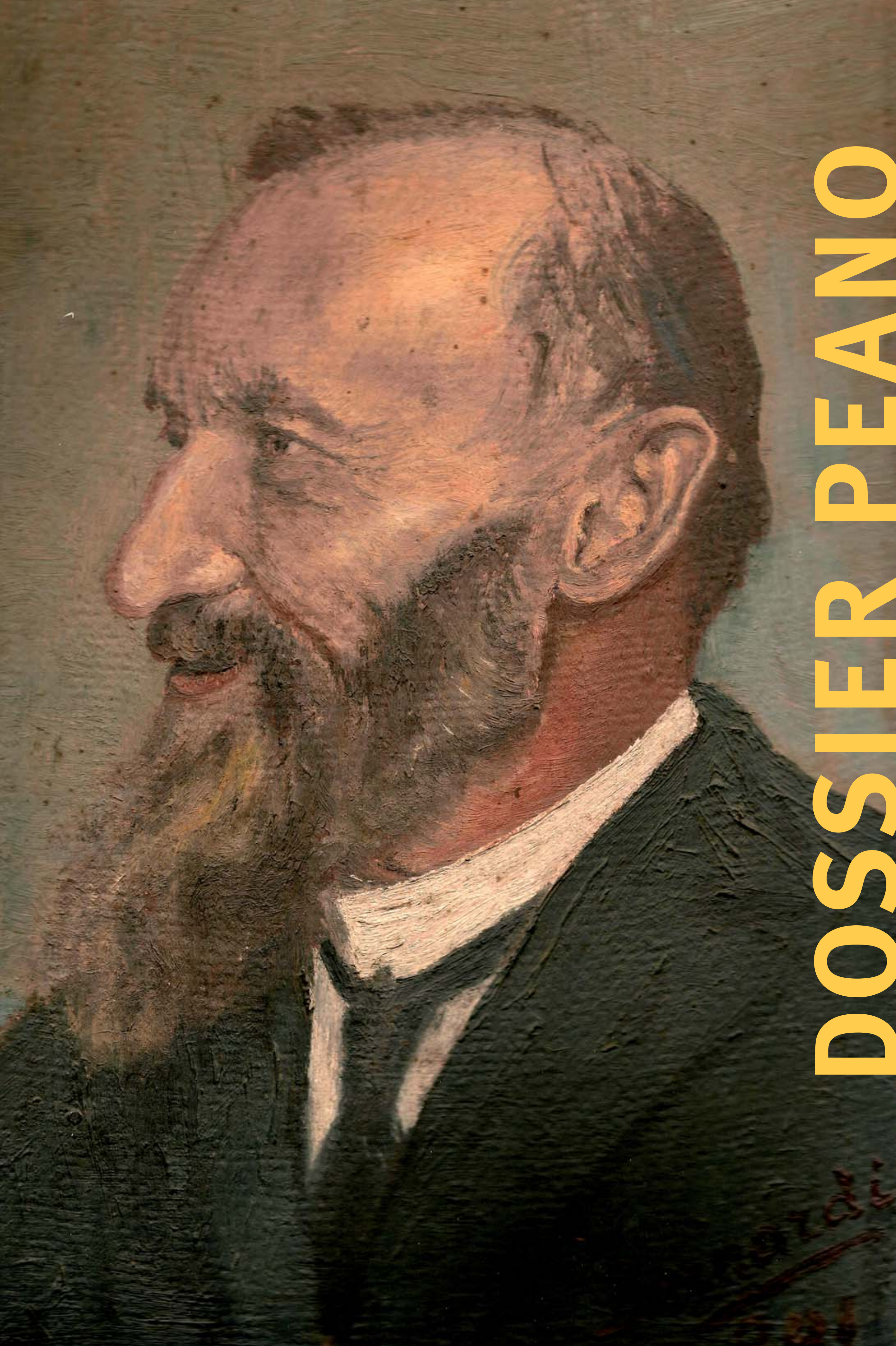

# DOSSIER PEANO

# I fondamenti e la logica matematica

di **Erika Luciano**
e **Clara Silvia Roero**

Allieva di Tullio Viola, **CLARA SILVIA ROERO** si è laureata in Matematica all'Università di Torino e ha poi insegnato nelle Università di Torino e Cagliari. Dal 2000, è titolare della cattedra di Storia delle Matematiche all'Università di Torino. È membro del Comitato scientifico del "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche" e presidente della "Società Italiana di Storia delle Matematiche".
È autrice di numerosi saggi e libri di Storia della Matematica, che spaziano dall'antichità all'Ottocento e Novecento. In quest'ambito ha curato volumi sulla storia scientifica dell'Università di Torino e alcuni CD-Rom e libri sull'opera e sulle corrispondenze di Peano.

**ERIKA LUCIANO**, laureata in Matematica all'Università di Torino nel 2003, è attualmente assegnista di ricerca presso il Dipartimento di Matematica della stessa Università. È autrice di articoli e saggi di carattere storico, molti dei quali sono dedicati all'opera di Giuseppe Peano e di alcuni esponenti della sua "scuola".

Oltre che per i brillanti risultati di Analisi, sparsi nelle riviste europee, il nome di Peano risuona sulla scena internazionale anche per i preziosi contributi alla Geometria, all'Aritmetica, alla critica dei fondamenti e alla Logica matematica. In particolare, il saggio *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* del 1888 e gli opuscoli *Arithmetices principia nova methodo exposita* e *I principii di geometria logicamente esposti* del 1889 sono recensiti con favore nelle sedi più prestigiose e segnalati da più parti come modelli di rigore e di chiarezza per i fondamenti delle discipline matematiche coinvolte. Anche in questo contesto Peano riesce a cogliere le linee di tendenza della ricerca più avanzata e ad anticipare i moderni metodi assiomatici, per cui non stupisce che i suoi lavori siano tradotti in altre lingue e facciano proseliti in Italia e all'estero.

Veniamo al primo dei titoli citati. Attraverso la prodigiosa opera semplificatrice di Peano, i metodi geometrici proposti da Hermann Grassmann in modo astratto e nebuloso si trasformano in un elegante calcolo geometrico, nel quale si incontra la prima definizione assiomatica di spazi vettoriali, che comprende anche gli spazi di dimensione infinita. L'opera, nella quale Peano dà un'interpretazione geometrica concreta delle forme e delle operazioni dell'*Ausdehnungslehre*, si colloca nel solco degli studi di William R. Hamilton sui quaternioni (1844, 1847), di August Möbius sul calcolo baricentrico (1827) e di Giusto Bellavitis sul metodo delle equipollenze (1833) e sarà rielaborata a più riprese, dando origine a un folto gruppo di Note e saggi, molti dei quali presentati all'*Accademia delle Scienze* di Torino.

Il calcolo con i vettori, applicato in modo sistematico alla Geometria differenziale e alla Meccanica razionale, troverà ampia diffusione e sviluppo nella Matematica del Novecento, in gran parte per merito dei suoi allievi Cesare Burali-Forti (1861-1931), Filiberto Castellano (1860-1919), Matteo Bottasso (1878-1918), Tommaso Boggio (1877-

1963) e Angelo Pensa (1875-1960) e dei trattati che essi scriveranno in collaborazione con Roberto Marcolongo (1862-1943) e Pietro Burgatti (1868-1938). Dal Calcolo geometrico scaturirà anche la Teoria delle omografie che, messa a punto da Burali-Forti, sarà applicata soprattutto in ambito fisico-matematico da Boggio, Bottasso, Burgatti, Marcolongo, Agostinelli ecc., talvolta con esiti discutibili, come nel caso della critica di Burali-Forti e Boggio alla Relatività di Einstein.

Citavamo poi *I Principii di geometria logicamente esposti*. Qui Peano affronta il problema dei fondamenti della Geometria di posizione e della Geometria metrica, partendo dai contributi di Moritz Pasch, che semplifica, riducendo a tre sole le idee primitive: *punto*, *segmento* e *moto*, che in seguito muterà, sostituendo all'idea di moto quella di *distanza di due punti*, o di *angolo retto*. I suoi *Principii* anticipano di una decina d'anni il moderno metodo assiomatico, di solito attribuito all'opera di David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* del 1899. Al di là dei nuovi e importanti concetti introdotti nei saggi geometrici, si vede comunque emergere il ruolo cruciale che Peano va sempre più assegnando alla Logica matematica: quello di riuscire ad esprimere in forma simbolica, per via assiomatica, le teorie matematiche classiche.

Sempre sul terreno della ricerca in Geometria scoppiano nel 1891, sulle pagine della *Rivista di Matematica* di Peano, due accese e ben note polemiche con Corrado Segre e con Giuseppe Veronese, che vedono contrapporsi intuizione e rigore.

I risultati di Peano nel campo della Geometria destano l'interesse di Mario Pieri (1860-1913) che, dalla collaborazione con Segre, passa ai metodi logico-matematici e redige profonde ed originali Note e Memorie sui fondamenti della Geometria, che fanno dire a B. Russell nel 1903: "*In ciò che segue, sono debitore principalmente a Pieri,* I principii della geometria di posizione, *che è la migliore opera sul tema qui considerato.*"

Per il ruolo giocato in Italia nella diffusione dell'Analisi vettoriale, Peano è eletto nel 1901 segretario nazionale dell'Associazione internazionale per lo sviluppo degli studi sui quaternioni e sui sistemi matematici connessi. Dalla "scuola" torinese, inoltre, usciranno molti libri di testo di Geometria per l'insegnamento secondario, che seguono i suoi consigli e le sue indicazioni.

### I fondamenti dell'Aritmetica

L'opuscolo in latino classico *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, pubblicato all'inizio del 1889, è senza dubbio fra le più famose opere di Peano, sia perché contiene i celebri assiomi per i numeri naturali, sia perché utilizza per la prima volta un simbolismo logico per delineare i fondamenti dell'Aritmetica. Dopo aver assunto i concetti primitivi, Peano enuncia i postulati dell'Aritmetica, da cui deduce l'intera teoria che, per la sua eleganza e semplicità, riscuote successo ed è ancora odiernamente indicata con l'acronimo 'PA', cioè 'Aritmetica di Peano'.

Il matematico piemontese tornerà ad occuparsi di questioni fondazionali nel 1891, sulla *Rivista di Matematica*, con il saggio *Sul concetto di numero*, nel quale definisce geneticamente le varie specie di numeri: negativi, interi, razionali e reali oltre a riprendere, con alcune modifiche, i suoi assiomi. Nel corso degli anni essi sono infatti perfezionati, anche grazie alla collaborazione con il suo allievo Alessandro Padoa, e giungono alla loro formulazione definitiva nel 1901, nella terza edizione del *Formulario*. I concetti primitivi sono qui quelli di *zero*, *numero* e *successore* e i postulati sono enunciati nella forma:

0. i numeri formano una classe;
1. lo zero è un numero;
2. il successore di un numero è un numero;
3. due numeri con successori uguali sono uguali;
4. lo zero non è il successore di alcun numero;
5. ogni classe che contenga zero e il successore di ogni suo elemento, contiene tutti i numeri (noto universalmente come 'principio di induzione completa').

La costruzione di Peano si affianca a quelle di Gottlob Frege nei *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) e di Richard Dedekind nel libro *Was sind und was sollen die Zahlen*. I caratteri di rigore, di chiarezza e di semplicità di quest'assiomatizzazione ne sanciranno il successo, nonostante le critiche mosse da Bertrand Russell, Karl Grandjot ed altri.

Oggetto di successivi perfezionamenti e rimaneggiamenti, i postulati sono ripresi da Peano nel saggio *Sul concetto di numero* del 1891, ricco di riflessioni metodologiche sui problemi della definibilità in Aritmetica, sulla coerenza (quando dichiara espressamente le ragioni per cui non ritiene opportuno affrontare la questione), sull'indipendenza e sulla categoricità degli assiomi. In questa sede, oltre a confrontare la sua teoria con quella di Dedekind, Peano accenna per la prima volta al progetto di una *Raccolta di Formule* matematiche scritte in linguaggio logico-ideografico, concretizzato di lì a poco nell'impresa collettiva del *Formulaire de Mathématiques*.

### La logica matematica

È leggendo gli scritti di George Boole, Ernst Schröder e Charles Saunders Peirce sull'algebra della Logica e quelli di Georg Cantor sulla Teoria degli insiemi e di Hermann Grassmann sul Calcolo geometrico, che Peano scopre la sua vera vocazione. Per conservare alla Matematica il carattere di assoluto rigore, che le è proprio, occorre rinunciare al linguaggio comune e costruire uno strumento che analizzi concetti, proposizioni e teorie, come un microscopio. Il matematico piemontese ambisce, in poche parole, a realizzare il sogno di Leibniz di costruire quella *characteristica universalis* in grado di formalizzare i processi mentali, attraverso l'individuazione delle idee primitive e l'ideazione di simboli appropriati "*che quasi dipingano l'intima natura dei concetti*". Raggiunto il suo obiettivo il 25 agosto 1894, Peano descrive con orgoglio a Felix Klein le caratteristiche dello strumento da lui inventato: "*La Logica matematica con un numero limitatissimo di segni (7 usati, e riduttibili ancora fra loro) è riuscita ad esprimere tutte le relazioni logiche immaginabili fra classi e proposizioni; o meglio l'analisi di queste relazioni ha portato ad usare quei segni, coi quali tutto si esprime, anche le relazioni più complicate, che difficilmente e faticosamente si esprimono col linguaggio ordinario. Ma il suo vantaggio non si limita alla semplificazione della scrittura; l'utilità sua sta specialmente nell'analisi delle idee e dei ragionamenti che si fanno in matematica*".

L'immagine del microscopio per denotare la potenza della Logica appare più volte negli scritti della "scuola" di Peano. Giovanni Vailati, ad esempio, così si esprime nel 1899: "*Non si è lontani dal realizzare, al riguardo, la previsione ottimista di Leibniz secondo la quale la logica matematica è destinata a provocare in questo tipo di studi progressi analoghi a quelli prodotti nelle ricerche fisiologiche dall'introduzione del microscopio*".

Il progetto più ambizioso nel quale la "scuola" di Logica di Torino investe tutte le energie, a partire dal 1891, è quello del *Formulario*, che Peano considererà sempre come l'opera più importante da lui compiuta: una grande enciclopedia matematica realizzata in forma simbolica. Nella versione finale del 1908, il *Formulario* raccoglie oltre quattromila proposizioni scritte in simboli con l'enunciato esplicito delle condizioni di validità, la relativa dimostrazione e l'indicazione delle fonti storiche, cui attingere per risalire all'ideatore del teorema. Talvolta, sono pure inseriti paragrafi sulla storia di concetti e teorie fondamentali, passi originali e notizie biografiche e bibliografiche degli autori delle proposizioni richiamate e l'etimologia di oltre cinquecento vocaboli di Logica e di Matematica.

Si tratta di un progetto grandioso, alla cui realizzazione si dedicano in molti: assistenti e allievi, colleghi d'Università e dell'Accademia militare, collaboratori esterni all'area torinese. Fra coloro che aderiscono con entusiasmo fin dal principio, redigendo interi capitoli, ricordiamo Giovanni Vailati (1863-1909) per la parte sulla Logica e le indicazioni storiche, Filiberto Castellano per le operazioni algebriche, Cesare Burali-Forti per l'Aritmetica e la Teoria delle grandezze, Rodolfo Bettazzi (1861-1941) per il capitolo sui limiti, Gino Fano (1871-1952) per la Teoria dei numeri algebrici, Francesco Giudice (1855-1936) per la parte sulle serie e Giulio Vivanti (1859-1949) sulla Teoria degli insiemi. A questi si affiancano, poco dopo, Giovanni Vacca (1872-1953), Giuliano Pagliero (1873-1949), Alessandro Padoa (1868-1937) e Tommaso Boggio (1877-1963). Molti sono anche quelli che collaborano presentando aggiunte, correzioni o modifiche (riportate nelle edizioni successive) come Corrado Ciamberlini, Angelo Ramorino, Mineo Chini e, fra gli stranieri, Louis Couturat, Gustav Eneström e Otto Stolz.

Anche la *Rivista di Matematica* che Peano fonda nel 1891, con finalità didattiche, è uno dei canali per condurre in porto il progetto e fare propaganda all'impresa. Sulle sue pagine trovano posto articoli rivoluzionari, come quello di Georg Cantor sugli insiemi infiniti, studi e discussioni sui fondamenti di alcune teorie, pregevoli note storiche, recensioni di libri per le scuole e di opere all'avanguardia nella ricerca matematica, dibattiti su questioni di Matematiche elementari, ma anche alcune celebri polemiche, come quelle di Peano con G. Veronese e con C. Segre. Frammezzate al resto compaiono aggiunte, note e correzioni per il *Formulario*, che in un primo tempo esce come supplemento alla *Rivista di Matematica* del 1892 e si diffonde poi in

**Figura 1** Peano con la moglie

modo autonomo in cinque edizioni o tomi, i cui fascicoli si susseguono con rapidità impressionante. Fra l'altro, Peano impianta nel 1898 nella villa di Cavoretto, dove suole trascorrere i mesi estivi, una piccola tipografia per stampare correttamente le proposizioni del *Formulario* e acquista uno dei torchi della stamperia fondata dal suo maestro Faà di Bruno. Per meglio realizzare l'opera, Peano si reca per alcuni mesi ad imparare l'arte tipografica in un laboratorio torinese, nei pressi di via Nizza, e assume a Cavoretto tre operai per condurre in porto l'impresa. Si prodiga poi con ogni mezzo per far conoscere l'opera. La presenta ai congressi e la invia a colleghi italiani e stranieri: "*quando il Formulario* – scrive ancora a Klein nel 1894 – *sarà alquanto avanzato, chiunque desideri mettersi al corrente della scienza, su un dato punto già trattato nel Formulario, non avrà che a confrontarlo; ivi troverà tutte le proposizioni note*".

I giudizi emessi dai contemporanei sono contrastanti: lusinghieri in Inghilterra e in America, dove i simboli ideati da Peano sono adottati da più parti, sono invece più critici in Francia e in Italia. Nel 1910 Eliakim Hastings Moore ne propone l'introduzione nell'Analisi matematica, riportando la lista dei segni di Logica della quinta edizione del *Formulario* e Clarence Irving Lewis dell'Università di Berkeley afferma nel 1918 che il "*Formulaire de Mathématiques di Peano, segna una nuova epoca nella storia della logica simbolica. Fino ad allora, la ricerca era stata generalmente portata avanti per l'interesse nella logica esatta e nelle sue possibilità, fino ad arrivare al punto, come sottolinea Schröder, di avere uno strumento elaborato senza sapere cosa farsene. Con Peano e i suoi collaboratori la situazione si rovescia: la logica simbolica è indagata solo come strumento della prova matematica (…). Il risultato immediato di questa diversa visione è una nuova logica, non meno elaborata della vecchia – destinata, di fatto, a diventare molto più elaborata – ma la cui elaborazione è determinata non da considerazioni logiche astratte o dall'eleganza matematica, ma puramente dal criterio delle applicazioni*".

In Francia e in Italia si assiste invece a critiche accese che coinvolgono il *Formulario* nell'ambito della polemica su intuizione e rigore, divampata sulle pagine della *Revue de Metaphysique et de Morale* e sul *Leonardo*. È, questo, un dibattito assai ampio e articolato, che coinvolge matematici e filosofi del calibro di H. Poincaré, B. Russell, A.N. Whitehead, L. Couturat, E. Borel, M. Winter e (sul versante italiano) G. Peano, G. Vacca, G. Vailati, M. Pieri e B. Croce. L'emergere delle antinomie della Teoria degli insiemi e i dubbi sull'utilizzo dell'assioma di scelta – temi che avevano avuto grande risonanza in seguito alla pubblicazione delle celebri *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* di R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue e J. Hadamard – contribuiscono ad attirare l'attenzione sui rapporti fra Logica e Matematica e sull'utilità della prima nella seconda.

Di fronte al proliferare dei paradossi, si muovono dure critiche alla Logica simbolica di Peano, Russell e Hilbert, accusata di ottenebrare il libero dispiegarsi dell'intuizione e della creatività e di non saper salvaguardare le teorie dai circoli viziosi. A nuocere in parte alla ricezione del *Formulario* è l'azione di Couturat che lo presenta con eccessiva enfasi come un'opera destinata a compiere la rifondazione logica di tutta la Matematica, fraintendendo la sua più modesta portata didattica. Il filosofo francese finisce così per suscitare l'ironia caustica di Poincaré che, forte del suo prestigio scientifico e accademico, palesa il suo rifiuto a leggere il *Formulario* e sfida i "logicisti" ad usare le ali del simbolismo per spiccare il volo verso la costruzione di nuove teorie. L'unica risposta di Peano alla polemica apparsa fra il 1905 e il 1907 sulla *Revue* è la nota *Super theorema de Cantor Bernstein*, edita nella primavera del 1906 sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* e sulla *Rivista di Matematica*, corredata da un'importante *Additione*. Essa ci permette di cogliere la modernità delle posizioni "filosofiche" di Peano in merito a un coacervo di questioni, fra cui il ricorso all'intuizione nella dimostrazione del cosiddetto *teorema di Cantor-Bernstein*, i rapporti fra Logica e Matematica, la non-contraddittorietà dei sistemi di assiomi, l'assioma della scelta, finendo poi per affrontare i vari paradossi di C. Burali-Forti, B. Russell, J. Richard e la questione delle definizioni. Recensendo alcuni anni più tardi, nel 1913, i monumentali *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead, Peano riprenderà la metafora di Poincaré, asserendo che l'opera da essi compiuta costituisce la miglior prova del fatto che "*symbolismos da alas ad mente de homo, sed suo uso exige studio et labore*".

Anche se l'esito di questa battaglia culturale non sarà del tutto positivo e gli sviluppi successivi della Logica prenderanno un'altra strada (per opera soprattutto di Bertrand Russell, David Hilbert e Kurt Gödel) questi ultimi riconosceranno pubblicamente il loro debito culturale nei confronti di Peano: Russell scriverà: "*Vi sono al massimo una dozzina di concetti dai quali sono formati tutti i concetti di tutta la matematica pura (geometria compresa). Il professor Peano, il quale è aiutato da una preparatissima scuola di giovani discepoli italiani, ha dimostrato come lo si possa fare; e benché il metodo da lui inventato possa essere sviluppato molto più di quanto egli abbia fatto, la gloria del pioniere spetta a lui*". E Hilbert: "*Come vedete, uno strumento indispensabile per la mia teoria della dimostrazione è l'ideografia, e si deve all'autore classico di questa ideografia, Peano, la più scrupolosa accuratezza e la più estesa elaborazione*".