

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

**Federigo Enriques, i fondamenti della geometria e lo sfondo neokantiano della filosofia a scienza**

**This is a pre print version of the following article:**

*Original Citation:*

*Availability:*

This version is available <http://hdl.handle.net/2318/2029173> since 2024-11-01T09:41:17Z

*Publisher:*

ETS

*Terms of use:*

Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

(Article begins on next page)

Francesca Biagioli\*

FEDERIGO ENRIQUES, I FONDAMENTI  
DELLA GEOMETRIA E LO SFONDO NEOKANTIANO  
DELLA FILOSOFIA SCIENTIFICA

1. *Dalla geometria all'epistemologia*

È noto come la scuola di geometria algebrica italiana, rappresentata tra gli altri da Corrado Segre, Gino Fano, Francesco Severi, Guido Castelnuovo ed Enriques, abbia contribuito alla diffusione e all'ulteriore sviluppo del Programma di Erlangen di Felix Klein e della teoria dei gruppi di trasformazioni di Sophus Lie<sup>1</sup>. Se i contributi matematici di Enriques si inseriscono evidentemente in questa tradizione, i suoi scambi con Klein testimoniano di una interessante serie di convergenze anche su visioni di carattere epistemologico e riguardanti l'insegnamento della matematica. Il legame tra queste diverse tematiche si deve anche alla prassi, piuttosto comune tra i matematici dell'epoca, di pubblicare i principali corsi tenuti all'università dopo una serie di integrazioni e revisioni delle annotazioni di uno studente. Le lezioni di Klein sulla geometria non euclidea, quelle sulla matematica superiore, e quelle sullo sviluppo della matematica nel diciannovesimo secolo, per citarne solo alcune, offrono vari e ampi spunti per la ricostruzione di una riflessione epistemologica che attraversa l'opera di Klein.

Per quanto riguarda Enriques, l'interesse per il dibattito sull'origine dei concetti geometrici risale ai primi anni dell'insegnamento di geometria proiettiva a Bologna (1894-1896). Secondo quanto riferi-

\* Università degli Studi di Torino - Francesca.biagioli@unito.it

<sup>1</sup> Si vedano T. HAWKINS, *The Erlanger Program of Felix Klein: Reflections on Its Place in the history of Mathematics*, «Historia Mathematica», 11 (1984), pp. 442-70; D.E. ROWE, *Klein, Lie, and the Erlanger Program*, in L. BOI *et al.* (eds.), *1830-1930: A Century of Geometry, Epistemology, History and Mathematics*, Springer, Berlin 1992, pp. 45-54; J. GRAY, *Enriques: Popularizing Science and the Problems of Geometry*, in V.F. HENDRICKS *et al.* (eds.), *Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930*, Springer, Dordrecht 2006, pp. 135-53. Per una ricostruzione dettagliata degli scambi tra Enriques e Klein si veda in particolare L. GIACARDI, *Federigo Enriques (1871-1946) and the Training of Mathematics Teachers in Italy*, in S. COEN (ed.) *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Birkhäuser, Basel 2010, pp. 209-276.

sce a Castelnuovo in una lettera del 4 maggio 1896, è in questo periodo che Enriques si avvicina alla discussione filosofica sul “problema dello spazio”, intraprendendo lo studio delle ricerche sulla base fisiologica del concetto di spazio da parte di autori come Wundt, Mach e Helmholtz<sup>2</sup>. Nelle lezioni sull’iperspazio si trovano inoltre le prime considerazioni di Enriques riguardo alle molteplici applicazioni della geometria astratta, ovvero del modo di considerare “gli elementi fondamentali dalla Geometria come enti di natura astratta legati da relazioni puramente logiche”<sup>3</sup>. Nel seguito dello stesso passaggio si preannuncia la riflessione di Enriques sull’importanza della geometria astratta, non in quanto contrapposta a quella attribuita all’intuizione, ma nelle sue infinite possibili interpretazioni come una geometria concreta, una volta fissata la natura dei suoi elementi. Ciò spiega come “in tal modo”, scrive Enriques, “la Geometria può trarre aiuto nel suo sviluppo da infinite forme diverse d’intuizione”.

In seguito Enriques prende spunto dai *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1895) di Klein per l’edizione, insieme a Ugo Amaldi, del manuale collettaneo per la scuola secondaria, *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1900). Klein a sua volta scrive una prefazione molto favorevole alla traduzione tedesca delle *Lezioni di geometria proiettiva* (1898) di Enriques, tradotte da Hermann Fleischer nel 1903, delle quali Klein apprezza particolarmente la “struttura sistematica” e la presentazione “ovunque intuitiva e allo stesso tempo pienamente rigorosa”<sup>4</sup>.

Nello stesso periodo Enriques e Klein si confrontano a più riprese sulle questioni che riguardano i fondamenti della geometria. Nel 1897 Heinrich Friedrich Burkhardt invita Enriques a scrivere l’articolo dedicato ai principi della geometria per l’*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, il progetto en-

<sup>2</sup> In U. BOTTAZZINI - A. CONTE - P. GARIO (a cura di), *Risposte armonie. Lettere di Fedrigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Bollati Boringheri, Torino 1996, p. 261.

<sup>3</sup> F. ENRIQUES, *Conferenze di geometria tenute nella R. Università di Bologna. Fondamenti di una geometria iperspaziale*, Pongetti, Bologna 1894-1895, pp. 9-10.

<sup>4</sup> Klein in F. ENRIQUES, *Vorlesungen über projective Geometrie*, Teubner, Leipzig 1903, p. V. Sulla concezione del rapporto tra intuizione e rigore in Enriques e in altri protagonisti della scuola di geometria algebrica italiana, si veda S. DE TOFFOLI - C. FONTANARI, *Objectivity and Rigor in Classical Italian Algebraic Geometry*, «Noesis», 38 (2022), pp. 195-212. Gli autori sottolineano come le affermazioni di questi autori vadano meglio comprese all’interno di una prospettiva in cui, diversamente da quanto si ritiene oggi spesso, il rigore non è né opposto all’intuizione né inteso come un fenomeno unitario.

ciclopedico ideato a partire dal 1894 da Wilhelm Franz Meyer, Heinrich Weber e dallo stesso Klein<sup>5</sup>. Enriques riferisce a Castelnuovo di aver dovuto attendere fino al 1898 per avere accesso a *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, un importante articolo di Klein del 1890, in cui questi, dopo aver presentato una soluzione del problema di stabilire la classe delle geometrie dello spazio iperboliche ed ellittiche localmente isomorfe al piano euclideo, offre una celebre discussione del dibattito allora in corso sulla concezione moderna degli assiomi della geometria e sulla loro origine. Oltre a riprendere alcune delle formulazioni che si trovano in questo articolo, Enriques si confronta direttamente con Klein durante la visita di Klein a Bologna nel 1899. In questa occasione Enriques riferisce a Castelnuovo di aver discusso con Klein soprattutto dei problemi “psicologici matematici” e di avergli esposto il programma dell’articolo, che sarebbe apparso nel 1901 sulla «Rivista filosofica» con il titolo *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria*. L’articolo presenta nei suoi tratti essenziali la spiegazione dell’origine dei concetti geometrici che Enriques riprende nei *Problemi della scienza* (1906) e nell’articolo dell’*Encyclopädie* del 1907. Il lungo lasso di tempo intercorso dai primi contatti con Burkhardt è dovuto senz’altro anche all’esigenza di dover rendere conto dell’affermarsi dell’approccio assiomatico di Hilbert, che oltre ad apportare notevoli avanzamenti nelle dimostrazioni di coerenza e di indipendenza, si distingueva nettamente dall’approccio genetico dei vari tentativi di spiegazione psicologica dei concetti geometrici. La parte principale dell’articolo di Enriques è infatti dedicata alla presentazione dei principali risultati del metodo di Hilbert nello studio delle geometrie non euclidee e non archimedee, mentre le considerazioni storiche ed epistemologiche iniziali riassumono la posizione di Enriques a proposito delle definizioni implicite.

Oltre all’articolo già citato, l’ampia produzione epistemologica di Klein negli anni 1890<sup>6</sup> documenta una serie di convergenze signifi-

<sup>5</sup> La lunga e complessa genesi dell’articolo di Enriques, che appare nella sua versione definitiva solo nel 1907 con il titolo *Prinzipien der Geometrie*, può essere in parte ricostruita a partire dalla sua corrispondenza con Castelnuovo, in U. BOTTAZZINI - A. CONTE - P. GARIO, *op cit.* Per una ricostruzione dettagliata degli scambi tra Enriques e Burkhardt, si veda anche C. CILIBERTO - P. GARIO, *Federigo Enriques: The First Years in Bologna*, in S. COEN (ed.), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Birkhäuser, Basel 2012, pp. 105-142, p. 125.

<sup>6</sup> La pubblicazione dell’articolo sulla geometria non euclidea nel 1890 coincide con l’avvio da parte di Klein di un’ampia riflessione sulle implicazioni filosofiche della sua classificazione delle geometrie in base alla teoria dei gruppi. Risalgono a questo periodo le principali traduzioni in italiano (1890), francese (1891), inglese

ficative con la spiegazione di Enriques. Per prima cosa entrambi sottolineano l'importanza dell'intuizione sia come elemento caratteristico di un approccio sintetico sia più in generale come punto di partenza per lo sviluppo dei concetti matematici. L'uso del termine "intuizione" in questo contesto non si riferisce alla teoria kantiana delle intuizioni pure, tanto che Klein sottoscrive a più riprese le concezioni "empiriste" di Helmholtz e di Moritz Pasch<sup>7</sup>. La terminologia kantiana fa però da sfondo a questa concezione, nella misura in cui l'intuizione indica per Kant una modalità di conoscenza immediata e riferita a qualcosa di singolare. Allo steso modo Klein attribuisce all'intuizione un ambito particolare e riconosce all'empirismo di avere evidenziato che la conoscenza che ne deriva, poiché limitata, si caratterizza per la sua imprecisione. Come per Enriques, ciò è perfettamente compatibile con il pensiero assiomatico. Nella formulazione di Klein: "un assioma non è altro che *il postulato (Forderung)*, per mezzo del quale introduco *affermazioni esatte* nell'intuizione inesatta"<sup>8</sup>.

Nella discussione sulle implicazioni epistemologiche della teoria di Lie, Klein sostiene inoltre che, dal momento che la nostra intuizione coglie sempre soltanto una regione limitata e imprecisa dello spazio fisico ai fini delle misurazioni empiriche, vi è un'intera classe di spazi topologici (coincidente con la classificazione da lui proposta nel 1890) da considerare nella formulazione dei postulati. La scelta per Klein ricade sulle ipotesi relativamente più semplici della geometria euclidea per un principio di economia<sup>9</sup>. Enriques riprende questo argomento nei *Problemi della scienza*, dove sostiene a sua volta una soluzione empirista del problema dello spazio.

(1893) e la seconda edizione ampliata del pamphlet noto come "Programma di Erlangen" (1893; prima edizione del 1872), oltre alla pubblicazione delle lezioni sulla geometria non euclidea (1893) e delle *Evanston Lectures* (1894) e a vari contributi rivolti a un pubblico non specialistico come *Zur Arithmetisierung der Mathematik* (1895) e il "Gutachten" del terzo volume della teoria dei gruppi di trasformazioni di Sophus Lie (1898). Per ulteriori riferimenti e per una discussione più dettagliata dei temi epistemologici a cui si fa riferimento di seguito, si veda il mio articolo *Structuralism and Mathematical Practice in Felix Klein's Work on Non-Euclidean Geometry*, «Philosophia Mathematica», 28 (2020), n. 3, pp. 360-87.

<sup>7</sup> Di Klein si vedano in particolare *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* e le *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie* redatte da F. Schilling (Göttingen 1893, p. 298 ss).

<sup>8</sup> F. KLEIN, *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, cit., p. 571.

<sup>9</sup> F. KLEIN, *Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises*, «Mathematische Annalen», 50 (1898), pp. 583-600, p. 595.

Nello stesso saggio di Klein si trova infine il tentativo, al quale si riferisce verosimilmente la prima conversazione avuta con Enriques, di ricondurre le diverse branche della geometria moderna a una diversa origine psicologica. Klein sostiene infatti che la ripartizione della geometria moderna in metrica e proiettiva corrisponde al modo in cui si sviluppa effettivamente l'intuizione spaziale, nella quale "le esperienze meccaniche (riguardanti il movimento dei corpi rigidi) si combinano con le esperienze dello spazio visivo (riguardanti le diverse proiezioni degli oggetti intuiti)"<sup>10</sup>. Non soltanto Enriques nel saggio del 1901 riprende, come vedremo, questa ripartizione, ma si propone di dare una veste sistematica ed esaustiva alla spiegazione psicologica che vi appare implicata.

## *2. I fondamenti psicologici della geometria*

L'argomento di Enriques si inserisce sullo sfondo del dibattito ottocentesco sulla teoria kantiana dello spazio, dal tentativo di Herbart di affermare la realtà fisica dello spazio inteso come "ordine spaziale" ai contributi di Gauss, Lobačevskij e Riemann, che evidenziano il valore empirico, e di conseguenza approssimato e contingente, delle ipotesi geometriche in fisica. Nello stesso tempo lo sviluppo dei diversi tipi di rappresentazioni spaziali a partire dai sensi era stato al centro di una serie di indagini psicologiche. In particolare Enriques fa riferimento all'associazionismo di Alexander Bain, Hyppolyte Taine e Joseph Delboeuf, alla teoria dei segni locali di Hermann Lotze e ai contributi sperimentali di Helmholtz e Wundt.

È sull'interpretazione di questi ultimi sviluppi che Enriques prende le distanze dal neokantismo fisiologico. Mentre la "critica neokantiana", ricollegandosi alla teoria di Johannes Müller, ma anche alle posizioni di Wundt, tende a dare maggior peso agli elementi che dipendono dalla struttura nervosa, Enriques segue soprattutto Helmholtz nel ritenere che la ricerca fisiopsicologica debba essere completata da una nuova ricerca, più propriamente psicologica, "la quale mostri come dalle rappresentazioni [spaziali] si formino i concetti a cui i postulati si riferiscono; e scopra le condizioni necessarie, dipendenti dalla struttura psichica, che alla suddetta formazione

<sup>10</sup> Ivi, p. 593. Klein motivava in questo modo la sua rilettura degli argomenti di Helmholtz sull'origine empirica della libera mobilità dei corpi rigidi attraverso il modello proiettivo della geometria iperbolica.

presiedono”<sup>11</sup>. Al contrario del neokantismo, che arriva ad ammettere una rappresentazione dello spazio *a priori* e indipendente dai rapporti nello spazio fisico, Enriques si propone di fornire una spiegazione empirica, ovvero psicologica, del sentimento di necessità che accompagna l’intuizione dei concetti matematici. In questo modo si propone però anche di rendere conto dell’immutabilità ed esattezza, che caratterizza questi concetti e i postulati che vi si riferiscono.

Riallacciandosi alle considerazioni precedenti, Enriques aggiunge che la matematica moderna fornisce un punto di vista privilegiato per l’analisi dei concetti spaziali. Enriques si richiama all’idea che gli “elementi costitutivi” di questi concetti appaiono “già separati coll’evoluzione della scienza geometrica” in tre principali indirizzi<sup>12</sup>. Oltre alla ripartizione di Klein, Enriques sostiene che la geometria proiettiva e la geometria metrica differenziale mostrano un fondamento comune nella teoria generale del continuo o *analysis situs*. Secondo la classificazione di Enriques, le sensazioni legate ai concetti che stanno alla base della teoria del continuo, come quelli di linea e superficie, sono di tipo tattile-muscolare generale. Si tratta cioè di sensazioni localizzate in modo esteso, ma non preciso, su un’area del corpo. Pur essendo di tipo tattile, esse comprendono anche varie modificazioni della retina, rispecchiando in questo modo l’idea di una base fondamentale per lo sviluppo di concetti associati alle rappresentazioni sia tattili che visive. Come suggerito in precedenza da Klein, Enriques associa le sensazioni tattili-muscolari specifiche ai concetti metrici di congruenza e uguaglianza e quelle visive ai concetti proiettivi di retta e piano.

Enriques procede quindi alla spiegazione dei postulati in quanto condizioni che rendono possibile l’associazione delle varie rappresentazioni spaziali, da cui derivano questi concetti. Essa si basa sull’associazione dei fatti sperimentali alle trasformazioni geometriche dello spazio. Partendo dalle sensazioni visive, la formazione di un’immagine retinica, spiega Enriques, va considerata equivalente alla proiezione centrale di un oggetto dal centro del campo visivo. Occorre assumere inoltre che l’orientamento dell’occhio rimanga costante per ogni posizione del raggio visivo. Le due immagini retiniche si fondono infine nella visio-

<sup>11</sup> F. ENRIQUES, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria*, «Rivista filosofica», 4 (1901), pp. 171-195. Repr. in F. ENRIQUES, *Natura, ragione e storia. Antologia di scritti filosofici*, L. LOMBARDO-RADICE (a cura di), Einaudi, Torino 1958, pp. 71-94, p. 74.

<sup>12</sup> Ivi, p. 76.

ne binoculare<sup>13</sup>. Usando l'esempio di quello che Enriques definisce "il postulato della linea", che *una retta è determinata da due qualunque dei suoi punti, A, B o C, D*, emerge bene l'idea che all'origine dei concetti geometrici vi sia una ulteriore associazione tra sensazioni di tipo attuale e di tipo dinamico. Per introdurre il postulato Enriques si basa sull'osservazione che una stessa retta può apparire in modo diverso, ossia come proiettata in un punto se passante dal centro della visione e vista da un occhio solo, e sotto forma di una serie proiezioni rettilinee negli altri casi. Dato un raggio visuale  $AB$  se ne potrà ricavare l'equivalenza con  $BA$ . Se  $C$  è un punto della retta guardato da  $A$ , allora  $AB$  è equivalente ad  $AC$ . Infine se  $D$  è un altro punto della retta, allora  $AB$  è equivalente ad  $AC$  e quindi a  $CA$ ,  $CD$ ,  $AB$  e  $CD$ , come prevede il postulato.

Il concetto di superficie viene derivato invece dall'unione di tutte le rappresentazioni genetiche ottenute dal movimento di una sua linea variabile. Enriques riconduce a Riemann l'idea di basare la teoria del continuo a due dimensioni su una generazione della superficie di questo tipo e ne fa derivare il postulato di completezza di Dedekind.

Proseguendo in modo analogo per i postulati della geometria metrica, Enriques riconduce i postulati che esprimono la possibilità e il grado di indipendenza del movimento delle figure rigide e le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva della congruenza all'osservazione del comportamento dei corpi solidi in relazione all'organo tattile. Enriques si richiama al principio della libera mobilità di Helmholtz e alle sue varie riformulazioni nei termini della teoria dei gruppi di trasformazione da parte di Klein, Lie e Poincaré.

Tornando al problema dello spazio, il punto che a Enriques preme sottolineare è che occorre un'associazione ulteriormente complessa, che definisce "tattile-visiva", per fare ipotesi sul concetto di parallelismo. Deve essere cioè possibile associare l'immagine visiva della retta come raggio visuale con la sua immagine tattile come linea più breve tra due punti. Questo permette l'unificazione delle due geometrie in una geometria metrico-proiettiva, che, come aveva mostrato Klein, presenta diversi casi di geometria metrica euclidea e non euclidea. Il V postulato di Euclide o "postulato delle parallele" deriva dall'ipotesi che due rette di un

<sup>13</sup> Il linguaggio della "fusione" si richiama alle varie spiegazioni associazioniste della singolarità e di altre caratteristiche della visione. In particolare era stato Helmholtz, in *Handbuch der physiologischen Optik*, Voss, Leipzig 1867, pp. 441-442, p. 804 ss., a sostenere e a definire "empirista" una spiegazione di questo tipo, contrapponendola alla supposizione "nativista", da parte di Johannes Müller, Ewald Hering e altri, di una connessione anatomica tra le due retine.



piano che non si incontrano siano equidistanti. La sua apparente necessità, spiega Enriques, è dovuta all'associazione delle due rappresentazioni "due rette di un piano che non si incontrano" e "due linee equidistanti". L'unificazione metrico-proiettiva mostra però che si tratta appunto di una necessità apparente, essendo possibili altre ipotesi. In linea con la tradizione dell'empirismo geometrico a cui si rifà Enriques, si può concludere tutt'al più che l'esperienza confermi il postulato delle parallele nei limiti delle approssimazioni possibili in una determinata regione dello spazio.

In conclusione Enriques rimprovera al neokantismo di aver confuso la necessità dei postulati come precondizioni per le associazioni all'origine dei concetti geometrici con la loro assoluta validità nell'ordine fisico dello spazio, che invece è solo approssimativa. Eliminando questa confusione, la spiegazione proposta però, scrive Enriques: "concilia, in un certo senso, i due modi di vedere, critico ed empirico; quando la critica non voglia arrestarsi alla tesi kantiana, in questo punto ormai oltrepassata, e l'empirismo si sollevi dal puro fatto esterno della sensazione al riconoscimento di una struttura logica del pensiero, che ne interpreta e ne coordina i dati"<sup>14</sup>. L'intento conciliatorio, che nei suoi termini generali ricorda alcune posizioni di Helmholtz<sup>15</sup>, chiama evidentemente in causa però anche alcune specificità del contesto filosofico italiano, in cui il neokantismo, diversamente dall'antipsicologismo predominante in Germania, condivideva con un approccio empirico l'idea di partire da una base fisiopsicologica per rinnovare la teoria kantiana dello spazio<sup>16</sup>.

<sup>14</sup> F. Enriques, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria*, cit., p. 94.

<sup>15</sup> In un celebre passaggio de *I fatti della percezione*, del 1878, Helmholtz scrive: "In quel che mi sembra costituire la parte più avanzata della filosofia di Kant, in ciò rimaniamo ancora sul terreno del suo sistema. Pertanto, anche nei precedenti lavori ho spesso sottolineato la concordanza tra la nuova fisiologia degli organi di senso e le teorie di Kant, non intendendo dire, però, che avrei giurato *in verba magistri* anche su tutte le questioni di minore importanza" (*Die Thatsachen in der Wahrnehmung* [1878], trad. it. in *Opere*, a cura di V. Cappelletti, UTET, Torino 1967, pp. 583-646, pp. 625 ss.). Diversi interpreti hanno sottolineato la peculiarità dell'empirismo di Helmholtz nell'ammettere elementi *a priori* come condizioni dell'esperienza. Si vedano G. HATFIELD, *The Natural and the Normative: Theories of Spatial Perception from Kant to Helmholtz*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1990; R. DISALLE, *Kant, Helmholtz, and the Meaning of Empiricism*, in *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, M. FRIEDMAN - A. NORDMANN (eds.), MIT Press, Cambridge, Mass. 2006, pp. 123-139; D. HYDER, *Kant, Helmholtz and the Determinacy of Physical Theory*, in *Interactions*, pp. 1-44; L. PATTON, *Signs, Toy Models, and the A Priori: From Helmholtz to Wittgenstein*, «Studies in History and Philosophy of Science», 40 (2009), pp. 281-289.

<sup>16</sup> Si veda M. FERRARI, *I dati dell'esperienza: Il neokantismo di Felice Tocco nella filosofia italiana tra Ottocento e Novecento*, Olshchki, Firenze 1990.

### 3. I problemi della scienza

La spiegazione psicologica dei postulati geometrici si lega strettamente a due delle principali idee che ispirano l'epistemologia di Enriques nel decennio successivo. La prima è l'idea di una filosofia scientifica, di cui Enriques si fa promotore nella cultura filosofica italiana con la fondazione della rivista «Scientia», il lavoro all'interno della Società Filosofica Italiana e della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, l'organizzazione del IV Congresso internazionale di filosofia a Bologna nel 1911 e il progetto di riforma della formazione universitaria e della scuola secondaria poi soppiantato dalla riforma Gentile<sup>17</sup>. Come Enriques spiega nel suo contributo alle *Questioni riguardanti la geometria elementare*, apparso un anno prima dell'articolo per la «Rivista filosofica», il problema dello spazio fornisce il principale esempio di «spirito filosofico» della geometria, che definisce come «spirito di relazione che tutto coordina in una sintesi, e fa brillare sugli umili particolari la grande luce dell'idea generale!»<sup>18</sup>. Enriques vi ricollega l'idea che l'insegnamento della geometria elementare possa essere improntato agli sviluppi della matematica superiore, in particolare all'inclusione della geometria euclidea nel sistema metrico-proiettivo insieme a una varietà di ipotesi. Sono evidenti le assonanze con il lavoro di Klein, che confluisce nei tre volumi della *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (1908, 1909, 1928). Enriques si riferisce però in modo prominente alla sua stessa trattazione sistematica della questione a cavallo tra psicologia, filosofia e matematica. La spiegazione psicologica, pur rivelandosi inadeguata a fornire definizioni esatte dei concetti geometrici, permette di introdurre in modo perspicuo i postulati, che occorrono a tali definizioni, ed evidenzia quali associazioni,

<sup>17</sup> Un'ampia discussione di questa prospettiva emerge da diverse raccolte di saggi, tra cui: R. SIMILI (a cura di), *Federigo Enriques filosofo e scienziato*, Cappelli, Bologna 1989; P. BUSSOTTI (a cura di), *Federigo Enriques e la cultura europea*, Lumieres internationales, Lugano 2008. Sul confronto con Gentile, si vedano U. SPIRITO, *Scienza e filosofia in Gentile e in Enriques* [1971], in ID., *Dall'attualismo al problematocismo*, Sansoni, Firenze 1976, pp. 153-160; M. CILIBERTO, *Federigo Enriques e il neoidealismo italiano*, in F. ENRIQUES, *Approssimazione e verità*, O. POMPEO FARACOVÌ (a cura di), Belforte, Livorno 1982, pp. 131-66; A. GUARRAGGIO - P. NASTASI, *Matematica, cultura e potere nell'Italia postunitaria*, in A. GUERRAGGIO et al. (a cura di), *Gentile e i matematici italiani, Lettere 1907-1943*, Bollati Boringhieri, Torino 1993, pp. 11-104.

<sup>18</sup> F. ENRIQUES, *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della geometria*, in F. ENRIQUES (a cura di), *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Zanichelli, Bologna 1900, p. 23.

che abitualmente facciamo, andranno messe da parte nel momento in cui ci si eleva al punto di vista superiore del metodo assiomatico o a quello della geometria algebrica. L'argomento assume la sua veste definitiva con la teoria delle definizioni implicite che occupa i capitoli centrali dei *Problemi della scienza* e alla quale Enriques fa nuovamente riferimento in *Prinzipien der Geometrie*<sup>19</sup>.

La seconda è la strategia di conciliazione tra neokantismo ed empirismo<sup>20</sup>, che Enriques presenta nella sua versione più esaustiva nei *Problemi*. Come spiega nella lunga introduzione all'opera, l'esame critico delle condizioni soggettive della conoscenza in generale e l'indagine dei particolari fatti fisici, psicologici e sociali si incontrano per Enriques nella dimensione storica che ne caratterizza l'oggetto in tutti questi casi. Quello che Enriques definisce il "metodo scientifico" della filosofia dovrebbe consistere "nell'esame critico della Scienza, riguardata essa stessa come il fatto da spiegare"<sup>21</sup>. Evocando in questo modo l'espressione resa celebre dal neokantismo di Marburgo, Enriques sottolinea però che l'esame di questo particolare "fatto" dovrebbe avvalersi il più possibile degli insegnamenti della storia e dei risultati della psicologia, apporti questi, che Enriques mette evidentemente sullo stesso piano della critica, sulla scorta di un approccio naturalista al problema della conoscenza. Ancora una volta il neokantismo al quale guarda Enriques assume tratti caratteristici di alcune sue versioni italiane, anche se né in scritti precedenti né nei *Problemi* si trovano riferimenti precisi ad autori come Felice Tocco e altri<sup>22</sup>.

<sup>19</sup> Per ulteriori riferimenti e per una discussione più approfondita rimando al mio articolo *Federigo Enriques and the Philosophical Background to the Discussion of Implicit Definitions*, in *Logic, Epistemology, and Scientific Theories - From Peano to the Vienna Circle*, P. CANTÙ - G. SCHIEMER (eds.), Springer, Cham 2024, pp. 153-74.

<sup>20</sup> In ambito filosofico Enriques parla più propriamente di "positivismo", in un senso derivato dalla filosofia positiva di Comte e dalle diverse versioni dell'idea di una filosofia scientifica nell'epistemologia francese e nel mondo austro-tedesco, e usato in un'accezione molto ampia, che va dall'associazionismo inglese di John Stuart Mill al pragmatismo americano e alla ripresa del termine nel dibattito filosofico italiano in autori come Pasquale Villari e Roberto Ardigò.

<sup>21</sup> F. ENRIQUES, *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna 1906 (II ed. 1909, da cui si cita), p. 45.

<sup>22</sup> M. FERRARI, *I dati dell'esperienza*, cit., p. 379 evidenzia un influsso in particolare dell'allievo di Tocco, Carlo Cantoni, sull'idea di una base psicologica della necessità logica, che si ritrova in Enriques, dall'idea della spiegazione psicologica dei postulati della geometria al capitolo dei *Problemi* dedicato ai problemi della logica, compresi quelli che riguardano il suo aspetto "fisiologico".

Una considerazione analoga vale per il positivismo, al quale Enriques ritiene “che la filosofia di Kant possa ancora aggiungere qualcosa di scientifico, quando ci si accordi a ritenerne soltanto lo spirito in ciò che ha di migliore, e si muova nuovamente da altre basi ad una costruzione nuova”<sup>23</sup>. I “metodi positivi” si rivelano infatti insufficienti a spiegare i fatti psicologici e sociali. Ma lo spirito scientifico che Enriques fa risalire a Kant è chiamato in causa soprattutto nella convinzione che tali metodi offrirebbero un’immagine frammentaria o addirittura incoerente della conoscenza in mancanza di un esame critico delle sue condizioni, che si rende possibile soltanto a ritroso, a partire dal fatto compiuto. Nella metafora di Enriques, il botanico, non potendo distinguere le parti costitutive nell’embrione, dovrà attendere che la crescita della pianta ne evidenzii la differenziazione. Analogamente, lo sviluppo scientifico dei concetti mostra l’importanza degli elementi sia soggettivi, cioè di ordine psicologico, sia oggettivi, di ordine fisico, che ne hanno reso possibile la formazione. “Ciò apparve chiaramente all’autore di questo scritto”, scrive Enriques, “per la prima volta nella Geometria, quando vide tre rami di codesta scienza staccarsi dal tronco comune, presentando un’elaborazione completa dei dati dei sensi diversi, da cui la rappresentazione dello spazio trae la sua origine”<sup>24</sup>.

Nel capitolo dedicato alla geometria Enriques riprende l’argomento del 1901 nei suoi tratti essenziali. Le principali integrazioni riguardano in primo luogo la discussione dei postulati della continuità, che anche alla luce dei risultati di Hilbert, mostra come una diversa definizione degli elementi fondamentali possa dar luogo a diverse ipotesi epistemologicamente, oltre che logicamente, equivalenti. Su quest’ultimo punto Enriques riconsidera in particolare la concezione di Veronese<sup>25</sup>. Enriques inoltre utilizza l’arbitrarietà dei postulati del continuo come un importante termine di paragone rispetto al caso delle geometrie non euclidee: “nel primo caso, la scelta è puramente convenzionale e libera, nel secondo essa contiene un’ipotesi di fatto e anticipa quindi il risultato di esperienze possibili, dalle quali non è escluso che l’ipotesi medesima venga contraddetta”<sup>26</sup>. L’esame dei due diversi casi permette cioè a Enriques di riaffermare un empi-

<sup>23</sup> F. ENRIQUES, *Problemi*, cit., p. 19.

<sup>24</sup> Ivi, p. 46.

<sup>25</sup> Si veda P. CANTÙ, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Unicopli, Milano 1999.

<sup>26</sup> Ivi, p. 173.

rismo moderato, pur non trascurando di rendere conto, attraverso la teoria delle definizioni implicite, degli avanzamenti del metodo assiomatico.

In questo e altri esempi paradigmatici la filosofia scientifica di Enriques si contraddistingue per la sua funzione di “sintesi” nei confronti delle altre discipline e per l’idea, che ne deriva, di un sistema conoscitivo sempre aperto a ulteriori sviluppi e modifiche, in un intreccio di questioni filosofiche, storiografiche e scientifiche tutt’altro che risolte.