peut être estimé "grand" ou "petit" mais je ne vois aucun cas ou cet effort peut être mesuré d'une manière raisonnable (au contraire que pour une "drilling decision").
Quantitatif et non-quantitatif – est-ce la différence principale entre les deux espèces de décisions ? Peut-être. D'autre côté, je suis enclin d'accepter votre "Arbeitshypothese" que l'analogie va très loin.

10. B. de Finetti a F. Tricomi ([43]), s.l., 17.5.1964 ([44])

17 maggio 1964
832360

Caro Tricomi,

plaudo alla tua esplosiva eruzione e mi auguro che, al pari di quella dell'Etna che sembra voglia emularti, dia luogo a una colata di lava fiammeggiante e purificatrice ([45]).

for Mathematical Statistics and Probability, invitato da J. Neyman, dove conobbe L.J. Savage. Si recò negli USA per la seconda volta nel 1957, come *visiting professor* presso l'Università di Chicago, su invito di Savage stesso. In quell'occasione visitò anche East Lansing, Milwaukee e New York, prendendo parte al Congresso Internazionale degli Attuari. De Finetti e Pólya si incontrarono ad Harvard in occasione dell'International Congress of Mathematicians, svoltosi nei giorni 30 agosto-6 settembre 1950.

([43]) Francesco Giacomo Tricomi (1897-1978) illustre matematico italiano, noto per i suoi studi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto, sulle funzioni speciali e sulle serie ortogonali. Scrisse numerosi trattati e manuali di grande chiarezza, alcuni dei quali sono stati tradotti in inglese, francese, tedesco e russo. A partire dagli anni Sessanta seguì i dibattiti sull'insegnamento della matematica, prendendovi parte anche con toni talora polemici. Per una disamina sugli interventi di Tricomi in merito alla didattica della matematica si veda il volumetto autobiografico Tricomi 1967, alle pagine 143-145, 147-148, 152, 157, 158, 162-163.

([44]) ASP *BdFP*, BD11-02-07. Lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

([45]) F. Tricomi, Problemi di optimum nella demolizione della scuola, in *Celebrazioni Archimedee del 1964*, Gubbio: Oderisi, 1965, 187-192, ripubblicato anche in *Scuola e Città*, 15, 1964, 402-404 e *Siracusa Nuova*, 2, V, 1964. Come commenta Tricomi (1967, 152): "Questa conferenza – vivacemente polemica contro un (poi fallito) tentativo d'introdurre di sorpresa il «bourbakismo» anche nelle scuole secondarie – fu tenuta al Simposio didattico di Siracusa nelle celebrazioni archimedee del 1964 e destò viva sensazione, tanto che il locale settimanale «Siracusa Nuova» la riprodusse sotto un titolone a lettere di scatola. L'ironico titolo: *Problemi di optimum ecc.* (divenuto *di optium* nella redazione siracusana) si riferisce al fatto che io, fingendo di dare per scontato che la Scuola italiana fosse in corso di demolizione, suggerivo di far giusto quello che proponevano gli «innovatori», onde accelerare il più possibile il suo completo sfacelo. Ora (1967) i pericoli maggiori sembrano invece scongiurati e, forse, una piccola briciola del merito va, come ho

Probabilmente non sono d'accordo con te esattamente, ma certo lo sono fondamentalmente. Ritengo di essere favorevole in misura maggiore di quanto tu dimostri di esserlo a sostituire cose vecchie con cose nuove (anche bourbakiste), però sempre e soltanto nello spirito in cui tu stesso su alcuni esempi le approvi. Ad esempio, far uso sistematicamente della nozione di insieme non per introdurre cose pesanti ed inutili ma per parlare in modo più intuitivo di angoli, cerchi, rette, poliedri e ogni altra figura come insieme. E ciò si può ripetere, a mio avviso, per moltissime cose: l'importante è non introdurle per partito preso, in forma pesante assiomatica pomposa e intuitivamente vuota e quindi diseducativa, ma come ausilio in tutti i casi ove la nozione più potente riesce ad apparire tale (e quindi più semplice, chiara, suggestiva, facile a ricordare, piacevole, divertente, istruttiva) anche per presentare a un ragazzo le cose più adatte per la sua età e intelligenza e curiosità.

Odio tutto ciò che è piatto, pappagallesco, meccanico, mnemonico in senso deteriore, come gli enunciati e le regole e le dimostrazioni e i paroloni; va da sé che nessun cambiamento, per quanto approvassi l'introduzione di una certa "materia", mi apparirebbe tollerabile se si riducesse a cambiare la marca di un mangime per pappagalli. Se l'insegnamento matematico si fa consistere nel saper operare su dei segni senza sapere ([46]) *perché simili teorie sono state inventate, cosa rappresentano e a cosa servono, si tratterà sempre di un passatempo avente il solo effetto di incretinire e far odiare (giustamente) ciò che ai giovani viene fatto credere "sia (!)" la matematica; ed allora è perfettamente indifferente, a tale scopo, che segni ed operazioni rappresentino numeri od operatori o mappe o geroglifici e che siano tali che (per coloro che sanno cosa voglion dire) diano luogo a calcoli "giusti" o "sbagliati".*

Molti cordiali saluti

af.mo Bruno de Finetti ([47])

già accennato [...] anche all'energica azione da me intrapresa (con questa conferenza e altre successive [...]) quando mi resi conto che le cose si mettevano male. Tutto questo non vuol però dire – voglio ripeterlo – che io non veda l'opportunità, anzi la necessità, di cauti ritocchi agli attuali programmi d'insegnamento della matematica, ma *modus est omnibus rebus!*".

([46]) La parola "sapere" è aggiunta in interlinea.

([47]) La firma è autografa.

11. G. Prodi ([48]) a B. de Finetti, Pisa, 20.6.1965 ([49])

Pisa, 20-VI-'65

Caro de Finetti,

tante grazie della tua lettera. Sono lieto di constatare la coincidenza delle nostre opinioni in materia di insegnamento della matematica. Il fatto, del resto, non è del tutto casuale perché sulle mie opinioni hanno molto influito i tuoi scritti, che io ho letto sempre molto volentieri durante questi ultimi anni. Soprattutto mi ha interessato quel tuo sforzo di esemplificare, di tracciare linee concrete per un insegnamento della matematica veramente vivo e attuale.

Effettivamente, in questo momento sono preoccupato più che dei conservatori (i quali fatalmente dovranno presto arrendersi) di certi innovatori a schema fisso. C'è un modo di innovare che costa poco sforzo e che è caratteristico, purtroppo, di molti professori universitari: consiste nel considerare l'insegnamento della propria materia (sia a livello secondario che universitario) solo come una introduzione al proprio settore di ricerca. Mi spiego con un esempio, che io ritengo probante anche se dovrei, forse, fornire maggiore documentazione per sostenerlo. Qualche decennio fa era prevalente in Italia lo studio della geometria algebrica ("matrice prima di ogni problema matematico", come ho sentito dire da Severi ([50])*, una volta). La geometria algebrica generava, a livello universitario, un sottoprodotto decisamente brutto: lo studio delle*

([48]) Giovanni Prodi (1925-2010), matematico ben noto per i suoi contributi nel campo dell'Analisi, si laureò nel 1948 presso l'Università di Parma. Influenzato dalle ricerche di Renato Caccioppoli, si rivolse con entusiasmo a studi di Analisi funzionale. Nel 1956 fu chiamato dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Trieste per ricoprire la cattedra di Analisi matematica e qui rimase fino all'ottobre del 1963, quando si trasferì sulla medesima cattedra presso l'Università di Pisa. In questo ateneo tenne successivamente anche i corsi di Matematiche complementari. Ben presto iniziò ad occuparsi di problemi di didattica della matematica e alla fine degli anni Settanta diede l'avvio al progetto *Matematica come scoperta*, finalizzato all'insegnamento nelle scuole secondarie superiori. Su Prodi e i suoi contributi all'insegnamento della matematica cfr. Atti CIIM 2010 e gli articoli di A. Ambrosetti e A. Marino, G. Prodi, M.A. Mariotti, nel volume *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana* (I) IV, 2011, 337-394, 395-410, 411-432.

([49]) ASP *BdFP*, BD10-15-57, cc. 1r-2r. Lettera dattiloscritta su carta intestata 'Università di Pisa e Istituto Matematico Leonida Tonelli', con firma e *post scriptum* autografi.

([50]) Francesco Severi (1879-1961) illustre esponente della Scuola Italiana di Geometria Algebrica. Allievo di C. Segre, autore di importanti contributi di geometria enumerativa e sulla teoria invariantiva birazionale delle superfici algebriche, insegnò nelle Università di Parma, Padova e Roma. All'attività di ricerca accostò pure un forte impegno didattico e fu autore di apprezzati manuali di Geometria e di Aritmetica per le scuole medie e secondarie.

curve algebriche (parlo di quelle stereotipate curve "da concorso", che tuttora imperversano). Il sotto-sotto-prodotto a livello liceale era costituito da quelle noiose e formali discussioni dei problemi di secondo grado (in cui il parametro adombrava la seconda variabile dell'equazione).

A mio parere, questo è un esempio di come l'insegnamento possa diventare una caricatura della ricerca.

Adesso, dopo i successi dell'algebra in tutti i rami della matematica, si pensa che i nostri adolescenti debbano occuparsi con fervore e gioia di gruppi, anelli, moduli, ecc.. Naturalmente, non nego che i concetti fondamentali debbano entrare nell'insegnamento secondario, ma non in misure e in forme superiori alle capacità che hanno i giovani di esemplificare e di farne applicazione a concreti problemi. Se l'insegnamento della algebra si dovesse attuare con il fanatismo di certi suoi banditori, nel liceale divenuto ingegnere, avvocato o medico rimarrebbe, nei riguardi della matematica, un senso di vuoto o di incubo peggiore di quello che si produce ora.

Analoghi rilievi si potrebbero fare nel settore universitario. Alcuni innovatori pensano che lo scopo principale dell'insegnamento universitario sia quello di mettere gli allievi in condizione di capire i lavori di ricerca avanzata. E questo potrebbe andare benissimo se il "capire" fosse inteso in senso sufficientemente pieno ed umano. Invece si chiede ai giovani di inghiottire montagne di definizioni dicendo loro "andate avanti! vedrete poi a che cosa tutto questo servirà".

Tutto questo mi sembra frutto, oltre tutto, di un atteggiamento dogmatico (se non si tratta di fare accettare tesi indimostrate, si tratta pur sempre di fare accettare valori non discussi). Forse i giovani (che malgrado la fama di ribelli, in fondo sono assai duttili) si adattano di buon animo a queste imposizioni, ma c'è da dubitare che, in questo modo, si possano formare persone capaci di autonomia di ricerca e di sensibilità scientifica.

Mi sono un po' dilungato, ed ora chiudo, anche se ci sarebbero tante cose da dire (soprattutto al fine di fare qualcosa di concreto, prima che sia troppo tardi). Ti ringrazio molto anche dell'invio del tema della vostra "gara" ([51]), *tema che, come sai, mi interessa molto.*
Molti cordiali saluti.

Aff.mo Giovanni Prodi

([51]) La prima gara matematica, indetta a Roma e organizzata da de Finetti nell'ambito del CONARM (Comitato Nazionale Ricercatori Matematici) ebbe luogo il 27 settembre 1962. Dopo iniziative sporadiche in varie città, dal 1963 l'associazione Mathesis iniziò a organizzare

P.S. Presso la Scuola Normale funzionerà, durante il prossimo anno accademico, un seminario di logica, storia della scienza ecc. con una sezione di didattica matematica ([52]). *Io mi occupo di questa sezione e sono stato incaricato dal consiglio (fra cui Cecioni* ([53])*, De Giorgi* ([54])*, Carrara* ([55])*) di pregarti di venire a tenere una conferenza* ([56]).

annualmente le 'Gare matematiche nazionali', cui erano ammessi i migliori allievi, segnalatisi nelle gare locali, svolte presso gli Istituti di Matematica delle varie Università. De Finetti espose le sue considerazioni e riflessioni su questo tipo di esperienza in de Finetti A 1962b; de Finetti A 1963a; de Finetti L 1967, 67 e Appendice 1.4. Un resoconto delle Gare matematiche del 1965 è edito sul *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, 1965, 151-152.

([52]) Il 'Seminario di logica, critica e didattica matematica' fu istituito presso la Scuola Normale Superiore di Pisa nell'anno accademico 1962-1963 sotto la direzione di Francesco Cecioni e con la collaborazione di Ennio De Giorgi e Landolino Giuliano. Il Seminario era frequentato da studenti dell'Università, normalisti, e docenti di matematica e di filosofia delle scuole secondarie e dell'ateneo di Pisa. Negli anni 1962-65 vi tennero conferenze e lezioni noti studiosi italiani (Francesco Barone, Iacopo Barsotti, Ettore Casari, Salvatore Ciampa, Roberto Magari, Giovanni Sansone, Guido Zappa, ...) e stranieri (Jean Panvini, Józef Maria Bochenski, ...). Prodi vi partecipò come relatore fin dall'ottobre del 1963, sostenendo pure l'idea di inaugurare una collana di *Quaderni* relativi a questi seminari, che avrebbero potuto "particolarmente interessare gli insegnanti delle scuole secondarie" (Archimede, a. XVII, 1, 1965, 167-168).

([53]) Francesco Cecioni (1884-1968), laureatosi presso la Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1905 con Luigi Bianchi, dopo alcuni anni di insegnamento nelle scuole secondarie risultò vincitore di un concorso a cattedra nel 1925 e fu chiamato a Pisa, dove tenne la cattedra di Analisi algebrica ed infinitesimale e quella di Matematiche complementari. La sua produzione scientifica riguarda principalmente l'algebra e la teoria delle rappresentazioni conformi, ma si interessò anche di fondamenti della matematica e di questioni di didattica. Fece parte della Commissione italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) fin dalla sua creazione nel 1954.

([54]) Ennio De Giorgi (1928-1996), laureatosi in Matematica nel 1950 con Mauro Picone presso l'Università di Roma, nel 1959 fu chiamato alla Scuola Normale Superiore di Pisa, dove ricoprì per quasi quarant'anni la cattedra di Analisi matematica, algebrica ed infinitesimale. Studioso di grande talento ha dato un forte impulso alla scuola matematica pisana. È universalmente noto per aver completato nel 1957 la soluzione del XIX problema di Hilbert, oltre che per aver fondato la moderna teoria geometrica della misura e delle superfici minime. A partire dalla metà degli anni Settanta, stimolato dalla sua esperienza di insegnamento di base presso l'Università dell'Asmara, De Giorgi trasformò uno dei suoi corsi presso la Scuola Normale in un seminario dedicato a tematiche fondazionali. Cfr. A. Parlangeli, *Uno Spirito Puro. Ennio De Giorgi, genio della matematica*, Lecce: Milella, 2015.

([55]) Nello Carrara (1900-1993) fisico, noto soprattutto per i contributi dati allo studio delle onde elettromagnetiche e per l'introduzione del termine microonde, amico e collaboratore di E. Fermi e F. Rasetti, fu direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa dal 1947 al 1950. Successivamente fu professore di Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche all'Istituto Navale di Napoli (1950-55) e infine titolare della cattedra di Onde Elettromagnetiche all'Università di Firenze (fino all'1 novembre 1975).

([56]) Non risulta che Bruno de Finetti abbia partecipato come relatore al 'Seminario di logica, critica e didattica matematica' presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

Queste conferenze sono destinate principalmente ai professori delle scuole secondarie e agli allievi di matematica dell'indirizzo didattico. Spero vivamente che tu possa accettare!

12. B. de Finetti a G. Prodi, s.l., 7.7.1965 ([57])

7 luglio 1965
832360

Caro Prodi,

rispondo alla tua del 20, trovata rientrando a Roma ([58])*, e probabilmente imbucherò ancora con 2-3 giorni di ritardo perché cerco di lavorare un po' più tranquillamente in un posto in periferia piuttosto isolato.*

Sono molto lieto della concordanza di vedute, tanto più che la tua lettera la fa apparire ancor più marcata per cenni ad aspetti finora non esplicitamente trattati oltre a considerazioni nuove su aspetti già discussi.

Comincio dal cenno finale e più importante, riguardo "al fine di fare qualcosa di concreto, prima che sia troppo tardi". Penso che effettivamente sarebbe necessaria un'azione organica, e penso anche che vi siano molti colleghi consenzienti anche se poco propensi a prender posizione isolatamente, i quali aderirebbero con convinzione. Inutile dire che vi aderirei; piuttosto tengo a precisare che, avendo già espresso ripetutamente e vivacemente le mie idee (che non potrebbero essere condivise al 100% da tutti i consenzienti in senso lato), ed anzi desiderando riservarmi questa stessa libertà anche in seguito, non solo non ambirei ma neppure riterrei opportuno avere una posizione di rilievo nell'iniziativa. Inoltre, sotto certi aspetti, le mie opinioni possono apparire viziate dal fatto che sono un "matematico applicativo": penso sarebbe opportuno che fossero soprattutto dei matematici puri ma ragionevoli a contrapporsi agli analoghi specialisti troppo spinti nel temuto senso di tendenze antididattiche (algebristi contro algebristi, geometri contro geometri, analisti contro analisti). Non so bene quale sia la situazione complessiva, ma temo che fra algebristi, e più tra geometri, sia difficile trovare consensi. Ma sono certo che tu avrai conoscenza diretta o informazioni valide o possibilità di raccoglierne, meglio di me.

([57]) ASP *BdFP*, BD10-15-58. Lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.
([58]) Cfr. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 20.6.1965, lettera n. 11 di questo carteggio.

Altro argomento: la tua lettera dice molte cose che andrebbero, a mio avviso, pubblicate. Vorresti rielaborarla e farne un articolo? Ho ricevuto altre lettere e penso riassumere e pubblicare i punti essenziali, citando gli AA. se d'accordo; potrei utilizzarla così se non preferisci la prima soluzione? (59)

Quanto all'invito per una conferenza alla Sc. Normale, ti ringrazio e in linea di massima accetto; ne riparleremo a suo tempo per epoca e (60) *argomento* (61).

Molti cordiali saluti

Bruno de Finetti

13. G. Prodi a B. de Finetti, Longiarù, 19.7.1965 (62)

Longiarù (Val Badia)
19 luglio 1965

Caro de Finetti,

tante grazie della tua lettera, che mi è stata rinviata qui, dove sono in vacanze.

Anzitutto, mi ha fatto molto piacere sentire che sei disposto a venire a tenere una conferenza presso la Scuola Normale Superiore (63)*; anche a nome di De Giorgi* (64) *ti ringrazio vivamente.*

Sono contento del fatto che, continuando ed approfondendo il discorso sull'insegnamento, ci troviamo sempre concordi. Quanto ai colleghi che condividono le nostre idee-base, io credo di poter citare De Giorgi e Dolcher (65)*; altri colleghi potrebbero forse aderire, ma, di fatto, non si occupano per nulla di questi problemi.*

(59) La lettera di G. Prodi a B. de Finetti del 20.6.1965 fu integralmente pubblicata nell'articolo Opinioni, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, n. 5 (de Finetti A, 1965e), alle pagine 412-414.

(60) La congiunzione 'e' è aggiunta.

(61) Cfr. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 20.6.1965, lettera n. 11 di questo carteggio.

(62) ASP *BdFP*, BD10-15-59. Lettera dattiloscritta con firma autografa, cc. 1r-2r, su carta intestata 'Università di Pisa e Istituto Matematico Leonida Tonelli'.

(63) Cfr. B. de Finetti a G. Prodi, s.l., 7.7.1965, lettera n. 12 di questo carteggio.

(64) Ennio De Giorgi (1928-1996). Cfr. *supra* n. 54.

(65) Mario Dolcher (1920-1997) laureatosi alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1942, continuò gli studi a Zurigo sotto la guida di Heinz Hopf. Specialista di topologia bidimensionale e strutture matematiche, nel 1956-57 fu chiamato all'Università di Trieste dove iniziò la sua collaborazione con G. Prodi che si trasformò in duratura amicizia. Fra l'altro, Dolcher e Prodi animarono a Trieste un seminario di avviamento alla ricerca matematica, e dal 1958 orga-

Alla fine di luglio o ai primi di agosto De Giorgi e Dolcher saranno qui (in questo paesino sperduto, e pressoché sprovvisto di strada, luogo ideale per matematici in vacanza). Farò leggere loro la tua lettera (66) *e vedremo se si può fare qualcosa; De Giorgi ed io siamo membri della commissione scientifica dell'U.M.I.* (67) *e, in quella sede, si potrà forse agire con una certa efficacia.*

Quanto alle cose che ti dicevo nella mia lettera (68)*, mi sentirò onorato se vorrai farne uso. A me, poi, riesce molto difficile scrivere articoli (ho ancora il "complesso del tema" che avevo al liceo); invece, per lettera, riesco ad esprimermi più spontaneamente. Dunque, in definitiva, tu mi risparmi una fatica ed io te ne sono grato.*
Ricevi i miei più cordiali saluti con molti auguri di buone vacanze

Giovanni Prodi

Mio indirizzo fino al 10 agosto:
Albergo Valbuna. Longiarù (Piccolino)
Val Badia (Bolzano)

14. G. Prodi a G. Ricci (69), Pisa, 19.4.1967 (70)

Pisa, 19 aprile 1967

Caro Professore,

ho ricevuto già da qualche giorno la copia della lettera circolare dei matematici iugoslavi, ed ora ricevo il Suo espresso (71).

nizzarono le 'Gare matematiche'. Cfr. G. Prodi, Un ricordo di Mario Dolcher, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, XXIX, 1997, 221-223 e G. Tironi, In memoriam Mario Dolcher, *Mathematica Pannonica*, 8/2, 1997, 165-172.

(66) Cfr. B. de Finetti a G. Prodi, s.l., 7.7.1965, lettera n. 12.

(67) Prodi fu membro della Commissione scientifica dell'UMI dal 1961 al 1967 e dal 1973 al 1982. Ennio De Giorgi lo fu dal 1961 al 1982.

(68) Cfr. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 20.6.1965, lettera n. 11.

(69) Giovanni Ricci (1904-1973), allievo di Luigi Bianchi, fu docente interno della Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1928 al 1936. Successivamente fu professore di Analisi a Parma e all'Università di Milano. I suoi principali contributi scientifici riguardano questioni di geometria differenziale, la teoria delle funzioni, la teoria delle serie e quella dei numeri. Prodi era stato allievo di Ricci a Parma, e suo assistente a Milano.

(70) ASP *BdFP*, BD10-15-60, lettera autografa su carta intestata: 'Università di Pisa e Istituto Matematico Leonida Tonelli', cc. 1r-v.

(71) Si allude qui alle Olimpiadi internazionali della matematica (IMO), che si svolsero per la prima volta nel 1959 in Romania. Esse erano dirette, inizialmente, solo ai ragazzi delle nazioni appartenenti al Patto di Varsavia. Dal 1967 (IX Olimpiadi internazionali della

Purtroppo non posso esserLe utile in questa questione; già da qualche anno non promuovo più gare matematiche ([72]). *Tra l'altro, ho dovuto per due anni consecutivi essere commissario per l'esame di ammissione alle S. N. S. e ho potuto in questo modo saturare tutte le mie energie ed inventive nel settore "gare".*

Come ricorderà, io ero contrario alle gare nazionali e lo sarei ancora di più alle internazionali, ma come si può evitare di battersi per tenere

matematica, disputate a Cetinje, all'epoca Jugoslavia) vennero invitate altre nazioni, fra cui l'Italia, che dopo vari tentennamenti vi partecipò. Per selezionare la rappresentativa italiana alle IMO vennero organizzate le Gare nazionali, organizzate dalla Scuola Normale Superiore di Pisa, che per le prime 4 edizioni si svolsero a Viareggio. Per ottenere la partecipazione della squadra italiana alle Olimpiadi Matematiche del 1967, si dovettero superare molteplici difficoltà. Fu Ricci a tenere i contatti con i colleghi jugoslavi e con il Ministero italiano per conto dell'UMI e a relazionare in merito a questa iniziativa (cfr. Riunione della Commissione Scientifica dell'U.M.I. dei giorni 3 e 4 giugno 1967, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, (3) 22, 1967, 392). La relazione sulla partecipazione della squadra italiana alle Olimpiadi del 1967 fu preparata da Tullio Viola (cfr. Riunione dell'Ufficio di Presidenza dell'U.M.I. del 6 settembre 1967, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, (4) 22, 1967, 552-553, 564): "Viola presenta poi il seguente ordine del giorno, corredato da oltre 50 firme di adesione, sulle Gare Internazionali di Matematica per studenti di Scuole Secondarie (*): «Le Gare Internazionali, note col nome di Olimpiadi, si svolgono ogni anno regolarmente a partire dal 1959. Alla IX Olimpiade, svoltasi nello scorso mese di Luglio in Jugoslavia, è stata per la prima volta invitata anche l'Italia. Oltre all'Italia, vi hanno partecipato: la Bulgaria, la Cecoslovacchia, la Germania Orientale, l'Inghilterra, la Jugoslavia, la Mongolia Esterna, la Polonia, la Romania, la Svezia, l'Ungheria e l'Unione Sovietica. La Francia ha partecipato soltanto alla seconda prova, a titolo sperimentale. Alla prossima X Olimpiade, che avrà luogo nell'Unione Sovietica nel Luglio 1968, hanno già assicurato il proprio concorso le 11 nazioni indicate ed è prevista come probabile la partecipazione di altre nazioni occidentali. Sembra certa quella della Francia. Anche l'Italia verrà nuovamente invitata. A conoscenza del risultato lusinghiero raggiunto dall'Italia nel suo primo concorso, i sottoscritti chiedono che l'Assemblea dell'U.M.I. discuta il problema, nella convinzione che esso presenti aspetti interessanti per l'avvenire degli studi di matematica in Italia. Essi ritengono che convenga non soltanto accettare l'invito suddetto, ma anche provvedere conseguentemente in tempo utile alla formazione della squadra dei concorrenti ed alla seria preparazione dei medesimi. Propongono infine che la Presidenza dell'U.M.I. inizi fin d'ora le operazioni necessarie ad interessare sull'argomento le autorità governative; anche per ottenere da queste gli aiuti economici indispensabili». L'ordine del giorno viene approvato all'unanimità, dopo brevi interventi di De Giorgi, Zappa, Stampacchia, Martinelli". Sulla vicenda cfr. anche il resoconto a cura della Direzione, Olympiad 1965 Berlin, Olympiad 1966 Sofia, IX Olimpiade Matematica Internazionale 1967, *Periodico di Matematiche*, (IV) 45, 1967, 321-325.

([72]) Prodi organizzò delle "Gare matematiche" per studenti a Trieste, a cominciare dal 1958, con l'aiuto di alcuni colleghi e della locale sezione della Mathesis, traendo spunto dalle gare organizzate in Ungheria e Unione Sovietica. L'esperienza delle gare matematiche, proseguita almeno fino al 1963, convinse Prodi del fatto che "per interessare veramente i giovani occorrerebbe insegnare più «per problemi» che «per teorie» (G. Prodi, Lettera alla Direzione, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, 1965, 148-150).

alto il sacro nome della Patria? Abbiamo visto persone ignare di calcio spasimare per le sorti della nostra rappresentanza ai campionati // mondiali in Inghilterra, dunque ... (73).

Penso che non ci sia bisogno di fare una gara preliminare di selezione; basterà esaminare i compiti (meglio se di più di una gara) svolti da qualcuno dei migliori concorrenti nelle varie gare che si sono tenute. Penso che de Finetti, soprattutto, abbia qualche asso nella manica e possa essere l'Herrera della nostra squadra (74).

Come saprà, forse, de Finetti svolge una interessante esperienza di "Club matematico" a Roma (75). *Fra i suoi giovani ve ne sono certamente anche di coloro che hanno ampliato la loro preparazione culturale.*

Sono spiacente di non poter essere all'UMI; da moltissimi mesi avevo preso un altro impegno (76).

Tra non molto, poi, dovrò partire per l'Asmara.

Con i più cordiali saluti a Lei e a tutta la Sua famiglia

aff.mo Giovanni Prodi

15. G. Prodi a B. de Finetti, Pisa, 14.5.1967 (77)

Pisa, 14 maggio 1967

Caro de Finetti,

tante grazie della tua lettera, e grazie per avermi fatto conoscere quella da te mandata a Fanfani. Tu sai dire le cose molto bene, e mi congratulo sinceramente con te.

(73) Allusione scherzosa all'ottava edizione dei Campionati mondiali di calcio, che si svolsero in Inghilterra dall'11 al 30 luglio 1966.

(74) Allusione scherzosa a Helenio Herrera (1910-1997), famoso allenatore dell'Inter negli anni 1963-66.

(75) Per rafforzare i contatti con gli studenti delle scuole secondarie, negli anni Sessanta de Finetti e altri colleghi tenevano a Roma delle riunioni di "conversazione matematica" denominate appunto "Club matematico". Il "Club matematico" era stato istituito da Giandomenico Majone nel 1964, su ispirazione di una sua precedente esperienza all'Università di Berkeley, e aveva luogo tutti i venerdì, all'Istituto Matematico Guido Castelnuovo dell'Università La Sapienza di Roma. Per notizie su quest'iniziativa si veda de Finetti L 1967, 67, qui Appendice 1.4; una conversazione al "Club matematico" di Roma è edita nell'articolo Paradossi sulle medie, *Periodico di Matematiche*, (IV) 44, n. 2, 138-150 (de Finetti A 1966b). Un vivido ricordo della partecipazione di de Finetti al "Club matematico" è offerto da Nicotra 2002, 7.

(76) L'VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana si sarebbe tenuto a Trieste nei giorni 2-7 ottobre 1967.

(77) ASP *BdFP*, BD10-15-61. Lettera autografa, c. 1r, su carta intestata 'Università di Pisa e Istituto Matematico Leonida Tonelli'.

In questo momento, i più desolati sono proprio i più sinceri e tradizionali amici dell'America. O dobbiamo credere che ci sono crisi di follia, ricorrenti a cicli, che non risparmiano nessuno? ([78])

Nel frattempo è intervenuto l'affare Fenoaltea: assurdo sul piano diplomatico, ha avuto, a mio parere, il pregio di chiarire la posizione del nostro governo. ([79])

Ora sono in partenza per l'Asmara (ma non ci starò tanto).

Con i più cordiali saluti e ringraziamenti

Giovanni Prodi

16. B. de Finetti a F. Tricomi, s.l., 16.7.1967 ([80])

16 luglio 1967
00199-832360

Caro Tricomi,

ho letto con molto piacere la tua dell'8 corr. e la copia del ms. su Chisini ([81])*. Il trovarti d'accordo su un "test" abbastanza variato come il "Saper vedere"* ([82]) *mi conforta nell'idea che speravo poter affermare, di una sostanziale identità di vedute, anche se certe diverse*

([78]) Si allude all'inasprirsi della guerra in Vietnam, e in particolare ai bombardamenti ordinati dal presidente L.B. Johnson sul Vietnam del Nord.

([79]) Sergio Fenoaltea (1908-1995) uomo politico e funzionario diplomatico italiano, membro del Partito d'Azione e del Partito Socialista Democratico Italiano. Nel 1967 rassegnò le dimissioni dalla carica di ambasciatore a Washington per un dissenso con il ministro degli esteri Amintore Fanfani, che a suo giudizio non aveva sostenuto con sufficiente fermezza gli Stati Uniti in merito alla guerra in Vietnam, in un suo discorso pubblico.

([80]) ASP *BdFP*, BD11-03-05. Lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

([81]) Oscar Chisini (1889-1967) dopo aver compiuto gli studi all'Università di Bologna con Federigo Enriques ed aver conseguito la laurea nel 1912, ricoprì vari incarichi d'insegnamento nelle Università di Bologna, Modena, Cagliari e infine Milano. A lui si devono l'introduzione di un originale concetto di media (1929) e numerosi importanti contributi di geometria algebrica. Chisini si impegnò anche nella didattica e nella divulgazione della matematica: scrisse vari manuali universitari, apprezzati testi per le scuole secondarie e fu direttore della rivista *Il Periodico di matematiche* dal 1946 al 1967. Alla morte di Chisini fu pubblicato un volume speciale del *Periodico di Matematiche* [(IV) 46, n. 1-2, 1968] in sua memoria, con saggi di diversi amici, colleghi e allievi (C.F. Manara, E. Carletti, A. Natucci, A. Terracini, ...). In quel volume F. Tricomi pubblicò l'articolo Questioni attuali sull'insegnamento matematico nelle scuole secondarie, *Periodico di Matematiche*, (IV) 46, 1968, 372-375.

([82]) De Finetti L 1967, qui in Appendice 1.4.

intemperanze tue e mie a volte apparivano dissonanti. Del resto, se si tratta di dettagli, nulla di male, ché differentemente due teste [*non*] *ragionano in modo identico a meno che non siano fabbricate (o almeno imbottite) in serie.*

I due punti su cui esprimi riserve sono molto marginali. Comunque ho accennato alle geodetiche con proiezione a cuspide (83) *non di mia iniziativa bensì per rilevare come l'intuizione sottostante a certe risposte sul cono era fondata (e la forza che farebbe altrimenti slittare il cappio mi sembra giustificazione intuitivamente sufficiente). Ma può darsi che sarebbe stato meglio non dire nulla o aggiungere qualcosa in più (magari come nota in calce per i più diligentemente curiosi). Quanto a carte geografiche con curve di equidistanza dalla costa (quasi un fregio per far meglio risaltare il distacco tra terra e acqua) sono certo di averne viste spesso. Non saprei dove cercare un esempio, ma, se mi capiterà di trovarne, te li segnalerò.*

Pensavo invece avresti avuto riserve sui punti in favore di cose moderne e in particolare vettoriali (84) *(sostanzialmente ispirate a metodi di – per fare una citazione "provocatoria" – Burali-Forti ...* (85)*), benché sia sempre mia cura di preparare il terreno e giustificare poi l'uso con motivi pratici. Esempi, e modi di presentazione, tipo quello per prodotto di omotetie* (86)*, ti sembrano convincenti come uso di algoritmi "assoluti", o come preferisti sostituirli? Te lo chiedo per conoscere il tuo pensiero e riflettervi, vagliare col tuo aiuto il pro e il contro; scusa se te lo dico, ma a volte può sembrare che l'autore desideri sentirsi dire che l'altro è d'accordo, e, benché speri che tu non mi disprezzi tanto da supporre che il mio desiderio sia questo, potevo temere che indulgessi a fare come se ritenessi questo per non "farla troppo lunga". Naturalmente, se non hai tempo e voglia di "farla lunga" su questo argomento puoi dirmelo liberamente, e non voglio assolutamente rubarti più tempo di quanto hai avuto la bontà di dedicare al mio volumetto.*

(83) De Finetti L 1967, 15-17, qui in Appendice 1.4.

(84) De Finetti L 1967, 43-47, qui in Appendice 1.4.

(85) Cesare Burali-Forti (1861-1931), celebre esponente della Scuola di Peano, docente presso l'Accademia Militare di Torino dal 1887, insieme a Tommaso Boggio, Roberto Marcolongo e Matteo Bottassso fu uno dei più convinti sostenitori del calcolo vettoriale e omografico, sia a livello di attività scientifica sia nell'insegnamento.

(86) De Finetti L 1967, 44-47, qui in Appendice 1.4.

Quanto a programmi (87) *ecc., ti manderò un estratto di articolo* (88) *uscito sull'ultimo n^o del "Periodico" (forse lo ricevi e leggi?). Ottimo il tuo articolo in memoria di Chisini* (89) *(vedi che su ab $\neq$ ba ho detto al modo tuo (e di ... Castelnuovo) in "Saper vedere")* (90)*. Per quel fasc* (91)*. io farò un articolo sulla definizione di media di Chisini* (92)*, che indirettamente condurrà a qualche analoga conclusione "filosofico" – didattica (il Ch. vi pensò casualmente, sentendo parlare di medie in esami liceali, e ne penetrò il significato che gli specialisti collocavano in aspetti banali e insignificanti).*

Molti cordiali saluti

aff.mo Bruno de Finetti

17. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970 (93)

Rome, May 9, 1970

Dear Professor Pólya:

It is probably for an unexpected reason I am writing to you: I want a picture of you (so much better if a colour picture or if it exists a moving one, a short film, about 4 seconds, with your face).

The reason is, there is a program to produce some (for the moment one, to begin with) mathematical films, in a rather spirited way, according to (I hope) your pedagogical suggestions. A little boy (animated drawing) named "genietto Giorgetto" is introduced as a spirit suggesting good ideas and following your prescription. The speaker should say about so: Here is the "genietto Giorgetto", produced by "Corona

(87) Si allude alla formulazione dei programmi di Matematica per il primo biennio e per il triennio dei nuovi licei, che furono discussi e deliberati nel corso di due incontri tenutisi presso il Centro Europeo dell'Educazione, Villa Falconieri, Frascati, nei giorni 23-26 febbraio 1966 e 16-18 febbraio 1967.

(88) Cfr. B. de Finetti, Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti critici, suggerimenti, *Periodico di Matematiche*, (IV) 45, n. 2, 75-153 (de Finetti A 1967a).

(89) F. Tricomi, Questioni attuali sull'insegnamento matematico nelle scuole secondarie, *Periodico di Matematiche*, (IV) 46, 1968, 372-375.

(90) Cfr. de Finetti L 1967, 42 e, in questo volume l'Appendice 1.4.

(91) Alla morte di Chisini fu pubblicato un volume speciale del *Periodico di Matematiche* [(IV) 46, n. 1-2, 1968] in sua memoria, con saggi di diversi allievi.

(92) B. de Finetti, Oscar Chisini e il Suo insegnamento, *Periodico di Matematiche*, (IV) 46, n. 1-2, 26-33 (de Finetti A 1968c).

(93) ASP *BdFP*, BD10-15-38, lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

Movies" and Bruno de Finetti, in order to show you that mathematics is not only interesting and useful but also easy and amusing ... That has been proved chiefly by GEORGE PÓLYA, genial Hungarian mathematician, unsurpassed in the art of how to teach mathematics...(*) ([94]).

During the last sentences I would like your picture appears dissolving in the black ground in a part of which Giorgetto rests and welcomes your picture (he is a white drawing over black). If this scene will be realized happily, it could be serve as opening sequence for all of the films in a series.

I hope you will not consider that too humoristic, and agree to send me a picture or film with the agreement for this usage.

As for the translation of "Saper vedere", the agreement between Loescher and Wadsworth has been reached but the project is suspended because Mr. Kugushev ([95]) *is not able to find a translator* ([96]). *I will try to find one through some friends, but that is not so easy.*

My book on Probability seems finally near to appear ([97]); *it is too long to suppose you can do anything more than seeing here and there a figure or a heading, but that could suffice to enable you to tell if the whole seems to you more or less agreeably presented.*

([94]) Il film progettato da de Finetti ebbe una lunga gestazione (cfr. ASP *BdFP*, Subseries 1. *Theory of Teaching and School Reform*, 1957-1981, Box 11, Folder 15, *Corona Cinematografica*, 1970-1974). Progettato fin dal 1970, il film fu realizzato dalla società Corona Cinematografica con il titolo *How to solve it* nel dicembre del 1972, approfittando di un soggiorno a Roma di G. Pólya. Il cortometraggio, della durata di nove minuti, è così descritto da de Finetti: "È un dialogo tra Pólya (parla inglese) e un pupazzo "Giorgetto" (retto da me) che, alle domande, risponde facendo apparire sullo schermo (diapositive) le successive fasi di costruzione della risposta al problema-tipo usato da Pólya in varie occasioni (volume del tronco di piramide). Tale film (con titoli in inglese e italiano) sarà pronto fra breve e potrebbe venire inviato, supposto venisse superata la riserva del non essere di animazione; il titolo è HOW TO SOLVE IT" (B. de Finetti a G. Lucchini, 25.10.1973, in Lucchini 2010). La traccia parlata del film è edita nel volume di *Atti* dei due convegni su *Il cinema d'animazione e l'insegnamento della matematica* pubblicati in ISCA informazioni, a. 2, n. 4 e a. 3, nn. 1-2, ottobre 1974-aprile 1975, alle pagine 97-98.

([95]) Alexander (Alex) Kugushev, giornalista ed editore presso la casa editrice Wadsworth negli anni Settanta, Ottanta e Novanta.

([96]) Il volumetto di B. de Finetti, *Il "saper vedere" in Matematica*, pubblicato a Torino nel 1967, aprì la serie didattica dell'Enciclopedia Monografica Loescher (cfr. de Finetti L 1967 e, in questo volume l'Appendice 1.4). Unanimemente apprezzato in Italia e all'estero, fu tradotto in tedesco e in polacco, ma non in inglese. Sulle lunghe e complesse trattative per la sua versione inglese cfr. i documenti in ASP *BdFP*, Subseries 3. *Publishing Activities*, 1937-1987, Box 4, Folder 4, *Savage Saper Vedere*, 1968-1971 e Folder 5, *Saper vedere traduz.*, 1971-1977.

([97]) Si tratta del volume di Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, 2 voll., Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L 1970).

Let me ask to give quickly an answer in order to know if the presentation of the film in the said way is possible, without delaying its production too much. If there is no better solution, could you tell me whether a picture of you is available in some book or from other similar sources? Thank you in advance, and best greetings.

(*) Then it follow (98)*: After him the "genietto Giorgetto" takes his name and – let us hope – also a bit of his ability and of his spirit.*

Sincerely yours
Bruno de Finetti
via Nicolò Piccinni, 51
00199-ROMA (Italy)

18. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971 (99)

Hotel Zürichberg,
CH-8044, Zürich, le 26 mai 1971

Cher M. de Finetti,

Je regrette énormément que cette réponse à votre lettre du 21 avril est tellement en retard. Elle a été réexpédiée de Stanford avec beaucoup de retard et j'ai réfléchi là- dessus longuement bien qu'avec peu de résultat.

Cela m'ennuie beaucoup que l'affaire avec Wadsworth (que je vous ai recommandé) est arrivée dans une impasse (100)*. Mais il en reste du moins quelque chose de bon : que L. J. Savage s'occupe de la traduction de «Saper vedere». Les opinions favorables reçues (par Wadsworth) pourraient aussi être utiles* (101)*. Je crains qu'il n'y a rien à faire avec*

(98) Le parole "Then it follows" sono aggiunte e autografe.

(99) ASP *BdFP*, BD10-15-39, lettera autografa, cc. 1r-v.

(100) Il volumetto di B. de Finetti, *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume l'Appendice 1.4), apprezzato in Italia e all'estero, fu tradotto in tedesco e in polacco, ma non in inglese. De Finetti aveva cercato, ma senza successo, di contattare in proposito la casa editrice Wadsworth. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970, lettera n. 17 di questo carteggio, e nota 96.

(101) Leonard Jimmie Savage (1917-1971), eminente matematico e statistico, collaboratore e amico di de Finetti nonché principale promotore negli Stati Uniti della concezione soggettiva della probabilità. Su proposta di Savage, la traduzione inglese del volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4) fu affidata alla sua seconda moglie Jean Strickland (1921-2003). Quest'ultima, dopo aver conseguito la laurea presso la DePauw University a Greencastle (Indiana) nel 1942, aveva intrapreso una carriera nell'editoria, dapprima in California, e successivamente come *freelance* a Washington, D.C.

mes deux éditeurs américains : On a déjà essayé Wiley sans résultat et mes relations avec la personne importante de Princeton University Press (dit entre nous) ne sont pas trop bonnes.

Auriez-vous de l'intérêt dans une traduction allemande de «Saper vedere» ? ([102]) *Je pourrais en parler à Birkhäuser.*

Mais pour la traduction anglaise – la meilleure chose qui m'est venue a l'idée est d'en parler à Madame Anneli Lax que je verrai à Palo Alto en juillet ([103]).

J'ai honte que je ne vous ai pas remercié plus tôt de votre "Teoria delle Probabilità" ([104]) *– en le feuilletant j'ai rencontré plusieurs passages qui m'ont vivement intéressé et que j'ai voulu regarder de plus près, mais venait la préparation de notre voyage et je n'y suis pas arrivé. Ça me fait plaisir que Wiley publiera la traduction anglaise* ([105]).

J'espère toutefois que cette traduction vous donnera moins de peine que je n'ai eue avec la traduction anglaise de Polya-Szegö "Aufgaben und Lehrsätze" – elle a occupé presque tout mon temps depuis six mois ou davantage et ce n'était pas un plaisir 100% ([106]).

Nous restons ici (en Suisse) et mon adresse reste la même jusqu'au 23 juin quand nous prendrons l'avion pour la California.

Avec mes meilleures salutations, bien cordialement à vous

George Pólya

([102]) Il volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4) sarebbe stato tradotto in tedesco da Lulu Hofman Bechtolsheim, con il titolo *Die Kunst des Sehens in der Mathematik,* a Basel, per i tipi Birkhäuser, nel 1974.

([103]) Anneli Cahn Lax (1922-1999), moglie del matematico Peter Lax, dopo aver ottenuto nel 1955 un PhD presso la New York University con la tesi intitolata *Cauchy's Problem for a Partial Differential Equation with Real Multiple Characteristics*, diretta da Richard Courant, fu professore presso la stessa New York University. Nel 1970 Anneli Cahn Lax era *editor* della Mathematics Association of America's New Mathematical Library Series.

([104]) Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, 2 voll., Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970). De Finetti aveva annunciato a Pólya l'imminente uscita del volume (cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970, lettera n. 17 di questo carteggio), e ne aveva inviato in omaggio al collega una copia in edizione italiana.

([105]) Si allude alla traduzione inglese dell'opera di Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970) che apparve, a cura di Antonio Machi e Adrian Smith e con il titolo *Theory of Probability*, a New York, presso J. Wiley, nel 1975.

([106]) Il celebre volume di G. Pólya e G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, apparve nel 1925 a Berlino, presso Springer, nella collezione *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* (voll. 19 e 20). La sua quarta edizione (1970-71) fu tradotta in inglese da Dorothée Aeppli (vol. I) e da Claude E. Billigheime (vol. II) con il titolo *Problems and theorems in analysis* (New York: Springer, 1972, 1976).

19. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 30.5.1971 (107)

Rome, le 30 Mai 1971

M. le Prof. George Pólya
Hotel Zürichberg
CH-8044, ZÜRICH (Svizzera)

Cher M. Pólya,

merci beaucoup de votre lettre du 26 mai (108) *et de l'intérêt si vivant que Vous continuez à montrer pour «Saper vedere».*

Je serai surement heureux s'il est possible de faire une traduction allemande, et si vous en pouvez parler à Birkhäuser avant votre départ de Suisse (109)*.*

En ce qui est de la traduction anglaise (110)*, il n'y a aucune nouvelle chose à dire; Mc Graw-Hill (precisely: Howard S. Aksen* (111)*, Senior Editor) m'a écrit demandant (sur conseil de David Blackwell* (112)*) s'il était possible d'avoir une option pour traduire "mes livres de probabilité". En répondant que le Traité et une collection d'articles étaient déjà confiés à Wiley* (113)*, j'ai mentionné d'autres livres ou collections d'articles possibles dans le champ de la probabilité ou voisins, et enfin j'ai mentionné aussi (bien que loin du*

(107) ASP *BdFP*, BD10-15-40, lettera dattiloscritta, c. 1r.

(108) G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18 di questo carteggio.

(109) Il volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4) sarebbe stato tradotto in tedesco da Lulu Hofman Bechtolsheim con il titolo *Die Kunst des Sehens in der Mathematik* (Basel: Birkhäuser, 1974). Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18 di questo carteggio e nota 102.

(110) De Finetti condusse lunghe e complesse trattative per la traduzione inglese del volumetto *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume l'Appendice 1.4). Nonostante gli interventi di G. Pólya per cercare un accordo fra la casa editrice Loesher e vari editori statunitensi (Wadsworth, Wiley, Princeton University Press), e per individuare un traduttore adatto (Jean Strickland Savage, Anneli Cahn Lax), l'iniziativa non andò in porto. Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18 di questo carteggio.

(111) Howard Stephen Aksen, nato nel 1936, iniziò la carriera nell'editoria nel 1959; fu *editor-in-chief* (1967-1971) e successivamente *senior editor* (1971-1973) della McGraw-Hill Book Company di New York City.

(112) David Blackwell (1919-2010), statistico statunitense, ha dato importanti contributi alla teoria dei giochi, alla teoria della misura, alla probabilità e alla statistica. Nel 1979 ottenne il John von Neumann Theory Prize per la ricerca operativa.

(113) De Finetti allude qui alla traduzione inglese dei due volumi della sua opera *Theory of Probability*, New York: J. Wiley, 1975.

champ demandé par Blackwell) l'existance de Saper vedere (et d'un commencement de traduction) (114).

À propos de Princeton Univ. Press, est-ce que Vous croyez qu'en principe le type de livre comme Saper vedere pourrait leur intéresser? (115) *Et, dans ce cas, serait-il opportun de demander de leur faire cette proposition par quelqu'un qui est à Princeton (par example M. Kuhn* (116)*, qui a été plusieurs fois et pour des longues périodes à Rome, connait très bien l'italien, etc. ?(Malheureusement, c'est très difficile qu'il réponde; je ne sais pas s'il est peut-être plus facile pour lui de prendre contact avec Princ. Un. Pr.).*

Je suis heureux d'apprendre que Vous avez trouvé des passages dans Teoria d. Prob (117)*. qui Vous ont "vivement intéressé" et que Vous envisagez de "regarder de plus près"* (118)*. J'aimerais beaucoup, si vous trouverez le temps de les regarder et le fait de m'en écrire ne vous donnera trop d'ennui, de savoir quels sont ces points et votre point de vue à cet égard (raisons d'accord ou désaccord, doutes ultérieurs qu'on devrait discuter et si possible éclaircir, etc.).*

En ce qui est de la traduction de Wiley, je suis déjà persuadé que ce sera pour moi un effort épouvantable. Si ce ne sera pas beaucoup plus que pour Vous celle de Pólya-Szegö, je serais très satisfait (119).

Pour le film, on m'a assuré que après l'installation dans la nouvelle siège (les adaptations du bâtiment sont terminées, tout pourra fonctionner dans 2-3 semaines) on ira travailler vite (120)*. La Unione Mat.*

(114) Grazie all'intervento di L.J. Savage, una traduzione inglese del volumetto *Il "saper vedere" in Matematica* era stata iniziata a cura di sua moglie.

(115) G. Pólya e de Finetti avevano discusso dell'opportunità di proporre la traduzione inglese del volume *Il "saper vedere" in Matematica* alla Princeton University Press. Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18 di questo carteggio.

(116) Harold William Kuhn (1925-2014) matematico statunitense celebre per i contributi alla teoria dei giochi, ma impegnato anche sul fronte della didattica della matematica, era professore alla Princeton University. Nel 1980 vinse il John von Neumann Theory Prize con David Gale e Albert W. Tucker. Collega ed amico di John Forbes Nash, ne ha curato l'edizione di numerosi scritti. Kuhn, legato a de Finetti da un amichevole rapporto di collaborazione, era stato più volte in Italia: era stato uno dei docenti stranieri al terzo ciclo del Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E. 1965) dedicato ai Metodi matematici di ottimizzazione nell'economia, diretto da de Finetti, e al II Corso C.I.M.E. di Economia Matematica, svoltosi a Frascati nell'agosto del 1966.

(117) Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, 2 voll., Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970).

(118) G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18.

(119) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18.

(120) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970, lettera n. 17 e nota 94. De Finetti allude qui al trasferimento di sede della società Corona Cinematografica, incaricata della produzione del film *How to solve it*.

Italiana n'a réussi à prendre les contacts pour avoir votre film (121) *et les autres signalés (il semble que les distributeurs ont changé, ou je ne sais pas quell'autre (sic) chose est survenue).*

Je regrette qu'aussi cette fois je n'ai pû (et ne peu) profiter de votre séjour en Europe pour vous rencontrer. Mais j'aurais intérêt à parler avec Vous de beaucoup de choses, et j'ai écarté l'idée de vous rejoindre pour un jour à Zurich (même sous l'hypothèse que cela ne vous aurait dérangé, car cela n'aurait suffi qu'à proposer une liste de sujets sans possibilité de parvenir à quelque chose de suffisamment constructif (122)*.*

Avec mes meilleures salutations, bien cordialement à vous

Bruno de Finetti.

20. G. Pólya a B. de Finetti, Palo Alto, 9.10.1971 (123)

Palo Alto,
Oct. 9, 1971

Dear de Finetti,

Many thanks for your letters of September 7 and September 19 (124)*. I hope that your trips to Urbino and Bari were a success and now you are comfortably settled at home* (125)*.*

(121) Nel 1965 il Committee on Educational Media della Mathematical Association of America aveva realizzato il film *Let Us Teach Guessing*, con protagonisti G. Pólya e una classe di studenti di matematica. In questo film, della durata di un'ora, Pólya illustrava il suo approccio alla didattica conducendo la classe a congetturare come risolvere un problema di geometria tridimensionale. Il problema consisteva nel determinare il numero di parti in cui lo spazio tridimensionale è diviso da 5 piani arbitrari. Nel film Pólya – pur senza arrivare alla dimostrazione – esaminava e commentava varie strategie risolutive, identificava gli 'steps' coinvolti nei ragionamenti plausibili connessi a questo problema specifico e i nodi problematici da affrontare nella risoluzione di un qualsiasi problema di matematica. Il film era stato prodotto da Kurt Simon e distribuito a Washington D.C. dalla casa Bryon Color-Correct Prints. Sui contatti che l'UMI aveva avuto con la Mathematical Association of America in merito all'importazione del film di Pólya e di altre pellicole di matematica cfr. G. Lucchini, Cinque film di didattica matematica importati dall'U.M.I., *Periodico di Matematiche*, (IV) 48, n. 1-2, 1970, 1-23.

(122) Le parole "aurait ... vous" sono scritte sul margine superiore del foglio.

(123) ASP *BdFP*, BD10-15-41, lettera autografa, cc. 1r-v.

(124) Cfr. Stanford University. Libraries, Department of Special Collections and University Archives, George Pólya Papers, 1924-2000, *Subseries 7 Miscellaneous*, Box 15, Folder 2, *Bruno de Finetti 1971*.

(125) Nei giorni 20-25 settembre 1971 de Finetti aveva organizzato e diretto a Urbino un convegno di Economia matematica presso la Fondazione CIME (Centro Internazionale Matematico Estivo). Poco dopo (27 settembre - 3 ottobre) aveva partecipato al IX Congresso dell'UMI a Bari.

It is quite possible that Birkhäuser would be interested in a German translation of your "Teoria delle Probabilità" ([126]). *As you are in contact with this publisher* ([127]) *it is quite natural to ask him. If B. is not interested, I could ask Springer, that is, the principal mathematical editor, Dr. Klaus Peters* ([128]) *– yet Springer seems to be now more interested in the English language market – it is the largest.*

I do not know whether Mr. Einsele ([129]) *and Mrs. Bechtolsheim* ([130]) *arrived at an understanding – I have good relations to both, and I do not dare to intervene.*

Congratulations that your textbook for the" liceo-level" progresses so well ([131]). *When // you have an index (sufficient in Italian, I can read it in small doses) I would like to see it, also a few (excerpts) samples, especially those where "heuristics" is in the foreground.*

I am starting tomorrow for a trip of 2 weeks – quite long for me ([132]).

With my very best wishes

George Pólya

([126]) I due volumi dell'opera di Bruno de Finetti *Teoria delle probabilità*, Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970) sarebbero stati tradotti in tedesco nel 1981 da Dierk Hildebrandt e sarebbero apparsi con il titolo *Wahrscheinlichkeitstheorie*, a Vienna, presso R. Oldenbourg Verlag.

([127]) Pólya allude al fatto che de Finetti – per suo tramite – aveva affidato a Birkhäuser la traduzione tedesca del volumetto *Il "saper vedere" in Matematica.*

([128]) Klaus Peters (1937-2014), matematico, dopo aver intrapreso la carriera di professore di matematica, fu assunto come *editor* presso la Springer Verlag, dove restò dal 1964 al 1979, incrementando enormemente il catalogo delle pubblicazioni di scienze esatte.

([129]) Carl Einsele (1918-2006), marito di Nelly Birkhäuser, negli anni Settanta era alla direzione della casa editrice Birkhäuser.

([130]) Lulu Hofman Bechtolsheim (1902-1989), conseguì il dottorato di ricerca in Matematica presso l'Università di Zurigo nel 1927. Partecipò a seminari organizzati all'ETH di Zurigo da G. Pólya e H. Weyl, con cui avrebbe mantenuto cordiali rapporti di collaborazione scientifica per il resto della vita. Nel 1927 emigrò negli Stati Uniti, dove fu assistente e *lecturer* alla Columbia University e in vari College di New York. Bechtolsheim avrebbe curato la traduzione tedesca del volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4): *Die Kunst des Sehens in der Mathematik,* Basel: Birkhäuser, 1974.

([131]) Pólya allude qui probabilmente alle tracce di sviluppo di vari argomenti di matematica (a guisa di saggio per la pubblicazione di un libro di testo liceale) fornite da de Finetti a corredo dell'articolo de Finetti A 1967a.

([132]) Nell'ottobre del 1971 Pólya ricevette una laurea *honoris causa* presso l'Università di Waterloo. In occasione del conferimento tenne la conferenza intitolata *Guessing and Proving, Adddress delivered at the Convocation of the University of Waterloo, October 29, 1971*, pubblicata in *Collected papers*, G-C.Rota (ed.), Cambridge MA: MIT Press, vol. 4, 1984, 596-603. Cfr. Department of Special Collections and University Archives, Stanford University Libraries, *George Pólya Papers*, SC 337, 87-034, Box 1.

21. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972 (133)

Rome, le 23 octobre 1972

Cher Pólya,

c'est très bien que votre lettre du 17 est arrivée avant mon départ pour un petit congrès à Salerno et des conférences à Cosenza (25 oct.-4 nov.) (134)*; ainsi je peux donner toutes les dispositions et vous en donner confirmation.*

Votre conférence (135) *aura lieu samedi 9 décembre à 17,30 (avec le "quarto d'ora accademico" réellement 17,45 environs) chez l'Istituto Matematico (Città Universitaria), Aula I ou III. Il y a un tableau noir grand dans la I et très grand dans la III (il y a le seul désavantage qu'elle semble plutôt vide même s'il y a beaucoup de monde).*

Il y a un système de microphone "sans fil": il est attaché au cou et il termine par une petite chose à porter dans la poche. La transmission aux hautparleurs est bonne indépendamment de votre position. En tout cas, j'ai ordonné la révision des appareils que c'est bon de contrôler après les vacances. J'ai plaisir que vous vous proposez de dessiner avec les craies de différentes couleurs, car je n'ai oublié l'efficacité avec laquelle vous en avez fait usage au Colloque de Genève (136)*.*

En ce qui est du sujet, je pense que le meilleur sujet c'est celui sur lequel vous avez deviné d'une façon plus intéressante et instructive la voie suivie par les savants qui ont «deviné et démontré». Je suis sûre que si vous proposez un sujet c'est que cette condition est remplie, et j'attends avec joie d'apprendre ce que vous en dites. En particulier, si vous parlez du théorème d'Euler tout remarque sera nouveaux pour moi, car je crois avoir accepté ce fait et les preuves sans y réfléchir d'avantage (137)*.*

(133) ASP *BdFP*, BD10-15-42, lettera dattiloscritta, con firma autografa, cc. 1r-2r.

(134) De Finetti allude alla conferenza *Le applicazioni dal punto di vista Bayesiano*, tenuta al convegno *Applicazioni della matematica alla ricerca operativa ed alle scienze attuariali* (Salerno, 26-28 ottobre 1972), e pubblicata negli Atti del convegno, Salerno: Istituto di Statistica dell'università, 1972, 79-96.

(135) G. Pólya tenne la conferenza *Déviner et démontrer* sabato 9 dicembre 1972 presso l'Istituto Matematico 'Guido Castelnuovo' dell'Università di Roma La Sapienza. De Finetti dedicò a questa conferenza l'articolo La conferenza di Pólya a Roma: deviner et démontrer, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 1-2, 1972, 77-85 (de Finetti A 1972d).

(136) Si allude probabilmente al colloquio estivo rivolto agli insegnanti di scuola secondaria americani ed europei, organizzato da Pólya, Harold Bacon e Gerald L. Alexanderson nel 1964 presso il Collège du Léman a Versoix, cittadina alle porte di Ginevra.

(137) L'esempio scelto da Pólya per la sua conferenza romana riguardava la storia della scoperta della nota relazione tra il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro. Pólya non si

En tout cas, le titre est très beau. Evidemment je serai bien heureux de passer quelques demi-heures avec vous et de vous aider à traduire quelques phrases en italien (mais il y a bien peu à améliorer lorsque vous essayez de le faire vous-même).

Pour le film (138) *j'ai préparé aujourd'hui une suite de schémas colorés du processus de découverte du calcul du volume d'un (tronco?) de pyramide (soit dans la figure que dans le schéma logique, on a indiqué en rouge ce qui est connu, en vert ce qui a été considéré mois inconnu, et tout dévient rouge lorsque toutes les flèches qui y arrivent sont rouges (provenant de points rouges)* (139)*. Je donnerai cela demain à M. Raparelli* (140)*. (Pour Wiley, on devra consulter quelqu'un).*

J'espère que tout sera prêt avant de votre arrivée, de façon que dans le peu de jours que vous serez ici on peut tout faire sans peine. En tout cas si votre séjour pourrait être un peu plus long, tant mieux; en ce qui est de la date 9/XII elle est obligé car on veut profiter du fait que le 8 est

limitò a descrivere fedelmente il percorso che portò Euler alla congettura e alla scoperta della relazione $s = f + v - 2$ ma descrisse questo cammino "in maniera artistica ed istruttiva" e "con una intenzione didattica: [...] in modo che lo si potesse imitare intelligentemente" (de Finetti A 1972d, 78).

(138) Nel dicembre del 1972, approfittando del soggiorno a Roma di G. Pólya per tenere la conferenza *Déviner et démontrer* (cfr. *supra* nota 137) fu realizzato un cortometraggio, dal titolo *How to solve it*. De Finetti così presenta il film (de Finetti A 1972e, 85): "Prima dell'inizio della conferenza il Prof. de Finetti ha presentato l'oratore con le parole sotto riprodotte, ed ha informato che, pochi giorni prima, Pólya aveva «tenuto a battesimo» Giorgetto. Si tratta del piccolo protagonista di una progettata serie di filmini matematici – della Corona Cinematografica – intesi a realizzare le vedute didattiche di Giorgio Pólya: da ciò il nome di Giorgetto. Nel film del «battesimo» Giorgetto era un pupazzo colla cui collaborazione Pólya illustrò – sul solito ben scelto esempio del tronco di piramide – la sua indovinata rappresentazione schematica del procedimento di risoluzione di un problema [...]. In altri film Giorgetto potrà essere ancora lo stesso pupazzo, oppure apparire come personaggio di cartoni animati".

(139) De Finetti così descrive il lavoro di preparazione delle tavole del filmetto: "il soggetto è quello del volume del tronco di cono seguendo lo schema di *La scoperta Matematica*, II, pp. 250-259. (Lo stesso Pólya dice che è un "film al rallentatore"). Di nuovo c'è l'uso dei colori: in ROSSO sono indicati i DATI (e poi, man mano, le cose che divengono note in funzione dei dati); in VERDE le INCOGNITE (ciò che si cerca, e le grandezze ausiliarie via via introdotte finché non sono state espresse mediante i dati). Il procedere del ragionamento consiste visivamente in collegamenti fra punti, che, man mano, da verdi diventano rossi. Sapendo che nell'edizione tedesca tali schemi erano colorati supposi che il sistema fosse questo; invece Pólya mi disse che si trattava solo di segnalare man mano "il fulcro dell'interesse", ma accettò volentieri la diversa utilizzazione dei colori che risulta esser stata per sbaglio invenzione mia" (B. de Finetti a G. Lucchini, 8.11.1973, in Lucchini 2010).

(140) L'architetto Raparelli era il responsabile della società Corona Cinematografica, incaricato della messa a punto del film avente per protagonisti Pólya e Giorgetto.

une fête et 9-10 un weekend pour une réunion des représentants de Mathesis de plusieurs villes ([141]).

À propos de "Saper vedere", j'ai reçu hier une réponse de Unwin dont je vous envoie une copie ([142]). *Mme Savage m'a écrit qu'elle veut es//sayer de continuer avec l'aide d'une autre dame d'origine italienne qui a étudié mathématiques (et, si je ne me trompe pas, est la femme d'un mathématicien)* ([143]).

N'hésitez pas, si cela vous convient, à nous demander tout ce qui pourrait vous être utile en égard à renseignements concernant le voyage ou le séjour etc.

Bien cordialement à vous

Bruno de Finetti

22. B. de Finetti A G. Pólya, Roma, 29.12.1972 ([144])

Rome, 29 December 1972

Dear Pólya,

I received your second letter with the program of the meeting on Mathematical Education ([145]). *I hope in the meantime your film came back safely* ([146])*; please let me know, in order to feel safe.*

([141]) Presidente della Mathesis dal 1970 al 1981, in occasione della Riunione dei rappresentanti delle Sezioni Mathesis (Roma, 8-9-10 dicembre 1972) de Finetti annunciò la ripresa delle pubblicazioni del *Periodico di Matematiche*, rivista organo di questa società, che erano state interrotte nel 1970. Cfr. B. de Finetti, Parole introduttive del Presidente della Mathesis, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 1-2, 1973, 85-86 (de Finetti A 1972e).

([142]) Si allude alle lunghe e complesse trattative per la traduzione inglese del volumetto *Il "saper vedere" in Matematica* (cfr. de Finetti L 1967 e, in questo volume l'Appendice 1.4) che, nonostante gli interventi di G. Pólya per cercare un accordo fra la casa editrice Loesher e vari editori statunitensi, e per individuare un traduttore adatto, non andò mai in porto. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.5.1970; G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971; B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 30.5.1971, lettere nn. 17, 18 e 19 di questo carteggio. Si erano avviati contatti, per questa traduzione, anche con la casa editrice inglese (ora australiana) Allen & Unwin, fondata nel 1871.

([143]) Jean Strickland (1921-2003), moglie di Leonard Jimmie Savage, aveva intrapreso la traduzione inglese del volume *Il "saper vedere" in Matematica* nel 1971. Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 26.5.1971, lettera n. 18.

([144]) ASP *BdFP*, BD10-15-43, lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

([145]) Il secondo International Congress on Mathematical Education (ICME-2) fu organizzato a Exeter (UK), nei giorni 29 agosto-2 settembre 1972. G. Pólya e J. Piaget furono 'distinguished guests' del congresso e Pólya fu anche nominato Presidente onorario del convegno, ma non poté prendervi parte per motivi di salute.

([146]) Nel 1965 il Committee on Educational Media della Mathematical Association of America aveva realizzato il film *Let Us Teach Guessing*, con protagonisti G. Pólya e una classe

As for your film with Giorgetto, Mr. Raparelli told me that the material will come back from the laboratory today; next week I will go to see it with him, and discuss about "montaggio", titles, etc. ([147]).

As for your lecture, Mr Pampallona ([148]) *was able to draw from the tape a sufficiently reliable text. I used it in order to add to my summary the most interesting remarks which were missing (about 1 ½ pages more), and (as an addition at the end) my introductory words* ([149]).

I enclose a copy of that at any rate I hope to may wait for your answer before giving the text to the printer, in order to: 1) take into account your remarks, or OK; 2) be sure there is no anything wrong about positions of Descartes, Euler, Steiner. On such point also Pampallona, independently, said he was in a quandary about what belongs to each one (also regarding your book) ([150]).

Now I have at home the copy of Math. & Pl. Reas. ([151]) *of the Library of our Institute (my own copy is in my country house, but it seems scarcely probable I go there during this period of vacations). But I would better like to know from yourself just what is necessary.*

di studenti di matematica. Il film era stato prodotto da Kurt Simon e distribuito a Washington D.C. dalla casa Bryon Color-Correct Prints.

([147]) Nel dicembre del 1972, approfittando di un soggiorno a Roma di G. Pólya, era stato realizzato il cortometraggio dal titolo *How to solve it*. Raparelli era il responsabile della società Corona Cinematografica, incaricato della messa a punto del film avente per protagonisti Pólya e Giorgetto. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, lettera n. 21 di questo carteggio.

([148]) Ugo Pampallona fece parte con Emma Castelnuovo, Liliana Ragusa Gilli, Lina Mancini Proia, e altri studiosi del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, istituito nel 1968. Partecipò al corso di didattica della matematica organizzato dal CNR a Pallanza nel 1973, in cui alcuni docenti inglesi (tra cui Geoffrey Howson e Peter Bowie) illustrarono le linee guida dello School Mathematics Project. Autore di apprezzati manuali di matematica, statistica e scienze, collaborò all'esperienza della Telescuola e si interessò alla riforma ungherese dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare (il Progetto OPI), di cui T. Varga era uno dei principali artefici. Pampallona fu incaricato di riassumere la conferenza *Déviner et démontrer* tenuta da Pólya a Roma per il *Periodico di Matematiche* (si veda de Finetti A 1972d).

([149]) De Finetti A 1972d, 79, 84-85 e de Finetti A 1972e, 85-86.

([150]) Una copia dattiloscritta degli stralci delle opere di Socrate, Archimede, R. Descartes, G.W. Leibniz, M.-J.-A. Condorcet, C.I. Kant, H. Spencer, J. Hadamard e A. Einstein letti da Pólya durante la conferenza *Déviner et démontrer* (Roma, 9 dicembre 1972) è allegata in calce alla lettera (ASP *BdFP*, BD10-15-51, cc. 1r-3r).

([151]) G. Pólya, *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics,* e *Volume II: Patterns of Plausible Reasoning,* Princeton: University Press, 1954.

Math. & Pl. Reas. will be used to write (I hope) a short comment (for the Periodico, that is for teachers) on the role of Probability for mathematical questions according to you (with ref. to quotations from Math. Discov. (152) *also). Of course, I will send and submit the text to you, since I would like to understand whether some differences are real or seeming or something else (see question about 50-50 of your trip to Milano).*

I insisted repeatedly with Feltrinelli (but now the person I knew is no more with F.) for the translation also of Math. & Pl. Reas. (153)*; do you know whether it is being done, or there is the intention to do it in the near future?*

You will find here enclosed a sheet about Periodico di Matematica (154). *I would highly appreciate suggestions and addresses about people or institutions to whom it could be sent with some probability of a subscription, or, if any, of exchange with similar journals. If you are willing, when you have an opportunity, to give some information on it among your acquaintances, so much better. The first issue will appear in a few weeks.*

I don't remember whether I told you about Unwin: they accepted Saper vedere if it is possible to find a translator; they wrote to Mrs. Savage, who is willing to do it but with some help (155).

I hope I did not forget something important.

Sincerely yours

Bruno de Finetti

(152) G. Pólya, *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving,* New York, London: Wiley, vol. I, 1962 e vol. II, 1965.

(153) L'opera di G. Pólya *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving,* 1962, 1965 cit. fu tradotta in italiano da P. e C. Canetta. I due volumi *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi* apparvero a Milano, per i tipi di Feltrinelli, nel 1970 e 1971.

(154) Il *Periodico di Matematiche*, fondato a Roma nel 1886 da Davide Besso con il titolo di *Periodico di Matematica*, era una delle più diffuse e importanti riviste didattiche italiane. A seguito della scomparsa di O. Chisini, aveva interrotto le sue pubblicazioni nel 1970. In qualità di Presidente della Mathesis, nel dicembre del 1972 de Finetti si impegnò per il rilancio di questo giornale, organo della società Mathesis stessa. La quinta serie ospitò numerosi articoli di de Finetti stesso, contributi delle voci più eminenti della didattica della matematica a livello internazionale (G. Pólya, H. Freudenthal, ...) e i "pezzulli", citazioni significative di vari autorevoli matematici e pedagogisti in linea con il modo di vedere della Direzione, inseriti per riempire lo spazio vuoto tra un articolo e l'altro.

(155) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, lettera n. 21.

23. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 1.2.1973 (156)

Roma, le 1er Février 1973

Prof. George Pólya
Hotel Zürichberg
8044 ZÜRICH – Svizzera

Cher Pólya,

il y a beaucoup de choses à dire; j'essayerai de le faire rapidement:

1) Votre carte postale me fait espérer que le film est arrivé en temps (just en temps) pour votre programme, bien qu'en a sûrement dû trouver un avion de l'époque de Tutankamen pour aller de Rome à Zürich en plus que deux semaines au lieu qu'en moins de deux heures! (157)

2) Le Periodico sera prêt dans quelques jours ; il n'y a qu'à imprimer les dernières pages (tout composé et corrigé) et relier. On vous en enverra quelques copies (et, si vous le désirez, davantage) (158).

3) J'ai vu (à la "moviola", je ne sais le nom fr. ou angl.) le film avec Giorgio et Giorgetto; ce semble bien réussi (en le voyant en petit, sans couleur et voix un non-expert ne peut bien juger). On n'a pas encore complété le "montaggio" (coupures, titres, etc.), et en me consultera (159).

4) On m'a assuré que l'autre film (animated cartoon) with G. sera reprise et achevé avant l'été prochaine (160).

(156) ASP *BdFP*, BD10-15-44, lettera dattiloscritta, con firma autografa, c. 1r.

(157) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 29.12.1972, lettera n. 22.

(158) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 29.12.1972, lettera n. 22 e nota 154.

(159) Si allude al filmetto *How to solve it* realizzato nel dicembre del 1972, approfittando di un soggiorno a Roma di G. Pólya. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972 e 29.12.1972, lettere nn. 21 e 22 di questo carteggio.

(160) Nel 1973 de Finetti continuò a lavorare al film *How to solve it* coordinandone l'edizione italiana e animata. Descrivendo a G. Lucchini quali modifiche si potevano apportare scriveva: "Spero potremo farne fare l'edizione parlata in italiano (non costerebbe molto); mostrarlo gioverebbe anche ad avere un'idea del gradimento. Non credo sia gran che come accorgimento (diapositive, mosse del pupazzo, formule mostrate facendo finta che le prenda in mano, scritte su foglietti, ...) ma l'idea di Pólya è bella, la interpretazione a colori (che credevo la stessa di Pólya, [che] disse invece che era diversa (mia) ma diversamente interessante, e la presenza di Pólya soprattutto, dovrebbero contare qualcosa per scusare altre manchevolezze"; "Un perfezionamento possibile, se uno schema con le conversazioni suddette si facesse in animazione, consisterebbe nel far avvenire le variazioni con continuità, magari ad es. facendo apparire gli sforzi per trovare il collegamento tra dei punti mediante tentativi di scintillio fra di essi, che poi diventano un collegamento definitivo; ecc. ecc." (B. de Finetti a G. Lucchini, Roma, 25.10.1973 e 8.11.1973, in Lucchini 2010).

5) J'ai eté au Congres (161) *auquel vous étiez invité (2 fois: jour des mathématiques, et discours du chef du bureau d'etudes et programmation du Ministère). Quelque chose était bonne, mais la partie des math. s'est réduite à peu de choses, l'organisation n'était pas trop soignée, et somme-tout c'est mieux pour vous de ne pas vous être derangé pour cela. Dans le prochain N° du Periodico vous pourrez voir un résumé des peu de choses remarquables, que j'ai préparé* (162).

6) In Vol. 2 of Math.&Pl.Reas., p. 131-32 (163)*, it seems to me that there is something misleading in calling* Pr(N) *the, ... "in itself"; sometime in the discussion I have the impression* Pr(N) *is thought a* Pr(N/notT) *instead of*

$$\Pr(N) = \Pr(T)\Pr(N/T) + \Pr(NotT)\Pr(N/notT):$$

I am myself misled? (Sans m'en apercevoir, je suis passé à l'anglais en me référant à votre livre en anglais!).

7) J'ai reçu un extrait de Proofs & Ref.; j'ai commencé le lire (164).

8) J'espère Vous avez reçu (peut-etre après votre carte) ma lettre en réponse à vos dernières remarques sur Dev&Dém. Vous trouverez dans Per. Mat. aussi vos remarques sur Galilée (M&Pl.Reas., I, 194-95) comme *"fin de page"* (165).

9) J'ai vu (à ce Congrès) M. Dedò (Milan) (166)*; ils comptent vous*

(161) Si allude qui al secondo International Congress on Mathematical Education (ICME-2), organizzato a Exeter (UK), nei giorni 29 agosto-2 settembre 1972. Pólya, nominato Presidente onorario del convegno, non aveva potuto prendervi parte per motivi di salute. De Finetti, in qualità di direttore del *Periodico di Matematiche*, pubblicò il testo dell'allocuzione di ringraziamento inviata da Pólya ai congressisti: I messaggi di J. Piaget e di G. Pólya al Congresso di Exeter di "Mathematical Education", *Periodico di Matematiche*, (V) 49, 1972, 3-4.

(162) B. de Finetti, Le stimolanti suggestioni di Exeter rivissute leggendone i «Proceedings», *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 1973, 7-37 (de Finetti A 1973l).

(163) G. Pólya, *Mathematics of Plausible Reasoning ...*, 1954 cit.

(164) Si allude al saggio di Imre Lakatos, Proofs and Refutations, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 14 (53), 1963, 1-25; 14 (54), 1963, 120-139; 14 (55), 1963, 221-245; 14 (56), 1964, 296-342.

(165) G. Pólya, Il merito storico di Galileo, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, 1972, 86.

(166) Modesto Dedò (1914-1991), allievo di O. Chisini, fu docente di Geometria all'Università e al Politecnico di Milano. Dal 1979 passò sulla cattedra di Matematiche elementari da un punto di vista superiore della stessa Università. L'attività scientifica di Dedò si è svolta in vari settori (Geometria algebrica e Topologia nel senso classico, Geometria differenziale), ma la sua produzione è soprattutto importante nell'ambito della Didattica della matematica. Su mandato dell'UMI fu il coordinatore della traduzione dello School Mathematics Project, che la casa editrice Zanichelli pubblicò negli anni 1972-77. Membro della CIIM (1968), condirettore (con

y allez. À quelle époque ? et combien vous serez en Europe ? ([167])
Bien cordialement à vous – et hommages à Mme Polya ([168]).

Bruno de Finetti

24. G. Pólya a B. de Finetti, Palo Alto, 13.5.1973 ([169])

Palo Alto, 13 May 1973

Dear de Finetti,

I think that I told you in one of my last letters that we intend to fly to California 1 of May but I am not quite certain that I did so. As any rate, we arrived here 3 May; the flight was on one day but it was a day of 32 hours, due to the time difference of 8 hours between Switzerland and California – and such a day leaves you tired and out of balance for a long time.

I hope everything is well with you and yours & that the film progresses well ([170]).

Kind regards and repeated thanks for yours hospitality
Yours

G. Pólya

In view of the caprices of the gods and the postmen, I wonder how much time this letter will take.

25. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.11.1973 ([171])

Rome, November 12, 1973

Dear Pólya,

I received timely your letter of Sept.17 ([172])*, so much more that, owing many other work or annoyances, I postponed the lectures to 1974*

Carlo Felice Manara) del *Periodico di Matematiche* dal 1963 al 1970, fu per lunghi anni un appassionato animatore della Mathesis milanese.

([167]) I coniugi Pólya avrebbero fatto ritorno in California il 1 maggio 1973.

([168]) Stella Vera Weber (1894-1989), moglie di Pólya.

([169]) ASP *BdFP*, BD10-15-45, lettera autografa, c. 1r.

([170]) Si allude al film *How to solve it* realizzato da de Finetti e G. Pólya nel dicembre del 1972. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, 29.12.1972 e 1.2.1973 lettere nn. 21, 22 e 23 di questo carteggio.

([171]) ASP *BdFP*, BD10-15-46/47, lettera dattiloscritta, cc. 1r-3r.

([172]) G. Pólya a B. de Finetti, s.l., 17-19.9.1973, cc. 1r-2v, in ASP *BdFP*, *Accademia dei Lincei Lectures: La probabilità, ossia del ragionamento plausibile*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-07.

(Jan? – Feb?) (173). *Excuse me for not having "dropped a word", but I hoped to have some more to say in a short time.*

About your film, it will be presented (19 Nov?) in Milano at a festival of animated cartoons & Math. films (174)*; it will be also edited in Italian version, which seems to be ready at the end of this month or so* (175). *It seems good, but I could only see it (completed) in "moviola", black-white and little; with color and large surely better but I cannot judge how much. The original will be sent to you just after this presentation; let us hope there will be no trouble like for the flight Zurich-Fiumicino-Zurich!*

Thank you for the reprint of Polya-Weyl Wette (176)*; I had it not, but I had notice of the fact from one of the first issues of "The*

(173) Il 28 gennaio 1973 de Finetti propose lo schema di un ciclo di quattro conferenze su *La probabilità, ossia del ragionamento plausibile*, da tenersi all'Accademia dei Lincei. La proposta fu confermata il 10 novembre 1973. La traccia dattiloscritta di queste conferenze (I. *La probabilità nella matematica*; II. *Probabilità e conoscenza parziale*; III. *Probabilità in previsioni generiche*; IV. *Probabilità in circostanze ove si tenta di darle un significato "oggettivo"*), insieme a due lettere (G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973 e B. de Finetti a G. Pólya, 7.1.1975) è conservata in ASP *BdFP*, *Accademia dei Lincei Lectures: La probabilità, ossia del ragionamento plausibile*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-07. La traccia delle conferenze fu redatta nell'estate del 1973 (28 luglio – 3 agosto).

(174) Si allude al secondo di due convegni su *Il cinema d'animazione e l'insegnamento della matematica* organizzati da G. Lucchini e M. Maisetti a Milano nel 1972 e nel 1973 e i cui *Atti* furono pubblicati in ISCA informazioni, a. 2, n. 4 e a. 3, nn. 1-2, ottobre 1974-aprile 1975. De Finetti, contattato da Lucchini, gli indicò come procurarsi il film *How to solve it*, girato con Pólya nel 1972. La versione inglese del film fu proiettata durante il convegno.

(175) La versione italiana del film *How to solve it*, girato da de Finetti e Pólya nel dicembre del 1972 era in preparazione nel 1973, poco prima del convegno su *Il cinema d'animazione e l'insegnamento della matematica* organizzato a Milano (cfr. *supra* n. 174). In quell'occasione de Finetti scriveva a G. Lucchini (Roma, 8.11.1973, in Lucchini 2010): "Chi si occupa direttamente della messa a punto del film è Raparelli, e mi ha assicurato che l'originale sarà a Milano tempestivamente. Anche la copia doppiata in italiano pare sarà pronta entro un mese circa; per ora ho preparato la traduzione di cui allego copia per aiutare la comprensione: non sempre le parole di Pólya sono chiare (per lo più sì) dato anche un certo accento tedesco nella pronuncia". La versione italiana del film, con il titolo *Come si risolve*, sarebbe stata proiettata il 1 e il 2 febbraio 1974 a Roma presso l'Istituto Tecnico Industriale Duca degli Abruzzi. Sarebbe inoltre stata messa a disposizione dei soci Mathesis presso la sede di Roma (cfr. Film di Pólya "Come si risolve", *Periodico di Matematiche*, (V) 49, 1973, 70).

(176) Si allude alla scommessa riguardo alla direzione che avrebbe preso in futuro la matematica, fatta da George Pólya e Hermann Weyl (1885-1955) durante un convegno di matematici a Zurigo (il 9 febbraio 1918). Il testo della scommessa era stato ripubblicato da G. Pólya, nell'articolo Eine Erinnerung an Hermann Weyl, *Mathematische Zeitschrift*, 126, 1972, 296-298. Una traduzione inglese della scommessa fra Pólya e Weyl è conservata negli archivi dell'ETH a Zurigo. Cfr. Yuri Gurevich, Platonism, Constructivism and Computer Proofs vs Proofs by Hand, *Bulletin of the European Association of Theoretical Computer Science*, 1995, 1-22.

Mathematical Intelligencer" (177) *(don't you know this advertising sheet by Springer Verlag? You may receive it free of charge filling up the enclosed card).*

I began with such in a sense side-questions in order not to forget them; now to the main question. Before all, I must thank you very very much for the care in examining my manuscript (178)*, even with the difficulty of Italian. I don't dare to think it was worthy of so much attention, but your reactions are at any rate most valuable to me, in order to see what the real differences, if any, are between our points of view* (179)*.*

Maybe it lies just in the alternative between (*100% Keynes* (180)) *should have, and (my, or Savage's* (181)*, etc.) has; notwithstanding your agreement* (182) *on "manca def. operativa", is your feeling that there is some meaning not only in saying has but also in saying should have? A stronger, and a bit provocative or paradoxical sentence to express my point of view is "Probability does not exist" (as I said in the Preface of the English translation of my Teoria delle Probabilità, Wiley London, I Vol. in press, II in preparation), ... understood, "except as expectation in one's mind"* (183)*.*

I am interested to know that you knew not only Keynes' book, but also my Paris Lectures (184)*, so early. I supposed the contrary because in the text I find no comparison between such two positions, but it seems to me*

(177) *The Mathematical Intelligencer* è una rivista di matematica in lingua inglese pubblicata dall'editore Springer Verlag. Fondata dai matematici Bruce Chandler e Harold Edwards Jr., pubblica articoli divulgativi di matematica e storia della matematica.

(178) Si allude alla prima parte della traccia manoscritta delle conferenze su *La probabilità, ossia del ragionamento plausibile* (ASP *BdFP*, *Accademia dei Lincei Lectures*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-07), che de Finetti avrebbe tenuto al Centro Linceo nel 1974, e che aveva inviato a Pólya nell'estate del 1973, con la richiesta di trasmettergli pareri, suggerimenti, ecc.

(179) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973 in ASP *BdFP*, *Accademia dei Lincei Lectures*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-08, cc. 1-2.

(180) John Maynard Keynes (1883-1946) è stato un economista britannico, i cui contributi hanno dato origine alla cosiddetta rivoluzione keynesiana. Nel 1920 aveva pubblicato il *Treatise on Probability*, contributo di notevole spessore per il sostegno filosofico e matematico alla teoria della probabilità.

(181) Leonard Jimmie Savage (1917-1971), eminente matematico e statistico, collaboratore e amico di de Finetti.

(182) G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973, ASP *BdFP*, *Accademia dei Lincei Lectures*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-07.

(183) B. de Finetti, *Theory of Probability*, New York, J. Wiley, 1975, p. III.

(184) B. de Finetti, La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, n. 1, 1-68 (de Finetti A 1937a).

now that you was willing not to enter in such "philosophical" quarrel. Indeed, for myself this is not a philosophical point, but a prerequisite to understand what one is saying (like for Mach (185)*, or Bridgman* (186)*, or the "pragmatists").*

I will no way burn you at the stake, if you feel unable to apply the "definizione operativa" based on wager to particular cases. I myself would not try to do so, usually; but that seems to me the only operational idealized general device to explain our attitude toward uncertainty. It seems to me not much more vague as the notion of price (what I could pay for something, when that is not something existing in drugstores).

A wager Polya-Littlewood on Riemann hypothesis would be, also in my opinion, "unsignified, preposterous, foolish, etc? etc." (187)*, because of its being supposed an actual wager, with gains or losses for one of the scientists scorned because it was "wrong". But an expression of both your doubts (e.g. 85%-95% for you, 10%-20% for L., of R. hyp. being true) would seem to me an improvement of the expression of your attitudes, while "almost sure" on Yes or Not is quite useless (it could also mean 0,001%, or 5% or ...).*

At your p. 3 (188)*, I meet again the question about my attitude being philosophical, and your pedagogical. I add (in the same spirit of what I said formerly) that in my opinion my attitude is also (and perhaps chiefly) pedagogical. I do not wish "to see behind each mention of the word prob. the same concept": I am unable to see any other possible meaning, and consider that proposed other meanings are void and misleading in any pedagogical context. The connection between the (subjective) notion of probability and the objective one of number of cases (subjectively considered equally probable, although maybe because of some symmetry), or the objective notion of frequency (in a given set of observed trials, subjectively ... (as before) ...) is but an exterior circumstance, which is easily explained if we begin with the subjective definition, but has no value in itself (at the contrary, a*

(185) De Finetti allude in particolare alla visione epistemologica sostenuta da E. Mach nell'opera *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig: Brokhaus, 1883.

(186) De Finetti allude all'approccio operazionista illustrato da Percy W. Bridgman nel volume *The logic of modern physics*, New York: Macmillan, 1927 (trad. it. di Vittorio Somenzi, *La logica della fisica moderna*, Torino: Einaudi, 1952).

(187) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973 in (ASP), BD06-10-08, c. 2.

(188) *Ibidem*, c. 3.

misleading one). An analogy, that could clarify what I will say, is the following: to define the tangent to a circle as the line orthogonal in P (on the circle) to the radius OP, is exact for the circle, but misleading if one supposes to apply it for, say, an ellipse.

It is because of that danger I carefully avoid to present the cases usually considered as the best ones before the general notion is sufficiently understood, and the particular rules may be presented as particular cases in particular circumstances, but not really different.

In my lectures for the Acc. Lincei (189) *(till now I did not progress from the pages you have) I try exactly (and more strongly as before) to follow this way: prob. of a math. Theorem is the best example because no temptation is possible to interpret it saying: p = 1/2 because the alternatives are 2, right or wrong, nor, e.g., p = 38% because I foresee that among mathematicians dealing with its proof 38% will prove it being right and 62% it being wrong.*

At the end of your reply, there is a remark I don't understand surely (because of my weakness in English):

"My p. 58, l.10: the theoretical value of long range relative frequency (is called) probability. (Carried through with the right shade; this means a considerable difference from Mises)" (190)*. The meaning of the underlined sentence is obscure to me; so is consequently what is the "difference" from Mises. Please say two words on both the sentences.*

the last sentence (p. 118 credibility (not prob.) of A) (191) *makes going back on the notion of probability: what else is credibility? maybe a probability to which you feel unable to attach a numerical value (exact?, or sufficiently approximate? or ...?); for me (as said before) I cannot see a possible difference in meaning.*

there is finally another point in your letter, about "all my opposition" to "the kind of examination you are proposing" (192) *(in my MS, 2nd part* (193)*). Is that so because of the kind of questions I mentioned as examples? In this case I agree: I am not very satisfied with the ideas I*

(189) Cfr. *supra* nota 173.
(190) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973 in (ASP), BD06-10-08, c. 4.
(191) *Ibidem*, c. 2.
(192) *Ibidem*, c. 3.
(193) B. de Finetti, (ASP *BdFP*), *La probabilità, ossia del ragionamento plausibile*, II. *Probabilità e conoscenza parziale*, BD06-10-06, cc. 1-5.

tried to develop as possible kinds of "vague" questions; maybe this kind of questions is not too reasonable in mathematics.

But in other situations, e.g. in the "multiple choice" questionnaires (like the mathematical examinations for College Entrance, with several responses A, B, C, ...), would it not be better to ask for a probabilistic response method (Pr(A) = 15%, Pr(B) = 48%, Pr(C) = 2%, ...), rather than allowing (and obliging) to guess the best one? ("Guess" not in the good Polya-like meaning, of having a good feeling, but in the bad one, of choosing at random with the hope to hit the good one and to get the same score as the ones who really get the right solution).

I will be very glad to have some answers and more comments as a sequel of this reply to your kind letter, but only if that does not be of trouble to you.

I would like to reproduce some passages of your reply (and, if any. of the further one) as footnotes, or as insertions in my text (194)*; do you agree? Of course, in that case, I will submit to you the final text so as to allow you to ask for changes before the publication (but not before my lectures).*

Best regards and wishes, also to Mrs. Pólya.

Yours sincerely
Bruno de Finetti

26. G. Pólya a B. de Finetti, s.l., 25.5.1974 (195)

25 May 1974

Dear de Finetti,

I wrote the address of this letter several weeks ago, but then I did not have the courage to continue. I was embarrassed that I am so late and still not in a position to write adequately on various points. I am embarrassed today, and for the same reasons, but I must write, however inadequate my writing may be.

(194) Stralci della lettera di G. Pólya a B. de Finetti del 17-19.9.1973 (ASP *BdFP*, BD06-10-08) furono riprodotti in B. de Finetti, *Due lezioni su teoria delle decisioni*, in Seminari su *La scienza dei sistemi*, parte II, *Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di scienze matematiche e loro applicazioni*, n. 6, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1975, 643-656.

(195) ASP *BdFP*, BD10-15-48, lettera autografa, c. 4.

1) Your Italian translation of my conversation with Giorgetto is very good as far as I can judge. Yet the film did not yet arrive (196).

At which date and to which address was it sent?

2) Many thanks for the issue of the Periodico with your report on Exeter (197) *and the several reprints about my talk in Rome* (198).

3) There are 3 periodicals in the USA that are essentially similar to the Periodico: The

(a) American Mathematical Monthly (199).

(b) Mathematics Teacher (200).

(c) Arithmetic Teacher (201).

(a) is the organ of the Mathematical Association of America, whose secretary is Henri Alder (202)*, I wrote him.*

(b) and (c) are organs of the National Council of Teachers of Mathematics, the president is Glenadine Gibb (203)*, I wrote to her.*

One or the other may answer to you directly, or only to me – in finite time, I hope.

(4) Ce que vous m'avez écrit le 4 février sur la comparaison de nos points de vue sur la probabilité est essentiellement satisfaisant. I should think, however, more about it, but I am bogged down. All the best

George Pólya

(196) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.11.1973, lettera n. 25 e nota 175.

(197) B. de Finetti, Le stimolanti suggestioni di Exeter rivissute leggendone i «Proceedings» (de Finetti A 1973l).

(198) De Finetti, La conferenza di Pólya a Roma: deviner et démontrer (de Finetti A 1972d).

(199) L'*American Mathematical Monthly* è una rivista di matematica fondata da Benjamin Finkel nel 1894, edita dalla Mathematical Association of America, rivolta a un pubblico ampio che comprende studenti, matematici professionisti e docenti di matematica.

(200) Fondato nel settembre del 1908 dalla Association of Teachers of Mathematics of the Middle States and Maryland, il giornale *The Mathematics Teacher* è organo del National Council of Teachers of Mathematics fin dalla sua fondazione (1920).

(201) Fondata nel 1954, la rivista *The Arithmetic Teacher* è anch'essa organo del National Council of Teachers of Mathematics.

(202) Henry L. Alder (1922-2002), segretario nazionale e poi segretario emerito della Mathematical Association of America negli anni 1960-75, Presidente nazionale della stessa nel 1977-78.

(203) Glenadine E. Gibb (1919-1984), editore della rivista *The Arithmetic Teacher* dal 1960, vice presidente (1958) e poi presidente (1974) del National Council of Teachers of Mathematics, figura eminente della ricerca in didattica della matematica statunitense e professore di Mathematics Education presso l'Università del Texas.

27. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 2.9.1974 ([204])

Zürich , Sept. 2/74

Address valid until end of November 1974 (approximatively)

Hotel Zürichberg
8044, ZÜRICH (Svizzera)

Dear de Finetti,

Many thanks for your letter of July 31. It reached me in Palo Alto when we were just about leaving for ([205]) *Switzerland, packing, preparing – and so I had no chance to answer it then. We spent a little more than 2 weeks in the mountains (not in the very high ones) and reached our present (usual Zurich) address 2 days ago.*

I have shown the film twice ([206])*: first to a very small audience, just a few friends and faculty members whose judgment. I was curious to hear; then to 50 high school teachers and a few more* ([207]) *friends. I heard various opinions. Some found the film interesting and amusing, others found the introduction of a doll far-fetched, etc. The 50 high school teachers were the students taking my lecture, and I discussed with them the pedagogical ideas involved in the next hour of the lecture. I think that such a dialogue after showing the film is useful.*

I read with interest the project of your next film ([208])*; a very original idea; but not an* ([209]) *easy one to carry* ([210]) *through: to do justice to history & to present day interests, and to find illustrative material and a naturally proceeding "action" (some kind of action is necessary for a film) seems to me difficult. Yet it is certainly a worthwhile project.*

I wish you much luck and a find success.

All the best, sincerely yours

G. Pólya.

([204]) ASP *BdFP*, BD11-04-13, lettera autografa, cc. 1r-v.

([205]) Pólya cancella qui: "from".

([206]) Si allude al film *How to solve it* realizzato da de Finetti e G. Pólya nel dicembre del 1972. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, 29.12.1972, 1.2.1973, 12.11.1973, lettere nn. 21, 22, 23 e 25 di questo carteggio.

([207]) La parola "more" è aggiunta.

([208]) Dopo il film del 1972-73 *How to solve it* (*Come si risolve*), avente per protagonisti G. Pólya e il pupazzo Giorgetto, la Corona Cinematografica, società nata nei primi anni Sessanta e presieduta da Ezio Gagliardo sino al 1976, collaborò con de Finetti per altri progetti di film d'animazione. De Finetti in particolare curò la sceneggiatura di *Le Medie: Saperne usare bene* e *Galileo batte Simplicio: i frutti dopo tre secoli*. De Finetti si era interessato alla realizzazione di documentari di didattica della matematica su sollecitazione di G. Stampacchia, a quel tempo presidente dell'Unione Matematica Italiana.

([209]) La parola "an" è aggiunta.

([210]) Pólya cancella qui: "it".

28. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974 ([211])

Rome, September 12, 1974

Dear Pólya,

I am very glad to know you are in Europe, and I hope your stay in Zürich will be pleasant and restoring as ever.

Also mail will be hopefully not so erratic as with America; at any rate, the exchanges of the Periodico you suggested seem now to function. Thank you for your repeated and valuable help.

Did you receive a copy of "Die Kuntst des Sehens in der Mathematik"? ([212]) *(I enclose an announcement). I received it two weeks ago and asked whether I have right to complimentary copies and asked at any rate to send one to you. (I wrote addressing to Dr. Einsele). It seems beautiful. Also that I owe to you!*

Now, I would ask you a courtesy, for the film on Galileo etc. ([213]) *I discussed some details today with a specialist who will organize the film under both scientific and artistic viewpoint, and, since at a point I suggest to include a sentence by you, it seemed proper to use your image from the film of Giorgetto* ([214]) *(when your face is in "primo piano"), mixing the sentence in English spoken by you, and (except beginning and end) superposing the Italian version ("doppiata"). So we would like to have, if you agree, a registration (plate or ribbon) by your voice of the passages on pages 194-95 and 8 of "Math.&Plaus.Reas."* ([215]), *I, of which I have here at the moment the Italian version (in Periodico di Mat.)* ([216]), *with your lecture at Mathesis* ([217]). *To specify, the one begins:*

([211]) ASP *BdFP*, BD11-04-14, lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

([212]) Il volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4) fu tradotto in tedesco da Lulu Hofman Bechtolsheim con il titolo *Die Kunst des Sehens in der Mathematik* (Basel: Birkhäuser, 1974).

([213]) De Finetti curò la sceneggiatura del documentario *Galileo batte Simplicio: i frutti dopo tre secoli*, prodotto dalla società Corona Cinematografica. Cfr. supra n. 208.

([214]) Si allude al film *How to solve it* realizzato da de Finetti e G. Pólya nel dicembre del 1972. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, 29.12.1972, 1.2.1973, 12.11.1973, lettere nn. 21, 22, 23 e 25 di questo carteggio.

([215]) G. Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, *Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics*, 1954 cit., 8, 194-195.

([216]) G. Pólya, Il merito storico di Galileo, 1972 cit., 86.

([217]) G. Pólya aveva tenuto la conferenza *Déviner et démontrer* sabato 9 dicembre 1972 presso l'Istituto Matematico 'Guido Castelnuovo' dell'Università di Roma La Sapienza. De Finetti aveva dedicato a questa conferenza l'articolo (de Finetti A 1972d).

"Occorre rendersi conto della posizione di Galileo. Egli aveva avuto pochi precursori, aveva pochi amici che ne condividevano ... and ends:... erano innovazioni rivoluzionarie al tempo di Gal."

The second, begins and ends: "Galileo, sfidando i pregiudizi ... ha dato un grande esempio di coraggio intellettuale".

For me and many of us, it would be a great pleasure to have you here also this year; I don't know of a specific occasion, but would like to know if a trip to Italy would be agreeable to you (and Mrs. Polya), and in the affirmative I would explore some ways.

Maybe you are interested to know that also Vol. I of the English transl. of "Teoria delle Probabilità" did appear some months ago. The Vol. II is in press (218).

Best regards and wishes to you and Mrs. Polya. I was interested in the impressions of your two audiences about the film with Giorgetto (219). *Given that it was a first attempt in a new direction and organized in a hurry, it seems enough it is not too bad.*

Bruno de Finetti

29. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.10.1974 (220)

Hotel Zürichberg
8044, Zürich
Svizzera
October 5, 74

Dear de Finetti,

I received your letter of Sept. 12 long time ago (221), *and waited for the announced copy of "Die Kunst des Sehens in der Mathematik"* (222)

(218) I due volumi dell'opera di Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970), tradotti in inglese da Antonio Machi e Adrian Smith con il titolo *Theory of Probability*, sarebbero apparsi a New York, presso J. Wiley, nel 1975.

(219) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 2.9.1974, lettera n. 27 di questo carteggio.

(220) ASP *BdFP*, BD10-15-49, lettera autografa, cc. 1r-2r.

(221) B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974, lettera n. 28 di questo carteggio.

(222) Il volume *Il "saper vedere" in Matematica* (de Finetti L 1967 e, in questo volume Appendice 1.4) fu tradotto in tedesco da Lulu Hofman Bechtolsheim con il titolo *Die Kunst des Sehens in der Mathematik* (Basel: Birkhäuser, 1974). De Finetti ne aveva fatto inviare una copia in omaggio a Pólya (cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974, lettera n. 28 di questo carteggio).

– and waited, and waited, but it did not arrive! ([223]) *And now I have very bad conscience: I may have delayed your film on Galileo* ([224]).

Of course, I shallbe delighted to tape-record the two passages of "Math.&Pleas.Reas." ([225])

You mention – in fact, a great honor for me to contribute this bit to your film – and I should have told you so many weeks ago.

I have no tape-recording equipment, but I think I can find one when the courses begin at ([226]) *the E.T.H. – Eichgenössische Technische Hochschule, "Polytecnico Federale" – yet this will happen only October 29.*

I would have to come to Rome – we could discuss many things, and I also love the "città eterna". Yet we stay here only until the middle of November, I have also to ([227]) *spend a few days in the meantime in Strasbourg, and I should finish here the proof sheets of the amplified English version of the 2nd volume of P-Szegö "Aufgaben und Lehrsätze"* ([228])*. Besides, the general mess in the world does not encourage travelling – the papers write that the trains to Rome were delayed 4 hours by a bomb threat, etc. etc.*

No, I am afraid, I cannot come to Rome this time – will there be another time? Very doubtful, as I am close to 87. Yet, let us hope.

I hope that the delay of this letter did not delay the work on your film to which I wish again much success.

I hope too that every thing is well with you and your family. With best regards to you and yours, also on the part of my wife.

Yours
G. Pólya

([223]) Pólya inserisce qui un rimando alla seguente nota a piè di c. 1r: "1) Was it sent to Stanford, by chance?".

([224]) De Finetti curò la sceneggiatura del documentario *Galileo batte Simplicio: i frutti dopo tre secoli*, prodotto dalla società Corona Cinematografica. Cfr. *supra* n. 208.

([225]) G. Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, *Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics,* 1954 cit., 8, 194-195.

([226]) Pólya cancella "but".

([227]) Pólya aggiunge "to".

([228]) Il celebre volume di G. Pólya e G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, apparve nel 1925 a Berlino, presso Springer, nella collezione *Die Grundlehren der math. Wissenschaften* (voll. 19 e 20). La sua quarta edizione (1970-71) fu tradotta in inglese da Dorothée Aeppli (vol. I) e da Claude E. Billigheime (vol. II) con il titolo *Problems and theorems in analysis* (New York: Springer, 1972, 1976).

30. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.10.1974 (229)

Rome, October 9, 1974

Dear Pólya,

Your letter of Oct. 5 did arrive just now (230)*, and I will not delay answering it.*

As for "Die Kunst des Sehens in der Mathematik", the situation in rather puzzling (231)*. I wrote to Dr. Einsele asking how many copies of the book are available for compliments, indicating two persons, you and Mrs. Bechtolsheim I supposed should receive it immediately. The answer (from Birkhäuser, not a known person) was that a few copies has been sent to Loescher (the original Italian publisher); I have to write to him to know what to do. It seems that, at any rate, the book should be sent to Stanford (either from me or Loescher or Birkhäuser ...) since you are going back next* (232) *month. Maybe you may see a copy at a Library or Bookshop in Zurich, to have at least a first idea of the form of the book.*

You are right not to afford a trip, because of several little inconveniences, even if not big ones as bombs. Let us hope there will be other occasions for future meetings.

Thank you for your willingness in tape-recording the passages on Galileo (233)*. There is no hurry: we are still in the phase of preliminary study of scenes and discourses; everything must be carefully prepared in advance, and I don't know exactly when we arrive at a real beginning of the film. There is a very competent engineer who has many suggestions about scenarios, moving pictures, tricks, etc. and full understanding of the role of Galileo etc.; so I hope all problems connected with that will be well interpreted. But we are not yet sure that the project will go ahead, until its costs will be evaluated and pondered by the people responsible of the industrial decisions. let us hope ...*

Best regards to you and Mrs. Pólya by all of us.

Yours sincerely
Bruno de Finetti (234)

(229) ASP *BdFP*, BD10-15-50, lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.
(230) Cfr. G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.10.1974, lettera n. 28 di questo carteggio.
(231) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974 e G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.10.1974, lettere n. 28 e 29 di questo carteggio.
(232) De Finetti aveva scritto "this", termine poi cancellato e sostituito con "next".
(233) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974, lettera n. 28.
(234) La firma è sia autografa sia dattiloscritta.

31. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 13.11.1974 (235)

Rome, November 13, 1974

Dear Professor Pólya,

I write to you today, hoping this letter can reach you before you are going to back to Stanford.

I asked Loescher to send to you a copy of "Die Kunst des Sehens in der mathematik" (236) *and they agreed. It will be sent directly to your address in Standford, to avoid possible delays making it reach Zurich after you moved to America; I hope you will find it there, and will find it well presented, both as translation and as for typographical setup etc. Let me thank you again for your suggestions to Dr. Einsele and for the translation by Mrs. Bechtolsheim.*

In the meantime, a short course for teachers in Albano (near Rome) has been mainly devoted to your didactical ideas. It has been presented the short film with Giorgetto (237)*; Prof. Canetta (the translator of Mathematical Discovery* (238) *for Feltrinelli) exposed your methodological suggestions and several examples of problems and remarks about problem solving; I myself added something more in the self direction, with some hints at "plausible reasoning" and probability (may it be the same as plausible reasoning, as for me, or something more specifically quantitative as you prefer).*

I have been always too busy in order to work again and complete the projected lectures at Lincei, of which I sent you last year the first 1 ½ two (239)*. I feel obliged to complete that in 2-3 months, and I will send to*

(235) ASP *BdFP*, B11-04-15, lettera dattiloscritta con firma autografa, c. 1r.

(236) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974, G. Pólya a B. de Finetti, Zurigo, 5.10.1974 e B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.10.1974, lettere n. 28, 29 e 30 di questo carteggio.

(237) Si allude al film *How to solve it* realizzato da de Finetti e G. Pólya nel dicembre del 1972. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 23.10.1972, 29.12.1972, 1.2.1973, 12.11.1973, lettere nn. 21, 22, 23 e 25 di questo carteggio. La versione italiana del film, con il titolo *Come si risolve*, sarebbe stata proiettata il 1 e il 2 febbraio 1974 a Roma, presso l'Istituto Tecnico Industriale Duca degli Abruzzi (cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.11.1973, lettera n. 25 e nota 175).

(238) L'opera di G. Pólya, *Mathematical discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (1962-1965 cit.), era stata tradotta in italiano da P. e C. Canetta per i tipi di Feltrinelli nel 1970-71, con il titolo *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi.*

(239) De Finetti tenne un ciclo di quattro conferenze su *La probabilità, ossia del ragionamento plausibile* all'Accademia dei Lincei nel 1974. La traccia dattiloscritta di queste conferenze, insieme a due lettere (G. Pólya a B. de Finetti, 17-19.9.1973 e de Finetti a Pólya,

you the revised text. I will try to expose clearly the differences (than in my opinion are not relevant as matter of fact, but deep\in a sense between psychological and methodological) between the formulations preferred by you and myself. (Incidentally: I have been elected fellow of the Accademia dei Lincei ([240]), *beginning with the opening session of to-morrow. This is one more reason not to delay the promised series of lectures).*

Can you send the registered text of your passages concerning Galileo? ([241]) *Maybe it is easier from Zurich than from America. The ideas of the film have a bit progressed, but in the last time I was too busy for other things. Did you see the English translation of Vol. I of my Theory of probability (Wiley)?* ([242]) *or have you the opportunity to look at it at Standford? If not, or if you are interested to see it with more easiness, I will let Wiley send a copy to your Standford address. The first two reviews of which I received a copy are surprisingly favorable.*
Sincerely yours

Bruno de Finetti

7.1.1975) ad esse legate è conservata in ASP *BdFP*, 1973-1975, Box 6, Folder 10, BD06-10-07. Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.11.1973, lettera n. 25.

([240]) De Finetti fu eletto socio corrispondente della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali dei Lincei il 30 luglio 1974 e socio nazionale il 3 dicembre 1980.

([241]) Cfr. B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 12.9.1974, lettera n. 28 e B. de Finetti a G. Pólya, Roma, 9.10.1974, lettera n. 30 di questo carteggio.

([242]) I due volumi dell'opera di Bruno de Finetti, *Teoria delle probabilità*, Torino: Einaudi, 1970 (de Finetti L1970) furono tradotti in inglese da Antonio Machi e Adrian Smith con il titolo *Theory of Probability* (New York: J. Wiley, 1975).

BIBLIOGRAFIA

AMARI, G., DE FINETTI, F. (2015), *Un matematico tra Utopia e Riformismo*, Roma: Ediesse.

AMBROSETTI, A., MARINO, A. (2013), Riflessioni sul ruolo di Giovanni Prodi nella ricerca scientifica e nella cultura della seconda metà del '900, *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI*, 4.3, 337-394.

ATTI CIIM (2010), *L'eredità di Giovanni Prodi: dai progetti degli anni '70 ai cambiamenti della scuola oggi*: http://www.umi-ciim.it/attivita-della-ciim/convegni/xxix-convegno/

BARRA, M. (2006, 2007), Bruno de Finetti, Un matematico geniale al servizio della società, I parte, *Induzioni*, 33, 2, 9-20; II parte, *Induzioni*, 34, 1, 1-16.

BERNARDI, C. (2012), La nascita della cattedra di Matematica e Scienze e la sua storia, *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI*, (1), V, 197-296.

BISCHI, G. I. (2006), A tutto tondo. Un ritratto di Bruno de Finetti (attraverso interviste e testimonianze), *Lettera Matematica PRISTEM*, n. 61, 4-15

BRUNO, G., GIORELLO, G. (2006), Introduzione. Scienza senza illusioni, in *L'invenzione della verità*, Milano: Raffaello Cortina, 9-55.

CAPUZZO, S. (2010), *Bruno de Finetti e l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria*, Tesi magistrale diretta da Livia Giacardi, correlatrice Erika Luciano, Torino: Università degli Studi.

CAPUZZO, S., LUCIANO, E. (2012), *Bruno de Finetti e l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria*, in F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca (a cura di), *Conferenze e Seminari 2008-2009*, Torino, Ass. Sub. Mathesis, Kim Williams Books, 161-183.

DE FINETTI, B. (2006 [1934]), *L'invenzione della verità* (Introduzione di Giordano Bruno e Giulio Giorello, Premessa di Fulvia de Finetti), Milano: Raffaello Cortina.

DE FINETTI, F. (2010), Bruno de Finetti a Trento e il suo impegno per la didattica, Convegno Nazionale della Mathesis, in occasione della Giornata in onore di Bruno de Finetti, Trento 3 novembre 2006, in http://www.brunodefinetti.it/Bibliografia/Bruno %20de%20Finetti %20a%20Trento%20e%20il%20suo%20impegno%20per%20la%20didattica.pdf

DE FINETTI, F. (2010), L'insegnamento della Matematica secondo de Finetti, *Periodico di Matematiche*, (XI) 2, n. 3, 11-18.

DE FINETTI, F. (2015), Ricordo di Bruno de Finetti, I 120 anni della Mathesis. La storia dell'insegnamento-apprendimento della matematica in Italia e la situazione attuale, in http://www.mathesisnazionale.it/congresso-mathesis/gioia-del-colle-2015/De%20Finetti.pdf

DE FINETTI, F. NICOTRA, L. (2008), *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Livorno: Salvatore Belforte Editore.

GAMBINI, A. (2015), *'Matematica logico intuitiva' di Bruno de Finetti alla luce della sua visione dell'insegnamento della matematica*, Tesi magistrale diretta da Livia Giacardi, controrelatrice Erika Luciano, Torino: Università degli Studi.

GEYMONAT, L. (1940), Il concetto di probabilità, *Il Saggiatore*, 1, 320-330.

GEYMONAT, L. (1953), *Saggi di filosofia neorazionalistica*, Torino: Einaudi.

GEYMONAT, L. (1954), Considerazioni metodologiche sul concetto di probabilità, in *Atti del Congresso di Studi Metodologici promosso dal Centro di Studi Metodologici, Torino 17-20 dicembre 1952*, Torino: Edizioni Ramella, 189-202.

GEYMONAT, L. (1964), Valore umanistico e formativo dell'insegnamento matematico, *Archimede,* 16, n. 1-2, 27-28.

GIACARDI, L., ROERO, C. S. (1997-1998), L'eredità del Centro di Studi Metodologici di Torino, *Quaderni di storia dell'Università di Torino*, II, 289-356.

ISRAEL, G. (1987), De Finetti, Bruno, in *Dizionario biografico degli italiani*, Roma: Istituto dell'Enciclopedia italiana Treccani, vol. 33, *ad vocem*.

LUCCHINI, G. (2010), Quattro pezzulli per ricordi su Bruno de Finetti, in: http://www.brunodefinetti.it/Spigolature/lucchinididatticabdf.pdf

LUCIANO, E. (2014), voce *Bruno de Finetti*, in G. Chiosso, R. Sani (a cura di), *DBE Dizionario biografico dell'educazione 1800-2000*, Milano: Editrice Bibliografica, vol. 1, 385-386.

LEONI, B. (1954), [Discorso] Seduta Inaugurale, in *Atti del Congresso di Studi Metodologici promosso dal Centro di Studi Metodologici, Torino 17-20 dicembre 1952*, Torino: Edizioni Ramella, 9-18.

MARIOTTI, M. A. (2011), Giovanni Prodi e la ricerca in didattica della matematica, *La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI*, 4.3, 411-432.

NICOTRA, L. (2005), Bruno de Finetti: così è, se vi pare, *Notizie in ... Controluce*, a. XIV, n. 2, in http://www.controluce.it/vecchio/notizie-old-html/giornali/a14n02/19-scienzaecultura-BrunodeFinetti-7.htm

NUVOLI, P. (1958), Relazione della Presidenza, in *Centro Studi Metodologici, Anno 1957-1958*, Torino: Tip. A. Vinciguerra & Figli, 7-16.

PAOLINI MERLO, S. (a cura di), *Centro di Studi Metodologici. Atti della Presidenza (1947-48/1978-79),* in preparazione.

PÓLYA, G. (1945), *How to solve it*, Princeton: Princeton University Press. Trad. italiana a cura di M. Spoglianti, *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Milano: Feltrinelli, 1967. Il testo è stato recentemente ripubblicato a cura dell'UMI-CIIM, Torino: UTET, 2016.

PÓLYA, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1, Induction and Analogy in Mathematics. Vol. 2, Patterns of Plausible Inference*, Princeton: Princeton University Press.

PÓLYA, G. (1962, 1965), *Mathematical discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Trad. italiana a cura di P. e C. Canetta, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*. Milano: Feltrinelli, 1970, 1971.

PRODI, G. (1975, 1977), *Matematica come scoperta per il biennio delle scuole medie superiori*, vol. 1 e 2 , Messina-Firenze: Casa editrice G. D'Anna.

PRODI, G. (1977, 1978), *Matematica come scoperta. Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori*, vol. 1 e 2, Messina-Firenze: Casa editrice G. D'Anna.

PRODI, G. (2003), Evoluzione di un progetto da "Matematica come scoperta" a "Scoprire la matematica", in *Associazione Subalpina Mathesis, Seminario di storia delle Matematiche Tullio Viola, Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, 13-20.

ROSSI, C. (2001), Bruno de Finetti: the Mathematician, the Statistician, the Economist, the Forerunner, *Statistic in Medicine*, 20.24, 3651-3666.

SNOW, C. P. (1964), *Le due culture.* Prefazione di Ludovico Geymonat, Milano: Feltrinelli.

TRICOMI, F. (1954), *Intuizione e logica nella scoperta matematica*, in *Atti del Congresso di Studi Metodologici promosso dal Centro di Studi Metodologici, Torino 17-20 dicembre 1952*, Torino: Edizioni Ramella, 248-254.

TRICOMI, F. (1967), *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori (Bibliografia commentata 1916-1967),* Padova: Cedam.

La voce di un insegnante

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 239-250

Bruno de Finetti e la didattica delle scienze matematiche (1)

DOMINGO PAOLA

1. – Non è per niente semplice riuscire a esprimere l'emozione che l'attribuzione del Premio de Finetti ha suscitato in me. Posso dire che ho vissuto e vivo questo riconoscimento con la consapevolezza di inevitabile inadeguatezza e, al tempo stesso, con comprensibile orgoglio. Soprattutto lo vivo con intensa commozione, perché Bruno de Finetti ha scritto passi di sorprendente attualità e di profonda bellezza sulla didattica della matematica, campo cui ho dedicato la mia vita professionale, interesse e molta passione.

Vivo questo momento come un grande onore, ma anche con l'onere di rappresentare, idealmente, i tanti colleghi altrettanto o più meritevoli che lavorano oggi in Italia.

I grandi intellettuali, e Bruno de Finetti lo era sotto ogni punto di vista, proiettano la loro lunga ombra sulle generazioni future, avvolgendole: è impossibile e sarebbe scellerato non tenere conto del retaggio ideale e culturale di Bruno de Finetti, di Emma Castelnuovo, di Lucio Lombardo Radice, di Giovanni Prodi, di Francesco Speranza solo per citare alcuni figure a cui la ricerca in educazione matematica è debitrice. Però i tempi cambiano e con essi cambiano le esigenze dei contesti in cui si opera: è quindi necessario provare anche a uscire dalla protezione di quell'ombra lunga per capire la direzione verso cui è opportuno procedere. È necessario, senza tralasciare di ispirarsi a quei retaggi ideali e culturali, muoversi con consapevolezza e perizia nei nuovi territori, fra le nuove esigenze, utilizzando anche quelle ri-

(1) Testo della conferenza tenuta a Roma il 30 aprile 2015 in occasione dell'assegnazione del Premio Bruno de Finetti.

sorse che un tempo non erano ancora disponibili e forse nemmeno immaginabili.

Cercherò di descrivere come penso siano cambiati, profondamente, contesti scolastici ed esigenze rispetto ai tempi in cui Bruno de Finetti operò e poi cercherò di far vedere come le sue più importanti indicazioni sulla didattica della matematica siano ancora oggi attualissime, anche se, purtroppo, non sempre attuate.

Per dare un'idea del cambiamento di contesti ed esigenze, farò riferimento ad alcune considerazioni che Massimo Recalcati ha proposto in una sua recente pubblicazione, *L'ora di lezione* (2014). Recalcati descrive metaforicamente la situazione che caratterizza oggi la scuola ricorrendo a tre complessi: il complesso di Edipo, il complesso di Narciso e il complesso di Telemaco. I tre complessi sono sempre stati presenti simultaneamente nell'organizzazione e nella struttura della vita scolastica, ma una loro lettura diacronica porta a individuare determinati periodi che si caratterizzano per la prevalenza di uno dei complessi sugli altri.

La scuola di Edipo, scrive Recalcati, "è una scuola che si fonda sulla potenza della tradizione, sull'autorità del padre [...] il sapere che viene trasmesso esprime una fedeltà cieca nei confronti dell'autorità del passato [...] l'autorità dell'insegnante è garantita dalla potenza della tradizione alla quale si appoggia [...]. Nella scuola di Edipo l'insegnante si trova nel posto dell'autorità, è un sostituto del padre, di una legge fuori discussione. L'allievo, in quanto figlio, deve essere istruito ed educato come fosse una cera da plasmare. [...]. La scuola di Edipo si fonda sull'alleanza tra genitori e insegnanti [...]. La formazione è concepita come un raddrizzamento morale e autoritario delle storture individuali e il pensiero critico è visto come un'insubordinazione illegittima all'uniformità identitaria. [...]. Il sapere trasmesso è un sapere senza soggettività, privato di singolarità, centrato sull'*auctoritas* della tradizione" (Recalcati 2014, pp. 20-21).

La scuola di Edipo è una scuola in cui opera la selezione esplicita, che espelle dal sistema di istruzione e formazione e che innesca una conflittualità generazionale tra i genitori e gli insegnanti da una parte e gli studenti dall'altra.

È in questo contesto che de Finetti esprime le sue idee, talvolta con ironia anche feroce, come nel suo discorso sui pericoli causati dal morbo della “trinomite” (de Finetti A 1965c) ma sempre ispirate ai principi del rispetto della persona in formazione, attente a sostenere la necessità di un rapporto educativo libero e mai di costrizione o imposizione: un rapporto che favorisca la crescita di autonomia e responsabilità dello studente.

La scuola d’oggi è invece la scuola di Narciso, in cui, scrive Recalcati, “al centro non abbiamo più la spigolosità del conflitto, ma la confusione speculare [...] dove è sempre più difficile reperire la differenziazione simbolica dei ruoli. Sullo sfondo lo sfaldamento del patto generazionale tra insegnanti e genitori [...]. La nuova alleanza tra genitori e figli disattiva ogni funzione educativa da parte dei genitori [...]. Il fallimento non è tollerato, come non è tollerato il pensiero critico [...]. La scuola di Narciso vive all’ombra del principio di omologazione e di una concezione efficientistica della didattica” (Recalcati 2014, pp. 24-26).

La scuola di Narciso è quella in cui opera la selezione implicita, tacita, nascosta, che non si assume la responsabilità di mettere gli studenti di fronte a una valutazione anche solo di temporaneo insuccesso, ma manda avanti sempre e comunque, anche quando non sono state conseguite conoscenze e competenze irrinunciabili.

Pur profondamente diverse negli assunti, la scuola di Edipo e quella di Narciso rischiano di destinare i soggetti più deboli e indifesi all’incapacità di esercitare il pensiero critico e quindi di formarsi come persone e cittadini consapevoli, selezionando, la prima in termini espliciti, la seconda in termini impliciti. Nessuna delle due assolve quindi il compito che la nostra Costituzione assegna all’istituzione scolastica.

Recalcati pone come orizzonte verso cui muoversi la scuola di Telemaco:

> *Il disagio dei nostri figli non è più centrato sull’antagonismo tra le generazioni, ma sulla perdita della differenza e, dunque, sull’assenza di adulti in grado di esercitare funzioni educative* [...]. *Diversamente da Edipo, Telemaco riconosce il debito simbolico verso il padre, non lo vuole morto, non lo vive come un nemico* [...]. *Telemaco attende il ritorno del padre* [...]. *La scuola di Telemaco è una scuola dove in primo piano dovrebbe essere situato il desiderio come ricerca della propria eredità.* (Recalcati 2014, pp. 33-34)

Come dicevo prima, ci sono profonde differenze di contesto tra il tempo in cui de Finetti operò e quello attuale: allora prevaleva la scuola di Edipo e, al tempo stesso, i mezzi di comunicazione di massa cooperavano all'alfabetizzazione culturale degli italiani. Oggi prevale la scuola di Narciso e il linguaggio pubblicitario, ormai pervasivo, moltiplica sogni e bisogni sottraendo fantasia e creatività.

Eppure in molti punti fondamentali le idee sulla scuola e in particolare sulla didattica della matematica di de Finetti risultano fortemente attuali e potrebbero aiutare gli insegnanti a favorire il passaggio verso quell'orizzonte di salvezza che è la scuola di Telemaco.

Quali sono queste idee? Innanzitutto l'invito a riflettere. Scrive de Finetti ne *Il "saper vedere" in Matematica*:

> [...] *basta che [gli studenti] si abituino a riflettere, a rendersi conto del senso e del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi e formalismi.* (de Finetti L 1967, p. 1)

E più avanti, nello stesso testo:

> *Risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo: ogni successo rende più facili ulteriori successi. Ma il vantaggio è molto più grande se ci si sofferma a riflettere, su ogni problema che ci si presenta, non soltanto quanto occorre per risolverlo ma poi ancora per far tesoro di tutte le osservazioni che siamo capaci di trarre sviscerandolo.* (ibidem, p. 3)

De Finetti ricorda che è necessario domandarsi e domandare agli studenti vari "*perché*"*?* Per esempio: perché vale la soluzione trovata? Che cosa succederebbe se cambiassero certi dati e perché? Perché ho incontrato certe difficoltà e perché alcune le ho superate e altre no?

L'invito a riflettere è assolutamente attuale: persistono ancora molte pratiche didattiche, testimoniate dalle caratteristiche che, più o meno esplicitamente gli insegnanti richiedono ai libri di testo, che suggeriscono che la trinomite si manifesti ancora, sotto altre forme, ma con gli stessi esiziali effetti di un tempo: la mancanza di riflessione, di consapevolezza, di attenzione alla costruzione dei significati, di esercizio del pensiero critico.

C'è poi un'indicazione che forse non è esplicita negli scritti di de Finetti, ma che pervade chiaramente molte sue pagine, in quelle, chiaramente dedicate alle eccellenze, in cui propone problemi non banali e stimolanti e ne discute i possibili approcci risolutivi, sempre cercando di evidenziare i possibili collegamenti e intrecci fra le diverse parti della matematica, ma anche in quelle in cui esalta l'azione pedagogica di don Lorenzo Milani o di Mario Lodi che sicuramente non erano rivolte solo alle eccellenze ([2]). Queste indicazioni vanno verso la consapevolezza di una duplice azione di individualizzazione dell'insegnamento: da una parte una individualizzazione convergente, per cui si cercano gli stili di insegnamento più adatti a portare tutti gli studenti a conseguire gli obiettivi irrinunciabili per formarsi una cultura che sia adeguata a soddisfare le esigenze della società in cui si vive. Dall'altra una individualizzazione divergente, che consenta a ciascuno di coltivare le proprie inclinazioni, approfondendo i propri interessi.

Spero di aver chiarito con un certo dettaglio le differenze tra il contesto in cui operava de Finetti e quello attuale, ma anche i contributi che le idee di de Finetti possono ancora portare ai problemi dell'insegnamento -- apprendimento, soprattutto considerando che oggi sono messe a disposizione di studenti e insegnanti risorse tecnologiche un tempo inimmaginabili.

Si pensi, per esempio, a quali risorse possono offrire gli ambienti *e-learning* per soddisfare, anche al di fuori dell'orario scolastico, eventuali esigenze di apprendimento individualizzato, in particolare per quel che riguarda l'individualizzazione divergente. Oppure le opportunità che certe tecnologie mettono a disposizione per aiutare a vedere in matematica: per esempio le possibilità di esplorazione, osservazione e scoperta che offrono i software di geometria dinamica. Naturalmente ogni strumento richiede molta attenzione nell'uso: sapere vedere in matematica non è semplice. Richiede almeno una presa di coscienza sull'oggetto di attenzione. Biologicamente l'essere umano è attento alle variazioni: per *homo sapiens* è stato un vantaggio evolutivo essere

([2]) Cfr. de Finetti A 1971d).

attento alle variazioni. Lo ha preservato dai pericoli della savana, ma lo ha portato a prestare *naturalmente* attenzione a ciò che varia. Invece saper vedere in matematica richiede spesso di prestare attenzione, mentre una situazione cambia, agli invarianti, a ciò che permane e non a ciò che cambia. Le risorse messe a disposizione dalle tecnologie vanno quindi studiate e considerate con attenzione, ma sarebbe assurdo non utilizzarle. Sono convinto che de Finetti sosterrebbe oggi questa idea, magari suggerendo di evitare l'uso della tecnologia come protesi e di utilizzarla, invece, come strumento per allenare la capacità anticipatoria, per imparare, con l'ausilio dell'insegnante, a saper vedere in matematica.

2. – Vorrei ora proporre un'attività che, nel corso degli anni, ho svolto in diverse classi di biennio e di primo anno di un triennio di scuola secondaria di secondo grado e che è proposta e discussa da de Finetti nel suo scritto *Il "saper vedere" in Matematica*. È anche un'occasione per provare a chiarire che cosa intendo quando parlo di un uso intelligente della tecnologia.

In genere formulo l'attività in forme analoghe alla seguente:

> *Quanto vale la somma dei primi due numeri naturali maggiori di zero? E dei primi tre? E dei primi quattro? Quanto vale la somma dei primi cento numeri naturali maggiori di 0? Cercate un modo per esprimere la somma dei primi n numeri naturali maggiori di 0. Cercate di giustificare la vostra risposta.*

Quasi sempre chiedo agli studenti di pensare individualmente, per una decina di minuti, a come affrontare il problema posto. Poi chiedo loro di riunirsi in piccoli gruppi avendo a disposizione, qualora desiderassero utilizzarlo, un computer per gruppo.

Il problema appena formulato è uguale al secondo degli esempi proposti da de Finetti nei paragrafi *Riflettere per giungere a un risultato* e *E dopo riflettere ancora* del libro *Il "saper vedere" in Matematica*.

De Finetti inizia commentando la soluzione di Gauss sulla somma dei primi cento numeri naturali:

la somma è 5050, perché accoppiando gli addendi (primo e ultimo: 1 e cento; secondo e penultimo: 2 e 99; e poi 3 e 98, ecc., fino a 49 e 52 ed a 50 e 51) si hanno 50 coppie, ciascuna di somma 101. In altra forma: è lo stesso che se i 100 addendi avessero tutti il medesimo valore $\frac{1}{2}(1+100)=50.5$*, semisomma del primo e dell'ultimo.*

Poi de Finetti commenta:

Gauss era Gauss, d'accordo. Però quest'osservazione era semplice: prestando un po' di attenzione al problema, forse qualunque bambino avrebbe potuto accorgersi di questa proprietà e sfruttarla. E saper vedere le cose semplici e degnarsi di rifletterci sopra è la cosa più importante: così e soltanto così finiscono per apparire comprensibili intuitive e ovvie altre cose più complicate. (de Finetti L 1967, p. 2)

Il commento di de Finetti è particolarmente importante e, a mio avviso, del tutto condivisibile: invita i docenti ad avere il coraggio di proporre problemi non standard. Sarà proprio la successiva riflessione sui punti di forza e di debolezza degli approcci risolutivi scelti dagli studenti, attraverso discussioni orchestrate dall'insegnante, che aiuterà gli studenti ad acquisire, gradualmente, la capacità *di saper vedere le cose semplici* affinché appaiano sempre più *comprensibili e intuitive e ovvie altre cose più complicate*.

de Finetti poi prosegue con l'analisi del problema di Gauss e passa alla sua generalizzazione considerando altri tre esempi particolari: la somma dei primi 12, dei primi 500 e dei primi 1965 numeri. Si può osservare che il risultato è sempre lo stesso, come quello che Gauss ha utilizzato per calcolare la somma dei primi 100 numeri. Quindi generalizza:

Ma è chiaro che il procedimento (e la regola cui conduce) valgono sempre se gli addendi crescono (oppure decrescono) di una differenza costante (senza che la differenza sia necessariamente 1, né che la successione cominci da 1); si dice in tal caso che i numeri considerati variano linearmente o che costituiscono una progressione aritmetica [...] *la somma è sempre la media del primo e dell'ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini* [...]. *Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo* ***geometricamente*** *in modo* ***opportuno****.*

Nel nostro caso, rappresentando i successivi addendi come rettangolini di base 1 e altezza che ne esprime il valore, se sono in progressione aritmetica avremo una scala a gradini uguali (ossia secondo una retta). E ed è chiaro che in tal caso l'area (somma) è la stessa del rettangolo di ugual base e di altezza pari alla media delle altezze. Il ragionamento di Gauss bambino consiste nel notare, riferendosi alla figura, che i tratti di rettangoli sorpassanti il livello medio sono identici a quelli mancanti dal lato opposto. (de Finetti L 1967, p. 4)

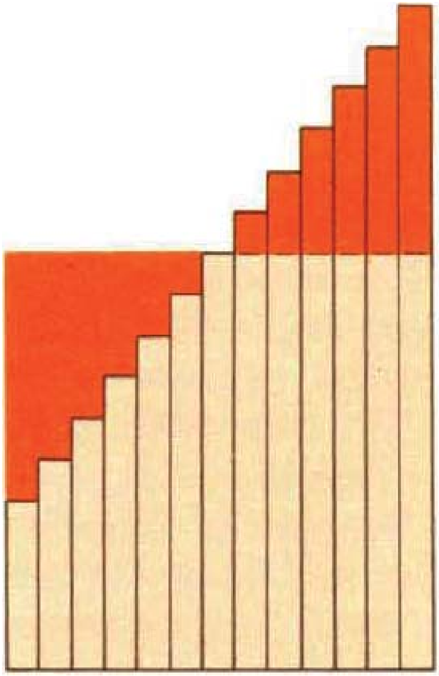


Figura che compare nel libro *Il "saper vedere" in Matematica* come commento alla generalizzazione del metodo di Gauss per la risoluzione del problema di determinare la somma dei primi cento numeri naturali

In questo passo de Finetti invita a considerare un altro punto di fondamentale importanza nella didattica della matematica: quello di utilizzare rappresentazioni efficaci ed efficienti, che aiutino a chiarire e spiegare perché certi approcci risolutivi funzionino e aiutino anche a generalizzare. Si tratta di un suggerimento attualissimo, soprattutto considerando le enormi risorse che le moderne tecnologie mettono a disposizione per rappresentare gli oggetti matematici. James Kaput, non a caso, ha parlato delle nuove tecnologie come vere e proprie infrastrutture per le rappresentazioni. Saper lavorare in un registro di rappresentazione e passare dall'uno all'altro, cioè consolidare quelle che Duval chiama in modo molto evocativo, competenze di trattamento e di conversione, è obiettivo di fondamentale importanza nell'insegnamento -- apprendimento della matematica, non fosse altro per il fatto che il significato degli oggetti matematici è accessibile solo attraverso le loro rappresentazioni, che devono essere quindi ricche e diversificate.

Ci si può chiedere se la possibilità di utilizzare un computer renda l'attività didattica più ricca o non rischi, invece, di impoverirla. Chiaramente la risposta a questa domanda è "dipende da come si utilizzano le tecnologie". Però a mio avviso è possibile anche affermare, con sufficiente convinzione, che l'uso del computer modifica in ogni caso le strategie di approccio e, soprattutto, può consentire anche agli studenti meno capaci di muovere quei passi esplorativi che possono portare a una risoluzione.

Se, infatti, gli studenti sanno utilizzare un foglio elettronico, non hanno alcuna difficoltà a impostare un foglio che, per esempio, riporti:

- nella prima riga o colonna i numeri naturali da 1 (o 2) a un determinato numero n fissato
- nella seconda riga o colonna le somme dei primi numeri naturali da 1 (o 2) a n

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91

Gli studenti che riescono a costruire un foglio di questo tipo sono in grado di scrivere, nella cella B2, la formula "=A2+B1" che significa che per determinare la somma dei primi 3 numeri naturali maggiori di 0 è sufficiente addizionare alla somma dei primi 2 (che si trova nella cella A2) il terzo numero naturale maggiore di 0 (che si trova nella cella B1). Lo studente che è in grado di scrivere questa formula ha compreso, anche se in alcuni casi non ne è ancora consapevole, che per trovare la somma dei primi n numeri naturali maggiori di 0 basta fare la somma tra la somma dei primi $n-1$ e l'ennesimo numero naturale maggiore di 0.

Copiare questa formula nelle celle successive equivale a calcolare, per iterazione, a partire da $S(2) = 3$, i valori della funzione espressa da $S(n) = S(n-1) + n$.

Quindi $S(4) = S(3) + 4$, $S(5) = S(4) + 5$ e così via.

Riflettere sulla sintassi del foglio elettronico, che gli studenti acquisiscono in genere senza troppi sforzi, è un'ottima occasione per introdurre o consolidare la notazione funzionale, in genere ostica per gli studenti, ma ricca di potenzialità per gli sviluppi futuri; inoltre aiuta anche a parlare delle funzioni definite per ricorsione e, magari, anche delle differenze e analogie tra iterazione e ricorsione. Comprendere una scrittura del tipo $\begin{cases} S(2) = 3 \\ S(n) = S(n-1) + n \end{cases}$ potrebbe essere di per se stesso un obiettivo didattico di grande importanza. La sua acquisizione renderebbe l'attività utilissima anche nel caso in cui gli studenti non fossero in grado di ottenere la formula chiusa $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Però il foglio elettronico, che è un ottimo strumento di rappresentazione e organizzazione dei dati, competenze che de Finetti riteneva fondamentali nell'attività matematica, consente di fare qualche cosa in più. Basta aggiungere una riga al foglio precedente: la riga delle differenze prime:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Nella cella A3 è stata inserita la formula "= B2 – A2" e poi la si è copiata ottenendo la tabella delle differenze prime, che variano linearmente e che quindi suggeriscono, se nel percorso didattico si è prestato attenzione all'uso delle differenze finite e dei rapporti per cercare di stabilire le caratteristiche di una successione, che la successione $S(n)$ sia di tipo quadratico.

È quindi possibile formulare la congettura $S(n) = an^2 + bn + c$, con a, b e c costanti da determinare. Allo scopo è sufficiente conoscere tre coppie del tipo $(n, S(n))$ della successione. Gli studenti più in gamba aggiungeranno ai valori già disponibili $S(0) = 0$ e $S(1) = 1$. In tal modo avranno meno calcoli da fare per determinare la formula $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ 1 = a + b \\ 3 = 4a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

A questo punto l'insegnante dovrebbe aiutare gli studenti a sentire l'esigenza di giustificare per altre vie la formula così trovata. Ecco che il metodo di Gauss e la sua rappresentazione geometrica costituirebbero per gli studenti strumenti di giustificazione e di osservazione, da altri punti di vista, del risultato trovato. In alcuni casi l'insegnante potrà anche invitare gli studenti a discutere se le varie giustificazioni proposte siano da considerarsi solo metodi euristici o possano essere considerate dimostrazioni del risultato. È un'ottima occasione per riflettere sulla natura, sul ruolo e sulla funzione della dimostrazione nella strutturazione e organizzazione del sapere matematico, in particolare sulle relazioni strette e inscindibili tra dimostrazioni e teorie matematiche.

Quando la classe è sufficientemente matura, o, talvolta anche solo come coraggiosa e intelligente provocazione, è possibile accennare al principio di induzione e al suo ruolo nella dimostrazione di proprietà che riguardano i numeri naturali.

In un'attività di questo tipo i suggerimenti e le indicazioni di de Finetti, sull'importanza della riflessione sugli approcci risolutivi, sulle difficoltà incontrate, sull'uso di rappresentazioni efficaci, sul chiedersi sempre diversi *perché?*, sull'opportunità di provare a generalizzare osservazioni su casi particolari, a produrre congetture e a dimostrarle, vengono a mio avviso arricchite e potenziate dalle risorse messe a disposizione dalle tecnologie.

Concludo con una poesia di Danilo Dolci e una riflessione di de Finetti che mi sembrano particolarmente attuali e con un ringraziamento a sei persone che mi hanno insegnato anche nella più stretta accezione etimologica del termine, che, cioè hanno profondamente segnato la mia attività di insegnante ricercatore in diverse fasi della sua nascita ed evoluzione: Fulvia Furinghetti, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Pietro Arduini, Bruno Spotorno e Carlo Manfredi.

> *C'è chi educa*
> *guidando gli altri come cavalli passo per passo;*
> *forse c'è chi si sente soddisfatto*
> *quando è così guidato.*
> *C'è chi educa senza*
> *nascondere l'assurdo ch'è nel mondo,*
> *aperto a ogni sviluppo ma tentando di essere franco all'altro come a sé,*
> *sognando gli altri come ora non sono:*
> *ciascuno cresce solo se sognato.*
> (Dolci, 1970)

> *Posso credere una cosa senza capirla: è tutta questione di addestramento! Questa frase* [...] *mi torna sempre alla mente, con una sensazione paurosa di sconforto, perché mi sembra esprima integralmente la fondamentale e chissà quando eliminabile stortura che sta effettivamente, anche se non dichiaratamente, alla base di tutta l'imperversante concezione della didattica tradizionale: abituare a imparare e credere senza capire.* (de Finetti A 1972b, p. 32)

BIBLIOGRAFIA

DOLCI, D. (1970), Ciascuno cresce solo se sognato, in *Il limone lunare,* Bari: Laterza.

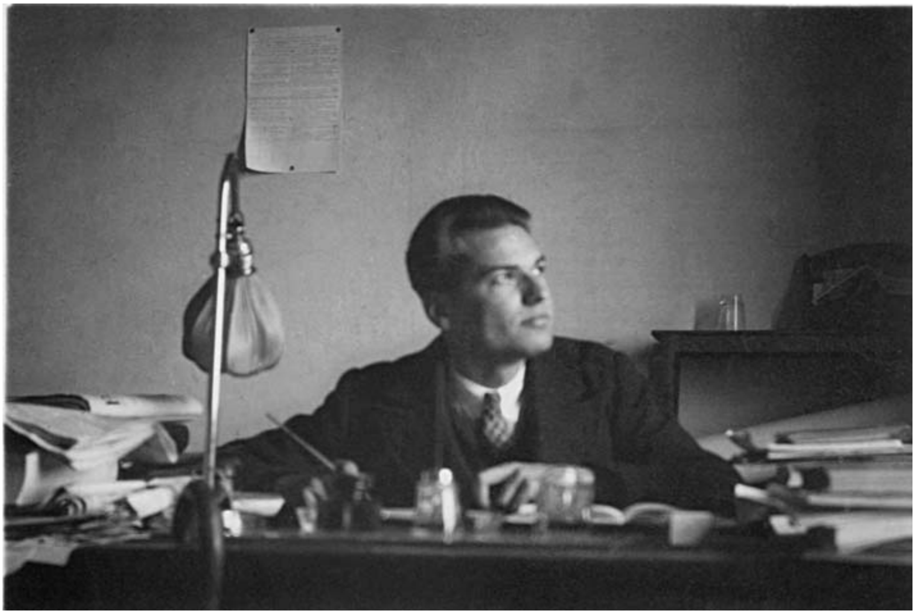
RECALCATI, M. (2014), *L'ora di lezione*, Torino: Einaudi.

Domingo Paola
Liceo "G. Bruno" di Albenga
e-mail: domingo.paola@tin.it

Galleria fotografica

Si ringrazia caldamente Fulvia de Finetti per aver concesso la riproduzione delle seguenti fotografie appartenenti al suo archivio privato.

1914 – Trento. Bruno de Finetti (a destra) con la sorellina Dolores e la madre Elvira Menestrina

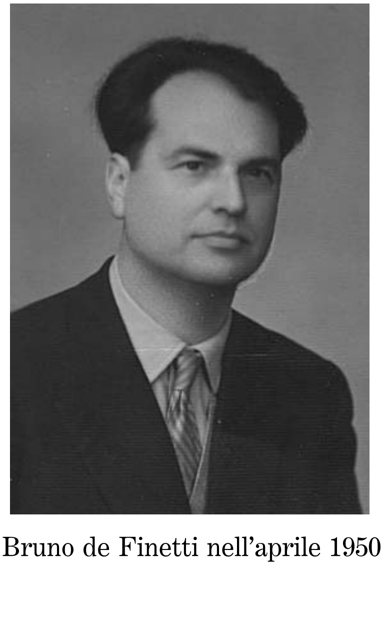


1928 – Roma. Bruno de Finetti

1931 – Roma, Istituto Centrale di Statistica. Bruno de Finetti è il secondo da sinistra in prima fila

Bruno de Finetti nei primi anni trenta

1946 – Trieste, Assicurazioni Generali.
Bruno de Finetti è il terzo da destra in ultima fila



Bruno de Finetti nell'aprile 1950

1950 – Berkeley. Michel Loève, Paul Pierre Lévy, William Feller, Bruno de Finetti

Bruno de Finetti nell'ottobre 1962

1964 – Frascati, Villa Falconieri. Bruno de Finetti è il secondo da sinistra.
Il primo, seduto, è Leonard Jimmie Savage

Anno scolastico 1966-67 – Roma, Liceo Mamiani.
Bruno de Finetti è il primo a sinistra

1973 – Roma. Il presidente della Repubblica Giovanni Leone consegna a Bruno de Finetti il diploma di benemerito della scuola, della cultura e dell'arte

1974 – Roma, Accademia dei Lincei.
Nomina di Bruno de Finetti a Socio corrispondente

1980 – Roma, Accademia dei Lincei. Nomina di Bruno de Finetti a Socio nazionale

19 aprile 1982 – Roma, Università Luiss. Il rettore Rosario Romeo consegna il diploma di laurea *honoris causa* in Economia a Bruno de Finetti

Appendice 1

La parola a Bruno de Finetti

1. Prefazione alla prima edizione del volume *Matematica logico intuitiva: nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale e integrale come introduzione agli studi di scienze economiche statistiche attuariali*, Trieste: Editrice Scientifica Triestina, 1944.
2. La funzione vivificatrice della matematica, Discorso inaugurale del Prof. Bruno de Finetti per l'anno accademico 1948-1949, *Annuario della Università degli Studi di Trieste*, 1949, 19-34.
3. Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite?, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, n. 4, 1965, 325-329.
4. *Il "saper vedere" in Matematica,* Torino: Loescher, I edizione giugno 1967, I ristampa giugno 1974.
5. L'apprendimento della matematica, *La Riforma della Scuola*, n. 4, 1969, 11-17.
6. Convegno della C.I.I.M. a Viareggio (24-25-26.X.1974). Interventi di Bruno de Finetti (a Roma), *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, n. 12, 1974, 31-36.
7. La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni!, *Scientia*, 111, 1976, 255-281.
8. *Chi sono io?* (1981) tratto da: http://www.brunodefinetti.it/Galleria/Documenti/Chi%20sono%20io%20di%20BdF_1981_.pdf

A cura di
Claudia Benedetti

Avvertenza
Le note a piè di pagina di Bruno de Finetti sono numerate. Le note del curatore sono indicate da simboli.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 263-280

Prefazione alla prima edizione del volume *Matematica logico intuitiva* (*)

BRUNO DE FINETTI

Un'opera di matematica e un insegnamento matematico che si rivolgano a studiosi di discipline prevalentemente piuttosto lontane dalla matematica devono indubbiamente proporsi finalità e battere vie loro proprie; il dubbio si affaccia invece quando si tratta di concretare in qual senso e modo realizzare questi intendimenti. Bisogna – s'intende – ridurre e semplificare il programma rispetto a quelli (tanto per un lontano ma sicuro punto di riferimento) del biennio di Scienze, ma lo si può fare o coll'idea che tale insegnamento risponda a finalità applicative particolari e si debbano quindi far imparare certi risultati col minimo sforzo concettuale, o che esso serva all'opposto a integrare organicamente con un appropriato innesto di elementi di pensiero matematici la formazione mentale, e occorra quindi presentare nozioni e concetti in una sintesi ridotta al minimo di quantità attraverso il massimo di concentrazione.

È mia precisa convinzione che lo scopo da proporsi, specie rivolgendosi a studiosi di scienze sociali, debba essere quest'ultimo. Mentre per coloro che, come ad es. gli ingegneri, hanno effettivo bisogno della tecnica del calcolo è concepibile che taluno (non io) ritenga vantaggioso farla apprendere colla minor fatica anche a scapito della profondità di comprensione, nel nostro caso tale fatica sarebbe del tutto sterile e sprecata, perché il bisogno di svolgere calcoli non si presenta mai o quasi mai, mentre il bisogno di impostare e intuire problemi complessi ed astratti coll'ausilio della matematica è forse più impellente che in qualsiasi altro campo.

A questo concetto informatore mi sono attenuto e ispirato, ritornando anche ripetutamente nel testo (v. ad es. in modo speciale il n. 77) a giu-

(*) Tratto da: *Matematica logico intuitiva: nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale e integrale come introduzione agli studi di scienze economiche statistiche attuariali*, Trieste: Editrice Scientifica Triestina, 1944.

stificare e chiarire le ragioni di tale atteggiamento. Ne è risultata una trattazione sensibilmente diversa dalle usuali sotto molti aspetti, e perciò sarà particolarmente necessario premettere anche qualche chiarimento.

La materia è – naturalmente – press'a poco quella che tradizionalmente si svolge nel corso di Matematica generale delle Facoltà di economia e commercio, sfrondata però quanto più possibile degli sviluppi pesanti richiedenti un eccessivo tecnicismo, ma integrata in compenso da qualche argomento che vale a completare la trattazione coordinandola in un disegno unitario e a renderla indipendente da ogni eventuale reminiscenza di anteriori studi matematici.

Più però che per la sua delimitazione, la materia del corso apparirà divergere dalle usuali trattazioni per altri aspetti ed effetti del costante sforzo di coordinamento, e più ancora di fusione, fra argomenti suscettibili di essere considerati come diverse interpretazioni di un medesimo schema di ragionamento. L'immediata introduzione del concetto di funzione o operazione nel suo più ampio significato logico costituisce ad es. una premessa che riaffiora continuamente; e con analogo ufficio di comune fondamento per molteplici sviluppi è introdotto con massima generalità il concetto di sistema lineare (spazio vettoriale), ciò che porta – come effetto più appariscente – alla trattazione dei determinanti sostanzialmente fusa con la geometria analitica; altro esempio di fusione, quello delle serie la cui trattazione è assorbita in quella delle serie di potenze. Oltre che in tali accorgimenti d'impostazione, intesi ad evitare ripetizioni e sdoppiamenti di ragionamento che (oltre a far perdere tempo e spazio) mi sembrano offuscare la limpida chiarezza che proviene dal prospettare i problemi secondo la loro vera natura, la tendenza fusionista si manifesta nel concepire ogni ente o problema astratto non come una vuota entità formale ma come un nome comune in cui si possono identificare volta a volta tutte le entità concrete delle applicazioni (v. anche quanto detto nel n. 2 sul senso d'astrazione); così ad es. «vettore» può essere un saldo contabile in più monete o un insieme di merci, con evidente riferimento ad applicazioni di ragioneria, o una forma d'assicurazione, il che prelude a un'eventuale trattazione della matematica attuariale da svolgere in continuazione del presente corso, nella quale la considerazione delle operazioni assicurative come numeri aleatori costituenti un sistema lineare (come sostanzialmente già si fa nell'indirizzo del CANTELLI) dovrebbe ritrarre il massimo giovamento dall'inquadrarsi nell'immagine vettoriale. Anche in numerosi altri punti l'inclusione di certi argomenti o il modo di presentarli deriva dalla previsione del ruolo che avrebbero nel calcolo delle probabilità e nella matematica attuariale (p. es. la formula di STIRLING, le considerazioni sulla rapidità della crescenza di log log x per il teorema di KHINTCHINE-KOLMOGOROFF, l'integrale di e^{-x^2}, il cenno sull'integrale di STIELTJES, le stesse iniziali nozioni di calcolo logico in nesso alle operazioni logiche sugli «eventi», ecc.).

Anche nelle esemplificazioni vere e proprie e nelle considerazioni intese a illustrare praticamente il significato e l'importanza delle nuove nozioni si è avuto cura di mettere in particolare risalto le applicazioni finanziarie (ad es. per la definizione del logaritmo, di «e» (cfr. fig. 98), per la somma della serie geometrica, per l'equazione differenziale lineare del 1° ordine, per la serie esponenziale), statistiche (ad es. per i diagrammi in iscala logaritmica e doppiamente logaritmica, il coefficiente di correlazione considerato come coseno, le «intensità» di mortalità ecc., l'accrescimento della popolazione nelle ipotesi di MALTHUS e di VERHULST-PEARL, ecc.) o economiche (ad es. l'elasticità della domanda, ecc., cenni su certe concezioni di dinamica economica, su i concetti di prezzo, di «optimum», ecc.).

Se le esemplificazioni offerte da tali campi ebbero la debita preferenza, quelle d'altra natura non furono tuttavia trascurate ma anzi moltiplicate ovunque ciò servisse a illuminare sulla ricchezza di contenuto e la varietà di interpretazioni ed applicazioni cui si prestano i concetti e metodi che via via si apprendono. A tale scopo gli esempi furono tratti da campi il più possibile disparati, pur mantenendoli al livello di semplicità e facilità necessario perché l'efficacia ne potesse riuscire immediata e viva: o si tratta di esemplificazioni del tutto ovvie atte a render senz'altro familiare il concetto ad ogni lettore, o, se qualche volta si esorbita dall'ambito delle sue presumibili conoscenze, sarà perché l'occasione apparirà propizia per cogliere senza incontrare difficoltà il duplice vantaggio di aprire uno spiraglio su nuovi campi in cui si rivelano le possibilità dei metodi matematici, e di chiarire il significato che essi vi assumono.

Si realizzerà così quello che anche nella realtà dello sviluppo storico costituisce il vero stimolo al progresso e all'evoluzione delle idee: il continuo scaturire di idee generali dai problemi particolari e di osservazioni particolari da teorie generali, il continuo trapasso dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto finché si fondano nell'intuizione d'un'unica magica realtà, in cui tutte le risorse concettuali vengono messe al servizio della visione pratica dei problemi e tutti i problemi pratici concorrono a servizio della elaborazione concettuale, questa e quella, volta a volta, mezzo e fine, superando ogni antagonismo.

Queste premesse varranno a spiegare la ragione di quello che altrimenti potrebbe apparire uno squilibrio sconcertante fra l'elevatezza dell'impostazione d'insieme e la grossolanità di talune considerazioni o esemplificazioni cui si appoggia, od anche – per scendere a un dettaglio – la voluta materialità di certe immagini: perché ad es. parlando di ellissi ottenute da sezioni oblique di un cilindro ci si dovrebbe inibire di dar corpo e sapore al concetto materializzandolo nell'immagine dell'affettare un salame? Dire «cilindro» è preferibile se ed in quanto tale termine astratto risvegli molte sensazioni concrete anziché una sola: oltre che salame anche colonna o tubo o torrione ecc., ma è esiziale quando in esso non si sia imparato a vedere né un salame né una colonna o tubo o torrione o null'altro salvo una figura che si trovi nei testi di geometria per servire di pretesto a interrogazioni e bocciature.

Perché il primo problema è non tanto quello di far apprendere la matematica, ma di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero, che vi risponde a bisogni insostituibili della mente in cui si fondono i motivi pratici che ne danno occasione e l'elaborazione scientifica e concettuale che ne ricava costruzioni di limpida eleganza e bellezza quasi sovrumana. E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce.

Ben lo sapevano gli antichi, per i quali il pensiero filosofico era in gran parte costituito dal pensiero scientifico e in particolare matematico. E mostreremmo – parmi – assai più reale fedeltà alla tradizione classica perpetuando nell'ambito della cultura contemporanea tale armoniosa compenetrazione di elementi indissolubilmente connaturati, che non accanendosi nel feticismo per troppi particolari caduchi e superati del pensiero di epoche ormai remote. Tale collegamento è invece oggi manchevole, e ciò mi sembra stia alla radice di tre aspetti sintomatici della crisi che affligge la civiltà contemporanea:

– l'incompiutezza del regno del pensiero, così nella scienza che senza l'ausilio della filosofia non può concludere il travaglio dei problemi che essa incessantemente incontra e solleva, come nella filosofia che, straniandosi da tale compito, rifiuta la sua propria linfa vitale;
– l'incomprensione che fa considerare e disdegnare l'aspetto tecnico e materiale della civiltà moderna come qualcosa di estraneo allo spi-

rito, anziché vedervi una manifestazione tangibile (e sia pure accessoria) di alcune fra le sue più alte e pure conquiste;

- l'incertezza nell'analisi dei problemi sociali, che, irretita nel groviglio dei concetti derivati da particolarità contingenti, solo svincolandosene e assurgendo a un'impostazione scientifica che non pregiudichi e mutili a priori il campo delle soluzioni possibili, saprà illuminare fin nelle radici più profonde le contraddizioni e i sofismi per cui si dilania l'umanità.

Quale parte spetti al pensiero matematico nell'approfondire la visione di tutti questi problemi e correggerne le manchevolezze, non si potrà certo pretendere di dimostrare con osservazioni incidentali in un testo di matematica (se mai, sarà oggetto di un'opera a sé, che da tempo mi si sta delineando), ma non per questo con minor cura ho cercato ovunque di orientare verso tali fini generali la comprensione delle particolari concezioni e trattazioni.

A questo stesso fine giova ed occorre che l'intonazione generale sia quanto più elevata possibile. Non nel senso di adoperare un cannone per colpire un passerotto: è anzi proprio il possesso di nozioni frammentarie e imparaticce che induce certa gente in tale tendenza per farne compassionevole sfoggio, e preferirei non avere mai intrapreso l'insegnamento piuttosto che vedere anche un solo dei miei allievi imbrancarsi in tale andazzo. Intonazione elevata è all'opposto quella che insegna a seguir sempre la via naturale, quella che insegna a trarre il massimo frutto da ogni sforzo assurgendo da ogni risultato particolare a riconoscere le conclusioni d'ordine generale che in esso sono implicite e con esso si sono raggiunte. Sono esse, ed esse sole, che valgono del resto a porre il risultato stesso nella sua vera luce, nella sua più semplice intuizione, in modo da renderlo indelebilmente ovvio alla mente senza barbari sforzi mnemonici, e che d'altra parte costituiscono un arricchimento più sostanziale che non il risultato cercato di per sé. Così ad es. si troveranno sistematicamente illustrate e poste in risalto delle questioni d'indole generale, come il significato e il valore del ragionamento per induzione (n. 23), dell'uso di grandezze con segno (n. 66), delle convenzioni sull'«infinito» (nn. 46, 56, 75), della critica dei principi in geometria e in altri campi (nn. 77 e 143), ecc. (anche per la preoccupazione e con il vantaggio di prevenire dubbi facili a sorgere), e in genere – anche se incidentalmente, e quando opportuno per non appesantire il testo magari con note in calce – si vedrà la tendenza ad accennare agli sviluppi che dopo certe considerazioni risultano implicitamente conseguiti.

Sebbene a un livello tanto meno elevato, non sarà qui meno opportuno cercare di «aprire molte finestre nell'immenso orizzonte matematico» come si propone il SEVERI in *Lezioni di Analisi*. Avvezzare e dare il gusto e convincere dell'utilità anche immediata di tale integrale sfruttamento strategico dei successi tattici nel campo del pensiero dovrebbe costituire – mi sembra – la chiave del segreto per avvincere alla matematica le menti adatte e per avvicinare nel grado desiderabile e possibile quelle intelligenze in cui la prevalente tendenza artistica o filosofica o d'altra natura qualsiasi troverebbe nella intuizione delle fondamentali concezioni matematiche un prezioso complemento. Un vantaggio che si raggiunge è infatti quello di far apparire assai più breve di quanto usualmente non sembri la distanza fra i concetti elevati della matematica e quelli del modo di ragionare di altre discipline o addirittura del comune quotidiano ragionamento, in quanto per giungervi non si richiede affatto di soffermarsi preventivamente in dettaglio su tante teorie particolari e magari pesanti. Così la generalità degli intendimenti e la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la naturale base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento.

Seguire una tale via, caratterizzata da maggiore ampiezza e profondità di vedute, compensata da minor massa di particolari, richiede certamente un maggior sforzo concettuale, le cui conseguenze sono proficue e durature, ma riduce al minimo il passivo sforzo mnemonico, peggio che fatica sprecata, stortura immorale che abbrutisce e diseduca. Lo studente che si volesse dolere di non potersi «preparare» su questo libro secondo tale malcostume, sappia che ho fatto del mio meglio deliberatamente per impedirglielo, nel suo stesso interesse, perché non sono disposto a considerare sufficiente per l'esame una simile cosiddetta «preparazione».

Anche nei riflessi della carriera scolastica (e possibilmente di tutta la vita, come sarebbe tanto necessario per il bene della collettività e della patria) si cerchi di trarre insegnamento dal fatto che in tutta la trattazione ho cercato di far risultare come chiara e preziosa constatazione: la fallacia del meschino criterio del minimo sforzo inteso nel senso del piccolo e particolare e gretto tornaconto immediato. Ognuno che ha sementa semini, ognuno che ha forze si prodighi, e ci saranno per tutti le abbondanti messi che non prosperano dove il seme e il sudore sono lesinati attraverso il miope calcolo dei malintesi egoismi.

Con questo significato più ampio s'intenda ed applichi l'antica massima «non scholae sed vitae discitur»: non solo studiare la materia d'esame pensando che essa tal quale potrà servire anche nella vita (il che spesso non è), ma approfittarne per attrezzare la mente nel modo più organico e ferrato per affrontare nella vita tutti quei compiti particolari che a ciascuno si presenteranno (grandi o piccoli, ma tutti ugualmente importanti, perché una macchina è ugualmente impedita di funzionare per difetto del motore o per rottura dell'ultimo ingranaggio). Se qualcuno poi propendesse per la stravagante idea dei semplicioni che vorrebbero dalla scuola un ricettario «di ciò che serve», rifletta un po' se riterrebbe preferibile (per fare un'espressiva analogia) mandare a memoria un gran numero di itinerari cittadini (ad es.: per recarmi dall'Università alla stazione devo, uscendo, prendere a sinistra, svoltare per la prima trasversale a sinistra e poi per la prima a destra, ecc. ecc.) anziché formarsi un'idea d'insieme sulla pianta della città e imparare, per i casi ove tale ricordo non bastasse, a consultarla.

Nello studio della matematica in ispecie, più che di insegnarla si tratta di aiutare a reinventarla e rendersi conto dei motivi che hanno spinto i maggiori matematici a dischiuderci questo cammino, delle difficoltà che essi in misura ben maggiore di noi ebbero a superare, dello sviluppo storico delle idee in cui tanti sforzi e intuizioni individuali s'inquadrano. A tal fine l'ordinamento seguito è stato esso stesso ispirato alla traccia di una possibile successione di meditazioni che faccia ripercorrere nel modo più svelto il travaglio costruttivo delle concezioni matematiche, dalla fase intuitiva che presenta il problema e fa intravedere i mezzi per affrontarlo a quella logica cui spetta elaborarli e assodarli col dovuto rigore (il che è parso opportuno far risultare, come caratteristica saliente, nel titolo stesso del volume).

Anche la preoccupazione del rigore cambia aspetto: occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza, il che è altra cosa, né necessaria (dove non si tratta che di passaggi materiali non vedo perché ogni principiante dovrebbe accertarsi da sé che non vi sia una svista sfuggita a tutti prima di lui), né sufficiente (perché dopo aver imparato con quali manipolazioni si ricava una formula da un'altra non è detto che si sia penetrato il contenuto di ragionamento dei passaggi eseguiti). Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella del capire.

Proprio mentre stavo lavorando al presente volume sono apparse delle opinioni estremamente interessanti su questo tema dell'insegnamento della matematica, e giungono talmente a proposito che non voglio omettere di citarle. Tanto più che le rende particolarmente significative il fatto che provengano da spiccate personalità di diversissima tendenza: da tre accademici, uno scrittore, un biologo, un matematico.

Dice BONTEMPELLI (*Colloqui*, «Tempo», n. 198, marzo 1943, p. 31): «Tutti coloro che si credono più o meno artisti, si fan vanto di avere avuto zero in matematica fin dalle prime classi. Al quale proposito ho avuto modo di osservare che in questa incomprensione verso la matematica la gente è spesso sincera, ma mi sono anche convinto che la colpa è solamente del modo con cui la matematica è insegnata. Il difficile non è capire la matematica, è farla capire; chi si dedicasse per qualche tempo alla specialità pedagogica della matematica e creasse una didattica delle scienze esatte farebbe opera utilissima. Capìta, diventerebbe per ogni scolaro la più appassionante delle discipline, e soffusa di mistero».

Profondissima e quasi miracolosa intuizione d'artista questa del comprendere, in contrasto con l'arida mentalità scolastica, che capire significa non eliminare il mistero, ma inoltrarsi nel mistero («il mistero, che è la sola realtà», come ebbe a dire nella commemorazione di PIRANDELLO).

Dice PIERANTONI (*Confidenze di un biologo*, «Scienza e Tecnica», maggio 1943, p. 193): «Non coltivai mai la matematica, non perché non la comprendessi, ma perché trovai sempre una certa difficoltà a ritenere a memoria i dati che non richiedessero un certo sforzo d'intelligenza per essere compresi».

E GIORGI (*Risposte di un elettrotecnico*, ibidem, p. 188): «Al pari di molti altri, che poi si sono specializzati in matematica, trovavo ripugnanza per l'aritmetica e la geometria delle scuole elementari e del Ginnasio. Tutti quegli insegnamenti non potevano soddisfare una mentalità inclinata alle scienze esatte».

Queste due condanne così terribilmente recise nella loro pacata obiettività si riferiscono certo a gradi d'insegnamento meno elevati di quello di cui ci occupiamo, ed anche a tempi non proprio recenti, ma ciò non toglie che debba considerarsi aperto e non facile il compito di rendere appassionante lo studio della matematica facendone penetrare lo spirito a chi non vi si dedichi espressamente in modo tale da giungervi con la propria meditazione.

Non basta purtroppo la consapevolezza di un male per mettere in grado di ovviarvi, tanto meno per evitare che, rimediando a certi aspetti della questione, non risultino peggiorati altri. Tengo anzi ad avvertire subito che il distacco dalle usuali trattazioni scolastiche è andato sotto qualche aspetto al di là dei miei stessi intendimenti: dovendo contenere la mole del volume, ho preferito ridurre prevalentemente quei passaggi e sviluppi ed esercizi che pur riterrei didatticamente utili piuttosto che le considerazioni che costituiscono la ragion d'essere della trattazione, sia perché tale omissione è più facile da colmare ricorrendo ad altri testi e libri d'esercizi, sia perché essa era essenziale al fine di rendere meno proibitive le difficoltà tipografiche. Senza poter giudicare se e fino a qual punto mi sarà tuttavia riuscito di realizzare in modo efficace l'ideale vagheggiato di presentazione delle idee matematiche, spero di esser almeno pervenuto a dare qualche saggio illustrativo di quello che nella mia intenzione avrebbe voluto essere, in misura sufficiente perché il lettore benevolo possa, su elementi concreti di giudizio, vagliare i criteri informativi della esposizione.

Criteri che non sono – naturalmente – né originali né nuovi: senza parlare di opere prettamente divulgative (il cui carattere è diverso per il fatto stesso che non si propongono di costituire un organico libro di testo), programmi ispirati a vedute analoghe furono da tempo propugnati e propagandati, anche se purtroppo con scarso successo, particolarmente da F. KLEIN di cui devo ricordare i tre volumi di *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* come una delle opere maggiormente tenute presenti nella preparazione del corso. Nello stesso senso agì l'influenza dell'insegnamento del CHISINI: vedansi i molti punti di contatto fra questa prefazione e quella di F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni algebriche*, e anche varie altre opere dell'ENRIQUES o da lui promosse sul significato della storia del pensiero scientifico e in particolare matematico. Ciò sia inteso però senza alcun esclusivismo nel senso di adesione programmatica a determinate «scuole»: come risulterà dalla breve seguente rassegna degli Autori da cui più ho tratto ispirazione nella materia dei singoli capitoli, non minore apprezzamento ho per la «scuola» logica di PEANO, e deploro le reciproche incomprensioni: devo molto alla lettura e meditazione della *Logica matematica* di C. BURALI-FORTI per la chiarificazione di idee cui mi obbligò sia pure progressivamente allontanandomene, e all'insegnamento del CASSINA; probabilmente risale a quando lo seguivo la convinzione che la vera causa degli inconvenienti che si sogliono imputare a deficiente preparazione nella scuola media stia nella mancanza di una sia pur succinta introduzione logico-matematica intesa a ricostruire all'inizio degli studi universitari le nozioni su cui sarà impostata l'analisi, nozioni apprese in modo più o meno criticabile e più o meno riformabile, ma non soltanto né soprattutto per ciò insufficienti, bensì per la logica diversità di livello dei diversi ordini di studi.

Appunto perciò, e approfittando anche della condizione per tal verso vantaggiosa del corso, di abbracciare sia pur rudimentalmente tutta la matematica evitando sovrapposizioni o lacune di collegamento o difformità di vedute fra insegnamenti paralleli, ho sostituito con un'introduzione così concepita la consueta ripetizione intesa a richiamare secondo gli stessi criteri delle scuole medie quella massa di nozioni che, se dopo centinaia di lezioni e di metri quadrati d'esercizi sono malferme, non c'è da illudersi non lo siano dopo qualche affrettata lezione in più. Anziché tentar di rinforzare con iniezioni di cemento il vecchio edificio per sopraelevarlo, ho cercato di non cimentarlo facendo gravare direttamente sul terreno con nuovi pilastri il peso delle soprastrutture, limitandomi a utilizzare le preesistenti pareti divisorie servizi, ecc. opportunamente inseriti nel nuovo disegno.

Tale parte introduttiva può considerarsi estesa a un capitolo e mezzo, o tre, o sei, in quanto in misura crescente frammista ad argomenti del programma universitario, come ora sarà precisato al duplice scopo di dare qualche spiegazione sui criteri informativi della trattazione dei singoli argomenti e di indicare gli Autori cui mi sono più o meno direttamente ispirato.

Cap. I - Logica e matematica

Ha lo scopo di inquadrare in una visione d'insieme l'esposizione futura, da un lato dando i concetti di funzione, operazione, gruppo, in forma generale e intuitiva e dall'altro orientando le idee con considerazioni generiche sul significato e lo scopo della matematica, per abituare a farne strumento di pensiero e non considerarla come un arido dogmatismo da apprendere passivamente. Alle citazioni già fatte potrei forse aggiungere G. VAILATI, *Scritti* e opere di (o opinioni sulla) logica matematica di diversi autori (da HILBERT a POINCARÉ, dai «viennesi» ai polacchi), ma ciò sarebbe sproporzionato ai modesti limiti delle considerazioni svolte.

Cap. II - I numeri interi

Si propone di prospettare l'aritmetica nel quadro delle nozioni e concezioni logiche del Cap. I, facendone apparire come naturale prosecuzione il calcolo combinatorio, nonché il concetto di numero infinito: dal momento che la definizione di numero come «numero cardinale» li introduce di per sé, mi sembrò infatti opportuno spiegare sommariamente il significato di «numerabile» e «continuo», piccolo sforzo largamente compensato dal non trovarsi impotenti ad esprimere per mancanza di tali concetti molte semplici interessanti chiarificatrici osservazioni.

A parte la presentazione, nulla di men che notorio, in questo come nel successivo capitolo.

Cap. III - I numeri reali

Costituisce il momento più complesso della trattazione per il confluire e il diramarsi dei diversi argomenti e intendimenti, per così dire il crogiolo in cui, stabilita, in modo alquanto sommario ma aderente (ciò che più mi premeva) alle finalità pratiche e concettuali della sua introduzione, la nozione di numero reale, e collegata alla rappresentazione delle ascisse su di una retta, si applicano i concetti generali di funzione a definire le funzioni di variabile reale in generale e in particolare quelle monotone e continue, e s'introduce contemporaneamente come strumento di rappresentazione il riferimento cartesiano nel piano e – per cenni di primo orientamento – nello spazio. Tale strumento di fusione viene subito saggiato per riprendere, alla luce del punto di vista funzionale e dell'interpretazione geometrica che nel tempo stesso costituisce un'introduzione alla geometria analitica, la «ripetizione» sulle operazioni aritmetiche attraverso le funzioni lineari, l'esponenziale, il logaritmo, le potenze. Inoltre è messa in rilievo la vastità delle applicazioni pratiche, è fatto spesso presentire l'avvento delle nozioni differenziali che seguiranno nella 2ª parte, e, alla fine, si conduce a introdurre l'«infinito» (che mi sono deciso a trattare nel campo reale con la stessa familiarità e significato che in quello complesso, ovviando a discordanze) e ad accorgersi della necessità d'introdurre l'immaginario.

Nelle Facoltà d'economia e commercio non si trattava – per quanto mi consta – l'argomento dell'omogeneità di grandezze e sistemi di misura: tale lacuna mi apparve grave – anche se non quanto per degli ingegneri – e l'ho colmata.

Cap. IV - I numeri complessi

La solita rappresentazione del piano complesso viene senz'altro tradotta nell'identificare i numeri complessi alle similitudini piane, di immediata espressione riferendosi a coordinate polari (modulo e argomento), dal passaggio al riferimento cartesiano (componenti reale e immaginaria) si trae occasione per introdurre – e, come digressione, studiare – le funzioni circolari.

Ma intendimento principale è di suscitare nel modo più semplice e rapido possibile un'immagine intuitiva del campo complesso conforme alle concezioni della teoria delle funzioni analitiche, naturalmente appena adombrata; se, sia pure parzialmente e imperfettamente, tale difficilissimo compito potrà risultare conseguito (del che non sono affatto sicuro, essendo più che mai aleatorio in tal campo lo sforzo d'indovinare e immedesimarsi nella mentalità del principiante), il merito precipuo sarà di una breve e (mi sembra) fin qui inosservata comunicazione al Congresso internazionale dei matematici di Bologna del 1928: G. GIORGI, *Fondamenti per una teoria intrinseca delle funzioni di variabile complessa* (Atti, vol. III), le cui idee direttive ho cercato di adattare senza guastarle più del necessario a scopi pressoché divulgativi. In particolare, ammettendo provvisoriamente senza prova che le funzioni algebriche sono funzioni analitiche nel senso di tale presentazione, acquistano allora un significato intuitivo evidente il teorema fondamentale dell'algebra e le sue immediate conseguenze.

Altro esempio di trattazione succinta e suggestiva dell'argomento che tenni presente: F. TRICOMI, *Funzioni analitiche*.

Cap. V - Sistemi lineari

Ho già accennato in questa prefazione al ruolo che attribuisco al concetto di sistema lineare, e così a quello di operazione lineare, estendendone l'applicazione anche fuori dei campi più abituali. Tale persuasione mi si formò leggendo (allora nell'edizione francese del 1912) l'opera di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*. In particolare la nozione di determinante, che mi era rimasta ostica per la sua apparente artificiosità, mi parve tanto evidente dal teorema sugli operatori lineari alternati da meravigliarmi non venisse assunto senz'altro a definirla. Ciò richiede, è vero, l'introduzione del concetto di vettore, ma – a parte che riesce tanto utile da giustificare anche un eventuale sforzo – esso è talmente espressivo che, se rivado all'epoca in cui lo appresi nelle lezioni del CISOTTI (che per prime mi appassionarono alla matematica, sì da provocare in seguito il mio passaggio dal Politecnico a Scienze) ritengo sia stato forse l'unico concetto nuovo la cui introduzione non incontrò momentanee perplessità incomprensioni incertezze od equivoci da parte mia o dei condiscepoli; più ancora mi ha incoraggiato la testimonianza in tal senso di due grandi geometri non vettorialisti ad oltranza per questioni di scuola, il SEVERI e il COMESSATTI, il quale ultimo fu anzi indotto a una «più totalitaria» impostazione vettoriale nel rielaborare, tra la I ed. del 1929 e la II del 1940, le sue *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (cfr. «Premessa alla 2ª ed.» p. X).

Più grave forse apparirà il fatto di dover introdurre gli spazi a n dimensioni per n qualunque; ma proprio per gli economisti e statistici, per i quali la geometria non è che uno schema rappresentativo, la differenza tra $n \leq 3$ ed $n > 3$ è priva di importanza effettiva pur di indurre a superarla in modo convincente, il che ho tentato nel n. 63.

Per le stesse ragioni, la trattazione è mantenuta nel puro campo affine e basata sui concetti originali e in gran parte non ancora adeguatamente sfruttati di H. GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, meno particolarmente improntati alla geometria dello spazio fisico, e in particolare sul prodotto alterno. Per la trattazione dei determinanti e sistemi d'equazioni lineari ho trovato esposizioni di analoga seppur meno totalitaria ispirazione in CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* e BEPPO LEVI, *Analisi matematica*.

[Si noterà come, dopo il n. 72, si potrebbe – ove s'intendesse svolgere su analoga traccia una trattazione meno ristretta – inserire con facilità una rapidissima esposizione di altri sviluppi sulle trasformazioni lineari, in particolare la teoria dei divisori elementari, e magari dedicare un nuovo capitolo ai corpi (concepiti come sistemi lineari di operatori costituenti gruppo)] †.

Cap. VI - Geometria analitica

La geometria proiettiva e quella metrica si riconducono a quella affine, istituita nel Cap. V, mediante abolizione della distinzione fra elementi propri e impropri (resa intuitiva con considerazioni di prospettiva) risp.

† Questo capoverso compare solo nella prima edizione del 1944.

mediante introduzione della nozione di ortogonalità o di quella equivalente di distanza: come e perché ciò aderisca al modo di pensare adatto per uno studioso di scienze sociali è ampiamente spiegato nel testo (specialmente nel n. 77) e sarebbe difficile darne un'idea riassumendolo.

La trattazione particolareggiata si limita a brevi (ma, grazie alle nozioni premesse che tendono a rendere accessibile il concetto di «polarità», abbastanza sistematiche) informazioni su rette, cerchi, coniche e problemi immediati su di esse, con simultaneo cenno di analoghi problemi nello spazio (o iperspazi) su piani, sfere, quadriche. Un cenno sui moti rigidi (trasformazioni di coordinate ortogonali) dà nuova prova dell'utilità della nozione di omografia vettoriale (introducendo le isomerie).

Cap. VII - Limiti

Ho cercato particolarmente di render chiaro il valore concettuale dell'introduzione del limite e le tappe della storia di tale nozione; per stabilirla ho trovato particolarmente indovinato basarmi sul termine «definitivamente» introdotto da M. PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, ricollegandolo, per un cenno sul limite in un campo qualsiasi, alle concezioni di M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits*. Sulle serie solo un cenno preliminare (i maggiori sviluppi essendo rinviati al Cap. IX). Circa la continuità ho ritenuto opportuno illustrare, almeno graficamente, i vari casi di discontinuità, perché una condizione di «regolarità» mi sembra priva di ogni potere immaginativo finché non sia presentata come negazione di certe irregolarità ben imparate a conoscere.

Cap. VIII - Derivate

Concetti direttivi come nel Cap. VII; sono incluse l'integrazione come operazione inversa della derivazione, e i cenni sulle equazioni differenziali e sul significato che per esse il calcolo differenziale assume come strumento d'espressione delle leggi naturali. Per tale modo di familiarizzare colle concezioni dell'analisi infinitesimale, facendone apprezzare al più presto l'interesse applicativo, ho in parte seguito l'esempio di R. COURANT, *Differential and integral Calculus*.

Si giunge alla formula di TAYLOR, ed a porre la questione della validità dello sviluppo in serie di TAYLOR.

Cap. IX - Serie e serie di potenze

La questione predetta dà occasione d'impostare nel modo più opportuno quella della convergenza d'una qualunque serie Σa_n attraverso l'introduzione d'un'indeterminata z che porta a considerare $\Sigma a_n z^n$ e quindi il cerchio di convergenza per il teorema di CAUCHY-HADAMARD da cui come corollari i criteri usuali. Tutto ciò, mi sembra, in modo più facile che per giungere soltanto ai criteri per le serie indipendentemente dalle serie di potenze; ne ebbi la persuasione da un parziale passo in tal senso di COURANT (op. cit. ad Cap. VIII).

Stabilendo il legame tra serie di potenze e funzioni analitiche, si proseguono le considerazioni abbozzate nel Cap. IV con dei cenni secondo il punto di vista di WEIERSTRASS, per il quale mi sono valso dell'esposizione di VIVANTI, *Funzioni analitiche*, e del suo insegnamento da cui ebbi la prima rivelazione di quanta matematica ci fosse al di là del programma del biennio e di come potesse esser padroneggiata da mente d'uomo.

Cap. X - Problemi in più variabili

Sono trattati e collegati gli argomenti ove intervengono più variabili dipendenti (p. es. curve nello spazio) o più variabili indipendenti (funzioni di più variabili), in quanto richiedono una rappresentazione spaziale (o iperspaziale); di essa ci si vale sistematicamente per appoggiare le nozioni analitiche a concetti geometricamente o anche fisicamente intuibili (campo vettoriale, gradiente, ecc.).

Nella succinta trattazione, due cenni un po' più ampi sono quelli sui sistemi d'equazioni differenziali con particolare riguardo ai punti d'equilibrio stabile e instabile, e quello sui problemi di massimo, di massimo vincolato o di «optimum» in più variabili; entrambi con l'intendimento di richiamare l'attenzione sul concetto dell'interdipendenza dei fenomeni e con speciale riferimento ai problemi di carattere statistico e economico, sia pur ravvicinati a chiarificatrici applicazioni fisiche.

Non si tralascia comunque, all'occasione, di toccare anche argomenti di pura matematica (fattore integrante, condizioni di monogeneità, funzioni armoniche, ecc.).

Cap. XI - Integrali

L'integrale come operazione inversa della derivazione è già noto dal Cap. VIII; qui si tratta perciò di proseguire lo studio riprendendo il concetto secondo la definizione diretta (RIEMANN; MENGOLI-CAUCHY) e accennando alle principali regole d'integrazione. Ma più che altro necessita estendere il concetto d'integrale a casi più generali, come da tale punto di vista è spontaneo, e come è necessario per introdurlo senza restrizioni innaturali nelle applicazioni al calcolo delle probabilità, alla statistica e alla matematica finanziaria e attuariale: si tratta di passare dall'integrazione in una a quella in n dimensioni, e dall'integrazione ordinaria a quella nel senso di STIELTJES.

Terminata la scorsa al contenuto dei singoli capitoli, dovrei menzionare ancora altri numerosi trattati che consultai confrontando, ove incontravo incertezze di scelta, le forme di esposizione, ma sarebbe un'arida lunga e pur sempre incompleta elencazione; farò solo una eccezione per F. TRICOMI, *Analisi Matematica*, che per il tono facile dell'esposizione mi sembra consigliabile a chi volesse allargare le prime nozioni qui apprese. Inutile aggiungere la citazione dei diversi e spesso pregevoli libri o dispense in uso nelle Facoltà d'Economia e Commercio, già tanto noti e diffusi fra gli studenti e studiosi di tali discipline.

Nel testo ho omesso qualsiasi citazione tranne una sola: quella delle voci dell'*Enciclopedia Italiana* (brevemente indicata con E. I.), e ciò per diversi motivi; dato il carattere quasi divulgativo del presente volume un rinvio a ricerche e fonti originali costituirebbe un salto insensato; volendo citare trattati scolastici l'imbarazzo della scelta era eccessivo, né avrei avuto motivo di scegliere sempre uno stesso (tanto più che nessuno collima colla presente esposizione) o di nominare or questo or quello ché certo il lettore non riuscirebbe a trovarli né potrebbe utilmente saltare dall'uno all'altro. Invece l'E. I. si trova ovunque, e chi volesse consultare opere originali trova lì indicazioni bibliografiche meglio vagliate di come avrei potuto fare io.

Ma a prescindere da tali motivi di ripiego addotti per giustificare comunque la decisione, penso che gli articoli matematici dell'E. I. sono nella massima parte veramente adatti per persone colte che abbiano una sufficiente preparazione. Per chi dovrebbero altrimenti esser stati scritti profondendo tanto intelligente sforzo di chiarificazione? per i matematici onde giudichino reciprocamente dell'abilità dei colleghi? o per i totalmente profani che non riuscirebbero neppure a raccapezzarsi? Ecco perché ritenevo un peccato che non ci fosse una specie di guida ad uso delle persone colte per metterle in grado di leggere e coordinare tali scritti, e ho cercato di farla per quanto mi riusciva (cioè: senza allontanarmi per tale fine accessorio dal piano del corso, e senza preoccuparmi – per mancanza di tempo – di cercare sistematicamente le voci da citare che non ricordassi d'aver letto o non incontrassi casualmente).

Per consultazioni più sistematiche si tenga presente la *Enciclopedia delle Matematiche elementari* (a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI).

Per consentire al lettore di ripassare e riordinare gli argomenti, ritrovando e ricollegando considerazioni e trattazioni il cui filo a più riprese e sotto diversi aspetti si doveva interrompere e riallacciare, potrà giovare il ricorso all'indice schematico, anche se dovetti rinunciare – per non appesantire troppo il volume – all'idea di trasformarlo in una specie di glossario ricapitolativo o in uno sguardo d'insieme a posteriori sul tipo di G. LORIA, *Metodi matematici*. Il raggruppamento delle voci è stato espressamente studiato a tal fine così come la compiutezza dei riferimenti nelle testate (v. Avvertenza, p. XXXVI[‡]).

Mi resta infine a giustificare quella che può sembrare presunzione, d'aver dato alle stampe il corso mentre ancora stavo svolgendo il primo anno d'insegnamento. Certo, sull'ordinamento generale e sui punti salienti dell'esposizione andavo meditando da anni, ma solo il vaglio della lezione conta. La verità è che fui trascinato alla pubblicazione da una serie di circostanze impreviste. Avevo consigliato di seguire le pregevoli dispense precedentemente in uso, T. BOGGIO e G. PEISINO, *Matematica generale*, che pensavo di adottare ancora per 2-3 anni prima di accingermi a redigere le mie, ma dall'epoca delle incursioni su Torino rimasero lungo tempo (e si temeva definitivamente) irreperibili; inoltre le innovazioni apportate allo svolgimento della materia rendevano agli studenti più difficile che non avessi previsto il seguire il testo. Il dott. GIULIANO DELL'ANTONIO che, essendo in licenza per ferite riportate al fronte greco, seguiva il corso per diletto prendendo appunti, mi propose di farne dispense previa mia revisione, e accolsi l'idea come primo passo per la stesura definitiva. Se non che, avuti gli appunti, non seppi trattenermi dal ritoccare migliorare perfezionare con la consueta incon-

[‡] Dalla seconda edizione in poi, è invece scritto "p. xiiv" poiché l'indice schematico è stato spostato in fondo al libro.

tentabilità, e poi modificare non solo la stesura ma la stessa disposizione che avevo seguita adeguandola ai ritocchi di cui via via prendevo nota per l'anno prossimo. Al tempo stesso le difficoltà per una riproduzione di fortuna (ciclostyle, rotaprint, litografia) crescevano, finché a un certo momento il dott. FAUSTO FARAGUNA, mio assistente, dopo essersi occupato col suo multilaterale e intelligente spirito d'iniziativa d'ogni cosa, m'informò della possibilità di un'edizione a stampa da parte della Editrice Scientifica Triestina allora in via di costituzione. Per il disegno delle figure (parecchie laboriose e difficili) si prestò il geometra MARIO BORDARI, dell'Ufficio tecnico dell'A.C.E.G.A.T, e il lettore apprezzerà certamente il suo lavoro. A questi collaboratori entusiasti, a tutti gli allievi che frequentarono le lezioni e lo sono pur essi attraverso domande e commenti o l'espressione or perplessa or gioiosa degli occhi, ai colleghi che m'incoraggiarono col loro interessamento, un ringraziamento sentito.

E un particolare riconoscimento allo Stabilimento Tipografico Nazionale – al direttore geom. cav. VENUSTO ROSSI e ai tipografi DANTE ENGLARO e LODOVICO BARI – per la cura e la pazienza con cui il difficile lavoro fu eseguito, senza ricusare fatica anche se richiesta solo per miglioramenti d'estetica, e pur dovendo affrontare e subire gli effetti della situazione sempre più dura in cui viviamo. Per la Editrice Scientifica Triestina costituisce un meritorio atto di coraggio e di fede aver iniziato in tal momento la sua attività; vada ad essa l'augurio di poter contribuire, con la serietà e vivacità che sono nei suoi propositi, alla vita culturale in questo estremo lembo di terra italiana.

Trieste, 24 novembre 1943 ([1])

([1]) Dopo la pubblicazione in tale data della presente prefazione in un opuscolo di saggio, all'epoca della stampa definitiva (Agosto 1944), vi sono stati aggiunti alcuni brani e rifatto il riassunto del cap. X.

Aggiungo in questa occasione i migliori ringraziamenti a diversi colleghi e in particolare all'ing. RAFFAELE INVREA, per la segnalazione di errori riportati nell'«Errata Corrige» e per osservazioni che mi saranno preziose nell'eventualità di una ristampa.

[Questa nota compare nella prima e nella seconda edizione (1957) del volume, mentre non compare più nell'edizione del 1959 (Roma: Cremonese) e in quella del 2005 (Milano: Giuffrè)].

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 281-292

La funzione vivificatrice della matematica (*)

BRUNO DE FINETTI

Nulla, forse, quanto la matematica, dà ai più l'impressione di qualcosa di arido e freddo, necessariamente estraneo e sterile nei confronti del perpetuo agitarsi e rinnovellarsi delle correnti del pensiero e dello spirito. Se il titolo di questo discorso ha fatto presagire che intendevo sostenere una tesi opposta, suppongo d'essere atteso al varco con curiosità, come chi sarà costretto ad acrobazie dialettiche per difendere una causa paradossale o addirittura perduta in partenza. Io invece non penso affatto a propinare qui delle idee personali peregrine o estremiste: mi propongo soltanto di rammentare pochi fatti e di aggiungere poche ovvie osservazioni per persuadere che questa «funzione vivificatrice della matematica» non è una trovata tendenziosa, ma è un dato di fatto storicamente accertabile e perfettamente spiegabile.

Uno dei più insigni e brillanti matematici italiani, che speriamo avere prossimamente fra noi per un ciclo di conferenze alla Facoltà di Scienze, mi diceva recentemente di considerare la matematica moderna responsabile dell'affermarsi dell'esistenzialismo. Voglio rassicurare subito l'uditorio: non intendo affatto avventurarmi in campi che non mi riguardano (ne sutor ultra crepidam!), e non parlerò quindi dell'esistenzialismo, e tanto meno pro o contro di esso. Non voglio discutere se questa presunta ripercussione del pensiero matematico su quello filosofico sia una colpa (come implicitamente si esprime l'autore della frase citata), oppure un merito (come altri potrebbe opinare), ma soltanto se essa sussiste. E ciò non vedo come si potrebbe contestare.

Approfondendo la critica dei princìpi e abbordando campi di ricerche sempre più delicati, i matematici si sono accorti di essere incerti e divisi proprio su quelle questioni di principio che dovrebbero costituire

(*) Discorso inaugurale del Prof. Bruno de Finetti per l'anno accademico 1948-1949 letto nell'Aula Magna dell'Università degli Studi di Trieste il 5 dicembre 1948, *Annuario della Università di Trieste*, 1949, 19-34.

l'«istanza legittima» cui appellarsi per garantire la validità di tutta la loro scienza. Non è il caso qui di accennare alle diverse correnti (p. es. l'intuizionismo, che postula la revisione più radicale) né ai principali punti in discussione (come l'assioma della scelta, i paradossi logici, il principio del terzo escluso), né alle conseguenze, di cui occorre solo rilevare che sono effettive. Effettive in questo senso: che non si tratta soltanto di interpretare colorendoli in modo diverso a seconda delle diverse mentalità filosofiche i medesimi risultati matematici, ma di accettare o respingere intere teorie e procedimenti di dimostrazione.

Dalla constatazione di un disaccordo insanabile in argomento si è giunti, col Gonseth (1), all'ammissione che si debba abbandonare la concezione *predicativa* della matematica per accoglierne la concezione *dialettica*: non più cioè una dottrina che si svolge partendo da un fondamento garantito una volta per sempre, ma una dottrina che, ad ogni istante del suo sviluppo storico, appare rispondente a un complesso di esigenze intellettuali e applicative che può contenere nella sua evoluzione i germi di future crisi. Il punto di vista storicistico, di cui con tanta dottrina e tanto calore l'Enriques (2) lumeggiò l'importanza per la comprensione dello sviluppo della matematica, s'insinuerebbe in tal modo fin nella sua base gnoseologica. In forma più faceta esprime il medesimo concetto il Kasner (3): «La matematica non è più riguardata come la chiave della Verità con la V maiuscola; essa può essere ritenuta come un piccolo, incompleto, ma enormemente utile Baedeker in una terra ignorata».

Non so se a tali conclusioni sia possibile sfuggire, ma l'unica eventuale alternativa, consistente nel restringersi a ciò che è puramente tautologico, non modificherebbe la situazione sotto il profilo di cui ci occupiamo: resta il fatto che la matematica non pretende di possedere un criterio di verità assoluta all'infuori di ciò che è vero in virtù di nostra libera definizione o convenzione. Che una tale conclusione si ripercuota fuori della matematica è ben naturale: la matematica è stata sempre considerata non solo come una scienza predicativa, ma come il modello delle scienze predicative, e la smentita ha un'importanza cruciale perché a maggior ragione diviene insostenibile la concezione predicativa in ogni altro campo del pensiero. Per dimostrare che tutti al mondo sono infelici – si spiega con un'immagine il

(1) Cfr. vari scritti e in particolare *L'idée de dialectique aux entretiens de Zurich*, «Dialectica», I, l, 1947.

(2) Cfr. vari scritti, p. es. *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, 1938.

(3) *Matematica e immaginazione*, Bompiani ed., 1948, p. 386.

Gonseth nell'esporre tale tesi – non c'è di meglio che provare l'infelicità di colui che si trova nelle migliori condizioni per esser felice.

Ecco perché mi sembra incontestabile che la crisi della matematica possa e debba, se meditata, influire su quella crisi di certezza che travaglia il pensiero contemporaneo: è come se uno scoglio sicuro su cui i filosofi pensavano di poter saldamente posare i piedi si rivelasse loro per bocca degli intenditori un'infida massa friabile.

Possibile che la matematica voglia ripagare con simile beffa coloro che nelle sue verità riposero e ancorarono la loro fiducia?

Ebbene: tale beffa è stata giocata più volte dalla matematica a chi credeva di poter garantire in suo nome il carattere di certezza perfetta ed eterna a certe dottrine che desiderava includere nell'ipotetico regno dell'assoluto, ed è proprio questo che mi propongo di far rilevare. Lasciamo da parte l'esempio citato della crisi più totale e sconcertante, che, per essere attuale e controversa, mal si presta a cenni rapidi e facili, e che, per essere al confine tra matematica e filosofia, non impegna e interessa gran parte dei matematici dediti ad altri ordini di ricerche. E passiamo invece in rassegna alcuni dei più noti e significativi antecedenti: casi cioè in cui concezioni ritenute inattaccabili, ed anzi, precisamente, inattaccabili in quanto partecipi della certezza che su di esse sembrava riversare la loro costituzione in dottrine di natura matematica, sono state scalzate proprio da critiche di natura matematica, e sostituite da altre che proprio la matematica ha permesso di costruire superando quello che un malinteso feticismo verso di essa faceva considerare come il limite del concepibile.

Risaliamo a un'epoca molto remota, quella in cui i pitagorici manifestavano il loro misticismo aritmetico con la dottrina che assumeva, come base di tutto, il *numero*, cioè il numero intero. A quell'epoca filosofia e matematica non si contrapponevano ma si compenetravano, e perciò quei filosofi giunsero essi stessi a scoprire un fatto matematico contrastante in pieno con la loro dottrina: l'incommensurabilità della diagonale al lato del quadrato (ossia, in linguaggio moderno, l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, ossia il fatto che $\sqrt{2}$ non può esprimersi come frazione). Una dottrina cadeva, ma un'altra iniziava il suo faticoso cammino: la teoria dei numeri reali. Fu comunque questa, ch'io sappia, la prima occasione in cui si parlò (come frequentemente avvenne in tempi recenti) di «scandalo» della matematica, e, secondo la tradizione, non senza fare una vittima in Ippaso di Metaponto, punito dagli dei col naufragio per aver rivelato il segreto di tale scoperta. Accanto al nome di Prométeo, celebrato dai poeti come simbolo dello spirito di ribellione che si traduce in slancio di rinnovamento, il nome di Ippaso di Metaponto meriterebbe d'essere ricordato come simbolo di quest'altra forza del progresso: la critica matematica, che non si scaglia contro l'ostacolo, ma lo scava, lo corrode, lo sgretola, con l'inesorabile accanimento delle térmiti.

Oltre due millenni più tardi, le teorie geometriche, nella sistemazione iniziata appunto da Pitagora e culminante con Euclide, erano più che mai l'esempio di verità apodittiche, tanto che ad esse in primo luogo s'era appellato Kant per trovare qualcosa da preservare, sia pure sotto la nuova veste di «giudizi sintetici a priori», dallo sfacelo del dogmatismo colpito dalle limpide argomentazioni di Hume.

A questi, che si era veramente affrancato dalla metafisica riconoscendo, nelle presunte verità razionali, fatti d'esperienza cui l'abitudine conferisce l'illusione della necessità, così appunto il Kant si opponeva ([4]): «Alla quale osservazione, che distrugge ogni filosofia, pure egli non si sarebbe mai lasciato andare, se avesse avuto sotto gli occhi il problema (della conoscenza) nella sua universalità; nel qual caso avrebbe visto che, secondo i suoi argomenti, non esisterebbe più neppure la matematica pura, perché questa comprende per certo giudizi sintetici a priori; e il suo buon senso lo avrebbe allontanato dal concludere in tal modo». Ebbene: i matematici si angustiavano invece da secoli per ricondurre le proprietà «evidenti» postulate da Euclide ad altre «più evidenti», ed erano già giunti così, con padre Saccheri ([5]), sulla soglia di un nuovo mondo che proprio in quel torno di tempo doveva dischiudersi. Ecco infatti apparire le geometrie non euclidee, che, pur senza dimostrare null'altro che l'indipendenza logica del postulato delle parallele dai precedenti, tolsero l'aureola di verità assoluta alla geometria usuale persuadendo della perfetta concepibilità di teorie che ne differiscono sostanzialmente e spianando la via a discussioni approfondite che valsero a mettere in luce quanto di empirico e di convenzionale costituisca il sostrato dei princìpi della geometria che si pretendeva erigere a dogmi. Ciò che in nome della matematica Kant giudicava inconcepibile, non sbigottì i matematici Bolyai e Lobacewsky, né sbigottiva il grande Gauss che taceva per non sollevare «le strida dei beoti».

([4]) *Critica della ragion pura*, tr. it. Laterza, Bari 1910, intr. p. 954.

([5]) Il quale, nel suo *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), precorre, sia pur con intendimento opposto, le concezioni sviluppate poi da Bolyai e Lobacewsky circa cent'anni più tardi.

Già in precedenza la visione del mondo e delle sue armonie concepite secondo un modello matematico staticamente geometrico era crollata ad opera di matematici. Quella magistrale architettura di sfere celesti, che si rispecchia nella magistrale architettura del poema di Dante e del «Paradiso» del Tintoretto, aveva cristallizzato il pensiero scientifico nelle formule aristoteliche di cui possiamo così vivacemente rivivere l'ultima battaglia nelle argomentazioni del Simplicio dei «Dialoghi» di Galileo e in quelle dei reali protagonisti delle polemiche contro il grande pisano. Illuminato dalla sua possente mentalità matematica, Galileo vede con impressionante penetrazione i punti deboli della concezione in cui tutti giurano, e i lineamenti di una nuova più valida armonia là dove, nell'abbandono di quella precedente, gli altri non vedono che l'assurdo e il caos. Passano pochi decenni ed ecco la nuova concezione prender corpo con Newton e dar luogo a quella filosofia naturale che costituisce tuttora lo schema delle conoscenze fisiche correnti.

È la concezione determinista che si afferma: e il mondo appare un immenso congegno ove ogni elemento si comporta, istante per istante, obbedendo a rigide leggi, secondo l'influsso che tutti gli altri esercitano su di esso. Nel linguaggio dell'analisi infinitesimale, la teoria che proprio allora si va formando come strumento matematico necessario ad esprimere tali nuove concezioni, il mondo del determinismo è un'equazione differenziale, e in esso, come dice Laplace traendo il logico corollario dalla convinzione che in tale schema rientrino tutti gli aspetti della realtà, il presente determina tutto il futuro: basterebbe cioè conoscere esattamente tutto il presente nei suoi innumerevoli dati e possedere l'immensa capacità di calcolo necessaria a seguirne l'evolversi istante per istante secondo le leggi della natura, e tutto l'avvenire si potrebbe predire con tutta certezza e precisione.

Non è da stupire che una sistemazione così perfettamente coerente e completa delle scienze della natura sia apparsa talmente seducente per molti pensatori – scienziati e filosofi – da indurli a considerarne almeno i tratti essenziali, e in primo luogo il determinismo, come caratteri necessari ed evidenti a priori della conoscenza scientifica. Molte le varianti superficiali ([6]) (dall'idealismo al positivismo e al materialismo) ma unico il fulcro: le verità contingenti della scienza dell'epoca dovevano erigersi a verità filo-

([6]) «Superficiali», beninteso, solo agli effetti delle considerazioni qui svolte da un punto di vista particolare.

sofiche eterne. Inutile consacrazione: ché nulla essa aggiungeva alla fiducia in quelle concezioni finché rimasero attuali, e nulla poté per prolungarla quando nuove scoperte e nuovi problemi ne scossero le fondamenta.

Dei terremoti sempre più frequenti e profondi sopravvenuti nella visione scientifica del mondo dopo il periodo in cui la si riteneva definitivamente fissata, basterà accennare i tre più essenziali: la crisi della causalità con le teorie probabilistiche, la crisi della rappresentazione spazio-temporale con la relatività, la crisi della concepibilità del mondo fisico con il principio di indeterminazione. E ne accenneremo non per entrare nel merito di tali questioni, il che esigerebbe ben altro sviluppo, ma per mostrare l'indispensabile apporto dello spirito matematico al superamento delle posizioni che esso stesso aveva precedentemente conquistate e che per tal fatto apparivano ad altri sacre e intangibili.

Il principio di causalità, la concezione determinista che ne è l'affermazione più spinta, apparivano conquiste intangibili, eppure la critica matematica ne incrinava le basi coll'arrovellarsi sul problema di quelle leggi naturali che, a differenza delle fondamentali leggi fisiche, hanno un carattere irreversibile. Sappiamo ad es. che un corpo, appoggiato ad una stufa, si riscalda. Ma – ci si chiederà – c'è forse da meravigliarsene? Non è anche questa una legge fisica che rientra nello schema del determinismo? Ebbene: per il matematico c'è qualcosa che non va: non sa spiegarsi come mai non possa avvenire anche il contrario, e cioè che il corpo si raffreddi ancor più cedendo calore alla stufa calda, come, secondo lui, dovrebbe accadere, partendo da una situazione iniziale identica salvo il verso delle velocità.

Per spiegare fatti del genere i matematici non trovarono di meglio che ricorrere alla teoria delle probabilità, sviluppatasi nel secolo precedente per risolvere problemi sui giochi d'azzardo: allora però non si aveva più una previsione basata su leggi indefettibili e necessarie, ma solo una previsione di fatti probabili, sia pure tanto probabili da apparire praticamente certi. Le spiegazioni probabilistiche, o statistiche, dilagarono successivamente travolgendo molte «leggi necessarie» che perdettero tale attributo nella nuova interpretazione, e l'intera concezione della scienza ne è ormai permeata. Non mancano le opposizioni: ma, anche nell'ipotesi (a mio avviso poco probabile) di un ritorno della scienza a rinnovate teorie deterministiche, rimarrebbe per sempre provato in sede filosofica il carattere non aprioristicamente necessario del determinismo per la previsione scientifica, risultata di fatto possibile anche su base probabilistica.

Tale base probabilistica è a sua volta assillata da discussioni sui princìpi: assistiamo a diversi tentativi di definire la probabilità in modo oggettivo, tentativi che la concezione soggettiva considera vani. Accettando la concezione soggettiva, il soggettivismo invaderebbe attraverso il probabilismo tutto il campo delle scienze fisiche; il rifiuto delle teorie soggettive da parte di molti sembra appunto dettato dal desiderio di sfuggire a tale conclusione, se non che, per dare un significato oggettivo, bisogna effettivamente trovarlo, e non basta trovare inammissibile che non ci sia. ([7])

Anche in altro senso la concezione causale è stata superata ad opera di matematici: voglio alludere allo schema ideato dal Fantappié ([8]) per inquadrare sia i fenomeni entropici, che ubbidirebbero alla causalità, come quelli ectropici, che potrebbero viceversa ubbidire al finalismo. Non si tratta che di un tentativo, discusso e discutibile quanto si vuole; ma indipendentemente da ogni giudizio sull'opportunità di accettare quella teoria, già il fatto che sia stata costruita dimostra che il matematico non è impedito da veti o pregiudizi né scientifici né metafisici dall'andare contro corrente per contemplare anche, eventualmente, degli schemi finalistici.

La crisi portata dalla teoria della relatività ha avuto larga risonanza anche fuori del campo degli specialisti, e, benché le notizie divulgative siano piuttosto oscure, credo di poter considerare universalmente noto il punto che mi basta richiamare. Una delle nozioni più semplici e ovvie era da sempre quella di «simultaneità»: dati due eventi qualunque, nessun dubbio che ci si potesse chiedere se l'uno è simultaneo all'altro, cioè è avvenuto nel medesimo istante, oppure se è avvenuto o prima o dopo. Su questo presupposto è basato lo schema del mondo della scienza classica (cioè pre-relativistica): da una parte il fluire del *tempo*, costituito di istanti, e ad ogni istante una certa situazione delle cose nello *spazio*, costituito di punti. È lo schema stesso del nostro pensare e parlare quotidiano; è anche lo schema teorizzato dalle diverse filosofie che hanno trattato dell'argomento ponendo spazio e tempo come due distinti concetti, o realtà obiettive, o forme a priori della conoscenza, o quel che altro preferivano.

([7]) Il punto di vista soggettivo è stato sostenuto dall'autore in diversi scritti, la tesi qui accennata è particolarmente svolta in *Le vrai et le probable* (in corso di stampa su «Dialectica») [N. d. C.: B. de Finetti (1949), Le Vrai et le Probable, *Dialectica* 3 (1-2), 78-92].

([8]) *Princìpi di una dottrina unitaria del mondo fisico-biologico*, «Humanitas nova» ed., Roma.

Un risultato sperimentale imprevisto (esperienza di Michelson-Morley), che si tentava inquadrare nella teoria classica con fastidiosi adattamenti, fece invece riflettere Einstein sulla effettiva consistenza della nozione di simultaneità. Porre il dubbio e trovarlo fondato fu tutt'uno. E, impostate le teorie fisiche secondo i criteri che scaturivano dall'analisi critica della simultaneità, e coll'ausilio dei concetti e metodi già in astratto preparati della geometria pseudoeuclidea a quattro dimensioni e (per sviluppi ulteriori: relatività generale) del calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita, scomparve la necessità di quei fastidiosi adattamenti.

Si aveva in compenso uno schema del mondo concettualmente nuovo e imprevisto, contrastante con le abitudini mentali, con le elucubrazioni filosofiche, con le impostazioni matematiche precedenti. Anche qui fu la matematica a far sormontare i limiti del concepibile, sia fornendo gli strumenti per la critica e per la ricostruzione, sia preparando la mentalità adatta a non far sbigottire dell'insospettata metamorfosi dell'intera concezione del mondo.

Il ragionamento di Einstein relativo alla simultaneità si trova in tutte le trattazioni anche di carattere divulgativo: non potrei illudermi di essere chiaro esponendolo di sfuggita, ma ho bisogno di precisare in che consista «il punto di vista operativo» ([9]) al quale s'informa. Mi spiegherò con un esempio atto a chiarire il nocciolo della questione a un profano (anche se agli specialisti devo chiedere scusa per la superficialità per quanto esorbita dal fine esemplificativo). Consideriamo due corpi di uguale massa. Cosa vuol dire ciò? Qualcuno penserà forse di dover escogitare un significato, dirò così filosofico, del concetto di massa, del concetto di uguaglianza, e poi magari aggiungerà che, come metodo pratico, per riconoscere se due corpi hanno masse uguali basta metterli sui due piatti di una bilancia.

Invece il punto di vista operativo, canone del pensiero scientifico, ci obbliga a capovolgere la considerazione: il fatto di far stare in equilibrio la bilancia servirà a *definire* l'uguaglianza di massa di due corpi e con ciò a *costruire* il significato di «massa». I procedimenti di misura o di verifica non costituiscono un'appendice a concetti capaci di esistenza autonoma: i concetti non hanno senso se non in quanto introdotti allo scopo di esprimere un risultato di determinati esperimenti o procedimenti di misura. Così anche il concetto di simultaneità non può aver senso per virtù propria o per virtù di un qualche valore filosofico che si voglia imporre al concetto

([9]) Cfr. p. es. P.W. Bridgman, *Die Logik der heutigen Physik*, tr. ted. Hueber, München 1932.

di tempo. Occorre spiegare quali effettivi procedimenti (trasmissione di segnali, trasporto di orologi, ecc.) si dovrebbero seguire per stabilire la simultaneità, ed è appunto quest'analisi che portò Einstein alla conclusione negativa: all'impossibilità cioè di stabilire un criterio sperimentale che faccia giudicare in modo concordante, riguardo alla simultaneità di due eventi, degli osservatori in moto l'uno rispetto all'altro.

Dal caso pressoché ovvio della massa siamo passati a quello sconcertante della simultaneità, ma l'applicazione del «punto di vista operativo» non si è fermata qui, e, portata nel campo dei fenomeni atomici in modo da riconoscere cosa vi si trovi di effettivamente (sia pure in linea di principio) «osservabile», ha condotto al più recente e radicale sconvolgimento delle nostre concezioni con le teorie quantistiche. Ivi veramente si può dire che, ricorrendo ai mezzi più impensati (dall'algebra delle matrici a considerazioni svolgentisi nel campo dei numeri immaginari), la matematica ha soppiantato tutto ciò che siamo abituati a considerare «la realtà», sostituendolo con una trama di formule mirabilmente adatta ad afferrare ciò che è osservabile e lasciar sgusciare l'inosservabile, ma appunto per questo sfuggente ad ogni interpretazione concepibile fra i due aspetti contraddittori di onde e di corpuscoli.

Mi dovevo limitare a questi pochi esempi, e per ogni esempio a questi rapidi cenni, mentre di esempi si potrebbe addurne innumerevoli (anche se in gran parte di natura più tecnica), e una più approfondita disamina porrebbe in risalto tanti aspetti necessari a sviluppare compiutamente la tesi prefissami. Tuttavia l'essenziale mi sembra già scaturire convincentemente dai tratti salienti degli episodi citati.

Contro il ristagnare del pensiero e l'inaridirsi della fantasia, contro il mummificarsi delle dottrine e il cristallizzarsi della scienza, è proprio la matematica che svolge la più spregiudicata funzione vivificatrice. È la matematica infatti che compie la più spietata opera di analisi critica foriera di nuove crisi, scoprendo perfino (come nel caso della simultaneità) i punti deboli nei presupposti, apparentemente tanto ovvi da rimanere inosservati e inespressi. È la matematica che, quando sviluppa i suoi concetti e le sue costruzioni senza alcun fine di applicazioni attualmente prevedibili, ma soltanto, come proclamava Jacobi, «per l'onore dello spirito umano» ([10]), estende il dominio della fantasia a regioni in cui la scienza

([10]) Lettera a Legendre, 1830, polemizzando con un atteggiamento più «utilitario» sostenuto da Fourier (cfr. op. cit. ([2]) p. 197).

di domani potrà avventurarsi per trovare una via d'uscita quando la vecchia via l'avrà condotta in un ginepraio di contraddizioni. È la matematica che, quando nell'edificio della scienza si rivela una crepa, mentre ancor sembra ai più che basti il rimedio di una mano d'intonaco, ne avverte l'irreparabilità e previene il crollo dell'intera costruzione trasformando magicamente quanto in essa vi è ancora di intatto nell'invenzione di un palazzo tutto nuovo. È la matematica che non sbigottisce delle novità che dal di fuori appaiono stravaganti, e sa tranquillamente attendere che il coro delle proteste si plachi e la luce delle sue ragioni anche riposte giunga ad illuminare i monocoli e i ciechi e i peggio che ciechi che non vogliono vedere. È la matematica che svolge, insomma, il compito dell'avanguardia, scavalcando, ogni qual volta i tempi sono maturi, il limite di ciò che appariva certo e assodato, il limite di ciò che appariva concepibile e rappresentabile.

Ed è ben naturale che sia così. Il nostro sapere, ma anche la limitazione del nostro sapere, è data dall'abitudine. La fonte della certezza è la mancanza di fantasia; l'incapacità di immaginare alcunché di estraneo alle nostre abitudini mentali può a volte apparirci addirittura, adornata di orpelli metafisici, come il criterio di una verità a priori, solido punto d'appoggio per una scienza «predicativa». Ciò che si è visto in tutti i nostri esempi, dall'aritmeticismo pitagorico alla geometria euclidea, dalla concezione aristotelica del mondo a quella determinista della scienza di cent'anni fa, dalle esigenze della concezione ordinaria dello spazio e del tempo a quelle della concepibilità degli schemi fisici in generale.

Come svincolarsi dai ceppi dell'abitudine e ritemprare l'ala della fantasia per la conquista di mondi ignoti? Vi sono le due vie, opposte ma per ciò stesso simili, di cui ho indicato come simboli Prométeo e Ippaso: lo slancio creativo e istintivo dell'artista, la divina allucinata perseveranza dei matematici.

Mi si consenta un paragone forse alquanto inadeguato e irriverente, ma abbastanza espressivo. Per scoprire un ammanco o un'irregolarità amministrativa, uno può giungere ad un sospetto fondato col fiuto, un altro attraverso un'accorta revisione contabile. Nel rinnovamento del pensiero, al primo corrisponde l'artista, al secondo il matematico, mentre (il paragone non è finito!) coloro che si scandalizzano se la matematica supera le proprie posizioni precedenti, mi fanno l'effetto di chi fosse convinto della ineccepibile regolarità della gestione per il solo fatto che tutte le registrazioni figurano debitamente riportate in partita doppia.

Si può scoprire un nuovo mondo così, come Pirandello fa appunto dire a un artista ([11]): «Ti sarà avvenuto qualche volta – non sai come – non sai perché – di vedere all'improvviso la vita, le cose, con occhi nuovi ... – palpita tutto, a fiati di luce – e tu, sollevata in quel momento e con l'anima tutta spalancata in un senso di straordinario stupore ... – Io vivo così! in questo stupore! E non voglio sapere mai nulla».

Si può scoprire un nuovo mondo così, svincolandosi dall'abitudine, ma si può anche all'opposto scoprirlo tuffandosi nel vecchio mondo dell'abitudine per scandagliarlo; si può giungere al miracolo non «cercando di non sapere mai nulla» ma accorgendosi di non sapere nulla per l'insoddisfazione di non sapere mai abbastanza.

E la matematica apre per l'appunto nuovi e più stravaganti orizzonti alla fantasia, non col cercar di prescindere dagli elementi dell'abitudine, dell'esperienza quotidiana, ma disseccandoli coi suoi procedimenti di astrazione e ricavandone immagini così irriconoscibili da sembrare create dal nulla. Il matematico vive solo una frazione della propria vita nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale della fisica corrente, e non è certo lui a stupirsi se, ad esempio, anche per tale spazio risulta più adeguata questa o quella delle altre strutture di spazio cui è assuefatto.

E perciò, pur senza esser un rivoluzionario per partito preso o per smania del nuovo, il matematico può spesso esser preso all'apparenza per tale perché la sua familiarità nel maneggiare astrazioni, non importa se corrispondenti o no a qualcosa di esistente o di concepito come reale nel mondo dell'epoca, lo pone nelle condizioni ideali per un atteggiamento equanime nei conflitti fra il vecchio e il nuovo, ponendoli su un medesimo piano, e annullando in sé le inibizioni psicologiche che fanno apparire ogni scostamento dall'abituale come qualcosa di sacrilego o di assurdo.

Sarà ora chiaro perché siano apparsi fuori strada quei filosofi che cercarono o cercassero nella matematica «la chiave della verità con la V maiuscola», elevandola su di un altare cui non ambisce ma negandole la funzione vivificatrice che le è propria. Non c'è da fidarsi in via assoluta delle certezze basate sulle teorie matematiche di oggi: domani potrebbero essere mutate. Non faccio con certezza l'asserzione, che sarebbe contraddittoria in sé stessa, che ogni certezza sarà smentita; vorrei solo far riflettere sulla vanità dei tentativi anteriori intesi a consacrare con crismi

([11]) *Trovarsi*, Atto secondo.

metafisici teorie successivamente superate: avvertire di un pericolo non significa presumere di profetizzarlo.

Così non potrei neppure garantire che la matematica saprà sempre ricostruire un'adeguata e soddisfacente rappresentazione del mondo dopo ogni eventuale successiva crisi, ma è presumibile che a tale scopo riesca essa sola o null'altro, posto che essa non è, concependola nella sua integrità, un particolare metodo per certi particolari campi di ragionamento, ma è lo strumento stesso per adeguare il pensiero ad ogni precisa esigenza.

Dopo quanto ho detto non stupirà e potrà essere apprezzato nella sua finezza il paragone con cui Whitehead ([12]) ha creduto di poter delineare il ruolo della matematica nella storia del pensiero umano. Ammesso che sarebbe eccessivo pretendere di paragonarlo alla parte di Amleto nella tragedia che porta il suo nome, sostiene la similitudine con la parte di Ofelia: «Similitudine – egli spiega – singolarmente esatta, dato che Ofelia è pressoché essenziale nell'opera teatrale, è molto seducente e un poco folle».

Ma è, nel nostro caso, la follia apparente di chi costruisce per l'avvenire precorrendo ciò che ad altri non è ancor dato intravvedere. La matematica sgretola, scava, corrode, con la sua critica, le certezze di oggi il cui crollo ci può atterrire, ma essa sta già sempre tessendo, spesso anche senza rendersi conto di tale destinazione, la tela di ragno della nuova provvisoria certezza.

([12]) Riportato in op. cit. ([3]).

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 293-297

Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite? (*)

BRUNO DE FINETTI

Pubblichiamo volentieri il seguente articolo del prof. B. de Finetti, articolo che, con qualche modifica, è già stato pubblicato su «La Stampa» *di Torino il giorno* 8 *gennaio scorso.*

Noi pensiamo che – anche per la forma volutamente stimolante – questo articolo potrà forse suscitare nei nostri Lettori consensi e dissensi; saremmo veramente lieti di pubblicare articoli ugualmente stimolanti che analizzassero le ragioni per le quali l'insegnamento della Matematica nelle nostre scuole è – e sembra rimanere – nella crisi paurosa denunciata dal de Finetti.

LA DIREZIONE

Gli studiosi che con crescente preoccupazione e scoraggiamento si rendevano conto della difficoltà della lotta per liberare l'Italia dal gravissimo morbo appresero con sollievo dai colleghi francesi il completo successo conseguito con un ritrovato estremamente semplice ed efficace. C'è ragione di sperare che il medesimo risultato si possa raggiungere anche in Italia iniziando subito e vigorosamente la lotta con l'impiego su vasta scala e con estrema decisione della formidabile arma.

È l'arma del ridicolo, consistente nel fatto stesso di designare col nome di TRINOMITE, e di bollare pubblicamente come un morbo da debellare al più presto, una tra le più vistose tra le disgraziatamente non poche forme di cretinismo scolastico.

Si tratta precisamente del morbo che affligge quello che i programmi chiamano «*insegnamento* della matematica» nel Liceo scientifico, ma che i matematici considerano un abominevole vilipendio e una sconcia mistificazione parodistica della loro materia. In questa scuola infatti – che, stando al nome, dovrebbe aprire le intelligenze alla comprensione della

(*) Pubblicato in: *Periodico di Matematiche,* (IV) 43, n. 4, 1965, 325-329.

matematica e delle scienze – avviene invece che, ai soliti difetti dell'insegnamento tradizionale (in cui si ama soffermarsi su banali minuzie rendendole complicate ed astruse anziché illuminare su cose importanti e interessanti e quindi attraenti), si aggiunge la jattura della prova scritta all'esame di licenza.

È già difficile in genere e di per sé, nonostante le belle parole e intenzioni e istruzioni in contrario, che siffatti esami, attraverso la mastodontica organizzazione burocratica e gli intoppi di pseudogaranzie giuridico-formalistiche, giungano ad accertare alcunché di attinente alla maturità e preparazione globale di un essere vivente anziché premiare chi è talmente ottuso da immagazzinare e ricordare passivamente e indiscriminatamente, senza distinzione di preferenza interesse e importanza, qualunque nozione o formula o metodologia gli venga propinata. E lo spettro di un esame del genere non può non distorcere e impoverire ancor più i già tanto distorti e meschini criteri del tradizionale insegnamento scolastico, inducendo a farne scopo non *la vita,* ma neppure *la scuola,* bensì, peggio ancora, il riuscire a cavarsela nell'unica momentanea occasione in cui uno si trova nella situazione artificiosa e spesso paralizzante di una prova decisiva eppur inevitabilmente aleatoria affrettata discutibile.

Ma la prova scritta di matematica per il Liceo scientifico costituisce un caso a sé sotto due punti di vista: primo, perché si tratta di un esempio insuperabilmente patologico di aberrazione intesa a favorire l'incretinimento sistematico e totale dei giovani; secondo, perché non c'è nessuna difficoltà a modificarlo eliminandone gli inconvenienti e le loro deleterie ripercussioni su tutto il corso degli studi. Da tempo immemorabile (almeno da decenni) avviene precisamente che questa famigerata prova scritta ripeta con qualche variante sempre lo stesso problema stereotipato (equazione di 2° grado, o «trinomia», con un parametro: da ciò il termine di «trinomite» per indicare l'eccessiva insistenza su questo solo particolare argomento): problema che ha soprattutto la disgrazia di poter essere ridotto a uno schema macchinale, formale, pedestre, che va sotto il nome di un certo Tartinville.

Il giudizio negativo su tale situazione è opinione comune – probabilmente unanime – dei matematici. Nella recente riunione della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico (Frascati, Villa Falconieri, 8-10 ottobre 1964), il prof. C. F. Manara (dell'Univ. di Milano), relatore ufficiale sulla situazione italiana, espresse decisamente tale opinione e tale diagnosi: di matematica s'impara meno e peggio al Liceo scientifico che nelle altre scuole medie superiori perché ivi si sacrifica tutto ciò che avrebbe reale interesse e valore formativo per la preoccupazione di fornire questi mezzucci da analfabeti per far trovare la soluzione di quel problema (confidando sia sempre il medesimo) senza bisogno di capirci un'acca.

Già il giorno precedente, in una seduta della Commissione italiana, era stato discusso il modo di por fine a questa situazione insostenibile, convenendo – come risulta anche dal verbale della riunione – che basterebbe far consistere la prova scritta, anziché nel solito tema stereotipato ma macchinoso, in una serie di domandine e problemini facili ma variati e significativi. E c'era una sola difficoltà: che non si trattava di combattere posizioni avverse (che pare non sussistano neppure negli ambienti ministeriali) ma solo di sapere chi e come possa prendersi l'autorità e responsabilità di decidere un cambiamento indubbiamente lecito ma che, urtando una consuetudine, potrebbe dar pretesto a proteste sia pur ingiustificate. A quale autorità rivolgersi?

La risposta venne, fortunatamente, in seguito alla relazione Manara, che interessò vivamente sia i rappresentanti dei fortunati paesi in cui nessuno mai seppe dell'esistenza del signor Tartinville, sia dei francesi che fino a una decina d'anni or sono erano afflitti dal medesimo sconcio. E fu proprio il presidente di detta Commissione internazionale, il francese prof. Lichnerowicz, a indicarci la miracolosa ricetta: affibbiato al disgustoso morbo il nome di «TRINOMITE», esso scomparve quasi per incanto sotto la marea del ridicolo diffusa nell'opinione pubblica. Di fronte alla carenza dei poteri pubblici, pavidi e irresoluti, bisogna far leva, anche da noi, sull'opinione pubblica rivolgendosi ad essa nella forma più spregiudicata antiburocratica antiaccademica. Lo scrivente è apparso il più adatto, fra i membri della Commissione, per interpretarne in tal modo l'orientamento e iniziare questa sacrosanta salutare battaglia anche usando forme e termini che gli altri non sono tenuti a sottoscrivere e approvare.

Avanti col ridicolo! avanti! Quando gli studenti del Liceo scientifico si sentiranno dileggiare dagli amici del classico e degli Istituti tecnici come Tartinvillucci affetti da Trinomite, quando i professori si vergognassero di fronte ai loro studenti e gli scribacchini di libri di testo di fronte ai loro lettori di rendersi ridicoli tartinvilleggiando, quando essi dubitassero che i prossimi temi scritti non daranno adito a cavarsela con quei mezzucci la cui conoscenza a spese del resto sarebbe allora per gli allievi un disastro anziché un talismano, se si sapesse ovunque (tra studenti e famiglie) che anche in caso contrario l'effetto è (come appunto confermò Manara parlando della situazione al primo anno di Università) che chi sceglie il Liceo scientifico desiderando proseguire gli studi matematici o scientifici si trova invece (se perde tempo trastullandosi con oziose tartinvillidiozie) in situazione di maggior disagio di fronte alla matematica dell'Università (per Matematica, Fisica, Ingegneria, ecc.), quando gli estensori dei temi ministeriali si sentiranno ridicoli e temeranno di esser giudicati tali se confezioneranno ancora temi trinomitici, e i commissari d'esame si sentiranno ridicoli dettandoli e i candidati si sentiranno autorizzati a protestarsi offesi vedendosi presentare un tema di quella fatta, e se il pubblico s'impadronirà (pur senza entrare nel merito) di questo fatto scandaloso e incredibile, sintesi esemplare della crisi di una scuola ove si può gabellare per matematica, e far faticare per apprenderla, della robaccia di cui i matematici s'indignano o si prendono gabbo, ..., quando in questi e mille altri modi la denuncia della Trinomite sarà oggetto di stupore scherno rivolta riflessione resipiscenza, ebbene, anche in Italia il morbo dovrà scomparire. Il nostro popolo, i nostri giovani, non saranno certo più propensi dei francesi a lasciar sopravvivere un insegnamento faticoso inutile e diseducativo al posto di quello istruttivo intelligente formativo proficuo che solo può rispondere alle loro doti ed aspirazioni, non solo, ma anche riuscire interessante e piacevole.

Fortunatamente, nella detta riunione, oltre all'importante ed urgente ma in un certo senso secondario compito di estirpare qualche immonda stortura tipo Trinomite (specie se in forma tartinvillescamente maligna), è stato anche affrontato (e con notevoli passi in avanti) il più ampio problema di un organico rinnovamento di criteri e programmi per l'insegnamento della matematica. C'è un'effervescenza di idee interessanti dappertutto nel mondo, e occorre naturalmente vagliare con attenzione pregi e difetti della loro concezione e per la loro realizzabilità. Dal proseguire e approfondirsi degli scambi di idee in argomento appare sempre più verosimile oltre che auspicabile la convergenza verso un punto d'incontro che soddisfi nel miglior modo le varie esigenze, più complementari che contrastanti, cui matematici di diversa formazione e indirizzo sono portati a dare la priorità. Un abbozzo di programma prospettato per la Francia (come possibile meta per il 1975), che appare innestarsi bene su un'esperienza già in atto nel Belgio (per l'età «scuola media», mentre il predetto è per l'età «liceo»), saggiamente innovatore ma alieno da estremismi preconcetti e pericolosi, potrebbe esser preso come base per lo studio di quell'analoga riforma certo non meno indispensabile e indifferibile anche nel nostro paese ([1]).

([1]) Su tali programmi (Revuz, Papy) cfr. una relazione dell'A. nel penultimo fascicolo (pp. 119-143) e precisazioni che appariranno nel prossimo.

* * *

Di Tartinville si è parlato già troppo, ma torniamo a lui con poche osservazioni a titolo di «Per finire». Un illustre collega confessava che da ragazzo, nella scuola che frequentava, era stato indotto a pensare che Tartinville fosse uno dei più grandi matematici: è questa una prova altrettanto sintomatica di deficienza culturale come se nei licei classici si inducesse a pensare che (in luogo di Dante od Omero mai sentiti nominare) uno dei maggiori poeti sia l'autore del «Prode Anselmo». Dei matematici che non ebbero la disavventura di capitare da ragazzi in scuole siffatte, nessuno conosce Tartinville; invano ho chiesto a vari colleghi qualche notizia su tale personaggio, che neppure nell'Enciclopedia Italiana si trova menzionato (non dico come voce, ma neppure citato incidentalmente, ché anche in tal caso figurerebbe nell'indice). Per mio conto appresi purtroppo in ritardo a conoscere e detestare Trinomite e Tartinvillite: non avevo preso sul serio le informazioni negative ma espressemi in forma generica da qualche collega circa la matematica del Liceo scientifico al momento della scelta per mia figlia: pensavo fossero dettate dai soliti pregiudizi in favore degli studi «classici». Ma dopo qualche anno, sempre più allarmato e sbalordito dal pedestre livello di scimunitaggini cui venivano degradati i begli argomenti di cui nel programma figuravano i nomi, chiesi a un mio assistente se sapeva spiegarmi tale fenomeno. Ne ebbi le stesse sopra riferite notizie della relazione Manara. La cosa era pressoché notoria; io solo ero stato tanto ingenuo da non immaginare neppure che la *Scuola*, in gara coi sofisticatori di «olio d'oliva», potesse ammannirci, gabellandolo per genuino nutrimento matematico, «l'asino Tartinville nella bottiglia!».

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 299-408

Il "saper vedere" in Matematica

BRUNO DE FINETTI

1. – Riflettere per giungere a un risultato

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, *e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di sapersi regolare in ogni circostanza afferrando gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del senso e del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.*

Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere *per dominare un problema. Cominciamo da tre esempi effettivi, di epoche molto diverse, che possono servire da utile spunto.*

Platone, Socrate e lo schiavo (*)

Il primo esempio è contenuto in un celebre passo di Platone (filosofo greco, 427-347 avanti Cristo), e precisamente nel dialogo *Menone*: Socrate interroga uno schiavo, chiedendogli di raddoppiare un quadrato (cioè: di costruire un quadrato di area doppia di quello dato). Dapprima lo fa accorgere che se raddoppiasse il lato (come a prima vista aveva detto) l'area risulterebbe non *doppia* ma *quadrupla* ed infine, incoraggiandolo ancora

(*) **Avvertenza.** Nel testo si trovano a volte dei richiami (EP) o (NB), in genere seguiti (ove occorre) da un numero (EP, 5), (NB, 4) od anche (NB, 4, p. 29). Significano rinvio agli ESERCIZI E PROBLEMI (numerati) e rispettivamente all'elenco (numerato) di opere citate nella NOTA BIBLIOGRAFICA con eventuali indicazioni aggiuntive (numero di pagina, o, per riviste, anno, ecc.).

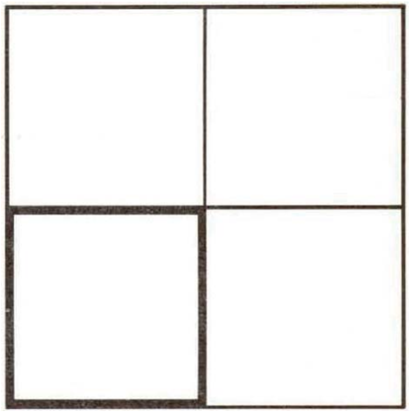


Figura 1

a pensare e guardare la figura disegnata (*fig.* 1) per trovare un quadrato di area metà di quello quadruplicato, riesce a fargli scoprire che basta costruirlo come in *fig.* 2, ossia prendendo per lato la *diagonale* del primo. Così dunque si ottiene il quadrato richiesto, di area doppia del primo.

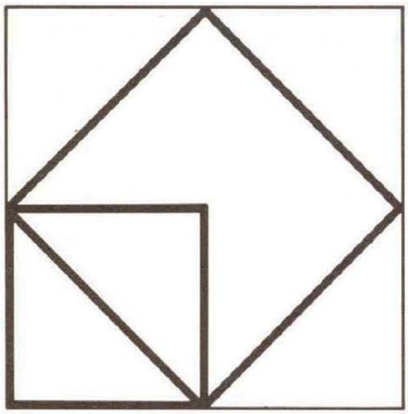


Figura 2

A conclusioni matematiche si può giungere, dunque, senza aver fatto specifici studi, solo pensando e osservando. Questo rileva Platone, sia pur cercando, come a quei tempi si usava, spiegazioni metafisiche ("idee innate" o reminiscenze di altre vite precedenti).

Lo scolaretto Gauss

Il secondo esempio è l’aneddoto riguardante Gauss (uno dei maggiori matematici, 1777-1855), che, da bambino, attirò così l’attenzione del maestro sulle sue attitudini. Questi, per correggere tranquillamente dei compiti, aveva dato agli scolari un *lungo* esercizio: sommare tutti i numeri da 1 a 100. Ma Gauss consegnò immediatamente la risposta: la somma è 5050, perché accoppiando gli addendi (primo ed ultimo: 1 e cento; secondo e penultimo: 2 e 99; e poi 3 e 98, ecc., fino a 49 e 52 ed a 50 e 51) si hanno 50 coppie, ciascuna di somma 101. In altra forma: è lo stesso che se i 100 addendi avessero tutti il medesimo valore ½ (1 + 100) = 50 ½ = 50,5 semisomma del primo e dell’ultimo.

Gauss era Gauss, d’accordo. Però quest’osservazione era semplice: prestando un po’ di attenzione al problema, forse qualunque bambino avrebbe potuto accorgersi di questa proprietà e sfruttarla. E saper vedere le cose semplici e degnarsi di rifletterci sopra è la cosa più importante (*e vi ritorneremo soprattutto nei nn.* 5 *e* 6): *così e soltanto così finiscono per apparire comprensibili intuitive ed ovvie altre cose sempre più complicate.*

Uno come voi

Il terzo esempio è dei nostri giorni; riguarda un allievo della scuola media “T. Tasso” di Roma (il tredicenne Massimo Campanino, classe III-B, anno 1964-65). Egli vide e indicò esattamente un modo molto più semplice e significativo di quello consueto [1] per ricavare l’espressione del volume dell’ottaedro. Completando (come mostra la *fig.* 3) l’ottaedro con 4 tetraedri di ugual lato giustapposti a quattro delle sue facce (scelte alternatamente), si ottiene un tetraedro di lato doppio – e quindi di volume 8 volte maggiore – di quello di ciascuno dei tetraedri precedenti. Togliendo i 4 tetraedri aggiunti rimane l’ottaedro inizialmente considerato, che ha pertanto *volume quadruplo del tetraedro di uguale lato* (4 = 8 – 4). È questa la conclusione cui si trattava di giungere.

[1] Non si tratta di una “scoperta” in senso assoluto: si trova segnalata, come via significativa e poco nota, dal Pólya (NB, 13ª). Il merito comunque sta nell’avervi pensato (specie data la poca familiarità dei più con la visione spaziale, anche per colpa della quasi esclusiva insistenza dei programmi scolastici sulla geometria piana).

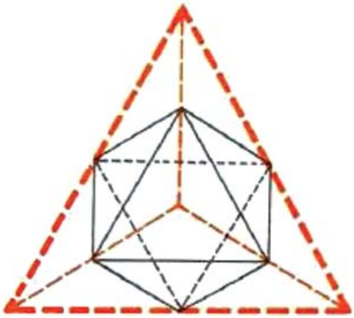


Figura 3

Che, raddoppiando il lato, il volume divenga otto volte maggiore, è cosa ovvia per il *cubo* (stesso ragionamento fatto per il quadrato nel caso di Socrate e lo schiavo); che la stessa proprietà valga per qualunque solido è un fatto su cui ritorneremo (n. 3): ciò sarà utile non solo per chi ancora la ignorasse ma anche per chi già la conosce.

Come mai – ci si chiederà – uno studente di scuola media, sia pure particolarmente dotato, ha potuto vedere quel problema sotto un aspetto non propinatogli da libri o docenti? Occorre dire che l'insegnante, in quella classe, è la prof. Emma Castelnuovo (NB, 1, 14), *il cui metodo d'insegnamento tende a stimolare l'intelligenza anziché a soffocarla* (*come in genere avviene*) *sotto aridi nozionismi, talora pretesamente pratici, talora pretesamente scientifici.*

Fate che il seme non vada sprecato

Questi tre esempi volevano solamente mostrare, per intanto, come sia possibile, e come riesca istruttivo, giungere a conclusioni interessanti pensando direttamente a problemi concreti, senza impiegare teorie o ricette stereotipate di sapore scolastico. Ciò non vuol dire che tali teorie e procedimenti non servano, bensì che, anche quando occorre usarli, si può giungere molto più oltre, con maggior gusto e minor fatica, se si cerca di "vedere" ogni singolo problema in modo da sfruttare con criterio ogni particolarità utile. Ed è anzi proprio e soltanto in questo modo che potrete valorizzare gli insegnamenti avuti a scuola, e far sì che la fatica vostra e quella dei vostri insegnanti non vada sprecata.

2. – E dopo, riflettere ancora

Risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo: ogni successo rende più facili ulteriori successi. Ma il vantaggio è molto più grande se ci si sofferma a riflettere, su ogni problema che ci si presenta, non soltanto quanto occorre per risolverlo ma poi ancora per far tesoro di tutte le osservazioni che siamo capaci di trarne sviscerandolo.

Praticamente, si tratta solo di domandarsi vari "perché?":

– **perché** *vale la conclusione trovata (ossia: sussisterebbe oppure varierebbe, e come, se modificassi i dati in questo o quel modo)?*
– **perché** *ho incontrato difficoltà e poi le ho superate (cioè: dov'era "il bandolo della matassa" e com'è che prima mi sfuggiva e poi l'ho visto)?*

Riflettendo su cose del genere ogni esempio arricchisce l'esperienza in misura moltiplicata ed in modo assai più profondo. Più profondo che mai, forse, se si giunge a riflettervi quasi senza accorgersene (come quando si cerca invano l'impostazione di un problema prima di addormentarsi, e al risveglio vediamo di averla già trovata).

Notiamo subito come, riflettendo sui primi esempi ora considerati, si possono presentare naturalmente delle osservazioni e conclusioni istruttive, di carattere molto più generale. E cominciamo dall'aneddoto di Gauss.

Tornando a Gauss

È naturale chiedersi se lo stesso procedimento vale anche per calcolare la somma, anziché dei numeri da 1 a 100, per quelli da 1 a 12, o da 1 a 500, o da 1 a 1965, ecc., e si constata subito che sì: nei tre casi il risultato è ½ · 12 · 13, ½ · 500 · 501, ½ · 1965 · 1966 (così come, per i numeri da 1 a 100, era ½ · 100 · 101). Il ragionamento vale tale e quale; si noti però che nell'ultimo caso (essendo 1965 dispari) riesce un po' strano dire che abbiamo 982 ½ (= ½ · 1965) coppie di somma 1966, benché ciò possa considerarsi "vero" nel senso che il numero centrale, 983, rimane spaiato, e vale appunto come "metà di una coppia di somma 1966" (2); del

(2) È utile riflettere sempre su "estensioni d'interpretazione" come questa: spesso sono valide (ma occorre accertarlo caso per caso). La regola si può esprimere mediante una formula se si conviene di indicare con una lettera (e sia, come d'uso, n) il numero dei numeri da sommare: *la somma dei numeri da* 1 *ad* n *vale* $\frac{1}{2} n (n + 1)$. Per considerazioni sull'utilità di tali metodi riprenderemo tale cenno in seguito (n. 9 e n. 10).

resto va sempre bene anche alla lettera la seconda formulazione data sopra: la somma è la stessa che se tutti gli addendi fossero uguali alla semisomma del primo e dell'ultimo.

Ma è chiaro che il procedimento (e la regola cui conduce) valgono sempre se gli addendi crescono (oppure decrescono) di una differenza costante (senza che la differenza sia necessariamente 1 né che la successione cominci da 1); si dice in tal caso che i numeri considerati *variano linearmente*, o che costituiscono una *progressione aritmetica* (p. es., 5, 6 ¼, 7 ½ , 8 ¾, 10, 11 ¼, 12 ½, 13 ¾, 15, 16 ¼, 17 ½, 18 ¾, 20). La somma è sempre la media del primo ed ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini (nell'es., è ½ (5 + 20) · 13 = 162 ½).

Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo **geometricamente** in modo **opportuno.**

Nel nostro caso, rappresentando i successivi addendi come rettangolini di base 1 e altezza che ne esprime il valore, se sono in progressione aritmetica avremo una scala a gradini uguali (ossia secondo una retta; v. *fig.* 4).

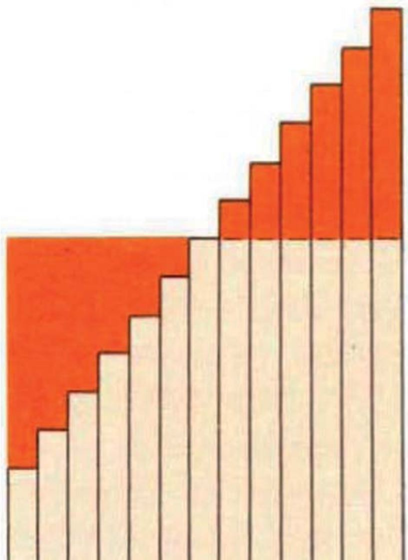


Figura 4

Ed è chiaro che in tal caso l’area (somma) è la stessa del rettangolo di ugual base e di altezza pari alla media delle altezze estreme. Il ragionamento di Gauss bambino consiste nel notare, riferendosi alla figura, che i tratti di rettangoli sorpassanti il livello medio sono identici a quelli mancanti dal lato opposto.

Da ogni nuova riflessione potremmo farne scaturire altre, *continuando senza fine. Quelle ora svolte bastano a far notare*, *per intanto*:

– *come ciascuna di esse giovi a renderci più chiaro sotto vari aspetti il perché della conclusione già raggiunta nel caso particolare* (*della somma dei numeri da* 1 *a* 100);
– *come quella conclusione risulti applicabile in molti altri casi* (*di cui è facile immaginare quanto spesso potranno presentarsi in problemi pratici di ogni genere*);
– *come il fatto di esprimere il risultato mediante formule* (*“calcolo letterale”*) *possa corrispondere a idee e bisogni spontanei*, *più di quanto forse non sembri incontrandolo nel corso di un programma scolastico*;
– *quanto giovi saper immaginare da sé una rappresentazione geometrica.*

Nel seguito avremo occasione più volte di utilizzare ancora queste riflessioni riprendendole e sviluppandole; *si vedrà meglio allora quanto valore abbia ogni osservazione*, *piccola o grande*, *quando rimane viva nel ricordo*, *pronta a riapparire e ad aiutarci per vedere e affrontare problemi aventi con essa qualche nesso.*

3. – S’incontrano anche questioni generali

Degli altri due aneddoti ci limiteremo a considerare un aspetto comune: *come variano aree e volumi raddoppiando* (*o in generale alterando*) *le lunghezze* (ivi: lato del quadrato, o del tetraedro). Come già notato (1), raddoppiando le lunghezze le aree si quadruplicano e i volumi si ottuplicano, e, più in generale, moltiplicando le lunghezze per un numero qualunque (p. es. 0,8; 1,1; 2,7; 10, ecc.: in generale potremmo dire r), le aree risultano moltiplicate per il *quadrato* di r (cioè, $r^2 = r \cdot r =$ «r moltiplicato per sé stesso»: p. es. $(0{,}8)^2 = 0{,}64$; $(1{,}1)^2 = 1{,}21$; $(2{,}7)^2 = 7{,}29$; $10^2 = 100$), i volumi per il *cubo* di r (cioè $r^3 = r \cdot r \cdot r$: p. es. $(0{,}8)^3 = 0{,}512$; $(1{,}1)^3 = 1{,}331$; $(2{,}7)^3 = 19{,}683$; $10^3 = 1000$). Che ciò sia vero per il quadrato e per il cubo è evidente: il quadrato di lato doppio si ottiene con 4 quadrati uguali (*fig.* 1), ed analogamente un cubo di lato doppio con 8 cubi uguali; per il quadrato o il cubo di lato, p. es., ridotto a 0,8 basta notare che occorreranno 64 dei 100 quadratini di lato 1/10, rispettivamente 512 dei 1000 cubetti di lato 1/10.

Ma sarà vero per il tetraedro? È facile vedere che non è possibile dividere il tetraedro di lato doppio in 8 tetraedri uguali: toltine 4 ai vertici (v. *fig.* 3) rimane un ottaedro e non si può farne altri 4 tetraedri come i precedenti. (Si potrebbe dividerlo in 4 tetraedri uguali ad essi come volume ma non come forma, non regolari; chi vuole riuscirà forse da sé a vedere come, ricordando che il volume è uguale se restano uguali base ed altezza). Ma poi, perché soffermarsi a pensare al tetraedro? La conclusione che preme è quella generale, valida anche per il caso di due patate, o di due uova, o di due statue, uguali per forma ma di dimensioni raddoppiate (o comunque proporzionalmente alterate) tra l'una e l'altra ([3]).

Per dimostrare che la proprietà è vera in generale basta pensare che ogni solido (a forma di patata o di uovo o di statua o di tetraedro o altra qualsiasi) può sempre pensarsi tagliato in cubetti, piccoli quanto si vuole, così come ogni figura piana in quadratini sovrapponendovi una carta quadrettata (p. es. millimetrata) v. la *fig. 5.* Il volume sarà espresso dal

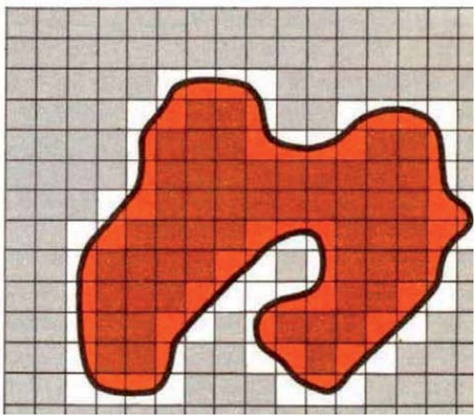


Figura 5

([3]) In queste condizioni, due figure (piane o solide, non importa) si dicono tra loro *simili*. Di solito s'insiste, nella scuola, sul caso più semplice (e certamente importante) di *triangoli* simili, ma è essenziale aver presente il *significato generale* del termine (cfr. anche n. 13, *similitudine*), e non credere che si tratti di una nozione particolare riguardante il solo caso dei triangoli. Cfr. (EP, 1).

numero dei cubetti (per eccesso o per difetto a seconda che contiamo o no i cubetti incompleti sul contorno: ma l’errore si può rendere trascurabile prendendo i cubetti sufficientemente piccoli).

Allora basta pensare che, raddoppiando le lunghezze, ogni cubetto ottuplica il suo volume (o, in generale, lo moltiplica per r^3 se le lunghezze vengono moltiplicate per r), e la conclusione risulta estesa al caso di un solido qualunque.

Queste considerazioni sono di estrema importanza sotto molti punti di vista. Anzitutto, presentano un esempio istruttivo di proprietà di tipo “sintetico”, semplici e potenti (*“sintetico” nel senso che permettono ad es. di dire senz’altro che raddoppiando il lato del tetraedro o il raggio della sfera il volume si ottuplica, senza bisogno di una conoscenza più precisa, “analitica”, su quale sia e come si calcoli il volume del tetraedro o della sfera*). *In particolare le proprietà sintetiche di questo tipo “dimensionale”* (*cioè dipendenti solo dalla natura delle grandezze in questione*: *qui* lunghezze, aree, volumi, *ma più in generale anche* tempi, velocità, masse, forze, *ecc.*) *sono istruttive per imparare a distinguere le nozioni fisiche ecc. e perché spesso consentono di stabilire direttamente i rapporti tra comportamento di strutture effettive* (*fabbricati*, *navi*, *aerei*, *ecc.*) *e modelli in scala. Altra circostanza da notare* (*e vi ritorneremo nel n.* 16) è *il tipo di ragionamento qui usato* (*basato su approssimazioni che danno* “al limite” *una conclusione rigorosa*).

Nulla è troppo “banale”

Da riflessioni suggerite da semplici esempi, scelti più che altro a titolo di curiosità “storiche”, si giunge direttamente, come si è visto, a considerazioni e conclusioni di natura molto generale.

Ma su di esse, a sua volta, giova soffermarsi per constatazioni anche banali, ma pure utili in sé, e che nuovamente poi daranno lo spunto per delle osservazioni che aprono ulteriori sviluppi.

Le constatazioni banali sono quelle consistenti nel fissare l’attenzione su semplici dati numerici. Bisognerebbe convincersi che fare ciò è istruttivo, che si rischia di non veder bene le cose quando, per superbia o pigrizia, si disdegna di scendere al calcoletto numerico illudendosi di aver già le idee chiare attraverso le teorie e le formule. Occorre riflettere spesso anche sui dati numerici, e magari fare in modo di vederli meglio mediante una o più rappresentazioni grafiche appropriate.

Nel nostro caso, il motivo per consigliare un po' di attenzione a dei dati numerici è questo: la maggior parte delle persone (a mio avviso) non si rende conto di quanto più rapidamente crescano le aree e più ancora i volumi al crescere delle dimensioni lineari (lunghezze). Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio). Tanto meno questa capacità di apprezzamento sembra sussistere quando si pensi alla noncuranza con cui si parla di "cucchiaini" di zucchero come di unità di misura mentre piccole differenze nelle dimensioni (e nella forma) possono ben alterare il contenuto di un cucchiaino nel rapporto di 1 a 2 o anche ben più (anche a prescindere da ulteriori differenze dovute in pratica al non curare di farlo *colmo*). Analoghe, anche se, naturalmente, meno marcate, sembrano le manchevolezze di giudizio nel caso delle aree.

Vogliamo vedere quali aumenti di area e volume corrispondono a piccoli aumenti nelle lunghezze? Costruiamo la tabellina:

AUMENTO %										
in lunghezza	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
in area	2,01	4,04	6,09	8,16	10,25	12,36	14,49	16,64	18,81	21,00
in volume	3,03	6,12	9,27	12,48	15,75	19,08	22,47	25,92	29,43	33,10

(Basta ad es. moltiplicare 1,01 per 1,01, e si ha 1,0201, e poi moltiplicare ancora per 1,01, e si ha 1,030301; gli aumenti sono perciò 2,01% e 3,0301% arrotondato a 3,03%; cfr. tabella, 1^a colonna).

Ciò conduce all'ultima osservazione che intendevamo fare a proposito di questo argomento: come si vede, la percentuale d'aumento risulta, per l'area, circa doppia, e per il volume circa tripla, di quella per le lunghezze (quasi esattamente per aumenti più bassi; poi man mano il rapporto va crescendo scostandosi sempre più rapidamente da 2 e 3). È una constatazione utile da tener presente a titolo di orientamento. Ad esempio, se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento di temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p. es. 0,38 %), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%). Altro es. v. (EP, 2).

E perché avviene questo? La spiegazione è semplice, ed è cosa che servirà aver presente per molte ulteriori discussioni e applicazioni. Ci limitiamo a indicarla mediante le *figg.* 6 *e* 7: se prendiamo un quadrato, diciamo per semplicità di lato = 1, e aumentiamo il lato di a (cosicché diventerà $1 + a$), l'area aumenta dei due rettangoli allungati (in *fig.* 6), ciascuno dei quali ha area a (più il quadratino al loro incontro: ma è trascurabile se a è piccolo). Analogamente il cubo (*fig.* 7) si accresce di tre piastre (base 1×1, spessore a, volume a), più (ma per a piccolo sono trascurabili) tre sbarrette e un cubetto (lungo gli spigoli e al vertice da completare) ([4]).

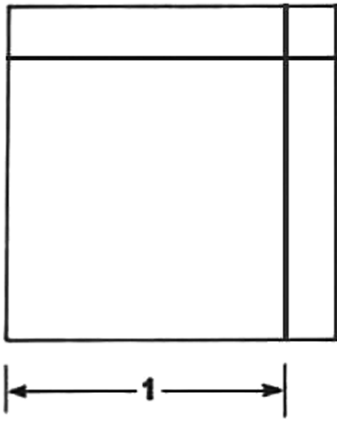


Figura 6

([4]) In formule, le *figg.* 6 *e* 7 illustrano (come del resto è abituale) il significato geometrico dell'espressione del "quadrato e cubo di un binomio". Con il lato $1 + a$ (secondo ci conveniva indicarlo, per parlare di a come della "percentuale di aumento") le formule sono:

$(1 + a)^2 = (1 + a)(1 + a) = 1 + 2a + a^2$ = quadrato grande + due rettangoli + quadrato piccolo;

$(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$ = cubo grande + tre piastre + tre sbarrette + cubetto piccolo.

Stesso significato se invece indichiamo con a e b la lunghezza delle due parti del lato; allora è:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2\,,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3\,.$$

Guardando la figura, e, per il cubo, meglio ancora costruendolo (p. es. ritagliandolo da una patata), ci si potrà render conto del significato di tali formule. Ricordandolo, sarà possibile capirle anche se avesse a capitarci di doverle studiare secondo testi che non ne dànno l'interpretazione geometrica.

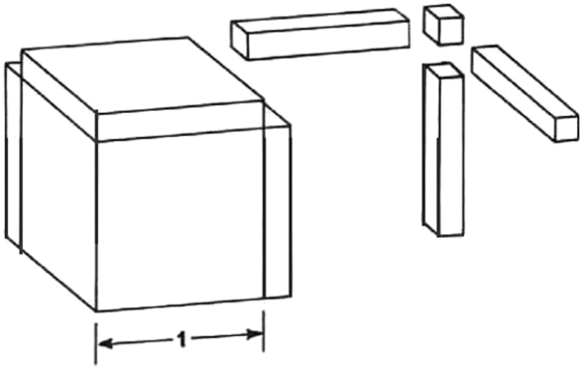


Figura 7

4. – Come riflettere su di un problema

Come si fa ad affrontare un problema e risolverlo? Su questo argomento e con questo titolo («*Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben?*») *un matematico di talento e di spirito, George Pólya, ha scritto un ampio e acuto articolo, sviluppato poi in volume,* «*How to solve it?*», (NB, 5). *Chi potrà leggerlo* (*quando sarà un po' più avanti con gli studi*) *ne trarrà certamente profitto e diletto. Più tardi ancora potrà passare ad altri tre volumi che proseguono il discorso* (NB, 12-13).

Qui non si tratta di svolgere un'analisi del genere, ma soltanto di indicare alcune delle cagioni che fanno spesso apparire insormontabili delle difficoltà che non esistono, e alcuni dei modi in cui un intelligente allenamento a "saper vedere" i problemi si rende utile per semplificare e padroneggiare le cose nel miglior modo possibile.

Giova soprattutto rendersi conto di ciò su esempi, su molti esempi, e specialmente su esempi facili: *molti degli esempi che saranno utilizzati sono problemi proposti in "Gare matematiche"* (*quali si svolgono in molte città, per giovani di 15-20 anni, non universitari*) *ed anche le considerazioni e consigli che svolgeremo commentandoli derivano dalla constatazione di difficoltà ed errori nel rispondervi* (NB, 20-24).

Dice il proverbio che "sbagliando s'impara", ed è vero;fino ad un certo punto però si può anche imparare riflettendo su errori o su difficoltà incontrati da altri, come, in precedenza, viceversa, su esempi di idee intelligenti venute ad altri. Con tali riflessioni si possono accumulare e affinare conoscenze e reminiscenze ed esperienze utili, come sono utili, *naturalmente – pur di non ridurle a imparaticcio mal digerito – le nozioni più sistematiche apprese nella scuola.*

Ma solo affrontando effettivi problemi possiamo vedere se e fino a qual punto e con quale successo riusciamo realmente a valercene. Occorre saperli sempre guardare senza preconcetti, non correre subito a cercare la “ricetta” per risolverli. Anche se c’è e la conosciamo non è detto che convenga applicarla senza prima riflettere se non sia meglio farne a meno o applicarla con maggiore accortezza. E in molti casi invece è proprio l’idea fissa di trovare una ricetta cui aggrapparsi, ciò che conduce fuori strada.

5. – Saper vedere le cose facili

Una cosa difficile è spesso il vedere le cose facili, ossia riuscire a distinguere, nel complesso di circostanze presenti in un problema, quelle che bastano per impostarlo, o che permettono di effettuare l’impostazione in diversi passi facili successivi.

Ecco un esempio semplicissimo (proposto in una Gara matematica): *dato un triangolo, dividerlo in* 5 *parti di uguale area mediante una spezzata a zig-zag* (cfr. *fig. 8*).

È semplicissimo se ... se si pensa dapprima soltanto al triangolo I che dev’essere $^1/_5$ del dato, sicché basta prendere D in modo che CD

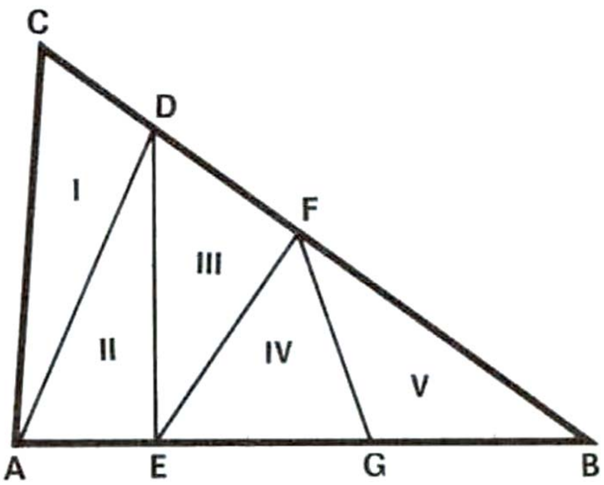


Figura 8

sia $^1/_5$ del lato CB (5). Proseguendo allo stesso modo, il triangolo II dev'essere $^1/_4$ del rimanente sicché AE va preso uguale a $^1/_4$ del lato AB; poi DF sarà $^1/_3$ di DB, ed infine G sarà a metà di EB. (Non sarebbe possibile invece, ad es., cominciare dal V e procedere nell'altro verso).

Bicchier d'acqua: Pericolo!

La difficoltà (*apparente*) *deriva invece dall'incapacità di liberarsi dalla visione del problema come un tutto unico, dalla conseguente tendenza a cercare «regole per la divisione a zig-zag» o ad abbandonare l'impresa sapendo che regole per questo caso non sono state studiate. Deriva dall'abitudine a pensare che «sapere la matematica» significhi «sapere di colpo per filo e per segno come rispondere o cosa fare», anziché* esser capaci di riflettere e cercare e possibilmente trovare il modo di poter dire qualcosa di sensato, poco o molto che sia. *Deriva dall'abitudine a pensare che «capire la matematica» significhi essere in grado di seguire una catena di passaggetti formali* (*sciogliere parentesi, portare un termine di qua o di là cambiando il segno, ecc.*) *controllandone la correttezza e confermando così l'esattezza della conclusione* (*dimostrazione di un teorema, determinazione di un risultato*); *ma giungere alla conclusione così* ("obtorto collo", *come diceva Federigo Enriques* (NB, 7) *non significa nulla rispetto al fatto più essenziale che è* penetrare il significato della questione e rendersi conto della linea di pensiero che permette di afferrarla e ragionarvi sopra; *è solo* dopo *che importa anche, per scrupolo, assicurarsi pazientemente dell'esattezza anche con quei passaggetti formali che a volte sembra siano presi per la stessa essenza della matematica.*

Un'idea così distorta della matematica fa sì che il suo studio possa risultare addirittura d'intralcio anziché di aiuto nel capire cose matematiche. Accade spesso, purtroppo, di vedere anche studenti universitari perdersi «in un bicchier d'acqua», di dover dire «Badi, la cosa è semplice; da bambino l'avrebbe certo risolta; cerchi di pensarci direttamente come

(5) Dovrebbe essere superfluo rammentare in che modo si può eseguire la suddivisione di un segmento in parti uguali o in date proporzioni (come serviva per le suddivisioni del precedente problema e rispettivamente per quello del n. 12); del metodo (Teorema di Talete) parleremo tuttavia nel n. 15 per altri motivi (cfr. *fig.* 46) che daranno modo di discutere circa la preferenza da dare ad esso o al metodo di calcolare e misurare le lunghezze.

avrebbe fatto allora! ... », ed invece egli seguita ad annaspare per tirar fuori senza costrutto dai ripostigli della memoria – sperando di azzeccare e far colpo come il prestigiatore che fa uscire un coniglio dal cilindro – pomposi concetti di "Alta Matematica" ed insigni Teoremi e magiche Formule. Tra studenti liceali partecipanti a Gare matematiche, qualcuno disse che non poteva rispondere a un problema dove entravano le quarte potenze perché «non aveva studiato le quarte potenze» o a un problema dove entrava una corona circolare perché «non aveva studiato le corone circolari» e via di questo passo, come se ogni particolare caso o sottocaso richiedesse una "teoria" ad hoc.

La necessità di procedere passo passo, e quindi di individuare preventivamente da quale passo si possa incominciare, è naturalmente maggiore in problemi effettivi che in problemi di tipo scolastico; tuttavia non è affatto infrequente che, anche in questi, uno si trovi in difficoltà per non saper da dove cominciare di fronte a un complesso magari intricato di dati e questioni. Bisogna pensare dove siamo (in fatto di conoscenze iniziali), dove dobbiamo arrivare (per rispondere alle questioni richieste), e come ci si può avvicinare. Senza questa preoccupazione, capita spesso che uno applichi e maneggi formule – magari correttamente, ma senza criterio – in modo da andare a zonzo senza bussola e ritrovarsi spesso, infine, al punto di partenza.

Ma riprendiamo le esemplificazioni, cominciando con qualche ulteriore considerazione sul caso precedente (*fig. 8*), intesa a mostrare (secondo quanto detto nel n. 2) l'utilità di riflessioni su possibili varianti. Intanto si noti che il procedimento era applicabile anche se le aree dei diversi (5 o non importa quanti) pezzi, anziché uguali, si fossero dovute ottenere in rapporti prefissati: p. es. la II doppia della I, la III tripla, la IV quadrupla, la V quintupla. L'area totale risulta allora quella del I pezzo moltiplicata per $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ [(6)]; basta quindi procedere nello stesso modo di prima, ma dando, come area: al I pezzo, $^1/_{15}$ dell'area to-

[(6)] Con l'occasione si può anche controllare che $15 = ½ \cdot 5 \cdot (5 + 1)$; certamente è superfluo, ma l'abitudine a rammentare collegare e talvolta applicare insieme concetti e risultati di settori diversi (come, qui, le "progressioni aritmetiche" e la "geometria") dà un allenamento utile per evitare i paraocchi. Le cose studiate divengono poco utilizzabili e facilmente dimenticabili per chi le guarda coi paraocchi e le vede separate in compartimenti stagni, cristallizzazione deleteria di quelle divisioni in materie o sottomaterie (aritmetica, geometria, algebra, ecc.) imposte fino a un certo punto da comodità didattiche ma che ciascuno dovrebbe superare riunendo in una visione sensata gli sparsi e poveri brandelli.

tale; al II, $^2/_{14}$ dell'area residua; al III, $^3/_{12}$ dell'area residua (dopo staccate la I e II); al IV e V, rispettivamente $^4/_9$ e $^5/_9$ del residuo. (Naturalmente, basta prendere $CD = (^1/_{15})$ di CB, $AE = (^1/_7)$ di AB, $DF = (^1/_4)$ di DB, $EG = (^4/_9)$ di EB).

Se il problema dato fosse questo, a maggior ragione sarebbe visibilmente necessaria una primitiva scomposizione in passi che lo rendono facile; i passi sono anzi due: dapprima determinare le aree parziali, poi capire che bisogna costruire i pezzi uno per volta cominciando dal I.

Altra osservazione utile come generalizzazione (per rendere utilizzabile l'esperienza di questo caso in casi analoghi): lo stesso concetto e procedimento vale anche per altri schemi di suddivisione che, come quello della *fig.* 8, permetta di costruire i singoli pezzi *uno dopo l'altro.* Ciò avviene ad es. nel caso delle *figg.* 9 *e* 10 (nell'ordine dato alla numerazione I-II-III-IV-V); invece nel caso della *fig.* 11 il procedimento permette di costruire soltanto tre pezzi, e cioè (I + II + III) assieme, IV, V. Il problema di spezzare il triangolo (I + II + III) in tre, di area assegnata, scegliendo opportunamente il punto P è un problema di tipo diverso dal precedente, e lo riprenderemo nel n. 12 ove riuscirà appropriato per esemplificare altri concetti fecondi.

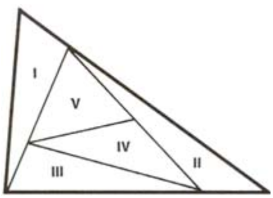


Figura 9

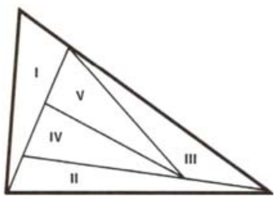


Figura 10

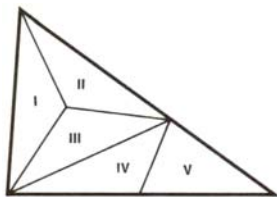


Figura 11

Accenniamo brevemente ancora a qualche esempio per delle riflessioni che ciascuno potrà completare a suo piacimento.

Quante cose può dire un filo teso! Eccone alcune (e altre ne vedremo dopo).

Un filo teso

Un altro problema dato in una Gara matematica riguardava una curva generata in modo simile all'*ellisse.*

Diciamo subito, per chi non lo sa, che l'ellisse è la curva che si vede guardando obliquamente un cerchio (*p. es. fotografia di una vasca circolare, o di una ruota*) *o tagliando obliquamente un cilindro circolare* (*p. es., fetta di salame, ombra di una sfera*)*; essa gode della proprietà sfruttabile per costruirla nel modo indicato dalla fig.* 12 (*esistono due punti detti* fuochi, F_1 *e* F_2, *tali che la somma delle distanze dai fuochi è la stessa per tutti i punti* P *appartenenti all'ellisse; la si disegna pertanto facendo scorrere la matita entro uno spago teso tra essa e due chiodi infissi nei fuochi*).

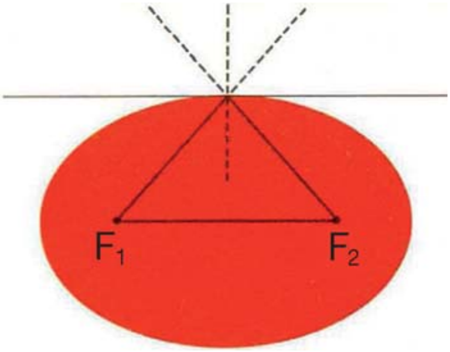


Figura 12

In quel problema invece i chiodi erano quattro, ai vertici di un quadrato. Bastava pensare che il filo sarebbe naturalmente rimasto teso tra la matita e due soli chiodi per volta (come mostra la *fig.* 13), per capire che la curva si componeva di pezzi d'ellissi e non c'era che da vedere come. (E lo si vede nella *fig.* 14).

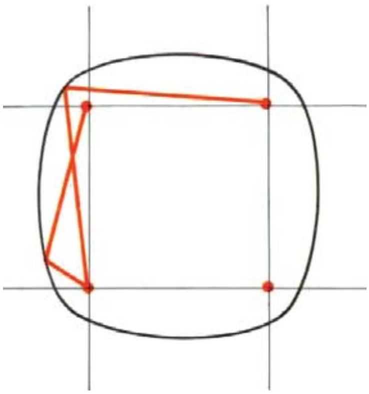


Figura 13

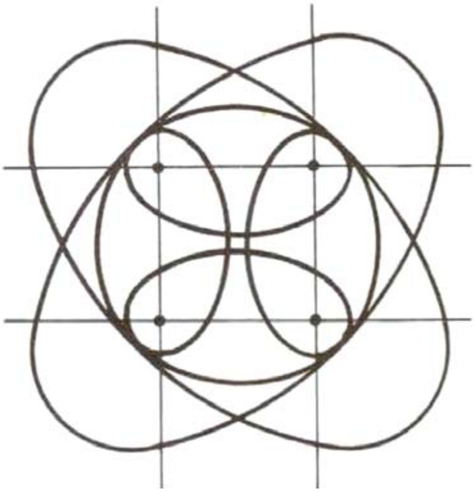


Figura 14

Invece, pensando che i chiodi erano 4, molti immaginarono che si dovesse trattare di cosa del tutto nuova mentre il primo passo era semplice pur di osservare un fatto che non poteva non apparire ovvio raffigurandosi concretamente la situazione con lo spago teso tra chiodi e matita.

Consideriamo ancora un problema, illustrato dalla *fig.* 15: al bigliardo, partendo dal punto A vogliamo colpire una biglia nel punto P dopo due riflessioni sulle sponde [7] (come indicato con la linea piena); in che direzione (ossia, verso quale punto della prima sponda) dobbiamo mirare?

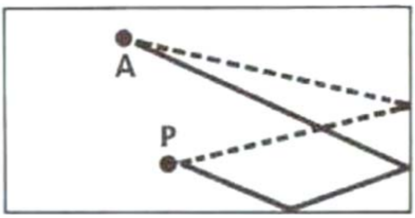


Figura 15

[7] Ammettiamo note e valide le leggi della riflessione; su di esse avremo motivo di tornare, del resto, nel prossimo n. 6. Rammentiamo comunque subito che sono le stesse che varrebbero per un raggio di luce, od anche, che dànno la posizione di un **filo teso** da A a P allacciato al contorno.

È chiaro (e comunque ammettiamo di sapere già) che, volendo colpire la biglia in P con *una sola* riflessione (linea tratteggiata), basterebbe mirare alla sua immagine P' (immagine speculare; cioè, come se la sponda fosse uno specchio); v. la *fig.* 16.

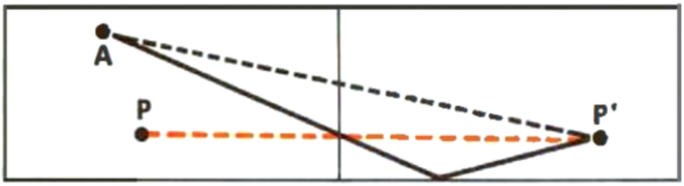


Figura 16

Ma sulla *fig.* 16 appare ora chiaro che, ripetendo lo stesso artificio (*fig.* 17), otteniamo in P'' l'immagine dell'immagine, e la risposta è che basta mirare da A in direzione di P''. E ciò si può estendere ad ulteriori punti P''', P^{IV}, ... per traiettorie con 3, 4, ... riflessioni: con un passo alla volta ciò diventa intuitivo, mentre pensando direttamente a un caso complesso è assai improbabile che si giunga a intravvedere la via giusta.

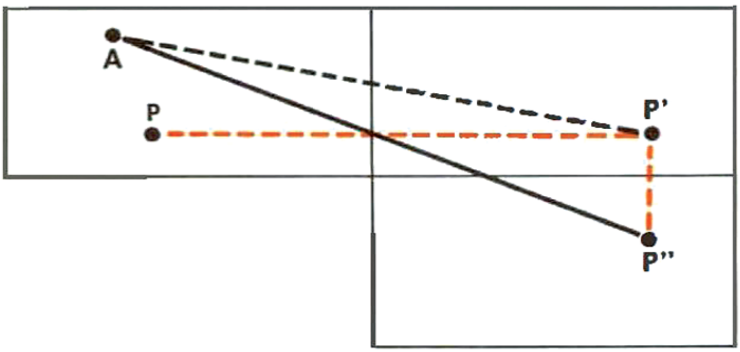


Figura 17

Il fatto di estendere un risultato, ad un passo per volta, costituisce un metodo di fondamentale importanza sia pratica che teorica: *il metodo di* induzione completa (*su cui torneremo nel n.* 10).

6. – Saper vedere le cose concrete

Tra le cose facili che spesso è difficile vedere dobbiamo menzionare a parte le cose *concrete.*

Alludiamo a quelle cose che sarebbero ovvie per tutti se non si disdegnasse di pensare a ciò che è fin troppo familiare, che fa parte dell'esperienza quotidiana, e che pertanto non è ritenuto degno di mescolarsi, inquinandole, a nozioni superbe per la loro astrattezza. Superbia come sempre stoltissima: le astrazioni sono complementi integrativi delle fondamentali conoscenze concrete, familiari, quotidiane, intuitive; complementi che possono avere a volte un valore altrettanto fondamentale e più spinto (ma occorre saggiarlo e appurarlo), ed altre volte si riducono a sterili cincischiature.

Ancora il filo teso

L'esempio più significativo è forse questo. Un problema di una Gara matematica richiedeva, sostanzialmente, per poter rispondere, che si avesse un'idea di come si sarebbe disposto un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso il basso (ad es. mediante un peso), come indicato nella *fig.* 18. Nessuno (su circa 250 concorrenti) vi riuscì; i migliori si segnalarono per qualche osservazione parziale corretta o sensata (seppure insufficiente a condurre alla conclusione esatta). Eppure, non era forse ovvio che il filo si dispone secondo *la linea più breve* (o, come si dice, "geodetica"), e che la linea più breve *è la retta* (ossia: la linea che diventa retta spianando il mantello del cono)? (La *fig.* 19 mostra il mantello

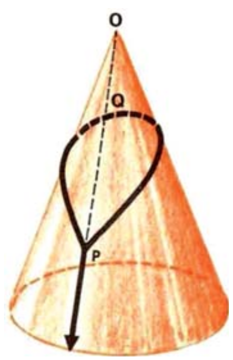


Figura 18

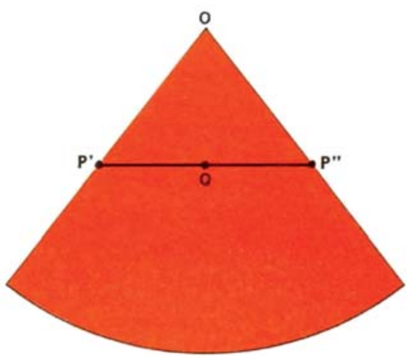


Figura 19

del cono aperto e spianato; i punti P' e P'' corrispondono al punto P, il mantello essendo pensato tagliato lungo la generatrice passante per P; il segmento $P' P''$ diventa, riavvolgendo il mantello a cono, il cappio $P\ Q\ P$).

Certo: *la cosa era ovvia. Probabilmente tutti o quasi tutti coloro che non vi hanno pensato avevano costruito coni* (*imbuti*, *cappucci*, *cartocci*) *di carta o di cartoncino*, *da bambini*, *e avranno visto farne da bottegai e da venditori di caldarroste. Ma se un ragazzo*, *quando sente parlare dei coni o di qualunque altra cosa a scuola*, *anziché pensare ai veri coni per completare con qualche nuova nozione teorica il molto che già ne ha appreso all'età della scuola materna*, *relega tali nozioni nel limbo delle astrazioni scolastiche destinato a trasformarsi in dimenticatoio appena possibile*, *alla fine si ritrova ignorante come non mai. Avrà dissipato il tesoro dell'intelligenza sviluppata nei primi anni di vita*, *senza trar profitto dalle cose che*, *invece di apprendere*, *avrà trasformato in vani provvisori imbottimenti* ([8]).

Capire significa collegare

Ripetiamo ancora la solita raccomandazione, *di cui tutto quello che diciamo vuol mostrare quanto sia impellente. Bisogna assimilare e render valido ciò che la scuola dà*, *e che ciascuno può far sì di venirne arricchito anziché soffocato*: *basta che renda concrete le cose astratte fondendole con ciò che vede e che sa*; *che vivifichi con la riflessione attiva ciò che appare un sapere fossilizzato e pedantesco*; *che fonda in sintesi unitaria*, *con collegamenti e comparazioni*, *ciò che trova staccato e sminuzzato in campicelli che scriteriatamente ambiscono all'autosufficienza.*

Con altra immagine, le singole cose che uno apprende (a scuola o non importa come) sono dei pezzi utili per il montaggio di una efficiente macchina intellettuale ed utili se ed in quanto vengano utilizzati per tale montaggio. Cosa direste di chi acquistasse le parti occorrenti per mettere insieme un'automobile (o un apparecchio radio, o magari un giocattolo) e invece le conservasse inutilizzate, vuoi trascuratamente in disordine, vuoi esposte in bell'ordine in una vetrina? Perciò diciamo che capire significa collegare.

([8]) Vedansi in argomento le ulteriori considerazioni e le citazioni dcl n. 18 (ultimo).

Ciò vale per i diversi capitoli della matematica, per la matematica tra le altre scienze, per le scienze nei rapporti con le altre discipline. Qui abbiamo notato e noteremo principalmente gli aspetti riguardanti la fusione di diversi campi e metodi matematici; proprio ora è il momento di esemplificare l'utilità (e vorrei dire la necessità) di sfruttare nozioni di altre scienze per vedere più chiaramente problemi matematici. Quanto alla tesi complementare (l'utilità o necessità della matematica per le altre scienze) la cosa è fin troppo ovvia.

Per illustrare l'utilità delle nozioni di altre scienze, e soprattutto fisiche, nel far capire i problemi matematici (si può dire che se la fisica non esistesse i matematici dovrebbero *inventare una fisica astratta* come sussidio e parte della matematica astratta) potremo limitarci a parlare di un solo caso banalissimo – sempre quello dei *fili tesi* – che pure si rivelerà ricchissimo d'interpretazioni e applicazioni.

E sempre fili tesi!

Un filo teso fra due punti, A e B, in assenza di ostacoli (e di forze: sarà tra l'altro assente il peso, o, praticamente, sarà da ritenersi trascurabile in confronto alla tensione del filo), si dispone secondo il segmento rettilineo $A\,B$, che è la linea più breve che congiunge i due punti. Analogamente, se il filo deve toccare una retta (materialmente, passare p. es. a cavallo di un ferro rettilineo; v. *fig.* 20), esso seguirà ancora il cammino più breve: quello per cui i due tratti del filo formano con la retta angoli uguali.

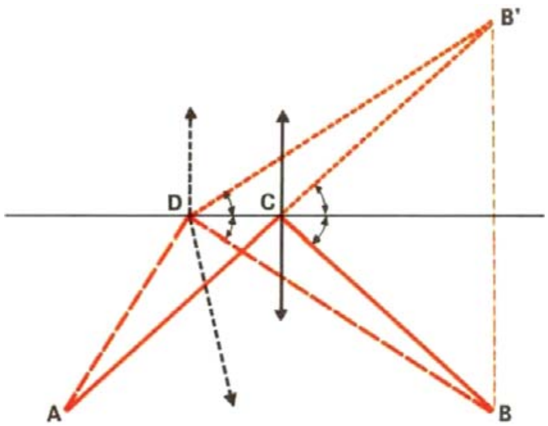


Figura 20

Si vede senz'altro che i percorsi da A a B o al simmetrico B' attraverso a un punto qualunque (C, D, ...) della retta sono uguali; il minimo è quello per il punto C (allineato con AB') e per esso gli angoli sono uguali (come risulta dalla simmetria). Ma la necessità di tale simmetria è chiara anche per una ragione fisica (pur limitandosi ad adombrarla): il filo non sarebbe in equilibrio sul ferro se lo scavalcasse in D (slitterebbe verso C) perché la risultante delle tensioni dei due tratti di filo (che sono uguali) agirebbe obliquamente (secondo la bisettrice: ovvio per simmetria). Solo in C le tensioni agiscono sul ferro in senso ortogonale, e si elidono con la reazione del ferro stesso (ammesso non si fletta o spezzi).

Questo ragionamento vale per il caso del bigliardo (*figg.* 15-16-17), anche pensando (con opportuni adattamenti) all'interpretazione "raggi di luce" o "percorso di biglie". Ma serve anche, tra l'altro, a dimostrare che, per l'ellisse (*fig.* 12), la tangente in un qualunque punto P è la perpendicolare alla bisettrice dell'angolo formato dalle congiungenti coi fuochi (in forma più semplice: forma angoli uguali coi fili che vanno dai chiodi alla matita, quand'è in P). Infatti P è allora, su tale retta, il punto per cui il percorso $F_1\ P\ F_2$ è minimo; tutti gli altri punti della retta sono pertanto irraggiungibili col filo ossia esterni all'ellisse. La retta tocca cioè l'ellisse in P (senza attraversarla) ed è quindi la tangente (9) (EP, 3).

Si potrebbe considerare il caso in cui i punti A e B non fossero in un medesimo piano con la retta (col ferro): non cambierebbe nulla (salvo che B' si otterrebbe da B con una rotazione diversa dal precedente angolo piatto; v. *fig.* 21, che diviene la *fig.* 20 se i due semipiani portanti A e B coincidono).

Si potrebbe allora, più in generale, considerare il caso in cui il filo teso tra A e B debba appoggiarsi a più rette, ossia esser vincolato a un poliedro

(9) Questa proprietà caratterizza la tangente per il cerchio, ed anche per l'ellisse (e in genere in tutti i casi più usuali: esclusi cioè i punti di flesso (come al centro di una linea a forma di "S"), quelli angolosi (come il vertice di una linea a forma di "V"), ecc.). Non è il caso di approfondire l'argomento, accennato solo perché l'esempio appariva istruttivo e comprensibile senza entrare in eccessive sottigliezze.

Cogliamo l'occasione per raccomandare, in generale, al lettore, di non preoccuparsi o scoraggiarsi se non riesce a capire (o a capire in modo sufficientemente chiaro) tutti gli esempi e soprattutto i concetti adombrati. Cenni necessariamente sommari non pretendono di poter dare più che un *germe* di spiegazione; riflettendo ad essi e al contesto può darsi che il germe fruttifichi e renda comprensibile a una seconda lettura ciò che non lo era alla prima. Ma neppure ciò è necessario; in caso diverso ci si contenti di afferrare quel tanto che si può e vedere l'insegnamento – la "morale" – che sta sotto.

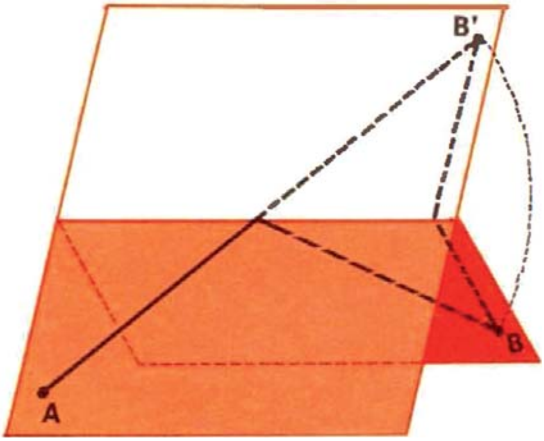


Figura 21

(con l'ovvia conclusione: il filo, scavalcando uno spigolo, deve sempre fare angoli uguali con esso dall'una e dall'altra parte). Altre varianti: considerare vincoli (ferri) curvi anziché rettilinei (e tutto andrebbe come se, nel punto ove il filo vi si appoggia, al posto del ferro curvo ci fosse il ferro rettilineo *tangente*), ecc. (EP, 4).

Cosa sono le geodetiche?

Ma passiamo direttamente al caso in cui il filo sia vincolato ad una superficie, come quella del cono nell'esempio all'inizio del presente n. 6. La linea più breve che congiunge due punti A e B restando sulla superficie data (linea detta *geodetica*) è quella descritta dal filo teso vincolato. La superficie (come precedentemente la retta, o "ferro") non può dare che una reazione *normale* alla superficie stessa: se la risultante delle tensioni del filo non fosse normale esso slitterebbe e non ci sarebbe equilibrio.

Non è il caso di cercar di spiegare sia pure in forma intuitiva le nozioni così adombrate (*"piano osculatore" e "normale principale" di una curva nello spazio*): *sarebbe troppo lunga a volerla fare passabilmente chiara. Vale la pena invece di notare che, pur senza conoscere effettivamente tali concetti, molti tra i partecipanti a detta gara matematica ebbero l'esatta intuizione della proprietà fisico-geometrica che deve sussistere. Lo videro nel caso particolare della figura di* *profilo*: *il cappio, di profilo, nel punto più alto* Q, *deve vedersi terminare* ortogonalmente *alla generatrice del cono* (*come nella fig.* 22; *altrimenti, nel caso ad es. della fig.* 23, *slitterebbe tendendo all'ortogonalità*). *Sostanzialmente è questa stessa proprietà quella in cui si traduce l'esigenza fisica sopra ricordata, e che si rivelerebbe sussistere in ogni punto del filo* (*guardandolo – come qui –* lungo la tangente).

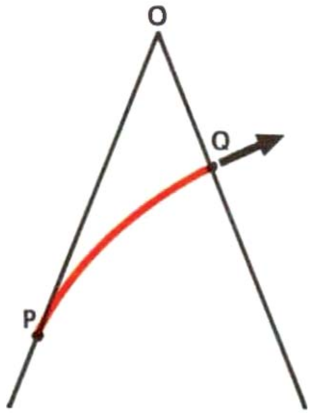


Figura 22

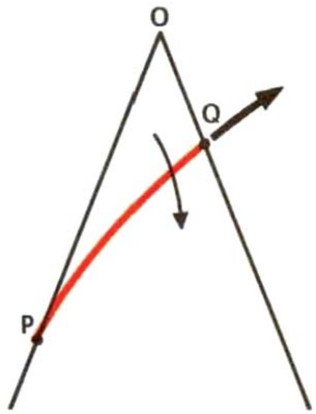
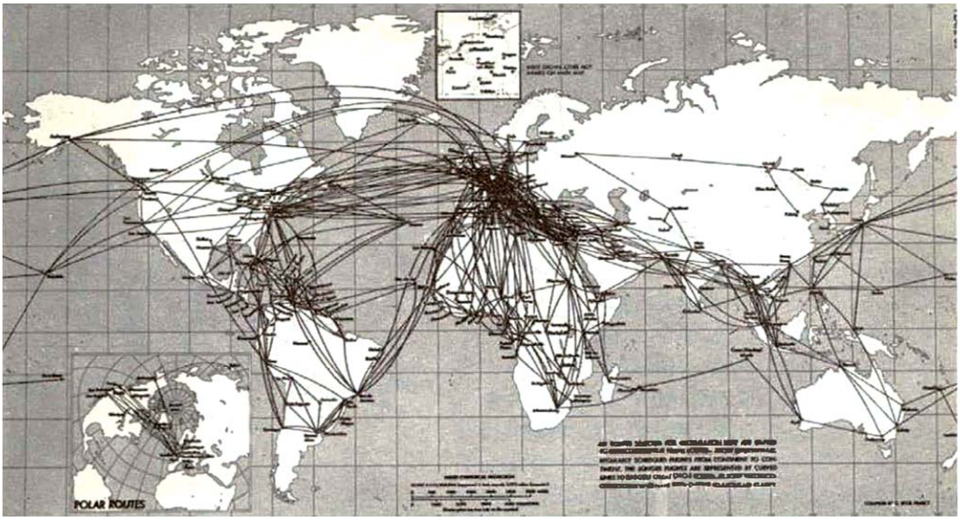


Figura 23

Un caso ovvio che dà un'illustrazione semplice: su di una sfera le geodetiche sono i cerchi massimi (quelli che la dividono a metà). E infatti, di profilo, essi si vedono come diametri del contorno apparente della sfera, e sono quindi ad esso ortogonali; quelli non massimi si vedono invece come corde (non diametri) che finiscono obliquamente sul contorno (e non sono geodetiche).

Vi sarebbe molto da aggiungere su questo argomento e su infiniti altri atti a illustrare l'importanza di vedere concretamente, ed in particolare con sensibilità fisica, problemi matematici. Ma dobbiamo limitarci a semplici cenni, per toccare molti temi e suscitare molti stimoli, rinunciando a soffermarci su ciascuno quanto occorrerebbe se l'intendimento non fosse semplicemente quello meramente preliminare ora detto.

Sulla terra, l'arco di cerchio massimo che congiunge due punti alla stessa latitudine, come ad es. (approssimativamente) Roma e New York, raggiungerà a metà strada il punto più vicino al polo. Appare a prima vista strano che un aereo (o una nave, se in mare, o un veicolo, se in un deserto pianeggiante, e sempre prescindendo da altri motivi), durante il tragitto tra due punti sul medesimo parallelo, anziché seguirlo, si sposti dapprima verso nord (nel nostro emisfero) per poi ritornarvi volgendo a sud. Ma il fatto è strano soltanto per colpa dell'abitudine alle rappresentazioni delle carte geografiche, nelle quali la superficie curva è necessariamente in qualche modo deformata, e spesso i paralleli appaiono rettilinei. Ciò vale ad es. nella "proiezione di Mercatore", molto usata per cartogrammi (ad es. di reti aeree, ecc.); v. la Tav. I ove sono indicate le traiettorie descritte da chi partisse da Roma proseguendo sempre "in linea retta": (effettivamente: su un cerchio massimo), ossia le rotte più brevi per raggiungere un qualsiasi punto della terra partendo da Roma.



TAV. I (*Si badi che il disegno, ad uso commerciale, non è fatto con esattezza*)

È utile osservare i diversi casi sulla carta (p. es., da Roma alla Nuova Zelanda, o a Tokyo, ecc.) e controllare sul mappamondo, ponendosi qualche domanda.

La fotografia del quadro luminoso (Tav. II) del volo di "*Gemini* V" (agosto 1965) mostra alcune orbite (data la rotazione della Terra non si ha una geodetica, che apparirebbe ripercorsa senza spostamento alcuno, indefinitamente) (EP, 5).

TAV. II

7. – Saper vedere gli aspetti economici

Le questioni fisiche incontrate (come molte altre) si prestano ad essere interpretate in senso "economico": quelle leggi fisiche sono tali che la biglia, o il raggio di luce, o il filo, automaticamente seguono la via più breve dal punto di partenza a quello d'arrivo. Non è un caso sporadico o accidentale: anche le più complesse leggi fisiche si possono spesso ricondurre ad analoghi "principi di minimo", ed è la matematica che (attraverso strumenti molto più avanzati) permette di esprimere e dimostrare conclusioni del genere.

Più espressamente sono di carattere economico, nel senso più abituale della parola, problemi consistenti nel cercare, in date condizioni, la soluzione *più conveniente*: quella cioè che rende *minimo* il costo, oppure il tempo impiegato, oppure la distanza da percorrere, ecc. (o, se si parla di profitto, di volume della produzione, ecc., basterà dire *massimo* anziché minimo). Problemi del genere hanno spesso grande importanza (per l'economia di un singolo, o di un'azienda, o di un paese); di ciò non è qui il luogo d'interessarci, ma gioverà, ai nostri fini, osservare quanto anche le riflessioni sugli aspetti e le interpretazioni di natura economica conferiscano visibilmente valori di concretezza e di fecondità alle nozioni e ai metodi della matematica.

Antichi pregiudizi, duri a morire e facili a rispuntare con nuove parvenze, considerano pregevole la matematica soltanto se "pura", coltivata come fiore di serra per nient'altro che una curiosità intellettuale. Spregevole soprattutto, e da tener ben distinta, sarebbe la matematica intesa alle applicazioni economiche, strumento dei mercatanti, e poco meno quella applicata alle altre scienze, all'ingegneria, alla tecnica. Eppure la matematica apparirebbe ben povera, e al limite vuota, privandola di tutto ciò che stiamo presentando nell'intento di far apprezzare la fecondità degli stimoli che, attraverso la molteplicità e ricchezza d'interpretazioni concrete, esercita sulle nostre facoltà di pensare.

Oltre che applicarsi a problemi economici, la matematica ha finalità economica di per sé in quanto è ricerca degli strumenti più adatti per ogni problema, e del modo migliore per sistemarli e presentarli. Del resto tutta la scienza ha (soprattutto nel pensiero di Mach, Vailati, Dewey, ecc.) la finalità "economica" di fornirci la più semplice e comoda teorizzazione di quanto ci circonda.

Limitiamoci a illustrare un solo concetto importante su tre diverse applicazioni (schematizzate nel modo più semplificato dato il semplice scopo esemplificativo, senza preoccuparci di precisazioni e modifiche atte a rendere le impostazioni più realistiche).

Conviene ribassare il prezzo?

Supponiamo che un'impresa, che vende giornalmente 300 unità di un suo prodotto con guadagno unitario di Lire 2000, sappia che le vendite aumenterebbero di un'unità in più per ogni 5 lire di diminuzione del prezzo (e quindi del guadagno). Conviene diminuire il prezzo? o aumentarlo? o lasciarlo immutato?

Si potrebbe confrontare il guadagno attuale (L. 2000×300) con quelli variati (p. es. L. 1995×301, L. 1990×302, ecc., o L. 2005×299, ecc.), ma è più semplice pensare subito alle differenze in più e in meno per una variazione di 5 lire. Una riduzione di 5 lire fa perdere 5 lire di guadagno su ciascuna delle 300 unità vendute comunque, e fa conseguire un guadagno di L. 1995 sulla nuova; guadagno netto, L. 1995 − L. 1500 = L. 495. In tal modo si fa un confronto *marginale* (confrontando cioè gli effetti in più e in meno di una variazione unitaria, o comunque "molto piccola"), che basta a mostrare in che senso spostarsi; il punto ove conviene arrestarsi è quello dove gli effetti marginali in più e in meno si fanno equilibrio (somma = 0).

Ammesso che quella previsione valesse per qualunque variazione di prezzo, si vede subito che:

col prezzo minimo (uguale al costo) si ha	guadagno unitario = 0 unità vendute = 700 (= 300 + $^{2000}/_{5}$);
col prezzo massimo (nessuno compera) si ha	unità vendute = 0 guad. un. = L. 3500 (= 2000 + 300 × 5);
nella situazione intermedia con	unità vendute = 350 = $^{1}/_{2}$ (0 + 700) guad. un. = L. 1750 = $^{1}/_{2}$ (3500 + 0) L. si ha il *guadagno totale massimo.*

Poiché infatti 1745 – 350 × 5 = – 5 mentre 1750 – 349 × 5 = + 5 conviene ribassare da 1755 a 1750 ma non più da 1750 a 1745. E la conclusione è valida se la proporzionalità tra ribassi ed incrementi di vendite sussiste (seppure non fino agli estremi) fino al punto trovato come soluzione.

Geometricamente, il ragionamento applicato si basa sul fatto che fra i rettangoli di ugual perimetro il quadrato è quello di area massima; nel n. 9, e poi nel n. 11, insieme a tale fatto geometrico, mostreremo il nesso col presente problema.

Qualche altro esempio nel medesimo ordine di idee verrà incontrato più avanti: *nel n.* 11 (*criterio di minimo costo per le scorte di magazzino*) *e nel n.* 17 (*acquisti per vendite aleatorie*); *potremo ivi riprendere qualche considerazione sul presente tema integrandola con cenni agli importanti aspetti implicanti questioni di probabilità e statistica.*

Come abbreviare la strada?

Gli altri due esempi si possono dire economico-geometrici: consistono entrambi nel rendere minima una somma di distanze, ad esempio il percorso totale di bambini per recarsi a scuola. In un caso, si tratta di scegliere il punto ove costruire la scuola per servire tre località, A, B, C; nell’altro, di ripartire gli scolari fra due scuole esistenti a seconda del punto in cui abitano. In entrambi i casi ci occupiamo delle distanze (in linea d’aria) benché in casi concreti occorrerebbe tener conto di distanze su strada, o di tempo con mezzi di trasporto, o d’altro. Nel primo caso, supponiamo dapprima che le tre località abbiano all’incirca lo stesso numero di abitanti e di scolari (il caso generale verrà considerato nel

n. 12 (*fig.* 40) per non appesantire ora l'esempio e perché allora potremo aggiungere altre osservazioni). Si tratta quindi, nel nostro caso, di trovare il punto P per il quale è minima la somma delle tre distanze, $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$; in un'altra interpretazione, quindi, P è il punto ove far convergere tre tronchi stradali per congiungere A, B, C con la minima spesa (se dipende dalla lunghezza, se non c'è difficoltà a farli rettilinei, ecc.).

E la risposta è intuitiva, pensando all'equilibrio marginale da un punto di vista fisico: in P (v. *fig.* 24) i tre tronchi devono formare tra loro tre angoli uguali (120°), solo modo perché tre forze uguali possano farsi equilibrio (ciascuna dovendo essere sulla bisettrice delle altre due).

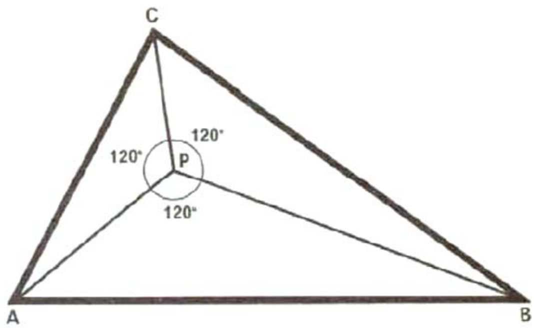


Figura 24

In termini economici: se si fosse scelta, per il nodo, una posizione diversa dal punto P dove i tre angoli sono uguali, ci sarebbe stata la possibilità di risparmiare spostandola (nella direzione corrispondente all'azione risultante delle tre ipotetiche forze), perché l'aggravio dovuto all'allungamento di uno (o due) dei tre tronchi sarebbe stato più che compensato dal risparmio derivante dall'accorciamento degli altri due (o uno). Non c'è pertanto, fuori di P, equilibrio fra gli effetti *marginali* in più e in meno ([10]).

Questa considerazione degli effetti marginali (*come dicono gli economisti*) *contiene un concetto che tutti dovrebbero afferrare e tener presente nel pensare a qualunque questione di* equilibrio *o di* ottimizzazione.

([10]) Se il triangolo ABC ha un angolo (sia quello in A) maggiore di 120° (o uguale), P cade invece in A (conviene il percorso BAC). Nel caso normale (punto P interno ad ABC) lo si costruisce come vedremo nel n. 12 (*fig.* 39).

Lo incontreremo in parecchi esempi, ma per fissare in mente l'idea basta l'esempio banale e fondamentale: il fatto che uno consumi una certa quantità di un bene e non più significa che fino a quel punto ogni unità gli dà un piacere superiore al costo, mentre al di là il piacere diventa inferiore (e preferisce risparmiare quell'importo o spenderlo diversamente).

Considerazioni analoghe si fanno in meccanica (parlando di spostamenti virtuali), *e valgono ovunque. Si tratta infatti di applicazioni di un unico concetto puramente matematico, consistente nell'analizzare l'effetto di piccoli spostamenti (da un dato valore, o punto, o "situazione"). Occorre però avvertire che considerazioni del genere bastano a individuare i* massimi relativi, *non il* massimo assoluto. *Se, spostandoci dal punto ove ci troviamo, non si può salire ma solo scendere vuol dire che stiamo sulla cima di una collina, ma non è detto che non ve ne siano altre più alte. Nel nostro esempio, colui che ha scelto nel miglior modo la quantità di quel dato bene può darsi avrebbe scelto diversamente e meglio se avesse pensato che ne esiste un altro che poteva in parte sostituirlo.*

Nell'altro problema, consideriamo una località che ha due scuole, di data capienza (complessivamente uguale al numero di scolari), e situate in due punti A e B; conosciamo il punto dove abita ciascun bambino e vogliamo dividere l'abitato in due zone, A e B, da cui i bambini che vi abitano vadano nelle scuole A e B, rendendo minima la somma dei percorsi. (Poco realisticamente, li consideriamo rettilinei anziché alterati per effetto della rete stradale).

Intervengono qui nuove curve, definite in modo molto simile a quello dell'ellisse: le *iperboli.* Anche per esse esistono due *fuochi* (qui corrispondono alle scuole A e B), ma anziché la somma delle distanze (come nel caso dell'ellisse: v. *fig.* 12) in questo caso rimane costante su di esse *la differenza delle distanze tra i fuochi* (v. *fig.* 25); non c'è una costruzione meccanica del tipo utilizzato per l'ellisse ([11]).

([11]) In modo un po' più precario si potrebbe tentare la costruzione suggerita nella *fig.* 26 (chi vuole cerchi d'interpretarla e spiegarsela per esercizio). La matita è fissata a un punto del filo, i cui due capi sono legati assieme e tesi (ad es. mediante un peso) al di là del percorso obbligato tra i 4 chiodi. Questo dispositivo è stato escogitato e indicato espressamente per i lettori, ripensando all'affermazione fatta nel testo che «una costruzione meccanica non esiste»; l'aggiunta di questa nota in calce ha lo scopo, non di presentare tale costruzione come se fosse cosa interessante, ma di mostrare come, pensandoci un po', chiunque (anche ciascuno di voi) potrebbe e dovrebbe saper trovare qualche modo di cavarsela in casi del genere.

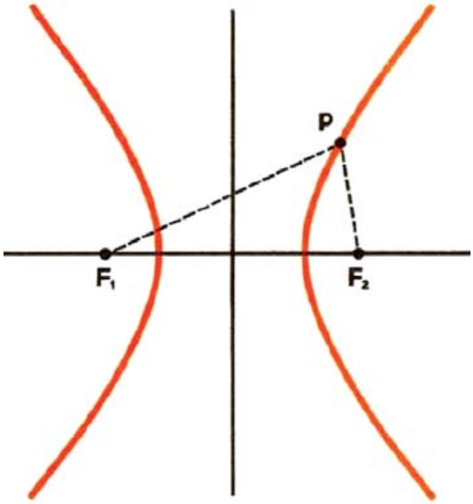


Figura 25

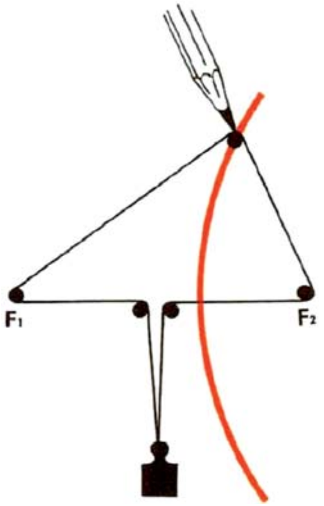


Figura 26

Fra le iperboli scegliamo quella ([12]) che lascia dalla parte di A e di B dei punti (abitazioni di scolari) nel numero corrispondente alla capienza delle due scuole: vedremo che la ripartizione così effettuata è quella ottima (per lo scopo detto: di render minima la somma delle distanze). Supponiamo infatti che, contrariamente a tale criterio, almeno uno scolaro della zona A venisse assegnato alla scuola B e (necessariamente, quindi) almeno uno della zona B alla scuola A (quelli scambiati nei due sensi sono necessariamente in ugual numero). Siano P e Q le loro abitazioni (*fig.* 27). Può ben darsi che, applicando il criterio ottimo, per uno dei due la situazione peggiori dovendo egli fare un tragitto più lungo (nel disegno, infatti, ciò avviene per P): ciò è inevitabile salvo il caso in cui la divisione fosse data proprio dall'asse di simmetria (che è il caso particolare di iperbole con differenza = 0), ossia se per caso coloro che abitano più vicini a ciascuna scuola, A o B, fossero già nel numero esatto corrispondente alla capienza (e allora il problema non si porrebbe neppure).

Tuttavia, seppure (ad es.) P si avvantaggia dall'esser erroneamente assegnato alla scuola B (della differenza $\overline{PA} - \overline{PB}$), Q non soltanto ne è

([12]) In realtà non è unica: è una qualunque tra quelle che effettuano la stessa suddivisione. Sarebbe unica solo se per caso vi fossero due o più scolari abitanti esattamente sulla stessa iperbole che dovessero venir smistati (arbitrariamente: ciò è irrilevante) fra le due scuole.

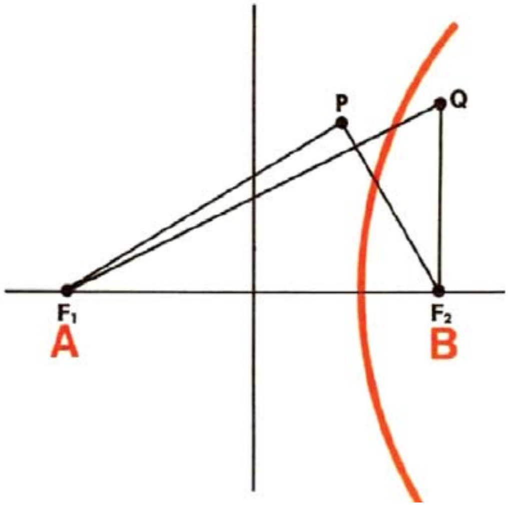


Figura 27

danneggiato, ma lo è in misura maggiore (della differenza $\overline{QA} - \overline{QB}$); e tale differenza è per definizione maggiore per tutti i punti Q a destra dell'iperbole divisoria che per qualunque punto alla sua sinistra, come P (EP, 6).

8. – Riflettere sui casi particolari

Dobbiamo, a questo punto, prestare attenzione ad alcune questioni di carattere sistematico. In questo n. 8 *e nei prossimi nn.* 9 *e* 10 *occorrerà riflettere su come il "saper vedere"* (*nei modi illustrati in esempi già incontrati e in altri che seguiranno*) *serva anche a veder meglio, riflettendovi sopra, il senso di quei metodi generali, sistematici, codificati, che risultano per solito ostici e indigesti non tanto per colpa loro quanto per il modo infelice, vacuo, gratuito, puramente formale, in cui sogliono venir presentati. Riflettendovi sopra, e vedendone il senso, ci si potrà convincere che il* diavolo (*la matematica fatta di formule*) *non è poi tanto brutto come ce lo fanno apparire ... i suoi adoratori*; *è anzi un caro e buon diavolo che ci dà generosamente una mano per proseguire più speditamente e non meno divertentemente il nostro cammino.*

Abbiamo cominciato (*il* n. 1) *col dire che occorre anzitutto immaginazione, e farne uso per saper vedere ogni esempio e problema. Abbiamo visto che, riflettendo ulteriormente, essa ci arricchisce di visioni e idee che valgono in più esempi, li collegano, acquistano senso più generale. Se* *un'idea risulta particolarmente importante, e suscettibile di venir applicata utilmente in casi abbastanza o molto generali, perché non fissarla meglio in testa (ed anche, perché no, sulla carta) sotto forma di enunciato preciso, di regola comoda, di convenzione servizievole, addirittura di teoria?*

Basta solo considerare tutto ciò come continuazione delle riflessioni precedenti, codificata in quanto riflessioni dello stesso genere ce la fanno apparire utile. Non considerarlo invece come cosa piovuta dal cielo o dalla fabbrica dei programmi scolastici.

Cominciamo col notare come possa considerarsi una prima regola sistematica quella di vedere anzitutto di orientarsi mediante ispezione di casi particolari o di circostanze particolari. Il caso più fondamentale è quello delle "dimostrazioni **per assurdo**", in cui si dimostra che una certa ipotesi non può esser vera perché si è trovata una particolare affermazione che allora dovrebbe esser vera anch'essa mentre non lo è.

Una dimostrazione per assurdo l'avevamo già data, prima di parlarne espressamente: *era quella dell'ultimo esempio* (*sull'assegnazione degli allievi alle due scuole* A *e* B; *n.* 7); *se riuscì comprensibile*, *vuol dire che il concetto è ben intuitivo. Anche gli esempi seguenti saranno molto semplici, tanto che, forse, sembrerà addirittura eccessivo parlare di "dimostrazioni per assurdo"*; *tuttavia saranno sufficienti a dare l'idea di come qualche osservazione particolare possa servire ad escludere che le cose stiano in un certo modo che a prima vista poteva sembrare possibile o magari, per errata intuizione, plausibile o certo. Ci limitiamo a dire che la natura e l'impiego e il significato delle dimostrazioni per assurdo acquistano profondità e complessità ben maggiori in campi più avanzati e difficili.*

Ritorniamo sull'esempio del cono (v. n. 6: *figg.* 18 *e* 19, e poi *figg.* 20 *e* 21). Molti dei partecipanti alla gara matematica hanno fatto il disegno in profilo (come alle *figg.* 22 *e* 23) indicando come rettilineo il profilo del cappio (cioè: la linea PQ sarebbe vista come un segmento). Ciò vorrebbe dire però che la sezione è *piana*; ma allora il cappio avrebbe la forma di ellisse, e pertanto (ed anche per chi non sapesse che dev'essere un'ellisse dovrebbe risultare chiaro) non potrebbe avere in P un punto angoloso (come è evidentemente necessario, essendovi attaccato un peso: cfr. *fig.* 18). Bastava questa banale osservazione, non solo per evitare l'errore sul disegno, ma per accorgersi, insieme a ciò, che la sezione non poteva esser piana, la geodetica non è una linea piana ... e riflettendo ancora si poteva forse aprire la via a scoprire l'"uovo di Colombo" (ossia la soluzione, illustrata nella *fig.* 19).

I numeri che terminano con ...

Un altro problema proposto in una gara matematica chiedeva di dimostrare che un numero di due o più cifre fatto di tutti 9 (99, 999, 9999, 99999, ecc.; in forma più scientifica ([13]), una potenza di 10 diminuita di 1, ossia un numero del tipo $10^k - 1$) non può essere un *quadrato* (quadrato perfetto, cioè di un numero intero). Per i numeri formati di un numero pari di cifre 9 (99, 9999, ecc.) dovrebbe venir in mente subito un motivo evidente: aggiungendo 1 si ha un quadrato ($99 + 1 = 100 = 10 \times 10 = 10^2$, $9999 + 1 = 10.000 = 100 \times 100 = 100^2$, ecc.) e due numeri consecutivi non possono essere entrambi quadrati perché i quadrati si diradano sempre più (p. es., l'ultimo quadrato prima di $100 = 10^2$ è $9^2 = 81$ che è ben minore di 99, e così via; per esercizio dimostrarlo in generale). Ma come dimostrare che ciò vale anche per 999, 99999, o, peggio, per il numero scritto con (p. es.) la cifra 9 ripetuta 1007 volte?

Se uno ha notato che i quadrati delle 10 cifre (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81) terminano per 0 o 1 o 4 o 5 o 6 o 9 (nessuno per 2 o 3 o 7 od 8), può pensare che ... se il problema riguardasse un numero terminante ad es. per 7 la risposta negativa sarebbe ovvia: l'ultima cifra del quadrato è quella del quadrato dell'ultima cifra e non può quindi essere 7. Dal fatto che l'ultima cifra sia 9 possiamo solo concludere che, se il numero è quadrato, dev'essere il quadrato di un numero che termina o per 3 ($3^2 = 9$) o per 7 ($7^2 = 49$). A questo punto verrà naturale di pensare che basterà comunque vedere se 99 è o no tra le possibili terminazioni di quadrati di numeri di due cifre ... Ma appena uno prova a sviluppare questa idea si accorge che essa è superflua. Usando la formula del quadrato del binomio (v. n. 2), ogni numero che termina per 3 (o per 7) si può scrivere $a + 3$ (o $a + 7$) con a multiplo di 10; il suo quadrato sarà, nei due casi

$$(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 9, \text{ o}$$

$$(a + 7)^2 = a^2 + 2 \cdot 7 \cdot a + 49, \text{ ma}$$

a^2 è multiplo di 100 e non tocca le ultime due cifre, e $2a$ (e a maggior ragione $2 \cdot 3 \cdot a$ e $2 \cdot 7 \cdot a$) è multiplo di 20. La cifra delle decine non può

([13]) È "più scientifica" non solo per l'apparenza ma per un motivo sostanziale: la prima proprietà è relativa al particolare sistema di numerazione usato (base 10, quello abituale ma non privilegiato; nelle calcolatrici elettroniche è spesso adottato il sistema in base 2), mentre l'altra è indipendente da circostanze accessorie del genere.

venir alterata che di un numero pari e quindi (che si parta da 0 o da 4, avendo 09 o 49) sarà sempre *pari.* Quindi nessun quadrato può terminare con 99 (EP, 7).

Più in generale, questo ragionamento può completare le precedenti conclusioni riguardanti la sola ultima cifra: *un quadrato può terminare soltanto*, *o per* 0, 1, 4, 5, 9 *preceduti* (*come cifra delle decine*) *da un numero* pari, *oppure per* 6 *preceduto da una cifra* dispari. *Perciò la semplice ispezione delle ultime due cifre basta in* 70 *casi su* 100 *ad escludere che un numero possa essere quadrato. È facile estendere tali conclusioni, osservando ad es. che le IV potenze possono pertanto terminare soltanto per* 0 *o* 1 *o* 5 *precedute da cifra pari*, *o da* 6 *preceduto da cifra dispari* (*cadono infatti* 4 e 9, *ottenibili da* 2 *e* 8 *e da* 3 e 7, *che non possono essere cifra finale di quadrati*).

Considerazioni del genere rendono facile l'individuazione, senza calcoli, del numero **di cui il numero proposto sia una certa potenza,** *p. es. si sappia che è la* **quarta** *potenza, o la* **quinta** *potenza, ... Con un po' di memoria e prontezza, non è teoricamente difficile apprendere e dar subito la risposta esatta* (*beninteso, per numeri fino a un certo ordine di grandezza, ossia fino a un certo numero di cifre*). *In tal modo alcune persone* (*tra cui, pochi anni or sono, una ragazza indiana*) *riuscirono a sbalordire, e apparire fenomeni di capacità matematica, presentandosi come numeri di spettacolo* (EP, 8).

Più in generale ancora, possiamo dire che questi esempi sono istruttivi in quanto suggeriscono di vedere se una conclusione possa dedursi **tenendo conto solo di una parte molto semplice** *di ciò che si sa* (*e cercando di indovinare quale tale parte possa essere*). *Per escludere che il numero formato da* 77 *cifre, tutte* = 9, *sia un quadrato non occorre calcolarne la radice o comunque tener conto di tutte le* 77 *cifre se si sa o s'immagina* (*e si cerca se*) *la conclusione si può trarre dalla sola conoscenza dell'ultima cifra, o delle ultime due, ecc., o da altre circostanze del genere.*

Il calendario del campionato di calcio

Ancora un semplice esempio; questo di tipo "**combinatorio**", campo in cui capita spesso di doversi chiedere se è o non è possibile congegnare qualcosa in un certo modo. Ci chiediamo, precisamente, se sarebbe possibile combinare il calendario di un campionato di calcio (con numero pari di squadre) in modo che ogni squadra giochi alternativamente una partita in casa e una fuori. Si può subito rispondere NO: sotto tale condizione è ovvio che due squadre che alla prima giornata giocano entrambe in casa (oppure entrambe fuori) non potrebbero mai incontrarsi. Da ciò segue, più precisamente, che l'alternanza potrebbe esser rispettata al più per due squadre, ed ogni altra dovrebbe almeno una volta romperla.

Attenzione al "potrebbe": la dizione è ambigua e bisogna spiegarla (*ed avvertire in generale dei pericoli di siffatte ambiguità*). *La conclusione raggiunta è solo che non è escluso*, *in base alle prime considerazioni fatte*, *che un calendario con quelle proprietà sia realizzabile* (*così come*, *per accennare di nuovo all'esempio precedente*, *si può dire che fra i dieci numeri* 1065, 1165, 1265, 1365, 1465, 1565, 1665, 1765, 1865, 1965 *si* potrebbero *trovare dei quadrati – in quanto ciascuno*, *notando che termina per* 65, *fino a prova contraria non è escluso che sia quadrato – ma non che si può trovarne nel senso di affermare che ne esistono*).

Per vedere che effettivamente quella possibilità esiste non c'è di meglio che costruire un modello particolare, nel modo più semplice possibile. Basterebbe ad es. immaginare il seguente schema (abbastanza noto) e notare che esso risponde alle condizioni volute (v. *fig.* 28).

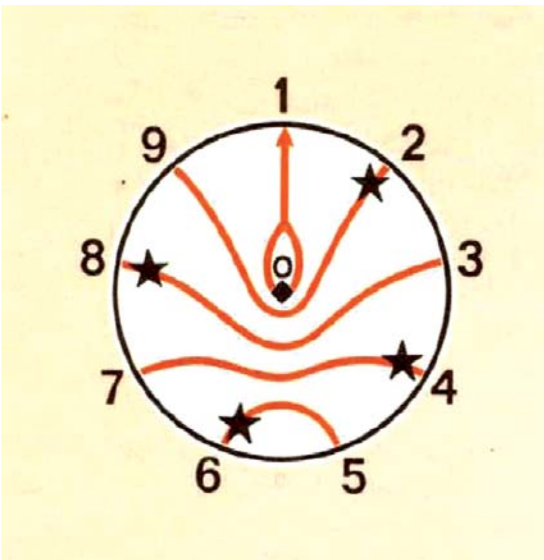


Figura 28

Pochi cenni, che chiunque potrà completare osservando lo schema. Esso si riferisce al caso di 10 squadre (indicate coi numeri da 0 a 9), ma potrebbero essere in numero pari qualunque.

Il disco centrale è girevole; la freccia uscente dal centro va portata sull'1 alla 1ª giornata, sul 2 alla 2ª, ... , sul 9 alla 9ª (ed ultima). Le linee che congiungono i punti simmetrici rispetto alla freccia indicano gli accoppiamenti per ogni giornata (fra le squadre dei numeri che risultano collegati), la squadra indicata dalla freccia gioca con la "0" (la quale gioca alternatamente in casa e fuori). Le altre partite si giocano in casa (in andata; in ritorno, naturalmente, viceversa) della squadra dal lato del segno (stella).

Se le squadre fossero in numero dispari, basterebbe sopprimere la "0" e considerare "riposo" l'incontrarla; in tal caso l'alternanza sussisterebbe per tutte le squadre (il "riposo" la romperebbe solo nel senso di far "saltare un turno"). Pertanto, la soluzione che sapevamo esser la migliore che potevamo sperare fosse realizzabile, lo è realmente, ed è data dallo schema indicato.

9. – Perchè servirsi di formule?

I formalismi, i simbolismi, gli **algoritmi** (*cioè i modi di operare sui simboli secondo appropriate regole*), sono per gran parte la causa della diffusa avversione alla matematica. Ma non per colpa loro. Essi meritano di essere apprezzati in quanto utili accorgimenti per fissare stenograficamente idee matematiche, e vengono invece spesso presentati come fine a sé stessi. E sarebbe strano che uno potesse interessarsi al modo di scrivere note sul pentagramma senza fargli sapere che non sono solo scarabocchi ma rappresentano della *musica.*

Per apprezzare le formule e il tipo di calcoli che consentono non c'è che capire a cosa servono, convincersi che è utile o anche necessario farne uso, comprendere in che modo conviene pensarne il significato, onde farle apparire un modo appena diverso di scrivere le stesse cose che già ci sono familiari. Ci limitiamo qui alle cose più elementari, ossia alla prima introduzione del "calcolo letterale" con qualche cenno introduttivo a conseguenze che potrebbero seguire subito; come "spirito", le stesse osservazioni sono appropriate quasi ovunque; cenni su argomenti più avanzati si troveranno nel n. 14.

Scrivere una formula con segni letterali ha a volte ovvio significato di abbreviazione di un enunciato. Anziché dire: «L'area (A) di un triangolo è data dalla metà del prodotto della base (a) per l’altezza (h)», si può scrivere sinteticamente “Area = ½ · base × altezza", o, abbreviando ancora,

$$A = \tfrac{1}{2}\, a\, h;$$

è la stessa cosa ma (per poco che ci si abitui) in forma molto più leggibile. Forma poi che è pronta per il calcolo: se, in un caso specifico, la base è $a = 8$ cm e l’altezza $h = 5$ cm, la formula dà direttamente Area $= A = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$. La formula esprime anzi già tale calcolo, se si pensa che le lettere a ed h altro non sono che un’indicazione provvisoria delle lunghezze 8 cm e 5 cm prima di conoscerle.

La stessa formula acquista poi un senso più profondo se si pensa che a ed h possono essere lunghezze qualunque: quelle relative a tutti i possibili triangoli; allora la formula dà A come *funzione* di a ed h, dice cioè come varia l’area facendo variare ad arbitrio a ed h. Per indicare che a ed h s’intendono, in questo senso, *variabili* (cioè: che c’interessa pensare di potervi dare, considerando diversi casi, diversi valori), si preferisce usare le lettere x, y (eventualmente z, t, ...); allora $A = \tfrac{1}{2} \cdot xy$, o, per maggior specificazione, $A\,(x,y) = \tfrac{1}{2}\, xy$ è l’area del triangolo come *funzione* della base x e dell’altezza y .

Sul concetto di funzione, e su altri connessi, torneremo nei prossimi nn. (10, 11 e 12).

Un’utilità più concreta, in termini di economia di calcoli, deriva poi dalla possibilità di svolgerli sulle stesse lettere. A questo riguardo sarebbero molto più convincenti esempi complessi; per brevità (e perché servirà ad altre considerazioni) limitiamoci a un esempio molto semplice (e si tenga conto che dà perciò una pallida idea). L’area di una cornice quadrata (un quadrato di lato a da cui si tolga un quadrato, interno, di lato b) è $A = a^2 - b^2$; sapendo (e altrimenti lo si verifichi!) che $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$, possiamo anche scrivere $A = (a + b)\,(a - b)$, ciò che è in genere molto più rapido [14]. Ad es., se $a = 58$ e $b = 54$ (cm),

[14] Un prodotto è più lungo a calcolarsi che una somma (o differenza); perciò è meglio la formula che richiede due somme e un prodotto che non viceversa (due prodotti e una somma); confronti di questo genere sono importanti soprattutto per scegliere la via migliore nel programmare lavori per le calcolatrici elettroniche; v. n. 18; inoltre, nell’es. giova il fatto che $a - b$ spesso è piccolo.

calcolando ([15]) $a^2 - b^2$ si ha $58^2 - 54^2 = 3364 - 2916 = 448$ mentre molto più semplicemente il risultato si ha da

$$(a + b)(a - b) = (58 + 54)(58 - 54) = 112 \times 4 = 448.$$

Il rettangolo più grande

Di più, un risultato generale anche semplicissimo, come quello ora usato, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, non solo condensa tutte le infinite identità numeriche cui dà luogo se diamo ad a e b valori ad arbitrio, ma può aiutare a vedere conclusioni importanti. Detta formula mostra ad es. che *il quadrato è, fra i rettangoli di ugual perimetro, quello di area massima*: dal quadrato $a \times a$ si ottengono infatti rettangoli di ugual perimetro aumentando un lato e diminuendo l'altro di una stessa lunghezza b, ma $(a + b) \times (a - b)$ vale a^2 diminuito di b^2, ossia è sempre minore di a^2.

La fig. 29 *rende più chiara la cosa graficamente, ma le due forme non si escludono anzi si integrano: la formula infatti si deduce e si applica più direttamente, ma in compenso la figura ci preserva dal rischio di farlo macchinalmente senza assimilare il senso attraverso l'intuizione. Il che sarebbe come sfruttare la maggiore possibilità di viaggi offerta dall'automobile, non per vedere più cose e con più agio, bensì per attraversare paesi e paesi a gran velocità senza vedere nulla.*

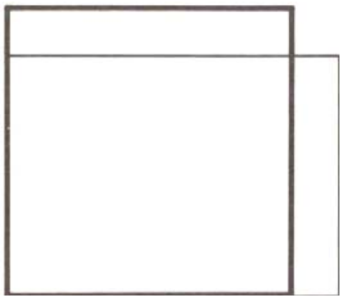


Figura 29

([15]) Sarebbe buona norma non sottintendere mai le unità di misura (qui, cm); se si omette di scriverle (come qui, per non appesantire) bisogna non dimenticare mai che, seppur sottintese, *esistono.* Tra l'altro, specie per grandezze di significato fisico, è utilissimo il controllo di *omogeneità*: se termini da sommare non sono omogenei (p. es. uno è in m^3/sec e l'altro in kg/m^2) c'è senz'altro un errore, e così se il risultato non è omogeneo con quello che doveva essere (p. es. risulta una lunghezza anziché una velocità, unità m anziché m/sec).

La stessa conclusione, in forma solo apparentemente diversa, si può esprimere dicendo (v. *fig.* 30) *che, fra tutti i rettangoli con due lati sui cateti e un vertice sull'ipotenusa del triangolo rettangolo* OAB, *ha area massima quello con vertice nel punto di mezzo*, C.

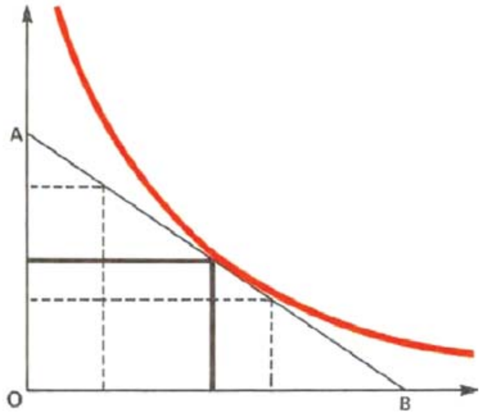


Figura 30

Se il triangolo OAB è *isoscele* (*cioè*: *se è* OA = OB), *detto rettangolo massimo è il quadrato e si ha esattamente il risultato già detto. Esso si estende nel modo enunciato osservando semplicemente che la conclusione non può mutare per un semplice cambiamento di scala* (*come quello consistente nell'alterare la scala verticale del disegno col fatto di prendere* OA *più piccolo – oppure più grande – di* OB).

È questo il risultato cui ci siamo riferiti (*nel n.* 7) *per dire che il massimo guadagno, nell'esempio ivi esaminato* (*smercio decrescente proporzionalmente al crescere del prezzo, ossia con andamento* lineare, *rettilineo*), *era quello corrispondente ad un guadagno unitario metà di quello massimo* (*dove smercio* = 0) *ed uno smercio metà di quello massimo* (*dove guadagno* = 0). *Il guadagno è infatti prodotto di due fattori corrispondenti a base ed altezza del rettangolo della fig.* 30, *con vertice obbligato ad una retta come* AB. *Vi torneremo nel n.* 11.

Quando l'alfabeto non basta

Le lettere dell'alfabeto servono così bene che i matematici non sanno più come trovarne abbastanza per i loro bisogni illimitati.

Conviene infatti, per agevolare la comprensione, seguire le consuetudini (*ad es., come detto, usare di preferenza* x (*e* y, z, ...) *per le variabili, oltre che riservare "pigreco" per* π = 3,141592..., (*rapporto della circonferenza al diametro, ecc.*)); *si ricorre all'alfabeto greco, talvolta ad altri; i caratteri tipografici consentono altre distinzioni* (*oltre a minuscolo e maiuscolo, corsivo o "grassetto" – cfr. nel n.* 14, *per "vettori" – od altri tipi*). *Ma non basta mai, ed occorre ricorrere ad altri espedienti. Uno dei principali, che è bene conoscere subito, consiste nell'usare una stessa lettera accompagnata da un* indice (*un numero scritto in piccolo e in basso a destra*), *p. es.* x_1 x_2, x_3, *ecc., o* A_3, w_{12}, S_2, *e così via, ottenendo tanti nuovi segni* (*come se fossero nuove e diverse lettere*). *A loro volta gli indici saranno a volte indicati con lettere* (*p. es. scrivendo* x_h, $\mathrm{h} = 1, 2, 3$, *anziché* x_1, x_2, x_3 *per disteso, ciò che, in casi più complicati, è un'economia*), *o ve ne saranno più di uno, e magari in altre posizioni* (*anche al posto dell'esponente, con opportune avvertenze per non fare confusione*) *ecc. Ci limitiamo qui a un esempio.*

Abbiamo già notato (nel n. 2) la comodità di avere la formula $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ che, sostituendo a n un numero qualsiasi, p. es. 12797, dà immediatamente la somma dei numeri da 1 a 12797. Per esprimere in modo analogo la stessa regola riferendosi a qualunque progressione aritmetica, conviene indicarne i successivi termini con $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. La somma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ è allora $\frac{1}{2}\, n\, (a_1 + a_n)$; in particolare (è cosa abbastanza utile ad aver presente) *la somma dei primi n numeri dispari è* n^2.

Infatti $1 + 3 + 5 + \dots + (2\,n - 1) = \frac{1}{2}\; n\,(1 + 2\,n - 1) = n^2$, in particolare

$$1 + 3 = 4,\ 4 + 5 = 9,\ 9 + 7 = 16,\ 16 + 9 = 25, \text{ ecc.};$$

d'altronde ciò scende anche dal fatto che $(n + 1)^2 = n^2 + (2\,n + 1)$ (EP, 9).

Il teorema di Pitagora

La formula del quadrato del binomio (v. n. 3) – qui ora reincontrata nel caso particolare di $(n + 1)^2$ – rappresentandola geometricamente in un modo diverso da quello visto ivi (*fig.* 6), permette poi subito di dimostrare il celebre *teorema di Pitagora* (v. *fig.* 31):

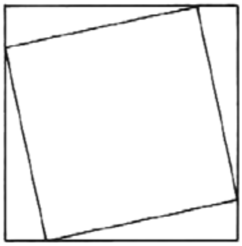


Figura 31

la figura mostra un quadrato di lati ($a + b$) diviso *in* 4 *triangoli rettangoli* (di cui a e b sono i lati minori, o *cateti*; il lato maggiore, o *ipotenusa*, lo indicheremo con c), *ed un quadrato di lato c.* Ogni triangolo ha area = ½ ab, e quindi insieme abbiamo

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\,(\tfrac{1}{2}\,a\,b) = a^2 + b^2 + 2\,ab - 2\,ab = a^2 + b^2.$$

Ciò risulta intuitivo confrontando semplicemente le *figg.* 6 *e* 31 disegnate con gli stessi a e b; tuttavia la facilità con cui la manipolazione di formule letterali porta a conclusioni generali e ad esprimerle con formule brevi ed espressive (come $c^2 = a^2 + b^2$) avrà dato un altro piccolo saggio dell'utilità dei simbolismi anche e soprattutto per chi vuole farne uso ma non farsene schiavo.

Giova osservare che spesso un'espressione è valida per diverse interpretazioni: *ad es. le lettere che vi figurano potrebbero rappresentare non* numeri (*e* grandezze) *nel senso ordinario*, *ma qualunque altra cosa per cui un simbolismo riesca utile*: *p. es.* vettori (*cose – come le traslazioni* (*cfr. nn.* 13 *e* 14), *le forze*, *le velocità – rappresentabili con frecce*), operazioni (*p. es. geometriche*, *come rotazioni*, *simmetrie*, *ecc.*), insiemi (*o* classi, *p. es. di punti*, *come «i punti di questa pagina interni a un carattere a stampa»*, *cioè contenuti nelle parti bianche interne ad una* a, b, d, e, g, o, p, q, A, B, D, O, P, Q, 4, 6, 8, 9, 0, &, %), proposizioni (*affermazioni logiche*; *nella teoria delle probabilità*, eventi), *ecc. A volte teorie diverse portano allo stesso algoritmo*, *hanno la stessa* **struttura**; *c'è allora il vantaggio di poter «cogliere più piccioni con una fava»*, *studiando cioè più argomenti mediante un solo schema. Si può anche costruirsi*, in astratto, *lo schema per lo schema*, *senza studiare nessun argomento né curarsi se ne esistano cui si applichi* (*atteggiamento talvolta utile*, *per riflettere momentaneamente su qualche solo aspetto formale*, *isolandolo*, *ma che rischia di diventar sterile se vi si insiste programmaticamente*).

10. – Come fare infiniti passi in uno solo

Se si dà una dimostrazione in cui si parla di numeri o grandezze indicati genericamente con lettere (a, b, x, n, ...), è chiaro che essa dà, in sostanza, infinite conclusioni, pensando come tali tutti i singoli casi in cui alle lettere si diano dei valori particolari qualunque (che soddisfino le eventuali ipotesi premesse). Vediamo in particolare di riflettere su tale osservazione nel caso di affermazioni che riguardino un generico, ossia qualunque, numero intero (positivo) n.

Ecco un classico esempio: il Teorema secondo cui *Esistono infiniti numeri* **primi** (privi, cioè, di divisori), ossia, *Dato un numero qualunque* (e diciamolo n) *esistono numeri primi maggiori di esso* (cioè: si può trovare almeno un numero $p > n$, e primo).

Consideriamo infatti il prodotto di tutti gli interi da 1 ad n (che si dice "fattoriale di n", e si suole indicare con $n!$) e aumentiamolo di 1; tale numero,

$$m = n! + 1 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n) + 1,$$

si vede subito che, o è primo, o, se ha divisori (e quindi divisori primi), *essi sono tutti maggiori di* n (e quindi esiste almeno un $p > n$). Basta osservare che $n!$, per come è definito, è ovviamente divisibile per tutti i numeri $\leq n$, e perciò $n! + 1$ non lo è (ma dà sempre resto $= 1$).

Ma è utile soprattutto tener presente un procedimento di uso frequente e che può dare aiuto immediato anche in circostanze banali ma difficilmente rimediabili in altro modo (come ad es. se uno non ricorda esattamente una formula che gli serve). Si tratta del **ragionamento per induzione** (o per "induzione matematica completa") [16] che si può esprimere cosi: *Se si riesce a dimostrare che una certa proprietà* (dove c'entra un intero n),

a) *è vera per* $n = 1$;

b) *supposta vera per un certo* n *risulta vera anche per il successivo* ($n + 1$);

allora essa è vera sempre (per tutti gli infiniti $n = 1, 2, 3, ...$; infatti quel ragionamento non può mai arrestarsi).

[16] Non confondere col "ragionamento induttivo" che consiste semplicemente nel ritenere presumibilmente vero in generale ciò che è stato osservato su casi particolari.

La corda tagliata a pezzi

Un esempio banalissimo: è ovvio che un segmento (o, materialmente, un pezzo di corda, o sbarra, ecc.) tagliandolo in n punti viene diviso in $n + 1$ parti; eppure è frequente (per disattenzione, o perché a chi non ha mai riflettuto sulla questione sembra ovvia) la risposta che con n tagli i pezzi sono n. Pensando al *principio d'induzione* si può subito assicurarsi, in caso di dubbio, che la risposta esatta è $n + 1$, semplicemente pensando che ciò è vero per $n = 1$ (con *un* taglio si ottengono *due* pezzi, ed è $2 = 1 + 1$); infatti, poiché ad ogni nuovo taglio si ha un pezzo in più, la risposta o è sempre n, o sempre $n + 1$ (o magari $n + 2$, $n - 1$, insomma n più o meno un numero fisso, e basta quindi verificare su un solo caso particolare quale esso sia). Anche in casi più complessi una semplice verifica sul caso più semplice (in genere $n = 1$) basta, sotto ipotesi analoghe, a dare sicurezza della risposta per il caso generale.

Per dimostrare che la somma dei numeri da 1 ad n è $\frac{1}{2}\, n\, (n + 1)$ basta verificare che ciò vale per $n = 1$ (infatti $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$), e che, se la formula vale per un n, e si aggiunge $(n + 1)$, si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\, n\, (n+ 1) + (n+ 1) = (n+ 1)\, [\tfrac{1}{2}\, n + 1] = \tfrac{1}{2}\, (n + 1)\, (n + 2),$$

cosicché la stessa formula risulta valida anche per $n + 1$.

Si dirà che era più semplice la dimostrazione diretta, ed è vero; abbiamo indicato anche quest'altra per confronto, e come assaggio per analoga applicazione a un caso simile dove invece fornisce la via più semplice.

La piramide a gradini

È il caso della somma *dei quadrati* dei numeri da 1 ad n, la cui espressione (17) è:

$$\tfrac{1}{3} \cdot n\, (n + \tfrac{1}{2}\,)\, (n + 1)$$

(17) Ci limitiamo a indicare la formula e dimostrarla; per ricavarla occorrerebbero nozioni che non supponiamo note al lettore e che non si prestano a esser dette in breve. Accenniamo, come parziale informazione, che quelle nozioni permettono di affermare che la formula dev'essere del tipo $An^3 + Bn^2 + Cn + D$, dopo di che non è difficile trovare che $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = 0$, cosicché la formula risulta $\frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n$ (identica a quella indicata). Controllare che A, B, C, D devono avere i valori indicati, sarà un utile esercizio.

Per dimostrarlo, constatiamo come sopra che, per $n = 1$, essa è valida (infatti

$$^1/_3 \cdot 1 \cdot (1 + ½) \cdot 2 = {}^1/_3 \cdot {}^3/_2 \cdot 2 = 1),$$

e che, se lo è per un certo n, e si aggiunge $(n + 1)^2$, si ottiene

$$\tfrac{1}{3} \cdot n\big(n+\tfrac{1}{2}\big)(n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\big[\tfrac{1}{3} \cdot n\big(n+\tfrac{1}{2}\big) + (n+1)\big] =$$
$$\tfrac{1}{3}(n+1)\big[n^2 + \tfrac{1}{2}n + 3n + 3\big] = \tfrac{1}{3} \cdot (n+1)\big(n+\tfrac{3}{2}\big)(n+2),$$

cosicché è valida ancora per $n + 1$.

L'interpretazione come volume di una "piramide a gradini" è indicata come esercizio (EP, 10).

Il ragionamento per induzione trova continua applicazione in problemi di ogni grado di elevatezza e difficoltà e in tutti i campi della matematica. Anche cercando di dare ancora degli esempi, atti a illustrare un po' tale varietà (*per brevità e facilità senza entrare nella trattazione*), *essi non potranno che dare un'idea del tutto inadeguata della vastità e importanza delle applicazioni di tale ragionamento.*

Piano e spazio tagliati a pezzi

Due esempi geometrici, che estendono al piano e allo spazio il primo esempio sul taglio di una retta (o corda, ecc.). *In quante regioni viene diviso un piano tracciandovi comunque* 10 *rette*? ([18]) Sarebbe penoso stabilire direttamente la risposta per tale caso (e peggio per un numero maggiore, p. es. 100 o 7915); invece è facile giungervi per induzione stabilendo una formula valida per il caso di un qualunque numero n di rette. Si può vedere infatti che l'$(n + 1)$-esima retta crea $(n + 1)$ regioni in più, e che pertanto *n rette danno luogo a* $½\, n\, (n + 1) + 1$ *regioni* (ad es., per $n = 10$, sono 56). Il problema è il medesimo che per la somma dei numeri da 1 ad n, ma nella soluzione c'è un 1 in più perché per $n = 1$ abbiamo 2 regioni anziché una (e rimane sempre un'unità in più). Lo stesso problema si può porre per i piani nello

([18]) Non importa come le rette siano disposte, purché s'intersechino due a due e in punti distinti (escludendo cioè che una retta possa essere parallela a un'altra o passare per l'intersezione di due altre).

spazio: *n piani dividono lo spazio in* $^1/_6$ $(n^3 + 5n + 6)$ *regioni* (sono 2 per $n = 1$, e l'$(n + 1)$-esimo piano ne crea ½ · n $(n + 1) + 1$ in più (perché interviene qui il risultato del caso precedente: un piano è intersecato dagli altri lungo sue rette!). Pcr $n = 10$ si conclude ad es. che 10 piani dividono lo spazio in 176 pezzi.

Chi vince a scacchi?

Ed ecco un'applicazione nel campo dei giochi: *precisamente di quei giochi come gli scacchi*, *la dama*, *e giochetti vari* (*con oggetti da togliere da dati mucchi*) *sul tipo di quello detto "di Marienbad"*, *nei quali due giocatori hanno alternativamente diritto a scegliere una mossa fra quelle ammissibili* (*e nulla è lasciato al caso o è segreto*, *a differenza dei giochi di carte*, *dove le carte vengono distribuite a sorte e ciascuno sa quali carte ha in mano ma non quelle degli altri*). *Nel caso di quei "giochetti" è noto che ad ogni istante la situazione è "determinata"*, *nel senso che la vittoria è assicurata ad* uno dei due, *qualunque cosa faccia l'altro*, *ammeno ché non sia lui stesso a passarla all'altro commettendo un errore.*

Nel caso degli scacchi tutti avranno visto (*indipendentemente dal fatto che conoscano quel gioco*) *dei "problemi" in rubriche di riviste*, *dove*, *indicata una situazione di pezzi sulla scacchiera*, *si invita a trovare il modo in cui*, *come viene asserito*, *«il bianco muove e vince in* (*p. es.*) 3 *mosse». Ciò mostra che*, *almeno nel "finale" di partita*, *la situazione è "determinata" come nel caso di "Marienbad". Ebbene*: *il ragionamento per induzione permette di dimostrare che così è sempre*, *fin dall'inizio del gioco. Per semplicità supponiamo che*, *con qualche convenzione*, *sia escluso il risultato pari o il prolungamento del gioco oltre un certo numero massimo di mosse. Allora il gioco è certamente "determinato" all'ultima mossa*: *ma allora lo è già anche alla penultima perché*, *fra le mosse che uno può fare*, *o ce n'è almeno una che lo porta in una delle situazioni "determinate" a suo favore e allora la situazione presente lo è pure*; *altrimenti viceversa. E così*, *di passo in passo*, *risalendo dalla fine verso l'inizio*, *la conclusione si trasporta invariata. Qualunque situazione della scacchiera*, *di per sé*, *darebbe quindi luogo a un problema del tipo «il bianco muove e vince in 143 mosse» o «può impedire al nero di vincere in meno di* 219 *mosse»* (*ecc.*, *in pratica anche con risultato pari*); *la differenza tra questo caso e quello dei "problemi" usuali è solo che qui*, *per esplorare tutti i possibili sviluppi futuri del gioco e poter trarre la conclusione, occorrerebbero tempo e lavoro immensi, impossibili anche con macchine elettroniche.*

Il gioco degli scacchi è quindi un gioco che persone infinitamente intelligenti (capaci cioè di vedere fino in fondo tutte le possibili conseguenze di una qualunque strategia contrapposta a qualsivoglia strategia dell'avversario), troverebbero privo d'interesse perché deciso in partenza. Se è interessante è perché **l'intelligenza dei buoni giocatori è grande ma non** *così* **assoluta** *da impedire che entrambi, essendo a turno "vincitori designati" senza saperlo, si regalino a vicenda di tanto in tanto la vittoria commettendo uno sbaglio*; **vincitore è colui che sbaglia per penultimo!**

11. – Come sfruttare una visione dinamica

La visione dinamica permette, per così dire, di "ultravedere"! Niente paura per questo parolone, "ultravedere!", *introdotto qui a titolo un po' scherzoso*: *si tratta, sì, di cosa importante e seria, ma – anche se in un certo senso si collega a qualche concetto teorico – rimane sempre e soltanto un aspetto della solita esigenza, di saper vedere in forma intuitiva appropriata.*

Si tratta, in fondo, di un concetto economico (*se non si ha paura dei preconcetti contro tale termine*): *economico nel senso del massimo rendimento in termini di efficacia del pensiero, di massimo risultato col minimo sforzo. Non secondo la mentalità ispirata alla pigrizia e che risulta quasi sempre miope e sbagliata, ma secondo quella di chi è sospinto dall'anelito a conoscere ed agire e tanto più prende slancio e fiducia man mano che riesce, progredendo, a dominare con maggior facilità e immediatezza panorami più vasti e più nitidi.*

Il punto che dobbiamo ora imprimerci bene in testa è proprio che, anche e forse più che mai nella matematica, il modo più semplice e appropriato per rispondere a un problema particolare consiste nel risolvere un problema molto (o moltissimo) più generale, E come esempio possiamo citare quello già significativo del precedente n. 10, dove, anziché contare in quanti pezzi un piano è diviso da 10 rette (o lo spazio da 10 piani) conveniva risolvere il problema per il caso di *un numero qualunque*, n, di rette (o piani), e quindi fare il calcoletto per il caso particolare di $n = 10$.

L’aspetto più saliente e istruttivo consiste però non tanto nella maggiore generalità in e per sé, quanto piuttosto nel fatto che essa si consegue vedendo il problema sotto una forma che si può dire **dinamica** (quale cercano di dare anche dei semplici ausili didattici, come figure deformabili) (EP, 11).

Si trattava infatti di sostituire, alla visione **statica** del problema che ci mostra il piano con sopra tracciate 10 rette che lo suddividono, la visione **dinamica** del **processo** consistente nel tracciare su di un piano una prima retta che lo divide in 2 semipiani, e poi una seconda che lo divide in 4 regioni angolari, e poi una terza (7 pezzi: un triangolo e le 6 parti in cui il resto del piano è diviso dai prolungamenti dei lati), e ..., e poi, vedendo che è impossibile seguire tutti i diversi modi in cui ulteriori rette possono dar luogo a pezzi di varia forma, ma sincerandosi che ciò sarebbe anche inutile dato che il numero di ulteriori suddivisioni non dipende da ciò, ci si accorgerà che è possibile esaminare semplicemente il processo secondo cui cresce il numero dei pezzi. In fondo si tratta ancora del “saper fare un passo per volta”, ma la visione dinamica, di un **processo** in cui la visione del problema particolare s’inserisce, è quell’elemento in più che caratterizza il passaggio decisivo: il passaggio a quella che, per intenderci, diciamo “ultravisione”.

Parliamo di “funzioni”!

Questa ultravisione, o visione dinamica, consiste, in termini tecnici, nel pensare in termine di **funzioni,** con particolare utilità nel pensare a funzioni *del tempo* (p. es., nel caso precedente, pensando che le rette vengono tracciate in istanti successivi), e nel visualizzarne l’andamento mediante il *diagramma* nella forma più espressiva (diagramma cartesiano, in cui – partendo da un punto O, o *origine* – si indicano sull’asse orizzontale i valori di x, o *ascisse*, e sull’asse verticale quelli di y, o *ordinate*).

Nel precedente esempio il numero di pezzi, $p_n = ½\ n\,(n + 1) + 1$, era una funzione del numero (*intero*) delle rette divisorie. Il caso cui più ancora intendiamo riferirci è però quello di una funzione, $y = f(x)$, in cui la variabile x può assumere ogni valore reale (salvo eventuali limitazioni imposte caso per caso), ed essere (o essere interpretata come) il *tempo*, o una *lunghezza*, o una *temperatura*, o un *prezzo*, o altra grandezza di qualsivoglia specie. Altrettanto dicasi per la y. Si veda nella *fig.* 32 un diagramma che può rappresentare l'andamento della temperatura y in funzione del tempo x (p. es., oscillazioni diurne, o oscillazione annua delle temperature medie).

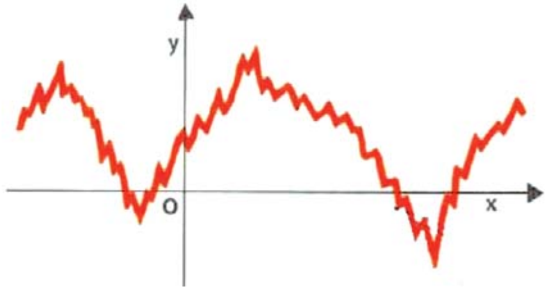


Figura 32

Anche nel caso *discreto* (variabile n intera o simili) si poteva usare la notazione $p_n = f(n)$ (o $p(n)$): il concetto di *funzione* è del tutto generale e non fa distinzione circa la natura delle variabili (potrebbero ad es. – come vedremo in esempi dei nn. 13 e 14 – essere punti). È solo per comodità e consuetudine che, quand'è intera, la variabile si indica di preferenza come *indice* (*in basso*), p_n anziché $p(n)$ (come notato nel n. 9 con l'esempio della progressione a_n).

Si possono poi considerare anche funzioni di due (o più) variabili; abbiamo già scritto l'area del triangolo in funzione di x = base e y = altezza, come $A(x, y) = \frac{1}{2} x\, y$ (n. 9), ma qui parleremo esplicitamente solo del caso più semplice (funzioni di una variabile).

Ancora sul "massimo guadagno"

Riprendiamo l'esempio relativo al massimo guadagno (di cui al n. 7 e poi al n. 9) e vediamo di esprimerlo nel nuovo modo; in questo caso sarebbe anzi più giusto dire semplicemente "nel nuovo linguaggio" perché nulla va sostanzialmente mutato a quanto illustrato dalla *fig.* 30 e spiegazioni relative. Faremo un utile esercizio di trascrizione, che darà luogo poi a qualche osservazione e a dei complementi.

La grandezza che pensiamo di poter fissare a nostro arbitrio è il prezzo, ossia (dato che nel problema interessa solo questo) l'eccedenza del prezzo sul costo (che è fisso, e che non consideriamo), ossia il guadagno unitario.

Perciò indichiamo tale guadagno unitario con x, segno consueto per la variabile che si considera "indipendente" (e conviene seguire le consuetudini, che rendono più facile intendersi, pur sapendo che sono di per sé irrilevanti). La quantità venduta si indicherà con y; poiché abbiamo supposto che aumentando x la y decresca in misura proporzionale, detti x_0 e y_0 i valori di partenza e $-a$ la diminuzione di y per un aumento unitario di x, risulterà:

$$y = y_0 + a\,(x - x_0) = a\,x + b \qquad (\text{con } b = y_0 - a\,x_0).$$

I dati erano: $x_0 = 2000$ (Lire), $y_0 = 300$ (unità di prodotto), $-\,a = $ (1 unità di prodotto)/(5 Lire) $= {}^1\!/_5$ (unità/Lire); pertanto ([19]):

$$y = 300 - (x - 2000)/5 = 700 - {}^x\!/_5 = 700 - 0{,}2\,x = 0{,}2\,(3500 - x).$$

Per $x = 0$ risulta $y = 700$; risulta $y = 0$ per $x = 700 \cdot 5 = 3500$; ciò è conforme ai calcoli diretti (del n. 7). Ed è utile rendersi conto che i calcoli sono, naturalmente, gli stessi, in forma più comoda se uno è allenato.

Era ovvio fin dalla prima diretta interpretazione geometrica che il diagramma era una **retta**; possiamo notare ora che ciò avviene sempre (e soltanto) quando la funzione è **lineare**, ossia del tipo

$$y = f(x) = a\,x + b.$$

Infatti una funzione **lineare omogenea** (cioè **proporzionale** alla x), $y = a\,x$, rappresenta una retta passante per il punto $x = 0$, $y = 0$ (*origine* degli assi; asse x orizzontale e asse y verticale); aggiungendo una *costante*, b, non si fa che alzare la retta parallelamente; in particolare $y = b$ (diagramma della funzione costante, "funzione" per modo di dire, ma che va considerata al pari di qualunque altra) è una retta orizzontale.

([19]) Rammentiamo come si dovrebbe sempre, a rigore, indicare le unità di misura (cfr. nota 2 a pag. 25). Qui si vede come eseguendo effettivamente ogni operazione *anche sulle unità di misura* si ottenga automaticamente il risultato *completo*, come grandezza (in questo caso in "*unità/Lire*"; in altri (cm) $\times$ (cm) =(cm^2), o (cm)/(sec) = ($^{\mathrm{cm}}\!/_{\mathrm{sec}}$), ecc.) e non solo come puro *numero* di cui non si sa cosa significhi se non si rimedia con un esame a parte all'incompletezza dello svolgimento.

Purtroppo i matematici – per i quali effettivamente non interessa se delle lunghezze (ad es. 3, 4, 5: lati di un triangolo) siano cm o km o anni-luce – trascurano in genere di sottolineare anche l'essenziale importanza *concettuale* della questione.

Coniche dovunque!

La ricerca del massimo (oltre che con la considerazione precedente, del rettangolo xy) si può vedere anche come ricerca del massimo della funzione $x\,y$ che dà il guadagno totale:

$$x\,y = x\,f(x) = x\,(700 - {}^{x}/_{5}) = x\,(3500 - x)/5 = -\,x^2/5 + 700\,x =$$
$$= {}^{1}/_{5}\,[1750^2 - (x - 1750)^2]$$

Il diagramma di tale funzione è una **parabola** (ad asse verticale), come lo è per ogni funzione che sia un “**polinomio di** 2° **grado**” (cioè un’espressione della forma $a\,x^2 + b\,x + c$, con a, b, c costanti); ciò risulta dalla penultima forma; la terzultima mostra che la funzione si annulla (ossia, ha due **zeri**, o **radici**) in $x = 0$ e $x = 3500$, il che (per la simmetria) dice già che l’asse di simmetria, e quindi il vertice (il massimo, o in altri casi minimo) si ha per

$$x = (0 + 3500)/2 = 1750;$$

l’ultima espressione lo conferma e dà anche il valore del massimo, $1750^2/5$ (assunto quando x=1750, e **cade il termine quadrato**).

Questa digressione, come altre su molti possibili modi di interpretare geometricamente il medesimo problema, è utile (benché non necessaria) per farlo vedere sotto visuali diverse. Ma serviva soprattutto per farci incontrare la **parabola** (che, con l’**ellisse** e l’**iperbole**, già viste, completa l’elenco delle **coniche**, ossia curve ottenibili come **sezioni piane di un cono rotondo**; cfr. *fig.* 33) (EP, 12).

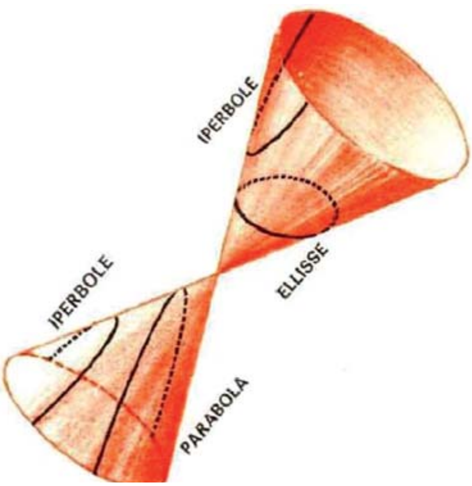


Figura 33

La parabola ad asse verticale rappresenta molti fenomeni importanti (p. es. caduta di un grave); le "equazioni di 2° grado" (argomento che si studia al liceo) consistono nel trovare i punti (due, uno o nessuno; cfr. *fig.* 34) in cui una parabola taglia l'asse x (*zeri*, o *radici*), e *le diverse forme scritte per il nostro esempio basterebbero già* (*se non fosse fuori luogo insistere su ciò*) *a indicare come si trova e cosa significa la formula risolutiva* (EP, 13, 14).

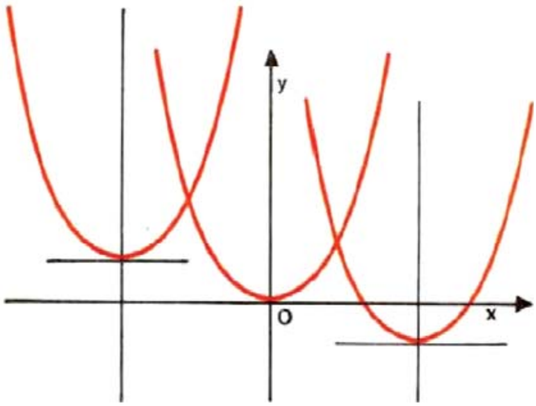


Figura 34

Anche l'iperbole merita di essere menzionata come diagramma di una funzione semplice e importante:

$$y = f(x) = {}^{1}/_{x}$$

(nella posizione indicata nella *fig.* 35); tutti i rettangoli di area $xy = 1$ appoggiati agli assi con un vertice in O hanno il vertice opposto su tale iperbole (fatto che la prof. Castelnuovo fa opportunamente apparire sperimentalmente collocando in tal modo molti rettangoli di area uguale e forma diversa ritagliati dai singoli alunni). Secondo il modo di dire più comune, è questo il diagramma di *una grandezza che varia in modo* **inversamente proporzionale** *ad un'altra* (p. es. il volume di un gas al variare della pressione, l'intensità di una corrente elettrica al variare della resistenza, ecc.); nel caso di *proporzionalità diretta* (come detto poco sopra, di sfuggita) il diagramma è, naturalmente, una retta passante per l'origine O.

Alcune osservazioni. Confrontando quanto detto per i rettangoli con vertice su una retta (*esempio sul massimo guadagno*) *e sull'iperbole* (*qui*), *risulta* (*provarcisi per esercizio!*) (EP, 15) *che*, *in ogni suo punto* (x, y), *l'iperbole* $y = {}^1/_x$ è *tangente alla retta che taglia gli assi nel punto di ascissa doppia* ($2x$ *sull'asse* x) *e ordinata doppia* ($2y$ *sull'asse* y), *come mostra la fig.* 36; *la pendenza della tangente è pertanto la stessa della congiungente del punto dato con l'origine* O (*con segno invertito*). *La stessa proprietà vale per qualunque curva nel punto dove* xy *è massimo* (*e perciò per la validità della conclusione sul "massimo guadagno" bastava che la retta fosse non il diagramma ma la tangente*) (EP, 16).

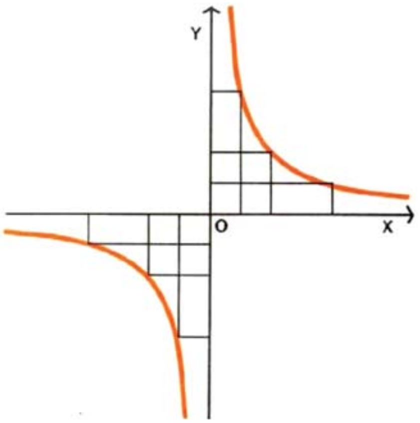


Figura 35

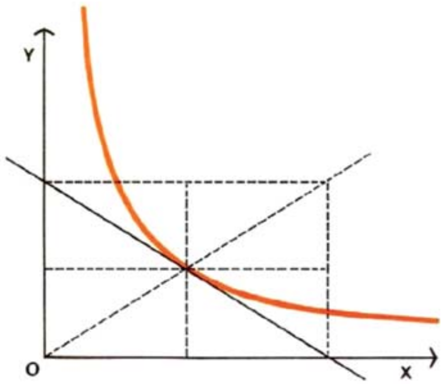


Figura 36

Anche per le scorte di magazzino

In qualche applicazione interessante si presenta una combinazione di questi due casi: ad es., al variare del livello medio delle scorte (di merce in magazzino, alto o basso a seconda che si fanno grossi acquisti per periodi lunghi oppure acquisti piccoli in istanti ravvicinati), alcuni fattori di costo crescono in proporzione diretta ed altri in proporzione inversa a tale livello. Il diagramma del costo complessivo (del tipo $y = ax + {}^c/_x$) è ancora un'iperbole, ma nella posizione indicata in *fig.* 37 (curva in alto).

E la proprietà detta sopra permette di concludere qui che il costo minimo si ha nel punto in cui le due componenti del costo sono uguali (nella *fig.* 34, $ax = \overline{QR} = \overline{RP} = {}^c/_x$); quindi

$$ax = {}^c/_x\,, \qquad ax^2 = c, \qquad x^2 = {}^c/_a, \qquad x = \sqrt{{}^c/_a}$$

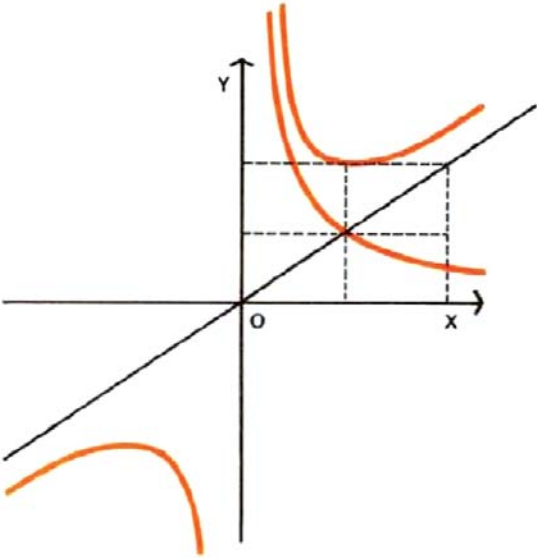


Figura 37

(ed è questa formula che indica la soluzione ottima per il problema accennato; non rimarrebbe che ad esaminare il significato delle costanti) ([20]).

È chiaro, pur non potendo moltiplicare le esemplificazioni, che considerazioni del genere si possono fare su funzioni espresse da formule comunque complicate, rispondenti ai più svariati problemi. Ma è bene avvertire che *il concetto di funzione è del tutto generale*: ogni diagramma (come quello della temperatura, in *fig.* 32), o scarabocchio tracciato a mano, o dato da una regola anche tanto irregolare da non poterlo neppur disegnare, dà luogo a una *funzione*: basta che ad ogni valore di x (o almeno per tutti quelli ove interessa) risulti comunque associato un corrispondente valore $f(x)$.

Insomma: **nessuna proprietà di "regolarità"** in un qualsiasi senso **è richiesta per poter parlare di funzione**; naturalmente proprietà del genere interessano per distinguere diversi casi (p. es. funzioni *continue*, *analitiche*, ecc., nozioni su cui non è il caso qui di soffermarsi).

([20]) Per dettagli qui fuori luogo cfr. p. es. (NB, 6, p. 220). Ecco un nuovo esempio di ottimizzazione economica (secondo i cenni del n. 7): l'ottimo si ha infatti, anche qui, nel punto dove si uguagliano le variazioni *marginali* (un piccolo spostamento farebbe aumentare uno degli elementi del costo di quanto fa diminuire l'altro: pendenze uguali ed opposte).

12. – Come sfruttare una visione globale

C'è un problema molto modesto – lo ricordate? – che è rimasto in sospeso fin dal n. 5: è quello illustrato dalla *fig.* 11, ed anzi soltanto dal triangolo formato dei tre triangolini I, II e III. In sostanza, si tratta semplicemente di questo: *dato un triangolo, dividerlo in tre triangoli di area assegnata mediante segmenti uscenti dai tre vertici e concorrenti in un punto* (*interno*) *P*. Supponiamo ad es., riferendoci alla *fig.* 38, che, assumendo area (ABC) = 1, si voglia determinare P in modo che area (ABP) = $^3/_{12}$, area (BCP) = $^7/_{12}$, area (CAP) = $^2/_{12}$. La prima condizione richiede che l'altezza di ABP sia $^3/_{12}$ (= $^1/_4$) di quella di ABC (essendo le basi identiche), ossia che P si trovi sulla retta c; analogamente le altre condizioni impongono a P di trovarsi sulla retta a e sulla b, ed esso è per tal modo completamente determinato (EP, 17).

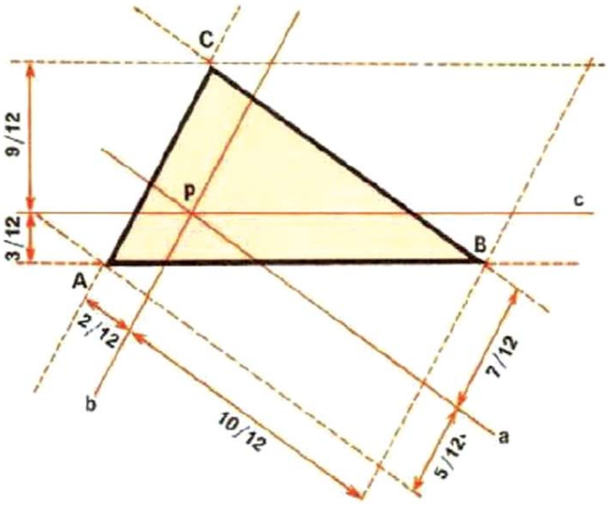


Figura 38

Parliamo di "luoghi"!

Cosa c'è mai di straordinario in così banale ragionamento? C'è che il concetto pista e ribadito di «affrontare le questioni una per volta» qui va inteso e applicato in un modo più sofisticato. Mentre nelle figg. 9 *e* 10 *si poteva costruire* un triangolo dopo l'altro (*risolvendo cioè una successione di problemi, in ciascuno usando una sola delle condizioni*), *qui i tre triangoli si ottengono* simultaneamente *trovando* P, *per il che si devono* *usare* simultaneamente *tutte le condizioni. Ogni condizione però, se non basta a dare P, dice però qualcosa riguardo a P: dice che deve trovarsi su una certa retta* (*la* c, *ecc.*).

Questa retta (*o in altri problemi una curva, una superficie, un qualunque insieme di punti*) *si dice* **il luogo** *dei punti soddisfacenti a quella condizione. Date più condizioni*, il luogo dei punti che le soddisfano tutte è l'**intersezione** dei luoghi relativi a ogni singola condizione.

Volendo parlare di *equazioni*, si direbbe qui che abbiamo a che fare con un *sistema di equazioni* che richiedono di essere risolte *simultaneamente* (anziché separatamente, una dopo l'altra, come nei casi più semplici incontrati in precedenza).

Le strade, con traffico diverso

Ecco un altro esempio un po' meno banale (di nuovo un problema già visto: strada più breve collegante A, B, C; cfr. n. 7). Per le ragioni ivi spiegate, si tratta come sopra di trovare entro ABC un punto P, però con le condizioni che da esso si veda ogni lato (AB, CB, CA) sotto uno stesso angolo (120°) (v. *fig.* 39). Perché l'angolo APB sia di 120° occorre ([21]) che P si trovi sull'arco c di circonferenza da A a B col centro in C^* (tale che ABC^*

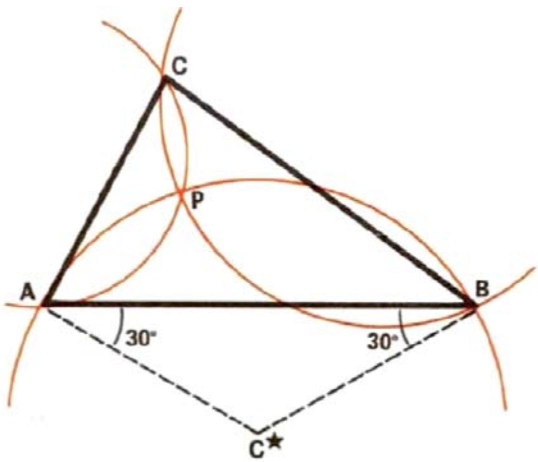


Figura 39

([21]) Il perché risiede in un teorema secondo cui l'angolo APB è costante se P è su un arco di cerchio di estremi in A e B (in forza del fatto che "l'angolo al centro è doppio di quello alla periferia") (EP, 18, 19).

abbia in A e B angoli di 30° (e di 120° in C^*). Così per gli altri due lati. E pertanto P è il punto comune ai tre archi di cerchio.

La stessa costruzione vale per la generalizzazione del problema (già preannunciata nel n. 5), in cui si dia un diverso "peso" alla lunghezza dei tre tronchi. Può darsi ad es. (se si tratta del punto ove costruire una scuola) che le località A, B, C abbiano un diverso numero di scolari, per cui la somma delle distanze da percorrere sia $a\overline{AP} + b\overline{BP} + c\overline{CP}$ (a, b, c numero, o percentuale, degli scolari di A, B, C). Se invece si tratta di render minimo il costo del traffico fra le tre località, sapendo che le intensità del traffico sono r tra A e B, s tra B e C, e t tra C ed A, dovremo ricavare le intensità sui tre tronchi (da P ad A, a B, a C) sommando: $a = r + t$, $b = r + s$, $c = s + t$ ([22]). In entrambi i casi si dovrà costruire (cfr. *fig.* 40) il triangolo di lati a, b, c per trovare quali angoli α, β, γ devono formare tra loro tre forze di intensità a, b, c per potersi fare equilibrio. Poi la costruzione è la stessa di *fig.* 38, salvo che gli archi che sottendono i tre lati a, b, c sono i luoghi dei punti P da cui a è visto sotto un angolo α, ecc., anziché $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

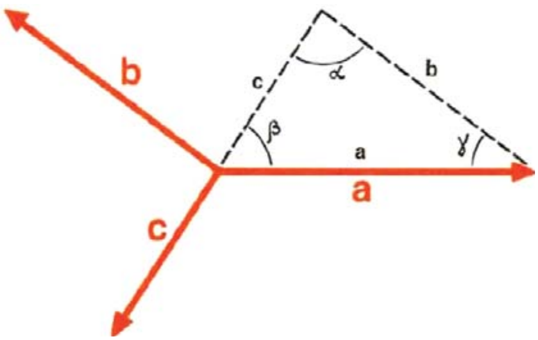


Figura 40

Si sarà notato che per determinare P *bastano* due *circonferenze* (*e nel caso precedente* due *rette*). *E infatti*, *in tutti e due i casi*, *delle tre condizioni ciascuna era conseguenza delle altre due* (*se due dei triangoli hanno l'area dovuta*, *così è del terzo*; *se due degli angoli sono di* 120°, *così è del terzo*; *e*, *in generale*, *se due sono* α *e* β, *il terzo è* $\gamma = 360° - \alpha - \beta$. *In genere*, *per determinare un punto*, *nel* piano *bastano* due linee (*nello* spazio, tre superfici) (EP, 20).

([22]) Anziché a, b, c (che tengono conto solo del costo del traffico) si dovrebbe in genere considerare $a' = a + k$, $b' = b + k$, $c' = c + k$ per tener conto anche del costo di costruzione.

Non è detto però che si determini così necessariamente un punto e uno solo: *potremmo trovarne più di uno* (*problemi con più soluzioni*) *o nessuno* (*problemi senza soluzioni*). *Nell'es. di fig.* 38 *si ha sempre una soluzione* (*unica*); *in quello di fig.* 39 (*come già detto nel n.* 5) *non c'è soluzione se ABC ha un angolo di almeno* 120° (*allora la soluzione del problema della strada è diversa*). *Sorvoliamo su altri cenni che porterebbero troppo lontano*; *notiamo solo ancora che talvolta la soluzione che si trova* (*o le soluzioni*, *o alcune di esse*) *vanno scartate* ([23]).

È sempre istruttivo vedere un problema nella sua globalità, *raffigurandosi i luoghi dei punti dove questa o quella delle diverse condizioni è soddisfatta*, *e rendersi conto di come questa formulazione sia del tutto generale* (*non legata al fatto che detti "luoghi" siano rette o cerchi o altre curve notevoli*). *Se ad es. si volessero trovare i punti a distanza di esattamente* 1 *km tanto dal continente che da un'isola* (*nel braccio di mare che le divide*, *supposto non più largo di* 2 *km nel punto più stretto*), *converrebbe pensare alle linee di ugual distanza dalla costa* (*quali spesso vediamo disegnate sulle carte geografiche per farne meglio risaltare l'andamento*); *in fig.* 41 *sono indicate quelle di distanza* 1 *km*, *che sono* i *luoghi di cui interessano le intersezioni* (*in fig.* 41, *i punti* A, B, C, D).

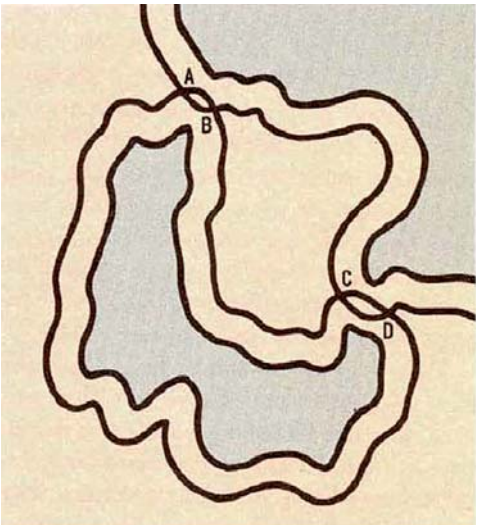


Figura 41

([23]) Nel problema delle scorte (n. 11, *fig.* 35) si era trovata la soluzione $x = \sqrt{{}^{c}/_{a}}$; da $x^2 = {}^{c}/_{a}$ avremmo potuto però ricavare due soluzioni, $x = \pm\sqrt{{}^{c}/_{a}}$, e, se non avessimo tacitamente tenuto

Costruire il triangolo che ...

Per le poche ulteriori osservazioni basterà limitarci a qualche problema di costruzione di un triangolo data la base (segmento AB) e condizioni che determinano il terzo vertice P; indicheremo al solito i lati con $a = \overline{BP}$, $b = \overline{AP}$, $c = \overline{AB}$ (dove c è supposto dato). Supponiamo ora che siano date la somma e la differenza dei due lati incogniti: $a + b = s$, $a - b = d$; il luogo dei punti soddisfacenti la prima condizione (o equazione) sappiamo che è *un'ellisse*, e per la seconda è *un'iperbole*, sempre di fuochi nei punti A e B. La *fig.* 42, che mostra una rete formata di parecchie di tali ellissi ed iperboli (di fuochi in A e B), permette di rendersi conto visivamente di come si sposta il punto P (ossia di come si altera il triangolo) modificando, nel problema, il valore assegnato per la somma s, o per la differenza d, od entrambi.

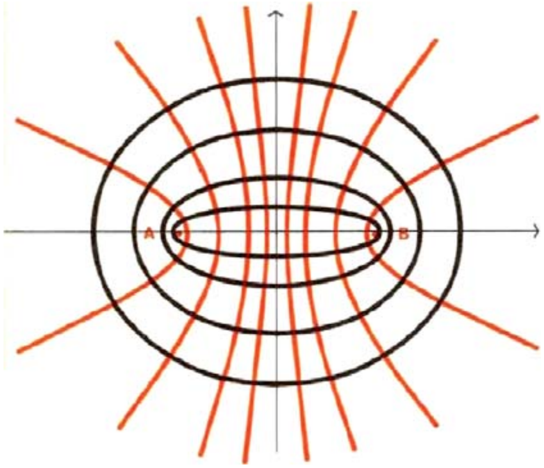


Figura 42

conto che il problema ha senso soltanto per x non negative, avremmo dovuto poi sopprimere la radice negativa rilevando esplicitamente che non risponde al problema. Quella radice non è però priva di significato nella rappresentazione geometrica: se, nella fig. 34, avessimo tracciato anche il secondo ramo dell'iperbole (simmetrico rispetto ad O), essa ce ne avrebbe indicato il punto di *massimo.*

Si noti: questa curva ha soltanto un massimo ed un minimo, ed **il minimo è maggiore del massimo** (costituisce anzi l'esempio classico di tale apparente anomalia: apparente perché si tratta di massimi e minimi *relativi*, o *locali*, non *assoluti*, cioè con riferimento a tutto il campo).

La considerazione di questi luoghi (*ellisse ed iperbole*) *corrisponde alla considerazione delle due equazioni*, a + b = s *e* a – b = d, *così come sono date. È chiaro però che da esse si può ricavare senz'altro* a = ½ (s + d), b = ½ (s – d), *cosicché ci si riconduce al problema elementarissimo di costruzione del triangolo dati i lati. Ciò valga a indicare, molto poveramente, un fatto essenziale per trattare di casi più complessi: come cioè, lavorando sulle equazioni, si debba cercare e si possa spesso riuscire a renderne più semplice la formulazione e magari a risolverlo matematicamente in modo formale.*

Dare $a = \overline{BP}$ = distanza da B, significa assegnare come luogo per P il cerchio di centro in B e raggio a (e così per b); dando a e b, P viene determinato come intersezione di due cerchi (e di intersezioni ve n'è *due*, P' e P'', simmetriche rispetto ad AB, se $a + b > c > |a - b|$ ([24]), *nessuna* se una delle due disuguaglianze s'inverte, *una sola*, sulla retta per AB, se in una vale il segno “=”, chè allora il triangolo degenera in segmento). Ecco un ovvio esempio di problema che può ammettere una o più soluzioni o nessuna (secondo la scelta dei dati: qui a, b, c).

Si noti che quanto ora detto vale sottintendendo di operare *nel piano*; nello spazio i due luoghi sarebbero non più i cerchi, bensì le *sfere*, di centro B e raggio a e di centro A e raggio b (e il luogo dei P soddisfacenti entrambe le condizioni sarebbe il cerchio loro intersezione: quello che verrebbe descritto da P' (e P''; beninteso, sempreché essi esistano) facendo ruotare il triangolo ABP' attorno alla base AB, o, se si preferisce, tutto il piano attorno alla retta AB) (EP, 21).

L'ultimo esempio, benché meno ovvio e quindi più significativo, risulterà, dopo semplici considerazioni, altrettanto facile. Quale sarà il luogo di P quando sia assegnata la lunghezza m della *mediana* di ABP uscente dal vertice B (ossia, dato $\overline{BM} = m$, con M punto medio del segmento AP)? Evidentemente (v. *fig.* 43) il luogo di M è il cerchio di centro in B e raggio m; poiché P è sul prolungamento di AM a distanza doppia da A, il luogo di P sarà un cerchio di raggio e distanza

([24]) Con le sbarrette verticali si indica il *valore assoluto* del numero racchiusovi, cioè il numero stesso se è già positivo ed il numero cambiato di segno (reso positivo) se è negativo:

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0, \ |x| = -x \text{ se } x \leq 0.$$

da A raddoppiate (raggio $2m$, centro in B' sul prolungamento di AB con $\overline{BB'} = \overline{AB}$). Risulta così la costruzione per il caso in cui, oltre alla base AB, sia data tale mediana e un altro elemento (lato, angolo, ecc., oppure l'altra mediana per A, od anche quella per P, che è semplicemente la distanza di P dal punto medio di AB). (Cfr., EP, 11).

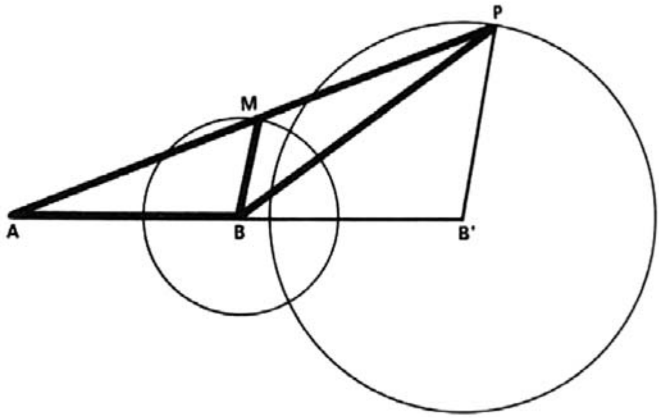


Figura 43

13. – Come sfruttare una visione deformabile

L'ultimo problema (quello riguardante la mediana, v. *fig.* 43) ci dà un semplice esempio di trasformazione (di una figura, o, se si preferisce pensare così, di tutto il piano; e lo stesso si può pensare nello spazio). Il cerchio grande si può pensare ottenuto ingrandendo del doppio il cerchio piccolo, mediante un pantografo fissato in A: in tal modo infatti un punto qualunque viene trasportato nel punto sulla stessa semiretta uscente da A, ma a distanza doppia. Oppure si può pensare che tutto il piano si dilati raddoppiandosi in lunghezza in ogni direzione, restando fisso A: il risultato è lo stesso. Comunque si preferisca immaginarla, tale trasformazione si chiama **omotetia** di centro A; il *coefficiente* nell'esempio è $p = 2$, ma potrebb'essere un numero qualunque: se è maggiore di 1 si ha un ingrandimento, se è minore di 1 (ma positivo) si ha un impicciolimento, se è $=1$ non si cambia nulla (e si dice che la trasformazione è l'**identità**); se è negativo, per $p = -1$ si ha la **simmetria rispetto ad A**, se è (in valore assoluto) minore o maggiore di 1 si ha inoltre impicciolimento o ingrandimento (precisamente: con $-p$ si ha lo stesso effetto di p con in più la simmetria rispetto ad A). Il caso $p = 0$ porterebbe tutti i punti del piano in A (caso **degenere**).

Aver presente la visione di cosa è un'omotetia poteva giovare, nell'es. di fig. 43, *a comprendere più speditamente dove fosse il nocciolo della questione, e in molti casi a render banale l'effettuare una costruzione altrimenti “impossibile”. Ad es.* (*da un tema di maturità scientifica*): «*costruire un triangolo data l'altezza e l'angolo opposto alla base, e sapendo che il piede* H *dell'altezza divide la base* AB *in parti di* $^1/_4$ *e* $^3/_4$ *di* AB»; *tenendo conto subito dell'altezza si va fuori strada, ma se invece di essa si fissa* (*ad arbitrio*) *la base* AB *si costruisce senza difficoltà un triangolo simile* (*anzi omotetico*) *a quello voluto, che si ottiene poi subito riducendo l'altezza alla misura stabilita* (EP, 22).

Si tratta di esempi semplici, ma il fatto che illustrano ha portata generale ed efficacissima. Riflettendo su alcune trasformazioni di cui potremo dare qualche cenno e sulla facilità di considerarne altre ci si potrà fare un'idea dell'utilità e fecondità di pensare a delle trasformazioni per conseguire una visione appropriatamente deformabile. *È infatti sommamente importante, in genere, vedere cosa cambia in un problema e cosa* non cambia – *o* è invariante – *per un dato tipo di trasformazioni.*

Sarebbe certo comodo, ad es., sapere se per dimostrare valida una certa proprietà *per tutti i triangoli* sia o no sufficiente dimostrarla valida (come spesso è molto più facile) per il solo caso del triangolo equilatero. Se abbiamo constatato che, nel triangolo equilatero, le altezze si incontrano in un punto tagliandosi ivi secondo il rapporto di $^1/_3$ e $^2/_3$, e lo stesso avviene per le mediane, ed anche per le bisettrici, che in quel caso coincidono con le altezze, cosa sarà valido sempre e cosa no? L'esempio è utile per introdurre la nozione – sotto vari aspetti la più importante di tutte – di trasformazione **affine:** tale è ogni trasformazione che muta rette in rette conservando il parallelismo (e, pensando i punti riferiti a una coppia di assi, la si può realizzare pensando di allungare o accorciare le distanze secondo uno degli assi, o secondo tutti e due indipendentemente, ed eventualmente rendendo gli assi obliqui ruotandoli comunque; sorvoliamo sull'eventuale cambiamento di “orientazione del piano”). Ebbene: è abbastanza naturale che la proprietà relativa alle *mediane* del triangolo rimanga invariante per le trasformazioni affini – sia, cioè, una *proprietà affine* – mentre quelle per le altezze e bisettrici no; nelle deformazioni descritte i rapporti fra lunghezze *di segmenti paralleli* non si alterano (e quindi le mediane si trasformano nelle mediane, ecc.), mentre quelli tra segmenti non paralleli possono alterarsi comunque, e quindi pure la nozione di ortogonalità, gli angoli, ecc. Invarianti sono invece i rapporti tra aree; sapendo ciò si sarebbe potuto, volendo, esporre la costruzione data nella *fig.* 38 riferendosi al solo caso del triangolo equilatero osservando che per affinità è valida sempre.

Ma in modo altrettanto immediato si rendono ovvie questioni che a prima vista non lo sono. Osservando ad es. che l'ellisse è un cerchio deformato in modo affine risulta evidente che l'area è π (*pigreco* = 3,14 ...) *per l'area del rettangolo formato sui semiassi maggiore e minore*; *che per dividerne l'area in, p. es., 12 settori uguali, basta trasportarvi in modo affine la suddivisione fatta sul cerchio* (v. *fig.* 44); *in particolare i diametri che dànno una suddivisione in* 4 *parti uguali corrispondono a quelli ortogonali sul cerchio e, come per quelli, ciascuno è parallelo alle tangenti alle estremità dell'altro* (*od anche*: *taglia a metà tutte le corde parallele all' altro*): *si dicono diametri* coniugati. (*La fig.* 44 *può raffigurare un orologio, visto di prospetto e visto obliquamente. Vi si vedono tre coppie di diametri coniugati*).

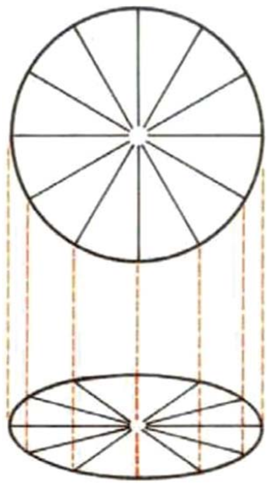


Figura 44

Una nozione molto interessante ed utile a considerarsi in molti casi, è quella di convessità; *è importante sapere che è una proprietà* affine. *Si dice convessa ogni figura* (*piana o solida, non importa*) *quando un segmento che unisce due suoi punti appartiene tutto e sempre alla figura*; *per render l'idea, si può dire che "non ha rientranze" che permet-*

terebbero a una retta (p. es. uno spillone) di uscire e poi penetrare di nuovo nella figura. Poiché in una trasformazione affine i segmenti si trasformano in segmenti, anche figure convesse si trasformano in figure convesse, come asserito (EP, 23).

Per contrapposto ad *affini*, si dicono **metriche** le proprietà che abbiamo visto non essere invarianti nelle affinità, come lunghezze ed angoli; esse si conservano invece nelle **rotazioni** (rotazioni di un angolo α attorno a un punto A; per $\alpha = 180^o$ si ha la stessa cosa dell'omotetia con $p = -1$, ossia la simmetria rispetto ad A), nelle traslazioni, nelle **simmetrie** (rispetto a una retta). Se si tratta di conservare solo il *rapporto delle lunghezze* (e non proprio le lunghezze: si consente cioè di alterare la scala) possiamo considerare le **similitudini** (ottenibili con una rotazione, o eventualmente simmetria, seguita da una omotetia che dà il cambiamento di scala conforme al suo coefficiente: nel rapporto da 1 a p).

Prodotti, non di numeri, ma...

È fondamentale teoricamente, e necessario anche per poter esemplificare le questioni pratiche legate a concetti del genere, pensare a cosa accade eseguendo due trasformazioni – indichiamole con S e T – una dopo l'altra, vedere se e come si possa ritornare alla situazione iniziale, ecc. Anche qui serve subito, non fosse che per brevità di scrittura, introdurre dei simboli che daranno luogo a un algoritmo (v. n. 9!): indichiamo con TS (e diciamo **prodotto** di T per S) *la trasformazione che si ottiene eseguendo prima la* S *e poi la* T: se S porta P in P' ($P' = \mathrm{S}(P)$) e T porta P' in P'' ($P'' = T\,(P')$) la trasformazione che porta P in P'' è naturalmente $T\,S\,(P) = T\,(\mathrm{S}\,(P)) = T\,(P') = P''$ [25]; indichiamo con S^{-1} (e diciamo **inversa** di S) la trasformazione che annulla l'effetto di S (se esiste: esiste se S trasforma punti distinti in punti distinti) ossia, se $S\,(P) = P'$, $S^{-1}\,(P') = P$, od anche $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{S}\,(P) = P$ (per ogni P), o infine $S^{-1}\,S = 1$ (oppure = I), indicando con 1, od I, l'operazione **identica** (trasformazione che non cambia nulla).

[25] A prima vista sembrerebbe più naturale invertire l'ordine. Per convincersi del contrario basta pensare che anche nel linguaggio comune «la moglie del fratello di Giorgio» significa che da Giorgio passo dapprima a considerare «il fratello di Giorgio» e quindi «la moglie di esso», e se dico «la metà del quadrato di 6» devo fare il quadrato di 6 e poi prenderne la metà ($^{36}/_2 = 18$) e non viceversa ($½ \cdot 6 = 3$, $3 \cdot 3 = 9$).

Con questa terminologia possiamo dire succintamente molte cose importanti (e abbastanza comprensibili: ci limiteremo a dimostrarne qualcuna, dato lo scopo puramente esemplificativo di questi cenni).

Il *prodotto* di due *affinità* è un'*affinità*; il *prodotto* di due *traslazioni* è una *traslazione*; il *prodotto* di due *omotetie* è un'*omotetia* (pur di includervi come caso-limite le traslazioni); il prodotto di due *rotazioni* è una *rotazione* (pur di includervi come caso-limite le traslazioni); il *prodotto* di due *similitudini* è una *similitudine*; ... e probabilmente sulla scia di queste affermazioni sembrerebbe scontato di poter proseguire a dire lo stesso di simmetrie e di ogni famiglia di trasformazioni. Invece il prodotto di due simmetrie è una traslazione (prendete un foglio, ribaltatelo due volte intorno al bordo a destra, e ve ne convincerete!). Questo diverso comportamento si esprime dicendo che le affinità formano un **semigruppo** (e così le traslazioni, ecc.) in quanto *con successivi prodotti non se ne esce* (mentre le simmetrie no); un semigruppo si dice **gruppo** se, inoltre, *contiene*, *di ogni sua trasformazione*, *anche l'inversa* (ciò che vale senz'altro per traslazioni e rotazioni; per le affinità si ha un gruppo solo escludendone quelle degeneri, che trasformano il piano in una retta o punto; ciò vale anche per omotetie e similitudini tra cui le sole degeneri sono quelle che trasformano il piano in un punto).

Attenzione: *ciò che si è detto vale nel piano*; *nello spazio valgono considerazioni analoghe ma non sempre identiche. Ad es.*, *uno spostamento rigido può essere non solo una rotazione* (*attorno a un asse*) *o una traslazione*, *ma una* rototraslazione (*rotazione e traslazione lungo l'asse*: *le rotazioni non formano più un gruppo*, *ché dal loro prodotto si ottengono*, *in genere*, *rototraslazioni*). *Qui parleremo sempre del caso piano* (EP, 24).

Un gruppo può contenere (*e per solito contiene*) *dei* **sottogruppi** (*esempi ovvi*: *le omotetie col medesimo centro* A, *e lo stesso per rotazioni e per similitudini*; *le affinità* (*ecc. per altri gruppi*) *che lasciano fisso un punto*, *o due punti*; *le rotazioni di angolo multiplo di* 30° (*o*, *in generale*, *di* ${}^{360^\circ}/_{n}$, $n =$ *intero*); *le omotetie con* p *positivo*; *ecc.*). *È fondamentale per lo studio delle proprietà di un gruppo conoscerne i sottogruppi.*

Delle proprietà asserite verifichiamone (per ora) solo una: il prodotto di due rotazioni è ancora una rotazione oppure una traslazione. Che possa essere una traslazione lo sa bene chiunque, per avvicinare un armadio alla parete, gli fa eseguire due rotazioni spingendo prima uno spigolo e poi l’altro (come conviene per ridurre l’attrito: ma ciò non ci riguarda) ([26]). Che un segmento, dalla posizione iniziale PQ, si possa portare in una qualunque posizione finale $P''Q''$ (anche parallela a PQ) con due rotazioni risulterà subito dal fatto che con una rotazione (come vedremo) lo si può portare in una qualunque posizione $P'Q'$ non parallela (e quindi con altra in $P''Q''$); naturalmente, lunghezza inalterata ($\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = \overline{P''Q''}$). Per andare da PQ a $P'Q'$ (non parallelo) con una rotazione basta trovare il necessario centro di rotazione: dovrà essere un punto O tale che $\overline{OP} = \overline{OP'}$ ed $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ (perché, nella rotazione, i punti si conservano alla stessa distanza dal centro); ma quindi basta prendere per O l’intersezione degli assi di simmetria dei segmenti congiungenti P con P' e Q con Q$'$ (v. *fig.* 45).

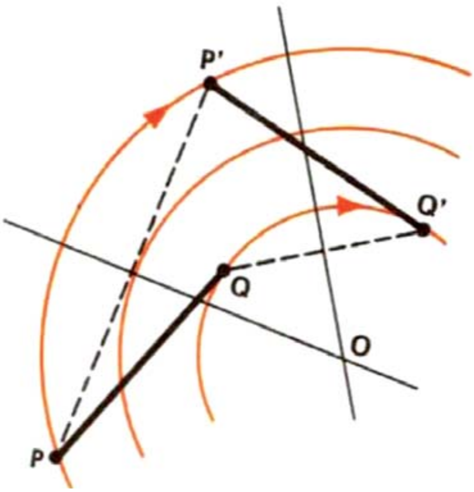


Figura 45

Può essere AB ≠ BA?

Molte esemplificazioni ed osservazioni semplici e interessanti si potrebbero fare proseguendo in considerazioni sull’argomento. Limitiamoci a notare che *il prodotto* (*di trasformazioni*) **non è necessariamente commutativo**, nel senso che, eseguendo successivamente

([26]) Lo diciamo, tuttavia, per rammentare l’opportunità di cogliere ogni occasione per riflettere su altri aspetti che un problema può suggerire sia pure incidentalmente. Non ve ne esimete con un «ciò non ci riguarda».

due trasformazioni, il risultato finale non è necessariamente lo stesso a seconda di quale si eseguisce prima e quale dopo. Non è commutativo, ad es., il prodotto di rotazioni con centri diversi (verificarlo praticamente!) (EP, 25) e così quello di omotetie con centri diversi (lo vedremo nel n. 14).

Il prodotto di rotazioni (e di omotetie, e quindi di similitudini) *con centro in uno stesso punto* (ad es. quello assunto come "origine") è invece ovviamente commutativo: questi gruppi (già sopra menzionati come ovvi esempi di sottogruppi) ci si presentano ora anche come ovvi esempi di **gruppi commutativi**.

È chiaro come tale proprietà porti naturalmente notevoli semplificazioni e *possa conferire particolare interesse e importanza a gruppi che*, *come le dette similitudini*, *ne godono*; *tuttavia nessuno immaginerà a questo punto quale partito si possa prendere da ciò nella matematica pura.*

Un "mistero" chiarito!

Ci son voluti infatti più di due secoli ai matematici per riconoscere in esse l'appropriata interpretazione (*o almeno la più espressiva rappresentazione*) *di quelle* misteriose "*quantità silvestri*" *che si erano presentate nell'algebra a Bombelli* (1550) *e che ancora per Leibniz costituivano un «monstrum, quasi inter ens et non ens amphybium». Il fatto sconcertante era che si poteva giungere a risultati esatti operando su* **radici di numeri negativi** (*e scrivendo*

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \pm\, i\,\sqrt{a}, i = \sqrt{-1}$$

come se avessero senso, *mentre* (*nel campo abituale*, *dei numeri reali*) *non ne hanno.*

Nel campo delle rotazioni (nel piano, con centro nell'origine) la moltiplicazione per -1 (omotetia con $p = -1$, o simmetria rispetto all'origine) è la rotazione di 180°; evidentemente essa può ottenersi ripetendo due volte una rotazione ad angolo retto (di 90°, diciamola i, o di $-90°$, che pertanto è $-i$); ivi si ha quindi la proprietà che occorreva, ossia l'esistenza di due radici di -1, le rotazioni ad angolo retto $\pm i$. La seconda circostanza che serve è la possibilità di indicare tutte queste similitudini sotto la forma $a + i\ b$ (ciò che risulterà ovvio nel prossimo n. 14).

14. – Come sfruttare certe tendenze "moderne"

Accade spesso che, riflettendo su diverse applicazioni pratiche, si possano riscontrare analogie o identità di comportamento tra nozioni diverse. È istruttivo rilevarlo, e condurre a vedere come ciò possa suggerire l'introduzione di idee e procedimenti unificati. Così abbiamo fatto, incidentalmente, più volte. Così ha fatto (in «I numeri») Emma Castelnuovo, accennando alle nozioni unificatrici, ma con garbo, quasi solo per familiarizzare col nome e far presentire l'utilità che potrà derivare dalla loro introduzione e applicazione. Grandi vantaggi potrebbero infatti derivare dalla potenza semplificatrice e unificatrice di concetti e metodi generali, che consentirebbero l'eliminazione di doppioni e di pesantezze tradizionali, e lascerebbero così maggior tempo per problemi e applicazioni. Purché, beninteso, non si corra il rischio di perder di vista i significati concreti che un'astrazione ha il compito di condensare, e di considerarla come vuota espressione verbale.

Sommare punti: idea geniale!

Ci soffermeremo qui su un solo argomento per poterlo illustrare con un minimo sufficiente di dettagli e di esempi, nonché con cenni ai collegamenti necessari per mostrarne la rispondenza alle esigenze pratiche. In termini geometrici, si tratterà della **geometria affine**, intesa come schema matematico più adeguato sia per basarvi lo studio della geometria che per fornire la rappresentazione geometrica di molte altre cose pratiche.

Per evitare impostazioni sistematiche (qui fuori luogo), proviamo a sperimentare (lasciando il giudizio al lettore) se il metodo non sia tanto semplice da permettere di applicarlo (come speriamo) rendendolo comprensibile con non più di qualche cenno esplicativo, e tanto potente da dare risposta pressoché immediata a una questione effettiva e non banale. Vogliamo dimostrare (e precisare) come il prodotto di due omotetie sia una omotetia oppure una traslazione.

Vediamo anzitutto come esprimere un'omotetia, e indichiamone con A il centro e con p il coefficiente. Essa è la trasformazione, diciamola S, che porta il generico punto $P = A + (P - A)$ nel punto $S(P) = P' = A + p\,(P - A)$; ed ecco il cenno che spiega il modo di scrivere.

$\mathrm{P} = \mathrm{A} + (\mathrm{P} - \mathrm{A})$ *è, formalmente, una identità; ciò che conta è però afferrarne l'interpretazione, che intende indicare il punto* P *come ot-*

tenuto dal punto A *mediante la* **traslazione** *da* A *a* P (*rappresentabile con una freccia* (27) *da* A *a* P, *o*, *come si dice*, *dal* **vettore** P – A). *L'espressione che dà* P′ *è cambiata soltanto per il fattore* p *che moltiplica il termine che esprime lo spostamento da* A *a* P (*o "vettore"*): *si esprime cosi nel modo più spontaneo immaginabile che esso viene alterato nel rapporto da* 1 *a* p (*conservando o invertendo il verso a seconda che* p *è positivo o negativo*, *e conservando o diminuendo o aumentando le distanze da* A *a seconda che* (*in valore assoluto*) p *è uguale o minore o maggiore di* 1; *se* p = 0 *si ha il caso banale che*, *qualunque sia* P, *porta* P′ *in* A).

Consideriamo ora una seconda omotetia, diciamola T, e indichiamone con B il centro e con q il coefficiente; essa porterebbe ogni $P = B + (P - B)$ in $T(P) = B + q(P - B)$; ma vogliamo applicarla a $P' = S(P)$ per studiare cosa avviene facendo il prodotto TS delle due omotetie, ossia per trovare il punto P'' in cui esso porta P. Sarà

$$P'' = TS(P) = T(P') = B + q(P' - B),$$

ma $P' = A + p(P - A)$, $P' - B = p(P - A) + (A - B)$,

$$P'' = B + pq(P - A) + q(A - B) = pqP + q(1 - p)A + (1 - q)B = \mathrm{C} + pq(P - \mathrm{C})$$

ove si ponga

$$C = [q(1 - p)A + (1 - q)B] / (1 - pq);$$

ciò purché non sia $pq = 1$, nel qual caso si ha direttamente

$$P'' = P + (q - 1)(A - B)$$

(mentre la formula che dà C diventa assurda perché si dovrebbe dividere per $1 - pq = 1 - 1 = 0$).

Per snellire l'esperimento vi abbiamo fatto assistere a facili passaggi senza dirvi se e quale senso avessero. È un successo del formalismo riuscire a far fare dei calcoli anche a chi non capisce o non conosce il senso, ma sarebbe un successo deleterio se non se ne facesse uso per meglio analizzare approfondire arricchire la comprensione del senso e la conoscenza del valore che ciò ha nelle applicazioni.

(27) Può esser disegnata ovunque, da un qualunque punto B al punto Q in cui viene portato con la stessa traslazione, che sposta tutti i punti nella stessa direzione (e stesso verso) e di una stessa lunghezza.

Il senso non si vedeva, ma c'è!

C'è una cosa che abbiamo fatto senza spiegarne il senso e il perché: abbiamo sciolto le parentesi. Già dal principio avremmo potuto formalmente passare in tal modo dall'espressione

$$P' = A + p\,(P - A)$$

all'altra $P' = pP + (1 - p)\,A$, *ma, mentre alla prima avevamo attribuito un significato* (*somma di un punto col vettore che indica come traslarlo in* P'), *la seconda* (*somma di punti moltiplicati per numeri*) *non aveva ricevuto alcun senso atto a giustificarne l'uso. Ma il senso esiste, e come!*; *ha anzi un importante significato anche* fisico, *il che è quasi sempre la migliore garanzia di qualità per i prodotti della fantasia matematica. Sappiamo che due masse* p *ed* $1 - p$ *collocate nei punti* P *ed* A *equivalgono a una massa* $p + (1 - p) = 1$ *collocata nel baricentro* Q, *sulla retta congiungente* P *ed* A; *manifestamente* Q *coincide con* A *se* $p = 0$ (*se tutta la massa è in* A), *con* P *se* $p = 1$ (*stesso motivo*), *è il punto di mezzo se* $p = 1 - p = ½$, *e, in genere, è il punto a distanza* p *da* A *contata nel verso da* A *a* P *e assumendo come unità la distanza* $\overline{AP}$. *Questo è il significalo di*

$$Q = pP + (1 - p)A,$$

del resto conforme al significato dell'altra forma,

$$Q = A + p\,(P - A);$$

non ci soffermiamo sul senso che ha il considerare anche masse negative; *indichiamo solo, come estensione, che daremo analogo senso anche a* $qQ = pP + aA$ (*con* $q = p + a$, *anche se la massa in* Q è $q \neq 1$), *e che l'interpretazione come vettore* (*rappresentante una traslazione*) *nel caso* $q = p + a = 0$ *rientra nel nuovo concetto come caso limite. Questi cenni sono di necessità sommari*; *non pretendono chiarire tutto, ma mostrare che basta poco a far comprendere quanto le convenzioni introdotte rispondano a un significato concreto e soddisfino le esigenze dell'intuizione.*

Queste idee semplici e geniali, di cui già l'esempio che stiamo trattando dimostra l'efficacia, sono dovute principalmente a H. Grassman e a G. Peano.

Possiamo quindi ora vedere il significato della formula cui siamo pervenuti. Nel prodotto di due omotetie, il coefficiente è (com'era ovvio prevedere) il prodotto dei coefficienti, pq. Se $pq = 1$ (se, cioè, si hanno un ingrandimento e un impicciolimento che si compensano) rimane solo una traslazione nella direzione della congiungente dei due centri, e nella direzione che va dal primo (A) al secondo (B) o viceversa a seconda che è $q > 1$ (ossia $0 < p < 1$) o invece $q < 1$ (ossia $p > 1$ o $p < 0$). Altrimenti il prodotto è ancora un'omotetia, ed il centro C è allineato sui centri A e B essendone il baricentro con pesi proporzionali a q $(1 - p)$ ed $(1 - q)$. Sviluppando la espressione si può ottenere $C = A + m\ (B - A)$ con $m = (1 - q)/(1 - pq)$, tornando così alla primitiva interpretazione (punto + vettore) e ottenendo esplicitamente la posizione (ascissa) di C (prendendo l'origine in A e assegnando l'ascissa $= 1$ a B).

E sarebbe facile ricavare molte altre conclusioni: la non commutatività delle omotetie, l'esistenza di sottogruppi (gruppi formati da parte delle omotetie: p. es. quelle con centri su una stessa retta, quelle con p *positivo, quelle con* p *potenza di un dato numero (p. es. di* 2: ..., $(½)^n$, ... , $^1/_4$, ½, 1, 2, 4, 8, ... , 2^n, ...), *ecc. o sotto-semigruppi (p. es. quelle con* $0 < p < 1$, *quelle con* $p > 1$, *quelle con* $-1 < p < +1$ (*ma* $p \neq 0$), *quelle con* $p > 1$ *e centri su un segmento AB (o dentro un triangolo, o un'ellisse, o qualsivoglia figura convessa), ecc.). Con esempi di questo tipo si possono rendere familiari e gustose molte nozioni che spesso vengono invece propinate in astratto con terrificanti montagne di definizioni formali e scarsissime applicazioni (fatto cui forse alludeva Fedro quando scrisse «Parturiunt montes, nascitur ridiculus mus»).*

L'uso dei vettori: chiave magica ...

L'uso dei vettori (meglio se integrato col calcolo sui punti-massa) permette di costruire tutta la **geometria affine** nel modo più semplice (sia riguardo all'eventuale formulazione assiomatica, sia con riferimento a spiegazioni concrete, geometriche e fisiche), prestandosi ad ogni tipo di ragionamenti senza farne oggetto di campi apparentemente separati. Si potrà passare a piacere da considerazioni sintetiche a calcoli intrinseci (come nell'esempio precedente) o al metodo delle coordinate ("geometria analitica") che è semplicemente il caso particolare in cui si fissano una volta per tutte dei punti-base (e risulta definito un sistema dì "coordinate baricentriche"), oppure un punto (origine, O) e dei vettori-base ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$; per 3 dimensioni anche $\mathbf{k}$). In questo caso ogni punto P del piano viene individuato dalle sue coordinate cartesiane x e y mediante la $P = O + x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}$

(nello spazio, $P = O + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$), che indicano espressivamente come P si ottenga partendo da O e spostandosi di x nella direzione del vettore $\mathbf{i}$ e di y in quella di $\mathbf{j}$ (ed eventualmente di z in quella di $\mathbf{k}$).

Si badi che qui $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$ *sono due vettori qualunque* (*purché non paralleli*); *dato che finora lo spazio è soltanto* affine, *non ha neppur senso chiedere se siano ortogonali*, *o di ugual lunghezza* (*unitaria*); *supponendo ciò si entra nella geometria metrica*, *ma* è opportuno prescinderne finché non vi siano motivi per farlo. *Quella che si costruisce nel modo indicato* (con le sole nozioni affini) *è infatti la rappresentazione geometrica appropriata per molte applicazioni sia fisiche che economiche*, *ecc. Volendo indicare ad es. con un punto* P (*o vettore*, P – O) *un complesso di merci* (*quantità* $x_1, x_2, ..., x_n$ *di* n *merci* $A_1, A_2, ..., A_n$ *acquistate o consumate o prodotte da un individuo o azienda o popolazione*), *avremo un punto del piano* ($x = x_1, y = x_2$,) *o dello spazio* ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$) *nel caso di* 2 *o* 3 *merci*, *ma non ci sarà difficoltà formalmente a pensare in ogni caso a uno «spazio a* n *dimensioni»*. *Che dovrà pensarsi* affine: *le nozioni metriche non servono ed anzi la loro presenza genera spesso malintesi e confusioni* (*ad es. chiedersi se due complessi di beni sono "ortogonali" è privo di senso*; *dipenderebbe tra l'altro dalla scelta di unità di misura*, *per beni che si misurano quali a peso*, *quali a lunghezza*, *ecc.*).

L'impiego di esempi del genere (*economici e statistici*) *per introdurre le nozioni geometriche* (*con vettori e coordinate*) *risulta fra i più indovinati anche al primo livello* (*su ciò uscirà in questa collana un'esposizione del prof. Ugo Pampallona*, *che ha sperimentato il metodo nella Scuola media*).

... anche per le nozioni metriche

L'introduzione delle nozioni metriche, quando è il momento in cui giova, si realizza del resto facilmente, proprio grazie all'uso dei vettori, in modo che rende chiaro cos'è che si aggiunge (e in quali casi ha senso e scopo l'aggiungerlo) passando dal campo affine a quello metrico. Si tratta di introdurre il **prodotto scalare** (o **prodotto interno**) di due vettori (un numero $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, funzione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, con $\mathbf{a} \times \mathbf{a} > 0$ – ammenoché $\mathbf{a}$ sia il vettore nullo – e di significato «quadrato della lunghezza di $\mathbf{a}$»; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ corrisponde a *ortogonalità* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$); con poche spiegazioni ciò potrebbe risultare ben chiaro, ma non c'è motivo di farlo.

Dell'introduzione delle nozioni metriche dobbiamo servirci per una sola ultima osservazione, per cui sono sufficienti ragionamenti immediati. Avevamo detto (*in fine del precedente n.* 13) *che le similitudini piane* (*con il centro nell'origine, come ora sottintenderemo*) *si potevano scrivere* a + i b, *dove* a *e* b *sono due numeri reali qualunque, ed* i *è la rotazione ad angolo retto* (*per fissare le idee, con senso antiorario, cioè contrario al movimento delle lancette dell'orologio*). *Tutto chiaro salvo definire la* somma *di due similitudini* (*e, in genere, trasformazioni*). *Ma ciò è immediato* (*si potrebbe quasi dire automatico*) *dato che abbiamo introdotto la nozione di somma per punti e vettori* (*ed è più semplice qui pensare solo ai vettori*). *Basterebbe definire in generale una somma di operazioni* $\mathrm{S = a\,S' + b\,S''}$ *mediante* $\mathrm{S\,(u) = a\,S'\,(u) + b\,S''\,(u)}$; *ma per brevità illustriamo il semplice caso particolare che ci interessa. Riferendoci a vettori-base* **i** *e* **j unitari e ortogonali** (*come è comodo nella geometria metrica, e come si è usato nei diagrammi*), *la rotazione* i *porta* **i** *in* **j** *e* **j** *in* – **i**: *i* **i** = **j**, *i* **j** = – **i**; a + i b *è quindi la trasformazione che porta* **i** *in* (a + i b) **i** = a **i** + b **j** *e* **j** in (a + i b) **j** = a **j** – b **i**; *si vede senz'altro che è una similitudine* (*tutti i vettori vengono ruotati dello stesso angolo e moltiplicati per lo stesso coefficiente che* **i** *per portarlo in* a **i** + b **j**) (EP, 26). *Sotto questa forma, le similitudini appaiono identiche ai "numeri complessi" che, come si è accennato, verranno a suo tempo incontrati nell'algebra* (*e tutte le proprietà ne diventano significative e intuitive*). *Tra l'altro, nel campo complesso diviene valido il "Teorema fondamentale dell'Algebra"*: *un'equazione algebrica di grado* (*effettivo*) n *ha sempre* (*esattamente*) n *radici*; *p. es., se di* 2° *grado, due radici, anche se non ne esistono nel campo reale*: *cfr. fig.* 34 (EP, 27), *vedere precisazioni in* (EP, 28).

Un gruppo in cui si può operare anche con la somma *senza che, così facendo, si esca dal gruppo* (*ed è ciò che abbiamo constatato ora per le similitudini, ossia per i numeri complessi, come già avveniva per i numeri reali*), *si chiama, in algebra,* anello (*ciò non vale invece ad es. per le rotazioni, perché una loro somma, o prodotto per un numero, non è più in genere una rotazione bensì una similitudine*). *Se un anello è* commutativo (*come nel caso delle similitudini, o numeri complessi*) *vi sono valide tutte le usuali proprietà* (*p. es. sarà* $\mathrm{(a + i\,b)\,(a - i\,b) = a^2 - (i\,b)^2 = a^2 + b^2}$, *e lo potremo dire senza bisogno di riverificarlo*). *Queste considerazioni astratte permettono di estendere al caso generale le proprietà viste nel caso usuale*; *le interpretazioni geometriche* (*come, per detto caso, quella della fig.* 29) *possono non esser più valide ma tanto maggiore ne* *è l’utilità in quanto dànno lo spunto intuitivo per afferrare il senso che si propaga ovunque indipendentemente dalle particolarità della rappresentazione.*

15. – Perchè e come preoccuparsi delle approssimazioni

L’esattezza della matematica è proverbiale, ed è considerata come uno dei maggiori suoi pregi. Ed è anche giusto; tuttavia essa ne costituirebbe anche un difetto, o almeno un limite, se non fosse in grado di liberarsene per tenere nel debito conto i molti fattori che introducono od esigono l’approssimazione, la semplificazione, l’incertezza.

È bene meditare su queste considerazioni fatte da Guido Castelnuovo più di mezzo secolo fa (*Congr. “Mathesis”*, 1912; *testo riprodotto in* [NB, 18, *1962*]; *altri brani in* [NB, 14 *p.* 157]).

«È questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegniamo a diffidare dell’ approssimazione, che è realtà, per adorare l’idolo di una perfezione che è illusoria. Noi vi rappresentiamo l’universo come un edificio le cui linee hanno una perfezione geometrica e ci sembrano sfigurate e annebbiate a causa del carattere grossolano dei nostri sensi, mentre dovremmo far comprendere che le forme incerte rivelateci dai sensi costituiscono la sola realtà accessibile, alla quale sostituiamo, per rispondere a certe esigenze del nostro spirito, una precisione ideale».

Di ciò è importante tener conto soprattutto nel senso di evitare di falsare inavvertitamente un problema pratico sostituendovi una schematizzazione matematica di cui ci sfugge la mancanza di realismo.

Contro tale rischio (*e malvezzo*) *è raccomandabile imprimersi bene in mente il monito efficacemente espresso dalle seguenti parole di J. W. Tukey*: *«È molto meglio una risposta* approssimata *alla* vera *questione, che spesso è* vaga, *piuttosto che una risposta* esatta *a una questione* falsata, *che può sempre esser resa precisa».*

Dovremo però limitarci a pochi esempi specifici, appena sufficienti per illustrare qualche aspetto dei problemi posti dall’approssimazione di per sé, ma non certo a illuminare le ancor più importanti questioni generali ora appena sfiorate, teoricamente concettualmente e praticamente fondamentali.

Supponiamo di aver da calcolare (effettivamente, numericamente) la somma di molti (p. es. 100) addendi. Se questi rappresentano grandezze, è ovvio che potremo conoscerne le misure soltanto a meno di un certo errore (limitandosi a poche cifre decimali anziché considerarne tutta l'infinità, e anche le ultime cifre indicate potranno essere incerte); ma lo stesso avverrebbe se gli addendi fossero definiti matematicamente in modo esatto (p. es. $\sqrt{3}$, π, $6/\pi^2$, 2π, $1/(1+\sqrt{2})$, ecc., perché è praticamente impossibile calcolarne molte cifre esatte, e in genere non si ha neppure la possibilità (o non vale la pena) di considerare tutte quelle note ([28]). Quale sarà l'errore sul totale? Naturalmente, sarà la somma di tutti gli errori sugli addendi, e se sappiamo che i singoli errori non superano un certo k, l'errore totale non potrà superare $100\,k$. Però, se gli errori possono essere (come di solito) sia in più che in meno, è da attendersi che in parte si compensino, e occorre affidarsi a concetti probabilistici o statistici (come vedremo nel n. 17): risulta in base ad essi che l'ordine di grandezza presumibile dell'errore, anziché nel rapporto da 1 a 100, crescerà appena nel rapporto da 1 a 10.

Considerazioni del genere sono necessarie ed hanno la massima importanza nelle scienze sperimentali, in quelle che richiedono misure particolarmente accurate (*come l'astronomia e la geodesia*), *ma anche per l'esecuzione di calcoli puramente matematici su dati esatti* (*in ispecie con calcolatori elettronici*) *perché si hanno inevitabilmente per lo meno gli errori da arrotondamento* (*ed in genere anche altri derivanti dall'uso di procedimenti approssimati*).

Cercasi angolo retto (esatto)

Un esempio geometrico. In genere si considerano esatti (e difatti in teoria lo sono) i procedimenti di costruzione basati su intersezioni di rette (o cerchi), tracciamento di parallele o perpendicolari, ecc. Sorprenderà sapere quanto in pratica ciò sia difficile: nella costruzione di un apparecchio di precisione complesso e delicato (integrafo) la causa d'errore più pregiudizievole e più difficile da correggere risultò l'assicurare l'esatta perpendicolarità di due direzioni.

([28]) A titolo di curiosità: π (= 3, 14, ... = rapporto della circonferenza al diametro) è stato recentemente calcolato con un po' più di 100.000 decimali (da D. Shanks e J. W. Wrench con calcolatore elettronico 7090 IBM presso il Data Processing Center di New York; cfr. *Mathematics of Computation*, 1962). È chiaro che in nessuna applicazione ci sarà motivo né possibilità pratica di tenerne conto completamente: è già molto eseguire calcoli con una decina (o al più circa il doppio) di cifre decimali esatte. Cfr. (NB, 4 *a)* per maggiori notizie anche su argomenti analoghi.

Ma fermiamoci su un caso semplice. Per dividere un dato segmento in parti uguali (o secondo frazioni date), come ci serviva ad es. per il problema del n. 5 (*fig.* 8, e varianti alle *figg.* 9 e 10) il metodo "esatto" è quello basato sul teorema di Talete. Basta tracciare suddivisioni equidistanti su un'altra retta arbitraria r partendo da un estremo del segmento AB da suddividere, e riportarvele mediante parallele (*fig.* 46, in cui supponiamo di volere la divisione in settimi).

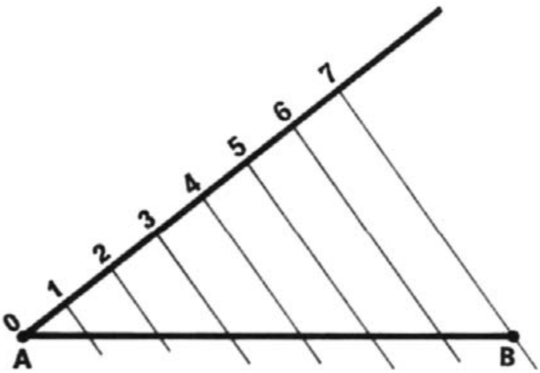


Figura 46

Ci sarà una certa imprecisione nel segnare le suddivisioni uguali su r, ma nel riportarle su AB s'incontrano cause d'imprecisione specifiche. Nel tracciare la congiungente di "7" con B, un'imprecisione che la faccia passare un po' staccata da tali punti produce un'imprecisione tanto maggiore sulla sua direzione quanto più *piccola è la distanza* "7" $-$ B; nel tracciare le parallele si ha poi il medesimo errore nel punto di partenza ("6", "5", ...), un errore di parallelismo (con conseguenze più sensibili sulle congiungenti lunghe) e un errore di lettura della suddivisione cercata in base all'intersezione (tanto più grave quanto più essa avviene obliquamente). Conviene pertanto scegliere, per le suddivisioni di partenza, una grandezza circa uguale a quella finale, e tracciarle su una retta r poco inclinata rispetto ad AB (evitare congiungenti lunghe ed angoli piccoli) ma non tanto poco che (nonostante la poca differenza tra le suddivisioni su AB e su r) le congiungenti abbiano a risultare troppo oblique, e la distanza "7" $-$ B troppo piccola.

Si faccia attenzione come in certi casi errori anche piccoli possono comportare conclusioni grossolanamente errate, o addirittura indurre a errori di ragionamento. Quando il dato che interessa è una differenza (relativamente piccola) tra grandezze molto più grandi, una piccola imprecisione su queste può addirittura capovolgere il risultato: si pensi ad es. al bilancio di un'azienda, dove l'utile sia la differenza di profitti e perdite di ammontare quasi uguale (o il patrimonio sia la differenza fra attività e passività di ammontare quasi uguale). Lo stesso fenomeno si ha in problemi matematici ("sistemi di equazioni lineari", soprattutto, che geometricamente corrispondono a determinare intersezioni di rette, piani, ecc.) quando si presentino "mal condizionati" (ciò corrisponde al caso in cui rette, piani, ecc. sono pressocché paralleli, cosicché, come già rilevato nel precedente esempio, l'intersezione è mal individuabile). È una difficoltà che dà molto filo da torcere nel calcolo elettronico, dove rende disagevole sapere quanto i risultati ottenuti siano, in certe situazioni, attendibili.

L'errore c'è; ma dove?

L'ultimo rischio accennato, di conclusioni matematicamente assurde, è eccezionale, ma eccone un esempio: la dimostrazione che **ogni triangolo è isoscele!** *Nel triangolo* ABC (*fig.* 47) *sia* O *l'intersezione della bisettrice* CD *con l'asse di simmetria della base* (*verticale per il punto di mezzo*, E); *da essa si calino le perpendicolari ai due altri lati* (*ottenendo* F *e* G). *Coi soliti criteri si può verificare che i due triangoli*

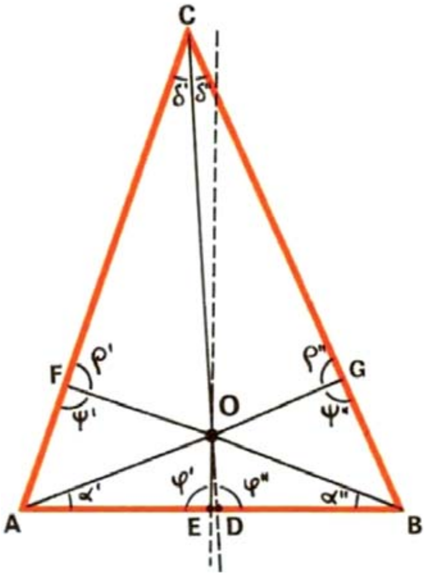


Figura 47

superiori (COF *e* COG) *sono congruenti* (*simmetrici*), *e così i due intermedi* (FOA *e* GOB), *e così pure i due sulla base* (AEO *e* BEO). *Quindi* $\overline{\mathrm{CF}} + \overline{\mathrm{FA}} = \overline{\mathrm{CG}} + \overline{\mathrm{CB}}$ *ossia* $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$

Colpa del disegno: *facendolo esatto*, *il punto* F (*o* G, *quello sul lato minore*) *cadrebbe al di sotto della base*, *sul prolungamento di* CA, *e si avrebbe la conclusione esatta*: *i due lati divengono uguali se* ad uno si toglie e all'altro si aggiunge *una stessa grandezza* ($\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{BG}}$). *La colpa è però anche dell'impostazione di Euclide*, *ove si ragiona sulle grandezze assolute ma si ignora il segno*, *affidandosi a una figura che può esser mal fatta per decidere se sommarle o sottrarle. Motivo in più per preferire l'impostazione vettoriale di cui segni e versi ed orientamenti fanno parte integrante.*

16. – Come sfruttare i ragionamenti "per continuità"

Alcuni semplici esempi mostreranno quanto sia utile, anche trovandosi di fronte a problemi di natura del tutto elementare, aver presenti dei tipi di ragionamento "per continuità". Oltre all'utilità immediata essi giovano a svincolare dall'ambito di concezioni antiquate suscettibili di favorire malintesi e preconcetti; in tal modo (insieme ad altre idee già accennate) favoriscono l'avvio ad intuire (ed in seguito, eventualmente, a studiare) i principi del calcolo infinitesimale.

Un primo uso, semplice ed efficace, consiste nel dimostrare per assurdo qualcosa mediante considerazione di un caso-limite. Ad es., può sembrare, a prima vista, a un ragazzo, che, deformando un quadrato (in rombo), l'area rimanga invariata, Benché sia immediato mostrare che invece è minore, essendo data da *base* $\times$ *altezza*, è più istruttivo far vedere che l'assurdità della supposizione poteva balzare subito agli occhi se uno avesse la lodevole abitudine di controllarla **pensando a tutti i casi fino al caso-limite**: quando il rombo si schiaccia riducendosi a un segmento, l'area si riduce a zero (e vi arriva non con un salto, ma divenendo *piccola oltre ogni limite*). Analogamente, sullo stesso esempio, si dimostra erronea la supposizione che rimanga costante la somma delle diagonali (al limite, preso il lato $= 1$, essa vale $2 + 0 = 2$, mentre per il quadrato vale $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$).

Parliamo pure del "limite"

La frase sopra usata, «*divenendo piccola oltre ogni limite*», *adombra l'idea di tendenza a un limite. Ivi non si riferisce che a un'osservazione intuitiva su un fatto geometrico. Non sembra però né difficile né fuori* *luogo dare il concetto in forma precisa, sia pur limitatamente a casi particolarmente "comodi", come il tendere di una grandezza positiva a zero sempre decrescendo, o all'infinito sempre crescendo. Limitiamoci, per dare un esempio di definizione, di criterio, di applicazione, a quest'ultimo caso. Considerando una grandezza che varia sempre crescendo* (*in funzione di un indice* n, *e si potrà scriverla* a_n, *oppure di una variabile continua* x *che si potrà pensare sia il tempo, e si potrà scriverla* f (x)), *i casi sono due*: *o esiste un valore* K *che non viene mai superato, oppure non esiste, ossia la grandezza cresce finendo per superare qualsiasi valore. In questo secondo caso si dice che essa* tende all'infinito. *Criterio utile*: *se si dimostra che, da un qualunque punto in poi, la grandezza cresce ancora di* 1 (*o di altra quantità fissa*), *è dimostrato che tende all'infinito* (*altrimenti dovrebbe non superare un certo* K, *ma allora neppure* K – 1 *perché crescendo ancora poi di* 1 *supererebbe* K; *quindi neppure* K – 2, K – 3, ... ; *assurdo*).

Ed ecco una conclusione particolare notevole: *sommando* 1, ½, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, ecc., *si giunge a superare qualunque numero* (*cioè, al crescere del numero dei termini la somma tende all'infinito*) (29). *Per applicare il criterio mostriamo che la somma di* 1000 *termini a partire da* $^1/_{1000}$ (*e così in generale*) *supera* ½; *infatti l'ultimo* è $^1/_{2000}$ *ed è il più piccolo*; *la somma quindi* è *maggiore di* $^{1000}/_{2000}$ = ½. *Come interpretazione geometrica, ciò dice che l'area racchiusa nella strettissima "coda" tra l'iperbole* y = 1/x (v. *figg.* 35 *e* 36) *e l'asse* x *da un qualunque punto in poi* è infinita: *vi si può racchiudere, tagliato in opportuni pezzettini, un quadrato più grande del sistema galattico!* (*Lo stesso vale ovviamente per la coda, simmetrica, fra l'iperbole e l'asse* y). *I pezzettini possono essere rettangolini di base* = 1, *collocati sull'asse* x, *e di altezza* 1 (*il* 1°, *sul segmento* 0,1), ½ *il* 2° (*su* 1,2), $^1/_3$ *il* 3° (*su* 2,3), *ecc.* (*che rimangono solto la curva toccandola solo nel vertice*: $^1/_x$ *vale* 1 *per* x = 1, ½ *per* x = 2, *ecc.*).

Un secondo uso dei ragionamenti per continuità consiste nell'impiegarli a dimostrare l'esistenza (a volte anche l'unicità) di soluzione per un problema; ad es. se qualcosa cresce con continuità (senza "salti") ed aveva tempo fa una grandezza inferiore a un certo livello ed ora è maggiore, *c'è stato certamente* un istante in cui aveva esattamente quel livello. Lo stesso ragionamento, ma in un'applicazione più interessante, basta a

(29) Nel linguaggio dell'analisi matematica, ciò si esprime dicendo che la "serie armonica" $1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + ... + {}^1/_n + ...$ è *divergente* (somma = infinito = ∞).

provare che fra le coppie di diametri coniugati di un'ellisse ve n'è di ortogonali tra loro (sono gli assi di simmetria, o semplicemente *assi* dell'ellisse). Consideriamo due diametri coniugati, a e b; facciamo ruotare a finché giunge nella posizione che aveva b (e allora b, conservandolo coniugato, giungerà nella posizione che aveva a). L'angolo tra a e b, durante questa rotazione, passa con continuità da un valore α a $180^\circ - \alpha$, e attraversa necessariamente il valore 90° (che ne è la media, quindi è intermedio).

Si può dividere in tre una fetta di torta?

Attenzione! Spesso si parla di non-esistenza, o **impossibilità,** *di soluzione per certi problemi* (*duplicazione del cubo*, *trisezione dell'angolo*, *quadratura del circolo*), *che il ragionamento per continuità mostra ovviamente aver soluzione. Ma si tratta d'altro*: *dell'impossibilità di dare una soluzione con procedimenti restrittivamente prestabiliti* (*per es.*, *costruzioni con riga e compasso*, *risoluzione di equazioni algebriche*, *ecc.*). *Sono cose interessanti anche per la matematica moderna* (*anzi*: *solo in tempi relativamente recenti siffatte questioni hanno avuto completa risposta*); *tuttavia, l'insistenza su tali argomenti e con questa terminologia risente forse troppo l'influenza di preconcetti dell'epoca in cui la scoperta che non tutti i numeri sono razionali* (*cioè frazioni*, *ossia periodici come scrittura decimale*) *apparve ai pitagorici come uno scandalo e una crisi.*

Ed infine, l'uso più costruttivo è quello di portare effettivamente a una soluzione (non limitarsi a dimostrare che deve esistere). Prendiamo la trisezione dell'angolo: non sappiamo (mediante costruzione ammessa) dividere l'angolo (sarà una fetta di torta) in tre parti; però in quattro sì (basta dimezzare e dimezzare ancora le metà), e allora siamo a cavallo. Se diamo $^1/_4$ a ciascuna di tre persone ne avanza uno; dividiamolo in quarti (sono $^1/_{16}$ del pezzo iniziale) e distribuiamone tre; ne avanza una che dividiamo e distribuiamo come sopra e continuiamo così per tutta l'eternità (o, se non abbiamo pazienza infinita e tempo infinito, fermiamoci quando avremo in mano una fettina trascurabile). Avremo ottenuto $^1/_3$ come somma di $^1/_4 + {}^1/_{16} + {}^1/_{64} + {}^1/_{256} + {}^1/_{1024} + {}^1/_{4096}$, con l'avanzo di $^1/_{4096}$ ulteriormente da dividere in tre parti ([30]) (p. es., e se no ci fermeremo più avanti).

([30]) Quando l'angolo è piccolo, dividendo in tre parti uguali la *corda* (anziché l'arco) l'errore è (di più in più) trascurabile.

Questi esempi ci portano già alla soglia del "calcolo differenziale" (*o "analisi infinitesimale"*): *in esso rientra lo studio delle serie* (*convergenza, divergenza, ecc.*; v. *precedenti esempi*), *quello delle derivate* (*pendenza della tangente a un diagramma, determinazione degli elementi di un "confronto marginale" in economia, di una situazione di equilibrio, o di movimento, ecc., in fisica, ecc.*) *e quello degli integrali* (*area sotto un diagramma e problemi analoghi*; *l'esempio riguardante la "coda" dell'iperbole valga come indicazione*). *Tale teoria serve tra l'altro a ricavare l'andamento completo di un fenomeno dalla conoscenza della "legge" cui deve soddisfare istante per istante.*

17. – Come riflettere in termini di probabilità

Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male.

In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare (*come ha notato acutamente uno psicologo, John Cohen*) *un effetto dell'avversione all'incertezza*: *o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza* (*probabilità, statistica*), *oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.*

Converrà qui abbondare in esemplificazioni ridotte a brevi cenni: *non sarebbe agevole svilupparle, e si può farne a meno limitandosi ad esporle a titolo di monito, di* memento, *sperabilmente di stimolo a studiare tali argomenti a tempo debito riflettendovi con particolare attenzione. Non si deve ignorare che in un gran numero di prove* (*in giochi, estrazioni, scommesse, assicurazioni, ecc.*) *è probabile una "compensazione", un apparire di "regolarità statistiche" grazie alla "legge dei grandi numeri"*, **non si deve ritenere** *però* (*come spesso si conclude da interpretazioni troppo letterali e apodittiche di siffatta tendenza alla "compensazione"*):

- **che** *se si sono verificati scarti in un senso* (*p. es. uno è stato sfortunato al gioco*) **sia da attendersi uno scarto in senso opposto** *per dar luogo alla "compensazione"*;

– **che** *se qualcosa è eccezionalmente improbabile* (*come un lungo ritardo di un numero al lotto*) **sia da attendersi qualcosa che l'impedisca** (*p. es. che un numero arretrato si affretti ad uscire*);
– **che sia meno rischioso giocare molti colpi** *piuttosto che pochi o uno solo* (*per dar modo di funzionare alla "legge dei grandi numeri"*).

In effetti, la "compensazione" è il comportamento prevedibile in base all'ammissione che ogni prova dia un risultato a caso, senza memoria del passato, *ed è assurdo pensare di trarne conclusioni in contraddizione con le ipotesi di partenza. La "compensazione" poi dice soltanto che il rischio* ([31]) *al crescere del numero delle prove*, n, *cresce meno rapidamente di* n (*precisamente come* $\sqrt{n}$: *per* n = 100, *nel rapporto da* 1 *a* 10 *anziché da* 1 *a* 100, *come accennato nel* n. 15; *per* n = 10000, *nel rapporto da* 1 *a* 100 *e non da* 1 *a* 10000, *ecc.*); *in tal modo diminuisce* (*come* $1/\sqrt{n}$) *il rischio relativo, cosicché è esatto concludere che giocare* 1000 *su un solo colpo è dieci volte più rischioso che giocare* 10 *per ogni colpo su* 100 *colpi* (*e altrettanto rischioso che giocare* 100 *ogni colpo su* 100 *colpi, ma* 10 *volte meno che giocare* 1000 *su ogni colpo su* 100 *colpi*).

Guai scambiare queste delicate comparazioni di gradi d'incertezza e di rischio con affermazioni appartenenti alla logica ordinaria (*non probabilistica*) *e costruirvi sopra ragionamenti di tipo ordinario*: *sarebbe come volersi arrampicare su un'impalcatura di gomma supponendola rigida.*

Grandi equivoci anche nell'uso e interpretazione di medie e indici (NB, 23).

Un esempio autentico. Un avvocato, in una causa per pensioni vitalizie sostenne che, poiché la tavola di mortalità indica che un individuo di 70 anni vive (in media) fino a 80, ma poi se vive fino a 80 anni vive ancora fino a 85, ne consegue (anche rinunciando alle ulteriori correzioni ripetendo il criterio) che un individuo di 70 anni vive fino a 85 ([32]) (2). L'errore è evidente: la media tiene conto di tutte le possibilità, di morire sia prima che dopo; rifacendo il ragionamento con partenza da tale media si tien conto invece soltanto del caso in cui la morte avvenga dopo (e non è più la media).

([31]) Ossia, per dirne il senso sommariamente, **l'ordine di grandezza dei guadagni o perdite**.

([32]) Cifre arrotondate, sostanzialmente corrispondenti alle tavole di mortalità italiane 1950 (NB, 3).

Più in generale, bisogna tener presente che la scelta di un particolare tipo di media non può esser fatta ad arbitrio, per comodità o in base a preferenze personali: per ogni problema (se ben formulato) c'è un solo tipo di media che vi risponde.

Molte analoghe osservazioni si potrebbero fare su argomenti di cui sarebbe impossibile far intuire il senso senza dilungarsi in spiegazioni.

Qui "tacere" è "falsare"

Ma un'osservazione di carattere generale e fondamentale non può essere omessa (e la diciamo parafrasando e riassumendo passi di R. A. Fisher): *mentre nella logica deduttiva* (logica della certezza) *è lecito ragionare utilizzando solo una parte delle premesse e dei dati disponibili*, *in quanto così facendo si potrà giungere a un insieme*, *sia pure più limitato*, *di conclusioni che saranno però sempre ESATTE*, *nella logica induttiva* (logica dell'incertezza, logica probabilistica, logica statistica) *ciò non* è *lecito*: *utilizzando solo una parte dell'informazione*, *in questi ragionamenti si può giungere invece a conclusioni FALSIFICATE* (come avviene, ad es., quando in una disputa o in un processo si sopprimessero le testimonianze a favore, oppure quelle contrarie).

Quanto ad esemplificazioni concrete, limitiamoci a due sole, intese a completare sotto questo aspetto i cenni su aspetti economici (n. 7).

L'incertezza nell'economia

Nella preferenza fra decisioni economiche alternative, le cui conseguenze sono incerte, il criterio logicamente **coerente** (per chi si prefigge il guadagno; eventuali altri scopi andrebbero se del caso valutati come equivalenti, per l'interessato, a un certo guadagno) sta nella scelta fatta in modo da avere il massimo **guadagno sperato**; criterio che va corretto (se gli importi in gioco sono rilevanti) in quello di render massima la **utilità sperata** (ove l'utilità di un guadagno grande si valuti meno che proporzionalmente accresciuta per tener conto dell'avversione al rischio).

Questo *guadagno sperato* è il valore del guadagno calcolato usando le probabilità come *prezzi* dei guadagni incerti. Se un individuo potrà ricavare, da un certo affare o scommessa od altro, un guadagno di 1200 o 500 o

0 o – 400 (perdita di 400) a seconda di quale tra 4 casi possibili si verificherà, il valore del guadagno, o guadagno sperato, *per lui*, dipenderà dalle probabilità che attribuirà ai detti 4 casi; supposto siano 20%, 35%, 15%, 30%, il valore sperato di ogni singolo caso e quello complessivo saranno dati dal semplice conteggio seguente (che, interpretando le probabilità come *prezzi*, secondo il concetto più significativo, è né più né meno che il conteggio di un bottegaio o di un ragioniere):

1200 a 20%	=	240
500 a 35%	=	175
0 a 15%	=	0
– 400 a 30%	=	– 120
Totale	=	295

Il “problema del giornalaio”

Il seguente esempio intende mostrare l’importanza che ha anche in questo campo il criterio di basarsi su confronti *marginali.* Si dice “problema del giornalaio” perché si pensa a un individuo che compra un certo numero di oggetti, p. es. al prezzo di 10 per rivenderli al prezzo di 25 in giornata dopo di che perdono ogni valore (e così è dei giornali, prescindendo dalla resa o tenendone implicitamente conto ritoccando i dati).

Quanti pezzi converrà comprare? Egli dovrà valutare quali probabilità attribuisce al fatto di *poterne vendere* 0, 1, 2, 3, ecc., calcolare il guadagno sperato nell’ipotesi di *comprarne* 0, 1, 2, 3, ecc., e vedere quale sia massimo. Ma tale procedimento laborioso si semplifica di colpo pensando in termini marginalistici: **ogni pezzo in più** che acquista porta a un aumento o a una diminuzione di guadagno sperato, perché comporta un’uscita certa di 10 ed un’entrata di 25 *se esso sarà venduto* (ossia se le richieste saranno più di quante si potevano soddisfare senza quel pezzo in più). La probabilità di vendere l’n-esimo pezzo (per es., il 12°) è la probabilità di avere almeno n (12) richieste, ossia la somma delle probabilità di tutti i singoli numeri da n in poi. Ci sarà convenienza ad acquistare il 12° pezzo – in generale l’n-esimo – se si attribuisce probabilità superiore al 40% alla sua vendita ossia al fatto di avere almeno 12 richieste (perché la spesa di 10 si compensa col ricavo di 25 al 40% di probabilità); insomma: ci si deve arrestare a quel numero di pezzi oltre il quale la probabilità di vendere tutte le copie scende al di sotto del 40% (in generale, del rapporto tra prezzo d'acquisto e prezzo di vendita).

Nella valutazione delle probabilità ci si avvale di vari elementi che possono presentarsi caso per caso (*ragioni di simmetria come per dadi, palline in un'urna, roulette, ecc.*; *esperienze statistiche su fenomeni simili*; *confronti, ecc.*), *integrandole in genere con conoscenze, opinioni, ecc. relative al singolo caso in questione. Il giornalaio avrà un'esperienza, ma potrà ad es. ritenere o no significativa la manifestazione di una tendenza recente all'aumento, o avrà motivi particolari per attendere minori o maggiori richieste nel caso particolare di "domani", e via dicendo. Imparare praticamente, esercitandosi a saper apprezzare i gradi di probabilità ed esprimere meditatamente le proprie valutazioni in fatto di probabilità, sarebbe una delle più preziose conquiste di un progresso nell'educazione*: *il senso del ragionamento probabilistico è infatti, come detto, deplorevolmente manchevole e distorto se non si ha cura di coltivarlo e affinarlo.*

Una prima questione, a tale proposito, potrebbe riguardare la convenienza di raccogliere informazioni o di effettuare sperimentazioni per avere una migliore base di giudizio (*in ciò rientrano i problemi di collaudi per campione, controlli di qualità, indagini statistiche in genere*); *il criterio sarebbe sempre unico*: *spingere le indagini fino al punto in cui sono redditizie, cioè, in termini marginalistici, finché l'ultima lira spesa per estenderle o approfondirle porta un guadagno sperato di una lira grazie al probabile miglioramento di decisioni che consente. Sarebbe difficile dare in breve esempi, che presupporrebbero nozioni di tecnica statistica.*

Il pronostico "intelligente"

Ci soffermeremo invece, un po', sull'altro aspetto, di "addestramento nelle valutazioni". Presenteremo, a tale scopo, uno schema che, da primi esperimenti, è risultato efficace e istruttivo, e che può applicarsi a titolo divertente di gioco, e cioè per pronostici sul campionato di calcio. (Naturalmente ci si potrebbe occupare di altri eventi di natura qualunque; c'è solo la difficoltà di trovarne altri che si presentino regolarmente ogni settimana con caratteristiche analoghe).

Il “pronostico” consiste nell’indicare, per ogni partita, le tre *probabilità che uno attribuisce a ciascuno dei risultati* “1” – “X” – “2” (per usare i simboli del Totocalcio): ad es. riempendo una schedina nel modo seguente:

Partite	Probabilità (in %)		
	1	X	2
A – B	50	30	20
C – D	45	30	25
E – F	80	15	5
G – H	25	35	40
I – J	35	45	20
K – L	60	25	15
M – N	30	40	30
O – P	75	15	10
Q – R	15	50	35

Quando è noto il risultato si calcola, per ogni partita, una penalizzazione e se ne fa la somma; la classifica di giornata, e quella finale (che è ancora più importante perché rivela meglio le qualità di ciascuno, eliminando sbalzi casuali in singole giornate), sono fatte in base al minimo di penalizzazioni.

Le penalizzazioni si possono calcolare (se si ammettono solo indicazioni di probabilità di 5 *in* 5*, cioè in %, con ultima cifra* 0 *o* 5)*, in base alla tabellina a seguito:*

probabilità		00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50		XXXXXX XXX
Penalizz.	VERO	400	361	324	289	256	225	196	169	144	121	100	FALSO	*Penalizz.*
se l’evento	FALSO	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	VERO	*se l’evento*
risulta														*risulta*
XXXXXXXX XXX		100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50		Probabilità

(N.B.: le probabilità da 0 a 50 si leggono *sopra* e per esse VERO-FALSO si legge *a sinistra*; le probabilità da 50 a 100 si leggono *sotto* e per esse VERO-FALSO si legge a destra; nella colonna e riga così individuate si trova la penalizzazione).

Per l’uso, valga un esempio; prendiamo la partita O – P *coi pronostici* 75 – 15 – 10, *e supponiamo sia terminata in pareggio; allora la* *penalizzazione si calcola come segue*

Probabilità	Evento	Risultato	Penalizzazioni
75%	"1"	FALSO	225
15%	"X"	VERO	289
10%	"2"	FALSO	4
Penalizzazione totale per la partita			518

Indichiamo, pur senza poter chiarire il perché, il significato geometrico della regola. In un triangolo equilatero (v. *fig.* 48) la somma delle distanze dai lati è costante (e uguale all'altezza) per tutti i punti interni P. Prendendo l'altezza = 1 (ossia = 100%) ogni punto P rappresenta un pronostico coerente (con somma delle tre probabilità = 1 = 100%); i vertici (contraddistinti con "1", "X", "2") corrispondono al pronostico di probabilità 100 % attribuita a quel risultato. La penalizzazione è [33] il quadrato della distanza tra il punto P del pronostico e il vertice corrispondente al risultato realizzatosi. Per maggiori indicazioni confrontare (NB, 6, p. 312).

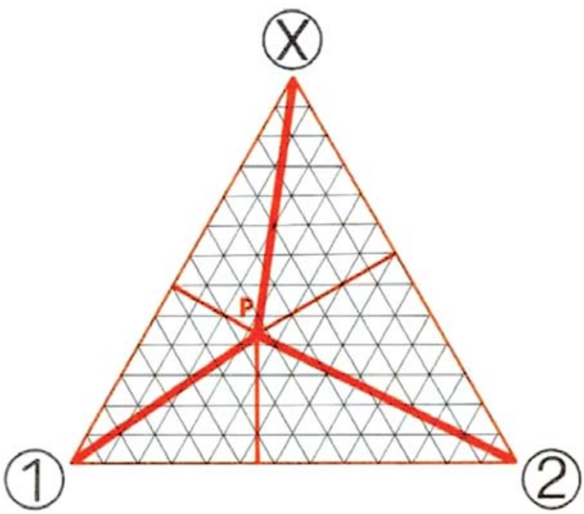


Figura 48

[33] A meno di un fattore introdotto per avere numeri interi quanto più piccoli era possibile.

Si noterà che la penalizzazione minima, 0, *si ottiene soltanto se si era attribuita tutta la probabilità* (100%) *al risultato esatto. Non conviene tuttavia tentare il colpo grosso di azzeccare "in pieno"*: *parecchi* (*in quell'esperimento*) *avevano inizialmente tale tendenza e se ne emendarono ammaestrati da solenni batoste. Il metodo è congegnato in modo che* ciascuno deve nel suo interesse esprimere fedelmente le proprie valutazioni ([34]); *ha lo scopo, pertanto, di correggere la tendenza a "tentar d'indovinare" propria dei concorsi tipo Totocalcio*; *chi invece vi trasporta quella stessa mentalità anziché emendarla impara a sue spese l'errore commesso.*

La penalizzazione massima si ha appunto se uno attribuisce tutta la probabilità a un risultato, e se ne verifica un altro (*penalizzazione* $2 \times 400 = 800$: 400 *per il* 100% *attribuito ad evento FALSO*, 400 *per lo* 0% *attribuito all'evento VERO, e nulla per l'altro* 0% *attribuito ad evento FALSO*). *E bisogna abituarsi a pensare che fatti poco probabili sono sempre possibili* (*siamo tutti troppo faciloni nel dire e considerare* "*impossibile*" *qualcosa che non è assolutamente impossibile!*).

Un'ultima osservazione: *non è necessario* imporre, *come norma del gioco, che la somma delle probabilità dia il* 100%; *chi se ne scosta si danneggia* (*perché ciò equivale a prendere come punto* P *un punto fuori del piano del triangolo, ed è preferibile prendere la sua proiezione nel triangolo perché si diminuisce così la distanza dai vertici, e quindi la penalizzazione, qualunque sia il risultato* ([35])).

Il metodo descritto, per le sue caratteristiche, sarebbe adatto anche per gli esami tipo "quiz" (risposte a questionari); servirebbe infatti ad eliminare l'effetto del "tirare a indovinare" (in inglese, "guessing"), che falsa o rende incerte le valutazioni delle prove ([36]).

([34]) Precisamente, se uno indica il pronostico rappresentato dal punto P' anziché da quello P, corrispondente alle sue opinioni, aumenta la propria *penalizzazione sperata* del quadrato della distanza $\overline{PP'}$.

([35]) Tuttavia, in pratica, ciò può non esser vero se ci si deve limitare a numeri "tondi": conviene infatti arrotondare sempre ogni singola probabilità al valore più vicino senza curarsi che la somma dia 100%. Ad es., chi ritenesse uguali le tre probabilità (33,33% ciascuna) dovrebbe scrivere 35 – 35 – 35 (avendo in ogni caso penalizzazione $169 + 49 + 49 = 267$) anziché sostituire uno dei 35 con 30 (penalizzazione $169 + 49 + 36 = 254$ o $196 + 49 + 49 = 294$ a seconda che si realizza un evento con 35 o quello con 30: si ha un risparmio di $267 - 254 = 13$ punti in 2 casi su 3 ma una maggior perdita di $294 - 267 = 27$ punti, cioè un po' più che doppia, nel terzo).

([36]) Non tanto agli effetti del confronto fra gli esaminati, dove, se le domande sono numerose, avviene ugualmente che chi più sa dia più risposte esatte (con scarti trascurabili) quanto agli effetti di un'analisi riguardante la conoscenza di singole questioni. Se, ad es., per una data domanda ciascuna delle risposte indicate (supponiamo 4) è stata scelta da circa $^1/_4$

18. – I "cervelli" elettronici e il nostro

Non si può mancare di fare almeno cenno dei calcolatori elettronici, limitandoci però a quegli aspetti che dànno degli spunti utili per considerazioni conclusive.

Sulla struttura e funzionamento dei calcolatori diciamo pochissime cose che probabilmente tutti già sanno. Tutti sanno che operano a velocità elevatissime (tempi di millesimi o milionesimi di secondo – ora ci si avvicina ai miliardesimi! – per le varie operazioni); per poterle sfruttare occorre però una rivoluzione ancor più significativa concettualmente, cioè affidare alla macchina l'esecuzione automatica di un intero, e spesso colossale e complesso, programma di calcoli e di elaborazioni. A tale scopo, tra l'altro, occorre che tutti i dati e i risultati intermedi vengano immagazzinati e, finché servono, conservati in appositi organi di "memoria", in modo da potervi rapidamente essere reperiti ed estratti per riutilizzarli.

Il modo di eseguire i calcoli conveniente per noi (eseguendoli a mano o con macchine comandate passo passo da noi) non è però in genere il più adatto per un calcolatore elettronico: p. es., data la facilità e rapidità con cui può eseguire e ripetere molte volte calcoli semplici e dello stesso tipo, è in genere conveniente escogitare metodi che si avvantaggiano di ciò piuttosto che tradurre in programmi dei procedimenti più complicati, meno standardizzabili.

Il sistema binario

Un esempio di semplificazione particolarmente adatta (*e perciò adottata*) *nel calcolo elettronico è l'uso del* sistema binario *di numerazione. Nel nostro sistema abituale* (*decimale*; *cioè* base = 10) *occorrono* 10 *cifre* (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) *e*, *scrivendo un numero*, *l'ultima cifra a destra rappresenta il numero delle* unità, *cui va aggiunto un numero di* decine *dato dalla* 2ª *cifra*, *uno di centinaia* (*cioè* decine di decine) *dato dalla terza*, *e così via. Lo stesso criterio*, *prendendo per* base *il numero* DUE *consente di scrivere ogni numero in forma binaria*, *mediante due sole cifre*, 0 *e* 1 (*e*, *in generale*, *si potrebbe prendere per base un numero*

degli esaminati, sarebbe pur importante (e invece è impossibile) sapere se le risposte esatte erano tutte dovute al caso ("guessing") oppure se almeno uno, o due, o alcuni, effettivamente conoscevano la questione.

arbitrario, p. es., dodici, *o* sessanta, *o* otto, *ecc. e far uso di altrettanti segni per le cifre, cioè per i numeri da zero a quello precedente la base). Limitandoci ad esemplificare per il sistema binario, un numero sarà scritto mediante zeri ed uni, p. es.* 110111001000110; *l'ultima cifra, cioè, contando da destra, la prima, dà le unità; sono* 0, *e quindi abbiamo* 0; *la seconda dà il numero di* paia; *sono* 1 *e quindi abbiamo* (*in scrittura decimale*) 2; *la terza dà il numero di* paia di paia; *sono* 1 *e quindi abbiamo* 4 (*col* 2 *di prima*, 6); *seguono tre zeri, e vuol dire che non abbiamo paia di paia di paia* (8), *né* (16), *né* (32); *al posto successivo c'è un* 1 *che vale* 64 (*e col* 6 *precedente arriviamo a* 70); *i due zeri successivi dicono che non va sommato* 128 *né* 256; *i tre uni successivi dicono che vanno sommati invece* 512 *e* 1024 *e* 2048 (*col* 70 *precedente arriviamo a* 3654); *poi niente* 4096 *ed infine* 8192 *e* 16384, *con che arriviamo a* 28230: *è questo il numero indicato sopra in forma binaria. L'esempio avrà fatto capire la scrittura, e non insistiamo; il vantaggio di avere due sole cifre è scontato con la scomodità di scritture più lunghe* (*circa* 10 *cifre binarie per ogni tre cifre decimali*; v. EP, 29); *però le regole di operazione sono assai semplificate*:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$
$$\textit{cioè } 1 + 1 = 0 \textit{ e "porto" } 1 \text{ (}\textit{un "paio"}\text{);}$$
$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1$$

e la "tavola pitagorica" è tutta qui!

Questo è molto vantaggioso per la macchina, sia per tale semplicità aritmetica, sia per l'appropriatezza di indicazioni in due "stati" per gli organi di una macchina (*tipo*: *interruttore* aperto *o* chiuso, *anziché "rotella a* 10 *cifre" come nelle macchine da tavolo). Lo stesso vale per gli organi di memoria* (*p. es. punto magnetizzato o no su dischi, tamburi, nastri; perforato o no su scheda o telebanda; ecc.*) *ed è stato notato che anche la nostra memoria sembra funzionare col medesimo principio binario* (*le "sinapsi" possono essere o no elettricamente eccitate*).

I metodi iterativi

Un altro esempio tipico è quello dei calcoli con metodo iterativo, *che risolvono un problema per approssimazioni successive ripetendo uno stesso calcolo finché si giunge al grado di esattezza prestabilito.*

Basti illustrare su un esempio un metodo iterativo per calcolare la radice di un numero qualunque (EP, 30). Vogliamo calcolare la radice di 10, osservando che sappiamo che $10 = 10 \times 1$, e vogliamo arrivare a modificare i due fattori facendoli diventare uguali, e cioè: $10 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$ (o almeno molto vicini).

Per avvicinarli basta sostituire ai due fattori di partenza, 10 e 1, la semisomma $\frac{1}{2}(10 + 1) = 5{,}5$ e il corrispondente $^{10}/_{5{,}5} = 1{,}818181...$; poi la loro semisomma e il corrispondente 10/ tale semisomma, e così via. La macchina lo fa molto rapidamente. Ma, facendolo a mano, si può arrotondare come fa comodo: si può così sperimentare il metodo con minor fatica: a 5,5 potremo sostituire 5, e avremo $10 = 5 \times 2$, a $\frac{1}{2}(5 + 2) = 3{,}5$ potremo sostituire 3 e avremo $10 = 3 \times 3{,}3333$, a $\frac{1}{2}(3 + 3{,}3333)$ potremo sostituire 3,16 e troveremo $10 = 3{,}16 \times 3{,}164$ e $\frac{1}{2}(3{,}16 + 3{,}164) = 3{,}162$ è già il valore esatto con 3 decimali (proseguendo si può ottenerne quante altre si vuole, naturalmente facendo divisioni di numeri sempre più lunghi).

Come concludere?

Lo studio e la ricerca di metodi del genere, che si devono a loro volta evolvere per adeguarsi alle crescenti possibilità e alle nuove caratteristiche di macchine sempre più progredite tecnicamente e concettualmente, dà luogo a ripensamenti anche dal punto di vista della *"filosofia"* della matematica, del modo di vedere e pensare dei matematici. Inoltre, le stesse macchine, o varianti più specificamente intese a quelle applicazioni, servono per rinnovare molti aspetti dell'organizzazione della vita sociale (meccanizzazione e automazione di servizi, di uffici, di procedure, di gestione, di regolazione di processi produttivi, e via dicendo): è questo un fenomeno in cui la logica del matematico ha e più dovrebbe avere una parte essenziale, che potrebbe renderlo altamente benemerito dell'umanità.

In certo senso, l'esser riusciti a far eseguire, a una macchina che nulla "capisce" dello scopo di ciò che le viene ordinato, tante aperture e chiusure di circuiti, eccitazioni e diseccitazioni di organi, magnetizzazioni e smagnetizzazioni in punti della memoria, ecc., che per noi acquistano il significato di calcoli e di risposte a nostri problemi, e tutto ciò formalizzando la richiesta che si riduce a una successione di segni convenzionali, si può dire che costituisca il massimo successo del formalismo.

Ma questo significa che, di conseguenza, l'istruzione formalizzata deve sempre più costituire l'ideale e la norma anche per gli esseri umani, o, viceversa, significa che per essi diviene sempre più importante saper capire e impostare i problemi, riservando alle macchine il compito di occuparsene, con tanta maggiore abilità, dopo che siano ridotti allo stato di formalizzazione adatto per chi deve saper operare senza capire?

Il punto di vista cui ci siamo sempre ispirati in quanto precede induce, naturalmente, a propendere per la seconda risposta. Oltre a quest'argomento, i calcolatori ci offrono anche un'analogia che appare utile e appropriata per ritornare sul confronto iniziale, tra imparare per teorie (*sistematicamente, ordinatamente*) *e* per problemi (*avventurosamente, estrosamente*).

Cosa resta?... quasi niente!...

Serviranno come utile riferimento, per tentare di rispondere, le riflessioni su cosa resta di quel che si studia a scuola, contenute in due articoli di giornale dedicati al problema degli esami. (*Carlo Oliva, «Un esercito di smemorati» e Cesare Mannucci, «Le vicende della memoria»; in Corriere della Sera, risp. 16/VI e 14/VII, 1965*).

«Non è né logico né sensato che interi anni di studio scorrano via come l'acqua sul marmo, senza lasciare, non che qualcosa di stabile e basilare, nemmeno una traccia nella cultura dell'individuo» – dice C. Oliva lamentando come «le cose che si studiano a scuola si dimenticano facilmente: ... Dopo soli tre anni dall'esame di maturità ... ecco, non ricordiamo quasi niente di quell'esame ... e non solo dell'esame ma neanche delle relative materie. Non è strano?». Egli si chiede poi se «è un male inevitabile, che c'è sempre stato e sempre ci sarà, dappertutto, o deriva da cause contingenti ed eliminabili: dalla scuola che non sa veramente insegnare, dagli studenti che non riescono a studiare sul serio, da una effettiva lacerazione della cultura contemporanea che il singolo studente e studioso non è in grado, da sé, di colmare?».

L'altro articolo sdrammatizza alquanto il fatto in sé della smemoratezza, spiegando che è naturale che si ricorda solo ciò che interessa, che all'occorrenza ciò che si è dimenticato spesso riaffiora. Rimane tuttavia la domanda: *«perché le cose che più facilmente dimentichiamo sono quelle imparate a scuola», di cui (citando Croce) «ci riempiamo provvisoriamente la memoria ma senza fonderle nel nostro intelletto?». Risposta:*

«Ben poche delle cose che lo studente, anche il migliore, impara in quegli anni, riescono ad accendere nella mente un interesse veramente vitale»; occorre pertanto che «l'individuo ricavi l'abitudine intellettuale alla ricerca attiva, al confronto, all'approfondimento».

Occorre vitalizzare (dice Mannucci) il «sapere enciclopedico, immobile, completamente sistemato», abbattere i compartimenti stagni, scompaginare l'ordine formale delle cose morte per conseguire l'apparente disordine delle cose vive.

Dischi o nastri nella testa?

A parte altre questioni, la differenza di "ordine" cui qui alludiamo, che è quella esistente e sottolineata tra l'ordine delle trattazioni scolastiche e quello seguito nella scorribanda che ora concludiamo, si può raffigurare con quella tra due diverse forme di memoria nei calcolatori elettronici. L'una è quella di mezzi come i nastri magnetici: sono avvolti in bobine, su ogni bobina è registrato tutto il suo contenuto in un certo ordine, ed è accessibile alla lettura soltanto svolgendolo dal principio alla fine. L'altra è quella delle memorie "ad accesso diretto" (p. es. a dischi), dalle quali, come dice la denominazione, si può ottenere istantaneamente, a richiesta, l'informazione che serve, indipendentemente dalle altre. È chiaro che, nell'analogia, la prima corrisponde al metodo scolastico, sistematico, di ordinare ogni materia in una successione concatenata di nozioni, unidimensionale come una filastrocca e priva di agganci con cose estranee (o pretesamente tali per malinteso orgoglio di autonomia). La seconda corrisponde alla riorganizzazione auspicata. In cui, grazie ai molteplici collegamenti e associazioni tra idee presentatesi insieme o contrapposte in svariate questioni e riflessioni, l'intera memoria è capace di mobilitarsi per cercare ovunque risposte o suscitare echi riflessi sotto l'effetto di ogni stimolo.

Dobbiamo combatterci, tra fautori dell'uno e dell'altro sistema, per una scelta unica ed esclusiva? No, e sembra che l'analogia con le memorie elettroniche debba giovare anche per rispondere equilibratamente a tale apparente dilemma.

Per immettere in una macchina una grande quantità di dati, per conservarli fuori uso per un'epoca futura, per altri casi particolari di elaborazioni, la forma tipo nastro è preferibile o addirittura necessaria; per il funzionamento vivo, efficiente, versatile, è preferibile o addirittura indispensabile la forma "ad accesso diretto", tipo dischi. Seguire sistematicamente un nastro (una catena di deduzioni, di connessioni, di graduali approfondimenti) può essere spesso utile e talvolta è certamente necessario, ma *come una fase dello studio*, *non come la finalità dello studio.*

"Degradazione" liberatrice

Pensando a quest'ultima immagine della memoria ad accesso diretto, chiunque intenda studiare con profitto dovrebbe piuttosto prefiggersi, come finalità, quella di organizzare la propria così.

"Degraderà" in tal modo a cose utili comprensibili familiari divertenti appetibili ciò che viene usualmente rivestito di forme pure solenni accademiche ed ermetiche. (Suol dire spiritosamente un collega che quando il professore si accinge a spiegare i numeri reali secondo la moda liceale sente l'obbligo di mettersi la cravatta nera). Con quest'opera di degradazione – che è piuttosto di demistificazione – contribuirà ad una spinta liberatrice necessarissima in tutta la cultura.

Per illustrare tale idea in forma adeguatamente non accademica, basti riportare due passi felicissimi di una critica teatrale (sulla recita di *Androclo e il leone* di Shaw a Ostia Antica) di Sandro de Feo (su «L'Espresso », 25-VII-1965).

Egli depreca con ragione gli «scritti seriosi, musoni e corrucciati, di quel profondismo tutto formale e scolastico che incredibilmente ancora resiste in Europa e risale nientemeno alla retorica, dominante nel mondo antico, del "sermo sublimis" *e del* "sermo humilis", *secondo cui nessuna storia, nessun dramma potevano essere presi sul serio e compresi nel novero delle cose nobili e profonde se non erano rivestiti di nobile forma e di discorsi e ragionamenti solenni». Occorre invece reagire, mischiare e scompigliare le carte. E infatti «fu il sentimento e la poesia del cristianesimo a mischiare e scompigliare le carte della stanca, sussiegosa retorica degli antichi, rivestendo di "sermo humilis", di parole terra-terra e, all'occorrenza, di puerilità farsesche le passioni più alte e i pensieri sublimi; e fu un grande santo cristiano, san Francesco, ad aggiungervi più di un grano di folle allegrezza. E l'intuizione di Shaw, nelle molte sue commedie in cui è questione esplicitamente o velatamente e allegoricamente di santi, discende da questa tradizione e rivoluzione della poesia e del realismo moderni».*

Esercizi e Problemi

I riferimenti nel testo sono dati con la sigla EP *seguita dal numero progressivo dell'esercizio o problema. Qui, dopo il numero progressivo, è indicata la pagina (o le pagine) ove l'esercizio è menzionato, per dar modo di rintracciare l'argomento cui si riferisce e le indicazioni che possono aiutare a comprendere e impostare il problema.*

1. (p. 5). Quando sono *simili* due rettangoli? Un rettangolo ha lati di 12 cm e 18 cm, un rettangolo ad esso simile che ha un lato di 30 cm ha l'altro lato ...? Quando sono simili due rombi? due ellissi (cfr. n. 5, *fig.* 12)? due corone circolari?

2. (p. 7). Il quadrato di π (= 3,141592 ...) è quasi esattamente = 10: ne è inferiore circa dell'1.3% (esattamente è $\pi^2 = 9{,}8696$ ...). Di quanto, all'incirca, in %, π^4 sarà inferiore a 100? e π^6 a 1000?

3. (p. 15). Col medesimo ragionamento, stabilire se, nel caso della *fig.* 13, le ellissi cui appartengono gli archi che formano la curva cercata hanno o no in comune la tangente nei punti di saldatura (i punti sui prolungamenti dei lati del quadrato).

4. (p. 15). Un filo (teso) congiunge due punti fissi A e B (nello spazio) passando attraverso un cerchio (fisso). Individuare il punto P del cerchio ove il filo si appoggerà (ossia, per cui la distanza $\overline{AP} + \overline{PB}$ è minima).

5. (pp. 17 e 69). Perché le linee si scostano sempre ugualmente dall'equatore nell'onda verso nord e verso sud? Esistono punti per cui la geodetica (partendo, per fissare le idee, da Roma) volge prima verso N, poi verso S, e poi ancora verso N? Vi sono dei punti per i quali sia la partenza (da Roma) che l'arrivo possano avvenire in direzione del parallelo? o per cui ciò si verifichi solo all'arrivo?

6. (p. 21). Per individuare il punto da cui parte un suono, sapendo che esso si propaga in linea retta con velocità nota, basta disporre tre posti d'ascolto e rilevare i ritardi tra l'arrivo in essi (p. es. trasmettendo segnalazioni elettriche a una centrale). Il procedimento è stato usato in guerra, effettivamente, per individuare la posizione di artiglierie, o di lavori con mine, ecc., del nemico. Come risulta individuato il punto P (conoscendo le differenze tra AP e BP, tra AP e CP, e (quindi) tra BP e CP)?

Cosa potete dire circa l'accuratezza di tale individuazione (secondo i concetti indicati nel n. 15)? Cercate di vedere dove può trovarsi P se si ammette che ciascuna delle tre differenze predette possa essere affetta da un errore di una data grandezza al più (p. es., su un disegno, di 1 cm).

7. (p. 23). Problema simile (ricordare la regola di divisibilità per 3 e per 9): un numero la cui somma delle cifre è divisibile per 3 ma non per 9 (o, se si preferisce, che divisa per 9 dà resto 3 o 6) non può essere un quadrato.

8. (p. 23). Controllare che, per x intero, la cifra delle unità di x^5 è la medesima che per x (basta verificarlo per $x = 0, 1, \ldots, 9$, oppure si può vedere, in base a quanto detto per i quadrati, che $x^5 - x$, ossia $x\,(x^4 - 1)$, è sempre divisibile per 10). Perciò, se uno ricorda le quinte potenze di 10, 20, ... , 90 (anche approssimativamente: milioni 0, 1, 3, 24, 100, 300, 800, 1700, 3300, 6000) può rispondere di colpo alla richiesta della radice quinta di un numero fino a 10.000.000.000 che sia una quinta potenza.

9. (p. 27). Calcolare il quadrato di 3000, e quindi ottenere quelli di 3001, 3002, ecc. aggiungendo via via gli opportuni numeri dispari. Giunti al quadrato di 3010 (oppure 3020) controllare il risultato col calcolo diretto (3010×3010, oppure $[3000 + 10]^2$).

10. (p. 29). La somma dei quadrati dei primi n numeri è il volume di una piramide a gradini formata sovrapponendo n tavolette quadrate di lato n, $n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$, e ciascuna di altezza 1. Il volume di una piramide vale *base* $\times$ *altezza* / 3. Verificare che il volume trovato per la “piramide a gradini” risulta effettivamente compreso tra quelli della piramide inscritta e di quella circoscritta, che hanno (accertarsene!) lato della base ed altezza tra loro uguali, e rispettivamente n ed $n + 1$.

11. (pp. 31 e 38). Si deforma un quadrato tenendone fisso un lato (base): quale linea percorre il punto d’incrocio delle diagonali? Che relazione c’è tra il risultato cui si perverrà e il teorema di cui ad EP, 19? E se invece di un quadrato si ha, inizialmente, un rettangolo (altezza minore, oppure maggiore, della base)?

Se pensiamo fisso un lato verticale, il rettangolo può rappresentare un cancello (di quattro travetti in legno, p. es.). Perché viene aggiunto qualcosa in diagonale? e secondo quale diagonale? (pensare e distinguere i due casi: diagonale realizzata con travetto di legno, oppure con cavetto d’acciaio).

12. (p. 33). Quale può essere l’ombra di una sfera su un piano, risp. con luce solare (sorgente a distanza praticamente infinita) oppure con luce uscente da un punto (distanza finita)? Quando è circolare? quando è illimitata?

13. (p. 33). I passaggi fatti sull'esempio numerico, e che in generale consistono nel trasformare $y = ax^2 + bx + c$ in $y = a(x + {}^b/_2\ a)^2 + (c - b^2/4a)$, significano solo che in tal modo la parabola viene espressa nella forma più naturale con riferimento al suo vertice. Posto infatti $x_0 = -\ {}^b/_2\ a$ ed $y_0 = c - b^2 / 4\ a)$, risulta $y = y_0 +$ c; a$(x - x_0)^2$, ossia la parabola parte dal livello $y = y_0$ nel punto $x = x_0$, (dove il termine quadrato si annulla) e sale simmetricamente scostandosi da $x = x_0$ (se $a > 0$, discende se $a < 0$). Le radici (ossia le intersezioni x_1, x_2 della parabola con l'asse delle ascisse) esistono se y_0 è negativo ed a positivo (o viceversa), come si vede dalla *fig.* 34. Del resto la formula stessa permette di ricavare $a\,(x - x_0)^2 = -\,y_0$, $x - x_0 = \pm\sqrt{(-\,y_0/a)}$ (essendosi in sostanza, pensando il vertice come nuova origine, ricondotto il problema a quello banale di trovare l'intersezione della parabola $y = a\ x^2$ con una retta orizzontale $y =$ costante). Di qui la formula risolutiva

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{-y_0/a}$$

ossia esplicitamente

$$x_{1,2} = \left\{-b_0 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}/2a.$$

14. (p. 33). È istruttivo vedere il problema (e la formula risolutiva) del precedente EP, 13 sotto un altro aspetto, anche perché è sotto questa forma (sostanzialmente) che esso è stato affrontato e risolto per la prima volta dal matematico mussulmano Al-Khuwarizmi (vissuto a Bagdad intorno all'800-850 d. C.).

Per comodità scriviamo l'equazione nella forma

$$x^2 + 2kx = l^2$$

(con riferimento ai simboli dell'es. precedente, ciò significa porre $k = b/2$a e $l^2 = -\ c\,/a$, considereremo il caso particolare in cui a e b sono positivi e c negativo, cosicché k è positivo come l^2, che risulta tale già per averlo scritto come quadrato). Possiamo allora interpretare k, l ed x come lunghezze (le prime due assegnate, la terza incognita), e l'equazione come una relazione che vogliamo sussista fra delle aree:

dobbiamo scegliere una lunghezza x tale
che il quadrato di lato x
più due rettangoli di lati k ed x
dia (come area) il quadrato di lato l.

La *fig.* 49 si deve pensare costruita così. Dapprima si disegnano gli assi, e i due quadrati di lato k ed l (noti), nella posizione indicata. Il problema è poi di determinare lo spessore, x, del bordo a forma di L rovesciata che contorna sopra e a destra il quadrato k^2 (bordo formato appunto da un quadrato di lato x e due rettangoli di lati x e k), in modo tale che la sua area sia uguale a quella del quadrato l^2.

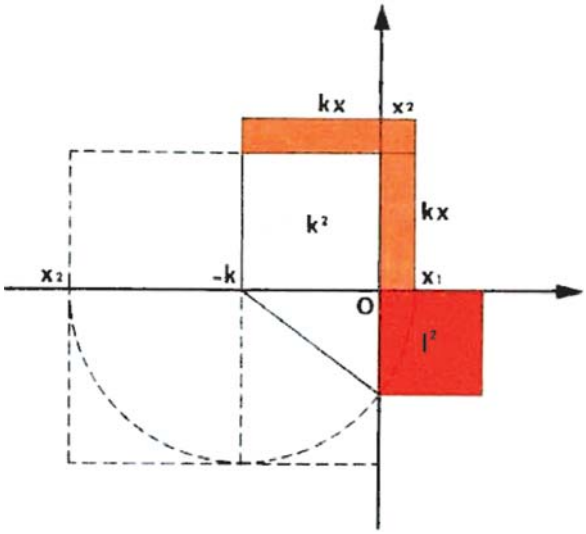


Figura 49

Ma ciò vuol dire che il quadrato di lato $k + x$ (che è k^2 più il "bordo") dev'essere uguale alla somma dei quadrati k^2 ed l^2, ossia il suo lato $k + x$ (per il teorema di Pitagora) dev'essere $\sqrt{k^2 + l^2}$ (ipotenusa, v. figura). Risulta $x = -k + \sqrt{k^2 + l^2}$.

Ciò è in accordo con la precedente formula risolutiva, ma dovremmo avere anche l'altra soluzione (con segno "$-$" davanti alla radice). Effettivamente, anche portando l'ipotenusa dal punto $-k$ verso sinistra anziché verso destra si ha una soluzione (che però va interpretata opportunamente tenendo conto dei segni dei prodotti che dànno aree: si cerchi di farlo per esercizio guardando le linee punteggiate), intendendo le aree in senso positivo soltanto la prima soluzione risponde al problema geometrico.

15. (p. 34). Nella *fig.* 30 (descrizione, v. nel testo) il rettangolo di base x e altezza y ha area massima tra quelli col vertice sul segmento tra $(0, 2y)$ e

$(2x, 0)$, gli altri hanno area minore, e pertanto tutti gli altri punti di detto segmento stanno al di sotto dell'iperbole che lo tocca in quel punto. Ciò basta ad assicurare che è tangente (sapendo che l'iperbole non ha punti angolosi o altre irregolarità).

16. (p. 34). L'affermazione finale richiede una precisazione. La proprietà vale per qualunque curva che sia tangente all'iperbole *esternamente*, se è tangente *internamente* si ha, anziché un massimo, un minimo, e se è tangente *attraversandola* non si ha né massimo né minimo. Cercate di disegnare varie curve tangenti all'iperbole in quel punto, realizzando i tre casi e osservando che vale quanto detto (v. *fig.* 30).

17. (p. 35). Eseguire con esattezza il disegno (come nella *fig.* 37, ma con triangolo di forma diversa) e constatare che le tre rette concorrono effettivamente in un punto.

18. (p. 37). Si segnino, su una circonferenza di centro O, due punti A e B, e quindi un altro qualunque, P, il teorema rammentato dice che l'angolo APB è metà di quello AOB (con l'avvertenza che per AOB si deve intendere l'angolo per andare da A a B senza passare per P, cosicché se P è sull'arco minore tra A e B si deve prendere $360^o - AOB$ nel senso più naturale). Si tracci il diametro per P (e naturalmente O), esso divide sia AOB che AOP nella somma (o differenza) di due angoli, è facile vedere (e si cerchi di spiegare) che la proprietà detta vale per le due parti di qua e di là della diagonale, e quindi per la somma (o differenza).

19. (p. 37). Cosa dice il teorema di cui al precedente EP, nel caso particolare di un angolo inscritto in un semicerchio (cioè: A e B estremi di un diametro, P punto qualunque sulla circonferenza)? Come si può utilizzare tale risultato per costruire la retta perpendicolare a una data (e passante per un dato punto)?

20. (p. 36). Come EP, 17, ma con riferimento alla *fig.* 39.

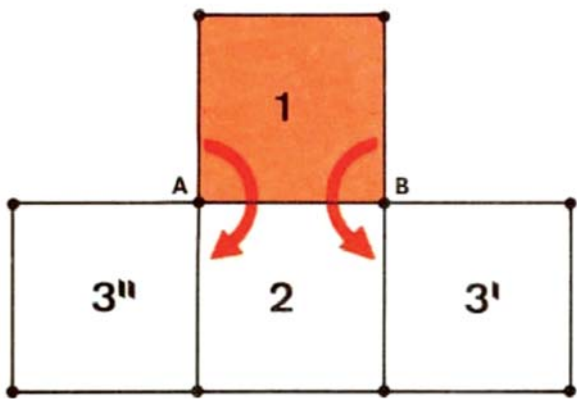
21. (pp. 38 e 41). Occorre sempre fare attenzione alla possibilità che un problema sia inteso nel piano o nello spazio (e ad altre varianti del genere, spesso sottintese, ma che a volte traggono in inganno, casualmente o volutamente). Ecco tre domande ... facili se non si pensa (come capita quasi a tutti) che si riferiscano al piano anziché allo spazio: *a*) costruire due circonferenze senza punti in comune e passanti ciascuna per il centro dell'altra, *b*) con 6 fiammiferi uguali costruire 4 triangoli equilateri, *c*) con 3 tagli dividere una torta in 8 pezzi.

22. (p. 39). Se è data la base AB, il terzo vertice P deve trovarsi sulla verticale per H e sulla circonferenza per A e B di centro O tale che $AOB = 2\gamma$ (γ = angolo dato, opposto alla base), costruzione usata nella *fig.* 39, basata sulla dimostrazione suggerita in EP, 18. Se, anziché la base, è data l’altezza, dopo fatta la costruzione precedente scegliendo AB ad arbitrio, basta tracciare la parallela alla base alla distanza da P voluta (h), questo lato, coi due precedenti, dà il triangolo desiderato.

23. (p. 40). In base alla definizione, dimostrare che: l’ombra di un corpo convesso (sia da sorgente infinitamente lontana, o no) è sempre convessa, l’intersezione (parte comune) di due (o più) corpi convessi è convessa.

24. (p. 41). La rototraslazione è il movimento di un cavatappi (o in genere di una vite). Tale movimento si può effettuare in due tempi: prima la sola rotazione, poi la sola traslazione (lungo l’asse di rotazione), ma una traslazione si può ottenere (come si è detto) mediante due rotazioni (v. anche EP, 25). In base a ciò, si indichi un modo per ottenere un qualunque spostamento (rototraslazione) mediante tre rotazioni.

25. (p. 42). Verificare praticamente la non permutabilità di rotazioni con centro diverso. Si prenda ad es. un cartoncino quadrato, e si indichino con A e B i punti (del pavimento, del tavolo) ove si appoggiano gli estremi di un suo lato (v. schema),



con una rotazione ad angolo retto in verso orario intorno ad A e in senso antiorario intorno a B si passa dalla posizione iniziale (1) alla (3′) o alla (3″) a seconda che si eseguisce prima la rotazione intorno ad A o quella intorno a B (passando sempre attraverso la posizione (2), dove però il cartoncino si trova in direzioni opposte, come si vede se esso porta scritte o disegni). Con un foglio trasparente e rigato, si possono fare esperimenti più variati con rotazioni di angolo qualunque attorno a punti qualunque (punti segnati su un foglio fisso sottostante, nei quali sarà successivamente fissato con uno spillo il foglio trasparente da farvi ruotare attorno).

26. (p. 46). Quando è che una similitudine è una rotazione (cioè lascia invariate le lunghezze)? Notare che i vettori unitari vengono trasformati in vettori di lunghezza $\sqrt{a^2+b^2}$ (che si dice *modulo* del numero complesso $a + i\,b$), quindi ... Verificare che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli, e constatare che ciò è conseguenza diretta (senza alcun calcolo) della conclusione precedente (... se l'avete trovata).

27. (p. 46). Considerando la parabola

$$y = x^2 - 2x + 2,$$

che si può scrivere $y = (x-1)^2 + 1$ (è sempre $y \geq 1$, quindi sempre $y > 0$), si ha un esempio di equazione di secondo grado senza radici (reali): per nessun x reale è $x^2 - 2x + 2 = 0$, ossia $x^2 = 2(x-1)$.

La formula risolutiva dà $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$, e, ponendo al posto di $\sqrt{-1}$ le rotazioni ad angolo retto $\pm i$, si constata che effettivamente le similitudini $1 + i$ ed $1 - i$ soddisfano l'equazione. Esse infatti consistono nella rotazione di 45° con ingrandimento da 1 a $\sqrt{2}$ (cioè: sono le similitudini che portano un lato di un quadrato nella diagonale, nell'uno o nell'altro verso), eseguendole due volte si ottiene x^2 che è una rotazione ad angolo retto con raddoppio delle misure lineari (e infatti $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, e così $(1-i)^2 = -2i$), ciò che è proprio lo stesso che si può ottenere moltiplicando per 2 la similitudine $x - 1$ che è $(1+i) - 1 = i$, rispettivamente $(1-i) - 1 = -i$.

Ciò vale in generale. Anche il fatto che le radici siano numeri *complessi coniugati* (cioè differenti solo per il segno della parte immaginaria, ossia del tipo $a + i\,b$ e $a - i\,b$) vale sempre (e soltanto) se i coefficienti dell'equazione sono reali (ad es. non per $x^2 + 2x + 1 - 2i = 0$, le cui radici sono i e $i - 2$, come si verifica agevolmente).

28. (p. 46). La notizia data in fine ad (EP, 27) si estende al caso di equazioni algebriche di qualsiasi grado n (a coefficienti reali): le radici sono o reali o, a coppie, numeri complessi coniugati. Poiché in tutto sono

n (come annunciato nel testo), si concluda (in base a quanto sopra) che un’equazione reale *cubica* (cioè, di grado $n = 3$) ha sempre almeno una radice reale. Lo stesso per qualunque n dispari. Più in generale: le radici reali sono in numero dispari se n è dispari, in numero pari se n è pari. Ogni polinomio di grado n si può scomporre nel prodotto di n termini $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le radici (che, nel caso di polinomi a coefficienti reali, sono reali o a coppie complesse coniugate). Va precisato che, nel contare le radici (p. es. negli enunciati detti sopra), se uno stesso numero figura più volte in tale sviluppo va contato più volte (radici doppie se figurano due volte, e così triple, quadruple, ecc.), le radici complesse coniugate hanno sempre la stessa molteplicità (per equazioni reali) e quindi le conclusioni predette non ne soffrono (non c’è da temere ad es. che una equazione cubica abbia due radici complesse coniugate di cui una doppia, il che metterebbe in difetto la conclusione che ne esiste una reale!).

29. (p. 57). Si cerchi di giustificare e possibilmente precisare questa indicazione partendo dall’osservazione che $2^{10} = 1024$.

30. (p. 58 agg.). Proseguire il calcolo di $\sqrt{10}$ trovando ancora uno o più decimali. Sperimentare il metodo su qualche altro caso.

31. (p. 69). Ci sono persone che, volendo star sedute all’ombra, collocano le sedie dove il terreno è in ombra (p. es., ombra di un ombrellone), poi si stupiscono di trovarsi con la testa al sole. Come dovevano collocare la sedia?

32. (p. 69). Per finire: Scrivendo a macchina, una persona usava il nastro a due colori, scrivendo tutto in nero tranne la parola FINE in rosso al termine di ogni capitolo. Una volta notò che tale parola si vedeva scritta sul nastro rosso (perché i caratteri erano sporchi di nero). Però guardando il nastro alla fine del lavoro vide che a volte era scritto FINE e altre volte ENIF.

Perché?

Nota Bibliografica

a) Opere senz'altro accessibili e adatte per ragazzi sui 10-13 anni

1. *La via della matematica,* di EMMA CASTELNUOVO, ed. La Nuova Italia, Firenze (nuova edizione, 1966), nei due volumi:
   1*a*: *I numeri,* 1*b*: *La geometria.*
   È un libro di testo, ma è anche e soprattutto molto di più e di meglio.
2. «Serie M», ed. Zanichelli, Bologna: Libriccini contenenti trattazioni divulgative e semplici di argomenti diversi.
   Finora apparsi: 2*a*: *Strumenti per calcolare*, 2*b*: *I sistemi di numerazione*, 2*c*: *Invito alla matematica* (tutti di D. A. JOHNSON e W. H. GLENN, tradotti dall'americano), annunciati: *Il mondo delle misure – Avventure tra i diagrammi – Scorciatoie nei calcoli – Divertimenti matematici – Insiemi e operazioni.*
3. *Compendio statistico italiano,* edito (ogni anno) dall'Istituto Centrale di Statistica, Roma. Porta molte aggiornate tabelle statistiche d'ogni genere (con diagrammi, ecc.), utili per consultazione e per esercitazioni di carattere concreto su dati effettivi.

b) Adatte per ragazzi di 10-13 anni particolarmente dotati per la matematica, oppure di età maggiore e più avanti con gli studi

4. «Serie MM», ed. Zanichelli, Bologna:
   Volumetti contenenti trattazioni divulgative ed elementari di argomenti diversi (di livello abbastanza più elevato rispetto alla «Serie M», v. NB, 2). Finora apparsi 4*a*: *Il mondo dei grandi numeri* (PH. J. DAVIS), 4*b*: *I grafi e le loro applicazioni* (O. ORE), 4*c*: *Numeri razionali e numeri irrazionali* (I. NIVEN), 4*d*: *Trasformazioni geometriche* (I. M. YAGLOM). Si tratta di traduzioni (i primi tre autori sono americani, il quarto è un russo).
5. *How to solve it?* («Come si risolve?»), di GEORGE PÓLYA, A Doubleday-Anchor Book, New York 1957.
   È tradotto in quasi tutte le lingue, e sembra apparirà presto anche in italiano insieme alle altre opere, più elevate, dello stesso autore (v. NB, 12 e 13). Questi è impareggiabile per genialità e infaticabilità nell'esaminare e illustrare le esigenze di un'intelligente educazione nello spirito della matematica. Anche i volumi successivi sono da raccomandare in questo stesso senso (a un livello più avanzato).

6. *La matematica per le applicazioni economiche,* di B. DE FINETTI e F. MINISOLA, ed. Cremonese, Roma 1961.
Vi si possono trovare, un po’ più sviluppati, argomenti come quelli accennati nel testo, di carattere economico, statistico, probabilistico (ma anche altri: notizie in forma facile su funzioni, ecc.).

c) Adatte ad un livello ancora un po’ più avanzato

7. *Le matematiche nella storia e nella cultura,* di FEDERIGO ENRIQUES (pubbl. a cura di A. Frajese), ed. Zanichelli, Bologna 1938.
Svariate e interessanti notizie, in parte facili, in parte relative ad argomenti elevati, sull’evoluzione della matematica e le sue relazioni con gli altri campi del pensiero e con le applicazioni.
8. Serie «*Argomenti di Matematica*», ed. Progresso Tecnico Editoriale, Milano.
Volumetti sul tipo della «serie MM» (v. NB, 4), ma, in genere, un gradino di difficoltà più su. Autori russi, traduzione da quella americana. Finora usciti: 14.
9. *Introduzione alla matematica,* di ALFRED NORT WHITEHEAD, trad. it. La Nuova Italia, Firenze 1965 (orig. inglese, Londra 1911).
10. *Introduzione alla matematica,* di E. C. TITCHMARSH, trad. it. nella collez. «Saper tutto», ed. Garzanti, Milano 1963.
11. *Che cos’è la matematica,* di RICHARD COURANT e HERBERT ROBBINS, trad. it. ed. Boringhieri (già Einaudi), Torino 1951.
12. *Mathematics and Plausible Reasoning,* di GEORGE PÓLYA, ed. Princeton University Press, Princeton, N.Y. 1954, nei due volumi:
12*a*: *Induction and Analogy in Mathematics*,
12*b*: *Patterns of Plausible Inference.*
13. *Mathematical Discovery,* di GEORGE PÓLYA, ed. Wiley, New York. 13*a*: vol. I, 1962, 13*b*: vol. II, 1964.
Il II vol. contiene indici generali per l’intera opera del PÓLYA sull’argomento della soluzione di problemi (NB, 5, 12*a,* 12*b,* 13*a,* 13*b*), cfr. i commenti ad (NB, 5).

d) Opere di interesse didattico (per insegnanti, ecc.)

14. *Didattica della matematica,* di EMMA CASTELNUOVO, ed. La Nuova Italia, Firenze 1963.
15. *Matematica moderna, matematica viva,* di ANDRÉ REVUZ, trad. it., ed. Armando Armando, Roma 1965.

Riviste

16. «Le scienze e il loro insegnamento», bimestrale, ed. Le Monnier, Firenze.
17. «Archimede», bimestrale, ed. Le Monnier, Firenze.
18. «Periodico di Matematiche», bimestrale, ed. Zanichelli, Bologna.
    Tutte e tre le riviste sopra indicate (NB, 16, 17, 18) si occupano di matematiche con particolare riguardo ad argomenti e questioni attinenti all'insegnamento nelle scuole secondarie. Qualcosa di adatto ai ragazzi si può trovare saltuariamente in tutte, ma più nella prima.
19. «Scuola e Città», mensile, ed. La Nuova Italia, Firenze.
    Si occupa di problemi scolastici e didattici, tra cui spesso quelli riguardanti l'insegnamento della matematica. Vedi in particolare un numero speciale:
    19*a*: «Matematica moderna e Scuola» (sett.-ott. 1965) con *Introduzione* di Aldo Visalberghi.

f) Enciclopedie

Chi possiede (o ha facilità di consultare) un'enciclopedia veda se le voci sulla matematica sono di livello per lui adatto.

g) Informazioni concernenti le Gare Matematiche

Le gare matematiche (menzionate ripetutamente nel testo) hanno una lunga tradizione in molti paesi (soprattutto in Ungheria, dove molti dei grandi matematici di quel paese si sono formati e rivelati in tali gare, istituite nel 1894 in onore di Eötvös).

In Italia, dopo iniziative sporadiche in varie città, hanno assunto una certa regolarità dal 1963, quando la Società «Mathesis» ha iniziato a far svolgere annualmente una «Gara matematica nazionale» cui sono ammessi i migliori elementi segnalatisi nelle gare locali, organizzate in genere presso gli Istituti di Matematica delle Università. Presso qualcuno di tali Istituti si comincia anche a tenere, per un contatto meno saltuario con studenti delle scuole secondarie, delle riunioni di «Club matematico» con conversazioni ad essi dedicate. Notizie sulle gare (problemi proposti, discussioni, premiati, ecc.) appaiono di quando in quando su riviste (come NB, 16, 17, 18), cfr. ad es.:

20. *Riflessioni su una gara matematica,* di B. DE FINETTI (in «Archimede», 1962).
Per raccolte più sistematiche e ricche di problemi (con soluzioni e spiegazioni illustrative) bisogna ricorrere a pubblicazioni estere. Quelle sotto citate si trovano però in una collezione da cui furono tratti i volumetti della «Serie MM» (NB, 4), sicché c’è da sperare che appaiano anche in italiano.

21. *Hungarian problem book* (I, II),
21 *a:* I (1894-1905), 21 *b:* II (1906-1928).

22. *The MAA Contest Problem Book* (I, II), *22 a*: I (1950-1960), 22 *b*: II (1961-1965). Entrambi nella serie «New Mathematical Library», ed. Random House, New York. I problemi di (NB, 22) sono più numerosi e semplici (in media) servendo per un esame finale, non per una gara.
Una conversazione al «Club Matematico» (Roma) è pubblicata:

23. *Paradossi sulle Medie,* di B. DE FINETTI (in «Per. di Mat.», 1966), un argomento svolto in modo analogo (anche se non proprio in un Club matematico) è ad es.:

24. «*Argomenti vecchi ed insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari*», di CARLO FELICE MANARA (in « Le Scienze, ecc.», 1965).

Nota didattica per l'insegnante

Le indicazioni date nel programma sono particolarmente elastiche, e ciò può essere utile se ciascun insegnante cercherà di sperimentare diversi metodi e confrontarne l'efficacia e la adeguatezza agli interessi dei ragazzi affidatigli. Tale controllo non può consistere nell'accertare la capacità di ripetere enunciati o di eseguire calcoli materiali, bensì nel rendersi conto di effettivi progressi nell'abitudine a vedere le cose attraverso l'aiuto di nozioni matematiche. A tal fine si presta particolarmente bene la scuola media, dato che le osservazioni scientifiche possono dare larga occasione di concreto impiego di considerazioni matematiche.

Quale che sia il metodo che ogni insegnante riterrà di seguire, più o meno rigidamente, a seconda delle preferenze proprie e di quelle che ritiene prevalgano fra i suoi allievi, ciò che importa soprattutto è di non far ritenere che la matematica si esaurisca nello studio della materia scolastica, che come tale risulta purtroppo quasi sempre e quasi inevitabilmente arida. Occorre mostrare che essa diviene interessante e attraente se intesa come spunto e suggerimento di riflessioni che ciascuno dovrebbe sviluppare, e mezzo per riuscire a padroneggiare problemi che ciascuno è destinato a incontrare, di natura diversissima.

A questo scopo è ispirato il presente volumetto che, come dice il titolo, vuol cercare di far comprendere quanto importi il "saper vedere" in matematica. Altri volumetti che seguiranno nella stessa collana riprenderanno tale tipo di considerazioni con riferimento a temi più specifici. In questo vengono toccati di sfuggita, a titolo esemplificativo, argomenti diversi, coll'intendimento di mostrare quante cose diverse e spesso ignorate si possono incontrare nel campo della matematica. Si tratta spesso di esempi troppo semplici per dare una idea adeguata o di accenni necessariamente superficiali a cose troppo complesse per essere spiegate, ma è proprio di stimoli di questo tipo che c'è bisogno (e che in genere mancano) per evitare che tutto (e in ispecie la matematica) si degradi, nell'insegnamento, a passiva e sterile ripetizione.

Occorre inculcare nei giovani la consapevolezza che sta a loro perfezionare e far sviluppare, appassionandovisi, ciò che dà loro la scuola. Occorre dir loro che quello che la scuola dà, e può dare, non è che un seme, i frutti matureranno negli anni e nei decenni per chi ne farà tesoro riservandogli un terreno fertile nella giovane mente e coltivandolo con la riflessione e l'esercizio. Che non cada nel deserto, ché andrebbe sprecato.

E così avviene a chi si limitasse a conservarlo intatto e sterile per il giorno degli esami.

Forse di ciò è difficile rendersi ben conto, anche perché, nella scuola, la necessità di svolgere gravosi "programmi" non lascia tempo per riflessioni non strettamente attinenti agli argomenti che si susseguono uno dopo l'altro. Ed anche i problemi scolastici devono perciò quasi sempre limitarsi al tipo dei problemi *artificiali*, costruiti appositamente *per applicare un dato metodo.* Ciò conduce purtroppo a ritenere che la matematica consista in un mucchio di cose imparate da ricordare, e che, dato un problema, o si conosce la ricetta e lo si risolve applicandola macchinalmente (e non occorre pensare), oppure non la si conosce e allora non c'è niente da fare (e non occorre pensare).

È stato detto giustamente:

Occorrerebbe insegnare più "per problemi" che "per teorie": una teoria dovrebbe avere la portata minima necessaria per inquadrare un certo gruppo di problemi.

G. PRODI, *dell'Univ. di Pisa* (NB., 18, 1965)

Ciò potrà farsi, almeno in parte, e col tempo, anche nella scuola (dove non mancano tendenze ed esperimenti in tal senso), e maggiormente nel doposcuola (sperando possa venir presto attuato efficientemente secondo le forme delle libere attività parascolastiche ormai attuate in molti paesi), comunque si potrà al massimo aiutare il seme ad attecchire, ad accendere il gusto di coltivarlo, non mai (come immaginano i pigri) a fornire il fabbisogno di frutti bell'e maturi per tutto il seguito della vita.

Ciascuno dovrà comunque e sempre integrare e ravvivare e personalizzare lo studio scolastico con la sua propria riflessione, con letture (NB), con l'esercizio su *effettivi* problemi (sia formulati da altri libri, anche qui in EP), in riviste, ecc., sia desunti da cose da lui stesso osservate, come potrebbero essere ad es. (EP, 5, 11, 21, 31, 32). Allo stesso fine si svolgono, in molte sedi, delle "Gare matematiche" (per giovani di età 15-20, universitari esclusi). Molti dei temi proposti in tali gare vengono poi pubblicati su riviste (NB, *g*).

A tutte queste attività è bene che i giovani vengano incoraggiati e interessati, come e più che allo studio nel senso passivo e scolastico del termine.

Indice

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 409-423

L'apprendimento della matematica (*)

Bruno de Finetti

Nel momento attuale, di fronte all'esigenza di una sempre più vasta diffusione di conoscenze che il progredire delle scienze rende sempre più complesse e l'evolversi della civiltà rende sempre più indispensabili per ogni attività, i problemi dell'educazione, dell'insegnamento e dell'apprendimento, occupano un posto preminente tra le sfide che la società deve affrontare.

Si tratta di problemi che hanno molte dimensioni e molti aspetti, a cominciare, naturalmente, da quelli sociali e organizzativi; ma il punto preliminare è necessariamente la riflessione sulle finalità da prefiggersi e l'analisi delle possibilità di realizzarle seguendo questo o quel criterio pedagogico (o questa o quella successione di criteri in corrispondenza all'età o altre caratteristiche). Ciò è pregiudiziale anche per orientarsi riguardo a soluzioni di portata organizzativa fondamentale, come ad esempio l'adozione (su scala più o meno generalizzata) dei metodi di istruzione programmata.

Ed effettivamente i problemi psicologico-pedagogici-didattici sono da qualche tempo oggetto di rinnovata attenzione e di un approfondimento adeguato alla gravità degli impegni derivanti dal salto qualitativo e quantitativo nelle esigenze dell'istruzione (anche se purtroppo un certo disdegno accademico verso la didattica sembri tuttora duro a morire). L'urgenza di riforme radicali nella scuola, a tutti i livelli, è troppo impellente per poter non essere avvertita anche dai più sordi, ed una salutare riforma implica soprattutto che si riconosca la necessità di eliminare quanto è superato e superfluo e di condensare sottolineandovi l'essenziale quanto va troppo rapidamente crescendo, il bisogno di creare esseri vivi aperti alle novità del futuro anziché fossilizzati depositari di idee e nozioni recepite dal passato.

(*) Pubblicato in: *La Riforma della Scuola*, 4, 1969, pp. 11-17.

* * *

In questa prospettiva, è naturale che gli studi psicologico-pedagogico-didattici debbano porsi in una visuale più elevata ed attingere una concretezza più specifica: guardare cioè non all'effetto banale (magari mnemonico, per lo più transeunte) di recepire date cose bensì all'effetto durevole che esse devono avere sulla capacità di affrontare questioni e situazioni nuove e imprevedibili; e teorizzare non genericamente sull'apprendimento in termini metafisici o pseudometafisici ma concretamente e specificamente (pur senza rinunciare a un quadro d'insieme unitario) sull'apprendimento delle singole discipline e parti di esse e secondo questo o quel modo di intenderne e presentarne l'assenza e la struttura e gli scopi.

Il caso della matematica è, fortunatamente, oggetto di particolare attenzione da parte di numerosi studiosi ed anche di lavoro e studio da parte di commissioni; a volte è considerato isolatamente, altre volte in nesso coll'insegnamento delle altre scienze e discipline. Vi sono, certamente, molte ragioni per concentrare sul caso della matematica uno speciale interessamento, sia per la proverbiale avversione che l'insegnamento della matematica provoca nei più (e che, come da più parti è stato affermato, a mio avviso giustamente, è colpa non della matematica ma del modo in cui viene insegnata), sia per la posizione particolare della matematica nei riguardi delle altre coscienze e per le differenze d'impostazione che se ne possono preferire a seconda di tale inquadramento e di ulteriori tendenze (ad es. circa il grado e il modo di ricorso all'assiomatizzazione).

* * *

Due recenti libri (1) sono atti a suscitare considerazioni e riflessioni su importanti aspetti del problema. Il libro di Jerome S. Bruner, lo psicologo cui tanto devono gli studi sui processi di apprendimento, mette il dito sulla piaga che a suo (e mio) avviso costituisce la fondamentale deficienza e causa di funzionamento a vuoto degli sforzi per l'istruzione, in ispecie in matematica. Il difetto sta nel trascurare gli aspetti di pertinenza della «mano sinistra» (fantasia, intuizione) disseccando tutto nella mera sistemazione razionale (di pertinenza della «mano destra»). Ed è notevole merito del Bruner di aver

(1) J. S. BRUNER, *Il Conoscere: Saggi per la mano sinistra*; ed. Armando, Roma, 1968.
Z. P. DIENES, *Uno studio sperimentale sull'apprendimento*, trad. ital. con prefazione di A. Pescarini, ed. Feltrinelli, Milano, 1968.

acutamente ravvisato nella matematica, e nell'insegnamento e apprendimento della matematica, il campo ove l'intervento della «mano sinistra» sarebbe particolarmente vivificatore ed è invece pressoché totalmente assente.

Il libro di Dienes riferisce su esperimenti da lui suggeriti, ed eseguiti personalmente o seguiti, attinenti a metodi — e in particolare «giochi» escogitati per introdurre certi tipi di nozioni e strutture matematiche. Il collegamento con l'argomento precedente sta nel fatto che lo stesso Bruner si è interessato attivamente a questi esperimenti (e ha scritto la prefazione a Dienes, per l'edizione inglese). Ciò dà il modo di controllare la connessione (più o meno stretta, come diremo) tra gli esperimenti di Dienes e le vedute di Bruner (o la loro interpretazione da parte di chi scrive), e di esaminarne le possibili conclusioni sotto un punto di vista più significativo.

* * *

Vediamo anzitutto di chiarire un po' più, citando o riassumendo alcune frasi di Bruner (pp. 23-31 e 44-47), il significato che egli attribuisce ai simboli della «mano destra» e «sinistra», l'apporto che ciascuna «mano» dovrebbe dare nell'insegnamento e per l'apprendimento, e in particolare tali apporti nel caso della matematica.

La destra è l'ordine e la legalità, le droit. Le sue bellezze sono quelle della geometria e delle rigide connessioni. Cercare la conoscenza con la mano destra è coscienza. Eppure, dire soltanto ciò della scienza significa trascurare alcune delle sue fonti, poiché le grandi ipotesi della scienza sono doni che giungono dalla mano sinistra.

Non riusciamo ad esplorare tutte le vie di accesso alla psiche: una di esse resta inesplorata, ed è una via di accesso il cui mezzo di comunicazione sembra essere la metafora, cioè lo strumento conoscitivo offerto dalla «mano sinistra». È una via che consente felici ipotesi e fortunate intuizioni e si traduce nell'attività unificatrice, nelle sintesi operate dal poeta e dal negromante, che guardano obliquamente piuttosto che direttamente. Le loro intuizioni generano una grammatica del tutto particolare, proprio cercando connessioni, suggerendo similitudini e intrecciando con scioltezza idee di una trama empirica.

Forse quello attuale è il momento più favorevole alla mano sinistra, a una mano sinistra che possa incitare la destra verso nuove direttive, così come accade nelle scuole d'arte, quando bisogna trovare i mezzi per in-

fondere nuova vita ad una mano che è divenuta troppo adusa alla tecnica, ai processi formalizzati, e troppo poco vicina all'occhio indagatore.

Lo scienziato e il poeta non vivono agli antipodi. La separazione artificiosa dei due modi di conoscenza impedisce all'intellettuale contemporaneo di essere un efficace creatore di miti per il suo tempo. Il feticismo della cosiddetta oggettività ci impedisce di richiamarci a tutto quel lavoro preparatorio di natura intellettuale ed emotiva che è in fondo la base di ogni nostro sforzo di carattere più formale o scientifico. Gli studi sulla conoscenza sono diventati troppo asettici e formalizzati.

Nel tentativo di formulare alcuni schemi di una «teoria dell'istruzione», cercando il caso meravigliosamente più semplice, decisi di studiare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Ma ben presto mi fu chiaro che il cuore dell'apprendimento matematico era piuttosto rivolto dalla parte sinistra.

L'origine di una scoperta o creazione è una *sorpresa produttiva* (*effective surprise*) che, nella matematica (con riferimento a G. H. Hardy e ad H. Poincaré), *consiste particolarmente nel creare un ordine fra elementi diversi, in modo da poter vedere relazioni che prima non erano evidenti, raggruppamenti che prima non erano presenti, connessioni che non erano a portata di mano: sistematicità, profondità di relazioni, armonia ne sono il risultato*. Si tratta di una *attività combinatoria*, da non confondere però *con la capacità di miscelare zone o aspetti noti dell'esperienza, con il ricorso a strani algoritmi, in una ridda di permutazioni: creare consiste nel non fare combinazioni inutili e nel fare quelle utili, che sono una piccola minoranza; invenzione è discernimento e scelta. Si tratta di una azione euristica, di una sensibilità emozionale*, guidata dal *sentimento della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme, dell'eleganza geometrica*. L'apporto necessario della sensibilità emozionale viene sottolineato dai versi di Yeats: *Iddio mi guardi da quei pensieri / che l'uomo pensa solo con la mente; / quegli che canta un canto duraturo / pensa con ogni fibra del suo essere*.

* * *

Le conclusioni tratte magistralmente osservando da questo punto di vista i consueti difetti dell'insegnamento matematico sono esposte nel capitolo *Sull'apprendimento della matematica* (pp. 133-150). È un peccato dover scegliere poche tra le molte frasi azzeccate, ma basteranno a render chiaro il pensiero di Bruner al riguardo.

Mi oppongo all'uso prematuro del linguaggio matematico, al suo formalismo da prodotto finito, che fa sembrare la matematica una cosa del tutto nuova anziché già nota al bambino. In quel modo *noi impediamo al bambino di rendersi conto che egli ha sempre implicitamente pensato in termini di matematica, col risultato di non fargli avere più fiducia nelle proprie capacità di capirla.*

Se invece lo studente viene obbligato a controllare ogni banalità, per lui già ovvia e chiara, *attraverso rigorosi e ormai classici passaggi* costituenti «*prove formali*», egli *si forma l'idea che questo e soltanto questo sia realmente la matematica*, ed inevitabilmente *arriva alla conclusione che la matematica non è cosa per lui*.

Al contrario, *è essenziale permettere al bambino di usare i suoi naturali e intuitivi modi di pensare, anzi incoraggiarlo a fare così e lodarlo quando ottiene buoni risultati*. Non occorre *insegnargli ciò;* basta *porre fine al nostro costume di inibirgli il pensiero intuitivo e trovare i modi adatti per aiutarlo a sviluppare questo tipo di pensiero.*

Comprendere bene una cosa significa capirla nella sua elementarità; per spiegarla ad un'altra persona occorre *trovare il linguaggio e le idee che questa persona potrebbe usare se dovesse spigarci la stessa cosa. L'idoneità, cioè, dipende non tanto dalla maturità del discente quanto dalle nostre intenzioni e dalla nostra capacità di tradurre le idee nel linguaggio e nei concetti di quell'età al livello della quale stiamo insegnando.*

Ciò è conforme, del resto, a una *coraggiosa affermazione di una Conferenza dell'Acc. Naz. di Scienze* (U.S.A.; Woods Hole, 1959) *sul programma dell'insegnamento scientifico: ogni argomento può venire insegnato a chicchessia e a qualsiasi età, purché in una forma che sia chiara ed onesta.*

Circa la questione di scegliere quali cose siano *degne di esser conosciute*, Bruner afferma di conoscere *soltanto tre criteri, due buoni ed uno mediocre*: 1) *accertarsi se la conoscenza dia un senso di godimento;* 2) *vedere se conceda il dono di un'apertura intellettuale oltre l'informazione data, se cioè contenga in sé le basi di una futura generalizzazione;* 3) *stabilire se la conoscenza sia utile*.

Secondo tali linee, chiedendoci *cosa vogliamo che sappia un uomo dei nostri tempi*, si risponde che egli *debba avere almeno il senso di che cosa sia la conoscenza nei tanti campi di ricerca, e capirla nelle sue connessioni e nei suoi rapporti con altri campi, e sapere come storicamente sia stata acquistata*; in tale senso, *è possibile portarlo abbastanza lontano, così che egli stesso possa vedere quanta strada ha fatto e con quali mezzi*. Il mezzo consiste nell'ispirarsi fondamentalmente alla massima (che Bruner sostiene *come psicologo, come studioso dei processi del pensiero*) che *il godimento intellettuale è prodotto dalla riduzione di ciò che è sorprendente e complesso in qualcosa di prevedibile e di semplice*. Su questa base si può *fondare il programma a spirale; i grandi temi strutturali dell'apprendimento si prestano proprio a processi di questo tipo, in cui le idee siano dapprima presentate in una certa forma e in un certo linguaggio afferrabile dal bambino, riconsiderate più tardi con maggiore incisività e precisione, per far raggiungere infine la soddisfazione della completa padronanza della materia.*

* * *

E passiamo ora al libro del Dienes. Esso intende descrivere un'indagine sperimentale, diretta dal Dienes e dal Bruner assistiti da altri collaboratori, denominata «Mathematics-Learning Project» e facente capo al Harvard University Center for Cognitive Studies.

Gli esperimenti vennero operati su cinque gruppi di alunni di scuole elementari, composti di pochissimi soggetti (A: 4; B: una classe, a volte in gruppi di 7; C: 4; D: 6; E: 14; sempre metà maschi e metà femmine) e assistiti da un «osservatore» (uno per gruppo, e in qualche caso uno per alunno). Ad ogni gruppo era stato affidato un argomento di sperimentazione e disponeva di adatto materiale matematico. Ecco gli argomenti di ciascun gruppo: A: Il gruppo delle costruzioni; B: Il gruppo dell'aritmetica; C: Il gruppo dei logaritmi e degli esponenti; D: Il primo gruppo dei giochi; E: Il secondo gruppo dei giochi.

Esperimenti su scala così ridotta hanno il vantaggio di poter seguire passo passo l'attività di ogni singolo e l'interazione con quella degli altri ma non possono portare a conclusioni legittimamente generalizzabili. E infatti è detto che (p. 1) *il nostro studio è stato intrapreso più per indurre i ricercatori a formularsi domande di qualche interesse piuttosto che a rispondervi in modo sicuro; in effetti, noi offriamo risposte plausibili stabilite per via sperimentale, che dovrebbero però venir verificate con esperimenti suscettibili di controllo.*

Chi volesse interessarsi ai temi dei singoli gruppi e alle osservazioni sul loro svolgimento dovrebbe necessariamente consultare il libro. Potrà trovare istruttivo e divertente leggere i «protocolli» di alcune esperienze, ove è descritto passo passo e tentativo per tentativo il lavoro di un allievo e il colloquio con l'osservatore, incluse interiezioni come

Hmmm, Ohh, Bom Bom e indicazioni come «(alquanto aggressivo)», «(si mette il pollice in bocca, molto felice)». Solo così si potrà constatare su quale tipo di osservazioni particolareggiate si basano le conclusioni generali proposte come conclusione (e giudicare se e fino a che punto appaiano convincenti e sufficientemente suffragate). Un riassunto non direbbe nulla. Diciamo solo che s'incontrano questioni interessanti e variate, spesso però (a mio avviso) prospettate in forme sostanzialmente più complicate e artificiose del necessario, anche se forse attraenti in quanto concepite sotto la veste di «giochi».

Informiamo infine che esperimenti simili, in collaborazione con Dienes, hanno luogo anche in Italia, e precisamente presso l'Istituto di Psicologia dell'Università di Firenze (da Gina Ferrara Mori e Francesca Morino Abbele, sotto la direzione del prof. Alberto Marzi). Ne è dato in appendice (pp. 192-195) un breve cenno sull'attività per il periodo 1958-61.

Più significativo può risultare un cenno sintetico sulle conclusioni — sia pur dichiaratamente solo plausibili — suggerite dai risultati dell'esperimento. Come impressione personale generica premetterei che esse, pur sempre interessanti e in genere più specificamente attinenti a problemi particolari, appaiono meno coordinatamente ispirate a una unica chiara visione, quale quella di Bruner cui tuttavia nel complesso aderiscono. Talora qualche (apparente?) contraddizione lascia perplessi, come quando proprio Bruner nella prefazione dice (p. XXI) che il dottor *Dienes diffida del* «formalismo» *molto più di noi* (mentre i moniti più decisi contro il formalismo sembrano quelli sopra citati dal libro di Bruner).

Forse la differenza sta in una maggiore insistenza (in Dienes, p. XXII) *sul fatto che i simboli matematici debbono innanzi tutto avere un fondamento empirico per evitare il pericolo di cadere in un formalismo non sufficientemente connesso alla realtà.*

Dice infatti Dienes (pp. 53, 54, 57): *Soprattutto non vanno perse di vista le applicazioni. Essenzialmente esse costituiscono un tentativo di trovare la schematizzazione più conveniente del mondo sensibile e dei fenomeni che si svolgono intorno a noi mediante le strutture matematiche che abbiamo acquisito. Se è giusto introdurre il simbolismo in certi casi e non in altri, è probabile che l'introduzione poco oculata di più simboli, per volta confonda tragicamente le idee dei bambini portando a un "macello mentale": ed è proprio ciò che avviene. Il simbolismo non sarà completamente operativo se le situazioni reali che esso descrive non possono essere date.*

Viene appropriamente esaminata (p. 154) la questione di *come trovare il momento migliore per introdurre i simboli. Se lo si fa troppo presto si rischia di togliere al simbolismo medesimo ogni contenuto*, riducendosi *all'apprendimento di determinate regole secondo cui questi segni possono essere trattati e allo studio di situazioni in cui essi siano applicabili.* D'altronde, l'introduzione del simbolismo non va neppure *procrastinata troppo*, perché, *quando un bambino ha acquistato familiarità con una struttura matematica, ha bisogno di un linguaggio per indicarla e pensare su di essa.*

La conclusione può riassumersi con una risposta che, a mio avviso, potrebbe enunciarsi come norma pedagogica fondamentale: ogni cosa va data al momento in cui il discente, interessato a penetrare e risolvere uno o più problemi cui vien posto di fronte, ne sente il bisogno e può apprezzarne il senso e l'utilità.

L'esempio più espressivo al riguardo, negli esperimenti di Dienes, riguarda *l'introduzione della notazione matriciale per descrivere la struttura delle regole di un gioco* (cioè: prodotti in un gruppo; cfr. pp. 154 84, ecc.); essa *fornì ai bambini capaci di usarla un'arma molto potente per attaccare i problemi connessi a strutture di quel tipo, e, forse, per completare il processo di astrazione rendendoli perfettamente consapevoli delle effettive caratteristiche comuni a due giochi apparentemente diversi.*

Queste ed analoghe frequenti osservazioni conducono a diverse importanti considerazioni di carattere generale. Anzitutto confermano le conclusioni concordemente raggiunte da altri autori di esperimenti del genere, secondo cui (p. 148) *molte parti della scienza matematica sono accessibili a bambini piuttosto piccoli*, anche di quella che *è stata sempre considerata "matematica superiore" e per questa ragione difficile. Abbiamo seriamente sottovalutato il livello di conoscenza matematica raggiungibile ed apprezzabile da parte di bambini.* Per utilizzare appropriatamente queste possibilità, la via perseguita dal Dienes (e che anche a mio avviso è quella indovinata) consiste (pp. XXI e XXIII) nel *rendere chiara e razionale la circostanza che ordine, numero, funzione, identità e gli altri concetti fondamentali della matematica non sono arbitrari, ma piuttosto riducibili all'uso del pensiero*, e nel *concretizzare concetti matematici in convenienti visualizzazioni alla portata della mente del bambino.*

Occorre però pervenire all'astrazione, pur dovendosi rifuggire da ogni sua imposizione aprioristica e formalistica. Occorre quindi (pp. 152-3) evitare l'associazione troppo univoca di un concetto astratto ad una medesima concretizzazione, col rischio di *far attribuire importanza a caratteristiche della concretizzazione per nulla pertinenti alle strutture matematiche da rappresentare*. Ciò avvenne nel Gruppo A, causa l'*aver lavorato troppo a lungo su una medesima concretizzazione*, mentre negli altri il principio di *presentare ai soggetti strutture matematiche in molteplici concretizzazioni* è stato meglio attuato presentandole in una *mescolanza immediata*. Da badare anche in questo caso che non si presenti qualche *particolare percettivo pittorico comune* atto a rimanere impresso più della comune struttura[1].

Il discorso sull'astrazione (e sulla capacità di astrazione) va però ripreso in un senso e in un contesto anche più ampio, e cioè riferendosi non alla fase preliminare della formazione dei concetti bensì a quella costruttiva e perenne della loro effettiva utilizzazione di fronte a tutti i problemi e le circostanze che si potranno presentare, nella scuola e più ancora nella vita.

Il simbolismo (p. 57) *traduce effettivamente un'astrazione se è introdotto come mezzo per esprimere proprietà comuni di diversi tipi di situazioni della stessa struttura; la misura in cui si considera astratta una situazione dipendente dalla quantità di cose superflue eliminate, cioè, se e in quale misura si pensa che la situazione sia il modello di una classe di situazioni da cui il superfluo è parzialmente stato eliminato.* Tale facoltà di astrazione e generalizzazione dovrebbe divenire *parte funzionale del pensiero di una persona*, per il che gioverebbe saper svolgere *con sufficiente elasticità anche il processo inverso, ossia la particolarizzazione o restrizione.*

Molto probabilmente (p. 162) *la prontezza nell'astrarre è intimamente connessa con la ricchezza d'immaginazione di cui una persona è dotata e con la capacità di usufruirne rapidamente: egli deve possedere una buona scorta di immagini su cui operare una scelta. Chi riesce ad astrarre bene sa come scegliere le immagini pertinenti che collimano con l'esperienza in atto e procedere così ad una soddisfacente classificazione delle sue esperienze. Si spera che l'uso di concretizzazioni multiple aiuti ad arricchire la quantità di immagini di chi astrae con lentezza.* Solo con tali attitudini o abitudini è possibile riuscire (come ai bambini del Gruppo B, in un esempio citato a p. 78) a *cogliere il dato fondamentale* per un certo problema, e *così evitare l'uso di raffigurazioni ingombranti.*

Ciò porta a riflettere sul valore del ragionamento costruttivo in confronto a quello analitico. Un difetto (ben noto) di chi ha subito l'indottrinamento scolastico è descritto come segue, e contrapposto a un successo del Gruppo C (p. 108). *Molti adulti, posti di fronte a una data situazione, vi si accostano subito in modo analitico, senza prima valutarla meno superficialmente e vedere in cosa consista. Essi costruiscono le situazioni in base a idee preconcette, e l'analisi potrà funzionare solo in casi relativamente comuni. Ecco perché il pensatore costruttivo è di solito quello più creativo ed originale: il suo pensiero raggiunge buoni risultati anche nelle situazioni nuove ed insolite.*

Il processo costruttivo (p. 86) *ha luogo quando si ha di mira un certo insieme di requisiti e si cerca di costruire una struttura* (o una raffigurazione) *che soddisfi ad essi* (in genere), *senza essere consapevoli di tutte le complicazioni che interverranno*. Esso è di tipo artistico. *Un artista pensa essenzialmente in questo modo; egli non sa esattamente che quadro dipingerà finché non lo avrà ultimato, ma ne possiede un'idea ispirata al genere di dipinto cui anela.*

Passando, infine, agli aspetti più propriamente scolastico-didattici, sembra importante segnalare subito la seguente affermazione (p. 163): *Le ricerche sulla possibilità di estensione del curriculum* (cioè: *dei «programmi»*) *dovrebbero assolutamente affiancarsi a quelle sui metodi*. È un monito su cui si dovrebbe particolarmente riflettere in Italia dove, secondo vetuste consuetudini, si ritiene di potere e dover precisare in ogni dettaglio ciò che si deve insegnare tacendo sul *come* (salvo platoniche «avvertenze»). D'accordo col lasciare un grado sufficiente di libertà e responsabilità all'insegnante, ma sarebbe meno grave permettere varianti di programmi purché usando metodi idonei all'età e preparazione dei ragazzi piuttosto che viceversa.

Nello stesso ordine di idee, si dovrebbe riflettere su quest'altra affermazione (p. 147): *Sembra che si dovrebbe ridurre la quantità di matematica impartita ai bambini o almeno spiegare un po' meglio il perché essi la debbano imparare*. Senza vedere un «perché» non si può imparare ma solo ingombrare la mente di cose che rimangono indigeste e controproducenti; meglio imparare poco che ingombrarsi molto, ma del resto, se si riesce a far vedere il «perché», anche imparare moltissimo sarà più facile che l'attuale ingombrare molto.

Il «perché», possono aiutare a farlo comprendere parole dell'insegnante, ma soprattutto lo si penetra *facendo*, cioè *costruendo*, la matematica, nel senso (se necessariamente, in dettaglio, nei modi) del Dienes. Dei suoi gruppi sperimentali è detto (p. 110): *Era proprio chiaro che tutti i bambini avevano operato e goduto di esperienze di vera ricerca ma-*

tematica ed ora attendevano che i loro insegnanti li guidassero verso nuovi orizzonti.

Una questione delicata, di dosaggio che probabilmente non può venir prescritto con una conclusione univoca, sta nell'alternativa tra (p. 110) *spingere i bambini lungo vie obbligate o concedere loro una maggiore libertà di procedimento. Si devono fare molte ricerche sugli effetti che derivano ai processi conoscitivi da un atteggiamento di libertà o di costrizione*. (Alcuni spunti pp. 167, 151, 159): *Se il cammino è troppo rigidamente prospettato la scoperta può facilmente ridursi a una contraffazione di ciò che era progettato. Se, d'altro canto, la situazione viene lasciata troppo libera, nessuna conoscenza con uno scopo potrà mai avvenire. La funzione dell'insegnante dovrebbe essere quella di guidare e di fornire l'opportunità di fare scoperte, piuttosto che di insegnare direttamente. Ma fino a qual limite possiamo permetterci di "perdere tempo", come dice qualche insegnante, permettendo ai bambini di muoversi alla cieca, di cercare da soli il risultato, quando sarebbe molto più semplice dire loro come procedere?* Si risponde che *il tempo concesso per riflettere* non dovrebbe considerarsi *sprecato* neppure se *si vogliono insegnare delle tecniche*, ma tanto meno *se ci si prefigge di ampliare la personalità di chi impara con l'integrazione di un determinato stralcio di viva esperienza matematica*. E si potrà, in compenso, poi, *"forzare" i bambini oltre la loro capacità, sia intellettualmente sia emotivamente?* Ciò tende a creare una *resistenza*, un *meccanismo di difesa*, salvo se si riesce a creare (come nel Gruppo E) *un'atmosfera di lavoro, di indagine, da cui nessuna fuga era desiderata: quindi non era necessaria alcuna difesa. È importante domandarsi quali condizioni (forse, la varietà delle rappresentazioni) permetteranno questo tipo di apprendimento altamente stimolato che mantiene sempre viva la sua vivacità.*

Anche osservazioni su questioni didattiche di dettaglio hanno a volte un valore illuminante. Viene rilevato ad es. in due occasioni (p. 94 e 161) un difetto nelle procedure seguite: la mancanza di ricorso al *contrasto*, che è *uno stimolante molto potente del pensiero*. Infatti, *tutte le ipotesi avanzate risultarono alla fine confermate; non si verificarono mai eccezioni atte a mettere i bambini in guardia contro generalizzazioni affrettate, anche se corrette. Parte delle difficoltà che i bambini incontravano forse erano dovute alla mancanza di situazioni contrastanti che avrebbero loro consentito di riconoscere in modo più chiaro le relazioni in studio. La maggior parte di giochi teorici di gruppo erano "giochi buoni", e quindi erano esempi e non controesempi relativi a gruppi matematici.*

Cosi ad es. nozioni quali la proprietà commutativa e quella distributiva appaiono ovvie e pleonastiche finché non si danno dei controesempi (anche scherzosi: *non si ha il medesimo risultato aprendo la finestra e poi sporgendo la testa o viceversa; cuore un amalgama di uova latte e farina darà una focaccia, ma un risultato ben diverso si ottiene cuocendo gli stessi ingredienti separatamente e poi mescolandoli*). In genere, proprietà «semplici» non acquistano rilievo se non attraverso una effettiva conoscenza e «sensazione» di cosa siano le complicazioni da escludere (per es. le discontinuità per capire la continuità); è questa una verità troppo spesso ignorata o trascurata. Spesso hanno origine da ciò vere storture mentali, come l'idea (più diffusa di quanto si possa immaginare, almeno al livello del subcosciente, e forse favorita dalla posizione speciale data alle nozioni algebriche) che funzione crescente o decrescente significhi proporzionalità diretta o inversa. Vedansi considerazioni a pp. 84-85.

Osservazioni del genere, sia quelle a carattere generale che quelle di dettaglio, sono dunque altrettanto essenziali per tentar di delineare (p. 165) *una teoria generale sull'apprendimento, che spieghi le situazioni che si presentano nelle aule mentre si impara. Una siffatta teoria dovrebbe alla fine risultare dagli sforzi concertati di sperimentatori pratici, affiancati eventualmente da un gruppo di teorici consci dei successi e dei fallimenti dei primi. Questo resoconto* — conclude Dienes — *è un tentativo di stabilire un modello teorico che speriamo possa rivelarsi di qualche valore in quanto insieme di previsioni.*

* * *

L'importanza di questi problemi trascende il campo della matematica e dell'insegnamento della matematica, in quanto si tratta di componenti essenziali per la formazione culturale dell'uomo, sempre ma in particolare più ancora in relazione alle esigenze del mondo di oggi e di domani. Dice bene Angelo Pescarini, nella sua prefazione all'edizione italiana, che (p. XIX) *a noi spetta il compito veramente difficile di tradurre in termini pedagogici e culturali quelle indicazioni che ci vengono oggi da un mondo in grande travaglio perché alla ricerca di rinnovate prospettive ideali e sociali. La crisi drammatica della scuola in tanti paesi è il segno di un'inadempienza clamorosa dei suoi istituti, dei suoi compiti, dei suoi ideali.*

In questa prospettiva, è chiaro che il problema va affrontato col massimo impegno, non solo nella molteplicità dei suoi aspetti quali emergono da scritti e ricerche come quelli di Bruner e Dienes, ma anche con riferimento ai diversi tipi e livelli d'insegnamento ed alle peculiari situazioni nei diversi paesi.

In Italia la situazione è particolarmente precaria per la scarsa risonanza delle poche voci di persone consapevoli di ciò che la matematica dovrebbe contare nel complesso della cultura; vorrei menzionare due nomi: Massimo Bontempelli e Guido Calogero. I matematici difficilmente sanno liberarsi del tutto dalla deformazione professionale che tende a far identificare il pensiero matematico coi formalismi e i tecnicismi della matematica; i profani, per l'opposto motivo della loro ignoranza, accettano ovviamente questa medesima posizione traendone la coerente conclusione che la pretesa dei matematici di far studiare a tutti questa matematica è irragionevole. Occorre per prima cosa, quindi, precisare gli scopi culturali dell'insegnamento matematico nei vari ordini di scuole.

La risposta data da Bruner e già riportata (penultimo capoverso del n. 5) mi sembra ottima e detta nel miglior modo possibile; comunque concorda perfettamente col mio punto di vista. Si tratterebbe solo di esaminare come andrebbe applicata e adattata in relazione alle specifiche esigenze dei diversi livelli e tipi di scuole. A mio avviso le differenze dovrebbero essere soltanto quantitative, nel senso che le esigenze psicologico-didattico-culturali (ricorso all'intuizione, partenza dal concreto, legami con tutte le altre scienze e con le applicazioni, visione storica — e, meglio ancora, genetica — dello sviluppo della matematica) hanno sempre validità e importanza essenziale, ma richiedono paziente insistenza ai primi livelli d'insegnamento e per scuole a indirizzo non specificamente scientifico, mentre basteranno in genere rapidi cenni per mantener viva la consapevolezza di tali aspetti in coloro che via via più si specializzano in matematica o campi affini.

* * *

E passiamo rapidamente in rassegna i singoli casi.

Per la scuola media (dell'obbligo), già rinnovata, si tratterà forse solo di proseguire nella via già imboccata dall'inizio, perfezionando i concetti informatori ed eliminando le cause estrinseche di disfunzione.

Principale: la mancanza di insegnanti preparati specificamente per tale scuola (e ne parleremo).

Per le scuole medie superiori la situazione è tragica, dato che sopravvivono le superatissime strutture dopo anni da che vi affluiscono alunni provenienti dalla rinnovata scuola media. Situazione che (chiudendo un occhio su deficienze contingenti) può definirsi come «immettere in una scuola da medioevo i prodotti di una scuola del 2000». Proposte di programmi per la matematica ne sono state fatte (Un. Mat. Ital., dopo studio della Comm. It. Insegn. Mat.), ma sono sempre allo stadio di mere proposte, ed anche l'approfondimento degli aspetti didattici si è ridotto a pochi tentativi più o meno isolati. Ed incombe sempre il pericolo che il numero di ore per la matematica (ora vergogna di primato negativo per l'Italia) rimanga insufficiente dopo l'attesa riforma.

Per l'Università pure il problema va affrontato (si pensi all'ecatombe nel I° anno e allo scarso risultato finale denunciato dalla «prova di cultura»: qualcosa non va), ma c'è solo un aspetto che merita qui un cenno specifico: la preparazione degli insegnanti. Si tratta di compito difficile e delicatissimo, e nessuno sembra porvi attenzione. Appena da pochi anni esiste la laurea «a indirizzo didattico», ma di didattico c'è poco o nulla forché il nome, mentre occorrerebbe insistere con netta prevalenza su ciò che concorre alla formazione dell'insegnante (prima che del matematico, o fisico, o letterato, e via dicendo).

Una possibilità di creare persone qualificate in tal senso dovrebbe presentarsi ora, con l'istituzione di corsi di laurea abilitanti all'insegnamento di Matematica e osservazioni scientifiche nella scuola media (istituzione contemplata nella legge istitutiva dell'Università della Calabria, e valida per tutte le altre sedi). Vi sono tendenze favorevoli e sfavorevoli sull'«abbinamento» di matematica e osservazioni scientifiche; io sono favorevole, e comunque ritengo assurdo negare che si possa felicemente affidare tale insegnamento abbinato ad un unico insegnante espressamente formato finché un tentativo di formarlo non sia stato fatto. Un tal corso di laurea potrebbe costituire il banco di prova ideale per un superamento in blocco delle lamentate deficienze: dovrebbe caratterizzarlo un insegnamento nettamente orientato verso la «mano sinistra» (secondo Bruner), verso le finalità pedagogico-didattiche, verso una sintetica ed ampia visione culturale aliena da specializzazioni. Se, come è da auspicare, tale esperimento riuscirà, balzerà probabilmente agli occhi l'opportunità di differenziare e ristrutturare in modo analogamente orientato (anche se meno radicalmente lontano dalla specializzazione) anche i corsi di laurea per la matematica a indirizzo didattico.

E qualche briciola (non trascurabile) di tale evoluzione, in direzione dalla «mano sinistra», dovrebbe penetrare dovunque portando una ventata d'aria respirabile nella matematica di tutti gli indirizzi, anche applicativo, anche generale, e più ancora per i non matematici (fisici, chimici, naturalisti, economisti, statistici, ecc.).

II lettore che avesse interesse a conoscere più da vicino le idee e tendenze dell'autore del precedente articolo potrebbe vedere le seguenti pubblicazioni:

Libri

B. de F., *Matematica logico-intuitiva*, III ed. Cremonese, Roma, 1959 (a livello universitario).

B. de F. & F. Minisola, *La matematica per le applicazioni economiche*, ed. Cremonese, Roma, 1961 (a livello Ist. Tecn. Comm.).

B. de F., *Il «saper vedere» in matematica*, ed. Loescher, Torino, 1967 (a livello integrativo per scuola media).

Articoli

B. de F., *Le proposte per la matematica nei nuovi licei*, «Periodico di matematiche» (Zanichelli, Bologna), 1967; parecchi altri sono indicati in un elenco in quest'ultimo.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 425-430

Convegno della C.I.I.M. a Viareggio (24-25-26.X.l974). Interventi di Bruno de Finetti (a Roma)(*)

BRUNO DE FINETTI

I miei interventi furono parecchi, inseriti come frammenti nelle discussioni sulle diverse relazioni, ma, a posteriori, risultano piuttosto frammenti di un unico discorso, ripreso per ampliarlo e chiarirlo a seguito di stimoli vari: idee concordanti o discordanti di altri intervenuti, inesatte interpretazioni di tesi precedentemente sostenute, richieste di esemplificazioni, ecc. Mi sembrò pertanto necessario, o quanto meno opportuno, proporre di fondere in un unico testo i diversi interventi, ricostruiti e ricuciti un po' liberamente (e il Presidente fu d'accordo. BdF).

1. – Concreto e astratto: contrapposizione o fusione?

Nel convegno è riecheggiata più volte l'antica (e vorrei dire antiquata) contrapposizione tra valore "culturale" di una matematica "pura" nel senso di "astratta", e valore puramente "strumentale", "utilitario", di una matematica "applicata" a problemi concernenti cose e nozioni concrete, pratiche, ... o perfino "utili"! E tale contrapposizione si manifesta fin dai primi passi di ogni insegnamento, nel diverso modo di concepire la funzione e la collocazione di esempi concreti nell'introduzione e nella spiegazione di una qualunque teoria matematica.

Grosso modo, il dilemma consiste nella scelta tra:

a) introdurre come "regole" arbitrarie, chiamate "assiomi", delle convenzioni per operare su simboli immuni da ogni significato, e poi fare esempi e applicazioni come se i fatti obbedissero per obbligo o per casuale coincidenza agli assiomi sbocciati dal vuoto;

(*) Pubblicato in *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, n. 12, 1974, pp. 31-36.

oppure

b) mostrare, su numerosi e svariati esempi pratici (i più semplici e significativi tra quelli adeguati all'età e preparazione dei discenti), come si presentino spontaneamente svariate nozioni concrete, godenti di proprietà analoghe, traducibili, con qualche po' di idealizzazione, in nozioni astratte; così l'astrazione appare non il rifiuto del concreto, bensì la quintessenza e il perfezionamento del concreto, ossia ciò che ne coglie e valorizza gli aspetti più essenziali.

Adottando, come mi appare ragionevole, questo secondo punto di vista, le esemplificazioni pratiche più semplici (ridotte magari a cenni) devono precedere ogni teorizzazione per creare anzitutto una motivazione, atta a predisporre all'accettazione di astrazioni che appaiono giustificate, ed evitare così la reazione di rigetto che la via opposta spesso produce, non del tutto ingiustificatamente. E ritengo sia questa la causa che impedisce ai più, per tutta la vita, di "capire" e apprezzare la matematica.

Oltre che al fine, già detto, di motivazione, le esemplificazioni preliminari e le considerazioni che legano varie interpretazioni pratiche a identici o simili sistemi di assiomi, abituando a scoprire le analogie di natura pratica tra essi, mostrano come il significato degli assiomi non è "astratto" se non nel senso di "multiconcreto": esprime e idealizza proprietà riscontrabili in svariati casi e che è ragionevole prevedere troveranno analoga applicazione in molte altre applicazioni più o meno analoghe.

Ciò aiuta, o dovrebbe aiutare (ma non ci si cura abbastanza di questa esigenza pur essenziale!) a formarsi modelli mentali – per es. di natura geometrica, o meccanica, ecc. (e sarebbe bene insegnare a distinguere, più o meno consciamente e chiaramente, ad es. tra modelli geometrici puramente topologici, o affini, o metrici, ecc.) – modelli fra i quali potremo spesso, a un grado più avanzato di approfondimento del problema, riconoscerne uno che risponde pienamente allo scopo di tradurre come proprietà in esso interpretabili le proprietà reali dell'oggetto allo studio.

Gli esempi che devono venire dopo (dopo costruita la struttura matematica – astratta, assiomatizzata – della teoria o del modello) potranno avere, in genere, prevalentemente, lo scopo opposto: quello di dare un'idea del tipo di questioni pratiche di un dato campo di studi (dalla geometria pratica alla fisica, dalla tecnica all'economia, dalla biologia all'astronomia, ecc.) che la struttura matematica consente di affrontare e risolvere, con ovvia utilità anche pratica.

2. – Dimostrare. Ma anche congetturare

Quanto detto, sia pur succintamente, contro la contrapposizione fra concreto e astratto, conduce in modo naturale, e analogamente, a rivalutare gli aspetti più attivi, più creativi (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può (né dovrebbe; altrimenti esorbiterebbe dal campo su cui si estende il suo diritto di sovranità) condurre a nessuna conclusione "nuova", cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse.

Il suo impiego, tuttavia, risulterà talora "costruttivo", nel senso che condurrà a dimostrare che, in una data teoria, da certe ipotesi discendono delle conclusioni che non si sapeva in precedenza vi fossero implicitamente incluse (ma lo erano). A questo scopo si può arrivare per caso, deducendo dalle premesse tutte le combinazioni di conclusioni e combinazioni di combinazioni, ma occorrerebbe pur sempre una certa penetrazione per riconoscere, tra innumerevoli conclusioni irrilevanti, quelle che costituiscono una "scoperta" (e per dire se appare più o meno importante). E in genere, infatti, il processo è opposto: si parte da delle "congetture", ossia da affermazioni che a qualcuno (o a molti) sembra debbano risultare vere come conseguenza delle premesse accettate. Purtroppo, un falso pudore vieta in genere di menzionare la parte del processo della scoperta che si svolge più o meno nella sfera dell'inconscio, o del subconscio, per esibire soltanto la dimostrazione fossilizzata nella sua forma scheletrica di logica freddamente deduttiva e formalistica.

Occorre non solo riconoscere l'insostituibile funzione del ragionamento inconscio che permette di individuare congetture e di immaginare tentativi di sviluppi logici atti a far raggiungere la conclusione. Ciò è stato vigorosamente illustrato e raccomandato da Pólya, dicendo che si deve non solo insegnare a dimostrare, ma anche allenare a congetturare ("*Let us teach proving, but let us also teach guessing!*"). Tra l'altro, questa è la prima occasione in cui si può rilevare l'importanza di sviluppare il senso della probabilità: la probabilità, o attendibilità, che attribuiamo all'esser vera di una congettura. E si tratta, naturalmente, di probabilità in senso soggettivo; ciò che (a mio avviso; vi ritornerò più avanti) non costituisce un fatto anomalo, dato che non appare giustificata in nessun caso la pretesa di dare alla nozione di "probabilità" un significato oggettivo, indipendente dalla valutazione di un dato individuo, basata su quanto egli sa e non sa, sul modo in cui giudica, immagina, prevede, e in base al quale pensa di regolarsi nelle decisioni che comportino rischi dipendenti dal risultato degli eventi in oggetto.

3. – Il “rigore”: come, quando, perché

Il rigore è indubbiamente necessario, ma la mania del rigore è spesso controproducente. Una dimostrazione ineccepibilmente logica, valida sotto condizioni estremamente generali, è in genere complicata e priva di prospettiva, nascondendo il concetto intuitivo essenziale nella foresta di minuzie occorrenti solo per includere o casi marginali o estensioni smisurate. È certo cosa migliore e più saggia (come diceva Enriques) fare acquisire una visione intuitivamente chiara e insieme logicamente rigorosa dei casi corrispondenti alle condizioni a ciò più idonee. Basterà poi informare, se del caso, e più o meno diffusamente, su cosa continua o non continua a valere sotto condizioni diverse (magari anche indicando – en passant – quella dimostrazione generale che si ritiene controproducente infliggere come punto di partenza).

Pólya afferma ad esempio, per sua esperienza diretta (ripetuta nei molti paesi d’Europa e d’America ove ha insegnato) che è controproducente insegnare agli ingegneri l’analisi con gli ε e δ (vedasi citazione in Periodico di Matematiche, 1974, n. 1-2, p. 116)(**); Enriques rileva come certe precisazioni (benché esatte) oscurino la comprensione di un enunciato (cfr. n. stesso P.d.M., a p. 115 il “pezzullo” Difetti della Perfezione)(***), e come certe dimostrazioni lunghe e complicate non aiutino a capire il perché della validità del risultato ma obblighino soltanto ad accettarlo “obtorto collo”.

Gli esempi al riguardo si potrebbero moltiplicare. Non per dimostrare che si deve o può trascurare il rigore, ma per far riflettere che esso non va considerato “in vitro”, bensì in funzione della formazione nei discenti di una visione corretta, ma anche chiara e intuitiva, delle teorie studiate in astratto e delle loro pratiche applicazioni concrete.

In particolare, per ritornare sulle definizioni e dimostrazioni mediante ε e δ, occorrerebbe sempre curare di renderle intuitive mediante esempi e controesempi e con espressive illustrazioni mediante figure (ben fatte!). Altrimenti le “dimostrazioni” si riducono a filastrocche verbali e a sequenze di passaggetti fatti perdendo di vista il filo conduttore (come di chi cammini badando ad ogni passo dove mettere il piede, senza alzare lo sguardo per vedere se, proseguendo, arriva a una meta, e quale).

(**) La citazione è all’interno dell’articolo de Finetti A 1974c.

(***) Si tratta di un passo di Federigo Enriques tratto da *Le Matematiche nella storia e nella cultura* (a cura di A. Frajese, Bologna: Zanichelli 1938, pp. 188-189) e ripubblicato in *Periodico di Matematiche*, 50, n. 1-2, 1974, p. 115.

4. – Probabilità e statistica

La richiesta più sentita e diffusa, riguardo a miglioramenti nel tipo di preparazione, è, secondo l'opinione espressa in diverse relazioni e interventi, quella di dare un maggiore sviluppo, in tali corsi, ad argomenti di probabilità e statistica. Naturalmente, sottoscrivo in pieno tale richiesta, raccomandando però che la trattazione venga concepita nel senso più aderente alle effettive esigenze di una visione globale e concreta dei problemi. Occorre abituare a riflettere caso per caso, non basandosi (come purtroppo spesso si usa) su poveri schemi prefabbricati e stereotipati (metodi "ad hoc", Adhockeries come propose di chiamarli I. J. Good) o, semplicisticamente, su rozzi "indici", "coefficienti", ecc.

Occorre allenare a valutare coscienziosamente le probabilità (sempre soggettive!), a impostare i problemi di scelta tenendo ben presenti gli aspetti economici (in senso lato) delle decisioni. Come esempio, si pensi all'impostazione corretta della "teoria delle decisioni" (basata sulla massimizzazione dell'utilità sperata) e all'importanza e chiarezza che in essa assume la nozione di "valore di un'informazione" con riferimento a una decisione (in senso economico: ben diverso da quello che si esprime come "quantità d'informazione").

La matematica non può essere, per gli studenti di altre scienze, una collezione di ricette da accettare "a scatola chiusa", bensì una componente della loro attrezzatura mentale, necessaria per proseguire in forma più approfondita, ove occorre, le stesse riflessioni che nel loro campo portano avanti senza di essa fin quando bastano immagini mentali più semplici e intuitive.

In seguito a spunti di discussione sulla nozione di probabilità ho dato chiarimenti su perché ogni probabilità debba (a mio avviso) considerarsi soggettiva. In breve (non è qui il luogo per dilungarsi): ogni definizione pretesamente oggettiva presuppone un giudizio soggettivo.

La cosiddetta definizione basata su partizioni in "casi ugualmente probabili" richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di "uguale probabilità". E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.

5. – Mostruosità giuridicolo-burofreniche

In molti interventi è stata deplorata la situazione degli insegnamenti in questione (Matematiche per altri Corsi di Laurea, Fac. Scienze). Condivido in pieno le critiche, e sono lieto che alcuni singoli lodevoli esempi mostrino che, ove vi sia della buona volontà, si può perfino riuscire a impostare tali insegnamenti in modo appropriato e intelligente. (Menzionerei come esempio – forse anche per il calore con cui l'insegnante, la prof. Metelli, ne ha illustrato gli intendimenti – il corso di Padova).

Contro il falso dilemma (per di più, a sfondo penosamente corporativo) se la Matematica ai Chimici (e così per altri) vada insegnata da un Matematico o da un Chimico, dissi che dev'essere insegnata o da un Matematico innamorato della Chimica o da un Chimico innamorato della Matematica. La Matematica non va insegnata come tale, né come mero strumento per particolari applicazioni alla Chimica; occorre invece che la scelta e il dosaggio degli argomenti, i riferimenti e gli esempi, tendano ad una fusione delle nozioni astratte prevalentemente con le interpretazioni familiari e necessarie per la Chimica e campi affini.

I docenti dovrebbero avere e sviluppare una mentalità fecondamente interdisciplinare, collaborare allo studio dei problemi matematici nella disciplina del corso di laurea ove insegnano, possibilmente anche nel campo della ricerca (e magari – marginalmente – anche in quello professionale). È chiaro però che ogni scelta appropriata e meditata dei docenti è resa impossibile e inconcepibile da tutta l'impalcatura di norme che affliggono, in Italia, l'Università (come tutta la Scuola e più in generale tutta la Pubblica Amministrazione), norme che possono ben dirsi burofreniche (in Francia si è usato un termine anche più crudo: burosadiche) e giuridicole (sintesi dei due termini, per 3/4 coincidenti, giuridico e ridicolo).

Concordo con tutte le critiche fatte su questo e altri punti analoghi, e mi auguro che si possa provocare un moto di ripulsa, una "reazione di rigetto", che obblighi le Autorità "competenti" (?) a provvedere. Sarebbe urgente, urgentissimo!

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 431-462

La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni! (*)

BRUNO DE FINETTI

I. – Introduzione

Vorrei riuscire, nella presente occasione, a chiarire nel modo più semplice, ma completo e radicale, la critica ai moltissimi modi in cui (a mio avviso) la probabilità viene fraintesa e contraffatta. Ma i problemi e gli aspetti sono molti, complessi, intricati; tuttavia, se un discorso non potesse bastare per illustrare sufficientemente una certa concezione e persuadere a adottarla, potrà almeno contribuire a chiarire dei dubbi sollevati contro di essa, e a suscitare dubbi nei riguardi delle concezioni opposte.

Sostanzialmente, non ho mai trovato nulla da modificare o da aggiungere (pur estendendola e approfondendola) alla concezione che mi sono andato formando tra il 1926 e il 1928: il triennio a cavallo della laurea (Univ. di Milano, 1927). Fu nel 1926 che un articolo divulgativo di Carlo Foà sulle leggi dell'ereditarietà mendeliana mi indusse a riflettere sulla probabilità e a leggere la *Wahrscheinlichkeitslehre* di Czuber prestatami da un conoscente, e fu nel 1928 che – in una memoria presentata ai Lincei (pubblicata ivi nel 1931) e riassunta in una comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici a Bologna – introdussi il concetto di 'scambiabilità'.

Il ruolo dirompente di tale concetto (ben oltre il significato suo proprio) è così descritto nella prefazione di Kyburg e Smokler alla raccolta *Studies in subjective probability* da essi curata (pp. 13-14). «*In certo senso, il concetto più importante della teoria soggettivistica è quello di 'eventi scambiabili'. Finché non venne introdotta tale nozione* (*da de Finetti* [1931]) *la teoria soggettivistica delle probabilità era ri-*

(*) Testo dell''ultima lezione' tenuta da de Finetti in occasione del collocamento 'fuori ruolo' all'Istituto Matematico G. Castelnuovo il 29 Novembre 1976, pubblicato in *Scientia*, 111, 1976, 255-281.

masta poco più che una curiosità filosofica. Nessuno di coloro per i quali la teoria delle probabilità era oggetto di conoscenza o di applicazione ci prestava gran che di attenzione. Ma, coll'introduzione del concetto di 'equivalenza' *o* 'simmetria' *o* 'scambiabilità', *quale ora è conosciuto, è stata scoperta una via per connettere la nozione di probabilità soggettiva con i classici problemi dell'inferenza statistica*».

Per la precisione, l'indovinato termine di 'scambiabilità' è stato suggerito più tardi, dal Fréchet (1939) parlando di *événéments échangeables*. Tale termine venne rapidamente adottato da molti autori, me compreso (e divenne *exchangeable* in inglese, *austauschbar* in tedesco). Nei miei primi lavori enunciavo la detta condizione senza introdurre una denominazione; fra il 1933 e il 1939 adottai quella di *equivalenti* proposta nel 1932 da Khintchine (e tuttora seguita in Urss); altre denominazioni (poco usate) sono quelle di *simmetrici* o *invarianti per mistura* (si tratta infatti di simmetria, o invarianza, rispetto alle permutazioni ([1])).

Un primo tentativo di esposizione sintetica ma globale del mio punto di vista ho dovuto farlo per l'invito dell'Institut Poincaré a tenervi un ciclo di conferenze (2-10 maggio 1935). Il testo francese è difficilmente reperibile, ma l'ottima traduzione inglese curata da Leonard Jimmie Savage si trova nel volumetto già menzionato di Kyburg e Smokler (Wiley, 1964), insieme a scritti di John Venn, Emile Borel, Frank Plumpton Ramsey, Bernard O. Koopman e dello stesso Savage.

E non posso non cogliere l'occasione per ricordare la sua figura così eccezionalmente ricca di spirito critico, di vaste conoscenze (in ogni campo), di straordinaria umanità. In particolar modo devo sottolineare che devo a lui se la mia non è più considerata come un'eresia blasfema ma innocua, bensì come un'eresia con cui la chiesa statistica ufficiale deve fare i conti, e sta perdendo. La cooperazione di Savage mi è stata di enorme ausilio, oltre che per le sue doti straordinarie e molteplici, anche perché i suoi dubbi sui dogmi della chiesa statistica ufficiale, 'oggettivistica', maturarono dopo esser stato allevato in essa, come penosa impressione di chi, di fronte ad assurdità e manchevolezze, sente vacillare la fede in cui è cresciuto. Io mi trovavo, naturalmente, in situazione opposta, come un profano o un barbaro che ha la sensazione che altri dica delle assurdità, ma quasi non sa da che parte cominciare perché a mala pena riesce a farsi un'idea del senso che altri intende dare ai nonsensi che impone come dogmi.

In tema di ringraziamenti, dovrei naturalmente aggiungere moltissimi altri nomi, anche se, per ovvie ragioni, mi limito a quelli di tre illustri

Colleghi che, pur non condividendo la mia posizione (ma appunto perciò ne faccio loro maggior merito) mi hanno aiutato e dato occasione di esporre le mie idee nelle sedi più qualificate: sono Guido Castelnuovo, Maurice Fréchet, Jerzy Neyman.

La presente esposizione vuole essere – dopo quella all'Institut Poincaré e parecchie altre di vario tipo – un nuovo ed ultimo tentativo di coordinare in una sintesi quanto meglio possibile organica (ma non specialistica, quasi 'senza formule teoremi et similia') le considerazioni di varia natura – logica, matematica, psicologica, economica, epistemologica o (se così si preferisse) filosofica – intese a chiarire quali formulazioni, impostazioni e conclusioni di natura concettuale e matematica siano o non siano ammissibili e ragionevoli – *e perché* – nell'ambito di una visione globale e coerente.

In gran parte dovrò ripetere, sostanzialmente, cose dette e ridette, ma molte delle osservazioni e argomentazioni (oltre al loro coordinamento) sono nuove o rinnovate.

II. – Peripatetici o Pragmatisti?

Il fatto è che, a mio avviso, nelle concezioni in voga la nozione di probabilità e le sue proprietà (quando non rimangono sterilizzate – ed è ancor peggio! – nel vuoto di costruzioni assiomatiche formalisticamente astratte e, come forse è inevitabile, sostanzialmente manchevoli) vengono legate alla realtà e alle applicazioni mediante asserzioni circolari o prive di senso.

Non vorrei apparire troppo cattivo, ma non posso non confessare che trovo una straordinaria analogia fra il tipo di contorcimenti che si sentono ripetere per difendere siffatte asserzioni e il modo di argomentare in cui eccelleva il mitico Simplicio, immortalato nei *Dialoghi* di Galileo. Ma, purtroppo, *cosi è* (se vi pare, ... e altrimenti 'invece pure').

Sono pronto a chiedere scusa della mia insistenza, ma essa mi pare non sia mai troppa (e neppure sufficiente): essa è dovuta infatti alla preoccupazione per il pericolo che mi sembra minacciare gli studi sulla probabilità e sue applicazioni, studi la cui caratteristica peculiare e coerentemente unitaria appare insidiata dalla proliferazione di idee confuse, di vedute settoriali, di tecniche artificiose. (Come, ad es., le regolette e i test per i quali Irving Good ha coniato l'indovinata denominazione di 'Adhockeries', che ho tradotto in italiano con 'Adhoccaggini', cioè *espedienti empirici* 'ad hoc').

Per fare ragionamenti validi occorre seguire una via diametralmente opposta: occorre seguire l'esempio efficacemente descritto in una frase che – fin da quando mi capitò di leggerla (ragazzo o poco più) – mi è sempre rimasta impressa come 'memento!', come norma da doversi seguire e da raccomandare a tutti di seguire. Eccola:

«*A lui premeva insegnare con quali cautele e quali accorgimenti si possa giungere a formulare delle proposizioni che abbiano un senso*».

Questa citazione è presa da Giovanni Papini (*Stroncature*, n. 14), e si riferisce a Mario Calderoni che – assieme a Giovanni Vailati – fu uno dei pochi coraggiosi assertori del pragmatismo nell'Italia di fine '800 inizio '900. Formulare *proposizioni 'che abbiano un senso'*, evitando di cadere nei 'cento modi di non dir niente' tanto cari ai retori e agli imbroglioni ([2]), è cosa particolarmente difficile – come ben sapeva Calderoni – ma è anche cosa *inusitata*, e soprattutto è cosa *irritante* per i sedicenti bempensanti che, nella loro smisurata faciloneria, pretendono abbia senso ogni loro sproloquio (e spesso accettano di ammettere, per reciprocità, che abbia senso anche qualche sproloquio altrui).

Concorre però, nel confondere le lingue e le idee, quella 'tirannia del linguaggio' che è stata denunciata da Harold Jeffreys con la sua acuta osservazione, che «*il linguaggio è stato creato da realisti, e per di più da realisti molto primitivi*» per cui «*noi abbiamo larghissime possibilità di descrivere le proprietà attribuite agli oggetti, ma scarsissime di descrivere quelle direttamente conosciute come sensazioni*» ([3]).

E sarebbe perciò che anche la nozione di probabilità, anziché venire considerata e studiata come tale cercando di perfezionarne la comprensione e l'impiego, viene spesso esteriorizzata, ritenendola concepibile solo se raffigurata – se non si può proprio come 'oggetto'! – per lo meno come un 'qualcosa' (chissacosa?!) di esistente fuori di noi, un qualcosa che 'agisce' sul mondo esterno secondo 'leggi' sue proprie, 'leggi' che governerebbero i fatti che non seguono 'leggi' (nel senso proprio, deterministico) con un surrogato di 'leggi' che non sono 'leggi'.

Da questi 'puzzle' deriva (ed è naturale!) la pressoché generale incomprensione del ragionamento probabilistico, invischiato come viene invischiato in un intrico di frasi fatte, di sofismi inveterati, di ambiguità deleterie che ne ostacolano lo smascheramento.

Del resto, che tale compito – di dissipare le oscurità e le nebbie metafisiche – sia particolarmente difficile nel campo delle probabilità, lo dimostra vividamente una frase ormai famosa – e per di più incontestabile – di Garrett Birkhoff (*Lattice Theory*):

«Tutti parlano di probabilità, ma nessuno riesce a spiegare cosa intenda per probabilità in modo che riesca accettabile dagli altri».

Gli è che esiste, purtroppo, qualcosa di peggio della *non-conoscenza* di un concetto, del significato di una parola in una data e necessaria terminologia: è la *pseudoconoscenza* di un qualche '*press'a-poco-significato*'.

Avviene purtroppo, infatti, che, sentendo ripetere una stessa parola (più o meno misteriosa o comunque per lui nuova) nel contesto di varie frasi di cui pensa di intuire grosso modo il senso, uno finisca per associarvi un qualche 'press'a-poco-significato' che però si sbriciola in mille controsensi se si tenta di precisarlo.

È a questo guaio – suppongo – che voleva alludere Goethe quando scrisse i due notissimi versi:

«Gewohnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,
es müsse sich dabei auch etwas denken lassen».

(In genere, l'uomo, mentre ascolta soltanto parole, ritiene vi sia sotto anche qualcosa da dover pensare.)

D'altronde, una parola, di per sé, non ha un 'senso': lo ha (od acquista) soltanto collocandola (come tessera in un mosaico) in un contesto che abbia senso, in una frase o asserzione di cui si sappia cosa concretamente significhi il dire che è *vera* oppure che è *falsa*.

Pensare alla Probabilità (con la P maiuscola) come ad una entità metafisica esistente in astratto equivarrebbe a ritener possibile (senza essere Alice nel Paese delle meraviglie) che 'il sorriso di un gatto' possa permanere e continuare ad esser visibile dopo che il gatto se ne è andato via. Contro ogni concezione della probabilità in questo senso assoluto, ho espresso drasticamente il mio diniego (nella prefazione all'edizione inglese del mio trattato) premettendo come motto: «PROBABILITY DOES NOT EXIST», intendendo dire che la probabilità non 'esiste' di per sé, al di fuori delle valutazioni che ne facciamo con la mente o d'istinto. Conseguentemente, non avrebbe senso chiederci 'cosa *sia* la probabilità', ma dovremmo meditare introspettivamente per chiarirci in quali casi e in quale senso la pensiamo, la valutiamo, ci ragioniamo sopra, e la troviamo strumento idoneo, guida preziosa, per *pensare* e per *agire* in *condizioni di incertezza* ([4]).

È pero necessario, evidentemente, illustrare le ragioni di questo diniego, tanto più che è in contrasto con vedute largamente ed anche autorevolmente accettate e sostenute.

III. – L'incertezza: di chi e su che cosa?

Per avviare tale discussione occorre risalire più 'a monte' della consueta controversia tra concezione oggettivista e soggettivista della probabilità, chiedendoci come vada inteso e delimitato il campo dei fatti (o delle situazioni o delle asserzioni o come altro si voglia dire), nel quale si possa o si debba (secondo i vari punti di vista) parlare di *incertezza* (e quindi di probabilità).

Un'*asserzione*, o *proposizione*, (od '*evento*', per entrare nel linguaggio probabilistico) è tale se esprime qualcosa di suscettibile solo di due alternative: o *vero* o *falso*, o SI o NO (di per sé: «tertium non datur»); non è detto però che si *sappia* (con certezza) la risposta, ed allora i casi sono (almeno provvisoriamente) tre: *certo*, *impossibile*, *incerto*, a seconda che sappiamo la risposta esatta (SI o NO) o altrimenti si rimanga nel NON-SO.

(Può anche avvenire, ovviamente, che per false informazioni o per errore della memoria o di ragionamento uno sia 'certo' del SI mentre è NO, o viceversa. Ciò va tenuto presente, ma esula dalla teoria delle probabilità o vi si può forse includere come caso marginale e degenere.)

Il caso intermedio, quello dell'*incertezza*, è il solo che richiede – o almeno consente – considerazioni di probabilità, e in senso *relativo* allo stato delle conoscenze. Al di fuori di esso non si ha che la logica del certo, ma anche in essa è tuttavia utile indicare con 1 e 0 i 'valori di verità' *vero* o *falso*. Come ho abbondantemente illustrato, ciò consente infatti di aritmetizzare – e, più specificatamente, di linearizzare – l'algebra di Boole; si tratta in fondo di rendere più esteso e sistematico l'uso di utili convenzioni largamente usate da Marshall Stone. Benché ciò giovi soprattutto nel calcolo delle probabilità (dato che la probabilità, e, più in generale, la '*previsione*' – o 'speranza matematica' – è additiva) ritengo che tale algoritmo (che non esclude, anzi si combina ottimamente, anche con quello booleano) meriterebbe di essere conosciuto e applicato anche dai cultori di logica e di automatica, dato che consente anche di operare congiuntamente su eventi e numeri aleatori (o 'incognite'). Si tratta di operare usando in modo congiunto le operazioni: $+$ (somma); $-$ (differenza); $\times$ (prodotto; spesso sottinteso o con $\cdot$); $\sim$ (tilde) (complemento ad 1, ossia negazione); $\wedge$ (inf.) e $\vee$ (sup.). [Cfr. TdP, pp. 46-50; qualche esempio:

$$\mathrm{E}_1 \vee \mathrm{E}_2 = \sim (\widetilde{E}_1 \wedge \widetilde{E}_2) = 1 - (1 - \mathrm{E}_1)(1 - \mathrm{E}_2) = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$$

e anal. per 3 o più eventi;

$$\mathrm{P}\,(\sim \mathrm{E}) = \mathrm{P}\,(1 - \mathrm{E}) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{E}), \text{ ecc.}].$$

Riprendendo l'argomento dell'*incertezza*, occorre però porre attenzione alla diversità di interpretazioni in cui essa può essere intesa a seconda di preconcetti filosofici o di atteggiamenti più o meno indecifrabili ([5]).

Nel senso più stretto – *personalistico* – l'incertezza su di un evento cessa, per un dato individuo, soltanto quando egli ne riceve notizie sicure (salvo smentita ... e allora fino alla notizia buona); comunque, è *fino ad allora* che, in base alla residua incertezza, momento per momento, egli vi attribuirà una certa probabilità. Anzi, poiché la memoria non è indelebile, l'incertezza potrà riapparire appena la notizia *sarà dimenticata* o sarà divenuta confusa od incerta.

In un senso intermedio – *empiristico* – si potrebbe dire invece che l'incertezza cessa ('oggettivamente') al momento in cui il *fatto* in questione si avvera nel modo asserito oppure altrimenti; ed è sino ad allora, secondo tale punto di vista, che chiunque potrà attribuirgli la probabilità corrispondente al proprio giudizio.

In senso meno stretto ancora – *deterministico* – l'incertezza non esisterebbe mai o comunque cesserebbe già dal momento in cui l'evento risulti 'determinato' nel senso che il fenomeno da cui esso dipende si svolge secondo supposte leggi strettamente deterministiche senza possibilità di influssi perturbatori di altro tipo (ad es., umano).

IV. – Superamento degli equivoci

Per il superamento di tali equivoci e dei dubbi che essi non cessano dall'ingenerare, basterebbe citare la seguente osservazione di Borel: «*Si può scommettere, a testa o croce, mentre la moneta, già lanciata, è in aria, e il suo movimento è perfettamente determinato, e si può anche scommettere dopo che è caduta, sotto la sola condizione di non vedere su quale faccia riposi*».

L'esempio, di per sé, è banale, ma le conclusioni che vi sono implicite hanno una portata chiarificatrice decisiva.

Il poter parlare di probabilità riguardo a un certo evento non dipende dall'esistenza di una (comunque concepita) 'incertezza oggettiva' (o 'incertezza in sé, come forse avrebbe potuto dire Kant ([6])) riguardo al suo verificarsi (o 'essersi verificato') – dall'idea che il suo verificarsi sia legato all'intervento della Dea Fortuna, o di un mitizzato Caso (magari 'Dio Caso' ([7])) – o (con una locuzione non meno infelice, benché di moda) di una quasi personificata Natura, magari da una volontà 'divina' oppure 'diabolica', o infine da una qualche specie di 'Determinismo Scientifico' di stampo ottocentesco, od altro.

Ma, cosa comporta l'eventuale accettazione di questa o quella veduta (o 'frase') per chi abbia a valutare la probabilità di un fatto che gli interessa (che, ad esempio, influisca sul risultato di sue eventuali decisioni)? A prescindere da possibili atteggiamenti superstiziosi e conseguenti consultazioni di maghi o fattucchiere, tutto ciò non potrà influire sulla sua valutazione delle probabilità altro che soggettivamente (così come ogni altro elemento ed aspetto della personalità di ciascuno), a seconda che sia più o meno consapevole (o invece addirittura contesti) che la sua scelta, comunque venga fatta (con criteri di apparenza oggettiva oppure no), sia soggettiva. Ma tutto ciò non altera minimamente il fatto che tale essa *è*. Si potrebbe perfino ammettere (se c'è qualcuno cui ciò non appare stravagante e futile) che il 'determinismo' attribuito da Borel alla moneta che è in aria cominci ben prima «*pur di misurare esattamente lo stato dei muscoli di Caio mentre si accinge a lanciarla*». Così dice infatti Hans Reichenbach ([8]) pur aggiungendo che «*noi non potremmo farlo: lo potrebbe solo il superuomo di Laplace*». Comunque, egli avrebbe potuto dire, con la stessa certezza dell'impossibilità di smentita, che il superuomo di Laplace (*se* 'esistesse') potrebbe conoscere esattamente tutto il futuro («*non cadrà foglia che lui non sappia fin da sempre*»). Fortunatamente, il ragionamento probabilistico serve in casi molto più banali e perciò seri.

La precedente osservazione di Borel contiene già di per sé una conclusione molto più generale e radicale. Non solo risulta irrilevante il carattere suppostamente deterministico o suppostamente indeterministico del fatto che si considera – del fatto su cui (per esempio) accettiamo di scommettere – ma anche (a tale riguardo) la stessa distinzione tra passato e futuro, tra cose tuttora 'incerte' (nel senso 'fattuale', di 'non ancora avvenute') o 'certe' (purché non ne sia conosciuto l'esito). Come disse (se non confondo) Poincaré, «*la probabilità dipende in parte dalla nostra conoscenza e in parte dalla nostra ignoranza: da ciò che sappiamo e da ciò che non sappiamo*». Non solo si può scommettere, pur di ignorarne l'esito (e purché neppure il competitore lo conosca) sull'esito di testa e croce in un lancio già effettuato (o su un'estrazione del Lotto di 20 anni fa, o sul risultato di Roma-Lazio nel campionato 1929-30), ma, sotto la stessa condizione, su qualunque altra cosa 'certa'. Ad es., sul valore della 50.000-esima cifra decimale di π (già calcolata e pubblicata: vedi le tabelle di Shanks e Wrench che vanno fino alla 100.000-esima, in *Mathematics of Computation*, 1962), o su quello della milionesima (non conosciuta, e forse dagli uomini mai, ma determinata dal punto di vista matematico). Si obbietterà che praticamente è certo che la scommessa rimarrebbe indecisa, ma ciò può avvenire sempre, non fosse che per incidenti fortuiti, qualunque ne sia l'oggetto.

V. – La probabilità: chi è costei? E di che cosa?

Era inevitabile che il termine *probabilità* fosse usato anche nelle considerazioni finora premesse, benché preliminari alle argomentazioni intese a precisarne il significato e con ciò a darle diritto di esistenza in un linguaggio non ambiguo.

Non potevamo, né tuttavia possiamo, chiederci ex abrupto «che cosa *sia* la probabilità», impelagandoci in metafisicherie, ma dobbiamo invece far emergere il significato di 'probabilità' esaminando e discutendo in quale senso ne parliamo (e la valutiamo) nei contesti appropriati e per noi significativi.

Anziché chiederci «cosa sia la probabilità» dovremo esaminare il significato implicito nell'uso che s'intende farne, e porci, a tale scopo, le tre seguenti domande:

– «probabilità di che cosa?», e qui tutti risponderanno «di un *evento*»; e poi
– «sotto quali circostanze?», ed è naturale rispondere «tenendo conto di tutte le circostanze rilevanti note al momento»; ed infine
– «valutate da chi?», e non si può che rispondere «dal soggetto che le considera»; eventualmente, ciascuno potrà rispondere «da me».

Queste tre risposte sono quelle che darebbe un soggettivista, quale io sono, ma appunto perciò non pretendo, né minimamente desidero, di chiudere la questione con risposte apodittiche di tale genere. Esse servono solo per prefigurare l'iter della discussione in cui le varie possibili posizioni andranno messe a confronto.

L'unanimità nel rispondere che la probabilità si riferisce agli '*eventi*' giova ben poco, anzi nulla, perché è proprio dalle difformità di consuetudini e di interpretazioni nel concepire e nell'usare il termine 'evento' che scaturiscono e si perpetuano, inevitabilmente, insanabili oscurità e confusioni riguardo al concetto di probabilità.

Prescindendo da sfumature più o meno secondarie, le interpretazioni da distinguere sono sostanzialmente due, a seconda che il termine 'evento' venga rispettivamente inteso in senso *specifico* o in senso *generico*.

Nel primo caso, dicendo 'evento' s'intende alludere a un certo risultato in un caso singolo ben determinato: un *evento* è, cioè, un'asserzione tale che, stipulando su di essa una scommessa, risulti poi in modo incontestabile se l'evento è *vero* o *falso* (*si è* verificato o *non si è* verificato), e quindi *se la scommessa è vinta o persa*.

Ad esempio, *sono eventi* le proposizioni seguenti:

«Pareggio tra Juventus e Torino domenica prossima (5-12-1976)»,
«Uscita del 13 alla ruota di Roma sabato prossimo (4-12-1976)»,
«Morte entro il 1977 dell'assicurato 49-enne sig. X.Y.», ecc.

E in tal modo tutto è ben chiaro, privo di ambiguità.

Nel secondo caso tutto invece è ambiguo e confuso. Infatti, il termine 'evento' viene allora usato in senso 'collettivo' per indicare indiscriminatamente uno qualunque tra molti o infiniti possibili '*eventi nel primo senso*' più o meno 'analoghi', che vengono chiamati '*prove*' di un certo '*evento nel secondo senso*' (cioè 'evento' nel senso *generico*). Ad esempio: «Pareggio in una (non specificata) partita del campionato italiano di calcio 1976-77, Serie A»; «Uscita del 13 in una generica estrazione e in una qualunque data ruota»; «Morte entro il 1977 di un 49-enne» ([9]).

VI. – Bandire terminologie ambigue

È perfettamente innocuo, e può anche spesso esser utile, introdurre una designazione collettiva per indicare genericamente degli eventi che hanno in comune certe caratteristiche descrittive (come negli esempi ora indicati), ma a condizione di porre tutta la cura necessaria per evitare quei fraintendimenti nominalistici che imponessero o suggerissero, per il solo fatto del raggruppamento sotto uno stesso nome, di attribuire loro qualche altra cosa di comune in più: in particolare, per quanto riguarda il nostro tema, uguali probabilità od altre circostanze (ad es. 'indipendenza (stocastica)', cfr. n. 8) ad essa collegate, proprietà che andranno invece *espressamente specificate* caso per caso.

Per tale motivo, dovendo o volendo esprimere queste stesse circostanze con termini *innocui* (non forvianti, non implicanti il rischio di ingenerare confusioni del genere) si potrà dire ad esempio (come ho proposto e faccio) che certi *eventi* (sempre nel senso di 'eventi singoli'!) sono '*prove di un medesimo fenomeno*'.

La distinzione può forse, a prima vista, sembrare si riduca a una questione di parole ('di lana caprina'), ma così non è. Non lo è perché la differenza tra le due locuzioni sta nelle implicazioni, palesi od occulte, che nelle due frasi *ci sono* o *non ci sono*.

Giova forse premettere un'analogia: dicendo «animali di una stessa *specie*» devo intendere 'specie' nel senso dei naturalisti; dicendoli «di uno stesso *insieme*» posso riferirmi all'insieme di quelli che vivono oggi nello Zoo di Amburgo, o di quelli di colore grigio, o quel che altro sia, volta per volta. Le implicazioni che *ci sono* o *non ci sono*, nel nostro caso, a seconda della locuzione usata, sono di tipo analogo. 'Ci sono' quando uno dice «prove di un medesimo evento», perché, secondo l'uso corrente, dicendo così si sottintende in generale che tali 'prove' si debbano automaticamente e acriticamente considerare come *ugualmente probabili*, e spesso (peggio ancora) anche *indipendenti*, o, per dir meglio, *stocasticamente indipendenti* ([10]) col rischio di giungere – quasi, o anche senza quasi – a confondere o perfino identificare (!) la probabilità con la frequenza. Ed è fatale lo smarrirsi irrimediabilmente nel labirinto in cui ci si va a cacciare quando si giunge a travisare e banalizzare in tal modo la ricca rete di significative ma delicate relazioni che sussistono in entrambi i sensi tra probabilità e frequenza: da un lato, tra probabilità valutate e previsioni circa le frequenze future, e, nel verso opposto, tra osservazione di frequenze ed eventuale conseguente adeguamento delle valutazioni di probabilità per prove future. Chi dice «prove di un medesimo fenomeno » sa invece di alludere a qualche mera circostanza esteriore, magari alla semplice comunanza di denominazione, che può rendere più o meno espressiva o comoda la formulazione di esempi, più o meno specifici i riferimenti ad applicazioni pratiche, ma che è del tutto irrilevante riguardo alla trattazione probabilistica. Cosicché, allora, di implicazioni occulte *non ce ne sono*.

La tabellina che segue schematizza ed evidenzia il raffronto, chiarendo le sostanziali differenze fra le due terminologie.

Terminologia	*Oggettivista*	*Soggettivista*
nome per caso singolo	prova di un evento	evento (prova di un fenomeno)
id. in senso collettivo	evento	fenomeno
AMBIGUITÀ?	SI	NO

Ma basta, a questo punto, introdurre la nozione di 'scambiabilità' (menzionata fin dai cenni all'inizio) per ritrovare *in versione corretta*, ineccepibile, quelle conclusioni che l'uso di locuzioni inappropriate impediva non solo di raggiungere ma financo di esprimere. Infatti, nel gergo oggettivista, 'eventi *scambiabili*' si tradurrebbe in 'eventi ugualmente probabili e indipendenti ... con *probabilità incognita*' (dove, grazie all'ultima precisazione, risulta in definitiva che *la probabilità varia* e *non c'è indipendenza*!).

Prima di proseguire in tale lavoro di ricostruzione, dobbiamo però rispondere (non dimentichiamolo) alle due domande residue.

VII. – Probabilità: suo carattere 'relativo'

Eliminata la principale causa di confusione, derivante dal pensare di dover attribuire una data probabilità non ad ogni singolo evento ma a collezioni di eventi – collezioni finite, o spesso addirittura infinite, o peggio ancora, infilzate in una immaginaria successione numerabile ('Kollektiv' di von Mises) ([11]) – passiamo ad esaminare le altre domande, seconda e terza. La domanda «sotto quali circostanze», e la risposta (inoppugnabile) «tutte le circostanze rilevanti note al momento», mostra che la valutazione di probabilità non solo si deve riferire ad *un* evento (in senso *specifico*), ma dipende anche dall'insieme variabile di circostanze ritenute rilevanti rispetto al suo verificarsi, note al momento (ed, in genere, varianti di momento in momento).

In altri termini, e più precisamente, essa varia col nostro *stato d'informazione*, continuamente suscettibile di arricchirsi col flusso di nuove informazioni, e fornito – tra l'altro – dai risultati via via appresi od osservati riguardo a casi e situazioni più o meno simili.

In particolare, nel caso di osservazioni di 'casi simili', si suole dire, nei linguaggi criticati, che la probabilità *è* la frequenza osservata (o che questa è «quasi certamente prossima alla ... », o «è una buona stima della ... », ecc.). Qualcosa di valido c'è, se non in tali frasi, nell'idea sottostante, anche se le frasi sono inficiate dai controsensi connaturati ad ogni contraffazione oggettivista di affermazioni probabilistiche. Le stesse conclusioni, tradotte in forma soggettiva e basate sulla scambiabilità, che è la traduzione in forma soggettiva della fasulla 'indipendenza ed equi-probabilità', danno la naturale soluzione della 'vexata quaestio'.

Il ragionamento completo e fondato si basa (prescindendo dalle particolarità dello specifico caso od esempio) sul *teorema di Bayes*, fondamento dell'*induzione bayesiana* (o addirittura, come spesso si dice, della *statistica bayesiana*). E preferisco anticipare fin d'ora il perché della mia avversione a questo termine: non per insufficiente adesione alla posizione di Bayes, bensì perché è l'unica *corretta*. Chi usa dire «INDUZIONE BAYESIANA» dovrebbe dire, secondo me, per coerenza, «ARITMETICA PITAGORICA» quella che accetta, per eseguire un prodotto, di rispettare la tradizionale TAVOLA PITAGORICA ammettendo che 6 per 8 faccia 48, che 3 per 9 faccia 27, ecc. (mentre altri, secondo qualche nuova moda, potrebbero preferire che 6 per 8 faccia 90 e 3 per 9 faccia 77).

Per limitarci, in un primo momento, a chiarire in che modo ogni nuova informazione modifica le nostre valutazioni di probabilità, riferiamoci alle famose 'patate' di Eulero-Venn (assai utili, pur di non abusarne come vorrebbero certe 'mode') ([12]).

Pensiamo, per rendere la spiegazione più concretamente intuitiva, a un tabellone contro cui viene scoccata una freccia, e il '*successo*' consista nel colpire un punto entro la zona E (patata tratteggiata). Per comodità supponiamo uniforme la densità di probabilità, nel senso che aree uguali abbiano probabilità uguali. (Ciò non toglie nulla alla generalità delle conclusioni, ma è più concreto dire *area*, beninteso, prendendo come unità l'area del tabellone.) $P(E)$ è dunque l'area della zona E tratteggiata. Però, abbiamo anche delimitato altre regioni ('patate') indicate con H_1, H_2, ecc.; se veniamo informati che la freccia ha colpito un punto della regione H_1 (p. es.), non attribuiremo più al 'successo' la probabilità $P(E)$ bensì la probabilità $P(E|H_1) = P(EH_1)/P(H_1)$: rapporto tra l'area di H_1 contenuta in E e l'area totale di H_1. Se poi sapessimo che la freccia ha *anche* colpito, p. es., la regione H_3 (e pertanto la zona intersezione H_1H_3) la probabilità diverrebbe

$$P(E|H_1H_3) = P(EH_1H_3) / P(H_1H_3), \text{ ecc.}$$

È questo il senso (o la traduzione formale del senso già detto a suo tempo) in cui la probabilità è *relativa*: relativa allo stato d'informazione *attuale* (momento per momento), che costituisce un evento H.

Parlando della 'probabilità di E' (senza altre specificazioni), e indicandola (tout-court) con $P(E)$, va sottinteso (si badi bene!) che ci riferiamo, nel valutarla, al nostro attuale stato di *conoscenze*. Per essere espliciti, dovremmo indicarlo ad es. con H_0 e scrivere $P(E|H_0)$, così come, in generale, si indicherebbe con $P(E|H)$ la probabilità *subordinata*, o *condizionale*, all'evento (o condizione, o 'ipotesi') H.

Anche qui, con H si indica in genere (esplicitamente) solo l'eventuale ipotesi aggiuntiva (rispetto all'H_0 già supposto) scrivendo $P(E|H)$ anziché $P(E|H \cdot H_0)$. (Ma, si badi, H_0 è *sottinteso*, non soppresso!)

Riferendoci alle 'patate', ciò significa che l'intero 'tabellone' era già la 'patata' che raccoglie soltanto i casi possibili al momento in cui ci si pone: in un istante anteriore sarebbe stato esso stesso una patata di un tabellone più grande (inclusi cioè i casi già nel frattempo esclusi per informazioni sopraggiunte).

In termini di scommesse (*i soli realmente e realisticamente significativi*) la probabilità P $(E \mid H)$ è il *prezzo* p da pagare per una scommessa che viene

$$\begin{array}{lllll} \textit{annullata} & \begin{cases}\text{viene pagato } p \\ \text{(restituzione)}\end{cases} & \begin{pmatrix}\text{guadagno}\\ =0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{se } H \text{ non si}\\ \text{verifica}\end{array} & \begin{array}{l}\text{(di } E \text{ non}\\ \text{importa)}\end{array} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{vinta} & \text{viene pagato } 1 & (=1-p) \\ \textit{persa} & \text{viene pagato } 0 & (=\quad -p)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{se } H \text{ si}\\ \text{verifica}\end{array} \quad \text{ed } E \begin{cases}\text{si verifica}\\ \text{non si verifica}\end{cases}$$

È questa la base e la giustificazione del ragionamento induttivo: al variare dell'informazione: H_0, H_1, H_2, ..., H_n, ... sempre più restrittive (quelle che, nei commenti alle patate, avevamo indicato H_1, H_1H_2, $H_1H_2H_3$, ecc., perché visualizzate come successive intersezioni, ma ciò è inessenziale) la probabilità diventa via via

$$P\,(E \mid H_k) = P\,(E\,H_k) \,/\, P\,(H_k) \text{ con } k = 0, 1, 2, ..., n, ... \text{ ecc.}$$

Il caso più classico e semplice è quello di Bayes-Laplace, che corrisponde ad una mistura uniforme per le probabilità tra 0 ed 1; in versione approssimata, estrazioni con reimbussolamento da un'urna contenente un grande numero N di palline bianche e nere con uguali probabilità, $1/(N+1)$, per le $N+1$ 'ipotesi' che le nere siano 0, 1, 2, 3, ..., $N-1$, N. Dopo n estrazioni di cui h di pallina nera, la probabilità di pallina nera, per una qualunque 'prova' successiva (a quel momento, con quella informazione) è $p = (h+1)/(n+2)$ ('regola di successione' di Laplace): quella ridicolizzata da avversari applicandola alla 'probabilità che il sole sorga domani'.

Più interessante è notare l'identità di valutazioni tra questo caso ed un altro che, *oggettivamente*, appare del tutto diverso: quello dello 'schema di Pólya'. Si comincia con nell'urna due palline, una bianca e una nera, e si fanno successive estrazioni reimbussolando ogni volta la pallina estratta *ed un'altra dello stesso colore*. È chiaro che, dopo n estrazioni di cui h di palline nere, nell'urna ci sono $n+2$ palline di cui $h+1$ nere, e la probabilità della successiva estrazione è di nuovo

$$(h+1)/(n+2).$$

Aritmeticamente, la conclusione è identica. Ma con la differenza che qui corrisponde alla effettiva composizione attuale, mentre nell'altro caso non varia la composizione bensì la valutazione di essa basata probabilisticamente sul risultato osservato.

VIII. – Indipendenza – Scambiabilità

Ora, prima di passare al terzo ed ultimo punto (sulla soggettività), conviene fare una digressione con alcune osservazioni.

Va notato anzitutto che il carattere *relativo* delle probabilità non viene in genere sottolineato come fatto generale: forse talvolta è sottinteso, ma in genere sembra non venga neppure rilevato e comunque non sembrano adeguatamente curate le conseguenti necessarie raccomandazioni (fosse pure col segnale stradale di 'PERICOLO' messo in margine alla pagina, 'alla Bourbaki').

Basta anche un solo esempio semplice e significativo per far vedere come l'incertezza possa esistere per gli interessati anche solo per l'incompletezza dell'informazione disponibile per ciascuno di essi, mentre l'evento (nella fattispecie, la vittoria di uno di essi) è certo, e tale risulterebbe se solo si scambiassero le informazioni in possesso di ciascuno.

Si pensi al sorteggio di un premio fra tre individui, effettuato facendo estrarre da ciascuno un numero della tombola (senza reimbussolamento) e stabilendo che vinca chi estrae il numero più alto.

Finché ciascuno conosce solo il proprio numero, sia m, valuterà a $p_m = K(m-1)\,(m-2)$ $(K = 2/(88.89))$ la propria probabilità di essere il vincitore ed a $(1-p_m)\,/\,2$ quella di ciascuno degli altri due (solo per $m = 90$ o 1 o 2 egli è certo di aver vinto o non aver vinto). Si tratta anzi di una di quelle probabilità di tipo classico che gli oggettivisti direbbero addirittura 'oggettiva'.

Se due si scambiano l'informazione, colui che ha il numero più basso sa di aver perso e per l'altro la probabilità sale ad $(m-2)/88$; se si scambiano l'informazione tutti e tre il vincitore è individuato. Risulta in tal modo evidente l'infondatezza dell'idea che fa dipendere (o almeno induce a far credere che si possa far dipendere) la probabilità da una (per così dire) 'incertezza in sé' del fatto che si considera (o, non c'è differenza, di 'incertezza della Natura' riguardo ad esso). Né basterebbe, per sanare paradossi di tale specie, ammettere che tali valutazioni venissero modificate soggettivamente (anzi, se per caso esse sanassero l'apparente paradosso, sarebbero più assurde che mai, perché valutazioni basate su informazioni diverse non possono comportarsi nel modo che sarebbe esatto se si basassero su informazioni identiche).

Spesso, per tale equivoco – e specialmente nelle temerarie impostazioni *assiomatich*e – si dà l'impressione che con la $P(E)$ si possa sistemare tutto, e $P(E|H)$ sia qualcosa di accessorio, definibile come

$P(EH)/P(H)$. Peggio ancora, l'impiego esclusivo della $P(E)$ può far cadere nell'abbaglio oggettivistico nella forma più piatta, e cioè far considerare la probabilità $P(E)$ dell'evento E come una grandezza oggettiva che rimanga indissolubilmente attaccata all'evento E (anziché variare al variare del sottinteso – ma giammai ignorabile o sopprimibile – stato d'informazione espresso dalla 'ipotesi' H).

Più gravi sono, comunque, i riflessi di ciò sulla comprensione della nozione di indipendenza (stocastica). Scrivendola

$$P(E_1E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

(sottintendendo, come è lecito ma pericoloso, l'H_0) può nascere la convinzione (o magari apparire cosa ovvia) che la nozione di indipendenza abbia un significato assoluto anziché *relativo* a questo o quello stato d'informazione H, e che pertanto la relazione precedente implichi anche

$$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) \cdot P(E_2|H) \text{ qualunque sia } H.$$

O almeno potrebbe sembrare 'corretto' (come, grammaticalmente, purtroppo sembrerebbe) che se due eventi E_1 e E_2 sono indipendenti sotto ciascuna delle ipotesi disgiunte e esaustive (cioè: formanti una partizione) $H_1, H_2, ..., H_n$, sono anche 'indipendenti' tout-court.

Così però non è, e bastano facili esempi per dimostrarlo.

Estrazioni con reimbussolamento da un'urna di composizione nota (p. es. 7 palline bianche e 3 nere) sono stocasticamente indipendenti; ma se invece la composizione non è nota (se sappiamo ad es. che sono 7 di un colore e 3 dell'altro, e diamo la stessa probabilità, ½, alle due ipotesi che siano 7 le bianche o le nere), è chiaro che ogni informazione sul risultato di una nuova estrazione ci fa accrescere la probabilità attribuita alla composizione del colore di quella estratta (e, man mano, si avvantaggerà il colore estratto con maggiore frequenza). E quindi l'*indipendenza non sussiste*: la traduzione corretta del nonsenso 'probabilità costante ma incognita' è data dalla nozione di *scambiabilità*. In tali casi le successive estrazioni sono (non indipendenti, ma) *scambiabili*, nel senso che la probabilità non varia per permutazioni. Ad es., ogni successione di 9 estrazioni (ad es. di 5 bianche e 4 nere) ha la stessa probabilità (invarianza rispetto alle permutazioni). Ad es.:

$$P(N\text{-}B\text{-}N\text{-}B\text{-}B\text{-}B\text{-}N\text{-}N\text{-}B) = P(B\text{-}B\text{-}B\text{-}N\text{-}B\text{-}N\text{-}N\text{-}B\text{-}N) = \text{ecc.}$$

$$\text{(per ognuna delle } (4)_9 = 126 \text{ permutazioni).}$$

Ed è appunto tale *non-indipendenza* che consente quella valutazione della probabilità per casi futuri che si basa sulla frequenza nei casi osservati, in condizioni dette usualmente, ma impropriamente, di 'equiprobabilità e indipendenza' (il che rende manifestamente contraddittoria la conclusione). La condizione che traduce in forma sensata il predetto nonsenso è appunto quella di 'scambiabilità': una proprietà che si conserva per *misture* (cioè per combinazioni lineari a coefficienti positivi), valida per eventi indipendenti ugualmente probabili, e quindi per loro misture; risulta anzi che la scambiabilità vale per tutte e sole le misture del tipo detto. Si tratta pertanto del modo corretto di esprimere ciò che assurdamente si diceva 'prove indipendenti ugualmente probabili'.

Senza entrare nella parte tecnica – fuori luogo in questa sede – indichiamo solo il risultato: ogni mistura di 'prove ripetute' con 'probabilità costante ma incognita' (come si direbbe in modo improprio ma tradizionale e perciò 'comprensibile') dà luogo a un processo scambiabile; ed anche *viceversa*: un processo scambiabile è sempre interpretabile come una tale *mistura*.

È questa chiarificazione concettuale, illustrata qui sull'esempio più banale ma estensibile ed estesa a casi molteplici e complessi, la cosa cui tengo (modestia a parte) perché contribuisce a dissipare i concetti (o almeno le terminologie) di sapore superstizioso, di pretesa metafisica, di espressione contraddittoria. Anche se, per coloro che sono più accentuatamente dei 'matematici' (per cui la matematica è *scopo*, non *strumento*) conta più il risultato analitico che hanno battezzato «*de Finetti's representation theorem*».

IX. – Probabilità: suo carattere 'soggettivo'

Come ultimo passo, come ultimo anello della catena di osservazioni che hanno via via escluso interpretazioni mistificatorie della nozione di probabilità, dovremmo aggiungere altre osservazioni per dimostrare il carattere fondamentalmente e necessariamente *soggettivo* della probabilità. Ma si tratta ormai quasi solo di sfondare una porta aperta, perché una probabilità riguardante *eventi* nel senso di 'eventi singoli' e dipendente dallo stato d'informazione del soggetto che la valuta, è già sostanzialmente 'personalizzata'. Resta solo da osservare, in aggiunta, che una componente 'personale' sarà certo presente per differenziare più o meno valutazioni – anche fatte in base ad uno stato d'informazione supposto identico – da individui differenti che porranno maggiore attenzione o attribuiranno maggior peso a certe o certe altre circostanze. Ciò anche prescindendo da fattori di distorsione come la tendenza a valutazioni ottimistiche o pessimistiche (‘*wishful thinking*’ o ‘*painful thinking*’), a reazioni emotive riguardo a dettagli di vario tipo, e via dicendo.

Comunque, sono troppo soggettivista (e pragmatista) per ritenere che valga la pena di farne diatribe metafisico-verbalistiche. Ogni individuo che faccia una valutazione di probabilità *coerente* (nel senso che rammenterò), e voglia dire che essa è ‘oggettivamente esatta’, non fa danno a nessuno: tutti saranno d’accordo che quella è la sua valutazione soggettiva, e la sua affermazione ‘oggettivistica’ sarà un’innocua vanteria a giudizio dei soggettivisti, mentre sarà giudicata vera o falsa dagli oggettivisti che la condividessero o che ne avessero invece una diversa. Questo è un fatto generale, ovvio ma irrilevante: «*Ciascuno a suo modo*».

Rimane però da dire esplicitamente *come* tali probabilità soggettive vengano *definite*, e cioè, volendo dare una definizione *operativa* (non, cioè, una definizione verbalistica e vacua), occorre indicare un procedimento (sia pure idealizzato, ma non svisato) un esperimento (effettivo o concettuale) per la sua *misurazione*.

Non c’è nulla da inventare: basta invertire un asserto che gli oggettivisti esprimono *definendo* scommessa *equa* quella che, per ricevere un importo (positivo o negativo) S se l’evento E di probabilità p risulta vero, richiede il pagamento pS. In questa versione, si pensa definita *prima* la *probabilità*, e si deduce quali scommesse sono *eque*.

Ma è palese che in questo modo si mette ‘il carro avanti ai buoi’: dobbiamo pensare a un individuo che si trovi nella condizione di potere, o meglio *dovere*, stipulare una scommessa sul verificarsi di un certo evento E, e vedere quali scommesse su di E riterrebbe *eque* (cioè: accettabili, a suo giudizio, indifferentemente in entrambi i sensi). Se egli ritiene equo – per S qualunque, positivo o negativo – uno scambio tra un importo certo pS e il diritto ad un importo S subordinatamente al verificarsi dell’evento E, tale coefficiente p si dice probabilità di E (per tale individuo) e si indica $p = P\ (E)$.

Più alla buona, p è il *prezzo* che tale individuo attribuisce ad una Lira condizionata al verificarsi di E; pensando a prezzi, tutto diviene chiaro (addirittura banale).

Il fatto importante da sottolineare è che ciò risponde al fondamentale requisito di una definizione valida di una grandezza avente senso (dal punto di vista metodologico, pragmatista, rigoroso) anziché rimasta al livello di conato verbalistico: non va costruita su più o meno vani o lambiccati giri di parole, ma deve essere *operativa*, cioè basata sull'indicazione degli esperimenti – sia pure esperimenti concettuali – da eseguire per ottenerne la misura.

Ciò si ricollega al cenno su Calderoni e Vailati, nonché alle posizioni al riguardo di Mach, Einstein, Bridgman, ecc. E tutto diventa chiaro: tutte le usuali regole della teoria della probabilità scendono come semplici corollari dalla necessaria additività dei *prezzi*. Per 'biglietti di lotteria' (in senso lato: puntate su fatti qualunque e per importi qualunque) il prezzo si determina come per qualsiasi merce o paniere di merci: $\Sigma_h\, p_h S_h$ è il prezzo per ricevere $\Sigma'_h S_h$ (indicando con Σ' la somma limitata agli eventi *veri*). Più appropriatamente tale somma si potrebbe indicare con $\Sigma_h E_h S_h$, che indica in modo più significativo la stessa cosa, in quanto, come si è convenuto, è $E_h = 1$ oppure $E_h = 0$ a seconda che E_h è *vero* o *falso*. (Incidentalmente, questo è un esempio dell'uso di indicare vero e falso con 1 e 0, e dell'utilità di tale convenzione).

Si mette così in luce il vero e semplice significato di tutte le 'leggi' o 'regole' della teoria delle probabilità: si riducono alla *coerenza* (come *additività*) che è necessaria per i prezzi di oggetti e merci qualsivoglia (biglietti di 'lotteria' compresi). In inglese, una combinazione di scommesse congegnata in modo che qualcuno – approfittando di una qualche incoerenza nelle quote fissate dal Bookmaker – riesca a garantirsi un guadagno *qualunque cosa avvenga*, si chiama 'Dutch Book' (ignoro il perché). Comunque, volendo, si può far uso di questo termine per esprimere la condizione di coerenza che è la sola base di tutta la teoria della probabilità: basta dire che consiste nel *non lasciar adito alla possibilità di un Dutch Book*.

X. – Come 'esplorare' la probabilità

Siamo ora in condizione di rispondere a una questione che si dovrebbe, a rigore, considerare *pregiudiziale*: come si può *conoscere* la probabilità $P_A(E)$ che un certo individuo A (sottinteso: in un dato istante, nel suo attuale stato d'informazione) attribuisce all'evento E?

In generale, egli non saprebbe dirlo (pur se lo volesse, a meno che non si sia impratichito). E neppure, se lo dicesse, saremmo certi della sua sincerità (potrebbe volerci ingannare, o risponderci a vanvera come a scocciatori che gli fanno domande che reputa insulse o indiscrete, ecc.). E neppure avendo notizie di sue sporadiche scommesse si potrebbe ricavarne gran che: potrebbe farle per capriccio, per 'tentare la sorte', senza riflessioni rivelatrici.

Sono, invece, riflessioni rivelatrici (se il soggetto ‘sta’ al gioco, interessandovisi o sentendosi desideroso di collaborare) delle ‘miniscommesse’ congegnate in modo appropriato. Lo si invita a indicare la quota p in base alla quale egli sarebbe disposto ad accettare una ‘miniscommessa’ congegnata nel modo che rende ottima, cioè quanto più possibile vantaggiosa, nel suo giudizio, la risposta sincera, conforme alla sua effettiva valutazione, $p = P\,(E)$.

Precisamente, in base a tale valore p, da lui stesso indicato, egli verrà *penalizzato* di $(1-p)^2\,S$ se si verifica E e di p^2S se si verifica ‘non-E’.

In pratica, per non abusare della sua volonterosa collaborazione infliggendogli delle penalizzazioni (in pura perdita), l’importo S potrà venirgli offerto, in modo che perderà solo una parte di esso (cioè: guadagnerà, nei due casi, $[1-(1-p)^2]\,S$ o $[1-p^2]$ S; perderà ‘tutto’ solo nei casi limite: probabilità (profferita) 0 e l’evento si verifica, o probabilità (profferita) 1 e l’evento non si verifica). Tutta la teoria delle probabilità discende da quest’unica premessa (che *non è un assioma*, non è nulla di artificiale o cervellotico o sublime, bensì una condizione di ovvio buon senso). Questa è, per me, la circostanza più importante e significativa, e tengo a spiegarlo nel modo più esplicito. Chiarire una cosa fino a mostrare che è ovvia può forse sembrare azione dissacrante per chi ama la pompa e la retorica o l’arcano, ma appare invece ai miei occhi come il definitivo raggiungimento di una conclusione nella sua forma ottima. Così e soltanto così si ha una *vera* definizione, non chiacchieroide o metafisicheggiante o astrazionesca, bensì *operativa*, *behaviorista*, *pragmatista*, basata non su pretenziose parole ma su scelte concettualmente (ed effettivamente) sperimentabili.

Quella cui abbiamo accennato è soltanto una (la più semplice e significativa) tra le regole di penalizzazione ‘appropriate’ nel senso ora detto (chiamato *proper scoring rules*). Conviene però accennare alla dimostrazione ed aggiungere ulteriori considerazioni e notizie.

Si vede subito che, come detto, per l’individuo che fa la valutazione, la cosa migliore sta nell’esprimere sinceramente ed esattamente la propria opinione, perché è così e solo così che *si rende minima* la previsione di penalizzazione (secondo l’apprezzamento di chi condivide quella valutazione, e quindi secondo lui stesso).

Se infatti uno dice di aver scelto la probabilità p, ma in realtà attribuisce alla probabilità un valore diverso, $\bar{p}$, la previsione di penalizzazione è, secondo la sua stessa opinione:

$$\bar{p}(1-p)^2 + (1-\bar{p})p^2 = (p-\bar{p})^2 + \bar{p}\,(1-p) = (p-\bar{p})^2 + \text{cost. (risp. a } p),$$

e diviene minima se e soltanto se $p = \bar{p}$ (cioè se si dà la risposta sincera).

Questa regola (di Brier) è stata ed è applicata negli Usa per l'indicazione delle probabilità di pioggia ecc. – secondo le valutazioni dei meteorologi – nei bollettini pubblicati e diffusi per radio e Tv, nonché (anche da noi, in questa Università, senza sapere di quel precedente) per previsioni probabilistiche sui risultati di calcio (dal 1959).

I primi a proporre tali metodi (precursori per qualche tempo sconosciuti) pare siano stati l'americano McCharty e il giapponese Masanao Toda, negli anni '50. Un pregio peculiare sta nel fatto che le penalizzazioni quadratiche, sommandole, danno sempre una distanza (al quadrato) da minimizzare nello spazio a numero di dimensioni pari al numero dei 'gradi di libertà' (ossia delle valutazioni linearmente indipendenti: qui, due dimensioni per ogni pronostico su una partita). In particolare, ciò risponde anche al significato meccanico del centro di gravità come punto per cui è minimo il momento d'inerzia; ma su ciò non mi dilungo.

Piuttosto mi preme sottolineare l'importanza pratica dell'impiego di tali metodi, in quanto danno il modo di esprimere in forma precisa apprezzamenti che, a parole, sono estremamente ambigui e quindi poco seri e poco utili. Ad es., nelle ricerche petrolifere (come ampiamente esposto in un volume di C. J. Grayson al riguardo) la risposta di un esperto espressa in valutazione di probabilità di esistenza di petrolio in una data località (e nella previsione della quantità eventualmente esistente) riesce assai più utile e seria delle vaghe parole o frasi, qualitative ed elusive, spesso tra il dire e il disdire, di dubbia decifrazione talvolta quasi come gli oracoli della Sibilla. Le risposte in termini di probabilità e previsione possono invece venir prese a base di calcoli preventivi (tenendo anche conto del margine di approssimazione e indeterminatezza che esse comunque non possono non contenere), e rendono più fiduciosa la collaborazione fra imprenditori ed esperti.

A parte l'utilità per tali applicazioni pratiche, l'impiego di tali metodi è però prezioso anche in sé, come fattore dell'affinamento psicologico necessario a tutti – come effettivi o potenziali autori od utenti di valutazioni del genere – per creare l'abitudine *a vedere* la corrispondenza fra grado d'incertezza ed espressione numerica di esso come probabilità.

Un tale allenamento sarebbe, a mio avviso, quanto mai utile in tutte le scuole: sia per tale campo (probabilistico), quanto per affinare le capacità di apprezzamento numerico di grandezze di ogni altro genere, come numerosità di una folla, distanze, aree, durate di tempo, pesi, temperature, velocità, ecc.

Purtroppo, non mi consta che tale fattore educativo venga abbastanza curato e apprezzato. Al riguardo non ricordo infatti (e spero sia per la mia poca memoria) se non due esempi: alcune stime di lunghezze e distanze (con una discussione empirica ma istruttiva sulla distribuzione degli errori) per valutazioni ad occhio di una stessa lunghezza fatte da diversi scolari nella scuola di Mario Lodi (cfr. *Il paese sbagliato*, Einaudi, Torino, 1970; cit. in Periodico di Matematiche (PdM), 1973, n. 4), e un vero addestramento del ragazzo indiano Kim (nell'omonimo romanzo di Rudyard Kipling) perché potesse collaborare efficacemente come informatore durante il dominio inglese nell'India.

XI. – Concetti standard emendati

La traccia essenziale della mia esposizione potrebbe ora dirsi conclusa, ma sarebbe un po' troppo scheletrica e poco assimilabile tralasciando dei cenni di raccordo o confronto con idee e locuzioni abituali.

Si tratterà di tre gruppi di osservazioni, e vorrei premettere che «sarò breve», se tale frase – ricordandola in bocca al padre di Ofelia nell'Amleto e in quelle di vari Colleghi negli asfissianti e molteplici consigli accademici – non mi facesse temere che suonerebbe allarmante alle orecchie dei presenti.

Prima di tutto, vorrei mettere in guardia contro un consiglio di D'Alembert, che sarebbe disastroso nel campo della probabilità (come anche, probabilmente, in quello dell'Analisi cui egli si riferiva): «*Allez de l'avant: la foi vous viendra*». Se uno va avanti senza liberarsi, chiarendoli, dei primi naturali fraintendimenti o remore, sarà pur vero, purtroppo, che la fede gli viene, ma non nel senso giusto del «credo perché *è chiaro*», bensì in quello aberrante del «*credo quia absurdum*».

Si tratta dell'accettazione della nozione di Probabilità come di un *deus ex machina* scaturito da ragionamenti astratti che evitano con cura di spiegare che il senso della probabilità è quello di cui noi tutti (uomini ed altri animali) ci valiamo per valutare pericoli e rischi e prospettive più o meno felici e lusinghiere.

La probabilità, infatti, è la nostra *guida* nel *pensare* e nell'*agire* in condizioni di *incertezza*, e l'incertezza è *dovunque*.

La teoria delle probabilità è la logica (più o meno istintiva, e perfezionata come istinto e come facoltà razionale, inconscia oppure più o meno scientificamente organizzata e connaturata), con la quale ci studiamo di fare le nostre scelte col proposito di ottimizzare le nostre prospettive.

Il calcolo delle probabilità permette di tradurre tali ragionamenti inconsci e istintivi in uno schema di valutazione attenta del pro e del contro, che difficilmente potrebbe (e, penso, neppure dovrebbe) sostituire la spontaneità delle decisioni istintive con una fredda contabilità di profitti e perdite, ma gioverebbe comunque a perfezionare e controllare tale dote spontanea o a corroborarla con un'apprezzabile indicazione orientativa. Possono servire, e fin dove, a tale scopo, le tradizionali definizioni di probabilità?

Secondo la prima, essa è il rapporto m / n fra numero dei casi favorevoli e possibili '*se ugualmente probabili*'. Per noi, avendo definito la probabilità come prezzo per una scommessa, e visto che pertanto dev'essere additiva, questo è *vero ed ovvio*, non come definizione ma come *corollario*. Se p è la probabilità che, per ammissione, qualcuno giudica *uguale*, di ciascuno degli n casi (incompatibili ed esaustivi), l'evento certo (loro somma) ha probabilità $np = 1$: quindi $p = 1 / n$ e per una somma di m di tali eventi la probabilità è m / n.

Qualcuno vorrebbe forse insistere che – dunque – tale probabilità *è* oggettiva, ma non è così: è soggettivo infatti lo stesso giudizio di uguale probabilità. Si insisterà forse ancora sostenendo che se *tutti* (o tutte le persone *ragionevoli*) condividono tale valutazione vuol dire che è oggettivamente giusta. Ma, a prescindere dal circolo vizioso di far discendere la ragionevolezza di un asserto postulando la ragionevolezza di chi lo accetta, una somma di tante opinioni soggettive non può dare una conclusione oggettiva: sarebbe come pensare che accrescendo un cumulo di sassi esso finirà per diventare un animale.

Se il contraddittore ripiegherà sul dire che, comunque, un'opinione condivisa da molti è *ragionevole*, o *naturale,* mi dico pienamente d'accordo ad accettare in linea di massima questo concetto, che, tuttavia, allude semplicemente ad una verosimile e probabile accettazione di ciò che anche molti altri soggettivamente accettano, in base a motivazioni più o meno analoghe, ma si tratterà nondimeno e sempre di un'opinione *soggettiva* (sia pure 'multisoggettiva' o 'intersoggettiva').

Posso anch'io usare e consigliare di usare termini come 'ragionevole' e 'naturale' in detto senso, non senza sottolineare però che il senso non è affatto oggettivo, bensì *soggettivo al quadrato*: (soggettivo)^2, trattandosi di un'opinione soggettiva su opinioni soggettive altrui.

Le contraddizioni intrinseche delle pretese definizioni o spiegazioni 'oggettive' si possono sempre, in qualche modo, spostare, ma mai eliminare: di esse si può dire (con la felice immagine usata da Bernard O. Koopman ([13])) che «*al contrario della Guardia di Napoleone, indietreggiano sempre ma non muoiono mai*».

Ciò vale anche (e ancor più) per l'analoga situazione riguardo alle valutazioni di probabilità basate su frequenze osservate (concezione frequentista, o 'statistica', della probabilità).

Ricondurre la probabilità alla frequenza non ha alcun senso se il senso e le condizioni non si precisano. (E lo faremo tra poco, arrivando a presentare quella nozione di *scambiabilità* menzionata fin dall'inizio). Anticipiamo qui subito (per non dover interrompere il discorso in seguito) una sola osservazione immediata: quanto già detto (nel cap. VI) per denunciare le equivoche implicazioni della locuzione 'prove di un medesimo evento' contiene già quanto basta per estendere al nuovo conato – e in misura più drastica – il rifiuto della pretesa di poter trasformare, anche per quest'altra via, la probabilità in qualcosa di 'oggettivo'.

Un tentativo di far convivere nozioni di probabilità diverse, distinguendole a seconda delle considerazioni da cui si parte per valutarle, era stato fatto dal Cantelli distinguendo tre diversi 'schemi': lo schema dell'*urna* (quello dei 'casi ugualmente probabili'), lo schema dell'*assicurazione* (basata sulle frequenze date dalle statistiche ([14])) e lo schema del *cavallo* (alludendo alle scommesse sulle corse ippiche). Direi che distinzioni del genere (queste od altre) si possono fare, ma riguardano aspetti più o meno esteriori del tipo d'informazione, e non infirmano la natura unitaria della probabilità in ogni campo. La differenza, per esprimerla mediante un'analogia, è quella stessa che passa tra lunghezze misurate con una fettuccia, o con strumenti geodetici, o con segnali radar, o in qualsiasi altro modo: i metodi sono molti, ma la grandezza è sempre una distanza (magari misurata più o meno accuratamente, ma sempre e soltanto distanza).

XII. – La Torre di Babele

La confusione (o semiconfusione) tra probabilità e frequenza, ed altre accennate o che rimangono da accennare o che tralasceremo dall'accennare, indurrebbero spesso a far ritenere che la Torre di Babele sia realmente esistita, e che questo ne sia il retaggio maledetto.

Riprendiamo e concludiamo qui, anzitutto, le critiche ai discorsi e ai dubbi oggettivistici sulla frequenza (che sono già risolti, cap. VIII), per indicare in quale misura equivoci tenaci sono talora frutti inevitabili di locuzioni infelici e forvianti. La locuzione è quella di eventi detti 'prove di un medesimo evento', che sarebbero 'indipendenti' e 'ugualmente probabili', ma '*con probabilità incognita*'. Leggendo tra le righe, con benevolenza, si può intuire che questa è la definizione di scambiabilità, e difatti è a ciò che allude ma in modo insanabilmente contraddittorio (dato che la probabilità varia in dipendenza dei risultati via via osservati). Occorre la definizione di scambiabilità per far dissolvere ambiguità e contraddizioni insieme ai termini che li generano.

Una confusione fondamentale deriva dall'asserire che probabilità UNO e probabilità ZERO si identifichino rispettivamente con CERTEZZA e con IMPOSSIBILITÀ *nel senso logico*: sarebbe come asserire che un insieme di punti di misura nulla (intendendosi la misura vuoi nel senso di Jordan-Peano o di Borel-Lebesgue) non può essere che l'insieme vuoto!

Semmai si potrebbe parlare di QUASICERTEZZA e QUASIIMPOSSIBILITÀ (col 'quasi' inteso in senso analogo all'uso in Analisi, ad es. nel dire 'quasiovunque').

Conviene però pensare all'esempio più semplice e decisivo: una distribuzione di probabilità uniforme su un intervallo, per es. sull'intervallo (0, 1). È chiaro che ogni punto ha probabilità nulla, benché l'insieme dei punti *possibili* sia necessariamente *infinito*, in quanto dev'essere ovunque denso (magari soltanto numerabile, come ad es. l'insieme dei razionali, o con potenza del continuo come l'intero intervallo o il sotto-insieme degli irrazionali).

L'esempio dei razionali conduce però ad una conclusione ben più importante, e cioè che *l'additività completa* (o σ additività) è una proprietà di cui la probabilità non gode necessariamente. (Del resto anche nella teoria della misura tale proprietà è valida solo limitandosi – per esempio – agli insiemi misurabili secondo Lebesgue). Ed è conseguenza della consuetudine a tale campo addomesticato il far ritenere (infondatamente) assurdo ciò che avviene al di là dell'artificioso recinto.

Ma la stessa confusione tra 'certo' e 'quasicerto' si rivela in molte altre situazioni come fonte inesauribile di aberrazioni. Si suole troppo spesso dire erroneamente 'certo' e 'impossibile' non solo quando si hanno probabilità '1' o '0' ma anche quando si tratta solo di probabilità prossime all''1' o allo '0'. È questo inconcepibile e imperdonabile malvezzo che porta ad assurdi come quello di 'definire' la probabilità come 'frequenza', la 'irregolarità' (*randomness*) come caratteristica *necessaria* delle successioni ottenute *a caso* tanto da assumerla a volte come '*definizione*' (sic!!!), e molti altri più o meno analoghi. Qualcuno sembra a volte ritenga addirittura necessario pensare e far pensare che esista una magia che produce ciò (oppure il contrario), nascondendo il fatto banalissimo che spiega tutto sgonfiando i gonfiamenti: il Caso di cui si parla non ha affatto predilezioni per le successioni con frequenze pari o prossime alle percentuali di palline bianche e nere (se si tratta di estrazioni, e lo stesso vale per 'prove ripetute' di tipo qualunque, nelle stesse ipotesi). Il Caso (con la C maiuscola) non sceglie certe successioni perché sono quelle che egli predilige, ma si affida al 'caso' (con la *c* minuscola) che sceglie alla cieca, senza predilezioni, e in genere vengono più spesso successioni del tipo di cui ce n'è di più. Eppure, tra l'altro, molti trovano strano che si abbiano delle sequenze lunghe (molte estrazioni consecutive di palla nera, o – per accennare al caso più pietoso – di estrazioni al lotto senza che esca un numero 'ritardato'!). Ma non si può troppo deridere i poveretti che credono in tale superstizione fino magari a rovinarsi, perché sembra che, inconsciamente, siamo tutti più o meno affetti da 'riluttanza contro l'inconsueto'. Ciò risulta, secondo Komlós e Tusnády («On sequences of pure heads», *Ann. Prob.*, 1975), dall'osservazione che, richiedendo a qualcuno di scrivere una lunga successione di T e C per esemplificare (o 'simulare mentalmente') un processo di testa e croce, si trova che tutti in genere si cade sistematicamente nell'errore di non indicare mai, o assai più raramente di come la teoria indica e in pratica avviene, successioni 'lunghe' di sole T o sole C. (Secondo Rényi [1970], la lunghezza della più lunga successione 'pura' su n colpi [al divergere di n] dovrebbe avere come ordine di grandezza *loglog* n). Chi finge di impersonare il Caso sembra preoccuparsi di imitarlo *troppo bene* e proprio per ciò non riesce: egli non imita il Caso perché il Caso non ha memoria, e riesce a fare successioni 'casuali' proprio perché non si propone e neppure sa di farle.

XIII. – Determinismo e Indeterminismo

Dubbi di origine più profonda concernono l'alternativa: 'Determinismo o Indeterminismo'. Ritengo che tale alternativa sia indecidibile e (vorrei dire) illusoria. Si tratta di diatribe metafisiche sulle 'cose in sé' ; la scienza riguarda ciò che 'ci appare', e non è strano che per studiare gli stessi fenomeni possa apparire più utile volta a volta immaginarli da questo o quel punto di vista, mediante teorie deterministiche (e ammettendo 'errori accidentali' o di 'imprecisione di misura') oppure indeterministiche (e la spiegazione si trova sostanzialmente anticipata nel trattato di Castelnuovo). È infatti indiscernibile un processo di diffusione idealizzato deterministicamente come risultante da urti elastici di sferette, o tradotto in un processo di (per così dire) 'diffusione di una probabilità', tipo processo di Wiener-Lévy. Per inciso: io mi guarderei bene dal dire che sia una 'densità di probabilità' a diffondersi o a rimbalzare o farsi assorbire da barriere riflettenti o assorbenti, ecc.; semmai avrei cura di dirlo 'tra virgolette', o precisando che 'tutto avviene *come se* ... (ecc.)', nello spirito dell'"*als ob*' ('come se') di Veihinger.

Ancor peggiore, perché del tutto superfluo e futile, è il contorcimento usato in genere tuttora per fare sembrare più 'oggettiva' l'affermazione che «possiamo attenderci con grandissima probabilità che ...» ecc., dicendo che in una grandissima collezione (detta, in termodinamica, '*ensemble*', secondo Gibbs) «nella stragrande maggioranza di casi» avviene che ecc. (nella speranza, sembra, che questa frase vuotamente ipotetica appaia più 'oggettiva' dell'affermazione pura e semplice che «possiamo attenderci con grandissima probabilità che ... ecc.») ([15]).

Un esempio si può prendere anche dalla matematica. Il valore di π è certo ben determinato (lo sono, cioè, tutte le infinite cifre decimali: 3,141592 ... calcolate o non ancora oppure mai dall'uomo). Eppure, non apparendo ragionevoli ipotesi speciali in contrario, anormali rispetto alla 'scelta a caso' (prob. $^1/_{10}$ per ogni cifra, indipendentemente dalle precedenti), Borel ha concluso (e, mi pare, a ragione) che, per noi mortali, sia ragionevole attribuire una probabilità $= 1$ (pur non trattandosi di *certezza*, ma 'quasicertezza') all'ipotesi che π sia un numero 'normale' per la scrittura decimale (ed anzi 'assolutamente normale', cioè tale rispetto ad ogni sistema di numerazione, non solo per base 10), dato che i numeri non 'assolutamente normali' sono 'pochissimi' (appartengono a un insieme di misura nulla).

Non voglio aggiungere altre esemplificazioni ed osservazioni, ma solo notare la cura occorrente per sceverare ciò che *ha senso* o *non ha senso* (secondo la raccomandazione di Calderoni e Vailati), ossia – per ribadirla richiamando una massima del Vangelo – la necessità di separare accuratamente «*il grano dal loglio*».

Separare il grano dal loglio significa, nel nostro caso, riflettere sul diverso modo in cui frasi enunciazioni conclusioni relative a un medesimo problema vengono formulate e collegate alla realtà, a seconda che si adotti, rispettivamente, la visione soggettivista della probabilità oppure quella oggettivista.

XIV. – Probabilità, Matematica, Didattica

Per concludere costruttivamente, è necessario affrontare ancora una questione sulla quale vorrei invitare tutti a riflettere seriamente. Trovo molto pericolosa, dannosa, deplorevole, la tendenza che affiora, sia nel campo scientifico che in quello didattico, verso visioni unilaterali, settoriali, riduttive, spesso addirittura artificiose, riguardo a ciò che la Probabilità *è* ed a ciò cui *può* e *deve servire*.

Le considerazioni che intendo prospettare si riferiscono (quale più e quale meno) sia alla ricerca che all'insegnamento della Probabilità a tutti i livelli: da quelli prescolare, elementare, medio, superiore e universitario fino a quello specialistico e alle pubblicazioni, troppo spesso incentivate dal patologico stimolo del '*publish or perish*'.

Grosso modo, può dirsi si tratti sempre di un malvezzo *generico*, comune cioè a tutto l'insegnamento della matematica, ma, per il nostro campo, se ne aggiungono altri specifici della teoria delle probabilità e dei campi in cui si applica (statistica, ricerca operativa, ecc.).

Il malvezzo generico che affligge l'insegnamento della matematica è quello di mettere 'il carro avanti ai buoi' (come disse e illustrò ottimamente Gemma Harasim, la madre di Lucio Lombardo-Radice, in un articolo del 1915, riprodotto, sia pure parzialmente, nel PdM, 1975, n. 1-2). Fuori di metafora, l'errore è di 'INSEGNARE' il formalismo matematico prima di averne fatto sentire il bisogno e senza farne capire il senso: cosa per cui è essenziale spiegare 'a cosa serve' (non solo, ovviamente, nel significato banale del 'far di conto', e ciò si può ben fare intravvedere vividamente anche a bambini ed ignoranti).

Riguardo ai malvezzi *specifici*, ritengo se ne possano elencare cinque; poi indicherò come evitarli (dando modo, a chi dissente, di dire che quello è 'il malvezzo mio').

Primo. Se si comincia da casi e cose banali, dove la valutazione di una probabilità è (o almeno appare) ovvia, meccanica, e magari l'indipendenza invece pure, ecc., il rischio consiste nel pensare che tutto o quasi si riduca a calcolo combinatorio. Sarebbe come introdurre (o, magari, 'definire'), l'*area* solo per rettangoli e triangoli, lasciando che si formi la stortura di pensare che la nozione non abbia senso per altre figure. Il calcolo combinatorio è certamente uno degli strumenti che servono spesso in molti problemi di calcolo delle probabilità, ma non è il Calcolo delle probabilità.

Secondo. Se si segue un certo tipo di formalizzazioni 'logiche' (dove la 'logica' non è più che un simbolismo formalistico) si rimane più o meno allo stesso livello, ma ulteriormente oscurato e vanificato da arbitrarie convenzioni pseudologiche, e dall'intendimento di considerare 'probabilità' non di *fatti* ma di 'proposizioni', e pertanto di sapore non concreto ma metafisicheggiante. Unico risultato possibile sarebbe di convincere che ogni convenzione è buona se e soltanto se è gabellata come 'assioma'.

Terzo. Delle impostazioni 'assiomatiche', ove si postulano con un certo responsabile tentativo di ragionevolezza cose interpretabili con riferimenti al pur innominato 'concreto', come proprietà della funzione $P(E)$, ho già accennato implicitamente qualche manchevolezza (cap. VII), facilmente eliminabile (ma sintomatica di carenze di consapevolezza). Ma il guaio maggiore è un altro: che si rimane al livello astratto, di mera *teoria della misura*, finché ai simboli e alle operazioni non si associa un significato reale, e non si fa risultare quale interpretazione e quale valore debba darsi alle conclusioni: – soggettivo? – o pretesamente oggettivo? e allora – di grazia – in che senso?

Quarto. Altri approcci conducono subito a considerare problemi particolarmente interessanti con processi aleatori (o 'stocastici') – tipo 'catene di Markov', per accennare solo all'esempio più elementare – e finiscono per studiare in sostanza un processo di diffusione o simile sotto varie ipotesi, dicendo che ciò che si propaga è una *probabilità*, ma non cosa s'intenda per Probabilità, e non, quindi, che cosa mai in pratica se ne concluda. Oppure ciò appare, confusamente, in un senso 'intuitivo' che a quel momento è confuso e misterioso, perché appare come *deus ex machina* anziché come premessa chiarificatrice fatta fin dall'inizio. E in questo caso si può fare un bel corso di esercizi di Analisi (equazioni alle differenze finite, o differenziali, o alle derivate parziali, o integrali, o integrodifferenziali, oppure trasformate di Fourier ecc.), quasi come fine a se stesse.

Quinto. Di insegnamenti o introduzioni che si ispirino alla Statistica (o a rami specifici, come Ricerca operativa, Teoria dell'informazione, applicazioni demografiche, attuariali, ecc.) ce n'è di diversissimi. Spesso si fa quasi confusione tra probabilità e frequenza, ma il difetto più specifico da segnalare è, a mio avviso, l'eccessiva proclività di parecchi statistici (non voglio, naturalmente, generalizzare coinvolgendo nella critica gli immuni da tale menda) all'uso di metodi empirici, grossolani, del tipo di quelli che (come ho già accennato) Irving Good ha battezzato '*Adhockeries*' (cioè espedienti *ad hoc*, Adhoccaggini), mentre altri parlano, più grossolanamente, di '*Statistical Cook-Books*', cioè ricettari di cucina statistici.

Ho l'impressione che ne siano più immuni coloro che devono affrontare problemi concreti, come nella Ricerca operativa, la teoria dell'affidabilità ('*Reliability*'), ecc., e mi auguro che gli esempi buoni siano (una volta tanto, contro l'apologo delle mele buone e no) più *contagiosi* di quelli cattivi.

In tutti questi cinque casi enumerati, benché per motivi e sotto aspetti diversissimi, la Teoria delle probabilità si fa apparire – talvolta di proposito e comunque sempre di fatto – come una dottrina in cui si sa tutto della Probabilità e delle sue proprietà formali, ma però, conformemente al detto di Birkhoff già citato, nessuno sa cosa sia, né si cura di saperlo, o forse vuole tenerlo nascosto.

Sembra proprio di dover pensare, come spiritosamente ha scritto Hans Freudenthal ([16]), che tutti si preoccupino col massimo impegno di non lasciar vedere la Probabilità «*come Dio l'ha fatta*» («*as God created it*»), munendola di una foglia di fico o di tante da oscurarla completamente, ... forse temendo l'incriminazione per oltraggio al 'comune senso del pudore' da parte di qualche immancabile zelante Procuratore della Repubblica.

Ho terminato, ma tengo a ribadire ancora una volta che è l'imperversare di queste diverse deviazioni – deviazioni che si riscontrano più o meno a tutti i livelli, sia nella didattica che nella ricerca – il fatto che maggiormente mi preoccupa, il pericolo su cui ho voluto, in questa occasione più che mai, richiamare la vostra attenzione.

Dell'attenzione prestatami, vi ringrazio sentitamente, e prego di scusarmi se – dato l'assillo di dire sia pur succintamente tutto o quasi tutto ciò che mi appariva essenziale – di tale attenzione ho certamente abusato.

B.d.F.

BIBLIOGRAFIA e NOTE

([1]) Il lavoro in cui RENÉ MAURICE FRÉCHET ha introdotto il termine *échangeable* è *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, Hermann ed., Paris, 1939. Per quanto mi consta, i primi ad usarlo in inglese furono CHERNOFF e TEICHER (1957), in tedesco BUEHLMANN (1960).

Quanto alle altre denominazioni, *equivalenti* è stato introdotto da A. KIHNCHIN in *Sur les classes d'événements équivalents*, Mat. Sbornik (1932) e seguito da MILICER-GRUZEWSKA

(1950), DYNKIN (1953), RYLL-NARDZEWSKI (1957), e tuttora (pare) in Urss; quella di *simmetrici* è stata usata da E. S. ANDERSEN in *On sums of symmetrically dependent random variables*, Skandin. Aktuarietidskrift (1953) e (seguito) (1954), e da HEWITT e SAVAGE (1955); quella (più esplicita ma un po' lunga) di *invariant under mixing* (invarianti rispetto a permutazioni) da D. FREEDMAN (1962).

([2]) *Il Pragmatismo e i cento modi di non dir niente* è il titolo di uno degli scritti di VAILATI e CALDERONI che avrebbero dovuto far parte di un'opera sul Pragmatismo, interrotta per la morte di Vailati (cfr. G. VAILATI, *Scritti*, ed. Seeber, Firenze, 1911).

([3]) H. JEFFREYS, *Theory of Probability*, Oxford, 1939 (p. 394).

([4]) *La probabilità: guida nel pensare e nell'agire* è il titolo di un ciclo di conferenze all'Univ. di Trento (1965), pubbl. come *Quaderno n.* 11, ivi (1966).

([5]) Su tali convenzioni e notazioni cfr. spec. i paragrafi I, 10.3 e II, 11.1-4 in TdP (così abbreviato, qui e in seguito, per *Teoria delle probabilità* di BdF, ed. Einaudi, Torino, 1970: BdF = BRUNO DE FINETTI).

([6]) Questa allusione scherzosa a fumosi concetti metafisici mi venne suggerita da un aneddoto raccontatomi dal collega GAETANO FICHERA. In una commissione di maturità liceale il collega di Filosofia chiedeva spesso cosa fosse il *noumeno*, ed era felice che tutti sapevano dare la risposta esatta: «è la *cosa in sè*». FICHERA finì per chiedergli se riteneva che sapessero cosa sia la «*cosa in sé*»; egli fece la domanda, l'interrogato rispose: «*è il noumeno*», e il filosofo si rivolse trionfante a FICHERA: «*Vede che lo sanno*!».

([7]) Una spiritosa poesia intitolata *O Dio Caso*! mi è stata inviata tempo fa da un simpatico e vivace letterato romagnolo, e la pubblicai nel Periodico di Matematiche (1974, n. 3). Tutto pareva azzeccato e ragionevole ... ma successivamente mi accorsi che, come molti, riteneva che il Caso avesse la funzione di *impedire* cose poco probabili (come lunghi ritardi nel lotto, lunghe sequenze di *testa* o di *doppio sei* con una moneta o due dadi, ecc.), e, evidentemente indignato per la mia insistenza nell'*errare*, interruppe la corrispondenza.

([8]) Cfr. H. REICHENBACH, *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica* (1942; trad. it. Einaudi, Torino, 1954, p. 704).

([9]) Per la cronaca: i primi due eventi (effettivamente reali), risultarono entrambi *falsi* (risultato di Juventus-Torino, 0-2); il 13 non è uscito a Roma (è uscito a Venezia); il terzo è fittiziamente specifico perché non è precisato chi sia il sig. X. Y. Comunque, la scelta di *esempi* non significa in nessun caso di intenderli come predizioni, o viceversa.

([10]) Sarebbe raccomandabile di dire sempre *stocasticamente indipendenti* (e *indipendenza stocastica*, ecc.) salvo dove e quando si possa esser certi che il sottintendere *stocastico* non dia luogo a malintesi (con indipendenza *logica*, o *lineare*, o *stocastica condizionata* che spesso significherebbe scambiabilità; v. cap. VIII). Inoltre, non si pensi che l'indipendenza riguardi gli *eventi* di per sé: si tratta solo della nostra valutazione di probabilità, cioè dal valutare $P(AB) = P(A)\,P(B)$ ecc.

([11]) Per R. VON MISES si potrebbe parlare della probabilità solo per un'infinità di eventi ordinati in successione; essa verrebbe ivi *definita* come il limite della *frequenza* (o percentuale di *successi*) nei primi n casi quando n si faccia tendere ad infinito. Poiché è assurdo poter fare infinite *prove*, tale precauzione è una sottigliezza illusoria per far accettare la grossolana identificazione con la frequenza su un numero finito di prove.

([12]) La denominazione familiare di *patate* ha il vantaggio di far capire automaticamente il valore puramente indicativo di tale rappresentazione visiva. Dicendo (come, purtroppo, è consuetudine) che le patate sono *insiemi di punti* (i quali sarebbero ... *casi elementari possibili*!), tutto viene falsato e reso assurdo. (Qualcuno sembra si senta in imbarazzo fra dire o non dire a quale regione appartengono i punti delle linee divisorie, di confine! Neppure all'epoca delle epiche guerre per secchie rapite ci sono state contese per la sovranità dei *punti* della *linea* di confine!).

([13]) Basti citare, come esempio, una frase (traducendola da *The Bases of Probability*, in KYBURG and SMOKLER, *Studies in subjective probability*, pp. 161-172). «*Al fine di concludere che* A *è irrilevante per il verificarsi di* E *in una data occasione, in base al risultato di esperimenti fatti in un'occasione diversa, si deve assumere che certe altre inevitabili differenze tra le due occasioni sono esse stesse irrilevanti per riguardo alla situazione considerata. La difficoltà, esattamente al contrario della Guardia di Napoleone, indietreggia sempre ma non muore mai*» (p. 172).

([14]) A proposito di tale esempio, per evitare interpretazioni *superstiziose*, occorre notare che le tavole di mortalità servono solo come base standard, come primo riferimento, per individui di data età. Ma l'assicuratore si accerta di tutte le circostanze specifiche che, per ogni individuo, possono influire, specie negativamente, sulla probabilità di morte, al fine di fare una valutazione *personalizzata*. Se tuttavia, nella pratica, si ricorre non frequentemente a richiedere premi maggiorati è perché, finché il margine di utile lo consente, è preferibile acquisire un cliente piuttosto che rischiare di perderlo.

La frequenza può essere un dato orientativo per la valutazione di certe probabilità, ma nulla più: infatti sempre o quasi sempre ci sono circostanze specifiche caso per caso di cui sarebbe assurdo non tener conto.

([15]) È strano come taluno, dicendo che *intende la probabilità in senso oggettivo* (senza spiegare l'inesistente senso di tale affermazione), pretenda e riesca a far accettare l'asserto come qualcosa di significativo da altre persone. A meno che non si tratti di altra cosa, cioè di *obiettività*, di sincerità nel valutare spassionatamente tutte le circostanze (sempre, ovviamente, in senso soggettivo), senza ingannare né se stesso (per tendenze a pessimismo o ottimismo), né altri (per ingannarli, o per secondare o contrastare loro preferenze, ecc.).

([16]) Questa immagine è presa da un articolo di HANS FREUDENTHAL (*The crux of Course Design in Probability*, in Educational Studies in Probability, Reidel ed., Amsterdam, 1974, n. 5; pp. 261-277), da me riassunto e commentato (con aggiunta di ulteriori considerazioni) in *Il buon senso e le foglie di fico*: *Hans Freudenthal sull'insegnamento della Probabilità*, Boll. Un. Matem. Ital., 1975, Suppl. fasc. 3 (in onore di ENRICO BOMPIANI, cui avevo sottoposto il ms. per conferma che non ne disdegnasse il tono scherzoso benché ne fossi certo conoscendo e ammirando la sua intelligente spregiudicatezza).

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 463-467

Chi sono "Io"? (*)

BRUNO DE FINETTI

Devo tentare di dare una risposta a questa domanda, benché il "nosce te ipsum" sia cosa proverbialmente difficile.

Ma me l'hanno richiesta i due cari colleghi ed amici, Dario Fürst e Massimo De Felice, che desiderano pubblicarla come premessa introduttiva al volume che essi hanno curato (a mia insaputa) per farmi un'improvvisata in occasione del mio 75° compleanno (13.6.1906 – 1981).

Sono assai grato a loro per tale idea, così come lo sono ad altri colleghi ed amici per l'iniziativa di organizzare per questa ricorrenza (a Roma) un convegno internazionale. E, in primo luogo tra essi, al prof. Giorgio Koch che (come merita e come desideravo, benché segua un indirizzo alquanto diverso) è ora il mio successore alla cattedra di Calcolo delle Probabilità nell'Università di Roma, Istituto Matematico "Guido Castelnuovo", e non meno al prof. Luciano Daboni che è stato il mio primo assistente all'Università di Trieste e poi il mio successore.

Per venire al "Chi sono?", la prima cosa che mi sembra di dover dire, come punto di partenza, è che di me stesso, come persona qualunque, m'importa assai meno che di ciò che attiene al benessere collettivo, all'equilibrio ecologico secondo la linea tenacemente difesa da Aurelio Peccei, al progresso sociale e civile secondo la linea ispirata a Lelio Basso (membro, tra l'altro, del Tribunale Russell); linea cui vorrei che tutti mirassero per aver diritto a goderne quanto a ciascuno può ragionevolmente spettare. Uno per tutti e tutti per uno, senza eccessive differenze o rivalità tra individui o classi o nazioni; rivalità utili soltanto se mirano a migliorare ovunque il benessere collettivo anziché a curarsi soltanto di quello egoisticamente (e miopemente) individuale o settoriale o classista.

(*) Tratto da: http://www.brunodefinetti.it/Galleria/Documenti/Chi%20sono%20io%20di%20BdF_1981_.pdf

Quanto al mio modo di pensare, di prospettarmi i problemi ed esporre le mie tesi, dirò che cerco sempre di rendere quanto più possibile chiari e semplici e "naturali" e "intuitivi" – magari presentandoli in modi concreti e divertenti – i concetti e i ragionamenti in ogni campo e, ovviamente, soprattutto in quello della probabilità che particolarmente mi interessa, e che è, purtroppo, una delle nozioni più esposte al rischio di velleitari fraintendimenti e distorsioni e addirittura travisamenti di ogni peggiore specie. Esistono molti termini e locuzioni che esprimono più o meno vagamente l'atteggiamento di un individuo nei riguardi di una specifica asserzione di cui egli non sa con certezza se sia vera o falsa. Ad esempio:

– se un fatto di cui si vocifera sia veramente accaduto;
– se in una precisata futura partita del campionato di calcio il risultato sarà di parità;
– se l'autore di un dato delitto sarà individuato e arrestato;
– ecc. ecc.

A parole, le risposte possibili sono innumerevoli: tra quelle categoriche – il "certamente sì" e il "certamente no" – ve n'è una ricca scelta con gradazione di propensità verso il Sì o verso il No, con maggiore o minore enfasi o riluttanza, con o senza dubbiosità, o addirittura con ambiguità come i famigerati responsi della Sibilla: "ibis redibis/ non morieris in bello".

La stessa indeterminatezza è stata segnalata – tra l'altro, ma di ciò ho già fatto cenno – a proposito delle risposte dei geologi circa le prospettive di trovare petrolio in una data località e, più in dettaglio, sulla più o meno conveniente azione (prospezione sismica, perforazione di un pozzo d'assaggio, ecc. ecc.) che conviene scegliere per ottenere col minor probabile costo i maggiori possibili elementi o "sintomi" da vagliare ai fini di una decisione operativa.

Col medesimo intento di imparare ad utilizzare valutazioni di probabilità, di abituare le persone a pensare e ragionare (e, conseguentemente, comportarsi) in base a valutazioni (ragionate, ma naturalmente soggettive) di probabilità, è stato ripetuto per diversi anni all'Università di Roma un esperimento di pronostici probabilistici con riferimento ai risultati delle partite del campionato di calcio (come già menzionato in apertura del convegno).

Per quanto riguarda il metodo di punteggio, chi vi abbia interesse può vedere la semplice esposizione (con illustrazioni) nel volumetto: B. de

Finetti Il "saper vedere" in Matematica (ed. Loescher, Torino, 1967, 1974) pp. 54-56, articolo su "Il pronostico intelligente". (Esiste anche una traduzione tedesca: "Wie sucht man die Losung mathematischer Aufgaben", Birkhäuser, Basel).

In particolare, secondo il mio punto di vista, l'esperienza era educativa perché non solo non era basata sul banale e antieducativo malvezzo del "tirare ad indovinare" (come al Lotto e al Totocalcio), ma, al contrario, obbligava ad indicare la probabilità numericamente!

Ed è mia sempre più radicata convinzione che l'abilità e competenza nello stimare, numericamente e soggettivamente una grandezza (come una probabilità; ma lo stesso dicasi per una distanza, una temperatura, un peso, un angolo, una velocità, ecc. ecc.) costituisca una dote preziosa e purtroppo non sufficientemente promossa e apprezzata. (Lo dico con il rammarico di non essermi esercitato io stesso, a suo tempo, per sviluppare tale dote). Chi invece, mostrò di rendersi conto dell'importanza di abilità del genere fu Rudyard Kipling, che descrisse l'addestramento del giovane indiano Kim a raccogliere dati e notizie utili per i servizi d'informazione inglesi in quella che era a quel tempo una loro colonia.

Ritornando sull'argomento del nostro concorso, esso fu avviato eseguendo a mano i calcoli delle penalizzazioni. È stato poi (insieme ad altre possibilità di applicazioni) una spinta per l'ingresso nella nostra Università dell'Informatica: con un piccolo ma maneggevole elaboratore elettronico IBM 610, su cui molti studenti cominciarono ad esercitarsi nell'antica sede di Economia e Commercio a P. Borghese.

Devo ricordare qui il compianto collega, prof. Antonio Renzi, perché fu il primo a comprendere e sostenere – contro le prevalenti prevenzioni misoneiste ed anti tecnologiche – l'opportunità che gli prospettavo di dotare la Facoltà di Economia e Commercio (dove allora insegnavo Matematica Generale, Finanziaria ed Attuariale) del detto elaboratore, e di offrire così agli studenti la possibilità di apprenderne il funzionamento e di addestrarsi nel suo impiego.

Fu una piccola scintilla ... ma poi tutto crebbe naturalmente per forza propria. Vorrei qui ricordare ciascuno dei molti studenti e studentesse di quel periodo – eroico –; ma basti menzionare – una per tutti, ma con eccezionale merito – Mirella Leone, che dal 1968 fu prof. incaricata di "Elaboratori elettronici e sistemi meccanografici".

Per avviare l'attività di informatica nell'Università di Roma mi sono avvalso dell'esperienza fatta quando ero attuario alle Assicurazioni Generali (a Trieste) e diressi (con un ottimo collaboratore Mario

Matteucci) il centro di Calcolo (IBM) di quella Compagnia che man mano estese la sua attività a tutte le elaborazioni: tecnico attuariali, contabili, statistiche ecc.

Data questa preparazione fui poi invitato dal prof. Mauro Picone ad essere comandato presso il suo Istituto per le applicazioni del calcolo che aveva ordinato un piccolo elaboratore a schede perforate IBM a titolo sperimentale (poi rapidamente adeguato a maggiori esigenze). Con lui e col collega Fichera visitai i primi grandi elaboratori in quasi tutti gli Stati Uniti e partecipai al Convegno per la fondazione della "Association for Computing Machinery" a Washington, D.C. 1950.

Tornai in seguito in America, per un trimestre, come Visiting professor all'Università di Chicago, ove era allora L. Jimmie Savage, il collega cui ero legato da maggiore comunanza di pensiero e di carattere e da reciproca simpatia. Purtroppo egli è mancato – improvvisamente – anzitempo (appena rientrato in America dopo il congresso di Bucarest ove eravamo assieme).

Riguardo all'introduzione di calcolatori nella Pubblica Amministrazione, tenni una relazione (in un convegno all'EUR sull'argomento) giudicata "coraggiosa" (specie dagli stranieri) per le critiche ai criteri antiquati delle procedure e dei concetti seguiti dalla Pubblica Amministrazione per scegliere e decidere il da farsi.

In quell'occasione ebbi contatti con gli organi e persone responsabili della riforma della Pubblica Amministrazione (come i ministri Preti e Colombo, il Ragioniere Generale dello Stato prof. Stammati e il prof. Cataldi). Promossi l'introduzione di un "numero anagrafico" per i cittadini, che venne introdotto poi, assai meglio, con l'attuale codice fiscale alfanumerico.

Un dettaglio che mi piace ricordare, riguardo alla automazione, è la riuscita di un tentativo (peggio di un "puzzle") di indicare le monete (che nella contabilità delle Assicurazioni generali, erano quasi cento) con simboli speciali sostituiti a quelli alfabetici nelle due prime barre alfanumeriche della tabulatrice col duplice obbligo che, lette numericamente, tutte le monete avessero un numero di codice distinto, ma, nel medesimo tempo, anche la dizione in sigle fosse univoca.

Indubbiamente, viste con gli occhi di oggi (e pensando ai progressi raggiunti), tutte queste cose sono banalità preistoriche. Ma è umano che esse appaiano sempre vive e attuali per chi ha vissuto (tra l'altro sotto il rischio di bombardamenti: c'era la guerra!) le fasi "eroiche" degli inizi.

Per finire accenno a un'idea (non so se più o meno praticamente realizzabile e utile) che sviluppai in relazione al problema dei mezzi di trasporto entro l'area della prevista Esposizione all'EUR (per il 1942). Consisteva in nastrovie: strisce scorrevoli (più rapidamente di quelle solite, tipo aeroporto) ma con "imbuti" di entrata e di uscita con strisce parallele scorrevoli sempre meno velocemente dal nastro principale verso l'entrata-uscita.

Se mi lasciassi trascinare sull'onda dei ricordi, più o meno connessi con gli argomenti di questo convegno e le reminiscenze personali che vividamente essi ravvivano, non saprei più come e quando smettere. Chiudo pertanto, ringraziando vivamente tutti coloro che hanno voluto partecipare a questo convegno ed essermi vicini in questa circostanza, e quelli che, pur non avendo potuto intervenire, hanno voluto esprimermi amichevoli sentimenti.

APPENDICE 2

Volumi e articoli di Bruno de Finetti a carattere didattico e epistemologico

La presente bibliografia riporta l'elenco delle pubblicazioni di Bruno de Finetti – libri e articoli, compresi i "pezzulli" ([1]) – a carattere didattico e epistemologico, con l'aggiunta degli altri scritti, di taglio diverso, cui si fa riferimento nei saggi di questo volume. Si rileva anche che, durante il periodo di direzione del *Periodico di Matematiche* (1972-1981), molti editoriali e note firmati P.d.M. e *La Direzione* mostrano una chiara impronta definettiana.

Ciascuna delle sezioni in cui la bibliografia è articolata è indicata con la sigla utilizzata per i rimandi alle pubblicazioni di de Finetti che compaiono nel presente volume.

Elenchi completi delle pubblicazioni di de Finetti si possono reperire in:

- *Catalogo generale degli scritti*, in de Finetti O 1981, 369-388.
- *Elenco completo delle opere di Bruno de Finetti,* in de Finetti O 2006, vol. I, LIII-LXVI.
- *Bibliografia ragionata degli scritti di Bruno de Finetti,* in *Bruno de Finetti. L'invenzione della verità*, Milano: Cortina, 2006, 181-202.
- *Opere di Bruno de Finetti,* in DE FINETTI, F., NICOTRA, L., *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Livorno: Belforte, 2008, 273-288.
- *Opere, Memorie, Note, Articoli vari*, in sito web a cura di de FINETTI, F.: http://www.brunodefinetti.it/index_it.htm
- [*Il Quaderno degli scritti di Bruno de Finetti*] in: http://www.brunodefinetti.it/index_it.htm

([1]) Fin dal primo numero della V serie del *Periodico di Matematiche*, inaugurata da de Finetti nel 1972, compare in apertura questo avviso: "Molti spazi liberi sono sfruttati per collocarvi degli stelloncini, o 'pezzulli'. Non considerateli semplici riempitivi, o, peggio, battute del tipo 'per finire'. Condensano, in genere, ciò che meriterebbe di venire sviluppato in un articolo o in un libro, ma che forse, diluendolo, perderebbe la carica graffiante. Leggeteli: per leggerli basta un minuto. Ma poi rifletteteci: c'è da riflettervi per ore e giorni. E poi conservatene il ricordo per tutta la vita, e cercate di farne tesoro preservandovi da storture, difetti, atteggiamenti fin troppo comuni e dannosi".

Opere (O)

DE FINETTI, B. (1972) *Probability, Induction and Statistics. The art of guessing*, London: John Wiley & Sons.

DE FINETTI, B. (1981) *Scritti (1926-1930),* Padova: Cedam.

DE FINETTI, B. (1991) *Scritti (1931-1936)*, Bologna: Pitagora Editrice.

DE FINETTI, B. (2006) *Opere scelte,* a cura dell'UMI e dell'AMASES, 2 voll., Bologna: Cremonese.

Libri (L)

DE FINETTI, B. (1933) *Lezioni sulla probabilità,* Trieste: Università di Trieste, 1932-1933. http://digital.library.pitt.edu/u/ulsmanuscripts/pdf/31735033466297.pdf.

DE FINETTI, B. (1944) *Matematica logico intuitiva: nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale e integrale come introduzione agli studi di scienze economiche statistiche attuariali*, 1ª ed., Trieste: E.S.T.; 2ª ed., Roma: Cremonese, 1957; 3ª ed., Roma: Cremonese, 1959; ristampa Milano: Giuffré, 2005.

DE FINETTI, B., MINISOLA, F. (1961) *La matematica per le applicazioni economiche*, Roma: Cremonese.

DE FINETTI, B. (1967) *Il "saper vedere" in Matematica*, Torino: Loescher. Trad. tedesca a cura di Lulu Bechtolsheim: *Die Kunst des Sehens in der Mathematik,* Basel: Birkhauser, 1974. Trad. polacca a cura di Julian Panz: *Sztuka Widzenia w Matematyce*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

DE FINETTI, B (1970) *Teoria delle probabilità*, 2 voll., Torino: Einaudi, 1970. Trad. inglese a cura di Antonio Machi e Adrian Smith: *Theory of Probability*, 2 vols., New York: J. Wiley, 1975. Trad. tedesca a cura di Dierk Hildebrandt: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1981.

DE FINETTI, B. (1986) *Calcolo delle probabilità*, Trieste: Pubblicazioni soggettive.

Articoli e "pezzulli" (A)

DE FINETTI, B. (1926) Considerazioni matematiche sull'eredità mendeliana, *Metron* 6, n. 1, 3-41.

DE FINETTI, B. (1927a) Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani. Nota I. Caso panmittico, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat.* (VI) 5, 913-921.

DE FINETTI, B (1927b) Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani. Nota II. Caso generale, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat.* (VI) 5, 1024-1029.

DE FINETTI, B. (1928) Alcune conseguenze statistiche delle leggi di Mendel, *Rivista di Biologia*, IX, nn. 4-5, 525-553.

DE FINETTI, B. (1930a) Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat.* (VI) 12, 367-373.

DE FINETTI, B. (1930b) Fondamenti logici del ragionamento probabilistico, *Bollettino della Unione Matematica Italiana,* 9, 258-261.

DE FINETTI, B. (1930-1931) Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Memorie della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat.* (VI), 4, 251-300.

DE FINETTI, B. (1931) Probabilismo. Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza, *Logos. Organo della Biblioteca Filosofica di Palermo,* a. XIV, 163-219.

DE FINETTI, B. (1932a) Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3-10 settembre 1928*, 6 voll., Bologna: Zanichelli, 1929-1932, vol. 6, 179-190.

DE FINETTI, B. (1932b) Probabilità fuori dagli schemi di urne, *Periodico di Matematiche*, (IV) 12, n. 1, 1932, 40-51.

DE FINETTI, B. (1934) Come giustificare elementarmente la «legge normale» della probabilità?, *Periodico di Matematiche*, (IV) 14, n. 4, 197-210.

DE FINETTI, B. (1937a) La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, n. 1, 1-68.

DE FINETTI, B. (1937b) Pirandello Maestro di Logica, *Quadrivio*, 5 dicembre 1937, 7.

DE FINETTI, B. (1938) Un'osservazione in merito all'esecuzione dei calcoli meccanici, *Supplemento Statistico ai Nuovi problemi di Politica, Storia ed Economia*, 4, 37-42.

DE FINETTI, B. (1940) Il problema dei "pieni", *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 11, 1-88.

DE FINETTI, B. (1942) La statistica e il pensiero matematico, *Periodico di Matematiche*, (IV) 22, n. 1, 37-47.

DE FINETTI, B. (1949a) La funzione vivificatrice della matematica. Discorso inaugurale del Prof. Bruno de Finetti per l'anno accademico 1948-1949 letto nell'Aula Magna dell'Università degli Studi di Trieste il 5 dicembre 1948, *Annuario della Università degli Studi di Trieste*, 19-34.

DE FINETTI, B. (1949b) A proposito dell'articolo "Probabilità", *Periodico di Matematiche*, (IV) 27, n. 3, 140.
DE FINETTI, B. (1950) Visione unitaria e visioni frammentarie sul ruolo delle probabilità nelle applicazioni, in *Saggi di critica delle scienze*, Torino: De Silva, 151-172.
DE FINETTI, B. (1951) La «logica del plausibile» secondo la concezione di Pólya, *Società Italiana per il Progresso delle Scienze, XLII Riunione, Roma, 28 novembre – 1 dicembre 1949, Relazioni*, Roma: SIPS, vol. I, 227-236.
DE FINETTI, B. (1952) Macchine che pensano (e che fanno pensare), *Tecnica ed Organizzazione*, 2, 14-31.
DE FINETTI, B. (1954a) È difficile capire la matematica?, *Archimede*, 6, 206-212.
DE FINETTI, B. (1954b) Lettera al Direttore, *Periodico di Matematiche*, (IV) 32, 184.
DE FINETTI, B. (1954c) La nozione di evento, *Atti del Congresso di Studi Metodologici promosso dal Centro di Studi Metodologici, Torino 17-20 dicembre 1952*, Torino: Ramella, 170-174.
DE FINETTI, B. (1955) La probabilità e le scienze sociali, *L'Industria*, 4, 467-495.
DE FINETTI, B. (1957a) L'informazione, il ragionamento, l'inconscio nei rapporti con la previsione, *L'Industria*, 2, 186-210.
DE FINETTI, B. (1957b) Gli strumenti calcolatori nella Ricerca Operativa, *Civiltà delle Macchine*, 5, n. 1, 18-21.
DE FINETTI, B. (1957c) Paradossi in tema d'insegnamento, *Civiltà delle Macchine*, 5, n. 3, 68-71.
DE FINETTI, B. (1957d) La ricerca operativa (R.O.). La matematica finanziaria e attuariale e le esigenze di collegamenti e collaborazioni nell'insegnamento e nella ricerca, *L'Ufficio Moderno*, 1, 15-19.
DE FINETTI, B. (1957e) La scuola in crisi, *Civiltà delle Macchine*, 5, n. 3, 81-82.
DE FINETTI, B. (1958) America: scuola in collaborazione, *Civiltà delle Macchine*, 6, nn. 3-4, 52-53.
DE FINETTI, B. (1959) La probabilità e la statistica nei rapporti con l'induzione, secondo i diversi punti di vista, in *Induzione e Statistica*, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Varenna, Villa Monastero, 1-10 giugno 1959, 1-115.
DE FINETTI, B. (1960a) Evoluzione verso una sintesi, *Statistica*, 20, 527-538.
DE FINETTI, B. (1960b) Scatenare l'intelligenza, non soffocarla, *Mercurio*, 3, n. 9, 13-18.

DE FINETTI, B. (1960c) Scatenare l'intelligenza, *Rivista di Informazione Aziendale*, a. IV, n. 5, 1-2.

DE FINETTI, B. (1961) Nuovi libri per lo studio della matematica, *Homo Faber*, a. XII, nn. 116-117, 7545-7546.

DE FINETTI, B. (1962a) Obiettività e oggettività: critica a un miraggio, *La Rivista Trimestrale*, 1, n. 2, 343-367.

DE FINETTI, B. (1962b) Riflessioni su una gara matematica, *Archimede*, 14, 273-290.

DE FINETTI, B. (1962c) La scienza e la lotta contro l'incertezza, *Cultura e Scuola*, 2, 127-133.

DE FINETTI, B. (1962d) La matematica nelle applicazioni economiche, in *La matematica negli Istituti tecnici commerciali. Lezioni tenute nei corsi di aggiornamento per gli insegnanti*, Roma: Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione Generale per l'Istruzione Tecnica.

DE FINETTI, B. (1962e), Situazione scolastica e ricerca scientifica. Critiche e suggerimenti del Prof. Bruno de Finetti, *Homo Faber*, a. XIII, nn. 126-127, 8155-8160.

DE FINETTI, B. (1963a) Gare matematiche. Osservazioni e considerazioni, *Homo Faber*, a. XIV, nn. 139-140, 8891-8894.

DE FINETTI, B. (1963b) PBI's ovvero «Idee mezzo maturate», *Civiltà delle Macchine*, 11, n. 1, 71-72.

DE FINETTI, B. (1963c) Insegnare la matematica con uno spirito nuovo, *La Stampa*, 17.1.1963, 9.

DE FINETTI, B. (1964a) Insegnamento di Materie scientifiche nella Scuola media unica e preparazione degli insegnanti, *Periodico di Matematiche*, (IV) 42, nn. 1-2, 76-114 ([2]).

DE FINETTI, B. (1964b) Remore e freni sul cammino della scienza, *Civiltà delle Macchine*, 12, n. 3, 19-24.

DE FINETTI, B. (1964c) Preparazione universitaria degli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie, *Archimede*, 16, n. 1-2, 34-36.

DE FINETTI, B. (1964d) Teoria delle decisioni, in *Lezioni di metodologia statistica per ricercatori*, Roma: Istituto di Calcolo delle Probabilità e Istituto di Statistica, 89-161.

DE FINETTI, B. (1965a) Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, n. 2, 119-143.

([2]) Si veda anche la nota di de Finetti riportata dalla Direzione del *Periodico di Matematiche* alle pagine 73-75 che precedono l'articolo di de Finetti stesso.

DE FINETTI, B. (1965b) Manifesto di battaglia contro il culto dell'imbecillità, *Homo Faber*, a. XVI, n. 160, 10051-10054, pubblicato a parte in DE FINETTI, B., PANTALEO, M., Roma: Palombi, 1965. Ristampato e commentato in: DE FINETTI, B. 1969, *Un matematico e l'economia*, Milano: Franco Angeli, cap. XVII, *Disinfestazione antiimbecillista*, 294-302.

DE FINETTI, B. (1965c) Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite?, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, n. 4, 325-329. Ristampa dell'articolo già apparso su *La Stampa*, 8.1.1965, 11.

DE FINETTI, B. (1965d) Lettere alla Direzione, *Periodico di Matematiche,* (IV) 43, n. 4, 336-338.

DE FINETTI, B. (1965e) Opinioni, *Periodico di Matematiche*, (IV) 43, n. 5, 404-414.

DE FINETTI, B. (1965f) *La probabilità: guida nel pensare e nell'agire*, Quaderno n. 11 dell'Istituto Universitario di Scienze Sociali, Trento.

DE FINETTI, B. (1965g) La matematica e il profano, *Scuola e Città*, nn. 9-10, 566-573.

DE FINETTI, B. (1965h) Methods for discriminating levels of partial knowledge concerning a test item, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 18.1, 87-123.

DE FINETTI, B. (1965g) L'apporto della matematica nell'evoluzione del pensiero economico, *Atti del Settimo Congresso dell'Unione Matematica Italiana tenuto a Genova nei giorni 30 settembre - 5 ottobre 1963*, Roma: Cremonese, 239-277.

DE FINETTI, B. (1966a) Cosa è un insegnamento «formativo»? *Istituto Tecnico. Rassegna trimestrale di cultura*, a. IV, nn. 2-3-4, 25-30.

DE FINETTI, B. (1966b) Paradossi sulle medie, *Periodico di Matematiche,* (IV) 44, n. 2, 138-150.

DE FINETTI, B. (1966c) Sull'insegnamento della matematica, *Homo Faber*, a. XVII, n. 164, 10357-10364.

DE FINETTI, B. (1967a) Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti critici, suggerimenti, *Periodico di Matematiche*, (IV) 45, n. 2, 75-153.

DE FINETTI, B. (1967b) L'adozione della concezione soggettivistica come condizione necessaria e sufficiente per dissipare secolari pseudoproblemi, *I fondamenti del calcolo delle probabilità* (Atti della Tavola Rotonda tenuta a Poppi nei giorni 11-12 giugno 1966), Firenze: Scuola di Statistica dell'Università, 57-94.

DE FINETTI, B. (1968a) La preparazione dell'insegnante di matematica, osservazioni ed elementi di scienze naturali in rapporto con quelle degli attuali laureati della Facoltà di scienze, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, XLIX Riunione, Siena, 1967, Roma: SIPS, vol. I, 151-154.

DE FINETTI, B. (1968b) Il Previsiometro: presentazione e spiegazione in forma elementare, *Studi di Mercato*, 3-12.

DE FINETTI, B. (1968c) Oscar Chisini e il suo insegnamento, *Periodico di Matematiche*, (IV) 46, nn. 1-2, 26-33.

DE FINETTI, B. (1968d) La matematica moderna nell'insegnamento secondario. Insegnamento formativo: ma, in che senso?, *L'eco della scuola nuova, Organo della Federazione Nazionale Insegnanti Scuole Medie*, a. XXIV, Supplemento al n. 3, 1-2.

DE FINETTI, B. (1969) L'apprendimento della matematica, *La Riforma della Scuola*, 4, 11-17.

DE FINETTI, B. (1971a) Gli scandalosi miscugli, *Istituto Tecnico. Rassegna trimestrale di cultura*, a. 9, nn. 1-2, 24-32.

DE FINETTI, B. (1971b) Tre personaggi della matematica, *Le Scienze*, 39, 86-99.

DE FINETTI, B. (1971c) La probabilità: discussioni sui principi, *Sapere*, 740, 14-24.

DE FINETTI, B. (1971d) La scuola sbagliata, *Mathesis. Notiziario,* (n. 1), 9-15 ([3]).

DE FINETTI, B. (1971e) L'insegnamento delle materie scientifiche, *Esso Rivista*, 1, 2-4.

DE FINETTI, B. (1972a) Pregiudizio e libertà, *Scientia*, 97, n. 5, 765-776 e 777-787 (Trad. inglese).

DE FINETTI, B. (1972b) [Pezzullo a commento di "Posso credere una cosa senza capirla; è tutta questione di addestramento!"], *Periodico di Matematiche*, (V) 49, nn. 1-2, 32 ([4]).

DE FINETTI, B. (1972c) Un modo di pensare fruttuoso, quello di Leonard Jimmie Savage, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, nn. 1-2, 63-65.

DE FINETTI, B. (1972d) La conferenza di Pólya a Roma: DEVINER ET DÉMONTRER, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, nn. 1-2, 77-85.

([3]) Si tratta di un fascicolo inviato ai soci Mathesis dal Presidente de Finetti prima della riattivazione del *Periodico di Matematiche*. Come scrive de Finetti, il fascicolo è stato quasi per intero scritto da lui stesso: "[...] Per vari motivi questa volta [il sottoscritto] è stato praticamente costretto a fare quasi tutto da solo, soprattutto per esemplificare il "tipo" di comunicazione e discorso che si ritiene adatto per il nostro "Notiziario" (evitando sia di addentrarsi in dettagli o tecnicismi e sia di limitarsi a dizioni schematiche) [...]".

([4]) Pezzullo tratto da de Finetti A 1965g, 568.

DE FINETTI, B. (1972e) Parole introduttive del Presidente della Mathesis, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, nn. 1-2, 85-86.

DE FINETTI, B. (1972f) Da bambini a uomini, *Sapere*, n. 748, 57-59.

DE FINETTI, B. (1973a) Bayesianism: its unifying role for both the foundations and the applications of statistics, *Bulletin of International Statistical Institute*, 45, 349-368.

DE FINETTI, B. (1973b) ALCUNI SPUNTI DA TRE RELAZIONI di T. Varga, S. Ciampa, H. Freudenthal, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 3, 6-12.

DE FINETTI, B. (1973c) I numeri telefonici: COME VANNO ORDINATI E INCOLONNATI?, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 3, 22-27.

DE FINETTI, B. (1973d) Accennare con garbo, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 3, 38 ([5]).

DE FINETTI, B. (1973e) Vantaggi alla rovescia, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 3, 72 ([6]).

DE FINETTI, B., CATALANO, G., LOMBARDO RADICE, L. (1973f) MINIDIBATTITO SULLA MINIALGEBRA, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 4, 32-40.

DE FINETTI, B. (1973g) ECHTERNACH 1973: promessa di significative aperture, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 5, 63-68.

DE FINETTI, B. (1973h) VALLE DELL'ESARO: l'ideale «Distretto Scolastico» di Zanfini, *Periodico di Matematiche,* (V) 49, n. 3, 57-67.

DE FINETTI, B. (1973i) Voci autenticamente cristiane di EDUCATORI AMMIREVOLI, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 4, 15-24.

DE FINETTI, B. (1973l) LE STIMOLANTI SUGGESTIONI DI EXETER rivissute leggendone i «Proceedings», *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 7-37.

DE FINETTI, B. (1973m) Astrazione e concretezza, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 11 ([7]).

DE FINETTI, B. (1973n) Algoritmo sì, automatismo no, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 11 ([8]).

DE FINETTI, B. (1973p) La "Geometria" nel senso più generale: il più astratto e insieme il più concreto, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 23 ([9]).

DE FINETTI, B. (1973q) Per ciascuno, l'aspetto che lo riguarda, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 24 ([10]).

([5]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1967, 43.
([6]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1967, 26.
([7]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1944, 2ª ed. 1959, 4.
([8]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1944, 2ª ed. 1959, 27-28.
([9]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1944, 2ª ed. 1959, 258.
([10]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1944, 2ª ed. 1959, 262.

DE FINETTI, B. (1973r) Matematizzazioni illusorie, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 32 ([11]).

DE FINETTI, B. (1973s) QUESTO PRIMO ANNO del rinnovato Periodico, *Periodico di Matematiche*, (V) 49, n. 6, 61-67.

DE FINETTI, B. (1974a) Convegno della C.I.I.M. a Viareggio (24-25-26.X.1974). Interventi di Bruno de Finetti (a Roma), *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, n. 12, 31-36.

DE FINETTI, B. (1974b) "Educazione" o "Diseducazione"? *Periodico di Matematiche*, (V) 50, nn. 1-2, 8 ([12]).

DE FINETTI, B. (1974c) CONTRO LA «MATEMATICA PER DEFICIENTI», *Periodico di Matematiche*, (V) 50, nn. 1-2, 95-123.

DE FINETTI, B. (1974d) Lo sgabello onorifico, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, nn. 1-2, 106 ([13]).

DE FINETTI, B. (1974e) ... ATTENDENDO GODOT, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, n. 3, 3-11.

DE FINETTI, B. (1974f) MATEMATICA E REALTà: tre volumi di testo per la scuola media, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, n. 3, 30-34.

DE FINETTI, B. (1974g) Il ruolo delle regioni negli sforzi per il rinnovamento della scuola, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, n. 3, 41-53.

DE FINETTI, B. (1974h) DOPO OTTO ANNI parole, purtroppo, ancora attuali!, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, n. 5-6, 91-107.

DE FINETTI, B. (1974i) Circolare alle Sezioni Mathesis, *Periodico di Matematiche*, (V) 50, n. 5-6, 134-135.

DE FINETTI, B. (1974l) Teoria delle probabilità, in *Repertorio di Matematiche*, vol. III, Padova: CEDAM, 375-430.

DE FINETTI, B. (1975a) Possiamo, e fino a che punto, INDICARE UNA VIA?, *Periodico di Matematiche*, (V) 51, n. 1-2, 11-46.

DE FINETTI, B. (1975b) Matematica. L'unico modo è farlo come un gioco, *Periodico di Matematiche*, (V) 51, n. 1-2, 54 ([14]).

DE FINETTI, B. (1975c) Parole di apertura al Congresso in Sila, *Periodico di Matematiche*, (V) 51, nn. 1-2, 55-62.

([11]) Pezzullo tratto da de Finetti A 1962a, 355-356.

([12]) Pezzullo tratto da B. de Finetti, *Un Matematico e l'Economia*, Milano: Franco Angeli, 1969, 196.

([13]) Pezzullo tratto da B. de Finetti, *Un Matematico e l'Economia*, Milano: Franco Angeli, 1969, 94.

([14]) Si tratta di un estratto da *Paese Sera*, Roma, 29.6.1975.

DE FINETTI, B. (1975d) Cosa giova per il domani?, *Periodico di Matematiche,* (V) 51, nn. 1-2, 62 ([15]).

DE FINETTI, B. (1975e) "STIMOLARE", non "SCODELLARE", *Periodico di Matematiche,* (V) 51, nn. 1-2, 97-109.

DE FINETTI, B. (1975f) L'ignoto e gli struzzi, *Periodico di Matematiche,* (V) 51, nn. 4-5, 24 ([16]).

DE FINETTI, B. (1975g) DISCUSSIONI E PRECISAZIONI riguardo all'"indicare una via', *Periodico di Matematiche,* (V) 51, nn. 4-5, 81-94.

DE FINETTI, B. (1975h) La burofrenia intoppo e vergogna per il Paese ed anche per la scuola e la cultura, *Periodico di Matematiche,* (V) 51, nn. 4-5, 114 ([17]).

DE FINETTI, B. (1975i) Sulla «compensazione» degli errori: interpretazioni «superstiziose» e interpretazione corretta, *Bollettino della Unione Matematica Italiana,* 11, (Suppl. fasc. 3), 215-233.

DE FINETTI, B. (1975l) Il buon senso e le foglie di fico. Hans Freudenthal sull'insegnamento della probabilità, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 12, (Suppl. fasc. 3), 1-9.

DE FINETTI, B. (1976a) Quanto alla matematica, poi ..., *Periodico di Matematiche*, (V) 52, (n. unico), 42.

DE FINETTI, B. (1976b) dalla REALTÀ, nella REALTÀ, per la REALTÀ, *Periodico di Matematiche*, (V) 52, (n. unico), 1976, 43-47.

DE FINETTI, B. (1976c) Contro la 'moda' dominante, *Periodico di Matematiche*, (V) 52, (n. unico), 88 ([18]).

DE FINETTI, B. (1976d) Tre direzioni di APPROFONDIMENTO, *Periodico di Matematiche*, (V) 52, (n. unico), 104-127.

DE FINETTI, B. (1976e) Come, perché, e in che senso la 'ROVINA dei GIOCATORI è CERTA', *Periodico di Matematiche*, (V) 52, (n. unico), 143-150.

DE FINETTI, B. (1976f) La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni. Testo dell'"ultima lezione' tenuta in occasione del collocamento 'fuori ruolo' all'Istituto Matematico G. Castelnuovo il 29 Novembre 1976, *Scientia,* 111, 255-281 e 283-303 (Trad. inglese); cfr. anche Probability: Beware of falsifications!, in *Studies in Subjective Probability,* H. E. Kyburg and H.E. Smokler (eds.), 2ª ed. Huntington, NY: Krieger, 1980, 193-224.

([15]) Pezzullo tratto da *Atti dei seminari preparatori dei corsi della Scuola Mediterranea di tecnologia, L'Aquila-Monteluco, 28 settembre-24 ottobre 1970*, Roma: V. Ferri, vol. II, 1970.

([16]) Pezzullo tratto da de Finetti L 1970, 257.

([17]) Si tratta di un estratto da *La Repubblica*, Roma, 17.3.1975.

([18]) Pezzullo tratto da *Atti dei seminari preparatori dei corsi della Scuola Mediterranea di tecnologia, L'Aquila-Monteluco, 28 settembre-24 ottobre 1970*, Roma: V. Ferri, vol. I, 1970.

DE FINETTI, B., ROSSI, C. (1976g) Diffusione di caratteri mendeliani in relazione a fattori variabili, in *Atti dei convegni Lincei* 14, *Genetica di Popolazioni*, Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 29-43.

DE FINETTI, B., RIZZI, B. (1977a) Conversazione sul «ROMULUS», *Periodico di Matematiche*, (V) 53, nn. 3-4, 21-37.

DE FINETTI, B. (1977b) Un fatto di cronaca, *Periodico di Matematiche*, (V) 53, nn. 3-4, 87-89.

DE FINETTI, B. (1977c) Il ruolo della probabilità nei diversi atteggiamenti del pensiero scientifico, in *Seminario sul tema: Rapporti tra biologia* e *statistica (Roma, 19-20 dicembre 1975)*, Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1977, 27-42.

DE FINETTI, B. (1977d) Un accademico a Regina Coeli racconta se stesso, *Il Manifesto*, 24.11.1977, 4.

DE FINETTI, B. (1977e) Inferenza statistica bayesiana, in *I fondamenti dell'inferenza statistica. Atti del Convegno tenuto a Firenze, 28-30 aprile 1977*, Firenze: Stamperia Ed. Parenti, 167-177.

DE FINETTI, B. (1977f) Ciò che ritengo essenziale raccomandare agli insegnanti, *Annuario dell'insegnante 1976-77,* Istituto Nazionale delle Assicurazioni, 85-98.

DE FINETTI, B. (1978a) La matematica non deve essere uno spauracchio. Parole ai giovani e ai loro insegnanti, *Orientamenti scientifici e di educazione artistica e tecnologica*, Suppl. al n. 7, *La vita scolastica*, 7-19.

DE FINETTI, B. (1978b) Un tentativo di fusionismo, *Orientamenti scientifici e di educazione artistica e tecnologica*, Suppl. al n. 7, *La vita scolastica*, 34-52.

DE FINETTI, B. (1978c) Una visione tecnologica anziché ... vuotologica?, *Periodico di Matematiche*, (V) 54, nn. 3-4, 59-70.

DE FINETTI, B. (1978f) Rischi di una "mattematica" di base "assiomattica", *Tuttoscuola*, 62, 13.

DE FINETTI, B. (1979a) Allenamento a pensare in modo euristico!, *Periodico di Matematiche*, (V) 55, n. 1, 3-7.

DE FINETTI, B., RIZZI, B. (1979b) Risposta [a Paolo Linati] di B. de Finetti e di B. Rizzi, *Periodico di Matematiche*, (V) 55, n. 1, 55-58.

DE FINETTI, B. (1979c) Ambiguità di gergo e di fondo nel campo della probabilità, *Scientia*, 114, 707-711 e 713-716 (Trad. inglese).

DE FINETTI, B., DE MARTINO, A. (1980a) La scuola disgraziata vittima della burofrenia, *Periodico di Matematiche*, (V) 56, nn. 3-4, 31-36.

DE FINETTI, B. (1980b) Una contrapposizione "robotica" od "euristica"?, in *Studi in onore di Paolo Fortunati*, Bologna: CLUEB, vol. I, *Statistica, statistica economica, demografia*, 211-218.

de Finetti, B. (1981a) Nota biografica, in *Scritti (1926-1930)*, Padova: Cedam, XVII-XXIV.

de Finetti, B. (1981b) *Chi sono io?*, in http://www.brunodefinetti.it/Galleria/Documenti/Chi%20sono%20io%20di%20BdF_1981_.pdf

de Finetti, B. (1982a) Probability and My life, in J. Gani (ed.), *The Making of Statisticians*, New York: Springer, 4-12.

de Finetti, B. (1982b) Probability: the different views and terminologies in a critical analysis, in L. J. Cohen (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of the Science* (VI), Amsterdam: North-Holland, 391-394.

de Finetti, B. (2006 [1934]). *L'invenzione della verità.* (*Introduzione di Giordano Bruno e Giulio Giorello, Premessa di Fulvia de Finetti*), Milano: Raffaello Cortina.

Gli Autori

Abraham Arcavi. Nato ed educato in Argentina, ha completato la *Licenciatura en Matemática Aplicada* nella Università CAECE di Buenos Aires. Ha conseguito il Master of Science e il PhD in Mathematics Education nel Weizmann Institute of Science in Israele, e ha lavorato come *post-doctoral fellow* all'University of California, Berkeley, USA. Ha diretto il Department of Science Teaching del Weizmann Institute of Science (2001-2005), dove attualmente occupa la cattedra Lester B. Pearson. È Secretary General in carica dell'ICMI. I suoi principali interessi di ricerca sono rivolti all'insegnamento e all'apprendimento della matematica a tutti i livelli. Ha pubblicato numerosi articoli e capitoli di libro sull'uso della storia della matematica nell'insegnamento, sull'insegnamento e sull'apprendimento dell'algebra, e sulla formazione degli insegnanti di matematica.

Mario Barra. Si laurea con lode nel 1972 con una tesi assegnata da Bruno de Finetti ("Un esempio di istruzione programmata"). Nel periodo 1973-1976 tiene a *La Sapienza* di Roma le esercitazioni del corso di Calcolo delle probabilità di de Finetti e lo accompagna in vari corsi di aggiornamento, in particolare, a Fontainebleau nel 1976 presso il *Centre Européen d'Education Permanente* (CEDEP), nel tentativo di organizzare un Centro di ricerca. Dal 1973 al 1976 collabora alla realizzazione di 13 *Esposizioni di matematica*: 7 in Italia e 6 all'estero, con Emma Castelnuovo, coautrice del libro *Matematica nella realtà* (Boringhieri, 1976). Nel periodo 1977-1987 dirige un gruppo di ricerca in didattica del CNR e tiene i Corsi per *Insegnante di sostegno* (Istituto Montesano di Roma). Dal 1987 al 2014 insegna, come professore associato, *Didattica della matematica* e *Fondamenti del Calcolo delle probabilità* all'Università della Basilicata prima e a La Sapienza di Roma, poi. È autore di più di

200 articoli, redige i testi e presenta varie trasmissioni RAI-TV (per esempio *Habitat*, *Orizzonti della scienza e della tecnica* e 45 cartoni animati di quiz matematici). Collabora dalla fondazione alle *Olimpiadi di Matematica* e alla *Maratona Nazionale di Matematica.* È co-fondatore e redattore della rivista *INDUZIONI* e fondatore e direttore della rivista *Progetto Alice.* Nel 2014 è direttore del Museo della matematica di Priverno. Dal 1989 è membro della *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) e dal 2010 al 2014, è direttore del *Centro di Ateneo (La Sapienza) per la Ricerca sulla Formazione e sull'Innovazione Didattica* (CARFID).

Fulvia de Finetti. Ha svolto la sua carriera lavorativa all'IBM, come programmatrice e sistemista. Dopo la morte del padre, ha curato il trasferimento all'Università di Pittsburgh (USA) dell'archivio paterno, oggi disponibile nella *Bruno de Finetti Papers Collection*. Ha partecipato come relatrice alle conferenze tenutesi in occasione di varie ricorrenze della nascita e della morte del padre. Nel 2011 all'*International Symposium on Imprecise Probability* svoltosi a Innsbruck per commemorare gli 80 anni della pubblicazione del teorema di de Finetti. Nel 2014 a *Palermo Scienza* e nel 2015 al congresso *I 120 anni della Mathesis*, tenutosi a Gioia del Colle. Ha curato la pubblicazione dell'inedito del padre *L'invenzione della verità* (Raffaello Cortina, 2006) nella collana "Scienza e Idee" diretta da Giulio Giorello e recentemente la pubblicazione *Bruno de Finetti Un matematico tra Utopia e Riformismo* nella collana "Gli Erasmiani" ideata e diretta da Giuseppe Amari. Da anni cura il sito www.brunodefinetti.it

Livia Giacardi. Professore ordinario di Storia delle Matematiche presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano' dell'Università di Torino, è autrice di saggi e libri specialistici e divulgativi, e di siti web nell'ambito di questo settore di ricerca, con particolare attenzione alla storia della geometria fra Ottocento e Novecento e alla storia dell'educazione matematica.

È stata membro della Commissione scientifica dell'Unione Matematica Italiana (2003-2006, 2009-2015), della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dal 2003 al 2012, e dal maggio 2014 fa parte del Comitato INdAM per la Storia delle matematiche. È stata segretario (2000-2008) e attualmente è membro del Consiglio direttivo della Società Italiana di Storia delle Matematiche.

Erika Luciano. Ha conseguito il dottorato di ricerca in Matematica nel 2008, con una tesi dedicata alle interazioni fra l'attività di ricerca e la didattica nella produzione di Analisi di Giuseppe Peano. Attualmente è professore associato del settore Mat04 presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano' dell'Università di Torino. I suoi interessi di studio riguardano la storia delle dinamiche di costruzione, trasmissione, circolazione e socializzazione del sapere matematico fra il 1880 e il 1960, con particolare riguardo ai contributi delle Scuole torinesi di Peano e Segre.
È segretario della European Society for the History of Science e membro del Consiglio direttivo della Società Italiana di Storia della Scienza.

Alessandra Mariotti. Laureata in Matematica presso l'Università di Pisa, ha conseguito il PhD in Mathematics Education, presso l'Università di Tel Aviv (Israele) nel 1996. Fino al 2004 ha insegnato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa. Attualmente è Professore Associato presso il Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche dell'Università di Siena. Da sempre svolge ricerca scientifica nel campo della Didattica della Matematica, con particolare interesse per lo sviluppo del pensiero geometrico e l'uso delle tecnologie nella costruzione del sapere matematico. È stata responsabile di progetti di ricerca Nazionali ed Europei, è membro del comitato scientifico di importanti riviste internazionali, ed è stata membro del comitato scientifico di Associazioni Internazionali ed ora è Presidente dell'Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica (AIRDM).

Domingo Paola. Docente di matematica e fisica presso il liceo "G. Bruno" di Albenga, svolge attività di formazione per gli insegnanti e di ricerca nel campo della didattica della matematica, con particolare attenzione all'uso delle tecnologie nell'insegnamento – apprendimento della matematica e all'analisi semiotica per lo studio dei processi di apprendimento.
È autore di diverse pubblicazioni di didattica della matematica su riviste nazionali e internazionali.
È stato vicepresidente della CIEAEM (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) dal 2006 al 2012 e, dal 2008 al 2014 membro della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) di cui attualmente fa parte come esperto.

Mario Pellerey. Laureato in matematica con il prof. Lucio Lombardo Radice, ha insegnato per vari anni matematica e fisica nei licei. Nel 1974 è passato a insegnare Didattica presso l'Università Salesiana di Roma, diventando prima Associato, poi Ordinario. In tale sede accademica è stato Preside della Facoltà di Scienze dell'Educazione, Vice Rettore e, infine, Rettore dal 1997 al 2003. Nel 2005 è diventato docente emerito. Ha conosciuto Bruno de Finetti nell'anno accademico 1963-64, iniziando una collaborazione con lui sul piano della didattica della matematica e partecipando insieme con lui a un gruppo di studio con Lucio Lombardo Radice e Emma Castelnuovo. All'inizio degli anni settanta è stato Presidente della sezione romana della Mathesis e in questa veste ha collaborato con de Finetti divenuto Presidente nazionale di tale Associazione nel 1970. Dal 1975 al 1981 ha condotto nell'ambito del CNR una ricerca sul rinnovamento del curricolo matematico elementare, progetto Ricme, mentre de Finetti ne era il responsabile scientifico. In quel periodo e nei primi anni ottanta la sua frequentazione con de Finetti è stata favorita dalla disponibilità di una sede di lavoro che questi ha avuto presso l'Università Salesiana.,

Carla Rossi. Si è laureata in Matematica con Bruno de Finetti nel 1971, discutendo una tesi modellistica di "genetica" sull'invecchiamento casuale del DNA delle cellule. Nei primi anni dopo la laurea la sua attività di ricerca si è concentrata sulle applicazioni matematiche alla genetica di popolazioni, seguendo le tracce originali di de Finetti di oltre quarant'anni prima e ancora molto attuali, ampliando gli aspetti metodologici e generalizzando i modelli. Ha inoltre continuato a collaborare con lui fino all'inizio degli anni '80 su diverse questioni applicative di Matematica e Statistica. Dal 1980 al 2014 ha ricoperto il ruolo di professore ordinario di Statistica Matematica e Statistica Medica, prima presso l'Università di Lecce e poi presso quella di Roma Tor Vergata, insegnando varie materie in diversi corsi di laurea. Ha pubblicato oltre 150 lavori nei seguenti ambiti: modelli matematici per la genetica, statistica matematica, decisioni basate su modelli quantitativi nella sperimentazione clinica, programmazione sanitaria, scienze demografiche e sociali, ambito forense. Negli ultimi anni si è molto impegnata anche nello studio quantitativo dei fenomeni droga-correlati. Sull'esempio del Maestro ha inoltre profuso energie per il miglioramento della didattica della Probabilità e della Statistica, sia tenendo corsi ministeriali di aggiornamento per insegnanti, sia scrivendo diversi libri e articoli in proposito, sia ancora come membro della Commissione Brocca per le modifiche dei programmi scolastici. Ha contribuito alla fondazione della rivista *INDUZIONI* di didattica della Probabilità, Statistica e Demografia.

Indice dei nomi citati

C

D

E

Q

R

S

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 495-500

SOMMARÎ ED «ABSTRACTS» DEI LAVORI APPARSI SUL FASCICOLO DICEMBRE 2015

Barra M., *Bruno de Finetti: tappe di una vita al servizio della Ricerca, della Scuola e della Società*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 15-42

Sommario. Bruno de Finetti è considerato unanimemente fra le più grandi personalità della cultura mondiale. Nel presente profilo biografico si ripercorrono, attraverso citazioni e ricordi, le tappe più importanti della sua vita e della sua opera scientifica. Si evidenziano in particolare i contributi fondamentali nel calcolo delle probabilità, in economia e nella didattica della matematica, cercando soprattutto di far comprendere l'atipica personalità di questo "matematico geniale al servizio della società". Si accenna infine, attraverso citazioni significative, alle interazioni di de Finetti con alcuni matematici del suo tempo particolarmente interessati alla didattica.

Abstract. Bruno de Finetti is widely considered to be one of the greatest personalities of world culture. This biographical profile retraces, by means of quotes and recollections, the most important moments of his life and scientific work. Particular emphasis is given to the fundamental contributions in the theory of probability, economics and mathematics education. The aim is above all to illustrate the atypical personality of this 'brilliant mathematician in the service of society'. Finally, by means of significant quotes, we discuss de Finetti's interactions with some of the mathematicians of his day who were particularly interested in education.

Pellerey M., *Bruno de Finetti e i programmi d'insegnamento della matematica nella scuola secondaria*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 43-72

Sommario. L'articolo intende esplorare quale epistemologia della matematica, considerata nel contesto dell'educazione scolastica, caratterizzasse il pensiero di de Finetti nell'esaminare e proporre i vari contenuti dei programmi della scuola secondaria. Ciò viene fatto ripercorrendo le riflessioni e le proposte, che nel corso degli anni Sessanta e Settanta egli ci ha offerto sul modo di affrontare in classe i vari concetti chiave della matematica. In questa stessa prospettiva è sembrato degno di interesse evidenziare anche la sua particolare attenzione ai processi di costruzione delle conoscenze matematiche nella prospettiva psicologica. Molti dei suoi suggerimenti sembrano potersi inquadrare da un punto di vista epistemologico in una forma particolare di realismo critico e, da un punto di vista psicologico, in un'impostazione cognitiva attenta allo sviluppo di conoscenze significative, stabili e fruibili ottenute per mezzo di processi elaborativi profondi.

ABSTRACT. The aim of this article is to explore the epistemology of mathematics, considered in the context of school education, that characterizes de Finetti's thinking in examining and proposing the contents of the secondary school curricula. This is done by considering reflections and proposals which he formulated in the 1960s and 1970s regarding several key concepts for use in the classroom. Given this point of view it is interesting to highlight as well his specific attention to the processes of the construction of mathematical knowledge from the psychological perspective. Many of his recommendations appear to be framed, from an epistemological point of view, in a particular form of critical realism and, from a psychological point of view, in a cognitive framework which is attentive to the development of meaningful, stable and useful knowledge obtained through profound processes of elaboration.

Rossi C., *La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti.*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 73-108

SOMMARIO. L'articolo illustra l'approccio 'per problemi' di Bruno de Finetti all'insegnamento della probabilità e, in generale della matematica, approccio che discende da una straordinaria apertura mentale a tutti gli stimoli culturali, sociali e pratici e dall'inclinazione al cosiddetto 'fusionismo' di culture e impostazioni diverse.

L'autrice utilizza ricordi diretti del Maestro (lezioni, collaborazioni), citazioni dai tanti lavori da lui pubblicati, sue espressioni pubbliche. Fa anche riferimento a proprie esperienze didattiche e applicative che confermano l'efficacia di quell'approccio.

Nella didattica di de Finetti il ruolo degli esempi, tratti sia dalla vita d'ogni giorno, sia da una varietà di campi scientifici e sociali, è essenziale per apprendere pienamente e correttamente concetti teorici fondamentali (concezione soggettiva della probabilità, probabilità condizionata, logica induttiva, scambiabilità, verificabilità, decisione). Il coinvolgimento pratico degli studenti, di particolare utilità nell'insegnamento, è esemplificato attraverso l'efficace esperimento didattico definettiano basato sui 'pronostici probabilistici' delle partite del campionato di calcio. Fra gli strumenti di particolare utilità, non solo didattica, sono illustrati il diagramma 'ternario', i diagrammi di Venn, il processo Testa-Croce, il teorema di Bayes, il teorema di rappresentazione di de Finetti.

ABSTRACT. This article illustrates de Finetti's teaching approach, based on 'problem solving', in teaching probability theory and mathematics more generally, an approach that derives from an extraordinary mental aperture to all kinds of cultural, social and practical stimuli as well as the inclination towards the so-called 'fusionism' of diverse forms of knowledge and methods.

The author relies on her personal recollections of the Maestro (lectures and collaborations), quotes from de Finetti's many works, and his public statements. She also refers to her own experiences in teaching and applying this approach, which confirm its effectiveness.

In de Finetti's teaching the role played by examples, drawn both from everyday life as well as a variety of scientific and social fields, is essential for completely and correctly learning fundamental concepts (subjective probability, conditional probability, inductive logic, exchangeability, verifiability, decision). The students' practical involvement, particularly useful in teaching, is exemplified by means of an effective teaching experiment of de Finetti based on 'probabilistic predictions' of the outcomes of football matches. Among the tools of particular, and not only educational, usefulness are the 'triangular diagram' (now generally called de Finetti's diagram) Venn diagrams, the heads-or-tails process, Bayes' theorem, and de Finetti's representation theorem.

Mariotti A., Saper vedere in matematica *alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 109-142

SOMMARIO. A partire da alcuni testi di Bruno de Finetti, in particolare dal volume *Il "saper vedere" in Matematica*, il saggio propone una panoramica sui principali studi nel campo della didattica della matematica sul tema della visualizzazione in geometria. L'obiettivo dell'autrice è quello di offrire una riflessione sui processi cognitivi e didattici coinvolti nell'uso di immagini in geometria, così come è delineato da de Finetti. Nel quadro della teoria dei *Concetti Figurali* si discute il problema della concettualizzazione geometrica, il ruolo del disegno e in particolare il contributo che viene dalle nuove tecnologie. Disegnare e trascinare figure in un ambiente di geometria dinamica offre grandi potenzialità per superare alcune delle difficoltà descritte, ma soprattutto offre nuove occasioni per sviluppare competenze geometriche coerenti con il discorso didattico di de Finetti.

ABSTRACT. Taking the cue from Bruno de Finetti's papers, in particular his book *Il "saper vedere" in Matematica* this paper offers an overview of the principal studies in the field of mathematics education on the theme of visualization in geometry. The goal is to offer a reflection on the cognitive and educational processes involved in the use of images in geometrical thinking, as outlined by de Finetti. In the framework of the theory of 'Figural Concepts' the author discusses the issue of geometric conceptualization, the role of drawing and in particular the contribution made by new technologies. Drawing and dragging figures in an environment of dynamic geometry offers great potential for overcoming some of the difficulties described, but above all offers new opportunities for developing high levels of competencies consistent with the educational objectives outlined by de Finetti.

Arcavi A., *Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 143-160

SOMMARIO. In questo articolo, a partire dagli assunti che emergono dall'opera "visionaria" di Bruno de Finetti sul ruolo della visualizzazione nell'insegnamento della matematica, si discutono e si esemplificano tentativi di risposta ad alcune delle questioni della ricerca corrente in didattica. In particolare si analizzano tre punti principali: la relazione fra visualizzazione e *sense-making*, il ruolo della visualizzazione nel conseguire risultati sistematici e generali, e le dimostrazioni visuali.

ABSTRACT. This article starts with the initial assumptions put forward by the visionary work of Bruno de Finetti regarding the role of visualization in mathematics education and continues by discussing and exemplifying tentative answers to some of the questions of the current research agenda in this area. Three main issues are analyzed and illustrated: the relationships between visualization and sense making; the role of visualization in achieving systematic and general results; and visual proofs.

de Finetti F., *Una giornata memorabile*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 161-164

SOMMARIO. L'articolo fornisce, sulla base di un documento dell'epoca, un inedito resoconto dell'emozione suscitata nella famiglia di Bruno de Finetti dalla prolusione da lui tenuta all'Università di Trieste per l'inaugurazione dell'anno accademico 1948-1949 e delle considerazioni, famigliari e non, che sulla stessa furono espresse in successive occasioni.

ABSTRACT. On the basis of a letter of the time, this article provides a previously untold account of the reactions of Bruno de Finetti's family to his inaugural lecture of the 1948-1949 academic year at the University of Trieste, and of remarks made about it on later occasions by family members and others.

Giacardi L. - Luciano E. (a cura di), *Dialoghi sull'insegnamento della matematica. Lettere inedite*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 167-236

SOMMARIO. L'articolo presenta l'edizione critica di alcune lettere tratte dal ricco zibaldone di documenti inediti conservati fra i Bruno de Finetti Papers presso gli Archives of Scientific Philosophy dell'Università di Pittsburgh. L'intento è duplice: da un lato si offrono frammenti del dialogo scientifico-didattico che de Finetti intrecciò con alcuni colleghi matematici (L. Geymonat, E. Frola, G. Pólya, F. Tricomi, G. Prodi), dall'altro si traggono ulteriori evidenze dell'importanza che egli attribuì all'insegnamento della matematica.

ABSTRACT. The paper presents the critical edition of diverse letters extracted from the rich collection of unpublished documents conserved in the Bruno de Finetti Papers in the Archives of Scientific Philosophy of the University of Pittsburgh. The aim is twofold: to bring to the fore significant aspects of the dialogue on scientific and educational subjects that de Finetti carried on with several mathematicians (L. Geymonat, E. Frola, G. Pólya, F. Tricomi, G. Prodi), and to provide further evidence of the importance that de Finetti attributed to the teaching of mathematics.

Paola D., *Bruno de Finetti e la didattica delle scienze matematiche*

La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista della Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 239-250

SOMMARIO. Bruno de Finetti è stato uno dei maggiori matematici del Novecento, ma si è anche interessato di questioni legate alla didattica della matematica, con interventi originali, profondi, ricchi di idee e stimoli per gli insegnanti. In questo articolo ricordo alcuni suoi contributi alla didattica della matematica e mostro come, nonostante il contesto scolastico e le esigenze sociali siano profondamente cambiati rispetto ai tempi in cui Bruno de Finetti operò, le sue idee siano ancora oggi attualissime, anche se, purtroppo, non sempre messe in pratica.

Abstract. Bruno de Finetti was one of the most influential mathematicians of the 20th century, but he was also interested in questions related to mathematics teaching. He developed original, profound and rich ideas and stimuli for teachers. In this paper I recall some of his contributions to mathematics education and show how, even though today's teaching context and social needs have changed significantly from the times in which Bruno de Finetti worked, his ideas are still quite current, although, unfortunately, they are not always implemented.