BOMPIANI
IL PENSIERO OCCIDENTALE

direttore
GIOVANNI REALE

segretari:
Alberto Bellanti
Vincenzo Cicero
Diego Fusaro
Giuseppe Girgenti
Roberto Radice

La traduzione dell'opera è stata realizzata con il contributo del SEPS
SEGRETARIATO EUROPEO PER LE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE

Via Val d'Aposa 7 - 40123 Bologna
seps@almaunibo.it - www.seps.it

RENÉ DESCARTES
OPERE 1637-1649

Testi originali a fronte

A cura di
Giulia Belgioioso

Con la collaborazione di
Igor Agostini, Francesco Marrone,
Massimiliano Savini

BOMPIANI
IL PENSIERO OCCIDENTALE

Curatore
Giulia Belgioioso (GB)

Collaboratori
Igor Agostini (IA), Francesco Marrone (FM), Massimilano Savini (MS)

Consulenti Scientifici
Vincent Aucante (VA), Jean-Robert Armogathe (JRA), Vincent Carraud (VC), Frédéric de Buzon (FdB), Tullio Gregory (TG), Jean-Luc Marion (JLM), Gilles Olivo (GO), André Warusfel (AW)

Traduttori
Igor Agostini (IA), Siegrid Agostini (SA), Agnese Alemanno (AA), Antonella Del Prete (AdP), Stefano Di Bella (SdB), Ettore Lojacono (EL), Erika Luciano (ErL), Guido Mambella (GM), Francesco Marrone (FM), Salvatore Obinu (SO), Anna Lisa Schino (ALS), Valentina Pastorelli (VP), Clara Silvia Roero (CSR), Massimiliano Savini (MS), Nicoletta Sciaccaluga (NS)

Revisore testi francesi
Véronique Thiébot (VT)

Revisori testi latini
Gualtiero Lorini (GL), Siegrid Agostini (SA)

ISBN 978-88-452-6332-3

I edizione Bompiani
Il Pensiero Occidentale settembre 2009

DES TEMPETES, DE LA FOUDRE, ET DE TOUS LES AUTRES FEUX QUI S'ALLUMENT EN L'AIR 312

Discours Septième

Au reste, ce n'est pas seulement quand les nues se dissolvent en vapeurs, qu'elles causent des vents, mais elles peuvent aussi quelquefois s'abaisser si à coup, qu'elles chassent avec grande violence tout l'air qui est sous elles, et en composent un vent très fort, mais peu durable, dont l'imitation se peut voir en étendant un voile un peu haut en l'air, puis de là le laissant descendre tout plat vers la terre. Les fortes pluies sont presque toujours précédées par un tel vent, qui agit manifestement de haut en bas, et dont la froideur montre assez qu'il vient des nues, où l'air est communément plus froid qu'autour de nous. Et c'est ce vent qui est cause que, lorsque les hirondelles volent fort bas, elles nous avertissent de la pluie; car il fait descendre certains moucherons dont elles vivent, qui ont coutume de prendre l'essor, et de s'égayer au haut de l'air, quand il fait beau. C'est lui aussi qui quelquefois, lors même que, la nue étant fort petite ou ne s'abaissant que fort peu, il est si faible qu'on ne le sent quasi pas en l'air libre, s'entonnant dans les tuyaux des cheminées, fait jouer les cendres et les fétus qui se trouvent au coin du feu, et y excite | comme de petits tourbillons assez admi- 313
rables pour ceux qui en ignorent la cause, et qui sont ordinairement suivis de quelque pluie. Mais, si la nue qui descend est fort pesante et fort étendue (comme elle peut être plus aisément sur les grandes mers qu'aux autres lieux, à cause que, les vapeurs y étant fort également dispersées, sitôt qu'il s'y forme la moindre nue en quelque endroit, elle s'étend incontinent en tous les autres circonvoisins), cela cause infailliblement une tempête; laquelle est d'autant plus forte, que la nue est plus grande et plus pesante; et dure d'autant plus longtemps, que la nue descend de plus haut. Et c'est ainsi que je m'imagine que se font ces travades, que les mariniers craignent tant en leurs grands voyages, particulièrement un peu au-delà du Cap de Bonne Espérance, où les vapeurs qui s'élèvent de la mer Ethiopique, qui est fort large et fort échauffée par le soleil, peuvent aisément causer un vent

[104] A questo discorso, a proposito della spiegazione del tuono che contiene, si fa riferimento nelle lettere *A Mersenne*, marzo 1636, B 83, p. 329 (AT I 340, ll. 3-10) e *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, p. 733 (AT II 200, ll. 13-21).

[105] Su questo vento, cfr. *A Mersenne*, 20 ottobre 1642, B 373, p. 1675 (AT III 588, l. 20 - 589, l. 2).

[106] Traduciamo qui il termine *travade* (dal portoghese *travados*) con 'tempesta'. Si trat-

312

Le tempeste, il fulmine e tutti gli altri fuochi che si accendono nell'aria[104]

Discorso settimo

D'altro canto, le nubi non causano dei venti soltanto quando si dissolvono in vapori, ma talvolta possono anche abbassarsi così d'improvviso da spinger via con grande violenza tutta l'aria sottostante e con essa formare un vento molto forte ma poco durevole. Qualcosa di analogo si può vedere stendendo un velo un po' in alto nell'aria e lasciandolo discendere di là a piombo verso terra. Le piogge forti sono quasi sempre precedute da un vento di questo genere che agisce manifestamente dall'alto verso il basso e la cui freddezza mostra a sufficienza che proviene dalle nubi dove l'aria è in genere più fredda che intorno a noi. Ed è questo vento che fa sì che le rondini, volando molto basse, ci avvertano della pioggia: infatti, esso fa scendere certi moscerini di cui esse vivono, i quali sono soliti prendere il volo e trastullarsi negli strati alti dell'aria quando è bel tempo. E questo stesso vento – anche quando, la nube essendo molto piccola o abbassandosi di poco, è così debole che nell'aria libera quasi non lo si sente – si introduce talvolta nei tubi dei camini, fa muovere le ceneri e i fuscelli che si trovano accanto al camino e vi eccita |
313 come dei piccoli turbini, che meravigliano abbastanza chi ne ignora la causa e sono comunemente seguiti da qualche pioggia[105]. Ma se la nube che discende è molto pesante e molto estesa (come può essere più facilmente sui grandi mari che negli altri luoghi, poiché, dal momento che i vapori vi sono dispersi molto uniformemente, non appena in qualche punto si forma la più piccola nube, essa si estende subito in tutti gli altri punti circostanti), ciò provoca immancabilmente una tempesta[106] che è tanto più forte quanto più la nube è grande e pesante e che dura tanto più a lungo quanto più alto è il punto da cui essa discende. Ed è così che immagino che abbiano luogo quei cicloni tanto temuti dai marinai nei loro grandi viaggi, particolarmente un po' oltre il Capo di Buona Speranza, dove i vapori che si sollevano dal mare etiopico, che è molto esteso e molto riscaldato dal Sole, possono facilmente causare un vento

ta però di un termine tecnico, difficilmente traducibile. Riportiamo la definizione che se ne trova in Furetière (*sub voce)*: «Termine di marina riferito a certi venti incostanti che in un'ora percorrono i 32 punti della bussola e sono accompagnati da lampi e tuoni, e da un diluvio tale da corrompere in un istante gli abiti di coloro su cui cade; e dalla sua corruzione si formano insetti molto fastidiosi».

d'abas, qui, arrêtant le cours naturel de celles qui viennent de la mer des Indes, les assemble en une nue, laquelle, procédant de l'inégalité qui est entre ces deux grandes mers et cette terre, doit devenir incontinent beaucoup plus grande que celles qui se forment en ces quartiers, où elles dépendent de plusieurs moindres inégalités, qui sont entre nos plaines et nos lacs et nos montagnes. Et parce qu'il ne se voit quasi jamais d'autres nues en ces lieux-là, sitôt que les mariniers y en aperçoivent quelqu'une qui commence à se former, bien qu'elle paraisse quelquefois si petite que les Flamands l'ont comparée à l'œil d'un bœuf, duquel ils lui ont donné le nom, et que le | reste de l'air semble fort calme et fort serein, ils se hâtent d'abattre leurs 314
voiles, et se préparent à recevoir une tempête, qui ne manque pas de suivre tout aussitôt. Et même je juge qu'elle doit être d'autant plus grande, que cette nue a paru au commencement plus petite; car, ne pouvant devenir assez épaisse pour obscurcir l'air et être visible, sans devenir aussi assez grande, elle ne peut paraître ainsi petite qu'à cause de son extrême distance; et vous savez que, plus un corps pesant descend de haut, plus sa chute est impétueuse. Ainsi cette nue, étant fort haute, et devenant subitement fort grande et fort pesante, descend tout entière, en chassant avec grande violence tout l'air qui est sous elle, et causant par ce moyen le vent d'une tempête. Même il est à remarquer que les vapeurs mêlées parmi cet air sont dilatées par son agitation, et qu'il en sort aussi pour lors plusieurs autres de la mer, à cause de l'agitation de ses vagues, ce qui augmente beaucoup la force du vent, et, retardant la descente de la nue, fait durer l'orage d'autant plus longtemps. Puis aussi, qu'il y a d'ordinaire des exhalaisons mêlées parmi ces vapeurs, qui ne pouvant être chassées si loin qu'elles par la nue, à cause que leurs parties sont moins solides et ont des figures plus irrégulières, en sont séparées par l'agitation de l'air, en même façon que, comme il a été dit ci-dessus, en battant la crème on sépare le beurre du petit lait; et que, par ce moyen, elles s'assemblent par-ci par-là en divers tas, qui, flottant toujours le plus haut qu'il se peut contre la nue, viennent enfin s'attacher aux cordes et aux mâts des navires, lorsqu'elle | achève de descendre. 315
Et là, étant embrasés par cette violente agitation, ils composent ces feux nommés de Saint-Elme, qui consolent les matelots, et leur font espérer le beau temps. Il est vrai que souvent ces tempêtes sont en leur plus grande force vers la fin, et qu'il peut y avoir plusieurs nues l'une sur l'autre, sous chacune desquelles il se trouve de tels feux; ce qui a peut-être été la cause pourquoi, les anciens n'en voyant qu'un, qu'ils nommaient l'astre

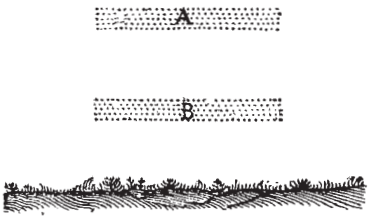
[107] Sulla questione della caduta dei gravi e della pesantezza, cfr. *Mondo*, XI, *B Op* II 299-309 (AT XI 72, l. 25 - 80, l. 15) e nota n. 168.
[108] Cfr. *Meteore*, II, *B Op* I 337 (AT VI 248, ll. 8-11).

di burrasca che, fermando il corso naturale di quelli che vengono dal mare delle Indie, li riunisce in una nube che, generandosi dalla disuguaglianza tra questi due grandi mari e questa terra, deve subito diventare molto più grande di quelle che si formano in quelle regioni, ove esse dipendono da parecchie minime disuguaglianze che sussistono tra le nostre pianure e i nostri laghi e le nostre montagne. E poiché in questi luoghi non si vedono quasi mai altre nubi, non appena i marinai ve ne scorgono qualcuna che comincia a formarsi, benché essa appaia talvolta così piccola che i fiamminghi l'hanno paragonata all'occhio di un bue
314 (del quale le hanno attribuito il nome) e benché il | resto dell'aria sembri molto calmo e molto sereno, essi si affrettano ad ammainare le loro vele e si preparano ad essere colpiti da una tempesta che immancabilmente si presenta subito dopo. E giudico inoltre che questa tempesta deve essere tanto più grande quanto più piccola questa nube è apparsa all'inizio. Infatti, non potendo diventare abbastanza densa per oscurare l'aria, e non potendo esser visibile senza diventare anche abbastanza grande, essa può apparire così piccola solo a causa della sua estrema distanza; e voi sapete che, più alto è il punto da cui scende corpo pesante, più la sua caduta è impetuosa[107]. Così, essendo molto alta e divenendo improvvisamente molto grande e molto pesante, questa nube discende tutta intera spingendo con grande violenza tutta l'aria sottostante e causando in tal modo il vento di una tempesta. Si deve anche notare che i vapori mescolati in quest'aria sono dilatati dalla sua agitazione e che allora dal mare ne escono parecchi altri a causa dell'agitazione delle sue onde; ciò che aumenta molto la forza del vento e, rallentando la discesa della nube, fa durare la burrasca tanto più a lungo. Si deve poi anche notare che in genere, mescolate a questi vapori, ci sono delle esalazioni che, non potendo essere spinte dalla nube alla loro stessa distanza (poiché le loro parti sono meno solide e hanno figure più irregolari), vengono separate da essi dall'agitazione dell'aria nella stessa maniera in cui, come è stato detto sopra[108], battendo la crema si separa il burro dal siero: in questo modo queste esalazioni si uniscono di qua e di là in diversi mucchi che, galleggiando sempre il più possibile in alto vicino alla nube, si attaccano
315 infine alle corde e agli alberi delle navi quando essa | finisce di scendere. E là, infiammati da questa violenta agitazione, questi mucchi formano quei fuochi detti fuochi di Sant'Elmo, che consolano i marinai e danno loro la speranza che torni il bel tempo[109]. È vero che spesso queste tempeste sono al massimo della forza verso la fine e che possono esserci parecchie nubi l'una sull'altra sotto ciascuna delle quali si trovano fuochi siffatti. Ciò costituisce forse il motivo per cui, quando ne vedevano

[109] Fuochi di Sant'Elmo: si tratta dei fuochi visibili durante le tempeste sulle estremità degli oggetti appuntiti e che spesso, in mare, apparivano in cima alle alberature delle navi.

d'Hélène, ils l'estimaient de mauvais augure, comme s'ils eussent encore attendu alors le plus fort de la tempête; au lieu que, lorsqu'ils en voyaient deux, qu'ils nommaient Castor et Pollux, ils les prenaient pour un bon présage; car c'était ordinairement le plus qu'ils en vissent, excepté peut-être lorsque l'orage était extraordinairement grand, qu'ils en voyaient trois, et les estimaient aussi, à cause de cela, de mauvais augure. Toutefois, j'ai ouï dire à nos mariniers qu'ils en voient quelquefois jusques au nombre de quatre ou de cinq, peut-être à cause que leurs vaisseaux sont plus grands, et ont plus de mâts que ceux des anciens, ou qu'ils voyagent en des lieux où les exhalaisons sont plus fréquentes. Car enfin je ne puis rien dire que par conjecture de ce qui se fait dans les grandes mers, que je n'ai jamais vues et dont je n'ai que des relations fort imparfaites.

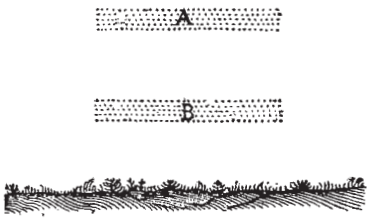
Mais pour les orages qui sont accompagnés de tonnerre, d'éclairs, de tourbillons et de foudre, desquels j'ai pu voir quelques exemples sur terre, je ne doute point qu'ils ne soient causés de ce qu'y ayant plusieurs nues l'une sur l'autre, il arrive quelquefois | que les plus hautes descendent fort 316
à coup sur les plus basses. Comme, si, les deux nues A et B n'étant composées que de neige fort rare et fort étendue, il se trouve un air plus chaud autour de la supérieure A, qu'autour de l'inférieure B, il est évident que la chaleur de cet air la peut condenser et appesantir peu à peu, en telle sorte que les plus hautes de ses parties, commençant les premières à descendre, en abattront ou entraîneront avec soi quantité d'autres, qui tomberont aussitôt toutes ensemble avec un grand bruit sur l'inférieure. En même façon que je me souviens d'avoir vu autrefois dans les Alpes, environ le mois de Mai, que les neiges étant échauffées et appesanties par le soleil, la moindre émotion d'air était suffisante pour en faire tomber subitement de gros tas, qu'on nommait, ce me semble, des avalanches, et qui, retentissant dans les vallées, imitaient assez bien le bruit du tonnerre. En suite de quoi, on peut entendre pourquoi il tonne plus rarement en ces quartiers l'hiver que l'été; car il ne parvient pas



[110] La tradizione qui richiamata figura anche in Plinio, *Naturalis historia*, 10 voll., London/Cambridge, W. Heinemann/Harvard University Press, 1958-1971, II, 37, 101. Anche i *Conimbricenses*, nel commento ai *Meteorologica* di Aristotele, danno un resoconto di tale tradizione, presentandola in maniera molto simile a come farà poi Descartes: cfr. al proposito i testi citati in E. Gilson, *Index*, cit., pp. 114-116, n. 196.

uno solo, che chiamavano astro di Elena, gli antichi lo stimavano di cattivo auspicio, come se allora dovessero ancora attendersi la fase più forte della tempesta. Invece, quando ne vedevano due, che chiamavano Castore e Polluce[110], li prendevano per un buon presagio, poiché era quello, solitamente, il massimo numero di fuochi che potessero vedere, ad eccezione forse delle occasioni in cui, essendo la burrasca di dimensioni straordinariamente grandi, ne vedevano tre e perciò li stimavano di cattivo auspicio. Tuttavia, ho sentito i nostri marinai che dicevano di averne visti fino a quattro o cinque, forse perché le loro navi sono più grandi ed hanno più alberi di quelle degli antichi, o perché essi viaggiano in luoghi in cui le esalazioni sono più frequenti. In definitiva, però, di ciò che accade nei grandi mari, che non ho mai visto e di cui non ho che relazioni molto imperfette, non posso dir nulla se non per congettura.

Ma per quanto riguarda le burrasche che sono accompagnate da tuoni, lampi, turbini e fulmini, delle quali ho potuto vedere degli esempi sulla terra, non ho dubbi che siano causate dal fatto che, essendoci
316 parecchie nubi l'una sull'altra, talvolta accade | che le più alte discendano molto improvvisamente su quelle più basse[111]. Per esempio, date le due nubi A e B, composte soltanto di neve molto rada e molto estesa, se accade che l'aria che è intorno alla nube superiore A è più calda di quella che è intorno a quella inferiore B, è evidente che il calore di questa aria può condensare la nube e appesantirla a poco a poco[112], in modo tale che le sue parti più alte, cominciando a discendere per prime, ne faranno cadere o ne trascineranno con sé molte altre, che subito cadranno anch'esse tutte assieme e con gran rumore sulla nube inferiore. Una cosa analoga ricordo di aver visto in un'altra occasione, più o meno nel mese di maggio[113], sulle Alpi: dal momento che le nevi erano riscaldate e appesantite dal Sole, il pur minimo sommovimento d'aria bastava a farne cadere improvvisamente grandi mucchi che venivano chiamati, mi sembra, valanghe, e che, echeggiando nelle valli, imitavano abbastanza bene il rumore del tuono. Di conseguenza, si può intendere la ragione per cui in quelle regioni tuoni più raramente d'inverno che d'estate: allora, infatti, alle nubi più alte non



[111] Cfr. *Principi della filosofia*, IV, artt. LXXXVII e LXXXIX, *B Op* I 2091-2093 (AT VIII-1 253, ll. 11-26; 254, ll. 17-19).

[112] Cfr. *Meteore*, VI, *B Op* I 393 (AT VI 292, ll. 9-15).

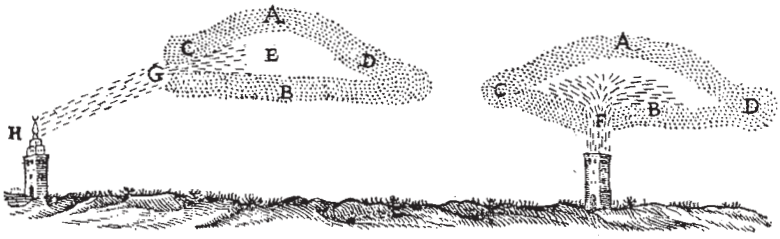
[113] Secondo Baillet, Descartes avrebbe fatto questa osservazione rientrando dall'Italia nel 1625: cfr. *Baillet* I 127.

alors si aisément assez de chaleur jusques aux plus hautes nues, pour les dissoudre. Et pourquoi, lorsque pendant les grandes chaleurs, après un vent Septentrional qui dure fort peu, on sent derechef une chaleur moite et étouffante, c'est signe qu'il suivra bientôt du tonnerre: car cela témoigne que ce vent Septentrional, ayant passé contre la terre, en a chassé la chaleur vers | l'endroit de l'air où se forment les plus hautes nues, et qu'en 317
étant, après, chassé lui-même, vers celui où se forment les plus basses, par la dilatation de l'air inférieur que causent les vapeurs chaudes qu'il contient, non seulement les plus hautes en se condensant doivent descendre, mais aussi les plus basses, demeurant fort rares, et même étant comme soulevées et repoussées par cette dilatation de l'air inférieur, leur doivent résister en telle sorte, que souvent elles peuvent empêcher qu'il n'en tombe aucune partie jusques à terre. Et notez que le bruit, qui se fait ainsi au-dessus de nous, se doit mieux entendre, à cause de la résonance de l'air, et être plus grand, à raison de la neige qui tombe, que n'est celui des avalanches. Puis notez aussi que, de cela seul que les parties des nues supérieures tombent toutes ensemble, ou l'une après l'autre, ou plus vite, ou plus lentement, et que les inférieures sont plus ou moins grandes et épaisses, et résistent plus ou moins fort, tous les différents bruits du tonnerre peuvent aisément être causés. Pour les différences des éclairs, des tourbillons et de la foudre, elles ne dépendent que de la nature des exhalaisons qui se trouvent en l'espace qui est entre deux nues, et de la façon que la supérieure tombe sur l'autre. Car, s'il a précédé de grandes chaleurs et sécheresses, en sorte que cet espace contienne quantité d'exhalaisons fort subtiles et fort disposées à s'enflammer, la nue supérieure ne peut quasi être si petite, ni descendre si lentement que, chassant l'air qui est entre elle et l'inférieure, elle n'en fasse sortir un éclair, c'est-à-dire une flamme légère qui se dissipe à | l'heure même. En sorte qu'on peut voir 318
alors de tels éclairs sans ouïr aucunement le bruit du tonnerre; et même aussi, quelquefois, sans que les nues soient assez épaisses pour être visibles. Comme, au contraire, s'il n'y a point en l'air d'exhalaisons qui soient propres à s'enflammer, on peut ouïr le bruit du tonnerre sans qu'il paraisse, pour cela, aucun éclair. Et lorsque la plus haute nue ne tombe que par pièces qui s'entresuivent, elle ne cause guère que des éclairs et du tonnerre; mais lorsqu'elle tombe tout entière et assez vite, elle peut causer, avec cela, des tourbillons et de la foudre. Car il faut remarquer que ses extrémités, comme C et D, se doivent abaisser un peu plus vite que le milieu, d'autant que l'air qui est dessous, ayant moins de chemin à faire pour en sortir, leur cède plus aisément, et ainsi que, venant à toucher la nue inférieure

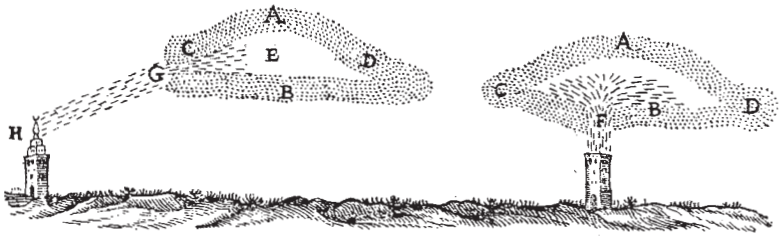
[114] Cfr., al proposito, l'obiezione di More nella lettera *More a Descartes*, 21 ottobre 1649, B 715, p. 2781 (AT V 442).

giunge così facilmente una quantità di calore sufficiente a dissolverle. E il fatto che, durante il grande caldo, dopo un vento settentrionale che dura molto poco, si sente di nuovo un calore umidiccio e soffocante, è segno che presto seguirà un tuono: ciò testimonia infatti che questo vento settentrionale, essendo passato a livello della terra, ne ha cacciato
317 via il calore verso | il punto dell'aria dove si formano le nubi più alte, e che, essendo poi stato cacciato via anch'esso dalla dilatazione dell'aria inferiore, causata dai vapori caldi che contiene, verso quel punto dell'aria dove si formano le nubi più basse, non soltanto le nubi più alte, condensandosi, devono discendere, ma anche quelle più basse, rimanendo molto rade ed essendo inoltre come sollevate e spinte di nuovo da questa dilatazione dell'aria inferiore, devono resistere loro in modo tale che spesso possono impedire che ne cada qualche parte fino a terra[114]. E notate che, rispetto a quello delle valanghe, il rumore che in tal modo si produce sopra di noi deve essere sentito meglio, a causa della risonanza dell'aria, ed essere più grande in ragione della quantità di neve che cade[115]. Poi, notate anche che tutti i differenti rumori del tuono possono facilmente essere causati dal solo fatto che le parti delle nubi superiori cadono tutte assieme, o l'una dopo l'altra, o più velocemente, o più lentamente, e che quelle inferiori sono più o meno grandi e dense e resistono più o meno forte. Per quanto riguarda le differenze tra lampi, vortici e fulmini, esse dipendono solo dalla natura delle esalazioni che si trovano nello spazio che c'è tra due nubi e dalla maniera in cui quella superiore cade sull'altra. Infatti, se prima vi sono stati grande caldo e siccità, in modo tale che questo spazio contenga una quantità di esalazioni molto sottili e molto disposte a infiammarsi, la nube superiore, cacciando l'aria che c'è tra essa e quella inferiore, può difficilmente essere così piccola o discendere così lentamente da non far uscire un lampo, cioè
318 una fiamma leggera che si dissolve | nello stesso istante. Così, è possibile vedere lampi del genere senza minimamente udire il rumore del tuono, e, talvolta, persino senza che le nubi siano abbastanza dense da essere visibili. Allo stesso modo, al contrario, se nell'aria non ci sono esalazioni atte ad infiammarsi, si può udire il rumore del tuono senza che per ciò appaia alcun lampo. E quando la nube più alta cade solo a pezzi che si susseguono, essa causa soltanto lampi e tuoni, mentre, quando cade tutta intera e abbastanza velocemente, può anche causare vortici e fulmini. Infatti, bisogna notare che le sue estremità, ad esempio C e D, devono abbassarsi un po' più velocemente del centro, poiché l'aria sottostante, dovendo percorrere un cammino più breve per uscirne, cede loro più facilmente e così, venendo a toccare la nube inferiore prima che

[115] Cfr., al proposito, l'obiezione di More nella lettera *More a Descartes*, 21 ottobre 1649, B 715, p. 2781 (AT V 442).



plus tôt que ne fait le milieu, il s'enferme beaucoup d'air entre deux, comme on voit ici vers E; puis, cet air étant pressé et chassé avec grande force par ce milieu de la nue supérieure qui continue encore à descendre, il doit nécessairement rompre l'inférieure pour en sortir, comme on voit vers F; ou entrouvrir quelqu'une de ses extrémités, comme on voit vers G. Et lorsqu'il a rompu ainsi cette nue, il | descend avec grande force vers la 319
terre, puis, de là, remonte en tournoyant, à cause qu'il trouve de la résistance de tous côtés, qui l'empêche de continuer son mouvement en ligne droite aussi vite que son agitation le requiert. Et ainsi il compose un tourbillon, qui peut n'être point accompagné de foudre ni d'éclairs, s'il n'y a point en cet air d'exhalaisons qui soient propres à s'enflammer; mais, lorsqu'il y en a, elles s'assemblent toutes en un tas, et étant chassées fort impétueusement avec cet air vers la terre, elles composent la foudre. Et cette foudre peut brûler les habits et raser le poil sans nuire au corps, si ces exhalaisons, qui ont ordinairement l'odeur du souffre, ne sont que grasses et huileuses, en sorte qu'elles composent une flamme légère qui ne s'attache qu'aux corps aisés à brûler. Comme, au contraire, elle peut rompre les os sans endommager les chairs, ou fondre l'épée sans gâter le fourreau, si ces exhalaisons, étant fort subtiles et pénétrantes, ne participent que de la nature des sels volatils ou des eaux-fortes, au moyen de quoi, ne faisant aucun effort contre les corps qui leur cèdent, elles brisent et dissolvent tous ceux qui leur font beaucoup de résistance: ainsi qu'on voit l'eau-forte dissoudre les métaux les plus durs, et n'agir point contre la cire. Enfin, la foudre se peut quelquefois convertir en une pierre fort dure, qui rompt et fracasse tout ce qu'elle rencontre, si, parmi ces exhalaisons fort pénétrantes, il y en a quantité de ces autres qui sont grasses et ensoufrées: principalement s'il y en a aussi de plus grossières, semblables à cette terre qu'on trouve au fond de l'eau de pluie, lorsqu'on la | laisse rasseoir en quelque 320
vase: ainsi qu'on peut voir, par expérience, qu'ayant mêlé certaines portions de cette terre, de salpêtre et de soufre, si on met le feu en cette com-



a farlo sia il centro, tra esse resta rinchiusa molta aria, come si vede qui verso E. Poi, dal momento che quest'aria è compressa e cacciata con grande forza da questo centro della nube superiore che continua ancora a discendere, essa deve necessariamente rompere quella inferiore per uscirne, come si vede verso F, o aprire in parte una delle sue estremità, come si vede verso G. E quando ha rotto in tal modo questa nube, essa |
319 scende con grande forza verso terra e poi di là risale ruotando, poiché incontra da ogni lato una resistenza che le impedisce di continuare il suo movimento in linea retta così velocemente come richiede la sua agitazione. In tal modo, se in questa aria non ci sono esalazioni atte ad infiammarsi, essa compone un vortice che può non essere accompagnato da fulmini e lampi; mentre, se ce ne sono, esse si raccolgono tutte in un mucchio e, venendo cacciate molto impetuosamente con questa aria verso la terra, compongono il fulmine. E questo fulmine può bruciare gli abiti e radere la peluria senza nuocere al corpo se queste esalazioni, che generalmente hanno l'odore dello zolfo, sono soltanto grasse e oleose, tali da comporre una fiamma leggera che si attacca soltanto ai corpi facili da bruciare. Al contrario, esso può anche rompere le ossa senza danneggiare le carni, o fondere la spada senza rovinare il fodero, se queste esalazioni, essendo molto sottili e penetranti, partecipano solo della natura dei sali volatili e delle acqueforti: in tal caso, non facendo minimamente forza contro i corpi che cedono, esse spezzano o dissolvono tutti quelli che oppongono loro molta resistenza, come quando si vede che l'acquaforte dissolve i metalli più duri[116] e non agisce affatto contro la cera. Infine, il fulmine può talvolta convertirsi in una pietra molto dura che rompe e fracassa tutto ciò che incontra, se, tra queste esalazioni molto penetranti, ve ne sono molte di quelle altre grasse e solforose, e principalmente se ce ne sono anche di più grossolane, simili a quella
320 terra che si trova al fondo dell'acqua piovana quando la | si lascia riposare in qualche vaso. Ciò può essere constatato per esperienza, dopo aver mischiato certe porzioni di questa terra con del salnitro o dello zolfo: se si mette il fuoco in questo composto, subito se ne forma una

[116] Cfr. *Uomo*, I, art. III, *B Op* II 365 (AT XI 121, ll. 10-15).

position, il s'en forme subitement une pierre. Que si la nue s'ouvre par le côté, comme vers G, la foudre, étant élancée de travers, rencontre plutôt les pointes des tours ou des rochers que les lieux bas, comme on voit vers H. Mais, lors même que la nue se rompt par le dessous, il y a raison pourquoi la foudre tombe plutôt sur les lieux hauts et éminents que sur les autres: car, si, par exemple, la nue B n'est point d'ailleurs plus disposée à se rompre en un endroit qu'en un autre, il est certain qu'elle se devra rompre en celui qui est marqué F, à cause de la résistance du clocher qui est au-dessous. Il y a aussi raison pourquoi chaque coup de tonnerre est d'ordinaire suivi d'une ondée de pluie, et pourquoi, lorsque cette pluie vient fort abondante, il ne tonne guère plus davantage: car, si la force, dont la nue supérieure ébranle l'inférieure en tombant dessus, est assez grande pour la faire toute descendre, il est évident que le tonnerre doit cesser; et si elle est moindre, elle ne laisse pas d'en pouvoir souvent faire sortir plusieurs flocons de neige, qui, se fondant en l'air, font de la pluie. Enfin, ce n'est pas sans raison qu'on tient que le grand bruit, comme des cloches ou des canons, peut diminuer l'effet de la foudre; car il aide à dissiper et faire tomber la nue inférieure, en ébranlant la neige dont elle est composée. Ainsi que savent assez ceux qui ont coutume de voyager dans les vallées où les avalanches sont à craindre; car ils s'abstiennent même de | parler et de 321
tousser en y passant, de peur que le bruit de leur voix n'émeuve la neige.

Mais, comme nous avons déjà remarqué, qu'il éclaire quelquefois sans qu'il tonne, ainsi, aux endroits de l'air où il se rencontre beaucoup d'exhalaisons et peu de vapeurs, il se peut former des nues si peu épaisses et si légères que, tombant d'assez haut l'une sur l'autre, elles ne font ouïr aucun tonnerre, ni n'excitent en l'air aucun orage, nonobstant qu'elles enveloppent et joignent ensemble plusieurs exhalaisons, dont elles composent non seulement de ces moindres flammes qu'on dirait être des étoiles qui tombent du ciel, ou d'autres qui le traversent, mais aussi des boules de feu assez grosses, et qui, parvenant jusques à nous, sont comme des diminutifs de la foudre. Même, d'autant qu'il y a des exhalaisons de plusieurs diverses natures, je ne juge pas qu'il soit impossible que les nues, en les pressant, n'en composent quelquefois une matière qui, selon la couleur et la consistance qu'elle aura, semble du lait, ou du sang, ou de la chair; ou bien qui, en se brûlant, devienne telle qu'on la prenne pour du fer, ou des pierres; ou enfin, qui, en se corrompant, engendre quelques petits animaux en peu de temps: ainsi qu'on lit souvent, entre les prodiges, qu'il a plu du fer, ou du sang, ou des sauterelles, ou choses semblables. De plus, sans qu'il y ait en l'air aucune nue, les exhalaisons peuvent être entassées et embrasées par

[117] Cfr., al proposito, *Principi della filosofia*, IV, art. LXXI, *B Op* I 2081 (AT VIII-1 246, ll. 9-22).
[118] Cfr. *Meteore*, VII, *B Op* I 423 (AT VI 318, ll. 1-4).

pietra[117]. Se poi la nube si apre lateralmente, per esempio verso G, allora il fulmine, scagliato di traverso, incontra le punte delle torri e delle rocce piuttosto che i luoghi bassi, come si vede verso H. Ma anche quando la nube si rompe nella parte inferiore, c'è un motivo se il fulmine cade sui luoghi alti e eminenti piuttosto che sugli altri: infatti, se per esempio la nube B non è disposta da altro a rompersi in un punto piuttosto che in un altro, è certo che essa dovrà rompersi in quello indicato con F a causa della resistenza del campanile sottostante. C'è anche un motivo se ogni colpo di tuono è generalmente seguito da una ondata di pioggia, e se, quando questa pioggia è molto abbondante, non tuona molto di più: infatti, se la forza con cui la nube superiore scuote quella inferiore cadendovi sopra è abbastanza grande per farla discendere del tutto, è evidente che il tuono deve cessare; se invece è più piccola, essa non manca di poterne fare uscire spesso parecchi fiocchi di neve che, sciogliendosi nell'aria, generano la pioggia. Infine, non è senza motivo che si ritiene che i grandi rumori, come quelli delle campane o dei cannoni, possono diminuire l'effetto del fulmine, poiché contribuiscono a dissolvere e a far cadere la nube inferiore scuotendo la neve di cui essa si compone, come sanno a sufficienza coloro che sono soliti viaggiare nelle valli in cui si devono temere le valanghe: essi, passandovi, si astengono infatti persino
321 dal | parlare e dal tossire per paura che il rumore della loro voce smuova la neve.

Ma così come abbiamo già osservato che talvolta lampeggia senza tuonare[118], allo stesso modo, nei luoghi dell'aria in cui si incontrano molte esalazioni e pochi vapori, possono formarsi nubi così poco dense e così leggere che, cadendo da una sufficiente altezza l'una sull'altra, non fanno udire alcun tuono, né eccitano nell'aria alcuna burrasca, nonostante avvolgano e congiungano assieme parecchie esalazioni con cui compongono non soltanto alcune di quelle fiamme più piccole che si direbbe siano delle stelle che cadono dal cielo o che lo attraversano, ma anche delle sfere di fuoco abbastanza grosse che, giungendo fino a noi, sono come piccoli fulmini[119]. Inoltre, dato che vi sono esalazioni di differente natura, non giudico impossibile che le nubi, comprimendole, ne compongano talvolta una materia che, a seconda del colore e della consistenza, sembra latte o sangue o carne; o che, bruciando, diventa tale da poter esser presa per ferro o pietre; o, infine, che, corrompendosi, genera alcuni piccoli animali in poco tempo, così come si legge spesso, tra i prodigi, che sono piovuti ferro, sangue, cavallette o cose simili. Inoltre, senza che in aria vi sia alcuna nube, le esalazioni possono essere ammucchiate e incendiate dal solo soffio dei venti; e ciò principalmente

[119] A questa spiegazione della generazione dei fulmini si rinvia in *Principi della filosofia*, IV, art. LXXXVII, *B Op* I 2093 (AT VIII-1 253, ll. 24-26).

le seul souffle des vents, principalement lorsqu'il y en a deux ou plusieurs contraires qui se rencontrent. Et enfin, sans vents et sans nues, par cela seul qu'une exhalaison | subtile et pénétrante, qui tient de la nature des sels, 322
s'insinue dans les pores d'une autre, qui est grasse et ensoufrée, il se peut former des flammes légères tant au haut qu'au bas de l'air: comme on y voit au haut ces étoiles qui le traversent, et au bas, tant ces ardents ou feux follets qui s'y jouent, que ces autres qui s'arrêtent à certains corps, comme aux cheveux des enfants, ou au crin des chevaux, ou aux pointes des piques qu'on a frottées d'huile pour les nettoyer, ou à choses semblables. Car il est certain que non seulement une violente agitation, mais souvent aussi le seul mélange de deux divers corps est suffisant pour les embraser: comme on voit en versant de l'eau sur de la chaux, ou renfermant du foin avant qu'il soit sec, ou en une infinité d'autres exemples qui se rencontrent tous les jours en la Chimie. Mais tous ces feux ont fort peu de force à comparaison de la foudre; dont la raison est qu'ils ne sont composés que des plus molles et plus gluantes parties des huiles, nonobstant que les plus vives et plus pénétrantes des sels concourent ordinairement aussi à les produire. Car celles-ci ne s'arrêtent pas pour cela parmi les autres, mais s'écartent promptement en l'air libre, après qu'elles les ont embrasées; au lieu que la foudre est principalement composée de ces plus vives et pénétrantes, qui, étant fort violemment pressées et chassées par les nues, emportent les autres avec soi jusqu'à terre. Et ceux qui savent combien le feu du salpêtre et du soufre mêlés ensemble a de force et de vitesse, au lieu que la partie grasse du soufre, étant séparée de ses esprits, en aurait fort peu, ne trouveront en ceci | rien de douteux. Pour la durée des feux qui s'arrêtent ou vol- 323
tigent autour de nous, elle peut être plus ou moins longue, selon que leur flamme est plus ou moins lente, et leur matière plus ou moins épaisse et serrée. Mais pour celle des feux qui ne se voient qu'au haut de l'air, elle ne saurait être que fort courte, à cause que, si leur matière n'était fort rare, leur pesanteur les ferait descendre. Et je trouve que les Philosophes ont eu raison de les comparer à cette flamme qu'on voit courir tout du long de la fumée qui sort d'un flambeau qu'on vient d'éteindre, lorsqu'étant approchée d'un autre flambeau, elle s'allume. Mais je m'étonne fort qu'après cela, ils aient pu s'imaginer que les Comètes et les colonnes ou chevrons de

[120] Ai fuochi fatui, oltre che *B Op* I 371 (AT VI 275, ll. 13-17), si fa riferimento in *Principi della filosofia*, IV, art. LXXXVIII, *B Op* I 2093 (AT VIII-1 253, l. 27 - 254, l. 16).

[121] Si tratta del caso dei 'fuochi lambenti', ampiamente citato sin dall'antichità (cfr. Plinio, *Naturalis historia*, cit., II, 37, 101; Seneca, *Naturales quaestiones*, in *Opera quae supersunt*, ed. E. Hermes et alii, 3 voll. (et suppl.), Lipsiae, in aedibus B.G. Teubneri, 1902-1913, I, 1, 14).

[122] Cfr. *Principi della filosofia*, IV, art. LXXXVIII, *B Op* I 2093 (AT VIII-1 253, l. 27 - 254, l. 16).

quando ci sono due o più venti contrari che si incontrano. Infine, poi,
322 senza venti e senza nubi, per il solo fatto che un'esalazione | sottile e penetrante, che partecipa della natura dei sali, si insinua nei pori di un'altra, che è grassa e solforosa, si possono formare delle fiamme leggere tanto negli strati alti dell'aria che in quelli bassi: così si vedono negli strati alti dell'aria quelle stelle che la attraversano e, negli strati bassi, tanto quelle fiammelle o fuochi fatui[120] che vi si muovono, quanto quegli altri fuochi che si attaccano a certi corpi, ad esempio ai capelli dei bambini, o ai crini dei cavalli, o alle punte delle picche che, per esser pulite, vengono strofinate con l'olio, o a cose simili[121]. Infatti, è certo che non soltanto una violenta agitazione, ma, spesso, anche il solo mescolarsi di due corpi diversi[122] basta a far sì che essi prendano fuoco, come si vede versando dell'acqua su della calce[123], o serrando del fieno prima che sia secco[124], o in una infinità di altri esempi che si incontrano ogni giorno nella chimica. Ma, a paragone del fulmine, tutti questi fuochi hanno pochissima forza; e la ragione di ciò è che essi sono composti solo dalle parti più molli e più viscose degli oli, sebbene anche le parti più vive e penetranti dei sali concorrano generalmente a produrli. Queste ultime, infatti, non si fermano per ciò tra le altre, ma si allontanano rapidamente nell'aria libera dopo averle incendiate. Il fulmine, invece, è principalmente composto da quelle più vive e penetranti, che, essendo premute e cacciate via con molta violenza dalle nubi, trascinano le altre con sé fino a terra. E coloro che sanno quanta forza e velocità abbia il fuoco prodotto dal mescolamento del salnitro e dello zolfo e quanto poca ne abbia invece la parte grassa dello zolfo quando è separata dai
323 suoi spiriti, non troveranno in ciò | nulla di dubbio. Per quanto riguarda la durata dei fuochi che si attaccano o volteggiano intorno a noi, essa può essere più o meno lunga, a seconda che la loro fiamma sia più o meno debole e la loro materia più o meno spessa e serrata. Invece, per quanto riguarda quella dei fuochi che si vedono soltanto negli strati alti dell'aria, essa non può che essere molto breve: infatti, se la loro materia non fosse molto rada, la loro pesantezza li farebbe discendere. E trovo che i filosofi hanno avuto ragione a paragonarli a quella fiamma che si vede correre lungo il fumo che esce da una torcia appena spenta quando, avvicinatala ad un'altra torcia, essa prende fuoco. Ma mi stupisco molto del fatto che poi essi abbiano potuto immaginare che le comete e le colonne o

[123] Lo stesso esempio in *Principi della filosofia*, IV, art. XCIII, *B Op* I 2099 (AT VIII-1 257, l. 24 - 258, l. 6); *Uomo*, I, art. III, *B Op* II 365 (AT XI 121, ll. 10-15).

[124] Lo stesso esempio in *Descrizione*, IV, art. XXVII, *B Op* II 553 (AT XI 253, l. 5), *Discorso*, V, *B Op* I 77-79 (AT VI 46, ll. 9-10); *Principi della filosofia*, IV, art. XCII, *B Op* I 2095 (AT VIII-I 256, ll. 5-6); *Uomo*, I, art. III, *B Op* II 365 (AT XI 121, ll. 20-21); *Primi pensieri*, *B Op* II 983 (AT XI 538, ll. 11-18); *Fromondus a Plempius*, 13 settembre 1637, B 123 p. 409 (AT I 403, ll. 4-10).

feu, qu'on voit quelquefois dans le ciel, fussent composées d'exhalaisons; car elles durent incomparablement plus longtemps.

Et parce que j'ai tâché d'expliquer curieusement leur production et leur nature dans un autre traité, et que je ne crois point qu'elles appartiennent aux météores, non plus que les tremblements de terre et les minéraux, que plusieurs écrivains y entassent, je ne parlerai plus ici que de certaines lumières, qui, paraissant la nuit pendant un temps calme et serein, donnent sujet aux peuples oisifs d'imaginer des escadrons de fantômes qui combattent en l'air, et auxquels ils font présager la perte ou la victoire du parti qu'ils affectionnent, selon que la crainte ou l'espérance prédomine en leur fantaisie. Même, à cause que je n'ai jamais vu de tels spectacles, et que je sais combien les relations qu'on en fait ont coutume d'être | falsifiées et 324
augmentées par la superstition et l'ignorance, je me contenterai de toucher en peu de mots toutes les causes qui me semblent capables de les produire. La première est qu'il y ait en l'air plusieurs nues, assez petites pour être prises pour autant de soldats, et qui, tombant l'une sur l'autre, enveloppent assez d'exhalaisons pour causer quantité de petits éclairs, et jeter de petits feux, et peut-être aussi faire ouïr de petits bruits, au moyen de quoi ces soldats semblent combattre. La seconde, qu'il y ait aussi en l'air de telles nues, mais qu'au lieu de tomber l'une sur l'autre, elles reçoivent leur lumière des feux et des éclairs de quelque grande tempête, qui se fasse ailleurs si loin de là, qu'elle n'y puisse être aperçue. Et la troisième, que ces nues, ou quelques autres plus septentrionales, de qui elles reçoivent leur lumière, soient si hautes que les rayons du soleil parviennent jusques à elles; car, si on prend garde aux réfractions et réflexions que deux ou trois telles nues peuvent causer, on trouvera qu'elles n'ont point besoin d'être fort hautes, pour faire paraître vers le Septentrion de telles lumières, après que l'heure du crépuscule est passée, et quelquefois aussi le soleil même, au temps qu'il doit être couché. Mais ceci ne semble pas tant appartenir à ce discours qu'aux suivants, où j'ai dessein de parler de toutes les choses qu'on peut voir dans l'air sans qu'elles y soient, après avoir ici achevé l'explication de toutes celles qui s'y voient en même façon qu'elles y sont. |

[125] Cfr., al proposito, *Mondo*, IX, *B Op* II 279-287 (AT XI 56, l. 23- 63, l. 25); X, *B Op* II 289-299 (AT XI 63, l. 26 - 72, l. 24); XV, *B Op* II 341-359 (AT XI 104, l. 1 - 118, l. 9). Sui puntoni cfr. *Mondo*, XV, *B Op* II 357 (AT XI 115, l. 7 - 116, l. 4) e *Principi della filosofia*, III, art. CXXXVII, *B Op* I 1997 (AT VIII-1 190, ll. 23-26).

puntoni di fuoco[125] che si vedono talvolta nel cielo fossero composti di esalazioni, visto che durano incomparabilmente più a lungo.

E poiché ho tentato di spiegarne accuratamente l'origine e la natura in un altro trattato[126], e non credo che appartengano alle meteore più dei terremoti e dei minerali (che invece parecchi scrittori vi includono), qui parlerò soltanto di certe luci che, apparendo di notte quando il tempo è calmo e sereno, danno motivo ai popoli oziosi di immaginare squadroni di fantasmi[127] che combattono nel cielo, ai quali essi attribuiscono la funzione di preannunciare la sconfitta o la vittoria della parte per la quale tengono a seconda che nella loro fantasia predomini il timore o la speranza. Inoltre, poiché non ho mai visto spettacoli di tal genere e so quanto di solito la superstizione e l'ignoranza rendano false ed esagerate le relazioni che se ne fanno, | mi accontenterò di toccare in poche parole le
324 cause che mi paiono capaci di produrli. La prima è che nell'aria ci sono alcune nubi abbastanza piccole da esser prese per altrettanti soldati e che, cadendo l'una sull'altra, contengono un numero di esalazioni sufficiente a causare una quantità di piccoli lampi e a lanciare piccoli fuochi e, forse, anche a far udire piccoli rumori: queste cose fanno sì che quei soldati sembrino combattere. La seconda è che nell'aria vi sono anche altre nubi di questo genere che, invece di cadere l'una sull'altra, ricevono la loro luce dai fuochi e dai lampi di qualche grande tempesta che ha luogo altrove, ma così lontano da non poter essere percepita. E la terza è che queste nubi, o alcune altre più settentrionali da cui esse ricevono la loro luce, siano così alte da essere raggiunte dai raggi del Sole: infatti, se si considerano le rifrazioni e riflessioni che due o tre di queste nubi possono causare, ci si renderà conto che esse non hanno bisogno di essere molto alte per far apparire verso settentrione, quando l'ora del crepuscolo è passata, delle luci di quel genere e, talvolta, anche il Sole, quando è già tramontato. Ma ciò non sembra appartenere tanto a questo discorso quanto ai seguenti, nei quali ho intenzione di parlare di tutte le cose che si possono vedere nell'aria senza che vi si trovino effettivamente, dopo aver qui terminato la spiegazione di tutte quelle che vi si vedono così come realmente sono. |

[126] Cfr. nota precedente.

[127] Cfr. al proposito Ch. Adam, *Vie et Œuvres de Descartes. Étude historique*, Paris, Cerf, 1910, AT XII 201, nota *a*, che riporta brani del *Mercure françois* X (1624) pp. 185-186 e 286-287.

DE L'ARC-EN-CIEL 325

Discours Huitième

L'Arc-en-ciel est une merveille de la nature si remarquable, et sa cause a été de tout temps si curieusement recherchée par les bons esprits, et si peu connue, que je ne saurais choisir de matière plus propre à faire voir comment, par la méthode dont je me sers, on peut venir à des connaissances que ceux dont nous avons les écrits n'ont point eues. Premièrement, ayant considéré que cet arc ne peut pas seulement paraître dans le ciel, mais aussi en l'air proche de nous, toutes fois et quantes qu'il s'y trouve plusieurs gouttes d'eau éclairées par le soleil, ainsi que l'expérience fait voir en quelques fontaines, il m'a été aisé de juger qu'il ne procède que de la façon que les rayons de la lumière agissent contre ces gouttes, et de là tendent vers nos yeux. Puis, sachant que ces gouttes sont rondes, ainsi qu'il a été prouvé ci-dessus, et voyant que, pour être plus grosses ou plus petites, elles ne font point paraître cet arc d'autre façon, je me suis avisé d'en faire une fort grosse, afin de la pouvoir mieux examiner. Et ayant rempli d'eau, à cet effet, une grande fiole de verre toute ronde et fort transparente, j'ai trouvé que, le soleil venant, par exemple, de la partie du ciel marquée AFZ, et mon œil étant au point E, lorsque je mettais | cette boule en l'endroit BCD, 326
sa partie D me paraissait toute rouge et incomparablement plus éclatante que le reste; et que, soit que je l'approchasse, soit que je la reculasse, et que je la misse à droite ou à gauche, ou même la fisse tourner en rond autour de ma tête, pourvu que la ligne DE fit toujours un angle d'environ 42 degrés avec la ligne EM, qu'il faut imaginer tendre du centre de l'œil vers celui du soleil, cette partie D paraissait toujours également rouge; mais que,

[128] A questa spiegazione dell'arcobaleno si fa riferimento nelle seguenti lettere *A Mersenne*: marzo 1636, B 83, p. 329 (AT I 340, ll. 3-10); 27 luglio 1638, B 176, p. 791 (AT II 268, ll. 8-14); 30 agosto 1640, B 269, p. 1269 (AT III 166, ll. 16-21); ma cfr. anche *A X*[***], giugno 1645, B 499, p. 2023 (AT IV 223, ll. 13-18). Sull'intenzione di scrivere dell'arcobaleno, cfr. *A Mersenne*, 8 ottobre 1629, B 19, p. 49 (AT I 23, ll. 1-12). Cfr. anche *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, p. 733 (AT II 200, ll. 13-21).

[129] Il *topos* della meraviglia, in relazione al fenomeno dell'arcobaleno, è un luogo comune nei trattati pubblicati tra il XVI e il XVII secolo: cfr., in particolare, F. Vicomercatus, *In quatuor libros Aristotelis Meteorologicorum commentarii*, Venetiis, apud H. Scotum, 1565, p. 158 e L. Froidmont, *Meteorologicorum libri sex*, Antverpiae, ex Officina Plantiniana Balthasaris Moreti, 1627, p. 345. Su tutto questo cfr. J.-R. Armogathe, «L'arc-en-ciel dans les *Météores*», in N. Grimaldi, J.-L. Marion (éd. par), *Le Discours et sa méthode*, Paris, PUF, 1987, p. 148.

[130] Sull'esemplarità di questo discorso quale applicazione del metodo, cfr. la lettera *A Vatier*, 22 febbraio 1638, B 149, p. 547 (AT II 559, ll. 13-29).

[131] L'apparizione dei colori dell'arcobaleno nelle fontane è uno dei *topoi* più comuni nel-

325

L'ARCOBALENO[128]

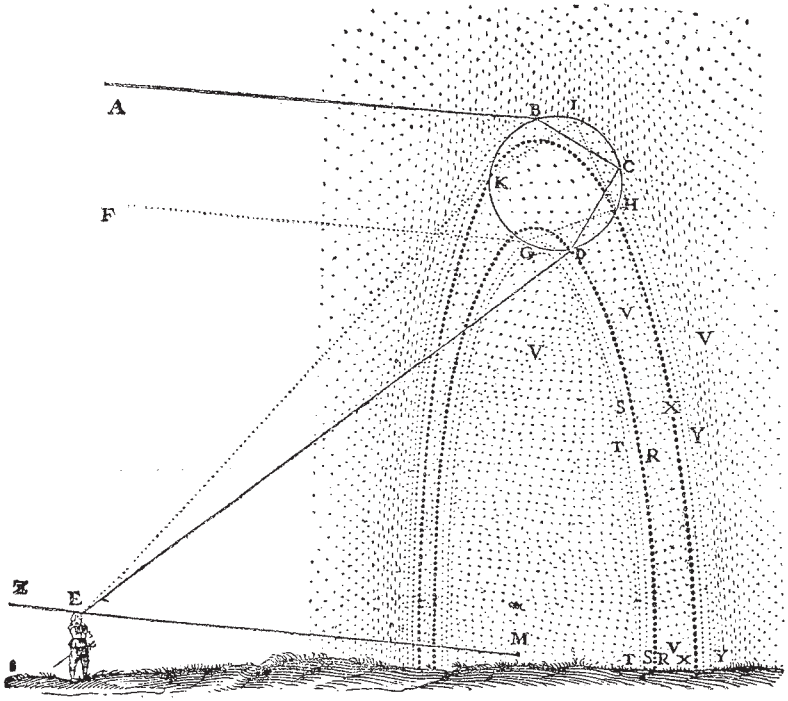
Discorso ottavo

L'arcobaleno è una meraviglia della natura così notevole[129], e la sua causa è stata da ogni tempo così curiosamente ricercata dai buoni ingegni, e così poco conosciuta, che non saprei scegliere una materia più adatta per far vedere come, mediante il metodo di cui mi servo[130], si possa giungere a delle conoscenze mai conseguite da coloro di cui abbiamo gli scritti. Innanzi tutto, avendo considerato che questo arco può apparire non soltanto nel cielo, ma anche nell'aria vicina a noi tutte quante le volte che vi si trovano alcune gocce d'acqua illuminate dal Sole, come l'esperienza fa vedere in alcune fontane[131], mi è stato facile giudicare che esso non procede se non dalla maniera in cui i raggi della luce agiscono su queste gocce e di là tendono verso i nostri occhi. Poi, sapendo che queste gocce sono tonde, come è stato provato sopra[132], e vedendo che esse, per il fatto di essere più grosse o più piccole, non fanno apparire questo arco diversamente, ho pensato di farne una molto grossa al fine di poterla meglio esaminare[133]. E avendo a tal fine riempito d'acqua una grande ampolla tonda e molto trasparente, ho trovato che se il Sole veniva per esempio dalla parte del cielo indicata con AFZ e il mio occhio si trovava nel punto E, quando
326 mettevo | questa sfera nel punto BCD la sua parte D mi appariva completamente rossa e incomparabilmente più splendente del resto. E sia che la avvicinassi, sia che la allontanassi e la mettessi a destra o a sinistra, o anche la facessi girare in tondo intorno alla mia testa, posto che la linea DE formasse sempre un angolo di circa 42 gradi con la linea EM, che bisogna immaginare tendere dal centro dell'occhio verso quello del Sole, questa parte D appariva sempre ugualmente rossa. Però, non appena rendevo

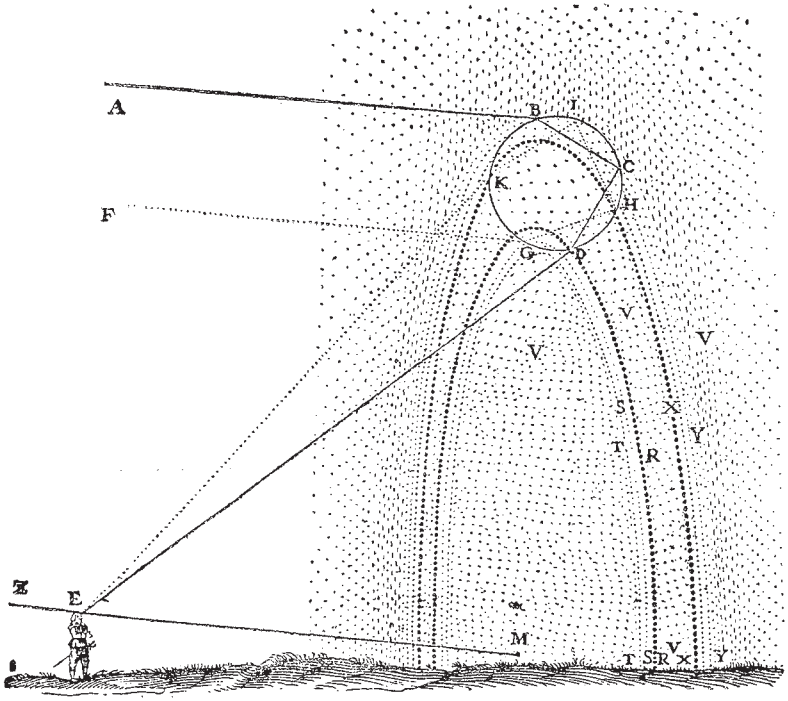
l'ottica e nella letteratura secentesca. Notissime, anche grazie alle memorie di viaggio, erano al proposito le fontane che popolavano i giardini delle 'ville' italiane. Secondo Ch. Adam (*Vie et Œuvres de Descartes*, cit., AT XII 199-200), proprio in Italia, a Tivoli, Descartes avrebbe potuto osservare il fenomeno qui richiamato. Al proposito, cfr. anche S. Werrett, *Wonders never cease: Descartes's* Météores *and the rainbow fountain*, «The British Journal for the History of Science», XXXIV (2001), 2, pp. 129-147.

[132] Cfr. *Meteore*, V, *B Op* I 377-381 (AT VI 280, l. 2 - 282, l. 15).

[133] Esperienze analoghe, con l'ausilio di ampolle trasparenti, erano già state tentate nel XIV secolo dal persiano Kamāl el Dīn el-Fārisi e dal domenicano tedesco Teodorico di Freiberg: cfr. A. I. Sabra, *Theories of light from Descartes to Newton*, London, Oldbourne, 1969, p. 62, nota 56; R. Rashed, *Le modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel: Ibn al-Haytham-al-Farisi*, «Revue d'Histoire des Sciences», XXII (1970), pp. 109-140; J.-R. Armogathe, «L'arc-en-ciel», cit., p. 147; C. B. Boyer, *Descartes and the Radius of the Rainbow*, «Isis», XLIII (1952), 2, pp. 95-98.

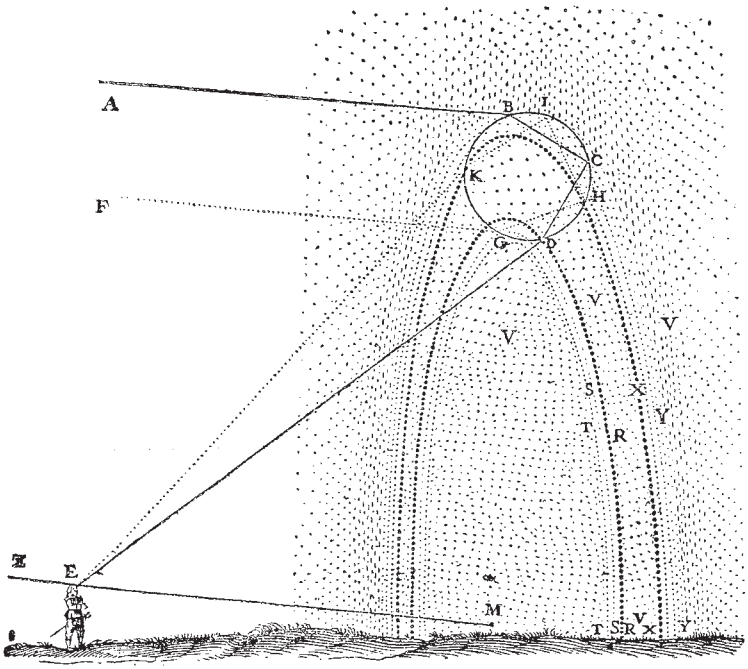


sitôt que je faisais cet angle DEM tant soit peu plus grand, cette rougeur disparaissait; et que, si je le faisais un peu moindre, elle ne disparaissait pas | du tout si à coup, mais se divisait auparavant comme en deux parties 327
moins brillantes, et dans lesquelles on voyait du jaune, du bleu, et d'autres couleurs. Puis, regardant aussi vers l'endroit de cette boule qui est marqué K, j'ai aperçu que, faisant l'angle KEM d'environ 52 degrés, cette partie K paraissait aussi de couleur rouge, mais non pas si éclatante que D; et que, le faisant quelque peu plus grand, il y paraissait d'autres couleurs plus faibles; mais que, le faisant tant soit peu moindre, ou beaucoup plus grand, il n'y en paraissait plus aucune. D'où j'ai connu manifestement que, tout l'air qui est vers M étant rempli de telles boules, ou en leur place de gouttes d'eau, il doit paraître un point fort rouge et fort éclatant en chacune de celles de ces gouttes dont les lignes tirées vers l'œil E font un angle d'environ 42 degrés avec EM, comme je suppose celles qui sont marquées R; et que ces points, étant regardés tous ensemble, sans qu'on remarque autrement le lieu où ils sont que par l'angle sous lequel ils se voient, doivent paraître comme un cercle continu de couleur rouge; et qu'il doit y avoir tout de même des points en celles qui sont marquées S et T, dont les lignes tirées vers E font des angles un peu plus aigus avec EM, qui composent des



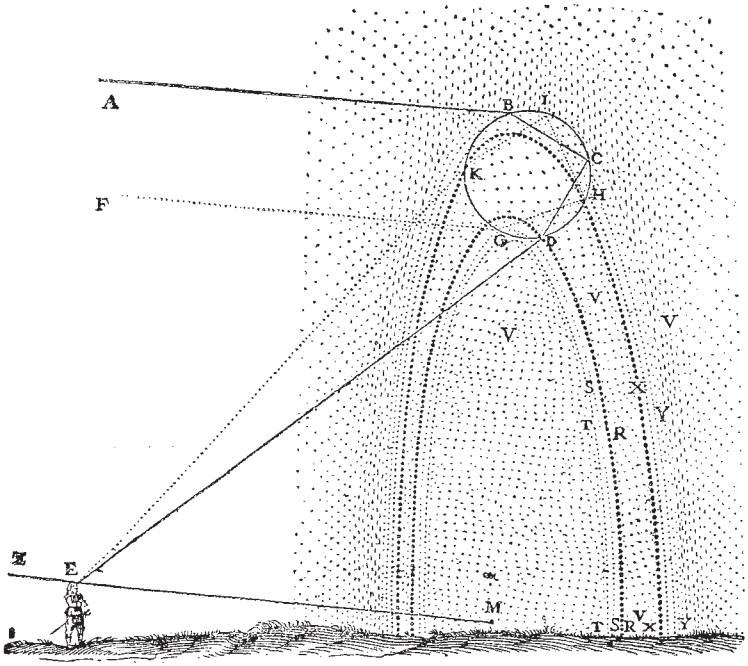
questo angolo DEM anche di poco più grande, questo rosso scompariva; e
327 se lo rendevo un po' più piccolo, il rosso non scompariva | del tutto così d'improvviso, ma prima si divideva in due parti meno brillanti e nelle quali si vedevano del giallo, del blu e altri colori. Poi, guardando anche verso il punto di questa sfera indicato con K, mi sono reso conto che, rendendo l'angolo KEM di circa 52 gradi, questa parte K appariva anch'essa di colore rosso, ma non così splendente come in D; e, rendendolo un po' più grande, vi apparivano altri colori più deboli, mentre, rendendolo anche solo un poco più piccolo, o molto più grande, non vi appariva più alcun colore. Da ciò ho conosciuto manifestamente che, quando tutta l'aria che è verso M è piena di sfere di questo genere o, al loro posto, di gocce d'acqua, deve apparire un punto molto rosso e molto splendente in ciascuna di quelle gocce le cui linee tracciate verso l'occhio E formano un angolo di circa 42 gradi con EM, come suppongo che facciano quelle che sono indicate con R; e che quei punti, guardati tutti assieme osservando il luogo in cui si trovano esclusivamente attraverso l'angolo sotto il quale si vedono, devono apparire come un cerchio continuo di colore rosso. Ho inoltre appreso che allo stesso modo in quelle gocce che sono indicate con S e T, le cui linee tracciate verso E formano con EM degli angoli un po' più acuti, devono

cercles de couleurs plus faibles, et que c'est en ceci que consiste le premier et principal arc-en-ciel; puis, derechef, que, l'angle MEX étant de 52 degrés, il doit paraître un cercle rouge dans les gouttes marquées X, et d'autres cercles de couleurs plus faibles dans les gouttes marquées Y, et que c'est en ceci que consiste le second et moins principal | arc-en-ciel; et enfin, 328
qu'en toutes les autres gouttes marquées V, il ne doit paraître aucunes couleurs. Examinant, après cela, plus particulièrement en la boule BCD ce qui faisait que la partie D paraissait rouge, j'ai trouvé que c'étaient les rayons du soleil qui, venant d'A vers B, se courbaient en entrant dans l'eau au point B, et allaient vers C, d'où ils se réfléchissaient vers D, et là se cour-



bant derechef en sortant de l'eau, tendaient vers E: car, sitôt que je mettais un corps opaque ou obscur en quelque endroit des lignes AB, BC, CD ou DE, cette couleur rouge disparaissait. Et quoique je couvrisse toute la boule, | excepté les deux points B et D, et que je misse des corps obscurs 329
partout ailleurs, pourvu que rien n'empêchât l'action des rayons ABCDE, elle ne laissait pas de paraître. Puis, cherchant aussi ce qui était cause du rouge qui paraissait vers K, j'ai trouvé que c'étaient les rayons qui venaient d'F vers G, où ils se courbaient vers H, et en H se réfléchissaient vers I, et en I se réfléchissaient derechef vers K, puis enfin se courbaient au point K

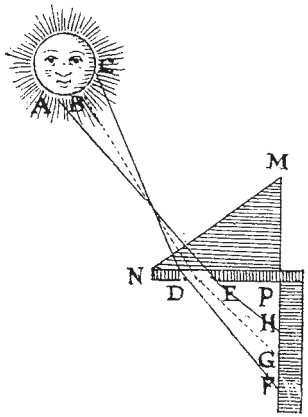
esserci dei punti che compongono dei cerchi di colori più deboli, e che è in questo che consiste il primo e principale arcobaleno. Poi, di nuovo, ho appreso che, se l'angolo MEX è di 52 gradi, devono apparire un cerchio rosso nelle gocce indicate con X ed altri cerchi di colori più deboli nelle gocce indicate con Y, e che è in questo che consiste il secondo e meno impor-
328 tante | arcobaleno; e infine, che in tutte le altre gocce indicate con V non deve apparire alcun colore. Esaminando poi più in dettaglio, nella sfera BCD, quel che faceva sì che la parte D apparisse rossa, ho trovato che si trattava dei raggi del Sole, che, venendo da A verso B, si curvavano entrando nell'acqua nel punto B e andavano verso C, da dove si riflettevano verso D, e là, curvandosi di nuovo uscendo dall'acqua, tendevano verso E: infat-



ti, non appena mettevo un corpo opaco o scuro in qualche punto delle linee AB, BC, CD o DE, questo colore rosso scompariva. E per quanto coprissi
329 tutta la sfera | (ad eccezione dei due punti B e D) e mettessi in qualunque altro punto dei corpi scuri, purché nulla impedisse l'azione dei raggi ABCDE, il rosso non mancava di apparire. Poi, ricercando anche la causa del colore rosso che appariva verso K, ho trovato che si trattava dei raggi che da F venivano verso G, ove essi si curvavano verso H, e in H si riflettevano verso I, e in I si riflettevano di nuovo verso K, poi infine si curvavano

et tendaient vers E. De façon que le premier arc-en-ciel est causé par des rayons qui parviennent à l'œil après deux réfractions et une réflexion, et le second par d'autres rayons qui n'y parviennent qu'après deux réfractions et deux réflexions; ce qui empêche qu'il ne paraisse tant que le premier.

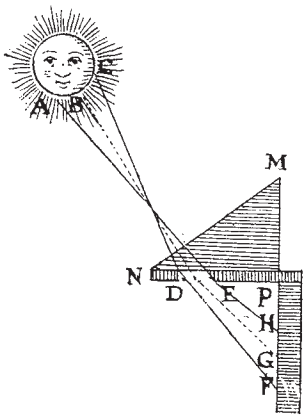
Mais la principale difficulté restait encore, qui était de savoir pourquoi, y ayant plusieurs autres rayons qui, après deux réfractions et une ou deux réflexions, peuvent tendre vers l'œil quand cette boule est en autre situation, il n'y a toutefois que ceux dont j'ai parlé, qui fassent paraître quelques couleurs. Et pour la résoudre, j'ai cherché s'il n'y avait point quelque autre sujet où elles parussent en même sorte, afin que, par la comparaison de l'un et de l'autre, je pusse mieux juger de leur cause. Puis, me souvenant qu'un prisme ou triangle de cristal en fait voir de semblables, j'en ai considéré un qui était tel qu'est ici MNP, dont les deux superficies MN et NP sont toutes plates, et inclinées l'une sur l'autre selon un angle d'environ 30 ou 40 degrés, en sorte que, si les rayons du soleil ABC traversent MN à angles droits | ou presque droits, et ainsi n'y souffrent aucune sensible réfraction, 330
ils en doivent souffrir une assez grande en sortant par NP. Et couvrant l'une de ces deux superficies d'un corps obscur, dans lequel il y avait une ouverture assez étroite comme DE, j'ai observé que les rayons, passant par cette ouverture et de là s'allant rendre sur un linge ou papier blanc FGH, y peignent toutes les couleurs de l'arc-en-ciel; et qu'ils y peignent toujours le rouge vers F, et le bleu ou le violet vers H. D'où j'ai appris, premièrement, que la courbure des superficies des gouttes d'eau n'est point nécessaire à la production de ces couleurs, car celles de ce cristal sont toutes plates; ni la grandeur de l'angle sous lequel elles paraissent, car il peut ici être changé sans



[134] Per questa spiegazione dell'arcobaleno – qui sintetizzata in forma di enunciato, ma sviluppata e argomentata lungo l'intero VIII libro delle *Meteore* – Descartes fu accusato di aver plagiato Antonio De Dominis (1566-1624), autore di un *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride tractatus* (Venetiis, apud Thomam Baglionum, 1611). Il primo a difendere Descartes dall'accusa fu N. J. Poisson (1637-1710) nei suoi *Commentaires ou remarques sur la méthode de Mr. Descartes* (Paris, 1671, p. 209). L'accusa fu in seguito ribadita, oltre che da I. Newton, anche da G. W. Leibniz *Die Philosophischen Schriften*, hrsg. v. C. I. Gerhardt, 7 voll., Berlin, 1875-1890 (rist. an. Hildesheim-New York, Georg Olms, 1978), voll. II, p. 557-558 e IV, p. 306), mentre una difesa della spiegazione cartesiana finalizzata a mostrare le imprecisioni e gli errori della spiegazione di De Dominis fu tentata da J. R. Boschovic e da J. Priestley. Una ricostruzione complessiva di questa *querelle* si trova in R. E. Ockenden, *Marco Antonio De Dominis and His Explanation of the Rainbow*, «Isis», XXVI (1936), 1, pp. 40-49.

nel punto K e tendevano verso E. Così, il primo arcobaleno è causato da alcuni raggi che giungono all'occhio dopo due rifrazioni e una riflessione, mentre il secondo da altri raggi che vi giungono solo dopo due rifrazioni e due riflessioni, il che impedisce che esso sia visibile quanto il primo[134].

Ma restava ancora la principale difficoltà: sapere perché, pur essendoci parecchi altri raggi che, dopo due rifrazioni e una o due riflessioni, possono tendere verso l'occhio quando questa sfera è in un'altra posizione, tuttavia solo quelli di cui ho parlato fanno apparire qualche colore. Per risolverla ho cercato se non ci fosse qualche altro soggetto in cui questi colori apparissero alla stessa maniera, affinché, comparando l'uno con l'altro, potessi meglio giudicare quale fosse la loro causa. Poi, ricordandomi che un prisma o triangolo di cristallo ne fa vedere di simili[135], ne ho considerato uno che fosse tale quale è qui MNP[136], le cui due superfici MN e NP sono del tutto piatte e inclinate l'una sull'altra secondo un angolo di circa 30 o 40 gradi, in modo tale che, se i raggi del Sole ABC attraversano MN
330 ad angoli retti | o quasi retti, e in tal modo non vi subiscono alcuna rifrazione sensibile, essi ne devono subire una abbastanza grande uscendo da NP. E coprendo una delle sue due superfici con un corpo scuro nel quale c'era un'apertura abbastanza stretta come DE, ho osservato che i raggi, passando per questa apertura e di là dirigendosi verso un lenzuolo o una carta bianca FGH, vi dipingono tutti i colori dell'arcobaleno, e vi dipingono sempre il rosso verso F e il blu ed il viola verso H[137]. Da ciò ho appreso innanzi tutto che la curvatura delle superfici delle gocce d'acqua non è affatto necessaria per produrre questi colori, poiché quelle di questo cristallo sono del tutto piatte, e che non lo è neppure la grandezza dell'angolo sotto il quale appaiono tali colori, poiché esso può qui essere modificato senza che essi cambino.

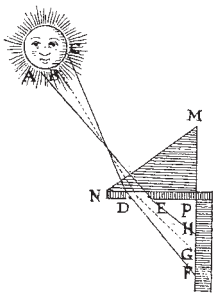


[135] Cfr. Plinio, *Naturalis historia*, II, 37, 136; per l'età medievale, Theodoricus Teutonicus de Vriberg, *De iride et radialibus impressionibus*, ed. J. Wurschmidt, Munster, Aschendorff, 1914, p. 48; per l'età moderna, se ne fa menzione, tra gli altri, in G. B. Della Porta, *De refractione*, Neapoli, apud Io. Iacobum Carlinum et Antonium Pacem, 1593, p. 192.

[136] A questa esperienza si rinvia in *Principi della filosofia*, III, art. XCVII, *B Op* I 1937 (AT VIII-1 149, ll. 11-19).

[137] Su questa spiegazione dei colori e sulla definizione della luce che ne sta a fondamento, cfr. *Ciermans a Descartes*, marzo 1638, B 156, pp. 587-591 (AT II 56, l. 13 - 62, l. 5) e *A Ciermans*, 23 marzo 1638, B 159, pp. 605-615 (AT II 71, l. 4 - 81, l. 6).

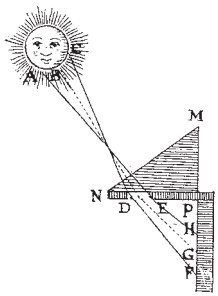
qu'elles changent, et bien qu'on puisse faire que les rayons qui vont vers F se courbent tantôt plus et tantôt moins que ceux qui vont vers H, ils ne laissent pas de peindre toujours du rouge, et ceux qui vont vers H toujours du bleu; ni aussi la réflexion, car il n'y en a ici aucune; ni enfin la pluralité des réfractions, car il n'y en a ici qu'une seule. Mais j'ai jugé qu'il y en fallait pour le moins une, et même une dont l'effet ne fût point détruit par une contraire; car l'expérience montre que, si les superficies MN et NP étaient parallèles, les rayons, se redressant autant en l'une qu'ils se pourraient courber | en l'autre, ne produiraient point ces couleurs. Je n'ai pas douté 331
qu'il n'y fallût aussi de la lumière; car sans elle on ne voit rien. Et, outre cela, j'ai observé qu'il y fallait de l'ombre, ou de la limitation à cette lumière; car, si on ôte le corps obscur qui est sur NP, les couleurs FGH cessent de paraître; et si on fait l'ouverture DE assez grande, le rouge, l'orangé et le jaune, qui sont vers F, ne s'étendent pas plus loin pour cela, non plus que le vert, le bleu et le violet, qui sont vers H, mais tout le surplus de l'espace qui est entre deux vers G demeure blanc. En suite de quoi, j'ai tâché de connaître pourquoi ces couleurs sont autres vers H que vers F, nonobstant que la réfraction et l'ombre et la lumière y concourent en même sorte. Et concevant la nature de la lumière telle que je l'ai décrite en la Dioptrique, à savoir comme l'action ou le mouvement d'une certaine matière fort subtile, dont il faut imaginer les parties ainsi que de petites boules qui roulent dans les pores des corps terrestres, j'ai connu que ces boules peuvent rouler en diverses façons, selon les diverses causes qui les y déterminent; et en particulier, que toutes les réfractions qui se font vers un même côté les déterminent à tourner en même sens; mais que, lorsqu'elles n'ont point de voisines qui se meuvent notablement plus vite ou moins vite qu'elles, leur tournoiement n'est qu'à peu près égal à leur mouvement en ligne droite; au lieu que, lorsqu'elles en ont d'un côté qui se meuvent moins vite, et de l'autre qui se meuvent plus ou également vite, ainsi qu'il arrive aux confins de l'ombre et de la lumière, si elles rencontrent celles qui se | meuvent moins 332
vite, du côté vers lequel elles roulent, comme font celles qui composent le rayon EH, cela est cause qu'elles ne tournoient pas si vite qu'elles se meuvent en ligne droite; et c'est tout le contraire, lorsqu'elles les rencontrent de l'autre côté, comme font celles du rayon DF. Pour mieux entendre ceci, pensez que la boule 1234 est poussée de V vers X, en



[138] Cfr., *Meteore*, I, *B Op* I 316-317, note nn. 6-7.

[139] Su questa definizione della luce, cfr. *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, p. 533 (AT I 543, ll. 7-15); *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, p. 737 (AT II 204, l. 25 - 205, l. 15); *Morin a Descartes*, 12 agosto 1638, B 180, p. 807 (AT II 291, ll. 1-14); *A Morin*, 12 settembre 1638, B 188, p. 867 (AT II 363, ll. 26-29).

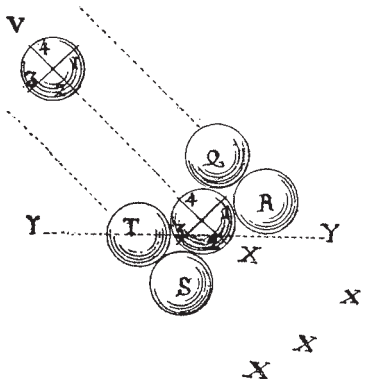
E benché si possa far sì che i raggi che vanno verso F si curvino ora più ora meno di quelli che vanno verso H, tuttavia essi continuano a dipingere sempre il rosso, e quelli che vanno verso H sempre il blu. Ed ho appreso che non è necessaria neppure la riflessione, poiché qui non ve n'è alcuna, né, infine, la pluralità delle rifrazioni, poiché qui ve n'è una sola. Ma ho giudicato che ne occorreva almeno una, ma tale che il suo effetto non fosse distrutto da una contraria: infatti, l'esperienza mostra che, se le superfici MN e NP fossero parallele, i raggi, raddrizzandosi nell'una tanto quanto
331 potrebbero curvarsi | nell'altra, non produrrebbero questi colori. Non ho dubitato che occorresse anche un po' di luce, poiché senza di essa non si vede nulla. Oltre a questo, poi, ho osservato che occorreva un po' d'ombra o una limitazione di questa luce: infatti, se si toglie il corpo scuro che è su NP, i colori FGH cessano di apparire; e se si rende l'apertura DE abbastanza grande, il rosso, l'arancione e il giallo, che sono verso F, come anche il verde, il blu e il viola, che sono verso H, non vanno per ciò più lontano, ma l'eccesso di spazio che è nel mezzo, verso G, resta bianco. In conseguenza di ciò, ho cercato di conoscere per quale motivo, verso H, questi colori siano differenti da come sono verso F sebbene la rifrazione, l'ombra e la luce vi concorrano alla stessa maniera. E concependo la natura della luce come l'ho descritta nella *Diottrica*[138], ossia come l'azione o il movimento di una certa materia sottilissima[139] le cui parti bisogna immaginare come piccole sfere che rotolano nei pori dei corpi terrestri[140], ho conosciuto che queste sfere possono rotolare in diverse maniere a seconda delle diverse cause che le determinano a farlo, e, in particolare, che tutte le rifrazioni che hanno luogo verso uno stesso lato le determinano a girare nello stesso senso. Quando, però, esse non hanno vicino a sé delle sfere il cui movimento sia notevolmente più o meno veloce del loro, la loro rotazione è pressappoco uguale al loro movimento in linea retta. Invece, quando ne hanno da un lato alcune che si muovono meno velocemente e, dall'altro, alcune che si muovono più velocemente o altrettanto velocemente, come accade al confine tra l'ombra e la luce, se esse
332 incontrano quelle che si | muovono meno velocemente dal lato verso il quale rotolano, come fanno quelle che compongono il raggio EH, ciò fa sì che non ruotino con la stessa velocità con cui si muovono in linea retta; mentre tutto il contrario accade quando le incontrano dall'altro lato, come fanno quelle del raggio DF. Per meglio intendere questo punto, pensate che la sfera 1234[141] sia spinta da V



[140] A questa definizione della materia sottile, si fa riferimento in *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, p. 533 (AT I 544, ll. 14-17) e *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, p. 737 (AT II 206, l. 27 - 207, l. 5).

[141] A questo esempio si fa riferimento nelle seguenti lettere: *Ciermans a Descartes*, marzo

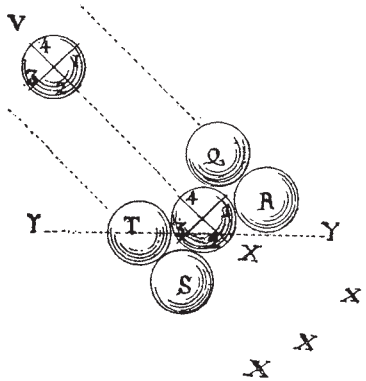
telle sorte qu'elle ne va qu'en ligne droite, et que ses deux côtés 1 et 3 descendent également vite jusques à la superficie de l'eau YY, où le mouvement du côté marqué 3, qui la rencontre le premier, est retardé, pendant que celui du côté marqué 1 continue encore, ce qui est cause que toute la boule commence infailliblement à tournoyer suivant l'ordre des chiffres 1 2 3. Puis, imaginez qu'elle est environnée de quatre autres, Q, R, S, T, dont les deux Q et R tendent, avec plus de force qu'elle, à se mouvoir vers X, et les deux autres S et T y tendent avec moins de force. D'où il est évident que Q, pressant sa partie marquée 1, et S, retenant | celle qui est marquée 333
3, augmentent son tournoiement; et que R et T n'y nuisent point, parce que R est disposée à se mouvoir vers X plus vite qu'elle ne la suit, et T n'est pas disposée à la suivre si vite qu'elle la précède. Ce qui explique l'action du rayon DF. Puis, tout au contraire, si Q et R tendent plus lentement qu'elle vers X, et S et T y tendent plus fort, R empêche le tournoiement de la partie marquée 1, et T celui de la partie 3, sans que les deux autres Q et S y fassent rien. Ce qui explique l'action du rayon EH. Mais il est à remarquer que, cette boule 1234 étant fort ronde, il peut aisément arriver que, lorsqu'elle est pressée un peu fort par les deux R et T, elle se revire en pirouettant autour de l'essieu 42, au lieu d'arrêter son tournoiement à leur occasion, et ainsi que, changeant en un moment de situation, elle tournoie après suivant l'ordre des chiffres 321; car les deux R et T, qui l'ont fait commencer à se détourner, l'obligent à continuer jusques à ce qu'elle ait achevé un demi-tour en ce sens-là, et qu'elles puissent augmenter son tournoiement, au lieu de le retarder. Ce qui m'a servi à résoudre la principale de toutes les difficultés que j'ai eues en cette matière. Et il se démontre, ce me semble, très évidemment de tout ceci, que la nature des couleurs qui paraissent vers F ne consiste qu'en ce que les parties de la matière subtile, qui transmet l'action



1638, B 156, pp. 587-591 (AT II 56, l. 12 - 62, l. 5); *A Ciermans*, 23 marzo 1638, B 159, pp. 605-615 (AT II 76, l. 1 - 81, l. 6); *A Mersenne*, 27 luglio 1638, B 176, pp. 791-793 (AT II 268, l. 24 - 269, l. 14); *Morin a Descartes*, 12 agosto 1638, B 180, p. 809 (AT II 293, l. 17 - 294, l. 9); *A Morin*, 12 settembre 1638, B 188, p. 869 (AT II 366, ll. 8-22); *Morin a Descartes*, ottobre 1638, B 193, p. 911 (AT II 418, l. 6 - 419, l. 7).

[142] A questa affermazione, nel contesto di una discussione a proposito della propagazione

verso X in modo tale che proceda unicamente in linea retta e i suoi due lati 1 e 3 discendano con la stessa velocità fino alla superficie dell'acqua YY, dove il movimento del lato indicato con 3, che la incontra per primo[142], è rallentato, mentre quello del lato indicato con 1 continua ancora; il che fa sì che tutta la sfera cominci immancabilmente a ruotare secondo l'ordine delle cifre 123[143]. Poi, immaginate che essa sia attorniata da altre quattro sfere Q, R, S, T, delle quali le due Q e R tendono con più forza di essa a muoversi verso X, mentre le altre due S e T vi tendono con minor forza. Da ciò è evidente che Q, facendo pressione sulla sua parte indicata con 1, e
333 S, trattenendo | quella indicata con 3, fanno aumentare la sua rotazione, e che R e T non danno alcun disturbo, poiché R è disposta a muoversi verso X più velocemente di quanto essa non la segua e T non è disposta a seguirla così velocemente quanto questa la precede. Ciò spiega l'azione del raggio DF. Poi, tutt'al contrario, se Q e R tendono più lentamente di essa verso X, e se S e T vi tendono più forte, R impedisce la rotazione della parte indicata con 1 e T quella della parte 3, senza che le altre due Q e S facciano nulla per impedirlo. Ciò spiega l'azione del raggio EH. Ma si deve notare che, dal momento che questa sfera 1234 è molto tonda, può facilmente accadere che essa, quando è compressa con un po' di forza dalle due R e T, si rigiri piroettando intorno all'asse 42 invece di fermare la propria rotazione incontrandole, e che così, cambiando posizione in un momento, continui poi a ruotare secondo l'ordine delle cifre 321: infatti, le due sfere R e T, che hanno fatto sì che cominciasse a deviare, la obbligano a continuare fino a che abbia completato un mezzo giro in quel senso ed esse possano così aumentare la sua rotazione invece di rallentarla. Ciò mi è servito per risolvere la principale di tutte le difficoltà che ho incontrato in questa materia. E da tutto ciò, mi sembra, si dimostra con molta evidenza che la natura dei colori che appaiono verso F consiste unicamente nel fatto che le parti della materia sottile, che trasmette



istantanea della luce, si fa riferimento in *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, p. 543 (AT I 552, l. 27-553, l. 14 e in part. 553, ll. 6-14) e *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, pp. 739-741 (AT II 214, l. 11 - 215, l. 15).

[143] A questo passo, nel contesto di una discussione sulla forma o figura delle parti della materia sottile, si fa riferimento nelle lettere *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, p. 537 (AT I 546, l. 22 - 547, l. 13) e *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, pp. 745-747 (AT II 214, l. 22 - 215, l. 15).

de la lumière, tendent à tournoyer avec plus de force qu'à se mouvoir en ligne droite; en sorte que celles qui tendent à tourner beaucoup plus fort, causent la couleur rouge, et celles qui n'y tendent qu'un peu plus fort, causent la jaune. Comme, | au contraire, la nature de celles qui se voient vers 334
H ne consiste qu'en ce que ces petites parties ne tournoient pas si vite qu'elles ont de coutume, lorsqu'il n'y a point de cause particulière qui les en empêche; en sorte que le vert paraît où elles ne tournoient guère moins vite, et le bleu où elles tournoient beaucoup moins vite. Et ordinairement aux extrémités de ce bleu, il se mêle de l'incarnat, qui, lui donnant de la vivacité et de l'éclat, le change en violet ou couleur de pourpre. Ce qui vient sans doute de ce que la même cause, qui a coutume de retarder le tournoiement des parties de la matière subtile, étant alors assez forte pour faire changer de situation à quelques-unes, le doit augmenter en celles-là, pendant qu'elle diminue celui des autres. Et, en tout ceci, la raison s'accorde si parfaitement avec l'expérience, que je ne crois pas qu'il soit possible, après avoir bien connu l'une et l'autre, de douter que la chose ne soit telle que je viens de l'expliquer. Car, s'il est vrai que le sentiment que nous avons de la lumière soit causé par le mouvement ou l'inclination à se mouvoir de quelque matière qui touche nos yeux, comme plusieurs autres choses témoignent, il est certain que les divers mouvements de cette matière doivent causer en nous divers sentiments. Et comme il ne peut y avoir d'autre diversité en ces mouvements que celle que j'ai dite, aussi n'en trouvons-nous point d'autre par expérience, dans les sentiments que nous en avons, que celle des couleurs. Et il n'est pas possible de trouver aucune chose dans le cristal MNP qui puisse produire des couleurs, que la façon dont il envoie les petites | parties de la matière subtile vers le linge FGH, et de là 335
vers nos yeux; d'où il est, ce me semble, assez évident qu'on ne doit chercher autre chose non plus dans les couleurs que les autres objets font paraître: car l'expérience ordinaire témoigne que la lumière ou le blanc, et l'ombre ou le noir, avec les couleurs de l'iris qui ont été ici expliquées, suffisent pour composer toutes les autres. Et je ne saurais goûter la distinction des Philosophes, quand ils disent qu'il y en a qui sont vraies, et d'autres qui ne sont que fausses ou apparentes. Car toute leur vraie nature n'étant que de paraître, c'est, ce me semble, une contradiction de dire qu'elles sont fausses et qu'elles paraissent. Mais j'avoue bien que l'ombre et la réfraction ne sont pas toujours nécessaires pour les produire; et qu'en leur place, la

[144] A questo passo, nel contesto di una discussione sulla distinzione tra *lumen* e *lux*, si fa riferimento in *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, pp. 539-541 (AT I 550, ll. 9-24); ma cfr. anche la risposta di Descartes nella lettera *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, p. 745 (AT II 213, ll. 16-22).

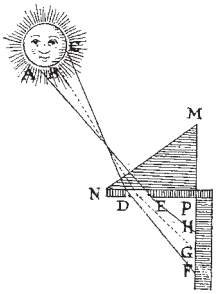
[145] Sul movimento circolare della materia sottile e sulla sua compatibilità con l'inclinazione naturale al movimento rettilineo, cfr. *A Morin*, 12 settembre 1638, B 188, p. 869 (AT II 366, ll. 1-7).

l'azione della luce[144], tendono con più forza a ruotare che a muoversi in linea retta[145], in maniera tale che quelle che tendono a ruotare molto più forte causano il colore rosso e quelle che tendono a farlo solo un po' più
334 forte causano il colore giallo. | Al contrario, la natura di quei colori che si vedono verso H consiste unicamente nel fatto che queste piccole parti non ruotano così velocemente come solitamente fanno quando non c'è alcuna causa particolare che lo impedisca, così che il verde appare là dove esse non ruotano molto meno velocemente e il blu dove invece ruotano molto meno velocemente. E comunemente, alle estremità di questo blu, si mescola un incarnato che, conferendogli vivacità e brillantezza, lo muta in viola o color porpora. Ciò deriva senza dubbio dal fatto che la stessa causa che è solita rallentare la rotazione delle parti della materia sottile, essendo allora abbastanza forte per far cambiare la posizione di alcune, deve aumentare la loro rotazione mentre diminuisce quella delle altre. E in tutto ciò la ragione si accorda così perfettamente con l'esperienza che non credo sia possibile, dopo aver ben conosciuto l'una e l'altra, dubitare che le cose stiano proprio come ho appena spiegato[146]. Infatti, se è vero che la sensazione che abbiamo della luce è causata dal movimento o dall'inclinazione a muoversi di qualche materia che tocca i nostri occhi, come testimoniano parecchie altre cose, è certo che i diversi movimenti di questa materia devono causare in noi diverse sensazioni. E come in questi movimenti non può esserci altra diversità oltre quella che ho detto, allo stesso modo, nelle sensazioni che ne abbiamo, non ne troviamo altra, per esperienza, oltre quella che sussiste tra i colori[147]. E nel cristallo MNP non è possibile trovare alcuna cosa che
335 possa produrre i colori se non la maniera in cui invia le piccole | parti della materia sottile verso il lenzuolo FGH e di là verso i nostri occhi. Da ciò, mi sembra, è abbastanza evidente che non si deve cercare altra cosa neppure a proposito dei colori che fanno apparire gli altri oggetti: infatti, l'esperienza ordinaria testimonia che la luce o bianco, e l'ombra o nero, con i colori dell'iride che qui sono stati spiegati, sono sufficienti per comporre tutti gli altri. E non posso apprezzare la distinzione dei filosofi, quando dicono che vi sono alcuni colori che sono veri e altri che sono solo falsi o apparenti. Infatti, poiché tutta la loro vera natura è l'apparire, mi sembra sia una contraddizione dire che sono falsi e che appaiono[148]. Ammetto però che l'ombra e la rifrazione non sono sempre necessarie per produrli, e che, al loro

[146] La stessa spiegazione in *Descrizione*, IV, art. XXXI, *B Op* II 557 (AT XI 255, l. 14 - 256, l. 19). Alla spiegazione dei colori qui formulata si rinvia in *Principi della filosofia*, IV, art. CXCV, *B Op* I 2195 (AT VIII-1 319, l. 19); ma al proposito cfr. anche *More a Descartes*, 23 luglio 1649, B 704, p. 2731 (AT V 390). Sui colori, cfr. anche *Diottrica*, I, *B Op* I 121-125 (AT VI 83, l. 28 - 85, l. 12 e in part. 84, l. 29 - 85, l. 12) e VI, *B Op* I 189 (AT VI 130, l. 20 - 131, l. 10).

[147] Cfr. *Diottrica*, I, *B Op* I 125 (AT VI 84, l. 22 - 85, l. 12).

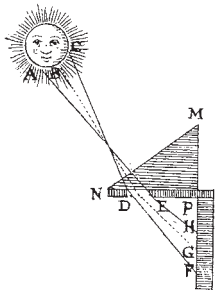
[148] Il riferimento di Descartes, qui, è alla dottrina scolastica comunemente ammessa, quale ad esempio si trova nei *Commentarii Collegii Conimbricensis*, cit., II, 7, qq. 2-3.



grosseur, la figure, la situation et le mouvement des parties des corps qu'on nomme colorés, peuvent concourir diversement avec la lumière, pour augmenter ou diminuer le tournoiement des parties de la matière subtile. En sorte que, même en l'arc-en-ciel, j'ai douté d'abord si les couleurs s'y produisaient tout à fait en même façon que dans le cristal MNP; car je n'y remarquais point d'ombre qui terminât la lumière, et ne connaissais point encore pourquoi elles n'y paraissaient que sous certains angles, jusques à ce qu'ayant pris la plume et calcu-
lé par | le menu tous les rayons qui tombent sur les divers points d'une 336
goutte d'eau, pour savoir sous quels angles, après deux réfractions et une ou deux réflexions, ils peuvent venir vers nos yeux, j'ai trouvé qu'après une réflexion et deux réfractions, il y en a beaucoup plus qui peuvent être vus sous l'angle de 41 à 42 degrés, que sous aucun moindre; et qu'il n'y en a aucun qui puisse être vu sous un plus grand. Puis, j'ai trouvé aussi qu'après deux réflexions et deux réfractions, il y en a beaucoup plus qui viennent vers l'œil sous l'angle de 51 à 52 degrés, que sous aucun plus grand; et qu'il y en a point qui viennent sous un moindre. De façon qu'il y a de l'ombre de part et d'autre, qui termine la lumière, laquelle, après avoir passé par une infinité de gouttes de pluie éclairées par le soleil, vient vers l'œil sous l'angle de 42 degrés, ou un peu au-dessous, et ainsi cause le premier et principal arc-en-ciel. Et il y en a aussi qui termine celle qui vient sous l'angle de 51 degrés ou un peu au-dessus, et cause l'arc-en-ciel extérieur; car, ne recevoir point de rayons de lumière en ses yeux, ou en recevoir notablement moins d'un objet que d'un autre qui lui est proche, c'est voir de l'ombre. Ce qui montre clairement que les couleurs de ces arcs sont produites par la même cause que celles qui paraissent par l'aide du cristal MNP, et que le demi-diamètre de l'arc intérieur ne doit point être plus grand que de 42 degrés, ni celui de l'extérieur plus petit que de 51; et enfin, que le premier doit être bien plus limité en sa superficie extérieure qu'en
l'intérieure; et le second tout au contraire, ainsi qu'il se | voit par expérien- 337
ce. Mais, afin que ceux qui savent les mathématiques puissent connaître si le calcul que j'ai fait de ces rayons est assez juste, il faut ici que je l'explique.

Soit AFD une goutte d'eau, dont je divise le demi-diamètre CD ou AB en autant de parties égales que je veux calculer de rayons, afin d'attribuer autant de lumière aux uns qu'aux autres. Puis je considère un de ces rayons en particulier, par exemple EF, qui, au lieu de passer tout droit vers G, se détourne vers K, et se réfléchit de K vers N, et de là va vers l'œil P; ou bien

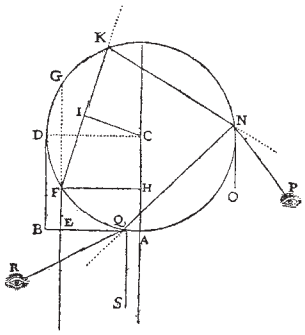
[149] Sulla funzione qui attribuita all'ombra, cfr. *Ciermans a Descartes*, marzo 1638, B 156,



posto, la grandezza, la figura, la posizione e il movimento delle parti dei corpi che si chiamano colorati possono diversamente concorrere con la luce ad aumentare o a diminuire la rotazione delle parti della materia sottile[149]. Così, anche a proposito dell'arcobaleno, ho inizialmente dubitato del fatto che i colori si formassero proprio nella stessa maniera che nel cristallo MNP: non vi osservavo infatti alcuna ombra che ponesse un limite alla luce e non conoscevo ancora perché i colori vi apparissero solo
336 sotto certi angoli, fino a che, presa la penna e calcolati | in dettaglio tutti i raggi che cadono sui diversi punti di una goccia d'acqua per sapere sotto quali angoli, dopo due rifrazioni e una o due riflessioni, possano dirigersi verso i nostri occhi, ho trovato che dopo una riflessione e due rifrazioni sono molti di più quelli che possono essere visti sotto l'angolo da 41 a 42 gradi che sotto uno più piccolo, e che non ve n'è alcuno che possa essere visto sotto un angolo più grande. Poi, ho anche trovato che dopo due riflessioni e due rifrazioni ce ne sono molti di più che si dirigono verso l'occhio sotto l'angolo da 51 a 52 gradi che sotto un altro angolo maggiore, e che non ve n'è alcuno che vi si diriga sotto un angolo più piccolo. Così, da una parte e dall'altra, vi è dell'ombra che delimita la luce, la quale, dopo esser passata attraverso un'infinità di gocce di pioggia illuminate dal Sole, si dirige verso l'occhio sotto l'angolo di 42 gradi, o un po' sotto, e così causa il primo e principale arcobaleno. E c'è anche un'ombra che delimita quella luce che vi si dirige sotto l'angolo di 51 gradi, o un po' sopra, e causa l'arcobaleno esterno: infatti, non ricevere alcun raggio di luce nei propri occhi, o riceverne notevolmente meno da un oggetto che da un altro che gli è vicino, significa vedere l'ombra. Ciò mostra chiaramente che i colori di questi archi sono prodotti dalla stessa causa che produce quelli che appaiono con l'ausilio del cristallo MNP e che il semidiametro dell'arco interno non dev'essere più grande di 42 gradi, né quello dell'arco esterno esser più piccolo di 51. Infine, il primo deve
337 essere ben più limitato nella sua superficie esterna che in quella interna, mentre il secondo deve esserlo al contrario, come si | vede per esperienza. Ma affinché coloro che conoscono le matematiche possano sapere se il mio calcolo di questi raggi è abbastanza esatto, bisogna che qui io lo spieghi.

Sia AFD una goccia d'acqua, della quale divido il semidiametro CD o AB in tante parti uguali quanti sono i raggi che voglio calcolare; e ciò al fine di attribuire agli uni e agli altri la stessa quantità di luce. Considero poi uno di questi raggi in particolare, per esempio EF, il quale, invece di passare diritto verso G, devia verso K, si riflette da K verso N e di là si dirige verso

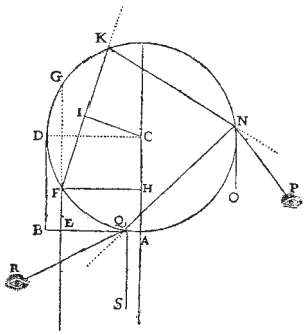
pp. 591-593 (AT II 61, l. 20 - 62, l. 5) e *A Ciermans*, 23 marzo 1638, B 159, p. 615 (AT II 79, l. 24 - 81, l. 6).



se réfléchit encore une fois de N vers Q, et de là se détourne vers l'œil R. Et ayant tiré CI à angles droits sur FK, je connais, de ce qui a été dit en la Dioptrique, qu'AE, ou HF, et CI ont entre elles la proportion par laquelle la réfraction de l'eau se mesure. De façon que, si HF contient 8000 parties, telles qu'AB en contient 10000, CI en contiendra environ de 5984, parce que la réfraction de l'eau est tant soit peu plus grande que de trois à quatre, et pour le plus justement que j'aie pu la mesurer, elle est comme de 187 à 250. Ayant ainsi les deux lignes HF et CI, je connais aisément | les deux 338
arcs, FG qui est de 73 degrés et 44 minutes, et FK qui est de 106.30. Puis, ôtant le double de l'arc FK, de l'arc FG ajouté à 180 degrés, j'ai 40.44 pour la quantité de l'angle ONP; car je suppose ON parallèle à EF. Et ôtant ces 40.44 de FK, j'ai 65.46 pour l'angle SQR, car je pose aussi SQ parallèle à EF. Et calculant en même façon tous les autres rayons parallèles à EF, qui passent par les divisions du diamètre AB, je compose la table suivante:

LA LIGNE HF	LA LIGNE CI	L'ARC FG	L'ARC FK	L'ANGLE ONP	L'ANGLE SQR
1000	748	168.30	171.25	5.40	165.45
2000	1496	156.55	162.48	11.19	151.29
3000	2244	145. 4	154. 4	17.56	136. 8
4000	2992	132.50	145.10	22.30	122. 4
5000	3740	120.	136. 4	27.52	108.12
6000	4488	106.16	126.40	32.56	93.44
7000	5236	91. 8	116.51	37.26	79.25
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
10000	7480	0.	83.10	13.40	69.30

[150] Cfr. *Diottrica*, II, *B Op* I 143-147 (AT VI 98, l. 15 - 100, l. 1).



l'occhio P, oppure si riflette ancora una volta da N verso Q e di là devia verso l'occhio R. Poi, dopo aver tracciato CI ad angoli retti su FK, conosco, da ciò che è stato detto nella *Diottrica*[150], che AE, HF e CI hanno tra loro la proporzione con la quale si misura la rifrazione dell'acqua. In tal modo, se HF contiene 8.000 parti (tali che AB ne contenga 10.000), CI ne conterrà all'incirca 5.984, poiché la rifrazione dell'acqua è un po' più grande del rapporto di tre a quattro (dalla misurazione più precisa che io abbia potuto fare risulta che essa va da 187 a 250). Ottenute così le due linee HF e CI,
338 conosco facilmente | i due archi: FG, che è di 73 gradi e 44 minuti, e FK, che è di 106.30. Poi, sottraendo il doppio dell'arco FK dall'arco FG aggiunto a 180 gradi, ottengo 40.44 come quantità dell'angolo ONP, poiché suppongo ON parallela a EF. E sottraendo questi 40.44 da FK, ottengo 65.46 per l'angolo SQR, poiché suppongo anche SQ parallela a EF. Poi, calcolando alla stessa maniera tutti gli altri raggi paralleli a EF che passano per le suddivisioni del diametro AB, compongo la tavola seguente:

LA LINEA HF	LA LINEA CI	L'ARCO FG	L'ARCO FK	L'ANGOLO ONP	L'ANGOLO SQR
1000	748	168.30	171.25	5.40	165.45
2000	1496	156.55	162.48	11.19	151.29
3000	2244	145. 4	154. 4	17.56	136. 8
4000	2992	132.50	145.10	22.30	122. 4
5000	3740	120.	136. 4	27.52	108.12
6000	4488	106.16	126.40	32.56	93.44
7000	5236	91. 8	116.51	37.26	79.25
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
10000	7480	0.	83.10	13.40	69.30

Et il est aisé à voir, en cette table, qu'il y a bien plus de rayons qui font l'angle ONP d'environ 40 degrés, qu'il n'y en a qui le fassent moindre; ou SQR | d'environ 54, qu'il n'y en a qui le fassent plus grand. Puis, afin de la 339
rendre encore plus précise, je fais:

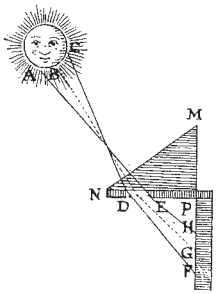
LA LIGNE HF	LA LIGNE CI	L'ARC FG	L'ARC FK	L'ANGLE ONP	L'ANGLE SQR
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
8100	6058	71.48	105.25	40.58	64.37
8200	6133	69.50	104.20	41.10	63.10
8300	6208	67.48	103.14	41.20	62.54
8400	6283	65.44	102. 9	41.26	61.43
8500	6358	63.34	101. 2	41.30	60.32
8600	6432	61.22	99.56	41.30	58.26
8700	6507	59. 4	98.48	41.28	57.20
8800	6582	56.42	97.40	41.22	56.18
8900	6657	54.16	96.32	41.12	55.20
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
9100	6806	49. 0	94.12	40.36	53.36
9200	6881	46. 8	93. 2	40. 4	52.58
9300	6956	43. 8	91.51	39.26	52.25
9400	7031	39.54	90.38	38.38	52. 0
9500	7106	36.24	89.26	37.32	51.54
9600	7180	32.30	88.12	36. 6	52. 6
9700	7255	28. 8	86.58	34.12	52.46
9800	7330	22.57	85.43	31.31	54.12

E in questa tavola è facile vedere che i raggi che formano l'angolo ONP di circa 40 gradi sono più numerosi di quelli che lo formano più
339 piccolo, o che quelli che formano l'angolo SQR| di circa 54 sono più numerosi di quelli che lo formano più grande. Poi, al fine di renderla ancora più precisa, faccio:

LA LINEA HF	LA LINEA CI	L'ARCO FG	L'ARCO FK	L'ANGOLO ONP	L'ANGOLO SQR
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
8100	6058	71.48	105.25	40.58	64.37
8200	6133	69.50	104.20	41.10	63.10
8300	6208	67.48	103.14	41.20	62.54
8400	6283	65.44	102. 9	41.26	61.43
8500	6358	63.34	101. 2	41.30	60.32
8600	6432	61.22	99.56	41.30	58.26
8700	6507	59. 4	98.48	41.28	57.20
8800	6582	56.42	97.40	41.22	56.18
8900	6657	54.16	96.32	41.12	55.20
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
9100	6806	49. 0	94.12	40.36	53.36
9200	6881	46. 8	93. 2	40. 4	52.58
9300	6956	43. 8	91.51	39.26	52.25
9400	7031	39.54	90.38	38.38	52. 0
9500	7106	36.24	89.26	37.32	51.54
9600	7180	32.30	88.12	36. 6	52. 6
9700	7255	28. 8	86.58	34.12	52.46
9800	7330	22.57	85.43	31.31	54.12

Et je vois ici que le plus grand angle ONP peut être de 41 degrés 30 340
minutes, et le plus petit SQR de 51.54, à quoi ajoutant ou ôtant environ 17 minutes pour le demi-diamètre du soleil, j'ai 41.47 pour le plus grand demi-diamètre de l'arc-en-ciel intérieur, et 51.37 pour le plus petit de l'extérieur.

Il est vrai que, l'eau étant chaude, sa réfraction est tant soit peu moindre que lorsqu'elle est froide, ce qui peut changer quelque chose en ce calcul. Toutefois, cela ne saurait augmenter le demi-diamètre de l'arc-en-ciel intérieur, que d'un ou deux degrés tout au plus; et lors, celui de l'extérieur sera de presque deux fois autant plus petit. Ce qui est digne d'être remarqué, parce que, par là, on peut démontrer que la réfraction de l'eau ne peut être guère moindre, ni plus grande, que je la suppose. Car, pour peu qu'elle fût plus grande, elle rendrait le demi-diamètre de l'arc-en-ciel intérieur moindre que 41 degrés, au lieu que, par la créance commune, on lui en donne 45; et si on la suppose assez petite pour faire qu'il soit véritablement de 45, on trouvera que celui de l'extérieur ne sera aussi guère plus que de 45, au lieu qu'il paraît à l'œil beaucoup plus grand que celui de l'intérieur. Et Maurolycus, qui est, je crois, le premier qui a déterminé l'un de 45 degrés, détermine l'autre d'environ 56. Ce qui montre le peu de foi qu'on doit ajouter aux observations qui ne sont pas accompagnées de la vraie raison. Au reste, je n'ai pas eu de peine à connaître pourquoi le rouge est en dehors de l'arc-en-ciel intérieur, ni pourquoi il est en dedans en l'extérieur; car la même cause pour | laquelle c'est vers F, plutôt que vers H, qu'il paraît 341



au travers du cristal MNP, fait que si, ayant l'œil en la place du linge blanc FGH, on regarde ce cristal, on y verra le rouge vers sa partie plus épaisse MP, et le bleu vers N, parce que le rayon teint de rouge qui va vers F, vient de C, la partie du soleil la plus avancée vers MP. Et cette même cause fait aussi que le centre des gouttes d'eau, et par conséquent leur plus épaisse partie, étant en dehors au respect des points colorés qui forment l'arc-en-ciel intérieur, le rouge y doit paraître en dehors; et qu'étant en dedans au respect de ceux qui forment l'extérieur, le rouge y doit aussi paraître en dedans.

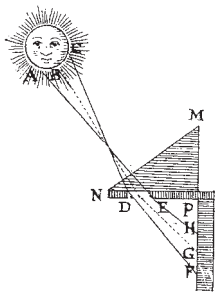
Ainsi je crois qu'il ne reste plus aucune difficulté en cette matière, si ce n'est peut-être touchant les irrégularités qui s'y rencontrent: comme,

[151] Francesco Maurolico (1494-1575), autore di numerosi scritti di ottica in cui si tratta anche della questione dei colori e dell'arcobaleno: cfr. F. Maurolicus, *Theoremata de lumine et umbra*, Lugduni, apud Bartholomaeum Vincentium, 1613.

[152] Cfr. F. Maurolicus, *Theoremata de lumine et umbra*, cit., pp. 68-69.

340 E qui vedo che l'angolo più grande ONP può essere di 41 gradi e 30 minuti e il più piccolo SQR di 51.54, cui, aggiungendo o sottraendo 17 minuti per il semidiametro del Sole, ottengo 41.47 per il semidiametro maggiore dell'arcobaleno interno e 51.37 per il semidiametro minore di quello esterno.

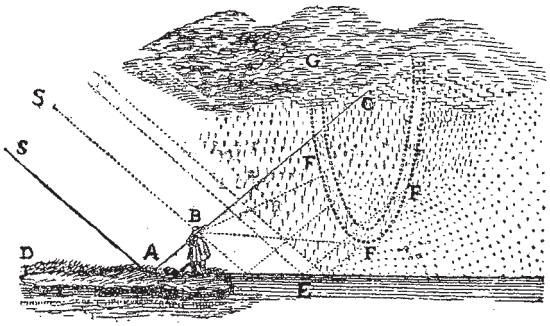
È vero che, quando l'acqua è calda, la sua rifrazione è un po' più piccola che quando è fredda, il che può cambiare qualcosa in questo calcolo. Tuttavia, ciò non può aumentare il semidiametro dell'arcobaleno interno se non di uno o due gradi tutt'al più, e allora quello dell'esterno sarà circa due volte tanto più piccolo. Ciò è degno di nota poiché per suo mezzo si può dimostrare che la rifrazione dell'acqua non può essere granché più piccola o più grande di come io la suppongo. Infatti, se fosse anche di poco più grande, essa renderebbe il semidiametro dell'arcobaleno interno più piccolo di 41 gradi, mentre, secondo l'opinione comune, lo si considera di 45; e se la si suppone abbastanza piccola da far sì che esso sia veramente di 45, si troverà che il semidiametro dell'arcobaleno esterno non sarà molto più grande di 45 benché ad occhio nudo appaia molto più grande di quello dell'interno. E Maurolico[151], che è, credo, il primo ad aver determinato che il primo è di 45 gradi, determina che l'altro è di circa 56[152]. Ciò mostra il poco credito che si deve dare alle osservazioni che non sono accompagnate dalla vera ragione[153]. Quanto al resto, non ho avuto difficoltà a conoscere il motivo per cui il rosso appare dalla parte esterna dell'arcobaleno interno e dalla parte
341 interna di quello esterno: infatti, la stessa causa per | cui esso appare, attraverso il cristallo MNP, verso F piuttosto che verso H, fa sì che, se si guarda questo cristallo con l'occhio posizionato là dove si trova il lenzuolo bianco FGH, si vedrà il rosso verso la sua parte più spessa MP e il blu verso N, poiché il raggio tinto di rosso che va verso F viene da C, la parte del Sole più vicina a MP. E questa stessa causa fa anche sì che, se il centro delle gocce d'acqua, e di conseguenza la loro parte più spessa, si trova all'esterno rispetto ai punti colorati che formano l'arcobaleno interno, il rosso deve apparirvi all'esterno, mentre, se si trova all'interno rispetto a quelli che formano l'arcobaleno esterno, il rosso deve apparirvi anche all'interno.



Così, credo che in questa materia non resti più alcuna difficoltà, se non, forse, a proposito delle irregolarità che vi si incontrano, come quando

[153] In realtà, Maurolico (*Theoremata de lumine et umbra*, cit., p. 69) era consapevole che l'arcobaleno potesse apparire sotto un angolo minore di 45°, ma aveva ammesso di non riuscire a spiegarsi come ciò potesse accadere.

lorsque l'arc n'est pas exactement rond, ou que son centre n'est pas en la ligne droite qui passe par l'œil et le soleil, ce qui peut arriver si les vents changent la figure des gouttes de pluie; car elles ne sauraient perdre si peu de leur rondeur, que cela ne fasse une notable différence en l'angle sous lequel les couleurs doivent paraître. On a vu aussi quelquefois, à ce qu'on m'a dit, un arc-en-ciel tellement renversé que ses cornes étaient tournées vers en haut, comme est ici représenté FF. Ce que je ne saurais juger être arrivé que | par la réflexion des rayons du soleil donnant sur l'eau de la mer, 342
ou de quelque lac. Comme si, venant de la partie du ciel SS, ils tombent sur l'eau DAE, et, de là, se réfléchissent vers la pluie CF, l'œil B verra l'arc FF,

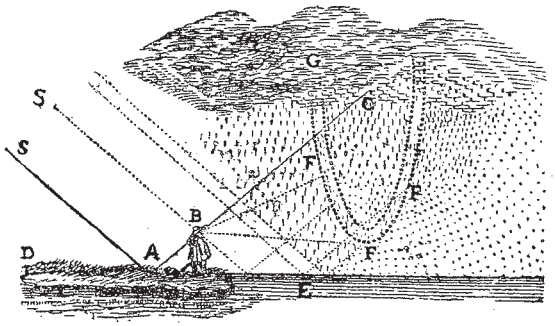


dont le centre est au point C, en sorte que, CB étant prolongée jusques à A, et AS passant par le centre du soleil, les angles SAD et BAE soient égaux, et que l'angle CBF soit d'environ 42 degrés. Toutefois, il est aussi requis à cet effet, qu'il n'y ait point du tout de vent qui trouble la face de l'eau vers E, et peut-être avec cela qu'il y ait quelque nue, comme G, qui empêche que la lumière du soleil, allant en ligne droite vers la pluie, n'efface celle que cette eau E y envoie: d'où vient qu'il n'arrive que rarement. Outre cela, l'œil peut être en telle situation, au respect du Soleil et de la pluie, qu'on verra la partie inférieure qui achève le cercle de l'arc-en-ciel, sans voir la supérieure; et ainsi qu'on la prendra pour un arc renversé, nonobstant qu'on ne la verra pas vers le ciel, mais vers l'eau, ou vers la terre.

On m'a dit aussi avoir vu quelquefois un troisième | arc-en-ciel au-des- 343
sus des deux ordinaires, mais qui était beaucoup plus faible, et environ autant éloigné du second que le second du premier. Ce que je ne juge pas

[154] La possibilità che si formassero più di due arcobaleni era stata negata da Aristotele (*Meteorologica*, III, 4, 375b 10-15), ma poi ammessa a partire da Alessandro di Afrodisia (*Commentaire sur les Météores d'Aristote. Traduction de Guillaume de Moerbeke*, ed. A. J. Smet, Louvain/Paris, Publications Universitaires de Louvain, Editions Béatrice-Nauwe-

l'arcobaleno non è esattamente tondo o il suo centro non sta sulla linea retta che passa per l'occhio e il Sole. Ciò può accadere se i venti cambiano la figura delle gocce di pioggia: esse non possono infatti perdere un po' della loro rotondità senza che ciò produca una notevole differenza quanto all'angolo sotto il quale i colori devono apparire. Talvolta, a quanto mi è stato detto, è stato anche visto un arcobaleno talmente invertito che i suoi corni erano girati verso l'alto, come è qui rappresentato FF. Non
342 posso che giudicare che ciò sia accaduto | a causa della riflessione dei raggi del Sole che colpiscono l'acqua del mare o di qualche lago. Se per esempio, venendo dalla parte del cielo SS, essi cadono sull'acqua DAE e di là si riflettono verso la pioggia CF, l'occhio B vedrà l'arco FF, il cui



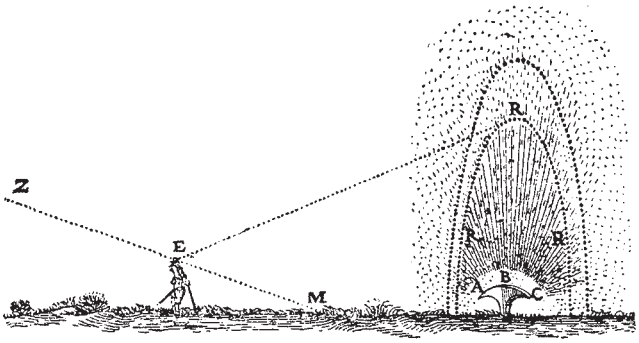
centro è nel punto C, in modo tale che, prolungata CB fino ad A e passando AS per il centro del Sole, gli angoli SAD e BAE siano uguali e l'angolo CBF di circa 42 gradi. Tuttavia, perché ciò accada si richiede anche che non vi sia alcun vento che turbi la superficie dell'acqua verso E e forse, al contempo, che vi sia anche qualche nube, come G, che impedisca che la luce del Sole, andando in linea retta verso la pioggia, cancelli quella che vi invia questa acqua E: è per questo che ciò accade solo raramente. Inoltre l'occhio può trovarsi in una posizione tale, rispetto al Sole e alla pioggia, che si veda la parte inferiore che chiude il cerchio dell'arcobaleno senza vedere quella superiore e che così la si prenda per un arco capovolto, sebbene non la si veda verso il cielo ma verso l'acqua o verso la terra.

Mi è anche stato detto che, sopra i due arcobaleni ordinari, è stato
343 visto talvolta un terzo | arcobaleno, ma molto più debole, e lontano dal secondo all'incirca quanto il secondo è lontano dal primo[154]. Giudico

laerts, 1968, p. 250). Tra i *recentiores* era stata ammessa da F. Vicomercatus, *In quatuor libros Aristotelis Meteorologicorum*, cit., p. 149. Al proposito, cfr. C. B. Boyer, *The Tertiary Rainbow. An Historical Account*, «Isis», XLIX (1958), 2, pp. 141-154.

pouvoir être arrivé, si ce n'est qu'il y ait eu des grains de grêle fort ronds et fort transparents, mêlés parmi la pluie, dans lesquels la réfraction étant notablement plus grande que dans l'eau, l'arc-en-ciel extérieur aura dû y être beaucoup plus grand, et ainsi paraître au-dessus de l'autre. Et pour l'intérieur, qui par même raison aura dû être plus petit que l'intérieur de la pluie, il se peut faire qu'il n'aura point été remarqué, à cause du grand lustre de celui-ci; ou bien que, leurs extrémités s'étant jointes, on ne les aura comptés tous deux que pour un, mais pour un dont les couleurs auront été autrement disposées qu'à l'ordinaire.

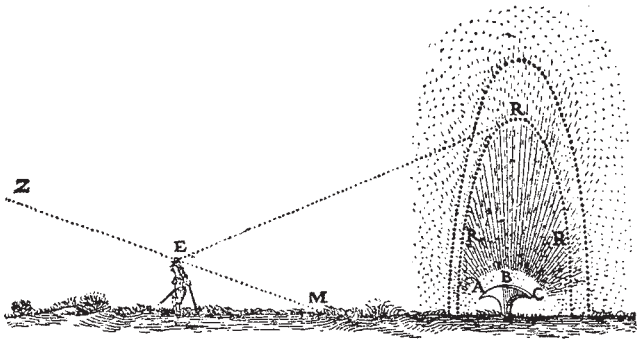
Et ceci me fait souvenir d'une invention pour faire paraître des signes dans le ciel, qui pourraient causer grande admiration à ceux qui en ignoreraient les raisons. Je suppose que vous savez déjà la façon de faire voir l'arc-en-ciel par le moyen d'une fontaine. Comme, si l'eau qui sort par les petits trous ABC, sautant assez haut, s'épand en l'air de tous côtés vers R, et que le soleil soit vers Z, en sorte que, ZEM étant ligne droite, l'angle MER puisse être d'environ 42 degrés, l'œil E ne manquera pas de voir l'iris vers R, tout semblable à celui qui paraît dans le ciel. A quoi il faut maintenant ajouter qu'il y a des huiles, des eaux-de-vie, et d'autres liqueurs, dans lesquelles la réfraction se fait notablement plus grande ou plus petite qu'en l'eau commune, et qui ne sont pas pour | cela moins claires et transpa- 344
rentes. En sorte qu'on pourrait disposer par ordre plusieurs fontaines, dans lesquelles y ayant diverses de ces liqueurs, on y verrait par leur moyen toute une grande partie du ciel pleine des couleurs de l'iris: à savoir en faisant



que les liqueurs dont la réfraction serait la plus grande, fussent les plus proches des spectateurs, et qu'elles ne s'élevassent point si haut, qu'elles empêchassent la vue de celles qui seraient derrière. Puis, à cause que, fermant une partie des trous ABC, on peut faire disparaître telle partie de l'iris RR qu'on veut, sans ôter les autres, il est aisé à entendre que, tout de

che ciò non sia potuto accadere, a meno che, mescolati alla pioggia, non vi siano stati dei chicchi di grandine molto tondi e molto trasparenti; e siccome in essi la rifrazione è notevolmente più grande che nell'acqua, l'arcobaleno esterno ha dovuto essere molto più grande e apparire quindi al di sopra dell'altro. Quanto all'arco interno, che per la stessa ragione deve esser stato più piccolo di quello interno della pioggia, può darsi che esso non sia stato osservato o a causa della grande lucentezza di quest'ultimo, oppure perché, essendosi congiunte le loro estremità, essi sono stati contati come un solo arcobaleno, ma dai colori disposti diversamente da come lo sono di solito.

E ciò mi fa ricordare di una invenzione per far apparire dei segni nel cielo, che potrebbero causare grande meraviglia in chi ne ignorasse le ragioni. Suppongo che sappiate già come far vedere l'arcobaleno per mezzo di una fontana. Se l'acqua che esce attraverso i piccoli fori ABC, zampillando abbastanza in alto, si diffonde nell'aria da ogni lato verso R, e se il Sole è verso Z, in modo tale che, essendo ZEM una linea retta, l'angolo MER possa essere di circa 42 gradi, l'occhio E non mancherà di vedere verso R un'iride del tutto simile a quella che appare nel cielo. A ciò bisogna ora aggiungere che vi sono degli oli, delle acquaviti e altri liquidi nei quali la rifrazione è molto più grande o più piccola che nel-
344 l'acqua comune e che non per | questo sono meno chiari e trasparenti. In tal modo si potrebbero disporre ordinatamente alcune fontane; ed essendoci in esse diversi di questi liquidi, per loro mezzo si vedrebbe una gran parte del cielo piena dei colori dell'iride, ossia facendo in



modo che i liquidi la cui rifrazione è maggiore fossero i più vicini agli spettatori e non si sollevassero così in alto da impedire la vista di quelli che sono dietro. Siccome poi, chiudendo una parte dei fori ABC, si può far scomparire, dell'iride RR, la parte che si vuole senza eliminare le altre, è facile intendere che allo stesso modo, aprendo e chiudendo

même, ouvrant et fermant à propos les trous de ces diverses fontaines, on pourra faire que ce qui paraîtra coloré ait la figure d'une croix, ou d'une colonne, ou de quelque autre telle chose qui donne sujet d'admiration. Mais j'avoue qu'il y faudrait de l'adresse et de la dépense, afin de proportionner ces fontaines, et faire que les liqueurs y sautassent si haut, que ces figures pussent être vues de fort loin par tout un peuple, sans que l'artifice s'en découvrît. |

opportunamente i fori di queste diverse fontane, si potrà fare in modo che ciò che apparirà colorato abbia la figura di una croce, di una colonna o di qualche altra cosa simile che desti meraviglia. Ma ammetto che ci vorrebbero un certa abilità e una certa possibilità di spendere per allestire queste fontane e far sì che i liquidi vi zampillino così in alto che queste figure possano esser viste da molto lontano da un'intera folla senza che venga scoperto l'artificio[155]. |

[155] Al proposito, cfr. *Regole*, XIII, *B Op* II 777-779 (AT X 435, l. 26 - 436, l. 13) e nota n. 119.

DE LA COULEUR DES NUES, ET DES CERCLES OU COURONNES QU'ON VOIT QUELQUEFOIS AUTOUR DES ASTRES 345

Discours Neuvième

Après ce que j'ai dit de la nature des couleurs, je ne crois pas avoir beaucoup de choses à ajouter touchant celles qu'on voit dans les nues. Car, premièrement, pour ce qui est de leur blancheur et de leur obscurité ou noirceur, elle ne procède que de ce qu'elles sont plus ou moins exposées à la lumière des astres, ou à l'ombre, tant d'elles-mêmes que de leurs voisines. Et il y a seulement ici deux choses à remarquer. Dont l'une est que les superficies des corps transparents font réfléchir une partie des rayons qui viennent vers elles, ainsi que j'ai dit ci-dessus; ce qui est cause que la lumière peut mieux pénétrer au travers de trois piques d'eau, qu'elle ne fait au travers d'un peu d'écume, qui n'est toutefois autre chose que de l'eau, mais en laquelle il y a plusieurs superficies, dont la première faisant réfléchir une partie de cette lumière, et la seconde une autre partie, et ainsi de suite, il n'en reste bientôt plus du tout, ou presque plus, qui passe outre. Et c'est ainsi que ni le verre pilé, ni la neige, ni les nues lorsqu'elles sont un peu épaisses, ne peuvent être transparentes. L'autre chose qu'il y a ici à | remar- 346
quer, est qu'encore que l'action des corps lumineux ne soit que de pousser en ligne droite la matière subtile qui touche nos yeux, toutefois le mouvement ordinaire des petites parties de cette matière, au moins de celles qui sont en l'air autour de nous, est de rouler en même façon qu'une balle roule étant à terre, encore qu'on ne l'ait poussée qu'en ligne droite. Et ce sont proprement les corps qui les font rouler en cette sorte, qu'on nomme blancs; comme font, sans doute, tous ceux qui ne manquent d'être transparents qu'à cause de la multitude de leurs superficies, tels que sont l'écume, le verre pilé, la neige et les nues. En suite de quoi on peut entendre pourquoi le ciel, étant fort pur et déchargé de tous nuages, paraît bleu, pourvu qu'on sache que, de lui-même, il ne rend aucune clarté, et qu'il paraîtrait extrêmement noir, s'il n'y avait point du tout d'exhalaisons ni de vapeurs au-dessus de nous, mais qu'il y en a toujours plus ou moins qui font réfléchir quelques rayons vers nos yeux, c'est-à-dire qui repoussent

[156] A questo discorso, in generale, si fa riferimento nella lettera *A Mersenne*, marzo 1636, B 83, p. 329 (AT I 340, ll. 3-10).

[157] Cfr. *Meteore*, V, *B Op* I 377 (AT VI 279, l. 16 - 280, l. 1).

[158] Termine utilizzato nel XVII secolo come unità di misura della profondità delle acque: una 'picca' misurava circa m. 1,60.

345

Il colore delle nubi e i cerchi o corone che si vedono talvolta intorno agli astri[156]

Discorso nono

Dopo ciò che ho detto sulla natura dei colori, non credo di aver molte cose da aggiungere a proposito di quelli che si vedono nelle nubi. Innanzi tutto, infatti, che siano bianche, scure o nere dipende soltanto dal fatto che esse sono più o meno esposte alla luce degli astri o all'ombra tanto di sé stesse che delle nubi che sono loro vicine. E qui ci sono solo due cose da notare. La prima è che le superfici dei corpi trasparenti, come ho detto sopra[157], fanno riflettere una parte dei raggi che vengono verso di esse; il che fa sì che la luce possa meglio penetrare attraverso tre picche[158] d'acqua che attraverso un po' di schiuma, la quale, pur non essendo altro che acqua, presenta tuttavia parecchie superfici delle quali la prima fa riflettere una parte di questa luce, la seconda un'altra parte, e così di seguito, in modo tale che in poco tempo non ne resta nessuna, o quasi nessuna, che passi oltre. Ed è per questo che né il vetro frantumato, né la neve, né le nubi, quando sono un po' dense, possono essere
346 trasparenti. L'altra cosa che qui si deve | notare è che, sebbene l'azione dei corpi luminosi consista soltanto nello spingere in linea retta la materia sottile che tocca i nostri occhi, tuttavia il movimento ordinario delle piccole parti di questa materia, almeno di quelle che sono nell'aria intorno a noi, consiste nel rotolare nella stessa maniera in cui una palla rotola per terra pur essendo stata spinta solo in linea retta[159]. E i corpi che si dicono bianchi sono propriamente quelli che le fanno rotolare in questo modo, come senza dubbio fanno tutti quelli che, se non sono trasparenti, è solo a causa della pluralità delle loro superfici, come la schiuma, il vetro frantumato, la neve e le nubi. Di conseguenza, si può intendere per quale motivo il cielo, quando è molto puro e sgombro di nubi, appare blu; ma si sappia che di per sé esso non emette alcun chiarore e che, se sopra di noi non vi fossero esalazioni e vapori, esso apparirebbe estremamente nero. Ma, più o meno numerosi che siano, ve ne sono sempre che fanno riflettere alcuni raggi verso i nostri occhi, cioè che respingono

[159] A questo passo fanno riferimento le seguenti lettere: *Morin a Descartes*, 22 febbraio 1638, B 148, p. 537 (AT I 546, l. 6 - 547, l. 13); *A Morin*, 13 luglio 1638, B 172, pp. 739-741 (AT II 208, ll. 3-25); ma cfr. anche *Morin a Descartes*, ottobre 1638, B 193, p. 911 (AT II 418, l. 10 - 419, l. 7); *A Ciermans*, 23 marzo 1638, B 159, p. 613 (AT II 77, l. 30 - 78, l. 5).

vers nous les petites parties de la matière subtile que le soleil ou les autres astres ont poussé contre elles; et lorsque ces vapeurs sont en assez grand nombre, la matière subtile, étant repoussée vers nous par les premières, en rencontre d'autres après, qui font rouler et tournoyer ses petites parties, avant qu'elles parviennent à nous. Ce qui fait alors paraître le ciel blanc, au lieu que, si elle n'en rencontre assez pour faire ainsi tournoyer ses parties, il ne doit paraître que bleu, suivant ce qui a été tantôt dit de la nature de la couleur bleue. | Et c'est la même cause qui fait aussi que l'eau de la mer, 347
aux endroits où elle est fort pure et fort profonde, semble être bleue; car il ne se réfléchit de sa superficie que peu de rayons, et aucun de ceux qui la pénètrent ne revient. De plus, on peut ici entendre pourquoi souvent, quand le soleil se couche ou se lève, tout le côté du ciel vers lequel il est paraît rouge: ce qui arrive lorsqu'il n'y a point tant de nues, ou plutôt de brouillards, entre lui et nous, que sa lumière ne puisse les traverser; mais qu'elle ne les traverse pas si aisément tout contre la terre, qu'un peu plus haut; ni si aisément un peu plus haut, que beaucoup plus haut. Car il est évident que cette lumière, souffrant réfraction dans ces brouillards, détermine les parties de la matière subtile qui la transmettent, à tournoyer en même sens que ferait une boule qui viendrait du même côté en roulant sur terre; de façon que le tournoiement des plus basses est toujours augmenté par l'action de celles qui sont plus hautes, à cause qu'elle est supposée plus forte que la leur; et vous savez que cela suffit pour faire paraître la couleur rouge, laquelle, se réfléchissant après dans les nues, se peut étendre de tous côtés dans le ciel. Et il est à remarquer que cette couleur, paraissant le matin, présage des vents ou de la pluie, à cause qu'elle témoigne qu'y ayant peu de nues vers l'Orient, le soleil pourra élever beaucoup de vapeurs avant le midi, et que les brouillards qui la font paraître commencent à monter; au lieu que, le soir, elle témoigne le beau temps, à cause que, n'y ayant que peu ou point de nues vers le couchant, les vents | orientaux doivent 348
régner, et les brouillards descendent pendant la nuit.

Je ne m'arrête point à parler plus particulièrement des autres couleurs qu'on voit dans les nues; car je crois que les causes en sont toutes assez comprises en ce que j'ai dit. Mais il paraît quelquefois certains cercles autour des autres, dont je ne dois pas omettre l'explication. Ils sont semblables à l'arc-en-ciel, en ce qu'ils sont ronds, ou presque ronds, et environnent toujours le soleil ou quelque autre astre: ce qui montre qu'ils sont causés par quelque réflexion ou réfraction dont les angles sont à peu près tous égaux. Comme aussi, en ce qu'ils sont colorés: ce qui montre qu'il y a de la réfraction, et de l'ombre qui limite la lumière qui les produit. Mais ils

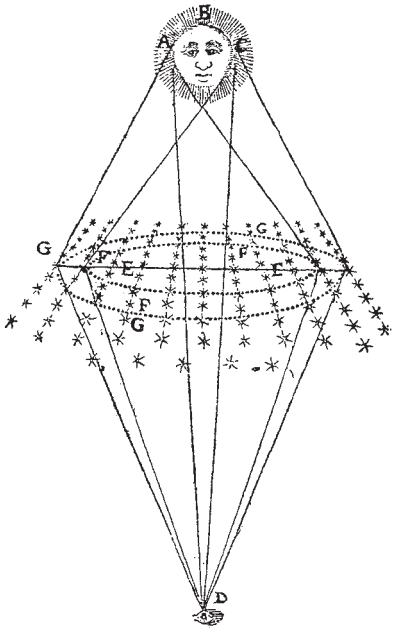
[160] Cfr. *Meteore*, VIII, *B Op* I 445 (AT VI 333, l. 31 - 334, l. 7) e nota n. 146.

verso di noi le piccole parti della materia sottile che il Sole o gli altri astri hanno spinto contro di essi. E quando questi vapori sono in gran numero, la materia sottile, essendo respinta verso di noi dai primi, ne incontra poi degli altri che fanno rotolare e ruotare le sue piccole parti prima che esse giungano a noi, il che fa sì che allora il cielo appaia bianco. Se invece non ne incontra a sufficienza per far ruotare in tal modo le sue parti, esso non può che apparire blu, conformemente a quanto poc'anzi è stato
347 detto della natura del colore blu[160]. | E la stessa causa fa anche sì che l'acqua del mare, nei punti in cui è molto pura e molto profonda, appaia blu: dalla sua superficie, infatti, si riflettono solo pochi raggi e nessuno di quelli che la penetrano ritorna indietro[161]. Inoltre, qui si può intendere perché, spesso, quando il Sole tramonta o sorge, tutto il lato del cielo verso il quale esso si trova appaia rosso: ciò accade quando tra esso e noi non ci sono così tante nubi, o piuttosto così tante nebbie, che la sua luce non possa attraversarle; ma essa non le attraversa così facilmente in prossimità della terra come fa un po' più in alto, né un po' più in alto così facilmente come fa molto più in alto. È infatti evidente che questa luce, subendo una rifrazione in queste nebbie, determina le parti della materia sottile che la trasmettono a ruotare nello stesso senso in cui ruoterebbe una sfera che venisse dallo stesso lato rotolando per terra. In tal modo, la rotazione delle più basse è sempre aumentata dall'azione di quelle più alte, poiché si suppone che sia più forte della loro; e voi sapete che ciò basta per far apparire il colore rosso, il quale, riflettendosi poi nelle nubi, può estendersi da ogni lato nel cielo. E si deve notare che, se appare al mattino, questo colore preannuncia venti o pioggia in quanto attesta che, essendoci poche nubi verso Oriente, il Sole potrà sollevare molti vapori prima di mezzogiorno e le nebbie che fanno sì che esso appaia cominciano a salire; la sera, invece, esso segnala il bel tempo poiché, essendoci solo poche nubi dove il Sole tramonta, o non essendoce-
348 ne alcuna, i venti | orientali devono regnare e le nebbie calare durante la notte.

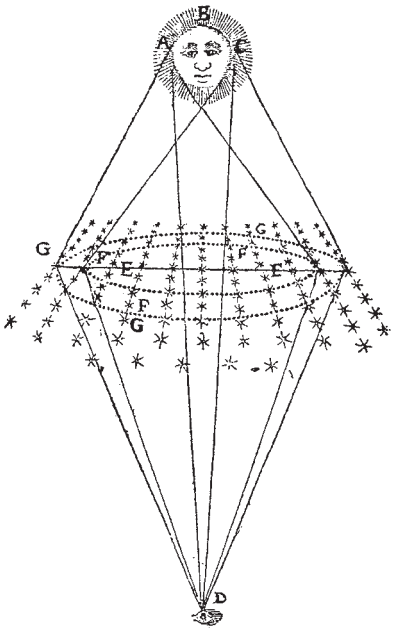
Non mi soffermo a parlare più in particolare degli altri colori che si vedono nelle nubi, poiché credo che le loro cause siano sufficientemente comprese in ciò che ho detto. Ma talvolta appaiono attorno agli astri certi cerchi di cui non voglio omettere la spiegazione. Essi sono simili all'arcobaleno perché sono rotondi, o quasi rotondi, e perché circondano sempre il Sole o qualche altro astro: ciò mostra che essi sono causati da qualche riflessione o rifrazione i cui angoli sono pressappoco tutti uguali. Ma sono simili all'arcobaleno anche per il fatto che sono colorati, il che mostra che si danno qualche rifrazione e un po' d'ombra che limita-

[161] Cfr., al proposito, l'obiezione di More nella lettera *More a Descartes*, 21 ottobre 1649, B 715, pp. 2781-2783 (AT V 442-443).

diffèrent en ce que l'arc-en-ciel ne se voit jamais que lorsqu'il pleut actuellement au lieu vers lequel on le voit, bien que souvent il ne pleuve pas au lieu où est le spectateur. Et eux ne se voient jamais où il pleut: ce qui montre qu'ils ne sont pas causés par la réfraction qui se fait en des gouttes d'eau ou en de la grêle, mais par celle qui se fait en ces petites étoiles de glace transparentes, dont il a été parlé ci-dessus. Car on ne saurait imaginer dans les nues aucune autre cause qui soit capable d'un tel effet; et si on ne voit jamais tomber de telles étoiles que lorsqu'il fait froid, la raison nous assure qu'il ne laisse pas de s'en former en toutes saisons. Même, à cause qu'il est besoin de quelque chaleur pour faire que, de blanches qu'elles sont au commencement, elles deviennent transparentes, ainsi qu'il est requis à cet effet, il est vraisemblable que | l'été y est plus propre que l'hi- 349
ver. Et encore que la plupart de celles qui tombent paraissent à l'œil extrêmement plates et unies, il est certain néanmoins qu'elles sont toutes quelque peu plus épaisses au milieu qu'aux extrémités, ainsi qu'il se voit aussi à l'œil en quelques-unes; et selon qu'elles le sont plus ou moins, elles font paraître ces cercles plus ou moins grands: car il y en a sans doute de plusieurs grandeurs. Et si ceux qu'on a le plus souvent observés ont eu leur diamètre d'environ 45 degrés, ainsi que quelques-uns ont écrit, je veux croire que les parcelles de glace, qui les causent de cette grandeur, ont la convexité qui leur est la plus ordinaire, et qui est peut-être aussi la plus grande qu'elles aient coutume d'acquérir, sans achever entièrement de se fondre. Soit, par exemple, ABC le soleil, D l'œil, E, F, G plusieurs petites parcelles de glace transparentes, arrangées côte à côte les unes des autres, ainsi qu'elles sont en se formant, et dont la convexité est telle, que le rayon venant, par exemple, du point A sur l'extrémité de celle qui est | marquée G, et 350
du point C sur l'extrémité de celle qui est marquée F, retourne vers



no la luce che li produce. Essi differiscono però per il fatto che l'arcobaleno appare unicamente quando sta effettivamente piovendo nel luogo in cui lo si vede (anche se spesso non piove nel luogo in cui si trova lo spettatore), mentre questi cerchi non si vedono mai dove piove; il che mostra che essi non sono causati dalla rifrazione che si produce nelle gocce d'acqua o nella grandine, ma da quella che si produce in quelle piccole stelle di ghiaccio trasparente di cui si è parlato sopra[162]. Nelle nubi, infatti, non si può immaginare altra causa che sia capace di produrre un tale effetto; e se non si vedono mai cadere stelle siffatte se non quando fa freddo, la ragione ci assicura che continuano a formarsene in ogni stagione. Inoltre, poiché occorre un certo calore per far sì che, da bianche che sono al principio, esse diventino trasparenti, come è richiesto a tal fine,
349 è verosimile che | l'estate sia più adatta dell'inverno. E ancorché la maggior parte di quelle che cadono appaiano ad occhio nudo estremamente piatte e lisce, è certo nondimeno che sono tutte un po' più spesse al centro che alle estremità (come si vede in alcune anche ad occhio nudo), e che, a seconda che lo siano di più o di meno, fanno apparire questi cerchi più o meno grandi: senza dubbio, infatti, ce ne sono di più grandezze. E se quei cerchi che sono stati più spesso osservati avevano il diametro di circa 45 gradi, come alcuni hanno scritto, voglio credere che le particelle di ghiaccio, che fanno sì che siano di quella grandezza, abbiano la convessità che per loro è più comune e che probabilmente è anche la più grande che siano solite acquisire senza finire interamente di sciogliersi. Siano, per esempio, ABC il Sole, D l'occhio, E, F, G parecchie piccole particelle di ghiaccio trasparenti disposte le une accanto alle altre (come quando si formano) e dotate di una convessità tale che il raggio che dal punto A va a colpire, per esempio, l'estre-
350 mità di quella | indicata con G e il raggio che dal punto C va a colpire l'estremità di quella indicata



[162] Cfr. *Meteore*, VI, *B Op* I 405-409 (AT VI 303, l. 6 - 306, l. 10).

D, et qu'il en vient vers D plusieurs autres de ceux qui traversent les autres parcelles de glace qui sont vers E, mais non point aucun de ceux qui traversent celles qui sont au-delà du cercle GG. Il est manifeste qu'outre que les rayons AD, CD, et semblables qui passent en ligne droite, font paraître le soleil de sa grandeur accoutumée, les autres, qui souffrent réfraction vers EE, doivent rendre toute l'aire comprise dans le cercle FF assez brillante, et faire que sa circonférence, entre les cercles FF et GG, soit comme une couronne peinte des couleurs de l'arc-en-ciel; et même que le rouge y doit être en dedans vers F, et le bleu en dehors vers G, tout de même qu'on a coutume de l'observer. Et s'il y a deux ou plusieurs rangs de parcelles de glace l'une sur l'autre, pourvu que cela n'empêche point que les rayons du soleil ne les traversent, ceux de ces rayons qui en traverseront deux par leurs bords, se courbant presque deux fois autant que les autres, produiront encore un autre cercle coloré, beaucoup plus grand en circuit, mais moins apparent que le premier; en sorte qu'on verra pour lors deux couronnes l'une dans l'autre, et dont l'intérieure sera la mieux peinte, comme il a aussi été quelquefois observé. Outre cela, vous voyez bien pourquoi ces couronnes n'ont pas coutume de se former autour des astres qui sont fort bas vers l'horizon; car les rayons rencontrent alors trop obliquement les parcelles de glace pour les traverser. Et pourquoi leurs couleurs ne sont pas si vives que les siennes; car elles sont causées par | des réfractions beaucoup 351
moindres. Et pourquoi elles paraissent plus ordinairement que lui autour de la lune, et même se remarquent aussi quelquefois autour des étoiles, à savoir lorsque les parcelles de glace interposées, n'étant que fort peu convexes, les rendent fort petites; car, d'autant qu'elles ne dépendent point de tant de réflexions et réfractions que l'arc-en-ciel, la lumière qui les cause n'a pas besoin d'être si forte. Mais souvent elles ne paraissent que blanches, non point tant par faute de lumière, que parce que la matière où elles se forment n'est pas entièrement transparente.

On en pourrait bien imaginer encore quelques autres qui se formassent à l'imitation de l'arc-en-ciel en des gouttes d'eau, à savoir, premièrement, par deux réfractions sans aucune réflexion; mais alors il n'y a rien qui détermine leur diamètre, et la lumière n'y est point limitée par l'ombre, comme il est requis pour la production des couleurs. Puis aussi par deux réfractions et trois ou quatre réflexions; mais leur lumière, étant alors grandement faible, peut aisément être effacée par celle qui se réfléchit de la superficie des mêmes gouttes; ce qui me fait douter si jamais elles paraissent, et le calcul montre que leur diamètre devrait être beaucoup plus grand qu'on ne le trouve en celles qu'on a coutume d'observer.

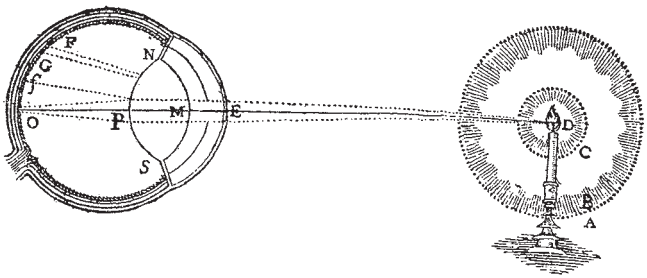
Enfin, pour ce qui est de celles qu'on voit quelquefois autour des lampes et des flambeaux, la cause n'en doit point être cherchée dans l'air, mais seulement dans l'œil qui les regarde. Et j'en ai vu cet été dernier une expérien-

con F tornino verso D, e tale che verso D vengano parecchi altri raggi di quelli che attraversano le altre particelle di ghiaccio che sono verso E, ma nessuno di quelli che attraversano le particelle che sono al di là del cerchio GG. È manifesto che, oltre ai raggi, AD, CD e simili, che, passando in linea retta, fanno apparire il Sole della grandezza consueta, gli altri, che subiscono una rifrazione verso EE, devono rendere tutta l'area compresa nel cerchio FF abbastanza splendente e far sì che la sua circonferenza, tra i cerchi FF e GG, sia come una corona tinta dei colori dell'arcobaleno e anche che il rosso debba trovarsi all'interno verso F e il blu all'esterno verso G, proprio come si osserva di solito. E se ci sono due o più file di particelle di ghiaccio l'una sull'altra, purché ciò non impedisca che i raggi del Sole le attraversino, quei raggi che ne attraverseranno due ai loro margini, curvandosi pressappoco il doppio degli altri, produrranno ancora un altro cerchio colorato dal perimetro molto più grande ma meno appariscente del primo: così si vedranno allora due corone l'una nell'altra, delle quali quella interna, come talvolta è anche stato osservato, sarà quella meglio delineata. Oltre a ciò, vedete bene perché, di solito, queste corone non si formino intorno agli astri che sono molto bassi verso l'orizzonte: in tal caso, infatti, i raggi incontrano le particelle di ghiaccio troppo obliquamente per attraversarle. E perché i loro colori non siano così vivaci come i suoi: essi, infatti, sono causati
351 da | rifrazioni molto più piccole. E perché di solito esse appaiano più dell'arcobaleno intorno alla Luna, e anche perché talvolta le si osservi intorno alle stelle, cioè quando le particelle di ghiaccio che stanno in mezzo, essendo pochissimo convesse, le rendono molto piccole: infatti, dato che esse non dipendono da tante riflessioni e rifrazioni come l'arcobaleno, la luce che le causa non ha bisogno di essere altrettanto forte. Spesso, però, esse non appaiono che bianche; e ciò non tanto per mancanza di luce, quanto perché la materia in cui esse si formano è interamente trasparente.

Si potrebbero immaginare ancora alcune altre corone che si formino, come l'arcobaleno, in alcune gocce d'acqua. Cioè, innanzi tutto, attraverso due rifrazioni e senza alcuna riflessione; ma allora nulla determina il loro diametro e la luce non è affatto limitata dall'ombra, come si richiede per la produzione dei colori. Poi, anche attraverso due rifrazioni e tre o quattro riflessioni; in tal caso però, essendo molto debole, la loro luce può facilmente essere annullata da quella che si riflette dalla superficie delle stesse gocce. Ciò mi fa dubitare che esse possano mai apparire; e il calcolo mostra che il loro diametro dovrebbe essere molto più grande di quanto non si riscontri in quelle che si osservano di solito.

Infine, per quanto riguarda quelle corone che si vedono talvolta intorno alle lampade e alle torce, la loro causa non è da ricercare nell'aria, ma soltanto nell'occhio che le guarda. E l'estate scorsa ne ho fatto un'espe-

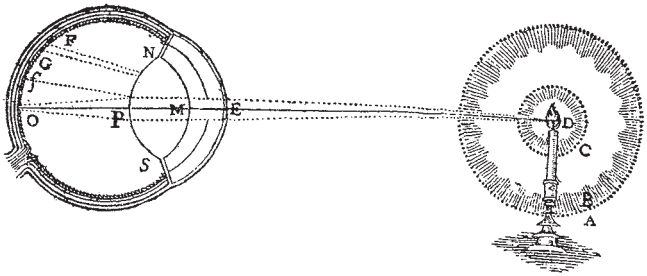
ce fort manifeste: ce fut en | voyageant de nuit dans un navire, où, après 352
avoir tenu tout le soir ma tête appuyée sur une main, dont je fermais mon œil droit, pendant que je regardais de l'autre vers le ciel, on apporta une chandelle au lieu où j'étais; et lors, ouvrant les deux yeux, je vis deux couronnes autour de la flamme, dont les couleurs étaient aussi vives, que je les aie jamais vues en l'arc-en-ciel. AB est la plus grande, qui était rouge vers



A, et bleue vers B; CD la plus petite, qui était rouge aussi vers C, mais vers D elle était blanche, et s'étendait jusques à la flamme. Après cela, refermant l'œil droit, j'aperçus que ces couronnes disparaissaient, et qu'au contraire, en l'ouvrant et fermant le gauche, elles continuaient de paraître: ce qui m'assura qu'elles ne procédaient que de quelque disposition, que mon œil droit avait acquise pendant que je l'avais tenu fermé, et qui était cause qu'outre que la plupart des rayons de la flamme qu'il recevait, la représentaient vers O, où ils s'assemblaient, il y en avait aussi quelques-uns, qui étaient tellement détournés, qu'ils s'étendaient en tout l'espace *f*O, où ils peignaient la couronne CD, et quelques autres en l'espace FG, où ils peignaient la couronne AB. Je ne | détermine point quelle était cette disposi- 353
tion; car plusieurs différentes peuvent causer le même effet. Comme, s'il y a seulement une ou deux petites rides en quelqu'une des superficies E, M, P, qui, à cause de la figure de l'œil, s'y étendent en forme d'un cercle dont le centre soit en la ligne EO, comme il y en a souvent de toutes droites qui se croisent en cette ligne EO, et nous font voir de grands rayons épars çà et là autour des flambeaux; ou bien qu'il y ait quelque chose d'opaque entre E et P, ou même à côté en quelque lieu, pourvu qu'il s'y étende circulairement; ou enfin que les humeurs ou les peaux de l'œil aient en quelque façon changé de tempérament ou de figure; car il est fort commun à ceux

[163] A questa esperienza, risalente alla prima metà di maggio 1635, ed alla sua spiegazione, si fa riferimento nella lettera *A Golius*, 19 maggio 1635, B 74, p. 293 (AT I 318, l. 6-320, l. 5). In generale, sulle corone che appaiono attorno alle candele, cfr. le seguenti lettere *A Mersenne*: 18 dicembre 1629, B 25, pp. 99 e 109-111 (AT I 83, ll. 2-14 e 97, l. 11-

352 rienza molto manifesta[163]. È accaduto | viaggiando di notte su una nave. Dopo aver tenuto per tutta la sera la testa appoggiata su una mano, con cui chiudevo l'occhio destro mentre con l'altro guardavo verso il cielo, qualcuno portò una candela dove mi trovavo, e allora, aprendo entrambi gli occhi, vidi intorno alla fiamma due corone i cui colori erano vivaci come mai li avevo visti nell'arcobaleno. AB è la corona più grande, che

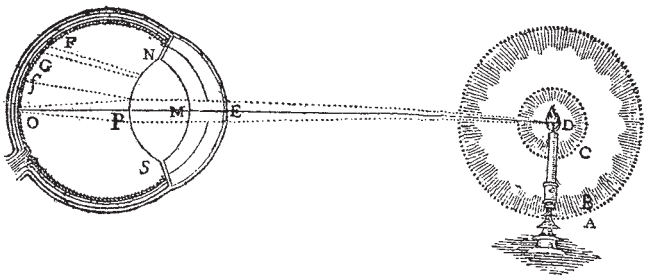


era rossa verso A e blu verso B; CD è quella più piccola, anch'essa rossa verso C mentre verso D era bianca e si estendeva fino alla fiamma. Dopodiché, chiudendo di nuovo l'occhio destro, mi accorsi che queste corone scomparivano e che al contrario, aprendo il destro e chiudendo il sinistro, continuavano ad apparire: ciò mi assicurò che non procedevano che da qualche disposizione che il mio occhio destro aveva acquisito mentre l'avevo tenuto chiuso e che non soltanto faceva sì che la maggior parte dei raggi della fiamma che l'occhio riceveva la rappresentassero verso O, dove si riunivano, ma anche che ve ne fossero alcuni talmente deviati da estendersi in tutto lo spazio *f*O, dove dipingevano la corona CD, e alcuni altri nello spazio FG, dove dipingevano la coro-
353 na AB. Non | determino quale fosse questa disposizione, giacché molte e diverse disposizioni possono causare lo stesso effetto[164]. Ciò accade, ad esempio, se vi sono soltanto una o due piccole rughe su qualcuna delle superfici E, M, P, che, a causa della figura dell'occhio, si estendono su di esso a forma di cerchio con il centro sulla linea EO, come spesso ve ne sono anche alcune diritte che si incrociano su questa linea EO e ci fanno vedere grandi raggi sparsi qua e là intorno alle torce; oppure se tra E e P c'è qualcosa di opaco, o anche a lato da qualche parte, ma a condizione che vi si estenda circolarmente; o se infine gli umori o le pelli dell'occhio hanno cambiato temperamento o figura: infatti, a colo-

99, l. 19); 25 febbraio 1630, B 27, pp. 127-129 (AT I 123, ll. 11-21) e, a proposito della differenza tra le corone che appaiono attorno alle candele e quelle che appaiono attorno agli astri, gennaio 1630, B 26, p. 115 (AT I 106, ll. 4-19).

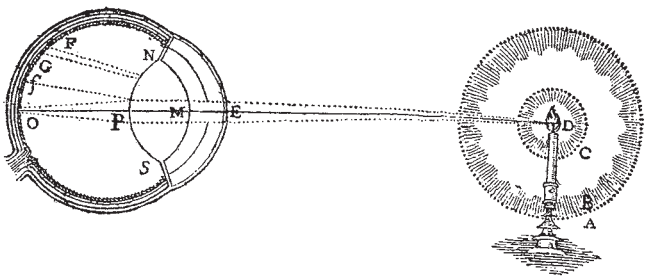
[164] Su ciò, cfr. *A Mersenne*, 25 gennaio 1638, B 140, p. 497 (AT I 502, ll. 4-30).

qui ont mal aux yeux de voir de telles couronnes, et elles ne paraissent pas semblables à tous. Seulement faut-il remarquer que leur partie extérieure, comme A et C, est ordinairement rouge, tout au contraire de celles qu'on voit autour des astres; dont la raison vous sera claire, si vous considérez qu'en la production de leurs couleurs, c'est l'humeur cristalline PNM qui tient lieu du prisme de cristal dont il a tantôt été parlé, et le fond de l'œil FG*f* qui tient lieu du linge blanc qui était derrière. Mais vous douterez peut-être pourquoi, puisque l'humeur cristalline a ce pouvoir, elle ne colore pas en même façon tous les objets que nous voyons, si ce n'est que vous considériez que les rayons qui viennent de chaque point de ces objets vers chaque point du fond de l'œil, passant les uns par celui de ses côtés qui est marqué N, et les autres par celui qui est | marqué S, ont des actions toutes 354
contraires, et qui se détruisent les unes les autres, au moins en ce qui regar-



de la production des couleurs; au lieu qu'ici les rayons qui vont vers FG*f* ne passent que par N. Et tout ceci se rapporte si bien à ce que j'ai dit de la nature des couleurs, qu'il peut, ce me semble, beaucoup servir pour en confirmer la vérité.

ro che hanno qualche male agli occhi, capita spesso di vedere corone di tal genere, ed esse non appaiono a tutti simili. Bisogna soltanto notare che la loro parte esterna, come A e C, è comunemente rossa, al contrario di quelle che si vedono intorno agli astri. La ragione di ciò vi risulterà chiara se considererete che, nella produzione dei loro colori, l'umore cristallino PNM prende il posto del prisma di cristallo di cui si è poc'anzi parlato[165] e che il fondo dell'occhio FG*f* prende il posto del lenzuolo bianco che stava dietro. Ma vi chiederete forse la ragione per cui l'umore cristallino, avendo questo potere, non colori alla stessa maniera tutti gli oggetti che vediamo, a meno che non consideriate che i raggi che vanno da ciascun punto di questi oggetti verso ciascun punto del fondo dell'occhio (alcuni passando per il suo lato indicato con N e gli altri per
354 quello | indicato con S) hanno azioni del tutto contrarie e si distruggono



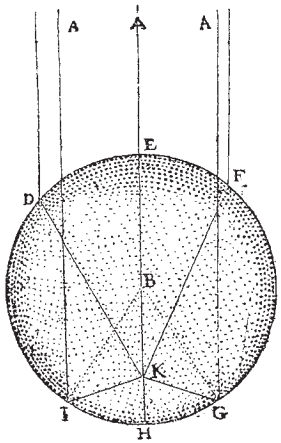
l'un l'altro, almeno per ciò che riguarda la produzione dei colori, mentre qui i raggi che vanno verso FG*f* passano soltanto per N. E tutto questo si adatta così bene a ciò che ho detto sulla natura dei colori da poter servire molto, mi sembra, a confermarne la verità.

[165] Cfr. *Meteore*, VIII, *B Op* I 439-441 (AT VI 329, l. 16 - 332, l. 9).

De l'apparition de plusieurs soleils

Discours Dernier

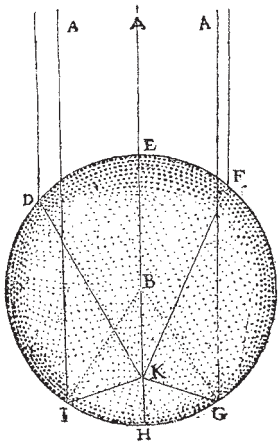
On voit encore quelquefois d'autres cercles dans les nues, qui diffèrent de ceux dont j'ai parlé, en ce qu'ils ne paraissent jamais que tout blancs, et qu'au lieu d'avoir quelque astre en leur centre, ils traversent ordinairement celui du soleil ou de la lune, et semblent parallèles ou presque parallèles à l'Horizon. Mais, parce qu'ils ne paraissent qu'en ces grandes | nues toutes 355
rondes dont il a été parlé ci-dessus, et qu'on voit aussi quelquefois plusieurs soleils ou plusieurs lunes dans les mêmes nues, il faut que j'explique ensemble l'un et l'autre. Soit, par exemple, A le Midi, où est le soleil accompagné d'un vent chaud qui tend vers B, et C le Septentrion, d'où il vient un vent froid qui tend aussi vers B. Et là je suppose que ces deux vents rencontrent ou assemblent une nue, composée de parcelles de neige, qui s'étend si loin en profondeur et en largeur, qu'ils ne peuvent passer l'un au-dessus, l'autre au-dessous, ou entre deux, ainsi qu'ils ont ailleurs de coutume, mais qu'ils sont contraints de prendre leur cours tout à l'entour: au moyen de quoi, non seulement ils l'arrondissent, mais aussi celui qui vient du Midi, étant chaud, fond quelque peu la neige de son circuit, laquelle étant aussitôt regelée, tant par celui du Nord qui est froid, que par la proximité de la neige intérieure qui n'est pas encore fondue, peut former comme un grand anneau de glace toute continue et transparente, dont la superficie ne manquera pas d'être assez polie, à cause que les vents qui l'arrondissent sont fort uniformes. Et, de plus, cette glace ne manque pas d'être plus épaisse du côté DEF, que je suppose exposé au vent chaud et au soleil, que de l'autre GHI, où la | neige ne s'est pu fondre si aisément. Et enfin, il faut 356
remarquer qu'en cette constitution d'air, et sans orage, il ne peut y avoir assez de chaleur autour de la nue B, pour y former ainsi de la glace, qu'il n'y en ait aussi assez en la terre qui est au-dessous, pour y exciter des vapeurs qui la soutiennent, en soulevant et poussant vers le ciel tout le



L'APPARIZIONE DI PARECCHI SOLI

Discorso ultimo

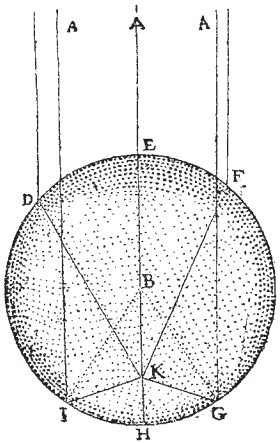
Nelle nubi si vedono talvolta anche altri cerchi, che differiscono da quelli di cui ho parlato per il fatto che appaiono sempre bianchi e perché, invece di avere al centro qualche astro, attraversano solitamente il centro del Sole o della Luna e sembrano paralleli o quasi paralleli all'o-
355 rizzonte. Ma dato che appaiono soltanto in quelle grandi | nubi perfettamente tonde di cui si è parlato sopra[166] e che in quelle stesse nubi si vedono talvolta più soli e più lune, occorre che io spieghi assieme questi due fenomeni. Sia, per esempio, A il Mezzogiorno, dove si trova il Sole accompagnato da un vento caldo tendente verso B, e C il Settentrione, dal quale viene un vento freddo anch'esso tendente verso B. E suppongo che là questi due venti incontrino o assemblino una nube, composta di particelle di neve, che si estenda così tanto in profondità e in larghezza che essi non possano passare l'uno al di sopra della nube, l'altro al di sotto, o nel mezzo (come altrove sono soliti fare), ma che siano costretti a prendere il loro corso tutt'intorno ad essa: ciò facendo, non soltanto essi l'arrotondano, ma quello che viene da Mezzogiorno, essendo caldo, scioglie anche un po' la neve del suo perimetro, la quale, venendo di nuovo ghiacciata



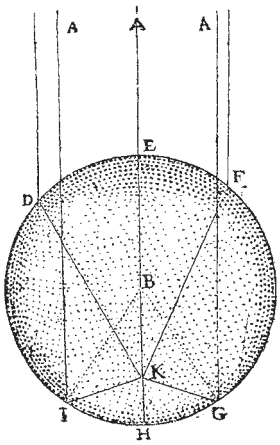
subito dopo tanto dal vento del Nord, che è freddo, quanto dalla vicinanza della neve interna che non è ancora sciolta, può formare come un grande anello di ghiaccio, del tutto continuo e trasparente, la cui superficie sarà abbastanza levigata in quanto i venti che l'arrotondano sono molto uniformi. Inoltre, questo ghiaccio non può non essere più spesso dal lato DEF, che suppongo esposto al vento caldo e al Sole, che dall'al-
356 tro lato GHI, dove la | neve non ha potuto sciogliersi così facilmente. Infine, poi, bisogna notare che in questa condizione d'aria, e senza burrasca, intorno alla nube B non può esserci un calore sufficiente per formarvi del ghiaccio senza che nella terra sottostante ve ne sia abbastanza per eccitare dei vapori che la sostengano sollevando e spingendo verso il

[166] Cfr. *Meteore*, V, *B Op* I 389-391 (AT VI 290, l. 22 - 291, l. 9).

corps de la nue qu'elle embrasse. En suite de quoi, il est évident que la clarté du soleil, lequel je suppose être assez haut vers le Midi, donnant tout autour sur la glace DEFGHI, et de là se réfléchissant sur la blancheur de la neige voisine, doit faire paraître cette neige, à ceux qui seront au-dessous, en forme d'un grand cercle tout blanc; et même, qu'il suffit, à cet effet, que la nue soit ronde, et un peu plus pressée en son circuit qu'au milieu, sans que l'anneau de glace doive être formé. Mais, lorsqu'il l'est, on peut voir, étant au-dessous vers le point K, jusques à six soleils, qui semblent être enchâssés dans le cercle blanc ainsi qu'autant de diamants dans une bague. A savoir, le premier vers E, par les rayons qui viennent directement du soleil que je suppose vers A; les deux suivants vers D et vers F, par la réfraction des rayons qui traversent la glace en ces lieux-là, où, son épaisseur allant en diminuant, ils se courbent en dedans de part et d'autre, ainsi qu'ils font en traversant le prisme de cristal dont il a tantôt été parlé. Et, pour cette cause, ces deux soleils ont leurs bords peints de rouge, en celui de leurs côtés qui est vers E, où la glace est le plus épaisse; et de bleu en l'autre, où elle l'est moins. Le quatrième soleil paraît par réflexion au point H, et les deux | derniers, aussi par réflexion, vers G et vers I, par où je sup- 357
pose qu'on peut décrire un cercle dont le centre soit au point K, et qui passe par B, le centre de la nue, en sorte que les angles KGB et KBG, ou BGA, sont égaux; et de tout de même KIB et KBI, ou BIA. Car vous savez que la réflexion se fait toujours par angles égaux, et que la glace, étant un corps poli, doit représenter le soleil en tous les lieux d'où ses rayons se peuvent réfléchir vers l'œil. Mais, parce que les rayons qui viennent tout droits sont toujours plus vifs que ceux qui viennent par réfraction, et ceux-ci encore plus vifs que ceux qui sont réfléchis, le soleil doit paraître plus brillant vers E que vers D ou F, et ici encore plus brillant que vers G ou H ou I; et ces trois, G, H et I, ne doivent avoir aucunes couleurs autour de leurs bords, comme les deux D et F, mais seulement être blancs. Que si les regardans ne sont pas vers K, mais quelque part plus avancés vers B, en sorte que le cercle dont leurs yeux sont le centre, et qui passe par B, ne coupe point la circonférence de la nue, ils ne pourront voir les deux soleils G et I, mais seulement les quatre



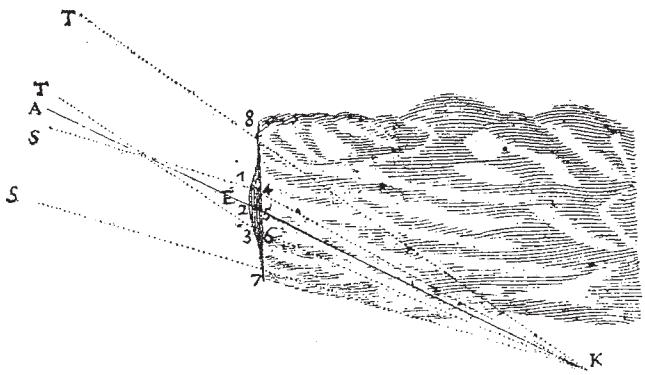
cielo tutto il corpo della nube che il ghiaccio circonda. Di conseguenza, è evidente che il chiarore del Sole, che suppongo abbastanza alto verso Mezzogiorno, colpendo tutt'intorno il ghiaccio DEFGHI e riflettendosi di là sul bianco della neve vicina, deve fare apparire questa neve, a coloro che si troveranno sotto, come un grande cerchio bianco; ed è anche evidente che perché ciò avvenga basta che la nube sia tonda e un po' più compressa sul perimetro che al centro, senza che l'anello di ghiaccio debba essersi formato. Ma quando si è formato, stazionandovi sotto verso il punto K, si possono vedere fino a sei soli, che sembrano incastonati nel cerchio bianco come tanti diamanti in un anello: e cioè il primo verso E, prodotto dai raggi che vengono direttamente dal Sole, che suppongo verso A, e i due seguenti verso D e verso F, prodotti dalla rifrazione dei raggi che attraversano il ghiaccio nei punti in cui, siccome lo spessore va diminuendo, essi si curvano all'interno da una parte e dall'altra come fanno attraversando il prisma di cristallo di cui si è poc'anzi parlato[167]. Per questa ragione questi due soli hanno i margini tinti di rosso sul lato che è verso E, dove il ghiaccio è più spesso, e di blu sull'altro, ove lo è di meno. Il quarto sole appare per riflessione nel punto H e gli ultimi
357 due, | anch'essi per riflessione, verso G e verso I, attraverso i quali suppongo che si possa descrivere un cerchio con il centro nel punto K e che passi per B, il centro della nube, in modo tale che gli angoli KGB e KBG, o BGA, siano uguali; e lo stesso vale per gli angoli KIB e KBI, o BIA. Sapete infatti che la riflessione si produce sempre per angoli uguali e che il ghiaccio, essendo un corpo levigato, deve rappresentare il Sole in tutti i luoghi dai quali i suoi raggi possono riflettersi verso l'occhio. Ma poiché i raggi che vi giungono direttamente sono sempre più vivi di quelli che vi giungono per rifrazione, e poiché questi ultimi sono ancora più vivi di quelli che sono riflessi, il Sole deve apparire più splendente verso E che verso D o F, e qui ancora più splendente che verso G o H o I; e questi tre, G, H e I non devono avere alcun colore ai margini, come i due D e F, ma essere soltanto bianchi. Se poi coloro che guardano non si trovano verso K, ma da qualche altra parte più vicina a B, in modo tale che il cerchio di cui i loro occhi sono il centro, e che passa per B, non tagli la circonferenza della nube, essi non potranno vedere i due soli G e I, ma soltanto gli altri quattro. E se, al contrario,



[167] Cfr. *Meteore*, VIII, *B Op* I 439-441 (AT VI 329, l. 16-332, l. 9).

autres. Et si, au contraire, ils sont fort reculés vers H, ou au-delà, vers C, ils ne pourront voir que les cinq, D, E, F, G et I. Et même, étant assez loin au-delà, ils ne | verront que les trois D, E, F, qui ne seront plus dans un 358
cercle blanc, mais comme traversés d'une barre blanche. Comme aussi, lorsque le soleil est si peu élevé sur l'Horizon qu'il ne peut éclairer la partie de la nue GHI, ou bien lorsqu'elle n'est pas encore formée, il est évident qu'on ne doit voir que les trois soleils D, E, F.

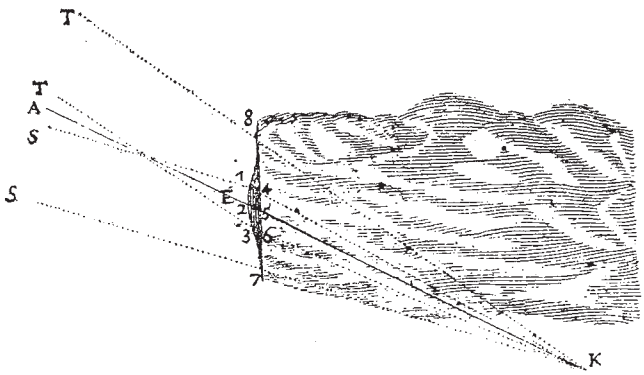
Au reste, je ne vous ai, jusques ici, fait considérer que le plan de cette nue, et il y a encore diverses choses à y remarquer, qui se verront mieux en son profil. Premièrement, bien que le soleil ne soit pas en la ligne droite qui



va d'E vers l'œil K, mais plus haut ou plus bas, il ne doit pas laisser de paraître vers là, principalement si la glace ne s'y étend point trop en hauteur ou profondeur; car alors la superficie de cette glace sera si courbée, qu'en quelque lieu qu'il soit, elle pourra quasi toujours renvoyer ses rayons vers K. Comme, si elle a en son épaisseur la figure comprise entre les lignes 123 et 456, il est évident que, non seulement lorsque le soleil sera en la | ligne droite A2, ses rayons la traversant pourront aller vers l'œil K, mais 359
aussi lorsqu'il sera beaucoup plus bas, comme en la ligne S1, ou beaucoup plus haut, comme en la ligne T3, et ainsi le faire toujours paraître comme s'il était vers E; car, l'anneau de glace n'étant supposé guère large, la différence qui est entre les lignes 4K, 5K et 6K, n'est pas considérable. Et notez que cela peut faire paraître le soleil, après même qu'il est couché, et qu'il peut aussi reculer ou avancer l'ombre des Horloges, et leur faire marquer une heure tout autre qu'il ne sera. Toutefois, si le soleil est beaucoup plus bas qu'il ne paraît vers E, en sorte que ses rayons passent aussi en ligne

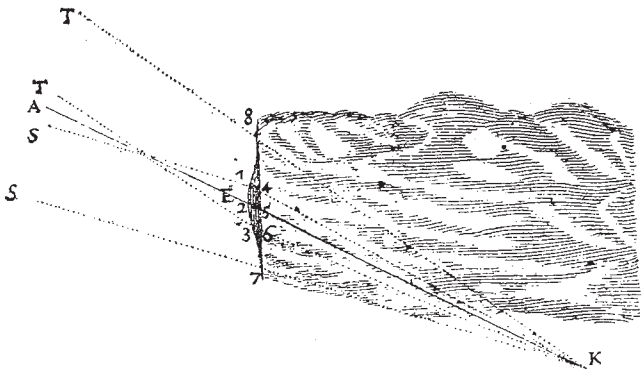
si trovano indietro, verso H, o più in là, verso C, essi potranno vedere solo i cinque soli D, E, F, G e I. Inoltre, se sono abbastanza lontani, |
358 vedranno soltanto i tre soli D, E, F, i quali non si troveranno più in un cerchio bianco, ma saranno come attraversati da una barra bianca. Allo stesso modo, quando il Sole è così poco alto sull'orizzonte da non poter illuminare la parte della nube GHI, oppure quando essa non si è ancora formata, è evidente che si devono vedere soltanto i tre soli D, E e F.

Del resto, fin qui vi ho fatto considerare soltanto il piano di questa nube; ma in essa si devono notare ancora molte cose che si vedranno meglio considerandola di profilo. Innanzi tutto, benché il Sole non si



trovi sulla linea retta che va da E verso l'occhio K, ma più in alto o più in basso, non per questo esso deve cessare di apparire in quella posizione, soprattutto se il ghiaccio non vi si estende troppo in altezza o in profondità: in tal caso, infatti, la superficie di questo ghiaccio sarà così incurvata che, quale che sia il luogo in cui si trova il Sole, essa potrà quasi sempre rinviare i suoi raggi verso K. Ad esempio, se il suo spessore ha la figura compresa tra le linee 123 e 456, è evidente che, attraversandola, i raggi del Sole potranno andare verso l'occhio K non soltanto quando
359 esso si troverà | sulla linea retta A2, ma anche quando sarà molto più basso, per esempio sulla linea S1, o molto più alto, ad esempio sulla linea T3, e così farlo sempre apparire come se fosse verso E: infatti, dato che non si suppone l'anello di ghiaccio molto largo, la differenza tra le linee 4K, 5K e 6K non è considerevole. E notate che ciò può fare apparire il Sole anche dopo che è tramontato e può far indietreggiare o avanzare l'ombra degli orologi e far sì che essi segnino un'ora del tutto diversa da quella reale. Tuttavia, se il Sole è molto più basso di quel che appare verso E, in modo che i suoi raggi passino anch'essi in linea retta sotto il

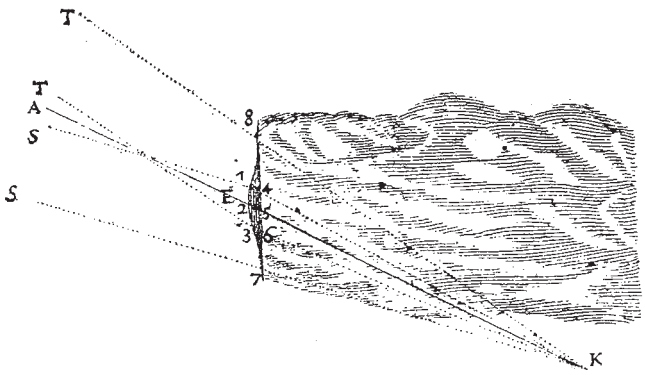
droite, par le dessous de la glace, jusques à l'œil K, comme S7K, que je suppose parallèle à S1, alors, outre les six soleils précédents, on en verra encore un septième au-dessous d'eux, et qui, ayant le plus de lumière, effacera l'ombre qu'ils pourraient causer dans les Horloges. Tout de même, s'il est si haut que ses rayons puissent passer en ligne droite vers K par le dessus de la glace, comme T8K, qui est parallèle à T3, et que la nue interposée ne soit point si opaque qu'elle les en empêche, on pourra voir un septième soleil au-dessus des six autres. Que si la glace 123, 456 s'étend plus haut et plus bas, comme jusques aux points 8 et 7, le soleil étant vers A, on en pourra voir trois l'un sur l'autre vers E, à savoir aux points 8, 5 et 7; et lors on en pourra aussi voir trois l'un sur l'autre vers D, et trois vers F, en sorte qu'il en paraîtra jusques à douze, enchâssés dans le cercle blanc DEFGHI. Et le soleil étant un peu plus bas | que vers S, ou plus haut que vers T, il en 360
pourra derechef paraître trois vers E, à savoir deux dans le cercle blanc, et un autre au-dessous, ou au-dessus; et lors il en pourra encore paraître deux vers D, et deux vers F. Mais je ne sache point que jamais on en ait tant observé, tout à la fois; ni même que, lorsqu'on en a vu trois l'un sur l'autre, comme il est arrivé plusieurs fois, on en ait remarqué quelques autres à leurs côtés; ou bien que, lorsqu'on en a vu trois côte à côte, comme il est aussi arrivé plusieurs fois, on en ait remarqué quelques autres au-dessus, ou au-dessous. Dont, sans doute, la raison est que la largeur de la glace, mar-



quée entre les points 7 et 8, n'a d'ordinaire aucune proportion avec la grandeur du circuit de toute la nue: en sorte que l'œil doit être fort proche du point E, lorsque cette largeur lui paraît assez grande pour y distinguer trois soleils l'un sur l'autre; et au contraire fort éloigné, afin que les rayons qui se courbent vers D et vers F, où se diminue le plus l'épaisseur de la glace, puissent parvenir jusques à lui. |

Et il arrive rarement que la nue soit si entière, qu'on en voie plus de trois 361

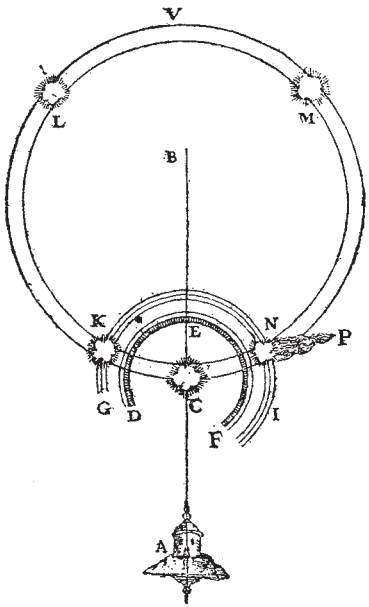
ghiaccio fino all'occhio K, come S7K, che suppongo parallelo a S1, allora, oltre ai sei soli precedenti, al di sotto di essi se ne vedrà anche un settimo che, avendo più luce, cancellerà l'ombra che essi potrebbero generare negli orologi. Allo stesso modo, se il Sole è così alto che i suoi raggi possono passare sopra il ghiaccio in linea retta verso K, come T8K, che è parallelo a T3, e se la nube frapposta non è così opaca da impedirlo, sopra gli altri sei si potrà vedere un settimo sole. Quando poi il ghiaccio 123, 456 si estende più in alto e più in basso, ad esempio fino ai punti 8 e 7, se il Sole è verso A si potranno vedere tre soli l'uno sull'altro verso E, cioè nei punti 8, 5 e 7; e allora se ne potranno vedere tre l'uno sull'altro verso D e tre verso F, in modo tale che appariranno fino a dodici soli
360 incastonati nel cerchio DEFGHI. E se il Sole è un po' più basso | che verso S, o più alto che verso T, potranno di nuovo apparirne tre verso E, cioè due nel cerchio bianco e un altro al di sotto o al di sopra di esso; e allora ne potranno apparire ancora due verso D e due verso F. Ma, che io sappia, non ne sono stati osservati così tanti in una sola volta, né, ai loro lati, se ne sono notati altri quando, come è accaduto parecchie volte, se ne sono visti tre uno sull'altro, e neppure ne sono stati visti altri al di sopra o al di sotto quando, come è pure accaduto alcune volte, ne sono stati visti tre uno accanto all'altro. Senza dubbio la ragione di ciò è che



comunemente la larghezza del ghiaccio, indicata tra i punti 7 e 8, non ha alcuna proporzione con la grandezza del perimetro di tutta la nube: così, quando questa larghezza gli appare abbastanza grande, l'occhio deve essere molto vicino al punto E per distinguervi tre soli l'uno sull'altro, e, al contrario, molto lontano affinché i raggi che si curvano verso D e verso F, nei quali lo spessore del ghiaccio diminuisce di più, possano giungere fino ad esso. |

361 E accade raramente che la nube sia così integra che si vedano più di

en même temps. Toutefois, on dit qu'en l'an 1625 le roi de Pologne en vit jusques à six. Et il n'y a que trois ans que le Mathématicien de Tubingue observa les quatre désignés ici par les lettres D, E, F, H; même il remarque particulièrement, en ce qu'il en a écrit, que les deux D et F étaient rouges vers celui du milieu E, qu'il nomme le vrai soleil, et bleus de l'autre côté; et que le quatrième H était fort pâle, et ne paraissait que fort peu. Ce qui confirme fort ce que j'ai dit. Mais l'observation la plus belle et la plus remarquable, que j'aie vu en cette matière, est celle des 5 soleils, qui parurent à Rome en l'an 1629, le 20 de Mars, sur les 2 ou 3 heures après midi; et afin que vous puissiez voir si elle s'accorde avec mon discours, je la veux mettre ici aux mêmes termes qu'elle fut dès lors divulguée:



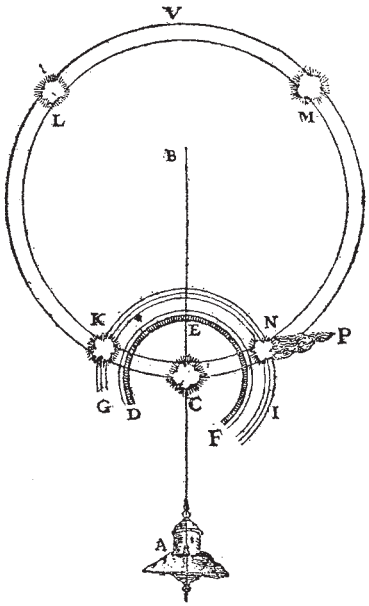
A observator Romanus. B vertex loco observatoris incumbens. C sol verus observatus. AB planum verticale, in quo et oculus observatoris et sol observatus existunt, in quo et vertex loci B jacet, ideoque omnia per lineam | verticalem AB repraesentantur: in hanc enim totum planum verticale procumbit. Circa solem C apparuere duae incompletae Irides eidem homocentricae, diversicolores, quarum minor sive interior DEF plenior et perfectior fuit, curta tamen sive aperta a D ad F, et in perpetuo conatu sese claudendi stabat et quandoque 362

[168] Descartes si è sbagliato. L'episodio qui ricordato è del 1525: cfr. su questo *Lojacono 1983*, p. 502, note n. 8-9.

[169] Si tratta di Wilhelm Schickard (1592-1635), astronomo e orientalista di Tubinga: su questa identificazione, cfr. *A Mersenne*, 21 aprile 1641, B 309, p. 1449 (AT III 362, l. 17 - 363, l. 11). All'osservazione qui menzionata si fa riferimento anche nella lettera *A Golius*, 19 maggio 1635, B 74, p. 293 (AT I 318, ll. 6-12).

[170] Si fa qui riferimento al fenomeno dei parelî o falsi soli osservato a Frascati il 20 marzo 1629 dal gesuita Christoph Scheiner. Complesse le vicende (ricostruite in *Baillet* I 188-189) che portarono Descartes in possesso di un resoconto dell'osservazione. Avutane notizia, il cardinale Barberini ne fece inviare una descrizione a Nicolas-Claude Fabri de Peiresc, il quale ne fece più copie. Una di queste copie pervenne a Pierre Gassendi, allora nelle Province Unite, il quale ne fece a suo volta alcune copie che inviò, tra gli altri, a Jacob van Waessenaer, Isaac Beeckman (che riporta la descrizione del fenomeno nel suo *Journal*: cfr. CdW, IV, pp. 149-151) e ad un amico di Descartes, Henri Reneri. Venuto in

tre soli nello stesso tempo. Tuttavia, si dice che nell'anno 1625[168] il re di Polonia ne vide fino a sei. E sono passati solo tre anni da quando il matematico di Tubinga[169] ha osservato i quattro soli designati qui con le lettere D, E, F, H; e inoltre, in ciò che ne ha scritto, nota in particolare che i due D e F erano rossi verso quello del centro E, che egli chiama vero sole, e blu dall'altro lato, e che il quarto H era molto pallido e molto poco visibile. Ciò conferma appieno ciò che ho detto. Ma l'osservazione più bella e più notevole che io abbia mai visto in questa materia è quella dei 5 soli che sono apparsi a Roma nell'anno 1629, il 20 marzo, verso le 2 o le 3 del pomeriggio[170]. E affinché voi possiate vedere se essa si accorda con il mio discorso, la riporto qui negli stessi termini in cui fu allora divulgata:

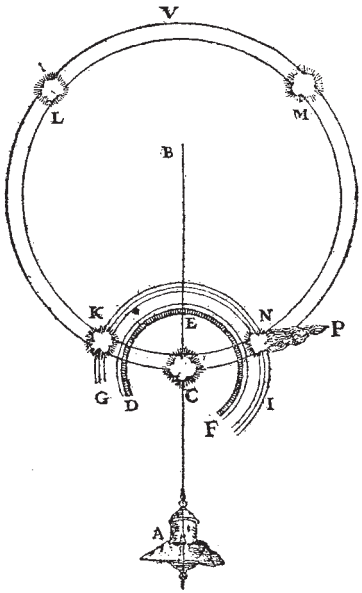


A è l'osservatore romano; B il vertice che sta sopra il luogo dell'osservatore; C il vero sole osservato; AB il piano verticale sul quale si trovano sia l'occhio dell'osservatore sia il sole osservato e sul quale giace anche il vertice del luogo B. Tutte le cose
362 *sono dunque rappresentate attraverso la linea | verticale AB: su di essa, infatti, cade tutto il piano verticale. Intorno al sole C erano apparse due iridi incomplete di diverso colore che avevano lo stesso centro del sole. La minore o interna, DEF, era più piena e più perfetta, anche se interrotta, ossia aperta, da D a F, ed aveva una con-*

possesso del resoconto, quest'ultimo ne inviò una copia a Descartes chiedendogli la spiegazione del fenomeno, di cui anche Gassendi si stava allora occupando: su queste vicende, di cui restano tracce nell'epistolario cartesiano, cfr. *A Mersenne*, 6 dicembre 1638, B 196, p. 941 (AT II 464, l. 16 - 465, l. 5). All'osservazione di Frascati si fa cenno anche nelle seguenti lettere *A Mersenne*: 8 ottobre 1629, B 19, p. 49 (AT I 23, ll. 13-22); 13 novembre 1629, B 23, p. 87 (AT I 69, l. 5 - 70, l. 16); 13 dicembre 1629, B 25, p. 99 (AT I 84, ll. 10-14); 3 maggio 1632, B 52, p. 227 (AT I 245, ll. 21-31); marzo 1636, B 83, p. 329 (AT I 340, ll. 3-10); 21 aprile 1641, B 309, p. 1449 (AT III 362, l. 17 - 363, l. 11). Un cenno al fenomeno dei parelî, ma in generale, si trova anche nella lettera *A Golius*, 19 maggio 1635, B 74, p. 293 (AT I 318, ll. 6-9). La spiegazione di Gassendi si trova in *Parhelia, sive Soles quatuor spurii, qui circa verum apparuerunt Romae anno MDCXXIX. Die XX Martij. Epistola* (1630, ma ad Amsterdam ne era stata pubblicata un'edizione già nel 1629): cfr. *Opera omnia*, vol. III, pp. 651-662.

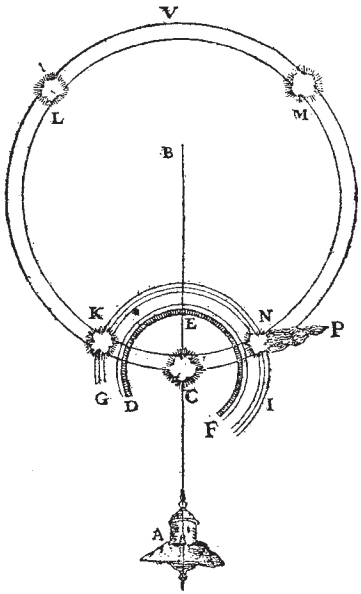
claudebat, sed mox denuo aperiebat. Altera, sed debilis semper et vix conspicabilis, fuit GHI, exterior et secundaria, variegata tamen et ipsa suis coloribus, sed admodum instabilis. Tertia, et unicolor, eaque valde magna Iris, fuit KLMN, tota alba, quales saepe visuntur in paraselenis circa lunam: haec fuit arcus excentricus, integer ab initio, solis per medium incedens, circa finem tamen ab M versus N debilis et lacer, imo quasi nullus. Caeterum, in communibus circuli hujus intersectionibus cum Iride exteriore GHI, emerserunt duo parhelia non usque adeo perfecta, N et K, quorum hoc debilius, illud autem fortius et luculentius splendescebat; amborum medius nitor aemulabatur solarem, sed latera coloribus Iridis pingebantur; neque rotundi ac praecisi, sed inaequales et lacunosi, ipsorum ambitus cernebantur. N, inquietum spectrum, ejaculabatur caudam spissam subigneam NOP, cum jugi reciprocatione. L et M fuere trans Zenith B, prioribus minus vivaces, sed rotundiores et albi, instar circuli sui cui inhaerebant, lac seu argentum purum exprimentes, quanquam M media tertia jam prope disparuerat; nec nisi exigua sui vestigia subinde praebuit, quippe et circulus ex illa parte defecerat. Sol N defecit ante solem K, illoque deficiente roborabatur K, qui omnium ultimus disparuit, etc.

CKLMN était un cercle blanc dans lequel se | voyaient cinq soleils, et il 363
faut imaginer que, le spectateur étant vers A, ce cercle était pendant en l'air au-dessus de lui, en sorte que le point B répondait au sommet de sa tête, et que les deux soleils L et M étaient derrière ses épaules, lorsqu'il était tourné vers les trois autres K, C, N, dont les deux K et N étaient colorés en leurs bords, et n'étaient ni si ronds, ni si brillants, que celui qui était vers C: ce qui montre qu'ils étaient causés par réfraction; au lieu que les deux L et M étaient assez ronds, mais moins brillants, et tout blancs, sans mélange d'aucune autre couleur en leurs bords: ce qui montre qu'ils étaient causés par réflexion. Et plusieurs choses ont pu empêcher qu'il n'ait paru encore un sixième soleil vers V, dont la plus vraisemblable est que



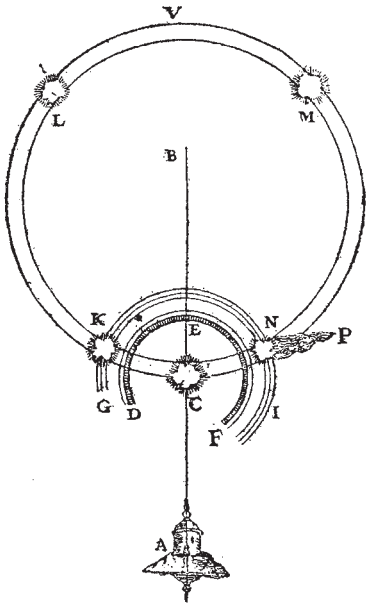
tinua tendenza a chiudersi; e di tanto in tanto si chiudeva, ma subito si apriva di nuovo. L'altra iride, sempre flebile e appena visibile, era GHI, esterna e secondaria, variegata anch'essa nei suoi colori e tuttavia assai instabile. La terza iride, monocolore e anch'essa molto grande, era KLMN; era tutta bianca, come spesso se ne vedono nei paraseleni intorno alla luna: era un arco eccentrico, che all'inizio, quando passava per il centro del sole, era integro, e alla fine, tuttavia, quando passava da M verso N, era debole e interrotto, anzi quasi nullo. Quanto al resto, nelle intersezioni comuni di questo cerchio con l'iride esterna GHI erano spuntati due pareli non così perfetti, N e K, dei quali il secondo splendeva più debolmente e l'altro con più forza e radiosità. In entrambi la lucentezza della parte centrale somigliava a quella del sole, ma i loro lati si tingevano dei colori dell'iride; e i loro margini non si scorgevano tondi e precisi, ma disuguali e lacunosi. N, un'apparizione instabile, emetteva una coda spessa e infuocata, NOP con movimento alternato a bilancia. L e M, che si trovavano dall'altra parte dello Zenith B, erano meno vivaci dei primi, ma più tondi e bianchi, come il cerchio al quale aderivano, ed emettevano il colore del latte o dell'argento puro, anche se, alle due e mezza, M era già scomparso; e immediatamente dopo non restavano di esso che esigue tracce, e questo perché da quella parte era venuto meno anche il cerchio. Il sole N veniva meno prima del sole K e, venendo meno, si rafforzava K, ultimo a sparire, ecc.

363 CKLMN era un cerchio bianco nel quale si | vedevano cinque soli; e bisogna immaginare che, mentre lo spettatore si trovava verso A, questo cerchio fosse sospeso nell'aria sopra di lui in modo tale che il punto B corrispondesse alla parte alta della sua testa e i due soli L e M si trovassero dietro le sue spalle quando egli era rivolto verso i tre altri K, C, N, dei quali i due K e N erano colorati ai bordi e non erano né così tondi né così splendenti come quello che era verso C (il che mostra che erano causati per rifrazione), mentre i due L e M erano abbastanza tondi, ma meno brillanti e bianchi, senza che sui loro bordi al bianco si mischiassero altri colori (il che mostra che erano causati per riflessione). E ad impedire che potesse apparire anche un sesto sole verso V possono essere state più



l'œil en était si proche, à raison de la hauteur de la nue, que tous les rayons qui donnaient sur la glace, vers là, se réfléchissaient plus loin que le point A. Et encore que le point B ne soit pas ici représenté si proche des soleils L et M que du centre de la nue, cela n'empêche pas que la règle que j'ai tantôt dite, touchant le lieu où ils doivent paraître, n'y fût observée. Car | le spectateur, étant plus proche de l'arc LVM que des autres parties du 364
cercle, l'a dû juger plus grand, à comparaison d'elles, qu'il n'était; outre que, sans doute, ces nues ne sont jamais extrêmement rondes, bien qu'elles paraissent à l'œil telles.

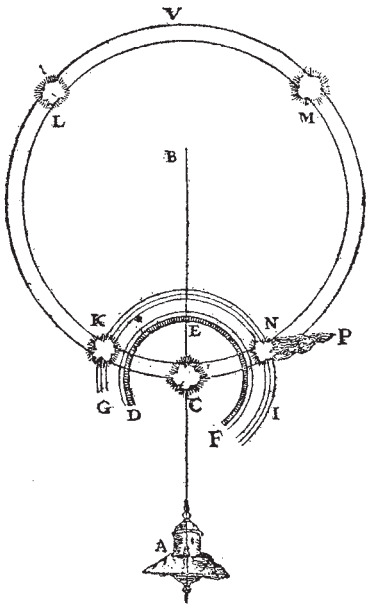
Mais il y a encore ici deux choses assez remarquables. La première est que le soleil N, qui était vers le couchant, ayant une figure changeante et incertaine, jetait hors de soi comme une grosse queue de feu NOP, qui paraissait tantôt plus longue, tantôt plus courte. Ce qui n'était sans doute autre chose, sinon que l'image du soleil était ainsi contrefaite et irrégulière vers N, comme on la voit souvent lorsqu'elle nage dans une eau un peu tremblante, ou qu'on la regarde au travers d'une vitre dont les superficies sont inégales. Car la glace était vraisemblablement un peu agitée en cet endroit-là, et n'y avait pas ses superficies si régulières, parce qu'elle y commençait à se dissoudre, ainsi qu'il se prouve de ce que le cercle blanc était rompu, et comme nul entre M et N, et que le soleil N disparut avant le soleil K, qui semblait se fortifier à mesure que l'autre se dissipait.



La seconde chose qui reste ici à remarquer, est qu'il y avait deux couronnes autour du soleil C, peintes des mêmes couleurs que l'arc-en-ciel, et dont l'intérieure DEF était beaucoup plus vive et plus apparente que l'extérieure GHI, en sorte que je ne doute point qu'elles ne fussent causées, en la façon que j'ai tantôt dite, par la réfraction qui se faisait, non en cette glace continue où se voyaient les soleils K et N, mais en d'autre, divisée en plusieurs petites parcelles, | qui se trouvait au-dessus et 365
au-dessous. Car il est bien vraisemblable que la même cause, qui avait pu composer tout un cercle de glace de quelques-unes des parties extérieures de la nue, avait disposé les autres voisines à faire paraître ces couronnes. De façon que, si on n'en

cose, delle quali la più verosimile è che l'occhio era così vicino a questo punto, in rapporto all'altezza della nube, che tutti i raggi che in quella direzione colpivano il ghiaccio si riflettevano oltre il punto A. E ancorché il punto B non sia qui rappresentato così vicino ai soli L e M quanto al centro della nube, ciò non impedisce che anche in tal caso venisse osservata la regola, che ho poc'anzi enunciato, riguardante il luogo in cui
364 essi devono apparire. Lo spettatore, | infatti, essendo più vicino all'arco LVM che alle altre parti del cerchio, ha dovuto, comparandolo con esse, giudicarlo più grande di quel che effettivamente era, a parte il fatto che senza dubbio queste nubi non sono mai estremamente tonde pur apparendo tali alla vista.

Ma qui vi sono ancora due cose molto degne di nota. La prima è che il sole N, che era là dove tramonta, avendo una figura cangiante e incerta, emetteva una specie di grossa coda di fuoco NOP, che appariva ora più lunga ora più corta. Senza dubbio ciò non dipendeva se non dal fatto che in tal modo l'immagine del sole era alterata e irregolare verso N, come spesso appare quando galleggia in un'acqua un po' tremolante o quando la si guarda attraverso un vetro dalle superfici disuguali. In quel punto, infatti, il ghiaccio era verosimilmente un po' agitato e non aveva superfici tanto regolari, poiché cominciava a dissolversi, come prova il fatto che il cerchio bianco era interrotto e quasi inesistente tra M e N e che il sole N era scomparso prima del sole K, che sembrava rafforzarsi via via che l'altro si dissolveva.



La seconda cosa che qui resta da notare è che intorno al sole C c'erano due corone tinte degli stessi colori dell'arcobaleno, delle quali quella interna DEF era molto più viva e più appariscente di quella esterna GHI; e così non dubito che esse fossero causate, nella maniera che ho poc'anzi detto, dalla rifrazione che aveva luogo non in questo ghiaccio continuo in cui si vedevano i soli K e N, ma in un altro, diviso in
365 parecchie piccole particelle, | che si trovava sopra o sotto. È infatti verosimile che la stessa causa che aveva potuto comporre, con alcune delle parti esterne della nube, un intero cerchio di ghiaccio avesse pure disposto le altre parti vicine in modo tale da far apparire queste corone.

observe pas toujours de telles, lorsqu'on voit plusieurs soleils, c'est que l'épaisseur de la nue ne s'étend pas toujours au-delà du cercle de glace qui l'environne; ou bien qu'elle est si opaque et obscure, qu'on ne les aperçoit pas au travers. Pour le lieu où se voient ces couronnes, c'est toujours autour du vrai soleil, et elles n'ont aucune conjonction avec ceux qui ne font que paraître; car, bien que les deux K et N se rencontrent ici en l'intersection de l'extérieure et du cercle blanc, c'est chose qui n'est arrivée que par hasard, et je m'assure que le même ne se vit point aux lieux un peu loin de Rome, où ce même Phénomène fut remarqué. Mais je ne juge pas pour cela que leur centre soit toujours en la ligne droite tirée de l'œil vers le soleil, si précisément qu'y est celui de l'arc-en-ciel; car il y a cela de différence, que les gouttes d'eau, étant rondes, causent toujours | même 366
réfraction en quelque situation qu'elles soient; au lieu que les parcelles de glace, étant plates, la causent d'autant plus grande qu'elles sont regardées plus obliquement. Et parce que, lorsqu'elles se forment par le tournoiement d'un vent sur la circonférence d'une nue, elles y doivent être couchées en autre sens que lorsqu'elles se forment au-dessus ou au-dessous, il peut arriver qu'on voie ensemble deux couronnes, l'une dans l'autre, qui soient à peu près de même grandeur, et qui n'aient pas justement le même centre.

De plus, il peut arriver qu'outre les vents qui environnent cette nue, il en passe quelqu'un par-dessus ou par-dessous, qui derechef y formant quelque superficie de glace, cause d'autres variétés en ce Phénomène; comme peuvent encore faire les nues d'alentour, ou la pluie, s'il y en tombe. Car les rayons, se réfléchissant de la glace d'une de ces nues vers ces gouttes, y représenteront des parties d'arc-en-ciel, dont les situations seront fort diverses. Comme aussi les spectateurs, n'étant pas au-dessous d'une telle nue, mais à côté entre plusieurs, peuvent voir d'autres cercles et d'autres soleils. De quoi je ne crois pas qu'il soit besoin que je vous entretienne davantage; car j'espère que ceux qui auront compris tout ce qui a été dit en ce traité, ne verront rien dans les nues à l'avenir, dont ils ne puissent aisément entendre la cause, ni qui leur donne sujet d'admiration.

FIN

Così, se non sempre si osservano corone di tal genere quando si vedono parecchi soli, ciò dipende dal fatto che lo spessore della nube non sempre si estende oltre il cerchio di ghiaccio che la circonda, oppure dal fatto che questa nube è così opaca e scura che attraverso di essa non le si vede. Quanto al luogo, queste corone si vedono sempre intorno al vero Sole. Ed esse non hanno alcun legame con quelli che sono solo apparenti: infatti, benché le due corone K ed N si siano incontrate qui nell'intersezione di quella esterna con il cerchio bianco, ciò è accaduto solo per caso; e sono sicuro che la stessa cosa non è stata vista in luoghi un po' lontani da Roma, dove pure questo fenomeno è stato osservato. Non per questo, però, giudico che il loro centro si trovi sempre sulla linea retta che dall'occhio va verso il Sole così precisamente come vi si trova quello dell'arcobaleno. C'è questo, infatti, di diverso: che le gocce d'acqua,
366 essendo tonde, causano sempre | la stessa rifrazione, quale che sia la loro posizione, mentre le particelle di ghiaccio, essendo piatte, ne causano una che è tanto più grande quanto più obliquamente le si guarda. E poiché esse, quando sono formate dalla rotazione di un vento intorno alla circonferenza di una nube, devono disporsi diversamente da come fanno quando si formano al di sopra o al di sotto, può accadere che si vedano insieme, poste l'una nell'altra, due corone aventi all'incirca la stessa grandezza ma non esattamente lo stesso centro.

Può inoltre accadere che, oltre ai venti che circondano questa nube, ne passi qualcuno al di sopra o al di sotto, il quale, formandovi di nuovo una superficie di ghiaccio, causi altre variazioni in questo fenomeno, come possono fare anche le nubi che stanno intorno o, se ne cade, la pioggia. I raggi infatti, riflettendosi dal ghiaccio di una di queste nubi verso le sue gocce, vi rappresenteranno delle porzioni di arcobaleno le cui posizioni saranno molto diverse. E allo stesso modo gli spettatori, non trovandosi sotto una nube come questa, ma, accanto, tra più nubi, possono vedere altri cerchi e altri soli. Non credo ci sia bisogno che vi parli ancora di queste cose: spero infatti che coloro che avranno compreso tutto ciò che è stato detto in questo trattato d'ora in poi non vedranno nulla nelle nubi di cui non possano facilmente intendere la causa e che dia loro motivo di meravigliarsi.

FINE

LA GEOMETRIE

LA GEOMETRIA

Jusques ici j'ai tâché de me rendre intelligible à tout le monde; mais, pour ce traité, je crains qu'il ne pourra être lu que par ceux, qui savent déjà ce qui est dans les livres de Géométrie: car, d'autant qu'ils contiennent plusieurs vérités fort bien démontrées, j'ai cru qu'il serait superflu de les répéter, et n'ai pas laissé, pour cela, de m'en servir.

Avvertenza

Fin qui ho cercato di rendermi intelligibile a tutti. Temo però che questo trattato potrà essere letto solo da coloro che hanno già qualche familiarità con ciò che si trova nei libri di geometria. Infatti, dato che essi contengono parecchie verità molto ben dimostrate, ho creduto superfluo ripeterle, e non mi sono per questo astenuto dal servirmene.

LA GEOMETRIE

369

[AT VI 368-485]

LIVRE PREMIER

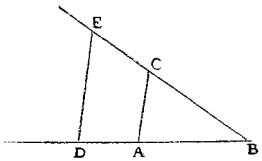
Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Comment le calcul d'Arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie

Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont: l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division; ainsi n'a-t-on autre chose à faire, en Géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien, en ayant une | que je nommerai l'unité pour la rapporter 370
d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication; ou bien en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la Division; ou enfin trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée, ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication



Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette Multiplication.

* Curatela, traduzione e note di ErL e CSR; revisione di GB, MS; consulenza scientifica di AW.

[1] Con il termine «linea» si intende qui un segmento.

369

LA GEOMETRIA*

[AT VI 368-485]

LIBRO PRIMO

Problemi che si possono costruire impiegando soltanto cerchi e linee rette

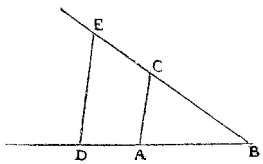
Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che poi, per costruirli, vi sia bisogno soltanto di conoscere la lunghezza di alcune linee rette[1].

Come il calcolo in aritmetica si rapporta a operazioni di geometria

E dal momento che tutta l'aritmetica non si compone se non di quattro o cinque operazioni, che sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice, che si può considerare come una sorta di divisione, così in geometria, non vi è altro da fare nella ricerca delle linee, al fine di prepararle ad essere note, che aggiungere o sottrarre ad esse delle altre; oppure, data una linea | che chiamerò unità[2] per
370 rapportarla nel modo migliore ai numeri, e che d'ordinario può essere presa a piacere, e date poi altre due linee, trovarne una quarta che stia a una di queste due, come l'altra sta all'unità, il che equivale alla moltiplicazione; oppure, trovarne una quarta che stia a una di queste due come l'unità sta all'altra, il che equivale alla divisione; o infine trovare una, o due, o più medie proporzionali fra l'unità e qualche altra linea, il che è lo stesso che estrarre la radice quadrata, o cubica, ecc. Non esiterò a introdurre questi termini dell'aritmetica nella geometria, per rendermi più intelligibile.

La moltiplicazione

Sia, per esempio, AB l'unità, e si debba moltiplicare BD per BC; non ho che da unire i punti A e C, poi tracciare DE parallela a CA, e BE è il prodotto di questa moltiplicazione.



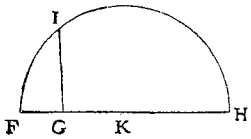
[2] Cfr. *Regole*, XIV, *B Op* II 795 (AT X 449, l. 26-450, l. 9); XV, *B Op* II 799 (AT X 453, ll. 5-15).

La Division

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette Division.

L'Extraction de la racine carrée

Ou, s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH; puis, élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est | GI, la racine cherchée. Je ne dis 371 rien ici de la racine cubique ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.



Comment on peut user de chiffres en Géométrie

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme, pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$, pour soustraire b d'a; et ab, pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b; et aa ou a^2, pour multiplier a par soi-même; et a^3, pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine carrée d'$a^2 + b^2$ et $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, et ainsi des autres.

Où il est à remarquer que, par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que, pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des carrés, ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question: comme ici a^3 en contient autant qu'abb ou b^3, dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$; mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions; comme, s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que | l'autre quantité b est multipliée deux fois par la 372 même.

Au reste, afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple:

[3] *Geometria*, III, *B Op* I 633 ss. (AT VI 471 ss.).

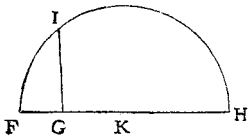
[4] Da questo punto in poi le notazioni saranno modernizzate conformemente alla *Tabella* in *Nota introduttiva*, *B Op* I 21.

La divisione

Oppure, se occorre dividere BE per BD, congiunti i punti E e D, traccio AC parallela a DE, e BC è il prodotto di questa divisione.

L'estrazione della radice quadrata

Se poi si deve estrarre la radice quadrata di GH, aggiungo ad essa in linea retta FG, che è l'unità, e, dividendo FH in due parti uguali nel punto K, descrivo il cerchio FIH con centro K; poi, innalzando dal punto G una retta perpendicolare a
371 FH fino ad I, si trova | GI, la radice cercata. Non dico nulla qui della radice cubica, né delle altre, poiché ne parlerò più comodamente in seguito[3].



Come si possono usare le cifre in geometria

Ma sovente non c'è necessità di tracciare in questo modo tali linee sulla carta, ed è sufficiente indicarle tramite lettere, ciascuna con una sola lettera. Per cui, per aggiungere la linea BD a GH, chiamo l'una a e l'altra b, e scrivo $a + b$; e $a - b$ per sottrarre b da a; ab per moltiplicarle; $\frac{a}{b}$ per dividere a per b; e aa oppure a^2 per moltiplicare a per se stessa, a^3 per moltiplicarla ancora una volta per a, e così all'infinito; e $\sqrt{a^2 + b^2}$ per estrarre la radice quadrata di $a^2 + b^2$; $\sqrt{\text{C}.a^3 - b^3 + ab^2}$ per [4] estrarre la radice cubica di $a^3 - b^3 + ab^2$ e così per le altre.

Si deve osservare in proposito che, con a^2 o b^3 o simili, io non concepisco d'ordinario altro che linee del tutto semplici, anche se, per servirmi di nomi usati in algebra, le chiamo quadrati, o cubi, ecc.

Occorre anche sottolineare che tutte le parti di una stessa linea si devono d'ordinario esprimere con altrettante dimensioni sia l'una che l'altra, quando, nel problema, l'unità non è determinata: ad esempio qui a^3 contiene tante dimensioni quante ab^2 o b^3 di cui è costituita la linea che ho indicato con $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$; ma non avviene lo stesso quando l'unità è determinata, poiché essa può essere sottointesa dovunque le dimensioni siano in eccesso o in difetto[5]. Ad esempio, se bisogna estrarre la radice cubica di $a^2b^2 - b$, occorre pensare che la quantità a^2b^2 sia divisa una volta per l'unità, e che | l'altra quan-
372 tità b sia moltiplicata due volte per la stessa unità.

Del resto, per non rischiare di dimenticare i nomi di queste linee, bisogna sempre farne un registro separato, a mano a mano che li si introduce, o li si cambia, scrivendo per esempio:

[5] Cfr. *Regole*, XIV, *B Op* II 793 (AT X 448, l. 11 sgg.); XVI, *B Op* II 801 (AT X 455, l. 16 sgg.).

AB = 1, c'est-à-dire: AB égal* à 1.
GH = a,
BD = b, etc.

Comment il faut venir aux Equations qui servent à résoudre les problèmes

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons: ce qui se nomme une Equation, car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Equations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que, nonobstant, on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée; et lors, on peut prendre à discrétion des | lignes connues, pour toutes les inconnues auxquelles ne cor- 373
respond aucune Equation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des Equations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale à quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, etc., soit égal à ce qui se produit par l'addition, ou soustraction, de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte:

$$
\begin{aligned}
& z = b, \\
\text{ou } & z^2 = -az + bb, \\
\text{ou } & z^3 = +az^2 + bbz - c^3, \\
\text{ou } & z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

* Descartes usa il simbolo ∞ per =, qui non utilizzato per motivi tipografici.

[6] Descartes descrive qui il metodo cosiddetto dell'«analisi». Sull'analisi cfr. anche: *Regole*, IV, *B Op* II 701 e nota n. 161, *B Op* I 806 (AT X 373 ll. 12-13).

[7] Cfr. *Regole*, X, *B Op* II 739 (AT X 404, l. 22 - 405, l. 20).

[8] Le locuzioni qui utilizzate per le potenze superiori al cubo ("quadrato quadrato",

AB = 1, cioè AB è uguale a 1.
GH = a,
BD = b, ecc.

Come pervenire alle equazioni che servono a risolvere i problemi

Volendo dunque risolvere un problema, si deve innanzitutto considerarlo come già risolto, e attribuire dei nomi a tutte le linee che si reputano necessarie per costruirlo, sia a quelle incognite, sia alle altre[6]. Poi, senza fare alcuna differenza fra linee note e incognite, si deve affrontare la difficoltà secondo quell'ordine che più naturalmente di tutti[7] mostra come esse dipendono mutuamente le une dalle altre, finché non si sia trovato il mezzo per esprimere una stessa quantità in due maniere: e questo è ciò che si chiama una equazione, poiché i termini di una di queste due maniere sono uguali a quelli dell'altra. E si devono ricavare tante equazioni di questo tipo quante sono le linee supposte come incognite. Oppure, se non se ne ottengono altrettante e nonostante ciò non si è trascurata nessuna delle condizioni richieste dal problema, ciò significa che il problema non è interamente determinato. E in tal caso si
373 possono prendere a piacere | linee note per tutte le incognite alle quali non corrisponde alcuna equazione. Dopo di che, se ne restano ancora parecchie, bisogna anche servirsi, nell'ordine, di ciascuna delle equazioni che restano, sia considerandola di per sé, sia confrontandola con le altre, in modo da esplicitare ciascuna delle linee incognite, e fare in modo, nel districarle, che non ne rimanga che una sola uguale a qualche altra che sia nota, oppure il cui quadrato, o il cubo, o il quadrato quadrato, o il sursolido, o il quadrato del cubo[8], ecc., sia uguale a ciò che si ottiene con l'addizione o sottrazione di due o più quantità, l'una delle quali sia nota, e le altre siano composte di medie proporzionali fra l'unità e il quadrato, o cubo, o la quarta potenza, ecc., moltiplicate per altre quantità note. Esprimo ciò nel modo seguente:

$z = b$,
o $z^2 = -az + b^2$,
o $z^3 = +az^2 + b^2z - c^3$,
o $z^4 = az^3 - c^3z + d^4$, [9]
ecc.

"sursolido", "quadrato cubo") risalivano a fonti arabe ed esprimevano la quarta, la quinta e la sesta potenza. Cfr. C.S. Roero, *Algebra e aritmetica nel Medioevo islamico*, in E. Giusti (a cura di), *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Firenze, Polistampa, 2002, pp. 7-43, 30-33.

[9] *Schooten* (p. 4) modifica l'ultima espressione e scrive $z^4 = az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4$.

C'est-à-dire: z, que je prends pour la quantité inconnue, est égale à b; ou le carré de z est égal au carré de b, moins a multiplié par z; ou le cube de z est égal à a multiplié par le carré de z, plus le carré de b multiplié par z, moins le cube de c; et ainsi des autres.

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les | quantités inconnues à une seule, lorsque le Problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est, à mon avis, la principale qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront un peu versés en la Géométrie commune et en l'Algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver. 374

C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir que, pourvu qu'en démêlant ces Equations on ne manque point à se servir de toutes les divisions qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes auxquels la question puisse être réduite.

Quels sont les problèmes plans

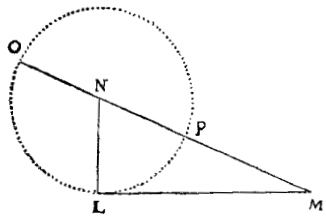
Et que, si elle peut être résolue par la Géométrie ordinaire, c'est-à-dire en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la dernière Equation aura été entièrement démêlée, il n'y restera, tout au plus, qu'un carré inconnu égal à ce qui se produit de l'addition, ou soustraction, de sa racine multipliée par quelque quantité connue, et de quelque autre quantité aussi connue.

Comment ils se résolvent

Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément. Car, si j'ai, par exemple:

$$z^2 = az + bb, \mid$$

je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, 375



racine carrée de la quantité connue bb, et l'autre, LN, est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnue. Puis, prolongeant MN, la base de ce triangle, jusques à O, en sorte qu'NO

[10] Cfr. *Regole,* X *B Op* II 737 (AT X 403, l. 8 sgg.).

In altre parole z, che assumo come quantità incognita, è uguale a b; o il quadrato di z è uguale al quadrato di b meno a moltiplicato per z; o il cubo di z è uguale ad a moltiplicato per il quadrato di z, più il quadrato di b moltiplicato per z, meno il cubo di c. E così per le altre.

E tutte le quantità incognite si possono sempre ridurre, in
374 questo modo, a una sola, | quando il problema si può costruire mediante cerchi e rette, o anche mediante sezioni coniche, o anche mediante qualche altra linea che non sia se non di uno o due gradi più composta. Tuttavia non mi soffermo a spiegare ciò più in dettaglio, poiché vi priverei del piacere di comprenderlo da soli, e dell'utilità di coltivare la vostra mente, esercitandola in ciò che, a mio parere, è il principale vantaggio che si può ricavare da questa scienza[10]. Tanto più che non rilevo nulla di così difficile da non poter essere trovato da chi è un po' versato nella geometria ordinaria e nell'algebra e faccia attenzione a tutto ciò che si trova in questo trattato.

Per questo mi accontenterò di avvertirvi che, purché nel risolvere queste equazioni ci si serva sempre di tutte le divisioni possibili, si otterranno infallibilmente i termini più semplici ai quali il problema si può ridurre.

Quali sono i problemi piani[11]

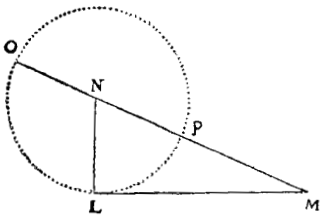
E mi accontenterò di osservare che se il problema si può risolvere con la geometria ordinaria, vale a dire servendosi solo di rette e circonferenze descritte su un piano, quando l'ultima equazione sarà stata interamente risolta, non resterà, al più, che un quadrato incognito uguale a ciò che si ottiene con l'addizione o la sottrazione della sua radice moltiplicata per qualche quantità nota e di qualche altra quantità anch'essa nota.

In che modo essi si risolvono

Questa radice, o linea incognita, si trova allora facilmente. Perché, se ho per esempio:

$$z^2 = az + b^2, \,|$$

375 traccio il triangolo rettangolo NLM, il cui lato LM è uguale a b, radice quadrata della quantità nota b^2 e l'altro, LN, è $\frac{1}{2}a$, metà dell'altra quantità nota, che era moltiplicata per z, che ho supposto essere la linea incognita. Poi, prolungando MN, base di questo triangolo, fino ad O, in modo che NO



[11] Si dicono "piani" i problemi espressi con equazioni di primo e secondo grado, o riconducibili ad esse; essi si possono costruire con riga e compasso.

soit égale à NL, la toute OM est z, la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte:

$$z = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}\,.$$

Que si j'ai

$$yy = -\,ay + bb,$$

et qu'y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa base MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est y, la racine cherchée. De façon que j'ai

$$y = -\,\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}\,.$$

Et tout de même, si j'avais

$$x^4 = -\,ax^2 + b^2,$$

PM serait xx et j'aurais

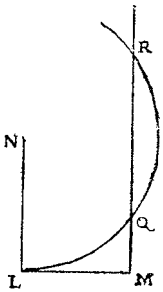
$$x = \sqrt{-\,\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}}\,;$$

et ainsi des autres. |

Enfin si j'ai 376

$$z^2 = az - bb,$$

je fais NL égale à $\tfrac{1}{2}a$, et LM égale à b, comme devant; puis, au lieu de joindre les points M, N, je tire MQR parallèle à LN, et du centre N, par L, ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R, la ligne cherchée z est MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir



$$z = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}\,,$$

$$\text{et } z = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}\,.$$

Et si le cercle qui, ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.

Au reste, ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, et j'ai seulement voulu mettre ceux-ci, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les Problèmes de la Géométrie ordinaire, sans faire autre chose

sia uguale a NL, l'intera OM è z, la linea cercata. Ed essa si esprime nel modo seguente:

$$z = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2}\,.$$

Se invece ho

$$y^2 = -ay + b^2,$$

e y è la quantità che occorre trovare, considero lo stesso triangolo rettangolo NLM e dalla sua base MN sottraggo NP uguale a NL e la parte restante PM è y, la radice cercata. In questo modo ho

$$y = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2}\,.$$

E parimenti, se avessi

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

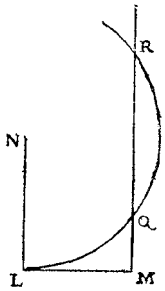
PM sarebbe x^2, e avrei

$$x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2}}\,;$$

e così negli altri casi. |
376 Infine se ho

$$z^2 = az - b^2,$$

pongo NL uguale a $\frac{1}{2}a$ e LM uguale a b, come sopra; poi, invece di unire i punti M, N, traccio MQR parallela a LN, e avendo descritto con centro N un cerchio, passante per L, che interseca la retta nei punti Q e R, la linea z cercata è MQ, oppure MR, giacché in questo caso essa si esprime in due modi, cioè



$$z = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^2}\,,$$
$$\text{e } z = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^2}\,.$$

E se il cerchio che ha il suo centro nel punto N e passa per il punto L non interseca, né tocca la retta MQR, non c'è nessuna radice per l'equazione, di modo che si può essere certi che la costruzione del problema proposto è impossibile.

Del resto, queste stesse radici si possono trovare in un'infinità di altri modi e io ho solamente voluto presentare questi qui, in quanto molto semplici, per far vedere che si possono costruire tutti i problemi della geometria ordinaria senza fare

que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué; car, autrement, ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres, où le seul ordre de leurs propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées. |

Exemple tiré de Pappus

Et on le peut voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis 377
au commencement de son septième livre, où, après s'être arrêté quelque temps à dénombrer tout ce qui avait été écrit en Géométrie par ceux qui l'avaient précédé, il parle enfin d'une question qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre, n'avaient su entièrement résoudre; et voici ses mots:

Je cite plutôt la version latine que le texte grec, afin que chacun l'entende plus aisément

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis quae Euclides scripsit, per ea tantum conica quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, etc.

Et, un peu après, il explique ainsi quelle est cette question:

At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se iactat et ostentat, nulla habita gratia ei qui prius scripserat, est huiusmodi. Si, positione datis tribus rectis lineis, ab uno et eodem puncto ad tres lineas in datis angulis rectae lineae ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadra-

[12] *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae* (1588), Bononiae, ex typographia HH. de Duccijs, 1660, Lib. VII (*De Conicis Apollonij*), pp. 251-252 (d'ora in avanti: Commandino); F. Hultsch (ed.), *Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt*, Lib. VII, *Conicorum libri octo*, 3 voll., Berolini, Weidmann, 1877, II, pp. 678-681. Sul problema di Pappo cfr. anche le seguenti lettere di Descartes *A Golius*: gennaio 1632, B 49, pp. 219-221 (AT I 232-236); *A Mersenne*, 3 maggio 1632, B 52, p. 227 (AT I 245, ll. 7-20); giugno 1632, B 55, p. 237 (AT I 256, ll. 15-23); *A Stampioen*, fine 1633, B 62, pp. 255-257 (AT I 278, ll. 16-24); *A Mersenne*, aprile 1634, B 65, p. 267 (AT I 289, ll. 25-30); dicembre 1637, B 136, p. 477 (AT I 478, l. 12-479, l. 2); gennaio 1638, B 138, p. 491 (AT I 491, ll. 19-26); 31 marzo 1638, B 160, p. 617 (AT II 83, l. 3-84, l. 20); 9 febbraio 1639, B 202, p. 983 (AT II 502, ll. 7-10); *A Debeaune*, 20 febbraio 1639, B 203, pp. 989-991 (AT II 510, l. 18-512, l. 5); *A Mersenne*, 10 marzo 1646, B 546, p. 2157 (AT IV 363, ll. 5-18); 12 ottobre 1646, B 577, p. 2315 (AT IV 526, ll. 14-28). Pappo di Alessandria (290-350 d. C.), assieme a Diofanto, è menzionato nelle *Regole* (cfr. IV, *B Op* II 705; AT X 376) come autore le cui opere mostrano le vestigia della vera *Mathesis* degli antichi.

[13] Pappo di Alessandria (290-350).

[14] Euclide di Alessandria (325-265 a.C.).

null'altro se non quel poco che è compreso nelle quattro figure che ho spiegato. Ciò che non ritengo che gli antichi abbiano notato, poiché altrimenti non si sarebbero presi la pena di scrivere tanti libri così voluminosi, in cui già solo l'ordine delle proposizioni ci fa capire che essi non possedevano affatto il vero metodo per trovarle tutte, ma si sono limitati a mettere assieme quelle in cui si sono imbattuti. |

377 E lo si può vedere molto chiaramente anche da ciò che Pappo[13] ha inserito all'inizio del suo settimo libro dove, dopo essersi soffermato un po' a enumerare tutto ciò che era stato scritto in geometria da coloro che lo avevano preceduto, parla infine di una questione che, a suo dire, né Euclide[14], né Apollonio[15], né alcun altro avevano saputo interamente risolvere. Ed ecco le sue parole:

Esempio tratto da Pappo[12]

E, dice poi (Apollonio) nel libro terzo, che il luogo a tre e quattro linee non fu risolto da Euclide e che né lui stesso, né alcun altro era riuscito a risolverlo, ma neppure si poteva aggiungere qualcosa, per quanto poco, a ciò che Euclide aveva scritto, per mezzo soltanto di quelle coniche studiate fino ai tempi di Euclide[17].

Cito la versione latina, anziché il testo greco, in modo che ognuno la intenda più facilmente[16]

E poco dopo spiega così qual è questo problema[18]:

Ma il luogo a tre e quattro linee, per il quale Apollonio si vanta e gloria magnificamente, senza alcuna riconoscenza verso chi aveva scritto prima, è il seguente. Se, assegnate in posizione tre rette, si conducono da un medesimo punto alle tre linee, con angoli assegnati, altre rette e se, data la proporzione fra il rettan-

[15] Apollonio di Perga (262-190 a. C.).

[16] Descartes cita, in base a AT (VI 377, nota *a*), la traduzione di Federico Commandino: Pappus Alexandrinus, *Mathematicae Collectiones*, Venetiis, apud Franciscum de Franciscis Senensem, 1589 (altre stampe della stessa edizione: Pisa, H. Concordia, 1588 e 1602), p. 157.

[17] Il passo corrisponde alle pp. 676-677, t. II, dell'ed. Hultsch. Quanto all'affermazione di Apollonio circa le coniche note al tempo di Euclide, egli si riferisce alla trattazione che ne aveva fornito Menecmo (380-320 a.C.) nel IV sec. a.C.

[18] Il passo corrisponde alle pp. 678-681, t. II, dell'ed. Hultsch. Nella sua formulazione generale il problema di Pappo si può enunciare nel seguente modo: se P è un punto generico del piano e se indichiamo con r_i le rette date, con φ_i gli angoli assegnati e con d_i le lunghezze dei segmenti Pr_i, condotti da P alle rette e che formano con le r_i gli angoli φ_i dati, il prodotto dei d_i dalla metà delle rette (se esse sono in numero pari) sta a quello dell'altra metà in un rapporto fissato $\alpha : \beta$. Se le rette sono in numero dispari, si inserisce una costante. Si tratta cioè di esprimere il luogo geometrico dei punti P che soddisfano le seguenti proprietà: nel caso di 3 rette $(d_1 \cdot d_2) : d_3^2 = \alpha : \beta$; nel caso di 4 rette $(d_1 \cdot d_2) : (d_3 \cdot d_4) = \alpha : \beta$; nel caso di $2n$ rette $(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n) : (d_{n+1} \cdot d_{n+2} \cdot \ldots \cdot d_{2n}) = \alpha : \beta$; e nel caso di $2n - 1$ rette $(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n) : (d_{n+1} \cdot d_{n+2} \cdot \ldots \cdot d_{2n-1} \cdot a) = \alpha : \beta$, con a costante.

tum reliquae, punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et, si ad quatuor rectas | lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur, et rectangu- 378 li duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit, similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantum, locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, et quae manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hae sunt:

Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas quinque, ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus et data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, et data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum quod tribus reliquis continetur, rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere an data sit proportio cuiuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

Où je vous prie de remarquer, en passant, que le scrupule que faisaient les anciens d'user des termes de l'Arithmétique en la Géométrie, qui ne pouvait procéder que de ce qu'ils ne voyaient pas assez clairement leur rapport, causait beaucoup d'obscurité et d'embarras en la façon dont ils s'expliquaient: car Pappus poursuit en cette sorte:

Acquiescunt autem his qui paulo ante talia interpretati | sunt, 379 neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per coniunctas proportiones haec et dicere et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum.

[19] Con le locuzioni "rettangolo formato da due rette" e "parallelepipedo formato da tre rette" Descartes intende, rispettivamente, il prodotto di due, e di tre quantità.

[20] Si tratta di un passo controverso, le cui traduzioni, a cura di F. Commandino (cit., pp. 251-252), F. Hultsch (*Pappi Alexandrini Collectiones*, cit., pp. 680-681), P. Ver Eecke (*Pappus d'Alexandrie. La Collection mathématique*, 2 voll., Paris, Desclée de Brouwer, 1933, II, p. 508), e A. Jones (*Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, 2 voll., New York, Springer, 1986, I, pp. 120-121), presentano delle discrepanze rispetto all'originale

golo formato da due delle rette e dal quadrato della restante[19]*, il punto giace su un luogo solido dato in posizione, ossia il luogo è una delle tre sezioni coniche. E, se relativamente a quattro linee |*
378 *rette date in posizione, si conducono rette che formano con esse angoli dati e se è data la proporzione fra il rettangolo formato tra due delle rette tracciate e quello formato tra le rimanenti due, allo stesso modo il punto si troverà su una sezione conica data in posizione. Dunque, almeno relativamente a due sole rette si è mostrato che il luogo è piano. Invece, per più di quattro rette, il punto apparterrà a luoghi non ancora noti, ma denominati semplicemente linee. Non è dato però sapere di che tipo esse siano o quale proprietà abbiano. Essi ne ricavarono una sola, mostrando che era utile, e che sembra essere la più evidente, ma non la prima*[20]*. Le loro proposizioni sono le seguenti.*

Se da un punto si conducono a cinque rette assegnate in posizione altre rette che formano angoli dati con le precedenti, e se è data la proporzione fra il solido parallelepipedo rettangolo che è formato da tre di tali linee e il solido parallelepipedo rettangolo che è formato dalle altre due e da un'altra linea a piacere, il punto si troverà su una linea data in posizione. Se invece sono assegnate sei rette ed è data la proporzione fra il solido che è formato da tre linee e quello formato dalle restanti tre, il punto giacerà di nuovo su una linea data in posizione. E se sono assegnate più di sei rette, finora non si saprebbe dire ancora se sia data la proporzione fra un solido formato da quattro linee e quello formato dalle restanti, poiché non esiste qualcosa che sia formato da più di tre dimensioni.

A tal proposito, vi prego di notare, per inciso, che lo scrupolo che si ponevano gli antichi ad usare termini di aritmetica nella geometria – scrupolo che non poteva scaturire se non dal fatto ch'essi non vedevano con sufficiente chiarezza il loro rapporto – provocava molta oscurità e imbarazzo nel loro modo di spiegarsi. Pappo infatti proseguiva così:

Inoltre concordano con quelli che poco prima hanno affronta-
379 *to | tali argomenti, sostenendo che in nessun modo è comprensibile qualcosa che sia formato da queste linee. Sarà lecito invece esporre queste cose mediante proporzioni composte e dimostrarle in generale nelle dette proporzioni.*

greco. Cfr. anche P. Tannery, *Lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, in *Mémoires Scientifiques*, 17 voll., Toulouse, Privat, 1912-1950, t. II, pp. 31-32.

Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas, ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio coniuncta ex ea quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem: si vero octo, et reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter, quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum haec, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, etc.

La question donc, qui avait été commencée à résoudre par Euclide et poursuivie par Apollonius, sans avoir été achevée par personne, était telle. Ayant trois, ou quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position, premièrement, on demande un point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, une sur chacune des données, qui fassent avec elles des angles donnés; et que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un même point, ait la proportion donnée avec le carré de la troisième, s'il n'y en a que trois; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre. Ou bien, s'il y en a cinq, que le parallélépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallélépipède composé des deux qui restent, et d'une autre ligne donnée. Ou, s'il y en a six, que le parallélépipède composé de trois ait la proportion donnée | avec 380
le parallélépipède des trois autres. Ou, s'il y en a sept, que ce qui se produit lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre, ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres, et encore d'une autre ligne donnée. Ou, s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres. Et ainsi cette question se peut étendre à tout autre nombre de lignes. Puis, à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connaître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver; et Pappus dit que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en une des trois sections coniques; mais il n'entreprend point de la déterminer, ni de la décrire, non plus que d'expliquer celles où tous ces points se doivent trouver, lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes. Seulement, il ajoute que les anciens en avaient imaginé une qu'ils montraient y être utile, mais qui semblait la plus manifeste, et qui

Se da un punto sono condotte con angoli assegnati, su rette date in posizione, altre rette, e se è data la proporzione composta – fra una delle rette condotte e un'altra, e fra la seconda e una seconda altra, e fra un'altra e un'altra, e fra la rimanente e una linea data, se sono sette; mentre fra la rimanente e la rimanente altra, se sono otto – il punto giacerà su linee date in posizione. E allo stesso modo per qualsivoglia numero di rette, o dispari o pari, dal momento che, come ho detto, esse corrispondono a un luogo relativo a quattro linee; non stabilirono null'altro per determinare la linea ecc.

Il problema dunque, la cui soluzione era stata avviata da Euclide e proseguita da Apollonio, senza essere portata a termine da nessuno, era la seguente. Assegnate in posizione tre, quattro, o un numero maggiore di linee rette, si chiede in primo luogo un punto da cui sia possibile condurre altrettante linee rette, una su ciascuna delle date, che formino con esse degli angoli dati, e tali che il rettangolo formato da due di quelle così tracciate da un medesimo punto, stia nella proporzione data con il quadrato della terza, se non ci sono che tre rette; oppure con il rettangolo delle altre due, se ce ne sono quattro. O ancora, se ve ne sono cinque, che il parallelepipedo composto da tre stia nella proporzione data con il parallelepipedo composto dalle rimanenti due e da un'altra retta data. O, se ve ne sono sei, che il parallelepipedo composto da tre stia nella
380 proporzione data | con il parallelepipedo composto dalle altre tre. O, se ve ne sono sette, che il risultato della moltiplicazione di quattro di esse abbia la proporzione data con il risultato della moltiplicazione delle altre tre e in più di un'altra linea data. O, se ve ne sono otto, che il prodotto della moltiplicazione di quattro di queste stia nella proporzione data con il prodotto delle altre quattro. In tal modo questo problema si può estendere ad un numero qualsiasi di rette. Poi, siccome vi è sempre un'infinità di punti diversi che possono soddisfare il problema qui posto, si richiede anche di determinare e di tracciare la linea sulla quale tutti devono giacere. E Pappo dice che, quando sono assegnate solo tre o quattro rette, questa linea è una delle tre sezioni coniche, ma quando il problema è proposto per un numero maggiore di linee egli non procede affatto a determinarla, né a descriverla, né tanto meno ad esplicitare quelle, su cui tutti questi punti giacciono. Egli aggiunge soltanto che gli antichi ne avevano immaginata una che mostravano essere utile a tale scopo, e che sembrava la più eviden-

n'était pas toutefois la première. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si, par la méthode dont je me sers, on peut aller aussi loin qu'ils ont été.

Réponse à la question de Pappus

Et, premièrement, j'ai connu que, cette question n'étant proposée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut toujours trouver les points cherchés par la Géométrie simple, c'est-à-dire en ne se servant que de la règle et du compas, ni ne faisant autre chose que ce qui a déjà été dit: excepté seulement, lorsqu'il y a cinq lignes données, si elles sont toutes | parallèles. Auquel cas, 381
comme aussi lorsque la question est proposée en six ou 7 ou 8 ou 9 lignes, on peut toujours trouver les points cherchés par la Géométrie des solides, c'est-à-dire en y employant quelqu'une des trois sections coniques: excepté seulement, lorsqu'il y a neuf lignes données, si elles sont toutes parallèles. Auquel cas, derechef, et encore en 10, 11, 12 ou 13 lignes, on peut trouver les points cherchés par le moyen d'une ligne courbe qui soit d'un degré plus composée que les sections coniques: excepté en treize, si elles sont toutes parallèles. Auquel cas, et en quatorze, 15, 16 et 17, il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composée que la précédente: et ainsi à l'infini.

Puis j'ai trouvé aussi que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les points cherchés se rencontrent tous, non seulement en l'une des trois sections coniques, mais quelquefois aussi en la circonférence d'un cercle ou en une ligne droite. Et que, lorsqu'il y en a cinq ou six ou sept ou huit, tous ces points se rencontrent en quelqu'une des lignes qui sont d'un degré plus composées que les sections coniques, et il est impossible d'en imaginer aucune qui ne soit utile à cette question; mais ils peuvent aussi, derechef, se rencontrer en une section conique, ou en un cercle, ou en une ligne droite, et s'il y en a neuf ou 10 ou 11 ou 12, ces points se rencontrent en une ligne qui ne peut être que d'un degré plus composée que les précédentes; mais toutes celles qui sont d'un degré plus composées y peuvent servir; et ainsi à l'infini.

Au reste, la première et la plus simple de toutes, | après les 382
sections coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection

[21] Cfr. *Geometria*, II, *B Op* I 527-529 (AT VI 395, l. 3 sgg.)

[22] Roberval aveva contestato la soluzione di Descartes, ma, secondo quest'ultimo, senza formulare chiaramente la propria obiezione: cfr. *A Mersenne*, 10 marzo 1646, B 546, p. 2157 (AT IV 363, ll. 5-18). Nella lettera *A Mersenne*, 4 aprile 1648, B 653, p. 2543 (AT V 142, ll. 14-24), Descartes aggiunge che secondo Roberval manca qualcosa nella soluzione per il problema riferito a 3 o 4 rette. Infine Carcavi (*Carcavi a Descartes*, 24 settembre

te, e che tuttavia non era la prima[21]. Ciò mi ha fornito l'occasione di cercare se, con il metodo di cui mi servo, si possa andare altrettanto lontano quanto essi sono giunti.

Risposta al problema di Pappo[22]

E innanzitutto ho compreso che, quando il problema era proposto solo per tre, quattro, o cinque rette, si possono sempre trovare i punti cercati mediante la geometria semplice, cioè servendosi della riga e del compasso, e senza fare null'altro se non ciò che è già stato detto, con la sola eccezione di quando
381 siano date cinque rette tutte | parallele. In quel caso, come anche quando il problema è proposto per 6, 7, 8 o 9 linee, si possono sempre trovare i punti cercati mediante la geometria solida, cioè impiegando una delle tre sezioni coniche. Eccezione fatta solamente quando si hanno nove rette che sono tutte parallele. In quel caso, di nuovo, e ancora per 10, 11, 12 o 13 rette, si possono trovare i punti cercati mediante una curva che sia di un grado più composta delle sezioni coniche, eccetto il caso di tredici rette tutte parallele. In questo caso e in quello di 14, 15, 16 e 17, occorrerà impiegare una linea curva di un grado ancora più composto della precedente, e così all'infinito.

Ho poi trovato anche che, quando non sono date che tre o quattro rette, i punti cercati si trovano tutti non solo su una delle tre sezioni coniche[23], ma talvolta anche sulla circonferenza di un cerchio o su una linea retta; e che, quando ve ne sono cinque, sei, sette, o otto, tutti questi punti si trovano su una delle linee che sono di un grado più composto delle sezioni coniche ed è impossibile immaginarne una che non sia utile a tale problema[24], ma essi possono anche di nuovo trovarsi su una sezione conica, o su una circonferenza, o su una retta. Se poi sono date 9, 10, 11 o 12 rette, questi punti si trovano su una linea che non può essere, se non di un grado, più composta rispetto alle precedenti, ma tutte quelle che sono di un grado più composte possono servire, e così all'infinito.

382 Del resto, la prima e la più semplice fra tutte, | dopo le sezioni coniche, è quella che si può disegnare tramite l'intersezione

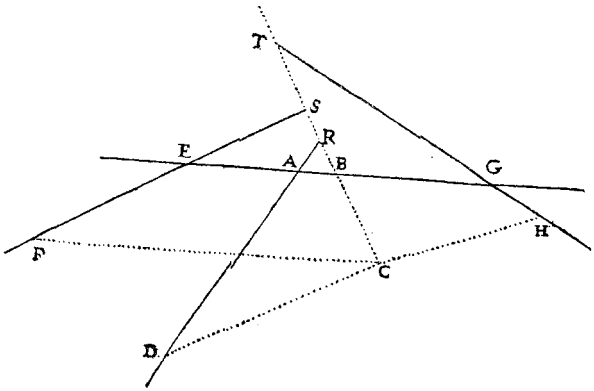
1649, B 711, pp. 2753-2755; AT V 413, l. 26-414, l. 11) dichiarerà di condividere l'obiezione di Roberval.

[23] Questo preciso punto sarà contestato da Roberval secondo quanto riportato da Carcavi. Cfr. *Carcavi a Descartes*, 24 settembre 1649, B 711, p. 2755 (AT V 415, l. 27-416, l. 4).

[24] Si deve intendere che tutte le linee aventi almeno un grado in più delle sezioni coniche possono soddisfare a quanto richiesto. Cfr. a questo proposito la nota 53 di *Lojacono 1983*, p. 551.

d'une Parabole et d'une ligne droite, en la façon qui sera tantôt expliquée. En sorte que je pense avoir entièrement satisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché en ceci par les anciens; et je tâcherai d'en mettre la démonstration en peu de mots: car il m'ennuie déjà d'en tant écrire.

Soient AB, AD, EF, GH, etc., plusieurs lignes données par position, et qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant



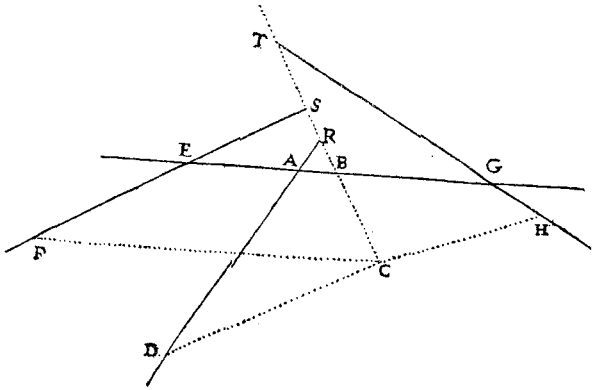
tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF et CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, etc., soient donnés, et que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces lignes soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils aient quelque autre proportion donnée: car cela ne rend point la question plus difficile.

Comment on doit poser les termes pour venir à l'Equation en cet exemple

Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite et, pour me démêler de la confusion de toutes | ces lignes, je considère 383
l'une des données et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x, et que BC soit nommé y; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux, aussi prolongées, s'il est besoin et si elles ne leur sont point parallèles: comme vous voyez ici, qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T. Puis, à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b; de façon qu'AB

di una parabola e di una retta, nella maniera che sarà or ora spiegata[25]. Ritengo di aver così interamente soddisfatto a quel che Pappo ci riferisce essere stato indagato dagli antichi, e cercherò di fornirne la dimostrazione in poche parole, perché mi secca l'averne già scritto tanto.

Siano AB, AD, EF, GH, ecc., un certo numero di linee rette date in posizione e si debba trovare un punto, ad esempio C,



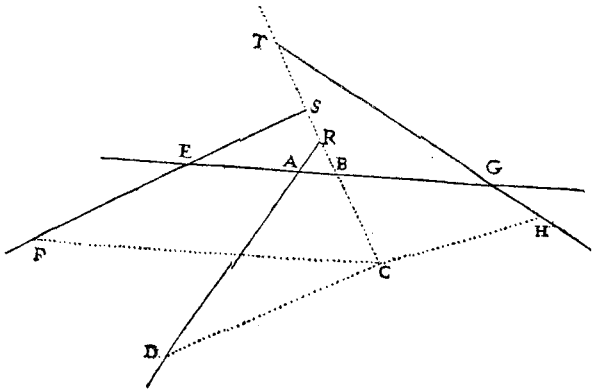
tale che, avendo condotto per esso sulle linee date, altre linee rette, come CB, CD, CF e CH, in modo da formare gli angoli dati CBA, CDA, CFE, CHG, ecc., e che il risultato della moltiplicazione di una parte di queste linee sia uguale a quello della moltiplicazione delle restanti, oppure che essi abbiano qualche altra proporzione data, giacché ciò non rende affatto più difficile il problema.

Come si devono porre i termini per giungere all'equazione in questo esempio

In primo luogo suppongo già risolto il problema e, per di-
383 stricarmi dalla confusione di tutte | queste linee, considero come principali una delle date e una di quelle che bisogna trovare, per esempio AB e CB, e cerco di rapportare ad esse tutte le altre nel modo seguente. Il segmento della linea AB compreso fra i punti A e B sia indicato con x e BC sia denominato y; e tutte le altre linee date siano prolungate fino a intersecare queste due, anch'esse prolungate, se occorre, e se non sono parallele. Ad esempio vedete qui che esse intersecano la linea AB nei punti A, E, G, e la BC nei punti R, S, T. Poi, dal momento che tutti gli angoli del triangolo ARB sono dati, la proporzione che intercorre fra i lati AB e BR è anch'essa data, e io la

[25] Cfr. *Geometria*, II, *B Op* I 545-547 (AT VI 408, l. 1 sgg.).

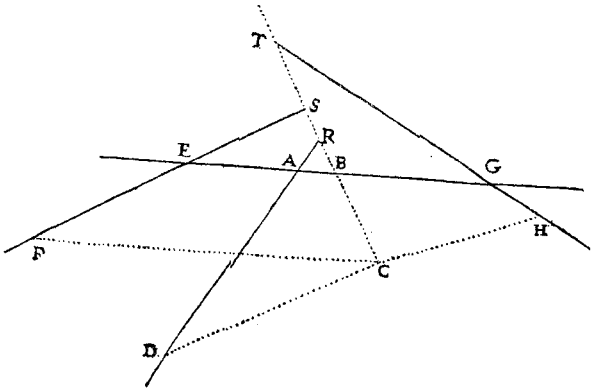
étant x, RB sera $\frac{bx}{z}$, et la toute CR sera $y + \frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C et R; car, si R tombait entre C et B, CR serait $y - \frac{bx}{z}$, et si C tombait entre B et R, CR serait $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de même, les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c: de façon que, CR étant $y + \frac{bx}{z}$, CD sera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Après cela, parce que les lignes AB, AD et EF sont données par position, la distance qui est entre les points A et E est aussi donnée, et, si on la nomme k, on aura EB égal à $k + x$; mais ce serait $k - x$, si le point B tombait entre E et A, et $-k + x$, si E tombait entre A et B. Et, parce que les angles du triangle ESB sont tous donnés, la proportion de BE à BS est aussi donnée, et je la pose comme z à d: si bien que BS est $\frac{dk + dx}{z}$, et la toute CS est $\frac{zy + dk + dx}{z}$; mais ce serait $\frac{zy - dk - dx}{z}$, si le point S | tom- 384
bait entre B et C; et ce serait $\frac{-zy + dk + dx}{z}$, si C tombait entre B et S. De plus, les trois angles du triangle FSC sont donnés, et, en suite, la proportion de CS à CF, qui soit comme de z à e; et la toute CF sera $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$. En même façon, AG, que je nomme l, est donnée, et BG est $l - x$; et à cause du triangle BGT, la proportion de BG à BT est aussi donnée, qui soit comme de z à f; et BT sera $\frac{fl - fx}{z}$, et CT = $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Puis, derechef, la proportion de



TC à CH est donnée, à cause du triangle TCH, et, la posant comme de z à g, on aura CH = $\frac{+gzy + fgl - fgx}{zz}$.

Et ainsi vous voyez qu'en tel nombre de lignes données par position qu'on puisse avoir, toutes les lignes tirées dessus, du point C, à angles donnés, suivant la teneur de la question, se peuvent toujours exprimer chacune par trois termes: dont l'un est composé de la quantité inconnue y multipliée, ou divisée, par

pongo come z a b, per cui, essendo AB x, RB sarà $\frac{bx}{z}$, e l'intera CR sarà $y + \frac{bx}{z}$, poiché il punto B cade fra C ed R: infatti, se R cadesse fra C e B, CR sarebbe $y - \frac{bx}{z}$, e se C cadesse fra B ed R, CR sarebbe $-y + \frac{bx}{z}$. Parimenti, i tre angoli del triangolo DRC sono dati, e di conseguenza lo è anche la proporzione che esiste fra i lati CR e CD, che pongo come z a c, di modo che, essendo CR <uguale a> $y + \frac{bx}{z}$, CD sarà $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. A questo punto, dal momento che le linee AB, AD e EF sono date in posizione, la distanza fra i punti A ed E è anch'essa data, e se la si indica con k, si avrà EB uguale a $k + x$, mentre sarebbe $k - x$, se il punto B cadesse fra E ed A, e $-k + x$, se E cadesse fra A e B. Inoltre, poiché gli angoli del triangolo ESB sono tutti dati, lo è pure la proporzione di BE a BS, e io la pongo come z a d, così BS è $\frac{dk + dx}{z}$, e l'intera CS è $\frac{zy + dk + dx}{z}$, mentre sarebbe $\frac{zy - dk - dx}{z}$, se il
384 punto S | cadesse fra B e C; e sarebbe $\frac{-zy + dk + dx}{z}$, se C cadesse fra B ed S. Di più, essendo dati i tre angoli del triangolo FSC, e di conseguenza la proporzione di CS a CF, che è come z ad e, l'intera CF sarà $\frac{ezy + dek + dex}{z^2}$. Alla stessa maniera AG, che indico con l, è dato, e BG è $l - x$; e per il triangolo BGT è data anche la proporzione di BG a BT, che è come z a f, e BT sarà $\frac{fl - fx}{z}$ e CT = $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Di nuovo, poi, la proporzione di TC a CH



è data, a causa del triangolo TCH, e, ponendola come z a g, si avrà CH = + $\frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$.

E così vedete che per un numero qualsivoglia di linee assegnate in posizione, tutte le linee tracciate su di esse dal punto C, formando angoli assegnati, secondo ciò che il problema richiede, si possono sempre esprimere ognuna con tre termini, il primo dei quali è composto dalla quantità incognita y, mol-

quelque autre connue; et l'autre, de la quantité inconnue x, aussi multipliée ou divisée par quelque autre | connue; et le troisième, 385
d'une quantité toute connue. Excepté seulement si elles sont parallèles ou bien à la ligne AB, auquel cas le terme composé de la quantité x sera nul; ou bien à la ligne CB, auquel cas celui qui est composé de la quantité y sera nul: ainsi qu'il est trop manifeste pour que je m'arrête à l'expliquer. Et pour les signes + et –, qui se joignent à ces termes, ils peuvent être changés en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyez aussi que, multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantités x et y, qui se trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chacune autant de dimensions qu'il y a eu de lignes, à l'explication desquelles elles servent, qui ont été ainsi multipliées. En sorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes; ni plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois; et ainsi à l'infini.

Comment on trouve que ce problème est plan, lorsqu'il n'est point proposé en plus de 5 lignes

De plus, à cause que, pour déterminer le point C, il n'y a qu'une seule condition qui soit requise, à savoir que ce qui est produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes soit égal, ou (ce qui n'est de rien plus malaisé) ait la proportion donnée à ce qui est produit par la multiplication des autres; on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités inconnues x ou y, et chercher l'autre par cette Equation, en laquelle il est évident que, lorsque la question n'est point proposée en plus de cinq lignes, la quantité x, qui ne sert point à l'expression de la première, peut toujours n'y avoir que deux dimensions. De façon | que, prenant une quantité connue pour y, il ne restera 386
que

$$xx = + \text{ ou } - ax + \text{ ou } - bb;$$

et ainsi on pourra trouver la quantité x avec la règle et le compas, en la façon tantôt expliquée. Même, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x; et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.

[26] Con le notazioni precedentemente introdotte (cfr. *supra* nota 18) la soluzione fornita da Descartes si può formulare nel modo seguente. Posta $d_1 = y$ e fissata uguale ad x la distanza sulla retta r_1 da un punto fisso A (origine del sistema di riferimento cartesiano) e dall'intersezione di d_1 con r_1, con considerazioni geometriche si mostra che i d_1 si possono sempre esprimere nella forma $d_1 = a_1x + b_1y + c_1$, dove a, b, c sono numeri che dipendono solo dalla retta r, se le rette r_1 non sono parallele fra loro (in caso contrario non compare

tiplicata o divisa per qualche altra quantità nota; l'altro consta della quantità incognita x, anch'essa moltiplicata o divisa per
385 qualche altra | nota, e il terzo è costituito da una quantità interamente nota. Con la sola eccezione del caso in cui le rette sono parallele o alla linea AB, nel qual caso il termine composto dalla quantità x sarà nullo, o alla linea CB, nel qual caso il termine che è composto dalla quantità y sarà nullo; e ciò è sin troppo evidente perché mi soffermi a spiegarlo. E per quanto riguarda i segni + e –, che sono aggiunti a questi termini, essi possono essere scambiati in tutti i modi possibili.

Vedete poi anche che, moltiplicando un certo numero di queste linee l'una per l'altra, le quantità x e y, che si trovano nel prodotto, non possono che avere ognuna tante dimensioni, quante sono le linee che esse servono a spiegare e che sono state così moltiplicate. Di modo che esse non avranno mai più di due dimensioni, nel risultato della moltiplicazione di due linee, né più di tre nel risultato della moltiplicazione di tre, e così all'infinito[26].

Come si scopre che questo problema è piano, quando non è proposto per più di 5 linee

Inoltre, poiché per determinare il punto C è richiesta una sola condizione – cioè che il risultato della moltiplicazione di un certo numero di queste linee sia uguale, oppure (ciò che non è assolutamente più difficile) stia nella proporzione data con il risultato della moltiplicazione delle restanti – si può assumere a piacere una delle due quantità incognite x o y, e cercare l'altra per mezzo di questa equazione, nella quale è evidente che, quando il problema è proposto per non più di cinque rette, la quantità x, che non serve affatto all'espressione della prima, non può mai avere se non due dimensioni. Di modo |
386 che, prendendo una quantità nota per y, non resterà che

$$x^2 = \pm\, ax \pm b^2;$$

e si potrà così trovare la quantità x con la riga e il compasso, nel modo or ora spiegato. Parimenti, prendendo successivamente infinite grandezze diverse per la linea y, se ne troveranno altrettante infinite per la linea x, e così si avrà un'infinità di punti diversi del tipo di quello qui indicato con C, per mezzo dei quali si descriverà la linea curva richiesta[27].

x nell'espressione dei d_1) e i prodotti indicati in nota 18 diventano dunque equazioni in x e y. Ad esempio, nel caso di $2n$ rette il luogo geometrico è

$$y(a_2x + b_2y + c_2)\cdot\ldots\cdot(a_nx + b_ny + c_n) = \frac{\alpha}{\beta}\,(a_{n+1}x + b_{n+1}y + c_{n+1})\cdot\ldots\cdot(a_{2n}x + b_{2n}y + c_{2n}).$$

[27] Questo passaggio sarà contestato da Roberval: cfr. *Carcavi a Descartes*, 24 settembre 1649, B 711, pp. 2755-2757 (AT V 416, ll. 4-23).

Il se peut faire aussi, la question étant proposée en six ou plus grand nombre de lignes, s'il y en a, entre les données, qui soient parallèles à BA ou BC, que l'une des deux quantités *x* ou *y* n'ait que deux dimensions en l'Equation, et ainsi qu'on puisse trouver le point C avec la règle et le compas. Mais, au contraire, si elles sont toutes parallèles, encore que la question ne soit proposée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra ainsi être trouvé, à cause que, la quantité *x* ne se trouvant point en toute l'Equation, il ne sera plus permis de prendre une quantité connue pour celle qui est nommée *y*, mais ce sera elle qu'il faudra chercher. Et, parce qu'elle aura trois dimensions, on ne la pourra trouver qu'en tirant la racine d'une Equation cubique: ce qui ne se peut généralement faire, sans qu'on y emploie pour le moins une section conique. Et encore qu'il y ait jusques à neuf lignes données, pourvu qu'elles ne soient point toutes parallèles, on peut toujours faire que l'Equation ne monte | que jusques au carré de 387
carré: au moyen de quoi, on la peut aussi toujours résoudre par les sections coniques, en la façon que j'expliquerai ci-après. Et encore qu'il y en ait jusques à treize, on peut toujours faire qu'elle ne monte que jusques au carré de cube: en suite de quoi, on la peut résoudre par le moyen d'une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que les sections coniques, en la façon que j'expliquerai aussi ci-après. Et ceci est la première partie de ce que j'avais ici à démontrer; mais, avant que je passe à la seconde, il est besoin que je dise quelque chose en général de la nature des lignes courbes. |

Quando il problema è proposto per sei o per un numero maggiore di rette, se, fra le date ve ne sono di parallele a BA, o a BC, può anche accadere che una delle due quantità x o y non abbia che due dimensioni nell'equazione e si possa perciò trovare il punto C con la riga e il compasso. Invece, al contrario, se le linee sono tutte parallele, anche se il problema fosse proposto per cinque linee, questo punto C non si potrà trovare così, poiché non essendoci la quantità x nell'intera equazione, non sarà più lecito assumere una quantità nota per quella denominata y, ma sarà essa che bisognerà cercare. E dal momento che essa avrà tre dimensioni, non la si potrà trovare se non estraendo la radice di un'equazione cubica, cosa che generalmente non si può fare, senza impiegare almeno una sezione conica. E anche se fossero assegnate fino a nove linee, purché non siano tutte parallele, si può sempre far sì che l'equazione
387 non superi | la quarta potenza, per cui si può anch'essa sempre risolvere con le sezioni coniche, nel modo che spiegherò qui di seguito. E anche se ce ne fossero fino a tredici, si può sempre far sì che l'equazione non superi la sesta potenza, per cui la si può risolvere per mezzo di una linea appena di un grado più composta delle sezioni coniche, nel modo che spiegherò anch'esso qui di seguito[28]. E questa è la prima parte di ciò che dovevo qui dimostrare, ma, prima di passare alla seconda, occorre che dica qualcosa in generale sulla natura delle linee curve. |

[28] Descartes afferma qui che nel caso di 10, 11, 12 e 13 rette l'equazione del luogo geometrico ha grado ≤ 6, ed essa si costruisce con una cubica; nel caso di 14, 15, 16 e 17 rette, l'equazione ha grado ≤ 8 e si costruisce con una curva di equazione di quarto grado o riconducibile al quarto. Tale studio sarà ripreso nei libri II e III della *Geometria*, *B Op* I 523-531, 649-653 (AT VI 392-396, 483-485).

LIVRE SECOND 388

De la nature des lignes courbes

Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Géométrie

Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les Problèmes de Géométrie, les uns sont plans, les autres solides, et les autres linéaires: c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point, outre cela, distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées Mécaniques, plutôt que Géométriques. Car, de dire que ç'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudrait rejeter, par même raison, les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause | que les instruments qui servent à les 389
tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes: car il faudrait, pour cette raison, les rejeter des Mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la Géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite, touchant ces lignes, que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite, et décrire un cercle d'un centre

[29] Cfr. *A Beeckman*, 26 marzo 1619, B 2, p. 7 (AT X 157, ll. 7-21).
[30] Il testo della *Geometria* (ed. van Schooten 1659, p. 17) utilizza la terminologia della

388 LIBRO SECONDO

La natura delle linee curve

Quali sono le linee curve che si possono ammettere in geometria[29]

Gli antichi hanno sottolineato molto bene che fra i problemi di geometria, alcuni sono piani, altri solidi, altri lineari[30]: cioè alcuni possono essere costruiti tracciando solo linee rette e cerchi; altri invece non possono essere costruiti se non impiegando almeno qualche sezione conica; altri infine non possono essere costruiti se non impiegando qualche altra linea più composta. Ma mi stupisco per il fatto che, oltre a ciò, essi non hanno distinto gradi diversi fra queste linee più composte, e non saprei comprendere perché le hanno chiamate meccaniche, piuttosto che geometriche. Infatti, dire che ciò dipende dal fatto che occorre servirsi di qualche macchina per descriverle, significherebbe escludere, per la stessa ragione, i cerchi e le linee rette, visto che non li si descrive sulla carta se non con un compasso e con una riga, che possono essere chiamati an-
389 ch'essi macchine. Ciò non è neppure dovuto al fatto | che gli strumenti che servono a tracciarle, essendo più complessi della riga e del compasso, non possono essere altrettanto precisi: infatti, per questa ragione, bisognerebbe escludere quelle linee dalla Meccanica, dove è auspicata la precisione delle opere che escono dalle mani, piuttosto che dalla geometria, dove ad essere ricercata è solo la precisione del ragionamento, che può essere senza dubbio ugualmente perfetto, sia trattando le linee di un tipo, sia dell'altro. Neppure direi che ciò sia dovuto al fatto che essi non hanno voluto aumentare il numero dei loro postulati, e si sono accontentati che si accordasse loro di poter unire due punti dati con una linea retta e di poter descrivere un cerchio

traduzione latina del libro III, proposizione IV del testo di Pappo: cfr. l'edizione Hultsch (I, p. 55 = Commandino p. 5r.).

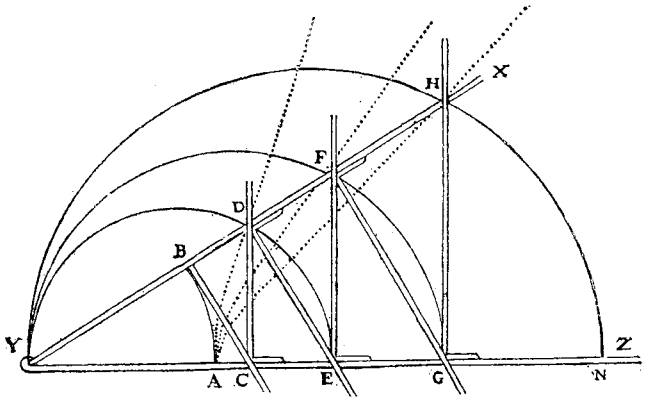
donné, qui passât par un point donné: car ils n'ont point fait de scrupule de supposer, outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres: ce qui ne me paraît en rien plus difficile. Il est vrai qu'ils n'ont pas aussi entièrement reçu les sections coniques en leur Géométrie, et je ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont été approuvés par l'usage; mais il est, ce me semble, très clair que, prenant, comme on fait, pour Géométrique ce qui est précis et exact, et pour Mécanique ce qui ne l'est pas; et considérant la Géométrie comme une science qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps; on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les | plus simples, pourvu qu'on les puisse imagi- 390
ner être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent: car, par ce moyen, on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure. Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens Géomètres de recevoir celles qui étaient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la Spirale, la Quadratrice, et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux Mécaniques et ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement; bien qu'ils aient après examiné la Conchoïde, la Cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois, à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières. Ou bien, c'est que, voyant qu'ils ne connaissaient encore que peu de choses touchant les sections coniques, et qu'il leur en restait même beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la règle et le compas, qu'ils ignoraient, ils ont cru ne devoir pas entamer de matière plus difficile. Mais, parce que j'espère que dorénavant ceux qui auront l'adresse de se servir du calcul Géométrique ici proposé, ne trouveront pas assez de quoi s'arrêter touchant les problèmes plans ou solides, je crois qu'il

di centro dato e passante per un punto dato: infatti, non si sono fatti scrupoli a supporre, in aggiunta, per poter trattare le sezioni coniche, che si potesse intersecare ogni cono dato con un piano dato. E non vi è bisogno di supporre null'altro, per tracciare tutte le linee curve che voglio introdurre qui, se non che due o più linee possano essere mosse l'una per mezzo dell'altra, e che le loro intersezioni ne determinino altre: cosa che non mi sembra per nulla più difficile. È vero che essi non hanno interamente accolto le sezioni coniche nella loro geometria, e io non voglio mettermi a cambiare i nomi che sono stati sanciti dall'uso; ma è molto chiaro, mi sembra, che assumendo per geometrico – come si fa – ciò che è preciso ed esatto, e per meccanico ciò che non lo è, e considerando la geometria come una scienza che insegna in generale a conoscere le misure di tutti i corpi, non si devono escludere né le linee più composte,
390 né quelle | più semplici, visto che le si può immaginare descritte per mezzo di un movimento continuo, o per mezzo di più movimenti che si susseguono e di cui gli ultimi sono interamente regolati da quelli che li precedono: infatti, in questo modo, si può sempre avere una conoscenza esatta della loro misura. Ma forse ciò che ha impedito agli antichi geometri di ammettere linee più composte delle sezioni coniche è il fatto che le prime che hanno preso in considerazione sono state per caso[31] la spirale, la quadratrice, e simili, che appartengono in effetti solo alle linee meccaniche, e che non sono affatto nel novero delle linee che io penso debbano essere ammesse qui (dal momento che le si immagina descritte da due movimenti separati e che non hanno fra loro alcun rapporto che si possa misurare esattamente), benché abbiano successivamente preso in esame la concoide, la cissoide, e poche altre curve, tuttavia, poiché forse non hanno analizzato a sufficienza le loro proprietà, non vi hanno dedicato più attenzione che alle prime. Oppure, il fatto è che, vedendo che conoscevano ancora solo poche cose riguardo delle sezioni coniche, e che restavano loro molte cose che ignoravano anche in merito alle costruzioni con riga e compasso, essi hanno creduto di non dover affrontare una materia più difficile. Ma, siccome spero che d'ora in avanti coloro che avranno l'abilità di servirsi del calcolo geometrico qui proposto, non troveranno motivi sufficienti per arrestarsi di fronte ai problemi piani e solidi, credo che giunga a

[31] L'elenco di curve rispecchia nell'ordine quello fornito da Pappo (libro IV, p. XXXVI): *Collectiones…*, op. cit., ed. Hultsch, I, 270-271 (Commandino p. 61 r.).

est à propos que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice. |

Voyez les lignes AB, AD, AF et semblables, que je suppose 391
avoir été décrites par l'aide de l'instrument YZ, qui est composé de plusieurs règles, tellement jointes que, celle qui est marquée YZ étant arrêtée sur la ligne AN, on peut ouvrir et fermer l'angle XYZ, et que, lorsqu'il est tout fermé, les points B, C, D, <E>, F, G, H sont tous assemblés au point A; mais qu'à mesure qu'on

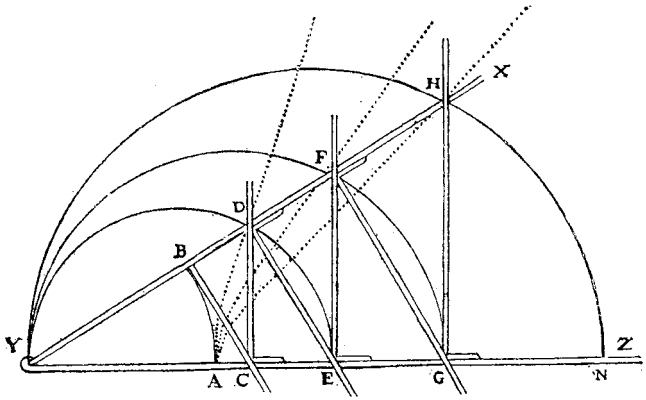


l'ouvre, la règle BC, qui est jointe à angles droits avec XY au point B, pousse vers Z la règle CD, qui coule sur YZ en faisant toujours des angles droits avec elle; et CD pousse DE, qui coule tout de même sur YX en demeurant parallèle à BC; DE pousse EF; EF pousse FG; celle-ci pousse GH; et on en peut concevoir une infinité d'autres, qui se poussent consécutivement en même façon, et dont les unes fassent toujours les mêmes angles avec YX, et les autres avec YZ. Or, pendant | qu'on ouvre ainsi l'angle 392
XYZ, le point B décrit la ligne AB, qui est un cercle; et les autres points, D, F, H, où se font les intersections des autres règles, décrivent d'autres lignes courbes, AD, AF, AH, dont les dernières sont, par ordre, plus composées que la première, et celle-ci plus que le cercle. Mais je ne vois pas ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive aussi nettement et aussi distinctement la description de cette première, que du cercle ou, du moins, que des sections coniques; ni ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive la seconde, et la troisième, et toutes les autres qu'on peut décrire,

[32] Cfr. *Pensieri privati*, *B Op* II 1081-1083 e 1083-1087 (AT X 234-235 e 238-242).

proposito invitarli ad altre ricerche, dove non mancheranno mai di materia di esercizio. |

391 Osservate le linee AB, AD, AF e simili, che suppongo siano state tracciate per mezzo dello strumento YZ[32], che è composto di parecchi regoli, uniti in modo tale che, essendo fermato sulla linea AN quello che è indicato YZ, si può aprire e chiudere l'angolo XYZ, e quando è tutto chiuso i punti B, C, D, E[33], F, G, H sono tutti riuniti nel punto A; ma, man mano che



lo si apre, il regolo BC, che è unito ad angolo retto con XY nel punto B, spinge verso Z il regolo CD, che scorre su YZ formando sempre con esso degli angoli retti; e CD spinge DE, che scorre ugualmente su YX mantenendosi parallelo a BC; DE spinge EF; EF spinge FG; quest'ultimo spinge GH; e si possono immaginare un'infinità di altri regoli, che si spingono consecutivamente nello stesso modo, di cui gli uni formano sem-
392 pre gli stessi angoli con YX, e gli altri con YZ. Ora, mentre | si apre così l'angolo XYZ, il punto B descrive la linea AB, che è un cerchio; e gli altri punti, D, F, H, dove si formano le intersezioni degli altri regoli, descrivono altre linee curve, AD, AF, AH, di cui le ultime sono, nell'ordine, più composte della prima, e quest'ultima lo è più del cerchio. Ma non vedo cosa possa impedire di concepire la descrizione di questa prima linea in modo altrettanto netto e distinto che quella del cerchio o, almeno, delle sezioni coniche; né cosa possa impedire di concepire la seconda, e la terza e tutte le altre che si possono

Sull'uso dei compassi cfr. anche la lettera *A Beeckman*, 26 marzo 1619, B 2, pp. 5-7 (AT X 154, l. 4-156, l. 6).

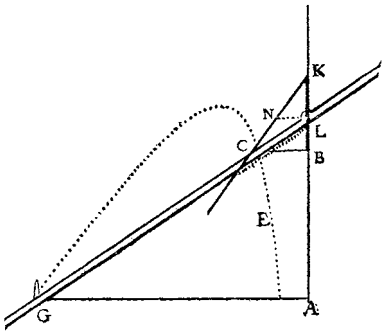
[33] Il punto E è stato aggiunto da *Schooten* (p. 19).

aussi bien que la première; ni, par conséquent, qu'on ne les reçoive toutes en même façon, pour servir aux spéculations de Géométrie.

La façon de distinguer toutes les lignes courbes en certains genres, et de connaître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites

Je pourrais mettre ici plusieurs autres moyens, pour tracer et concevoir des lignes courbes qui seraient de plus en plus composées par degrés à l'infini. Mais, pour comprendre ensemble toutes celles qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer Géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même. Et que, lorsque cette équation ne monte que jusques au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une même, la ligne courbe est du premier et plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient comprises. Mais que, lorsque l'équation monte jusques à | la trois ou quatrième dimension des deux ou de l'une 393
des deux quantités indéterminées: car il en faut deux pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre: elle est du second. Et que, lorsque l'équation monte jusques à la 5 ou sixième dimension, elle est du troisième: et ainsi des autres à l'infini.

Comme, si je veux savoir de quel genre est la ligne EC, que j'imagine être décrite par l'intersection de la règle GL et du plan rectiligne CNKL, dont le côté KN est indéfiniment prolongé vers C, et qui, étant mû sur le plan de dessous en ligne droite, c'est-à-dire en telle sorte que son diamètre KL se trouve toujours appliqué sur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part et d'autre, fait mouvoir circulairement cette règle GL autour du point G, à cause qu'elle lui est tellement jointe qu'elle passe toujours par le point L. Je choisis une ligne droite, comme AB, pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe EC, et



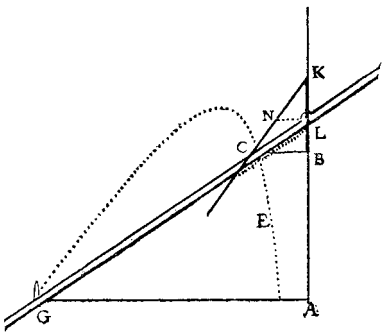
[34] Cioè il prodotto delle due quantità indeterminate.

descrivere, altrettanto bene della prima; né, per conseguenza, cosa vieti di ammetterle tutte allo stesso modo, per utilizzarle nelle speculazioni della geometria.

Il modo di distinguere tutte le linee curve in determinati generi, e di riconoscere il rapporto che sussiste fra tutti i loro punti e quelli delle linee rette

Potrei indicare qui molti altri modi per tracciare e concepire delle linee curve che sarebbero più composte di grado, via via all'infinito. Ma per comprendere insieme tutte quelle che si danno in natura, e distinguerle ordinatamente secondo determinati generi, non so trovare una soluzione migliore che quella di dire che tutti i punti delle linee che si possono chiamare geometriche, cioè che cadono su qualche misura precisa ed esatta, hanno necessariamente un qualche rapporto con tutti i punti di una linea retta, che può essere espressa mediante una equazione, e ovunque con la stessa equazione. E che, quando questa equazione non supera il rettangolo di due quantità indeterminate[34], oppure il quadrato di una stessa quantità indeterminata, la linea curva è del primo genere, quello più semplice[35], nel quale sono compresi soltanto il cerchio, la parabola, l'iperbole
393 e l'ellisse. Invece, quando l'equazione arriva alla | terza o alla quarta dimensione di entrambe o di una delle due quantità indeterminate – infatti occorrono due quantità indeterminate per esplicitare qui il rapporto fra un punto e l'altro – la linea è del secondo genere. E quando l'equazione arriva alla quinta o alla sesta dimensione, è del terzo, e così via all'infinito.

Per esempio, se voglio sapere di che genere è la linea EC – che immagino descritta dall'intersezione del regolo GL e del piano rettilineo CNKL – il cui lato KN è indefinitamente prolungato verso C e che essendo mosso in linea retta sul piano sottostante (cioè in modo tale che il suo diametro KL si trovi sempre applicato su qualche parte della linea BA prolungata da una parte e dall'altra), si fa ruotare questo regolo GL intorno al punto G, poiché gli è unito in modo tale da passare sempre per il punto L. Scelgo una linea retta, per esempio AB, per rapportare ai suoi diversi punti tutti quelli di questa linea curva EC, e



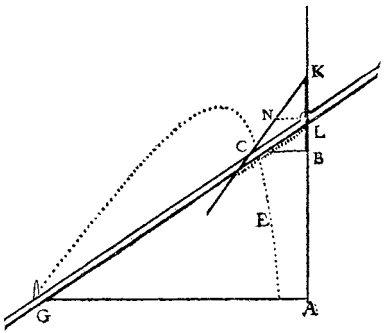
[35] Sulla semplicità delle linee cfr. l'inizio del libro III: *B Op* I 593 (AT VI 442).

en cette ligne AB je choisis un point, comme A, pour commencer par lui ce calcul. Je dis que je choisis et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut: car, encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois, en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la | ligne paraisse de même genre, ainsi qu'il est 394
aisé à démontrer. Après cela, prenant un point à discrétion dans la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à GA; et parce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme, l'une y, et l'autre x. Mais, afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je considère aussi les quantités connues qui déterminent la description de cette ligne courbe: comme GA que je nomme a, KL que je nomme b, et NL, parallèle à GA, que je nomme c. Puis je dis: comme NL est à LK, ou c à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est, par conséquent $\frac{b}{c}y$; et BL est $\frac{b}{c}y - b$; et AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus, comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De façon que, multipliant la seconde par la troisième, on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui est égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$, qui se produit en multipliant la première par la dernière; et ainsi l'équation qu'il fallait trouver est:

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

de laquelle on connaît que la ligne EC est du premier genre: comme, en effet, elle n'est autre qu'une Hyperbole.

Que si, en l'instrument qui sert à la décrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce soit cette Hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan CNKL, l'intersection de cette ligne et de la règle GL décrira, au lieu de l'hyperbole EC, | une 395
autre ligne courbe, qui sera du second genre. Comme, si CNK est un cercle dont L soit le centre, on décrira la première Conchoïde des

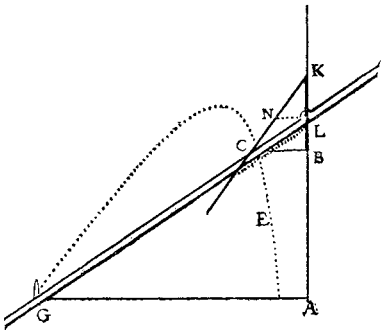


su questa linea AB scelgo un punto, per esempio A, per cominciare il calcolo a partire da esso[36]. Dico che scelgo l'uno e l'altra, poiché vi è la libertà di prenderli come si vuole: infatti, nonostante vi siano molte scelte per rendere l'equazione più corta e facile, nondimeno, in qualunque modo si prendano la
394 retta e il punto, si può sempre far sì che la | linea risulti appartenere al medesimo genere, come è facile dimostrare. Dopo di che, prendendo un punto a piacere sulla curva, per esempio C, sul quale suppongo sia applicato lo strumento che serve a descriverla, traccio da questo punto C la linea CB parallela a GA; e dato che CB e BA sono due quantità indeterminate e incognite, le chiamo una y, e l'altra x. Ma, per trovare il rapporto dell'una rispetto all'altra, prendo anche in considerazione le quantità note che determinano la descrizione di questa linea curva: per esempio GA che chiamo a, KL che chiamo b, e NL, parallela a GA, che chiamo c. Poi dico: come NL sta a LK, ossia come c sta a b, così CB, o y, sta a BK, che è per conseguenza $\frac{b}{c}y$, e BL è $\frac{b}{c}y - b$, e AL è $x + \frac{b}{c}y - b$. Inoltre, come CB sta a LB, cioè come y sta a $\frac{b}{c}y - b$, così a, o GA, sta a LA, o $x + \frac{b}{c}y - b$. Di modo che, moltiplicando la seconda per la terza si ha $\frac{ab}{c}y - ab$, che è uguale a $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, che si ottiene moltiplicando la prima per l'ultima; e quindi l'equazione che bisognava trovare è:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

dalla quale si conosce che la linea EC è del primo grado: ed in effetti, essa è null'altro che un'iperbole.

E se, nello strumento che serve a descriverla, si fa in modo che al posto della linea retta CNK vi sia quest'iperbole, o qualche altra linea curva del primo genere che delimiti il piano CNKL, l'intersezione di questa linea e del regolo GL descriverà, al posto dell'iperbole
395 EC, | un'altra linea curva, che sarà del secondo genere. Per esempio, se CNK è un cerchio di centro L, si descriverà la prima concoide degli antichi;



[36] La linea AB rappresenta l'asse delle ascisse, e A è l'origine degli assi.

anciens; et si c'est une Parabole dont le diamètre soit KB, on décrira la ligne courbe que j'ai tantôt dit être la première et la plus simple pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position. Mais si, au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en est une du second qui termine le plan CNKL, on en décrira, par son moyen, une du troisième: ou, si c'en est une du troisième, on en décrira une du quatrième; et ainsi à l'infini, comme il est fort aisé à connaître par le calcul. Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte.

Au reste, je mets les lignes courbes qui font monter cette équation jusques au carré de carré, au même genre que celles qui ne la font monter que jusques au cube; et celles dont l'équation monte au carré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide; et ainsi des autres. Dont la raison est qu'il y a règle générale pour réduire au cube | toutes les difficultés qui 396
vont au carré de carré, et au sursolide toutes celles qui vont au carré de cube, de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

Mais il est à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre, encore que la plupart soient également composées, en sorte qu'elles peuvent servir à déterminer les mêmes points et construire les mêmes problèmes, il y en a toutefois aussi quelques-unes qui sont plus simples, et qui n'ont pas tant d'étendue en leur puissance. Comme, entre celles du premier genre, outre l'Ellipse, l'Hyperbole et la Parabole, qui sont également composées, le cercle y est aussi compris, qui manifestement est plus simple. Et entre celles du second genre, il y a la Conchoïde vulgaire, qui a son origine du cercle, et il y en a encore quelques autres qui, bien qu'elles n'aient pas tant d'étendue que la plupart de celles du même genre, ne peuvent toutefois être mises dans le premier.

Suite de l'explication de la question de Pappus mise au livre précédent

Or, après avoir ainsi réduit toutes les lignes courbes à certains genres, il m'est aisé de poursuivre en la démonstration de la réponse que j'ai tantôt faite à la question de Pappus. Car, premièrement, ayant fait voir ci-dessus que, lorsqu'il n'y a que trois

[37] Cfr. *Geometria*, I, *B Op* I 507 (AT VI 380).

[38] Si veda la regola fornita nel libro III: *B Op* I 613 (AT VI 457-461). Descartes riprenderà la questione in termini algebrici nella lettera *A Dotzen*, 25 marzo 1642, B 353, pp. 1629-1631 (AT III 553-556).

e se è una parabola di diametro KB, si descriverà la linea curva che, come ho detto poc'anzi, è la prima e la più semplice per il problema di Pappo[37], quando non vi sono che cinque linee rette assegnate in posizione. Ma se al posto di queste linee curve del primo genere, vi è una curva del secondo genere a delimitare il piano CNKL, si descriverà mediante essa una curva del terzo genere; o, se ce n'è una del terzo, se ne descriverà una del quarto, e così all'infinito, come è molto facile da verificare per mezzo del calcolo. E in qualunque altro modo si immagini la descrizione di una linea curva, purché essa sia nel novero di quelle che chiamo geometriche, si potrà sempre trovare un'equazione per determinare tutti i suoi punti in questo modo.

Del resto, pongo le linee curve che fanno salire quest'equazione fino al quadrato del quadrato nello stesso genere di quelle che non la fanno salire se non fino al cubo; e quelle la cui equazione sale al quadrato del cubo le pongo nel medesimo genere di quelle la cui equazione non sale se non fino al sursolido, e così via. E la ragione di ciò sta nel fatto che vi è una
396 regola generale per ridurre al cubo | tutte le difficoltà che giungono al quadrato del quadrato, e al sursolido tutte quelle che giungono al quadrato del cubo, di modo che non si devono affatto ritenere queste curve più composte[38].

Ma bisogna notare che fra le linee di ciascun genere, benché esse siano perlopiù ugualmente composte, di modo che possono servire a determinare gli stessi punti e a costruire gli stessi problemi, tuttavia ve ne sono anche alcune più semplici, e che non hanno una tale estensione nella loro potenza. Per esempio, fra quelle del primo genere, oltre all'ellisse, all'iperbole e alla parabola, che sono ugualmente composte, è compreso anche il cerchio, che è evidentemente più semplice. E fra quelle del secondo genere vi è la concoide comune, che si origina dal cerchio e ve ne sono ancora altre che, pur non avendo un'estensione pari alla maggior parte di quelle dello stesso genere, non possono tuttavia essere poste nel primo.

Seguito della spiegazione del problema di Pappo inserito nel libro precedente[39]

Ora, dopo aver ridotto tutte le linee curve a determinati generi, mi è facile proseguire nella dimostrazione della risposta che ho poc'anzi dato al problema di Pappo[40]. Infatti, innanzitutto, avendo qui sopra mostrato che, quando sono date solo tre

[39] Nella lettera *A Debeaune*, 20 febbraio 1639, B 203, pp. 989-991 (AT II 510, l. 15-511, l. 13), Descartes rileverà alcune inesattezze nella trattazione del problema di Pappo proposta nelle pagine seguenti.

[40] Cfr. *Geometria*, I, *B Op* I 507 (AT VI 380, l. 25 sgg.).

ou 4 lignes droites données, l'équation, qui sert à déterminer les points cherchés, ne monte que jusques au carré, il est évident que la ligne courbe, où se trouvent ces points, est nécessairement quelqu'une de celles du premier genre, à cause que cette même équation explique le rapport qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite. Et que, lorsqu'il n'y a | point plus de 8 lignes droites données, cette équation ne monte 397
que jusques au carré de carré tout au plus, et que, par conséquent, la ligne cherchée ne peut être que du second genre, ou au-dessous. Et que, lorsqu'il n'y a point plus de 12 lignes données, l'équation ne monte que jusques au carré de cube, et que, par conséquent, la ligne cherchée n'est que du troisième genre, ou au-dessous: et ainsi des autres. Et même, à cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, et par conséquent faire changer tant les quantités connues que les signes + et – de l'équation, en toutes les façons imaginables, il est évident qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre qui ne soit utile à cette question, quand elle est proposée en 4 lignes droites; ni aucune du second qui n'y soit utile, quand elle est proposée en huit; ni du troisième, quand elle est proposée en douze; et ainsi des autres. En sorte qu'il n'y a pas une ligne courbe, qui tombe sous le calcul et puisse être reçue en Géométrie, qui n'y soit utile pour quelque nombre de lignes.

Solution de cette question, quand elle n'est proposée qu'en 3 ou 4 lignes

Mais il faut ici plus particulièrement que je détermine et donne la façon de trouver la ligne cherchée qui sert en chaque cas, lorsqu'il n'y a que 3 ou 4 lignes droites données; et on verra, par même moyen, que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres que les trois sections coniques et le cercle.

Reprenons les 4 lignes AB, AD, EF et GH, données ci-dessus, et qu'il faille trouver une autre ligne, en laquelle il se rencontre une infinité de points tels que C, duquel ayant tiré les 4 lignes CB, CD, CF | et CH, à angles donnés sur les données, CB, mul- 398
tipliée par CF, produit une somme égale à CD multipliée par CH: c'est-à-dire, ayant fait:

$$\mathrm{CB} = y, \qquad \mathrm{CD} = \frac{czy + bcx}{zz},$$
$$\mathrm{CF} = \frac{ezy + dek + dex}{zz}, \text{ et } \mathrm{CH} = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz},$$

l'équation est

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz},$$

o 4 linee rette, l'equazione, che serve a determinare i punti cercati, non supera il quadrato, è evidente che la linea curva cui appartengono questi punti è necessariamente una di quelle del primo genere, poiché questa stessa equazione esplicita il rapporto che hanno tutti i punti delle linee del primo genere con quelli
397 di una linea retta. E che, quando non sono date | più di 8 linee rette, questa equazione non supera tutt'al più il quadrato del quadrato e, di conseguenza, la linea cercata non può che essere del secondo genere, o di uno inferiore. E che, quando non sono date più di 12 linee, l'equazione non supera il quadrato del cubo, e che di conseguenza la linea cercata è del terzo genere, o di uno inferiore, e così via. E, analogamente, poiché la posizione delle linee rette date può variare in tutti i modi e, di conseguenza, far cambiare sia le quantità note sia i segni + e – dell'equazione in tutti i modi immaginabili, è evidente che non vi è nessuna linea curva del primo genere che non sia utile per questo problema, quando esso è proposto per 4 linee rette; né vi è alcuna linea del secondo che non sia utile quando il problema è proposto per otto, né alcuna del terzo quando è proposto per dodici linee rette, e così via. Di modo che non vi è nessuna linea curva che cada sotto il calcolo e che sia ammessa in geometria, che non risulti utile per qualche numero di linee.

Soluzione di questo problema, quando è proposto per 3 o 4 linee

Bisogna però che io qui determini più in dettaglio e indichi il modo di trovare la linea cercata che serve in ciascun caso, quando sono date solo 3 o 4 linee rette; e si vedrà, con lo stesso ragionamento, che il primo genere di linee curve non comprende che le tre sezioni coniche e il cerchio.

Riprendiamo le 4 linee date precedentemente AB, AD, EF e GH, e si debba trovare un'altra linea sulla quale giacciano un'infinità di punti C tali che, avendo tirato le 4 linee CB, CD,
398 CF | e CH, che formino angoli dati con le linee date, CB moltiplicato per CF produca una somma uguale a CD moltiplicato per CH: cioè, posti:

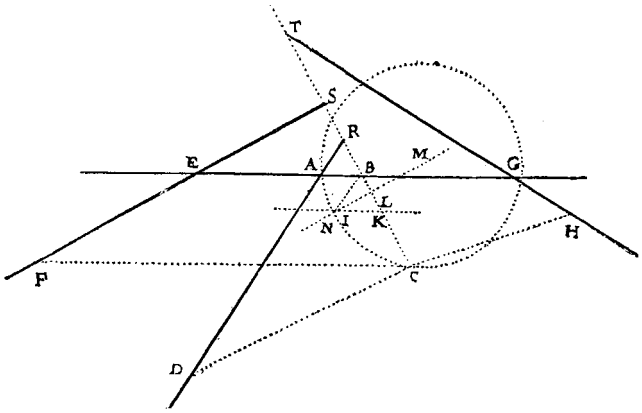
$$\mathrm{CB} = y, \qquad \mathrm{CD} = \frac{czy + bcx}{z^2},$$
$$\mathrm{CF} = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, \text{ e } \mathrm{CH} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2},$$

l'equazione è[41]

$$y^2 = \frac{(-dekz^2 + cfglz)y + (-dez^2x - cfgzx + bcgzx)y + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2},$$

[41] Su tale equazione, cfr. *A Debeaune*, 20 febbraio 1639, B 203, pp. 989-991 (AT II 511, ll. 7-13).

au moins en supposant *ez* plus grand que *cg*: car, s'il était moindre, il faudrait changer tous les signes + et –. Et si la quan-



tité *y* se trouvait nulle, ou moindre que rien en cette équation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle DAG, il faudrait le supposer aussi en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en | changeant les 399
signes + et –, selon qu'il serait requis à cet effet. Et si, en toutes ces 4 positions, la valeur d'*y* se trouvait nulle, la question serait impossible au cas proposé. Mais supposons-la ici être possible, et, pour en abréger les termes, au lieu des quantités $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$, écrivons $2m$, et au lieu de $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$, écrivons $\frac{2n}{z}$: et ainsi nous aurons

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$

dont la racine est

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}};$$

et, derechef pour abréger,

$$\text{au lieu de } -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}, \text{ écrivons } o;$$

$$\text{et au lieu de } \frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}, \text{ écrivons } -\frac{p}{m}.$$

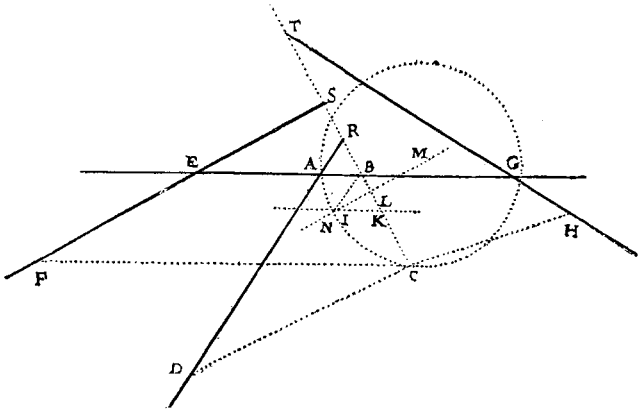
Car, ces quantités étant toutes données, nous les pouvons nommer comme il nous plaît; et ainsi nous avons

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx},$$

[42] Cfr. su questo punto e sull'obiezione in proposito di Roberval: *Carcavi a Descartes*, 9 luglio 1649, B 703, p. 2709 (AT V 373, ll. 26-28); *A Carcavi*, 17 agosto 1649, B 705, pp. 2735-2737 (AT V 394, l. 28-397, l. 4).

[43] Descartes considera solo la radice positiva.

almeno supponendo *ez* maggiore di *cg*: infatti, se fosse minore, bisognerebbe cambiare tutti i segni + e –. E se in questa equa-



zione la quantità *y* risultasse nulla, o minore di zero, se si è supposto il punto C nell'angolo DAG, bisognerebbe supporlo
399 anche nell'angolo DAE, o EAR, o RAG, | cambiando i segni + e –, a seconda di quanto richiesto a tal fine. E se, in tutte queste 4 posizioni, il valore di *y* risultasse nullo il problema sarebbe impossibile nel caso proposto[42]. Ma supponiamo qui che il problema sia possibile e, per abbreviare i termini, al posto delle quantità $\frac{cfglz - dekz^2}{ez^2 - cgz^2}$, scriviamo $2m$, al posto di $\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^2 - cgz^2}$ scriviamo $\frac{2n}{z}$: e così avremo

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^2 - cgz^2},$$ [43]

la cui radice è

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^2 - cgz^2}};$$

e per abbreviare ancora,

al posto di $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^2 - cgz^2}$, scriviamo o;

e al posto di $\frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^2 - cgz^2}$, scriviamo[44] $-\frac{p}{m}$.

Infatti, poiché tutte queste quantità sono date, possiamo chiamarle ad arbitrio e così abbiamo[45]

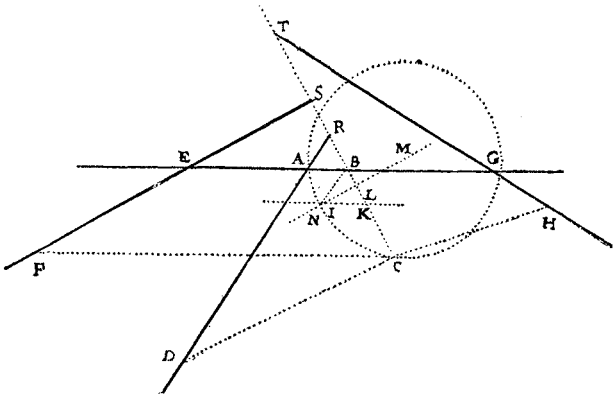
$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2},$$

[44] Conserviamo qui il testo dell'*editio princeps*, con coefficiente positivo di x^2, diversamente da AT (VI, nota *a*, p. 399). Cfr. anche la relativa nota in *Appendice* (p. 733).

[45] Cfr. *A Mersenne*, 31 marzo 1638, B 160, p. 617 (AT II 84, ll. 10-20).

qui doit être la longueur de la ligne BC, en laissant AB ou x indéterminée. Et il est évident que, la question n'étant proposée qu'en trois ou quatre lignes, on peut toujours avoir de tels termes; excepté que quelques-uns d'eux peuvent être nuls, et que les signes + et – peuvent diversement être changés. |

Après cela, je fais KI égale et parallèle à BA, en sorte qu'elle 400
coupe de BC la partie BK égale à m, à cause qu'il y a ici + m: et je l'aurais ajoutée en tirant cette ligne IK de l'autre côté, s'il y avait eu – m; et je ne l'aurais point du tout tirée, si la quantité m eût été nulle. Puis je tire aussi IL, en sorte que la ligne IK est à



KL comme z est à n: c'est-à-dire que, IK étant x, KL est $\frac{n}{z}x$. Et, par même moyen, je connais aussi la proportion qui est entre KL et IL, que je pose comme entre n et a: si bien que, KL étant $\frac{n}{z}x$, IL est $\frac{a}{z}x$. Et je fais que le point K soit entre L et C, à cause qu'il y a ici – $\frac{n}{z}x$; au lieu que j'aurais mis L entre K et C, si j'eusse eu + $\frac{n}{z}x$; et je n'eusse point tiré cette ligne IL, si $\frac{n}{z}x$ eût été nulle.

Or, cela fait, il ne me reste plus, pour la ligne LC, que ces termes

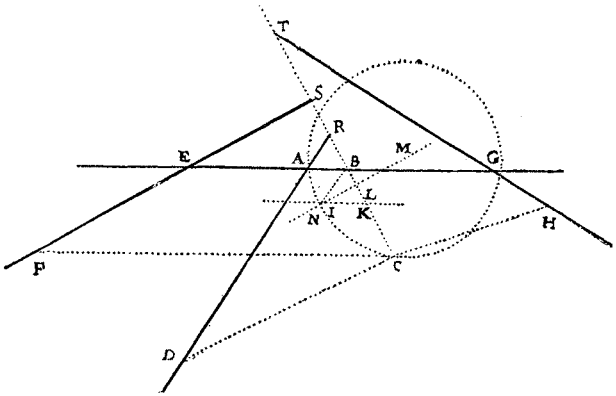
$$\mathrm{LC} = \sqrt{mm + ox + \tfrac{p}{m}xx};$$

d'où je vois que, s'ils étaient nuls, ce point C se | trouverait en la 401
ligne droite IL; et que, s'ils étaient tels que la racine s'en pût tirer: c'est-à-dire que, mm et $\frac{p}{m}xx$ étant marqués d'un même

[46] Cioè prendendo K su CB, sul prolungamento al di sopra di AB.

che deve essere la lunghezza della linea BC, lasciando AB o x indeterminata. Ed è evidente che, essendo il problema proposto solo per tre o quattro linee, è sempre possibile determinare termini di tal genere; con l'eccezione di alcuni termini che possono essere nulli, e dei segni + e – che possono essere cambiati in diversi modi. |

400 Dopodiché, costruisco KI uguale e parallela a BA, in modo che tagli su BC la parte BK uguale a m, poiché qui si ha + m: e l'avrei aggiunta tracciando questa linea IK dall'altro lato, se avessi avuto – m[46]; e non l'avrei tracciata affatto, se la quantità m fosse stata nulla. Poi traccio anche IL, di modo che la linea



IK stia a KL come z sta a n: cioè, essendo IK x, KL è $\frac{n}{z}x$. E, con lo stesso procedimento, ricavo anche la proporzione tra KL e IL, che suppongo stiano fra loro come n sta ad a: così che, essendo KL $\frac{n}{z}x$, IL è $\frac{a}{z}x$. Faccio sì, poi, che il punto K sia fra L e C, giacché qui vi è – $\frac{n}{z}x$; mentre avrei messo L fra K e C, se avessi avuto + $\frac{n}{z}x$; e non avrei affatto tracciato questa linea IL, se $\frac{n}{z}x$ fosse stata nullo.

Ora, ciò fatto, per la linea LC non mi restano che questi termini[47]:

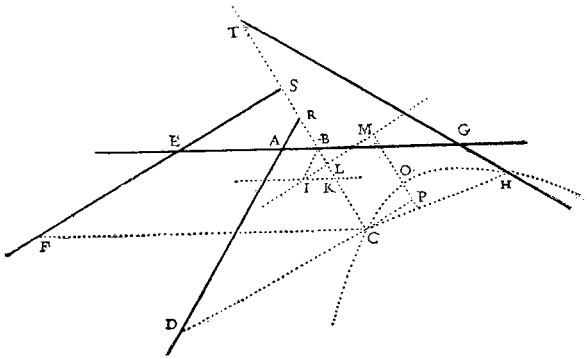
$$\mathrm{LC} = \sqrt{m^2 + ox + \tfrac{p}{m}x^2}\,;$$

401 e da qui vedo che, se fossero nulli, questo punto C si | troverebbe sulla linea retta IL; e che, se fossero tali che si possa estrarre la loro radice, cioè se m^2 e $\frac{p}{m}x^2$ avessero lo stesso segno

[47] Sul significato dei segni + e – all'interno della radice, cfr. AT VI 733 (*Appendice*) in riferimento alla p. 399.

signe + ou –, *oo* fût égal à 4*pm*, ou bien que les termes *mm* et *ox*, ou *ox* et $\frac{p}{m}xx$, fussent nuls: ce point C se trouverait en une autre ligne droite qui ne serait pas plus malaisée à trouver qu'IL. Mais lorsque cela n'est pas, ce point C est toujours en l'une des trois sections coniques, ou en un cercle, dont l'un des diamètres est en la ligne IL, et la ligne LC est l'une de celles qui s'appliquent par ordre à ce diamètre, ou au contraire LC est parallèle au diamètre auquel celle qui est en la ligne IL est appliquée par ordre. A savoir, si le terme $\frac{p}{m}xx$ est nul, cette section conique est une Parabole; et s'il est marqué du signe +, c'est une Hyperbole; et enfin, s'il est marqué du signe –, c'est une Ellipse. Excepté seulement si la quantité *aam* est égale à *pzz*, et que l'angle ILC soit droit: auquel cas on a un cercle au lieu d'une Ellipse. Que si cette section est une Parabole, son côté droit est égal à $\frac{oz}{a}$, et son diamètre est toujours en la ligne IL; et pour trouver le point N, qui en est le sommet, il faut faire IN égale à $\frac{amm}{oz}$, et que le point I soit entre L et N, si les termes sont + *mm* + *ox*, ou bien que le point L soit entre I et N, s'ils sont + *mm* – *ox*; ou bien il faudrait qu'N fût entre I et L, s'il y avait – *mm* + *ox*; mais il ne peut jamais y avoir – *mm*, en | la façon que les termes ont ici été posés. Et enfin 402
le point N serait le même que le point I, si la quantité *mm* était nulle. Au moyen de quoi il est aisé de trouver cette Parabole par le 1er Problème du 1er livre d'Appollonius.

Que si la ligne demandée est un cercle ou une Ellipse ou une Hyperbole, il faut, premièrement, chercher le point M qui en est

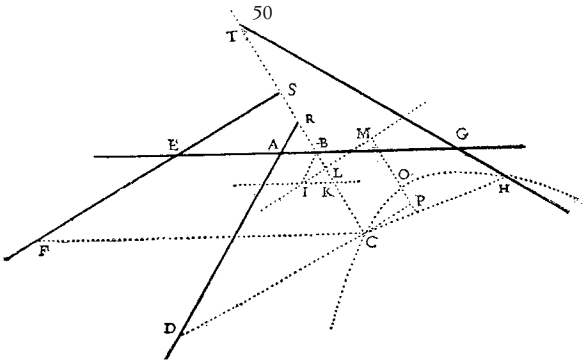


[48] *Schooten* (p. 29) ha soppresso l'indicazione del segno – . Ma cfr. la nota di riferimento in AT VI 733-734 (*Appendice*).

[49] Il riferimento è alla proposizione 52 del primo libro di Apollonio: *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis, ed. et latine interpretatus est I. L. Heiberg*, 2 voll., B. G. Teubner, Stuttgart, 1974 (ripr. anastatica dell'edizione del 1891-1893), I, p. 158-163, dove Apollonio enuncia e risolve il problema relativo alla costruzione di una

+ oppure –[48], o^2 sarebbe uguale a 4 pm, o ancora, se i termini m^2 e ox, oppure ox e $\frac{p}{m}x^2$, fossero nulli, questo punto C si troverebbe su un'altra linea retta che non sarebbe più difficile da trovare di IL. Ma quando ciò non avviene, questo punto C è sempre su una delle tre sezioni coniche, o su un cerchio, uno dei diametri del quale è sulla linea IL, e la linea LC è una di quelle che si applicano ordinatamente a questo diametro, o al contrario LC è parallela al diametro cui quella che è sulla linea IL è applicata ordinatamente. Cioè, se il termine $\frac{p}{m}x^2$ è nullo, questa sezione conica è una parabola; e se è preceduto dal segno +, è un'iperbole; e infine, se è preceduto dal segno –, è un'ellisse. Eccettuato solo il caso in cui la quantità a^2m sia uguale a pz^2, e l'angolo ILC sia retto: in questo caso si ha un cerchio al posto di un'ellisse. E se questa sezione è una parabola, il suo lato retto è uguale a $\frac{oz}{a}$, e il suo diametro è sempre sulla linea IL; e per trovare il punto N, che è il suo vertice, bisogna porre IN uguale a $\frac{am^2}{oz}$, e [bisogna supporre] che il punto I sia fra L ed N, se i termini sono + m^2 + ox; oppure che il punto L sia fra I ed N, se sono + m^2 – ox; oppure bisognerebbe che N fosse fra I ed L, se si avesse – m^2 + ox; mentre non si
402 può mai avere – m^2, | per come i termini sono stati posti qui. E infine il punto N coinciderebbe con il punto I, se la quantità m^2 fosse nulla. Ed in tal modo è facile trovare questa parabola per mezzo del primo problema del primo libro di Apollonio[49].

E se la linea cercata è un cerchio o un'ellisse o un'iperbole bisogna innanzitutto cercare il punto M che è il suo centro, e



parabola dati il *latus rectum* (cioè la corda passante per il fuoco e perpendicolare all'asse), il vertice, il diametro e gli angoli formati dalle ordinate al diametro.

[50] La presente figura si trova in *Descartes 1637* collocata più avanti: *B Op* I 539 (AT VI 403) prima della frase che inizia «Ma quando, nel caso in cui la sezione sia un'iperbole…».

le centre, et qui est toujours en la ligne droite IL, où on le trouve en prenant $\frac{aom}{2pz}$ pour IM: en sorte que, si la quantité *o* est nulle, ce centre est justement au point I. Et si la ligne cherchée est un cercle ou une Ellipse, on doit prendre le point M du même côté que le point L, au respect du point I, lorsqu'on a + *ox*; et lorsqu'on a – *ox*, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire, en l'Hyperbole, si on a – *ox*, ce centre M doit être vers L; et si on a + *ox*, il doit être de l'autre côté. Après cela, le | côté droit 403
de la figure doit être $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, lorsqu'on a + *mm*, et que la ligne cherchée est un cercle ou une Ellipse; ou bien lorsqu'on a – *mm*, et que c'est une Hyperbole. Et il doit être $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, si, la ligne cherchée étant un cercle ou une Ellipse, on a – *mm*; ou bien si, étant une Hyperbole et la quantité *oo* étant plus grande que 4*mp*, on a + *mm*. Que si la quantité *mm* est nulle, ce côté droit est $\frac{oz}{a}$; et si *ox* est nulle, il est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Puis, pour le côté traversant, il faut trouver une ligne qui soit à ce côté droit comme *aam* est à *pzz*: à savoir, si ce côté droit est $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, le traversant est $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; et en tous ces cas le diamètre de la section est en la ligne IM, et LC est l'une de celles qui lui sont appliquées par ordre. Si bien que, faisant MN égale à la moitié du côté traversant, et le prenant du même côté du point M qu'est le point L, on a le point N pour le sommet de ce diamètre. En suite de quoi il est aisé de trouver la section par le second et 3 prob. du 1er liv. d'Apollonius.

Mais quand, cette section étant une Hyperbole, on a + *mm*, et que la quantité *oo* est nulle ou plus petite que 4*pm*, on doit tirer du centre M la ligne MOP parallèle à LC, et CP parallèle à LM; et faire MO égale à $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; ou bien la faire égale à *m*, si la quantité *ox* est nulle; puis, considérer le point O comme le sommet de cette Hyperbole dont le diamètre est OP, et CP la ligne qui lui est appliquée | par ordre; et son côté droit est 404
$\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$; et son côté traversant est $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$. Excepté quand *ox* est nulle: car alors le côté droit est $\frac{2a^3m^3}{pz^2}$, et le traversant est 2*m*. Et ainsi il est aisé de la trouver par le 3 prob. du 1er liv. d'Apollonius.

[51] Descartes risponderà ad un'obiezione (probabilmente di Roberval) su questo passo e sulle relative figure, nella lettera *A Schooten*, settembre 1639, B 219, pp. 1045-1047 (AT II 576, l. 1-577, l. 30). Cfr. anche la nota 1 in B 219 per ulteriori informazioni sulla datazione di tale lettera; sull'obiezione avanzata, invece, cfr. la nota relativa in AT II 580. Sulla figura cfr. anche *A Mersenne*, 13 ottobre 1642, B 327, p. 1672 (AT III 583, ll. 25-30).

[52] Cfr. a questo proposito *A Debeaune*, 20 febbraio 1639, B 203, pp. 989-991 (AT II 511, ll. 13-17).

che si trova sempre sulla linea retta IL[51], dove si trova prendendo $\frac{aom}{2pz}$ per IM: di modo che, se la quantità o è nulla, questo centro è esattamente nel punto I. E se la linea cercata è un cerchio o un'ellisse, si deve prendere il punto M dalla stessa parte del punto L, rispetto al punto I, quando si ha + ox; e dall'altra quando si ha – ox. Invece, tutto al contrario nell'iperbole: se si ha – ox, questo centro M deve essere verso L e deve essere dall'al-
403 tra parte se si ha[52] + ox. Dopo di che, il | lato retto della figura deve essere $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}}$ quando si ha + m^2, e la linea cercata è un cerchio o un'ellisse, oppure, quando si ha – m^2, ed è un'iperbole. E deve essere $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$, se, nel caso la linea cercata sia un cerchio o un'ellisse, si ha – m^2; oppure, nel caso sia un'iperbole e la quantità o^2 è maggiore di $4mp$, si ha + m^2. E se la quantità m^2 è nulla, questo lato retto è $\frac{oz}{a}$; e se ox è nullo, è $\sqrt{\frac{4mpz^2}{a^2}}$. Poi, per il lato trasverso[53], bisogna trovare una linea che stia al lato retto come a^2m sta a pz^2: cioè, se questo lato retto è $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}}$, il lato trasverso è $\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2} + \frac{4a^2m^3}{pz^2}}$; e in tutti questi casi il diametro della sezione è sulla linea IM, e LC è una di quelle linee che gli sono applicate ordinatamente. Di modo che, costruendo MN uguale a metà del lato trasverso, e prendendolo dalla medesima parte del punto M, come è il punto L, si ha il punto N come vertice di questo diametro. Dopo di che è facile poi trovare la sezione tramite il secondo e il terzo problema del primo libro di Apollonio[54].

Ma quando, nel caso in cui la sezione sia un'iperbole[55], si ha + m^2 e la quantità o^2 è nulla o minore di $4pm$, si deve tracciare dal centro M la linea MOP parallela a LC, e CP parallela a LM; e costruire MO uguale a $\sqrt{m^2 - \frac{o^2m}{4p}}$; oppure porlo uguale a m, se la quantità ox è nulla; poi, si deve considerare il punto O come il vertice di questa iperbole di diametro OP, e CP è la
404 linea che gli è applicata | ordinatamente; e il suo lato retto è $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{p^2z^4} - \frac{a^4o^2m^3}{p^2z^4}}$, e il suo lato trasverso è $\sqrt{4m^2 - \frac{a^2m}{p}}$. Ad eccezione del caso in cui ox è nullo: infatti allora il lato retto è $\frac{2a^3m^2}{pz^2}$, e il lato trasverso è $2m$. E quindi è facile trovare la curva tramite il terzo problema del primo libro di Apollonio[56].

[53] Sul 'lato trasverso' vedi *A Schooten*, settembre 1639, B 219, p. 1045 (AT II 575, ll. 5-25) e la relativa nota in AT II 579-580.

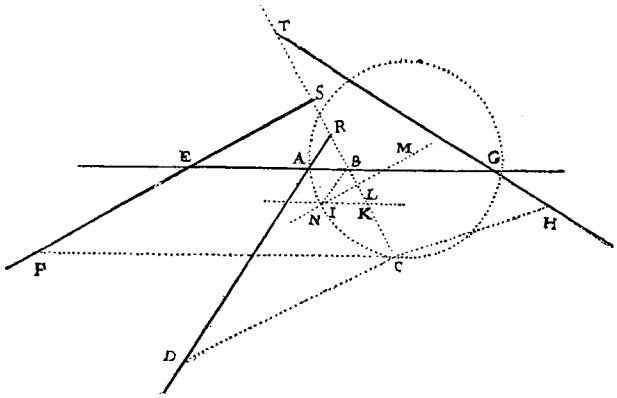
[54] Esso corrisponde ai problemi LVI-LVII (relativi all'ellissi) del primo libro delle *Coniche*: ed. cit., I, pp. 174-183.

[55] Sulla figura relativa a questo caso (sempre quella in *B Op* I 537; AT VI 402) cfr. *Carcavi a Descartes*, 24 settembre 1649, B 711, p. 2755 (AT V 415, ll. 16-27)

[56] Esso corrisponde ai problemi LIV-LV (relativi all'iperbole) del primo libro delle *Coniche*: ed. cit., I, pp. 166-175.

Démonstration de tout ce qui vient d'être expliqué

Et les démonstrations de tout ceci sont évidentes. Car, composant un espace des quantités que j'ai assignées pour le côté droit et le traversant, et pour le segment du diamètre, NL ou OP,



suivant la teneur du 11, du 12 et du 13 théorèmes du 1er livre d'Apollonius, on trouvera tous les mêmes termes dont est composé le carré de la ligne, CP ou CL, qui est appliquée par ordre à ce diamètre. Comme, en cet exemple, ôtant IM, qui est $\frac{aom}{2pz}$, de NM, qui est $\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}$, j'ai IN; à laquelle ajoutant IL, qui est $\frac{a}{z}x$, j'ai NL, qui est $\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}$; et ceci étant multiplié par $\frac{z}{a}\sqrt{o^2+4mp}$, qui est le côté droit de la figure, il vient

$$x\sqrt{oo+4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm \,|$$

pour le rectangle: duquel il faut ôter un espace qui soit au carré 405
de NL comme le côté droit est au traversant; et ce carré de NL est

$$\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}$$
$$- \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp},$$

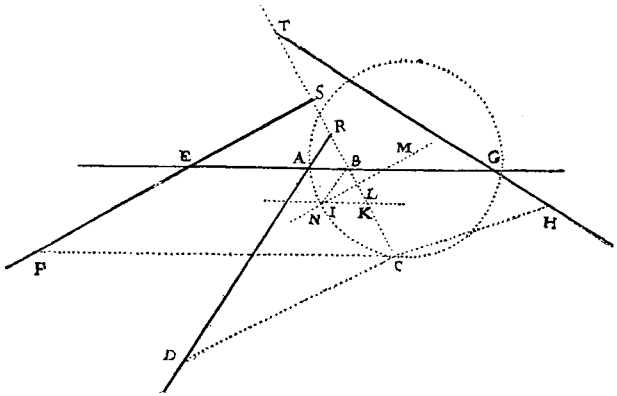
qu'il faut diviser par *aam* et multiplier par *pzz*, à cause que ces termes expliquent la proportion qui est entre le côté traversant et le droit, et il vient

$$\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo+4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + mm,$$

ce qu'il faut ôter du rectangle précédent; et on trouve $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ pour le carré de CL, qui, par conséquent, est

Dimostrazione di tutto ciò che abbiamo appena spiegato

E le dimostrazioni di tutto ciò sono evidenti. Infatti, componendo uno spazio di quantità che ho assegnato per il lato retto, per quello trasverso e per il segmento del diametro NL oppu-



re OP, in base ai teoremi 11, 12 e 13 del primo libro di Apollonio[57], si troveranno tutti gli stessi termini di cui è composto il quadrato della linea CP o CL, che è applicata ordinatamente a questo diametro. Così, in questo esempio, sottraendo IM, che è $\frac{aom}{2pz}$, da NM, che è $\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}$, ottengo IN; e aggiungendole IL, che è $\frac{a}{z}x$, ottengo NL, che è $\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}$; ed essendo quest'ultimo moltiplicato per $\frac{z}{a}\sqrt{o^2+4mp}$, che è il lato retto della figura, risulta

$$x\sqrt{o^2+4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4mp} + \frac{mo^2}{2p} + 2m^2 \,|$$

405 per il rettangolo: da questo [risultato] bisogna sottrarre uno spazio che stia al quadrato di NL come il lato retto sta a quello trasverso; e questo quadrato di NL è

$$\frac{a^2}{z^2}x^2 - \frac{a^2om}{pz^2}x + \frac{a^2m}{pz^2}x\sqrt{o^2+4mp} + \frac{a^2o^2m^2}{2p^2z^2} + \frac{a^2m^3}{pz^2}$$
$$- \frac{a^2om^2}{2p^2z^2}\sqrt{o^2+4mp},$$

che bisogna dividere per a^2m e moltiplicare per pz^2, poiché questi termini esplicitano la proporzione che sussiste fra il lato trasverso e quello retto, e risulta

$$\frac{p}{m}x^2 - ox + x\sqrt{o^2+4mp} + \frac{o^2m}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4mp} + m^2,$$

che bisogna sottrarre dal rettangolo precedente. Si trova $m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2$ per il quadrato di CL che, per conseguenza, è

[57] Cfr. Apollonio, *Coniche*, ed. cit., I, p. 36-53.

une ligne appliquée par ordre, dans une Ellipse ou dans un cercle, au segment du diamètre NL.

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant, par exemple:

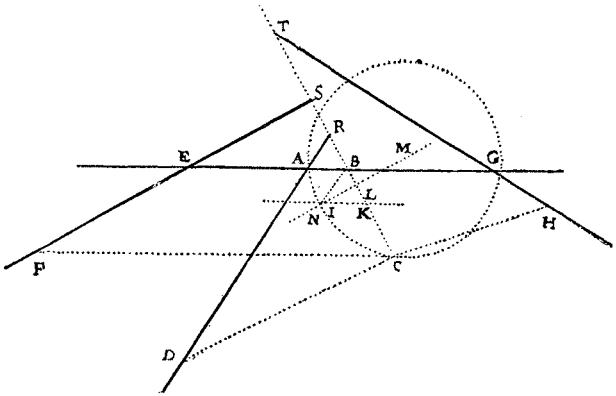
$$\mathrm{EA} = 3,\ \mathrm{AG} = 5,\ \mathrm{AB} = \mathrm{BR},\ \mathrm{BS} = \tfrac{1}{2}\mathrm{BE},$$

$$\mathrm{GB} = \mathrm{BT},\ \mathrm{CD} = \tfrac{3}{2}\mathrm{CR},\ \mathrm{CF} = 2\mathrm{CS},\ \mathrm{CH} = \tfrac{2}{3}\mathrm{CT},$$

et que l'angle ABR soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux, CB et CF, soit égal au rectangle des deux autres CD et CH; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée. Et avec cela, supposant AB = x , et CB = y, on trouve, par la façon ci-dessus expliquée

$$yy = 2y - xy + 5x - xx, \text{ et } y = 1 - \tfrac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \tfrac{3}{4}xx}.$$

Si bien que BK doit être 1, et KL doit être la moitié de KI; et parce que l'angle IKL ou ABR est de | 60 degrés, et KIL, qui est 406
la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et parce que IK ou AB est nommée x, KL est $\frac{1}{2}x$; et IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; et la quantité



qui était tantôt nommée z est l; celle qui était a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$; celle qui était m est l; celle qui était o est 4, et celle qui était p est $\frac{3}{4}$. De façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM; et parce que aam, qui est $\frac{3}{4}$, est ici égal à pzz, et que l'angle ILC est droit, on trouve que la ligne courbe NC est un cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en même sorte.

[58] Alla trattazione delle questioni perfettamente determinate o intese sono dedicate le

una linea applicata ordinatamente, in un'ellisse o in un cerchio, al segmento di diametro NL.

E se si vogliono esplicitare tutte le quantità date con numeri, poniamo per esempio:

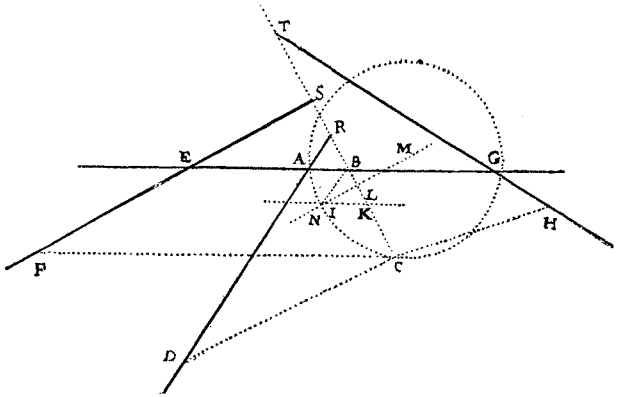
$$EA = 3,\ AG = 5,\ AB = BR,\ BS = \tfrac{1}{2}BE,$$

$$GB = BT,\ CD = \tfrac{3}{2}CR,\ CF = 2CS,\ CH = \tfrac{2}{3}CT,$$

e poniamo che l'angolo ABR sia di 60 gradi e, infine, che il rettangolo di due linee, CB e CF, sia uguale al rettangolo delle altre due CD e CH; bisogna infatti avere tutti questi dati affinché il problema sia interamente determinato[58]. E con questi dati, supponendo AB = x e CB = y, si trova tramite il procedimento sopra spiegato

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2, \quad \text{e} \quad y = 1 - \tfrac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \tfrac{3}{4}x^2},$$

così che BK deve essere 1, e KL deve essere la metà di KI; e
406 dato che l'angolo IKL o ABR è di | 60 gradi, e KIL, che è la metà di KIB o IKL, è di 30, ILK è retto. E dato che IK o AB si è indicato con x, KL è $\frac{1}{2}x$; e IL è $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; e la quantità che



prima era stata chiamata z è l; quella che era a è $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quella che era m è l; quella che era o è 4, e quella che era p è $\frac{3}{4}$. Di modo che si ha $\sqrt{\frac{16}{3}}$ per IM, e $\sqrt{\frac{19}{3}}$ per NM; e poiché a^2m, che è $\frac{3}{4}$, è qui uguale a pz^2, e l'angolo ILC è retto, si trova che la linea curva NC è un cerchio. E si possono facilmente esaminare tutti gli altri casi nello stesso modo.

regole XIII-XXIV (ma l'opera arriva solo all'enunciato della XXI): cfr. il piano presentato alla fine della regola XII, in *Regole*, *B Op* II 769-771 (AT X 429, l. 13 sgg).

Quels sont les lieux plans et solides, et la façon de les trouver

Au reste, à cause que les équations qui ne montent que jusques au carré sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer, non seulement le problème des anciens en 3 et 4 lignes est ici entièrement achevé, mais aussi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommaient la composition des lieux solides, et, par conséquent, aussi à celle des lieux plans, à cause qu'ils sont compris dans les solides. Car ces lieux ne sont autre | chose sinon que, 407
lorsqu'il est question de trouver quelque point auquel il manque une condition pour être entièrement déterminé, ainsi qu'il arrive en cet exemple, tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui est demandé. Et si cette ligne est droite ou circulaire, on la nomme un lieu plan. Mais si c'est une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipse, on la nomme un lieu solide. Et toutefois et quantes que cela est, on peut venir à une Equation qui contient deux quantités inconnues et est pareille à quelqu'une de celles que je viens de résoudre. Que si la ligne, qui détermine ainsi le point cherché, est d'un degré plus composée que les sections coniques, on la peut nommer, en même façon, un lieu sursolide: et ainsi des autres. Et s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie, laquelle peut être, tout de même, ou plate ou sphérique ou plus composée. Mais le plus haut but qu'aient eu les anciens en cette matière a été de parvenir à la composition des lieux solides; et il semble que tout ce qu'Apollonius a écrit des sections coniques n'a été qu'à dessein de la chercher.

De plus, on voit ici que ce que j'ai pris pour le premier genre des lignes courbes n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse: qui est tout ce que j'avais entrepris de prouver.

Quelle est la première et la plus simple de toutes les lignes courbes qui servent en la question des anciens, quand elle est proposée en cinq lignes

Que si la question des anciens est proposée en cinq lignes qui soient toutes parallèles, il est évident que le point cherché sera toujours en une ligne droite. | Mais si elle est proposée en cinq 408
lignes dont il y en ait quatre qui soient parallèles, et que la cinquième les coupe à angles droits, et même que toutes les lignes tirées du point cherché les rencontrent aussi à angles droits, et enfin que le parallélépipède composé de trois des lignes ainsi tirées sur trois de celles qui sont parallèles, soit égal au parallélépipède composé des deux lignes tirées, l'une sur la quatrième de celles qui sont parallèles, et l'autre sur celle qui les coupe à angles droits, et d'une troisième ligne donnée: ce qui est, ce me semble, le plus simple cas qu'on puisse imaginer après le précé-

Quali sono i luoghi piani e solidi, e il modo di trovarli[59]

Del resto, poiché le equazioni che non superano il quadrato sono tutte comprese in ciò che ho appena spiegato, non solo il problema degli antichi per 3 e 4 linee è qui completamente risolto, ma lo è anche tutto ciò che concerne ciò che essi chiamavano la composizione dei luoghi solidi e, di conseguenza, anche quella dei luoghi piani, poiché essi sono com-
407 presi fra i solidi. Infatti questi luoghi non sono | se non quelli per cui si tratta di trovare qualche punto cui manca una condizione per essere interamente determinato, come avviene in questo esempio, in cui tutti i punti di una stessa linea si possono prendere per quello cercato. E se questa linea è retta o circolare, la si chiama un luogo piano; mentre, se è una parabola, o un'iperbole o un'ellisse si chiama un luogo solido. E tuttavia, in tutti questi casi, si può arrivare a un'equazione che contiene due quantità incognite ed è del tipo di una di quelle che ho appena risolto. Se poi la linea, che determina così il punto cercato, è di un grado più composta delle sezioni coniche, si può chiamare, allo stesso modo, un luogo sursolido, e così via. E se mancano due condizioni per la determinazione di questo punto, il luogo dove si trova è una superficie, che può essere, a sua volta, piana, sferica o più composta. Ma il più alto scopo che si sono prefissi gli antichi in questa materia è stato quello di giungere alla composizione dei luoghi solidi; e sembra che tutto ciò che Apollonio ha scritto sulle sezioni coniche non sia stato scritto che con il proposito di determinarla.

Inoltre, si vede qui che ciò che ho considerato come il primo genere delle linee curve non può comprenderne altre che il cerchio, la parabola, l'iperbole e l'ellisse: e questo è tutto ciò che io mi ero proposto di dimostrare.

Qual è la prima e la più semplice fra tutte le linee curve che servono per risolvere il problema degli antichi, quando esso è proposto per cinque linee

Se poi il problema degli antichi è proposto per cinque linee tutte parallele è evidente che il punto cercato si troverà sempre
408 su una linea retta. | Ma, se è proposto per cinque linee di cui quattro sono parallele e la quinta le interseca ad angoli retti, e inoltre tutte le linee tracciate dal punto cercato le incontrano anch'esse ad angoli retti, e infine il parallelepipedo composto dalle tre linee così tracciate su tre di quelle parallele è uguale al parallelepipedo composto dalle due linee tracciate la prima sulla quarta delle rette parallele, la seconda su quella che le taglia ad angoli retti e da una terza linea data: caso che è, a mio parere, il più semplice che si possa immaginare dopo il prece-

[59] Cfr. *A Mersenne*, 31 marzo 1638, B 160, p. 617 (AT II 82, l. 15-83, l. 3).

dent: le point cherché sera en la ligne courbe qui est décrite par le mouvement d'une parabole en la façon ci-dessus expliquée.

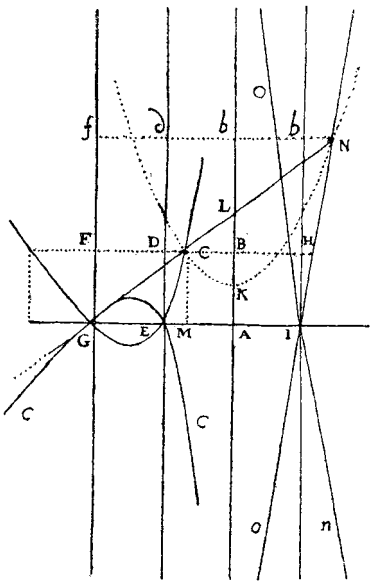
Soient, par exemple, les lignes données AB, IH, ED, GF et GA, et qu'on demande le point C en sorte que, tirant CB, CF, CD, CH et CM à angles droits sur les données, le parallélépipède des trois CF, CD et CH, soit égal à celui des 2 autres, CB et CM, et d'une troisième qui soit AI. Je pose

$$\mathrm{CB} = y, \quad \mathrm{CM} = x, \quad \mathrm{AI \text{ ou } AE \text{ ou } GE} = a,$$

de façon que, le point C étant entre les lignes AB et DE, j'ai

$$\mathrm{CF} = 2a - y, \quad \mathrm{CD} = a - y, \quad \text{et } \mathrm{CH} = y + a;$$

et multipliant ces trois l'une par l'autre, j'ai $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, égal au produit des trois autres, qui est axy. Après cela, je considère la ligne courbe CEG, que j'imagine être décrite par l'intersection de la | Parabole CKN, qu'on fait mouvoir en telle sorte 409



que son diamètre KL est toujours sur la ligne droite AB, et de la règle GL, qui tourne ce pendant autour du point G en telle sorte qu'elle passe toujours, dans le plan de cette Parabole, par le point L. Et je fais KL = a; et le côté droit principal, c'est-à-dire celui qui se rapporte à l'essieu de cette Parabole, aussi égal à a; et GA = $2a$: et CB ou MA = y: et CM ou AB = x. Puis, à cause des triangles semblables GMC et CBL, GM, qui est $2a - y$, est à MC, qui est x, comme CB, qui est y, est à BL, qui est, par conséquent, $\frac{xy}{2a-y}$. Et, parce que LK est a, BK est $a - \frac{xy}{2a-y}$, ou bien $\frac{2aa - ay - xy}{2a-y}$. Et enfin, parce que ce même BK, étant un segment du diamètre de la parabole, est à BC, qui lui est appliquée par ordre, comme celle-ci est au côté droit, qui est a, le calcul montre que

[60] A questo caso Descartes aveva fatto riferimento nel primo libro: cfr. *B Op* I 509-511 (AT VI 381, l. 31 - 382, l. 7).

dente, allora il punto cercato sarà sulla linea curva che è descritta dal movimento di una parabola nel modo sopra spiegato[60].

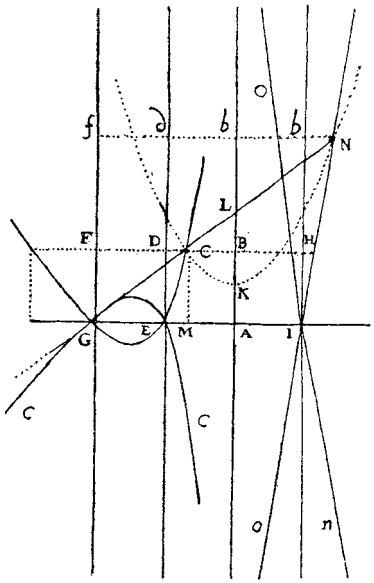
Siano, per esempio, date le linee[61] AB, IH, ED, GF e GA, e si cerchi il punto C tale che, tracciando CB, CF, CD, CH e CM ad angoli retti sulle rette date, il parallelepipedo delle tre CF, CD e CH, sia uguale a quello delle altre due CB e CM, e di una terza retta data, che sia AI. Pongo

$$\mathrm{CB} = y, \quad \mathrm{CM} = x, \quad \mathrm{AI\ o\ AE\ o\ GE} = a,$$

di modo che, essendo il punto C fra le linee AB e DE, ho

$$\mathrm{CF} = 2a - y, \quad \mathrm{CD} = a - y, \quad \text{e } \mathrm{CH} = y + a;$$

e moltiplicando fra loro queste tre quantità ho $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$, uguale al prodotto delle altre tre, che è axy. Considero quindi la linea curva CEG, che immagino essere descritta dal-
409 l'intersezione della | parabola CKN, che si fa muovere in modo tale che il suo diametro KL sia sempre sulla linea retta AB, e del regolo GL, che nel frattempo ruota intorno al punto G di modo che passi sempre, nel piano di questa parabola, per il punto L. Pongo KL = a; e il lato retto principale, cioè quello che si riferisce all'asse di questa parabola, sia anch'esso uguale ad a; e GA = $2a$; e CB o MA = y, e CM o AB = x. Poi, siccome i triangoli GMC e CBL sono simili, GM, che è $2a - y$, sta a MC, che è x, come CB, che è y, sta a BL, che di conseguenza è $\frac{xy}{2a-y}$. E dato che LK è a, BK è $a - \frac{xy}{2a-y}$, oppure $\frac{2a^2 - ay - xy}{2a-y}$.

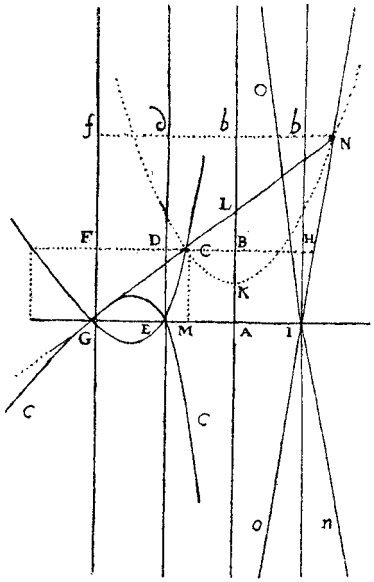


E infine, dato che questo stesso BK, essendo un segmento di diametro della parabola, sta a BC, che gli è applicato ordinatamente, come quest'ultima sta al lato retto, che è a, il calcolo mostra che

[61] *Descartes 1637* (p. 337) riporta «cherchées/cercate»; AT corregge sulla base di *Schooten* (p. 35).

$$y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 \text{ est égal à } axy;$$

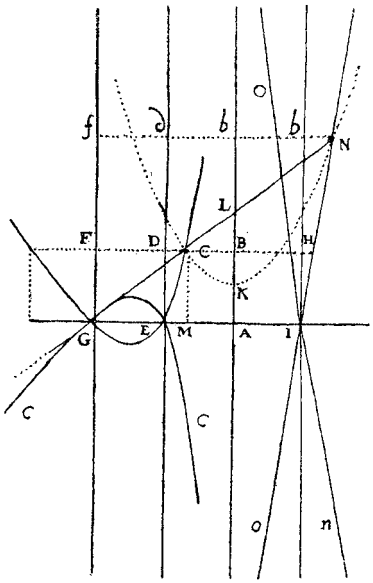
et, par conséquent, que le point C est celui qui était demandé. Et il peut être pris en tel endroit de la ligne CEG qu'on veuille choisir, ou aussi en son | adjointe *c*EG*c*, qui se décrit en même façon, 410 excepté que le sommet de la parabole est tourné vers l'autre côté, ou enfin en leurs contreposées NI*o*, *n*IO, qui sont décrites par l'intersection que fait la ligne GL en l'autre côté de la parabole KN.



Or, encore que les parallèles données AB, IH, ED et GF, ne fussent point également distantes, et que GA ne les coupât point à angles droits, ni aussi les lignes tirées du point C vers elles, ce point C ne laisserait pas de se trouver toujours en une ligne courbe, qui serait de cette même nature. Et il s'y peut aussi trouver quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne soient parallèles. Mais si, lorsqu'il y en a 4 ainsi parallèles, et une cinquième qui les traverse, et que le parallélépipède de trois des lignes tirées du point cherché, l'une sur cette cinquième, et les 2 autres sur 2 de celles qui sont parallèles, soit égal à celui des deux tirées sur les deux autres parallèles et d'une autre ligne donnée; ce point cherché est en une ligne courbe d'une autre nature, à savoir en une qui est telle que, toutes les lignes droites appliquées par | ordre à son diamètre étant égales 411 à celles d'une section conique, les segments de ce diamètre, qui sont entre le sommet et ces lignes, ont même proportion à une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux segments du diamètre de la section conique, auxquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et je ne saurais véritablement dire que cette ligne soit moins simple que la précédente, laquelle j'ai cru toutefois devoir prendre pour la première, à cause que la description et le calcul en sont, en quelque façon, plus faciles.

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 \text{ è uguale a } axy,$$

e, di conseguenza, il punto C è quello cercato. Ed esso può essere preso ad arbitrio su qualsiasi parte della linea CEG, o
410 anche su quella che le è | aggiunta *c*EG*c*, che si descrive nello stesso modo, tranne che per il fatto che il vertice della parabola è girato verso l'altro lato, o infine può essere preso sulle linee che sono loro contrapposte NI*o*, *n*IO, che sono descritte dall'intersezione della linea GL sull'altro lato della parabola KN.



Ora, anche se le parallele date AB, IH, ED e GF, non fossero ugualmente distanti, e GA non le tagliasse ad angoli retti e neppure tagliasse ad angoli retti le linee tracciate ad esse dal punto C, questo punto C continuerebbe a trovarsi sempre su una linea curva, che sarebbe della stessa natura. E vi si potrebbe trovare, talvolta, anche se nessuna delle rette date fosse parallela. Invece, quando ce ne sono 4 parallele, e una quinta le interseca, e il parallelepipedo di tre delle linee tracciate dal punto cercato, una sulla quinta, e le altre 2 su 2 delle rette parallele, è uguale al parallelepipedo delle due tracciate sulle altre due parallele e di un'altra linea data, il punto cercato è su una linea curva di un'altra natura, cioè è su
411 una linea tale che, essendo tutte le linee rette applicate | ordinatamente al suo diametro uguali a quelle di una sezione conica, i segmenti di questo diametro che giacciono tra il vertice e queste linee hanno, rispetto a una certa linea data, la stessa proporzione che questa linea data ha rispetto ai segmenti del diametro della sezione conica, cui le rispettive linee sono applicate ordinatamente. E io non potrei veramente dire che questa linea sia meno semplice della precedente, linea che tuttavia ho ritenuto di dover considerare la prima, dal momento che la sua descrizione e il calcolo sono in qualche modo più facili.

Pour les lignes qui servent aux autres cas, je ne m'arrêterai point à les distinguer par espèces; car je n'ai pas entrepris de dire tout; et, ayant expliqué la façon de trouver une infinité de points par où elles passent, je pense avoir assez donné le moyen de les décrire.

Quelles sont les lignes courbes, qu'on décrit en trouvant plusieurs de leurs points, qui peuvent être reçues en Géométrie

Même il est à propos de remarquer qu'il y a grande différence, entre cette façon de trouver plusieurs points pour tracer une ligne courbe, et celle dont on se sert pour la Spirale et ses semblables: car, par cette dernière, on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être déterminés par quelque mesure plus simple que celle qui est requise pour la composer; et ainsi, à proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est-à-dire pas un de ceux qui lui sont tellement propres qu'ils ne puissent être trouvés que par elle. Au lieu qu'il n'y a aucun point, dans les lignes qui servent à la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se déterminent par la | façon tantôt expliquée. Et 412
parce que cette façon de trouver une ligne courbe, en trouvant indifféremment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles qui peuvent aussi être décrites par un mouvement régulier et continu, on ne la doit pas entièrement rejeter de la Géométrie.

Quelles sont aussi celles, qu'on décrit avec une corde, qui peuvent être reçues

Et on n'en doit pas rejeter non plus celle où on se sert d'un fil, ou d'une corde repliée, pour déterminer l'égalité ou la différence de deux ou plusieurs lignes droites qui peuvent être tirées, de chaque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres points, ou sur certaines autres lignes, à certains angles: ainsi que nous avons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipse et l'Hyperbole. Car, encore qu'on n'y puisse recevoir aucunes lignes qui semblent à des cordes, c'est-à-dire qui deviennent tantôt droites et tantôt courbes, à cause que, la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue et même, je crois, ne le pouvant être par les hommes, on ne pourrait rien conclure de là qui fût exact et assuré; toutefois, à cause qu'on ne se sert de cordes, en ces constructions, que pour déterminer des lignes droites dont on connaît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire qu'on les rejette.

Que, pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir

Or, de cela seul qu'on sait le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ai expliquée, il est aisé de trouver aussi le rapport qu'ils ont

Non mi soffermerò a distinguere per specie le linee che servono per gli altri casi; infatti, non mi sono proposto di essere esaustivo; e, avendo spiegato il modo di trovare un'infinità di punti per cui esse passano, penso di aver già illustrato a sufficienza il modo per descriverle.

Quali sono le linee curve, che si descrivono trovando parecchi dei loro punti, che possono essere accettate in geometria

Parimenti è opportuno notare che vi è una grande differenza fra questo modo di trovare parecchi punti per tracciare una linea curva e quello di cui ci si serve per la spirale e curve consimili: infatti, per quest'ultima, non si trovano indifferentemente tutti i punti della linea che si cerca, ma soltanto quelli che possono essere determinati da qualche misura più semplice rispetto a quella che è richiesta per comporla; e così, propriamente parlando, non si trova neppure uno dei suoi punti, cioè uno di quei punti che sono talmente propri che non possano essere trovati se non per mezzo di essa. Invece non vi è alcun punto, nelle linee che servono per il problema proposto, che non si possa ritrovare fra quelli che si determinano nel |
412 modo appena spiegato. E dato che questo modo di trovare una linea curva, trovando indifferentemente parecchi dei suoi punti, si estende solo a quelle curve che possono anche essere descritte da un movimento regolare e continuo, non lo si deve escludere interamente dalla geometria.

Quali sono le curve, che si descrivono con una corda, che possono essere accettate

E non si deve neppure escludere quel modo in cui ci si serve di un filo, o di una corda ripiegata, per determinare l'uguaglianza o la disuguaglianza fra due o più linee rette che possono essere tracciate, da ciascun punto della curva cercata, a certi altri punti, o su certe altre linee, secondo certi angoli: così come abbiamo fatto nella *Diottrica* per spiegare l'ellisse e l'iperbole[62]. Infatti, benché non si possano accettare alcune linee che somigliano a corde, cioè che diventano ora rette, e ora curve, (poiché, non essendo nota la proporzione che c'è fra le rette e le curve, e non potendo neppure divenire nota – io credo – agli uomini, non se ne potrebbe dedurre nulla di esatto e sicuro), tuttavia, poiché in queste costruzioni ci si serve di corde solo per determinare delle linee rette di cui si conosce perfettamente la lunghezza, ciò non deve affatto indurci ad escluderle.

Per trovare tutte le proprietà delle linee curve basta conoscere

Ora, per il solo fatto che si conosce il rapporto fra tutti i punti di una linea curva e tutti quelli di una linea retta, nel modo sopra spiegato, è facile trovare anche il rapporto che essi

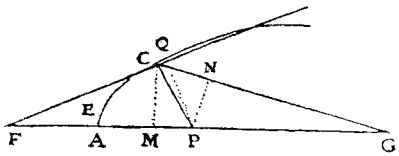
[62] Vedi *Diottrica*, VIII, *B Op* I 233-237 (AT VI 166-168) per l'ellissi e *B Op* I 245-249 (AT VI 176-178) per l'iperbole.

le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites, et la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits

à tous les autres points et lignes données; et, ensuite, de connaître les diamètres, les essieux, les centres, et autres lignes | ou 413
points à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres; et ainsi, d'imaginer divers moyens pour les décrire, et d'en choisir les plus faciles. Et même on peut aussi, par cela seul, trouver quasi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent, sans qu'il soit besoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin, pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais, lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, aux points où elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prends ici pour le même, qui coupent leurs contingentes, la grandeur de ces angles n'est pas plus malaisée à trouver que s'ils étaient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en Géométrie.

Façon générale pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits

Soit CE la ligne courbe, et qu'il faille tirer une ligne droite, par le point C, qui fasse avec elle des angles droits. Je suppose la chose déjà faite, et que la ligne cherchée est CP, laquelle je prolonge jusques | au point P, où elle rencontre la ligne droite GA, 414
que je suppose être celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE; en sorte que, faisant MA ou CB = y, et CM ou BA = x, j'ai quelque équation qui explique le rapport qui est entre x et y. Puis je fais PC = s, et PA = v, ou PM = $v - y$, et, à cause du triangle rectangle PMC, j'ai ss, qui est le carré de la base, égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les carrés des deux côtés: c'est-à-dire j'ai



$$x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}, \text{ ou bien } y = v + \sqrt{ss - xx},$$

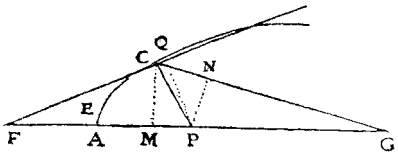
[63] Cfr. *A Mersenne*, gennaio 1638, B 138, p. 491 (AT I 492, l. 17-493, l. 20).

il rapporto fra tutti i loro punti e quelli delle linee rette, e il modo di tracciare altre linee che le tagliano in tutti questi punti ad angoli retti

hanno con tutti gli altri punti e le linee date; e poi è facile deter-
413 minare i diametri, gli assi, i centri, e altre linee, | o punti, rispetto a cui ogni linea curva avrà un rapporto più particolare, o più semplice, degli altri; e quindi è facile immaginare diversi modi per descriverle, e scegliere i più facili. E analogamente si può anche, in questo solo modo, trovare quasi tutto ciò che può essere determinato per quanto concerne la grandezza dello spazio che esse comprendono, senza bisogno che mi diffonda ulteriormente. E infine, per quanto riguarda tutte le altre proprietà che si possono attribuire alle linee curve, esse dipendono soltanto dalla grandezza degli angoli che esse formano con le altre linee. Ma quando si possono tracciare linee rette che le tagliano ad angoli retti, nei punti in cui esse sono incontrate dalle linee con cui formano gli angoli che si vogliono misurare o, cosa che qui ritengo identica, che tagliano le loro tangenti, la grandezza di questi angoli non è più difficile da trovare che se essi fossero compresi fra due linee rette. E per questo riterrò di aver fornito qui tutto ciò che serve per gli elementi delle linee curve, quando avrò dato generalmente il modo di tracciare linee rette che cadono ad angoli retti in uno qualsiasi dei loro punti. E oso dire che questo è il problema più utile e più generale, non solo fra quelli che conosco, ma addirittura fra quelli che ho mai desiderato conoscere in geometria[63].

Maniera generale per trovare linee rette che tagliano le curve date, o le loro tangenti, ad angoli retti

Sia CE la linea curva[64], e si debba tracciare una linea retta per il punto C, che formi con essa angoli retti. Suppongo di averlo già fatto, e che la linea cercata sia CP, che prolungo fino |
414 al punto P, in cui essa interseca la linea retta GA, che suppongo essere la linea ai cui punti si rapportano tutti quelli della linea CE; di modo che, ponendo MA o[65] CB = y, e CM o BA = x, ho un'equazione che esplicita il rapporto che intercorre tra x e y. Poi pongo PC = s, e PA = v, o PM = $v - y$, e, in virtù del triangolo rettangolo PMC, ho s^2, che è il quadrato della base, uguale a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, che sono i quadrati dei due cateti: cioè ho

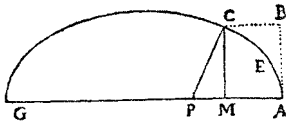


$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}\,, \text{ ossia } y = v + \sqrt{s^2 - x^2}\,,$$

[64] Su questa figura cfr. *A Mersenne*, 13 ottobre 1642, B 327, p. 1673 (AT III 583, l. 30-584, l. 5).

[65] Cfr. la nota di riferimento in AT VI 734 (*Appendice*) a proposito della figura.

et, par le moyen de cette équation, j'ôte, de l'autre équation qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'une des deux quantités indéterminées x ou y: ce qui est aisé à faire, en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, et le carré de cette somme au lieu d'xx, et son cube au lieu d'x^3; et ainsi des autres, si c'est x que je veuille ôter: ou bien, si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, et le carré ou le cube etc. de cette somme, au lieu d'yy ou y^3 etc. De façon qu'il reste toujours, après cela, une équation, en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indéterminée, x ou y.



Comme, si CE est une Ellipse, et que MA soit le segment de son diamètre auquel CM soit appliquée par ordre, et qui ait r pour son côté droit, et q pour le | traversant, on a, par le 13 th. du 1 liv. d'Apollonius: 415

$$xx = ry - \tfrac{r}{q}yy,$$

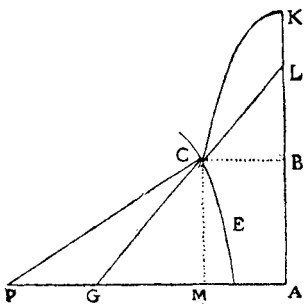
d'où, ôtant xx, il reste:

$$ss - vv + 2vy - yy = ry - \tfrac{r}{q}yy,$$

ou bien

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} \text{ égal à rien:}$$

car il est mieux, en cet endroit, de considérer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire une partie égale à l'autre.



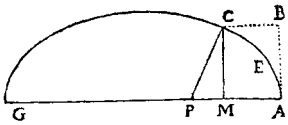
Tout de même, si CE est la ligne courbe décrite par le mouvement d'une Parabole en la façon ci-dessus expliquée, et qu'on ait posé b pour GA, c pour KL, et d pour le côté droit du diamètre KL en la parabole; l'équation qui explique le rapport qui est entre x et y, est:

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0.$$

D'où ôtant x, on a

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy},$$

e, per mezzo di questa equazione, elimino dall'altra equazione che esplicita il rapporto fra tutti i punti della curva CE e quelli della retta GA, una delle due quantità indeterminate x o y: il che si può fare facilmente, sostituendo dappertutto $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ al posto di x, e il quadrato di questa espressione al posto di x^2, e il suo cubo al posto di x^3; e così via, se voglio eliminare x: oppure, se è y che voglio eliminare, sostituendo al suo posto $v + \sqrt{s^2 - x^2}$, e il quadrato o il cubo ecc. di questa espressione al posto di y^2 o di y^3, ecc. Di modo che resta sempre, dopo ciò, un'equazione in cui non vi è che una sola quantità indeterminata, x o y.



Per esempio, se CE è un'ellisse, e MA il segmento del suo diametro cui CM è applicata ordinatamente, e ha r come lato retto e q come lato | trasverso, si ha, in virtù del tredicesimo teorema del I libro di Apollonio[66]:

$$x^2 = ry - \tfrac{r}{q}y^2,$$

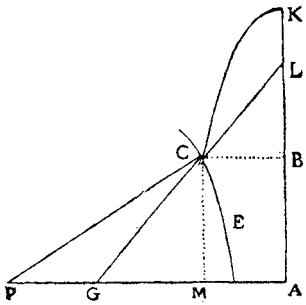
da cui, eliminando x^2, resta:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \tfrac{r}{q}y^2,$$

ossia

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} \text{ uguale a zero;}$$

infatti in questo caso è meglio considerare insieme tutta l'espressione, piuttosto che porre una parte uguale all'altra.



Parimenti, se CE è la linea curva descritta dal movimento di una parabola nel modo sopra spiegato, e se si è posto b per GA, c per KL, e d per il lato retto del diametro KL nella parabola, l'equazione che esplicita il rapporto che sussiste tra x e y è:

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0.$$

Da questa, eliminando la x, si ha

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dy\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2},$$

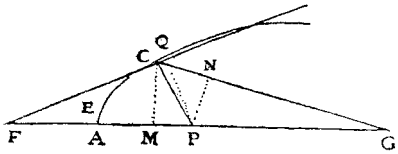
[66] Cfr. Apollonio, *Coniche*, cit., I, pp. 48-53.

et, remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd = 0$$

Et ainsi des autres. |

Même, encore que les points de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que j'ai dite à ceux d'une ligne droite, mais en toute autre qu'on saurait imaginer, on ne laisse pas de pouvoir toujours avoir une telle équation. Comme, si CE est une ligne qui ait tel rapport aux trois points F, G et A, que les lignes droites tirées de chacun de ses points, comme C, jusques au point F, surpassent la ligne FA d'une quantité qui ait certaine proportion donnée à une autre quantité, dont GA surpasse les lignes tirées des mêmes points jusques à G. Faisons GA = b, AF = c, et, prenant à discrétion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF surpasse FA, soit à celle dont GA surpasse GC, comme d à e: en sorte que, si cette quantité, qui est indéterminée, se nomme z, FC est $c + z$, et GC est $b - \frac{e}{d}z$. Puis, posant MA = y, GM est $b - y$, et FM est $c + y$, et à cause du triangle rectangle CMG, ôtant le carré de GM du carré de GC, on a 416



$$\text{le carré de CM, qui est } \frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy.$$

Puis, ôtant le carré de FM du carré de FC, on a encore le carré de CM en d'autres termes,

$$\text{à savoir } zz + 2cz - 2cy - yy;$$

et, ces termes étant égaux aux précédents, ils font connaître

$$y \text{ ou MA, qui est } \frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd},$$

et, substituant cette somme au lieu d'y dans le carré | de CM, on trouve qu'il s'exprime en ces termes: 417

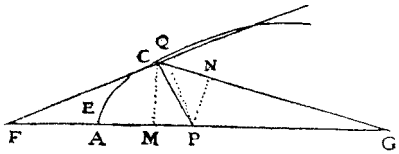
$$\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy.$$

e riordinando questi termini per mezzo della moltiplicazione risulta

$$y^6 - 2by^5 + (-2cd + b^2 + d^2)y^4 +$$
$$+ (4bcd - 2\,d^2v)y^3 + (-2b^2cd + c^2d^2 -$$
$$- d^2s^2 + d^2v^2)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2 = 0$$

E così via. |

416 Parimenti, se anche i punti della linea curva non si rapportassero a quelli di una linea retta nel modo che ho detto ma in un qualsiasi altro immaginabile, potrei sempre avere un'equazione di tal genere. Per esempio, se CE è una linea che ha, rispetto a tre punti F, G e A, un rapporto tale che le linee rette tracciate da ciascuno dei suoi punti, come C, fino al punto F superino la linea FA di una quantità che abbia una certa proporzione data con un'altra quantità, cioè con quella per cui GA supera le linee tracciate dagli stessi punti fino a G. Poniamo GA = b, AF = c, e, prendendo ad arbitrio il punto C sulla curva, poniamo che la quantità di cui CF supera FA, stia a quella per cui GA supera GC, come d sta a e, di modo che, se questa quantità, che è indeterminata, si chiama z, FC è $c + z$, e GC è $b - \frac{e}{d}z$. Poi, ponendo MA = y, GM è $b - y$, e FM è $c + y$, e considerando il triangolo rettangolo CMG, sottraendo il quadrato di GM dal quadrato di GC, si ha



$$\text{il quadrato di CM, che è } \frac{e^2}{d^2}z^2 - \frac{2be}{d}z + 2by - y^2.$$

Poi, sottraendo il quadrato di FM dal quadrato di FC, si ha ancora il quadrato di CM in altri termini,

$$\text{cioè } z^2 + 2cz - 2cy - y^2;$$

ed essendo questi termini uguali ai precedenti, essi permettono di determinare

$$y \text{ o MA, che è } \frac{d^2z^2 + 2cd^2z - e^2z^2 + 2bdez}{2bd^2 + 2cd^2},$$

417 e sostituendo questa somma al posto di y nel quadrato | di CM, si trova che esso si esprime in questi termini:

$$\frac{bd^2z^2 + ce^2z^2 + 2bcd^2z - 2bcdez}{bd^2 + cd^2} - y^2.$$

Puis, supposant que la ligne droite PC rencontre la courbe à angles droits au point C, et faisant PC = s, et PA = v comme devant, PM est $v - y$; et, à cause du triangle rectangle PCM, on a

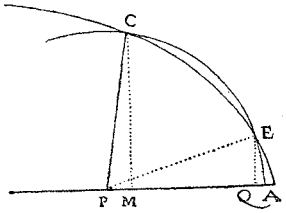
$$ss - vv + 2vy - yy \text{ pour le carré de CM,}$$

où derechef ayant, au lieu d'y, substitué la somme qui lui est égale, il vient:

$$zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0,$$

pour l'équation que nous cherchions.

Or, après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en servir pour connaître les quantités x ou y ou z, qui sont déjà données, puisque le point C est donné, on la doit employer à trouver v ou s, qui déterminent le point P qui est demandé. Et, à cet effet, il faut considérer que, si ce point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre et qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE sans la couper; mais que, si ce point P est tant soit peu plus proche ou plus éloigné du point A qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussi, nécessairement, en quelque autre. Puis il faut aussi considérer que, lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'équation par laquelle on cherche la quantité x ou y, ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC être connues, contient nécessairement deux racines qui sont inégales. Car, par exemple, si ce cercle | coupe la courbe aux points C et E, ayant tiré EQ 418
parallèle à CM, les noms des quantités indéterminées, x et y, conviendront aussi bien aux lignes EQ et QA qu'à CM et MA; puis PE est égale à PC, à cause du cercle: si bien que, cherchant les lignes EQ et QA par PE et PA, qu'on suppose comme données, on aura la même équation que si on cherchait CM et MA par PC, PA. D'où il suit évidemment que la valeur d'x ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette équation: c'est-à-dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles, et dont l'une sera CM, l'autre EQ, si c'est x qu'on cherche; ou bien l'une sera MA et l'autre QA, si c'est y: et ainsi des autres. Il est vrai que, si le point E ne se trouve pas du même côté de la courbe que le point C, il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraie, et l'autre sera renversée ou moindre que rien: mais, plus ces deux points, C et



Poi, supponendo che la linea retta PC incontri la curva ad angoli retti nel punto C, e ponendo PC = s e PA = v come prima, PM è $v - y$; e, in considerazione del triangolo rettangolo PCM, si ha

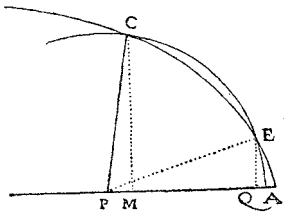
$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 \text{ per il quadrato di CM,}$$

o ancora, avendo sostituito, al posto di y, l'espressione che gli è uguale, si ottiene:

$$z^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v} = 0,$$

per l'equazione che cercavamo.

Ora, dopo aver trovato un'equazione di tal genere, al posto di servirsene per determinare le quantità x o y o z, che sono già date, poiché il punto C è dato, la si deve impiegare per trovare v o s, che determinano il punto P richiesto. E, a tal scopo, occorre considerare che, se questo punto P è come lo si desidera, il cerchio di cui sarà il centro e che passerà per il punto C, toccherà la linea curva CE senza tagliarla; ma, se questo punto P sarà un po' più vicino o un po' più lontano dal punto A di quel che deve essere, questo cerchio taglierà la curva, non solo nel punto C, ma anche, necessariamente, in qualche altro. Poi bisogna anche considerare che, quando questo cerchio taglia la linea curva CE, l'equazione per mezzo della quale si cerca la quantità x o y, o qualche altra simile, supponendo note PA e PC, contiene necessariamente due radici diverse. Infatti,
418 per esempio, se questo cerchio | taglia la curva nei punti C ed E, avendo tracciato EQ parallela a CM, i nomi delle quantità indeterminate x e y converranno tanto alle linee EQ e QA quanto a CM e MA; inoltre PE è uguale a PC, in virtù del cerchio: di modo che, cercando le linee EQ e QA per mezzo di PE e PA, che si suppongono date, si avrà la stessa equazione che si avrebbe se si cercassero CM e MA per mezzo di PC, PA. Donde segue evidentemente che il valore di x o di y, o di qualunque altra quantità supposta, sarà doppio in questa equazione, cioè si avranno due radici diverse fra loro, di cui una sarà CM, e l'altra EQ, se si cerca la x, oppure l'una sarà MA e l'altra QA, se si cerca la y, e così via. È vero che, se il punto E non si trova dalla stessa parte della curva su cui si trova C, si avrà che una sola delle due radici sarà vera, e l'altra sarà dalla parte opposta o minore di zero; invece, più que-



E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines; et enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joints en un, c'est-à-dire si le cercle qui passe par C y touche la courbe CE sans la couper.

De plus, il faut considérer que, lorsqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a nécessairement la même forme que si on multiplie, par soi-même, la quantité qu'on y suppose être inconnue, moins la quantité connue qui lui est égale; et qu'après cela, si cette dernière somme n'a pas tant de dimensions que | la 419
précédente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il lui en manque: afin qu'il puisse y avoir séparément équation entre chacun des termes de l'une et chacun des termes de l'autre.

Comme, par exemple, je dis que la première équation trouvée ci-dessus,

$$\text{à savoir } yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r},$$

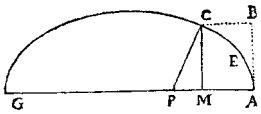
doit avoir la même forme que celle qui se produit en faisant e égal à y, et multipliant $y - e$ par soi-même: d'où il vient

$$yy - 2ey + ee:$$

en sorte qu'on peut comparer séparément chacun de leurs termes et dire que, puisque le premier, qui est yy, est tout le même en l'une qu'en l'autre,

$$\text{le second, qui est en l'une } \frac{qry - 2qvy}{q - r},$$

$$\text{est égal au second de l'autre, qui est } -2ey.$$



D'où, cherchant la quantité v, qui est la ligne PA, on a

$$v = e - \tfrac{r}{q}e + \tfrac{1}{2}r,$$

ou bien, à cause que nous avons supposé e égal à y, on a

$$v = y - \tfrac{r}{q}y + \tfrac{1}{2}r.$$

Et ainsi, on pourrait trouver s par le troisième terme:

[67] Sul metodo per determinare le tangenti si aprirà un'ampia discussione epistolare a partire dalla *Geometria* e dallo scritto di Pierre Fermat *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* in P. Tannery et Ch. Henry (eds.) *Œuvres*, ed., 4 vols., Paris, Gauthier-Villars, 1891-1922. Tale discussione, che coinvolgerà, oltre a Descartes e Fermat, anche Roberval e Etienne Pascal, si apre con le due lettere *A Mersenne* del gennaio 1638: B 137, pp. 481-483 (AT I 481-486) e B 138, pp. 483-491 (AT I 486-496). Descartes scriverà il 1 marzo 1638 tre lettere in cui discuterà ampiamente il proprio metodo e quello di Fermat: *Contro Roberval*

sti due punti C ed E sono vicini fra loro, minore è la differenza fra queste due radici; e infine esse sono assolutamente uguali se tutti e due i punti sono riuniti in uno solo, cioè se il cerchio che passa per C tange lì la curva CE senza tagliarla[67].

Inoltre, bisogna considerare che quando vi sono due radici uguali in un'equazione, essa ha necessariamente la stessa forma che se si moltiplica per se stessa la quantità che si suppone incognita, meno la quantità nota che le è uguale[68]; e dopo di ciò, se quest'ultima espressione non ha le stesse dimensioni
419 della | precedente, la si moltiplica per un'altra espressione che ne abbia tante quante ne mancano alla prima, in modo che si possa avere separatamente uguaglianza tra ciascun termine dell'una e ciascun termine dell'altra.

Così, ad esempio, dico che la prima equazione trovata sopra, cioè

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r},$$

deve avere la stessa forma di quella che si ottiene ponendo e uguale a y, e moltiplicando $y - e$ per se stessa, da cui si ricava

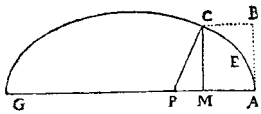
$$y^2 - 2ey + e^2:$$

di modo che si possono confrontare separatamente ciascuno dei loro termini e dire che, siccome il primo, che è y^2, è uguale nell'una e nell'altra equazione,

il secondo termine, che nell'una è $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$,

è uguale al secondo dell'altra equazione, che è $-2ey$.

Di qui, cercando la quantità v, che è la linea PA, si ha



$$v = e - \tfrac{r}{q}e + \tfrac{1}{2}r,$$

ossia, poiché abbiamo supposto e uguale a y, si ha

$$v = y - \tfrac{r}{q}y + \tfrac{1}{2}r.$$

E così si potrebbe trovare s per mezzo del terzo termine:

e Pascal, B 151, pp. 555-565 (AT II 1-13); *A Mydorge*, B 152, pp. 565-571 (AT II 15-23); *A Mersenne*, B 153, pp. 573-579 (AT II 24-32). Rimandiamo a questi luoghi di B in cui l'annotazione permette di ricostruire la complessa discussione (ma cfr. anche il *Profilo Biografico*, *B Op* I LVIII-LIX). Contro il metodo cartesiano per trovare le tangenti si esprimerà anche Beaugrand: *A Mersenne*, fine dicembre 1637, B 136, p. 477 (AT I 478, ll. 1-2).

[68] Cfr. *Roberval contro Descartes*, aprile 1638, B 162, p. 641 (AT II 114, ll. 9-13) e la risposta di Descartes: *A Mersenne*, 3 giugno 1638, B 168, p. 691 (AT II 156, ll. 18-22).

$$ee = \frac{qvv - qss}{q - r};$$

mais, parce que la quantité v détermine assez le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre. |

Tout de même, la seconde équation trouvée ci-dessus, à savoir: 420

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd$$

doit avoir même forme que la somme qui se produit, lorsqu'on multiplie

$$yy - 2ey + ee$$

$$\text{par } \; y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4,$$

qui est

$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4$$

de façon que, de ces deux équations, j'en tire six autres, qui servent à connaître les six quantités f, g, h, k, v et s. D'où il est fort aisé à entendre que, de quelque genre que puisse être la ligne courbe proposée, il vient toujours, par cette façon de procéder, autant d'équations qu'on est obligé de supposer de quantités qui sont inconnues. Mais, pour démêler par ordre ces équations et trouver enfin la quantité v, qui est la seule dont on a besoin, et à l'occasion de laquelle on cherche les autres; il faut, premièrement, par le second terme chercher f, la première des quantités inconnues de la dernière somme; et on trouve

$$f = 2e - 2b.$$

Puis, par le dernier, il faut chercher k, la dernière des quantités inconnues de la même somme; et on trouve

$$k^4 = \frac{bbccdd}{e}. \;|$$

Puis, par le troisième terme, il faut chercher g, la seconde quan- 421
tité, et on a

$$gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd.$$

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r};$$

ma, dato che la quantità v basta per determinare il punto P, che è il solo che cerchiamo, non occorre procedere oltre. |

420 Analogamente, la seconda equazione sopra trovata, cioè

$$y^6 - 2by^5 + (-2cd + b^2 + d^2)y^4 +$$
$$+ (4bcd - 2\,d^2v)y^3 + (-2b^2cd + c^2d^2 -$$
$$- d^2s^2 + d^2v^2)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2\ ,$$

deve avere la stessa forma dell'espressione che si ottiene quando si moltiplica

$$y^2 - 2ey + e^2$$
$$\text{per}\ \ y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4,$$

e cioè

$$y^6 + (f - 2e)y^5 + (g^2 - 2ef + e^2)y^4 +$$
$$+ (h^3 - 2eg^2 + e^2f)y^3 + (k^4 - 2eh^3 + e^2g^2)y^2 +$$
$$+ (-2ek^4 + e^2h^3)y + e^2k^4;$$

di modo che, da queste due equazioni ne ricavo altre sei, che servono a determinare le sei quantità f, g, h, k, v e s. Di qui è assai semplice dedurre che, qualunque possa essere il genere della linea curva proposta, con questo modo di procedere si ricavano sempre tante equazioni quante sono le quantità che si è deciso di supporre incognite. Ma, per risolvere nell'ordine queste equazioni e trovare infine la quantità v, che è la sola di cui si ha bisogno e in virtù della quale si cercano le altre, occorre in primo luogo determinare f, la prima delle quantità incognite dell'ultima espressione; e si trova

$$f = 2e - 2b.$$

Poi, per mezzo dell'ultimo termine, bisogna cercare k, l'ultima delle quantità incognite della stessa espressione; e si trova

$$k^4 = \frac{b^2c^2d^2}{e}.\ |$$

421 Poi, per mezzo del terzo termine bisogna cercare g, la seconda quantità, e si ha

$$g^2 = 3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2.$$

Puis, par le pénultième, il faut chercher h, la pénultième quantité, qui est

$$h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}.$$

Et ainsi il faudrait continuer, suivant ce même ordre, jusques à la dernière, s'il y en avait davantage en cette somme; car c'est chose qu'on peut toujours faire en même façon.

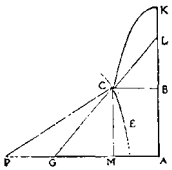
Puis, par le terme qui suit en ce même ordre, qui est ici le quatrième, il faut chercher la quantité v, et on a

$$v = \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3};$$

où mettant y au lieu d'e, qui lui est égal, on a

$$v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{b^3y}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3},$$

pour la ligne AP.



Et ainsi la troisième équation, qui est

$$zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv}, \mid$$

a la même forme que 422

$$zz - 2fz + ff,$$

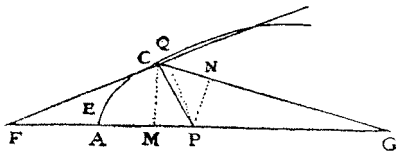
en supposant f égal à z: si bien qu'il y a derechef équation entre

$$-2f \text{ ou } -2z \text{ et } \frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}.$$

D'où on connaît que la quantité

$$v \text{ est } \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}.$$

C'est pourquoi, composant la ligne AP de cette somme égale à v, dont toutes les quantités sont connues, et tirant, du point P ainsi trouvé, une ligne droite vers C, elle y coupe la courbe CE à angles droits: qui est ce qu'il fallait faire. Et je ne vois rien qui empêche qu'on n'étende ce problème, en même façon, à toutes les lignes courbes qui tombent sous quelque calcul Géométrique.



Même il est à remarquer, touchant la dernière somme, qu'on prend à discrétion pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme, lorsqu'il y en manque, comme nous avons pris tantôt:

Poi, per mezzo del penultimo, si deve cercare h, la penultima quantità, che è

$$h^3 = \frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2}.$$

E bisognerebbe continuare così, seguendo questo stesso ordine, fino all'ultima, se vi fossero ancora altre quantità in questa espressione; infatti è cosa che si può sempre fare nello stesso modo.

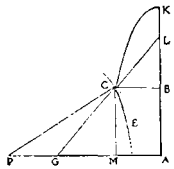
Poi, per mezzo del termine che segue in questo stesso ordine, che qui è il quarto, bisogna cercare la quantità v e si ha

$$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2c^2}{e^3};$$

dove, sostituendo y al posto di e, che è ad esso uguale, si ottiene

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{3by^2}{d^2} + \frac{b^2y}{d^2} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2c^2}{y^3},$$

per la linea AP.



E così la terza equazione, che è

$$z^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v}, \,|$$

422 ha la stessa forma di

$$z^2 - 2fz + f^2,$$

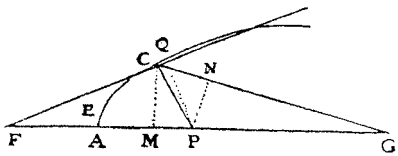
supponendo f uguale a z, così che vi è nuovamente uguaglianza tra

$$-2f \text{ o } -2z \text{ e } \frac{+2bcd^2 - 2bcde - 2cd^2v - 2bdev}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v}.$$

Di qui si conosce che la quantità v è

$$\frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}.$$

Per questo, ponendo la linea AP di questa espressione uguale a v, di cui sono note tutte le quantità, e tracciando dal punto P così trovato una linea retta verso C, essa taglia la curva CE ad angoli retti, che è ciò che si doveva dimostrare. E non vedo nulla che impedisca di estendere questo problema, nello stesso modo, a tutte le linee curve che sottostanno a qualche calcolo geometrico.



Analogamente, per quanto riguarda l'ultima espressione che si prende ad arbitrio per colmare il numero delle dimensioni dell'altra espressione quando non sia completo; per esempio noi abbiamo appena preso

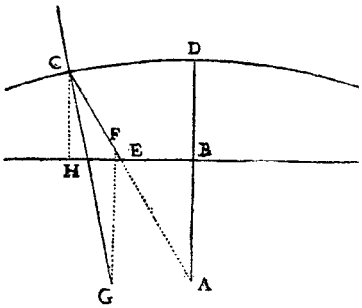
$$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4,$$

que les signes, + et –, y peuvent être supposés tels qu'on veut, sans que la ligne *v* ou AP se trouve diverse pour cela, comme vous pourrez aisément voir par expérience: car, s'il fallait que je m'arrêtasse à | démontrer tous les théorèmes dont je fais quelque 423
mention, je serais contraint d'écrire un volume beaucoup plus gros que je ne désire. Mais je veux bien, en passant, vous avertir que l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer séparément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, et ainsi en faire naître plusieurs d'une seule, dont vous avez vu ici un exemple, peut servir à une infinité d'autres Problèmes et n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers.

Je n'ajoute point les constructions par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en suite du calcul que je viens d'expliquer, à cause qu'il est toujours aisé de les trouver, bien que, souvent, on ait besoin d'un peu d'adresse pour les rendre courtes et simples.

Exemple de la construction de ce problème en la conchoïde

Comme, par exemple, si DC est la première conchoïde des anciens, dont A soit le pôle, et BH la règle: en sorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, et sont comprises entre la courbe CD et la droite BH, comme DB et CE, soient égales: et qu'on veuille trouver la ligne CG, qui la coupe au point C à angles droits, on pourrait, en cherchant dans la ligne BH le point par où cette ligne CG doit passer, selon la méthode ici expliquée, s'engager dans un | calcul autant ou 424
plus long qu'aucun des précédents. Et toutefois la construction, qui devrait après en être déduite, est fort simple. Car il ne faut que prendre CF en la ligne droite CA, et la faire égale à CH, qui est perpendiculaire sur HB; puis, du point F, tirer FG parallèle à BA et égale à EA: au moyen de quoi on a le point G, par lequel doit passer CG, la ligne cherchée.



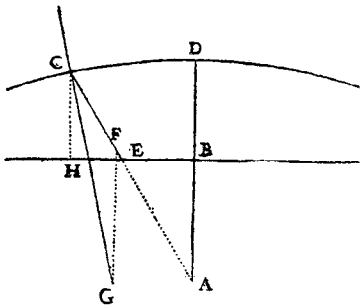
$$y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4,$$

bisogna sottolineare che i segni, + e –, possono essere presi a piacere, senza che la linea v o AP risulti perciò diversa, come potete facilmente constatare con l'esperienza: infatti, se dovessi soffermarmi a | dimostrare tutti i teoremi, di cui faccio qual-
423 che menzione, sarei costretto a scrivere un volume molto più corposo di quanto desideri. Ma voglio, a margine, avvertirvi che l'idea di considerare due equazioni della stessa forma per confrontare separatamente tutti i termini dell'una con quelli dell'altra e così da una sola equazione ricavarne parecchie altre (idea di cui avete visto qui un esempio) può servire per un'infinità di altri problemi e non è uno degli aspetti di minore importanza del metodo di cui mi servo.

Non aggiungo, dopo il calcolo che ho appena spiegato, le costruzioni tramite le quali si possono descrivere le tangenti o le perpendicolari cercate poiché è sempre facile trovarle, anche se, sovente, occorre un po' di abilità per renderle brevi e semplici.

Esempio di costruzione di questo problema nella concoide

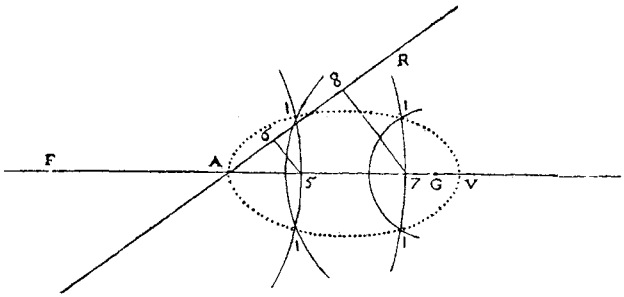
Così, per esempio, se DC è la prima concoide degli antichi il cui polo è A, e BH è il regolo: di modo che tutte le linee rette che tendono verso A, e sono comprese tra la curva CD e la retta BH, come DB e CE, sono uguali, e se si vuole trovare la linea CG che la taglia nel punto C ad angoli retti, potrebbe capitare che, cercando sulla linea BH il punto per cui deve passare la linea CG secondo il metodo qui spiegato, ci si imbatta in un |
424 calcolo altrettanto o più lungo di quelli precedenti[69]. E tuttavia la costruzione che dovrebbe poi esserne dedotta è molto semplice. Infatti basta prendere CF sulla linea retta CA, e porla uguale a CH, che è perpendicolare ad HB; poi, dal punto F, tracciare FG parallela a BA e uguale a EA: in tal modo si ottiene il punto G, per il quale deve passare CG, la linea cercata.



[69] Cfr. *A Mersenne*, 11 giugno 1640, B 255, p. 1203 (AT III 86, ll. 11-13).

Explication de 4 nouveaux genres d'Ovales, qui servent à l'Optique

Au reste, afin que vous sachiez que la considération des lignes courbes, ici proposée, n'est pas sans usage, et qu'elles ont diverses propriétés qui ne cèdent en rien à celles des sections coniques, je veux encore ajouter ici l'explication de certaines Ovales, que vous verrez être très utiles pour la Théorie de la Catoptrique et de la Dioptrique. Voici la façon dont je les décris.

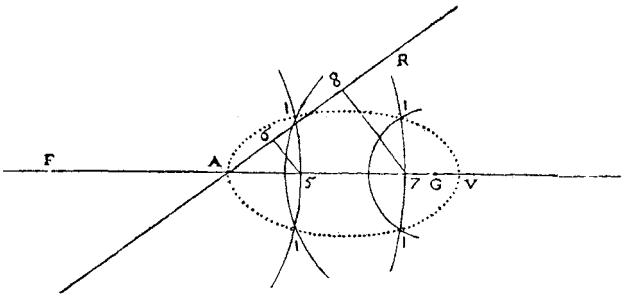


Premièrement, ayant tiré les lignes droites FA et AR, qui s'entrecoupent au point A, sans qu'il importe à quels angles, je prends, en l'une, le point F à discrétion, c'est-à-dire plus ou moins éloigné du point A, selon que je veux faire ces Ovales plus ou moins | grandes; et de ce point F, comme centre, je décris un 425
cercle qui passe quelque peu au-delà du point A, comme par le point 5. Puis, de ce point 5, je tire la ligne droite 56, qui coupe l'autre au point 6, en sorte qu'A6 soit moindre qu'A5 selon telle proportion donnée qu'on veut, à savoir selon celle qui mesure les Réfractions, si on s'en veut servir pour la Dioptrique. Après cela, je prends aussi le point G en la ligne FA, du côté où est le point 5, à discrétion, c'est-à-dire en faisant que les lignes AF et GA ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis je fais RA égale à GA en la ligne A6, et, du centre G, décrivant un cercle dont le rayon soit égal à R6, il coupe l'autre cercle, de part et d'autre, au point *l*, qui est l'un de ceux par où doit passer la première des Ovales cherchées. Puis derechef, du centre F, je décris un cercle qui passe un peu au-deçà ou au-delà du point 5, comme par le point 7; et ayant tiré la ligne droite 78 parallèle à 56, du centre G je décris un autre cercle, dont le rayon est égal à

[70] Cfr. *Estratti di matematica*, *B Op* II 1027-1051 (AT X 310-324) in cui Descartes fornisce una descrizione di queste ovali. La loro applicazione si trova nel discorso VIII della *Diottrica*, interamente dedicato alla figura che devono avere le lenti: *B Op* I 233-271 (AT

Spiegazione di 4 nuovi generi di ovali che servono all'ottica[70]

Del resto, affinché riconosciate che la considerazione delle linee curve qui proposte non è priva di utilità, e che esse hanno diverse proprietà che non sono per nulla inferiori a quelle delle sezioni coniche, voglio ancora aggiungere qui la spiegazione di certe ovali che, come vedrete, sono utili per la teoria della catottrica e della diottrica. Ecco il modo con cui le descrivo.

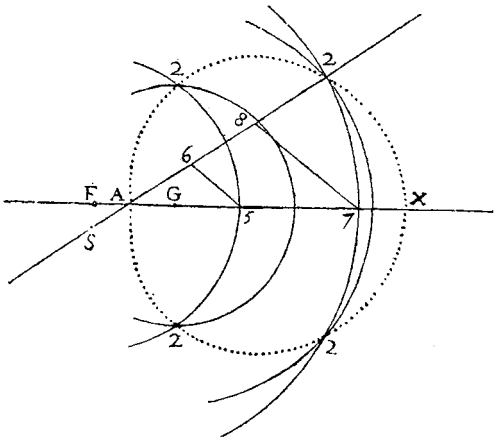


In primo luogo, avendo tracciato le linee rette FA e AR, che si intersecano nel punto A, non importa con quali angoli, prendo su una di esse il punto F a piacere, cioè più o meno lontano dal punto A, a seconda che voglia tracciare queste
425 ovali più o meno | grandi; e preso questo punto F come centro, descrivo un cerchio che passa un po' al di là del punto A, per esempio per il punto 5. Poi da questo punto 5 traccio la linea retta 56, che interseca la precedente nel punto 6, di modo che A6 sia minore di A5 secondo una proporzione data a piacere, cioè secondo quella che misura le rifrazioni, se vogliamo servircene per la diottrica. Dopo ciò, prendo il punto G sempre sulla linea FA, dal lato su cui si trova il punto 5, a piacere, cioè facendo sì che le linee AF e GA abbiano tra loro una certa proporzione arbitrariamente data. Poi prendo RA uguale a GA sulla linea A6 e descrivendo, con centro G, un cerchio il cui raggio sia uguale a R6, esso taglia l'altro cerchio, da una parte e dall'altra, nel punto *l*, che è uno dei punti per i quali deve passare la prima delle ovali cercate. E poi ancora, con centro F, descrivo un cerchio che passa un po' al di qua o un po' al di là del punto 5, per esempio per il punto 7, e avendo tracciato la linea retta 78 parallela a 56, con centro G, descrivo un altro cerchio, il cui raggio sia uguale alla linea R8,

VI 165-196). Ma cfr. anche la testimonianza di Beeckman: *Beeckman III*, *B Op* II 1361-1369 (AT X 338-342).

la ligne R8; et ce cercle coupe celui qui passe par le point 7, au point *l*, qui est encore l'un de ceux de la même Ovale. Et ainsi on en peut trouver autant d'autres qu'on voudra, en tirant derechef d'autres lignes parallèles à 78, et d'autres cercles des centres F et G.

Pour la seconde Ovale, il n'y a point de différence, sinon qu'au lieu d'AR, il faut, de l'autre côté du point A, prendre AS égal à AG, et que le rayon du cercle décrit, du centre G, pour couper celui qui est décrit du centre F et qui passe par le point 5, soit | égal à la ligne S6: ou qu'il soit égal à S8, si c'est pour cou- 426
per celui qui passe par le point 7: et ainsi des autres. Au moyen

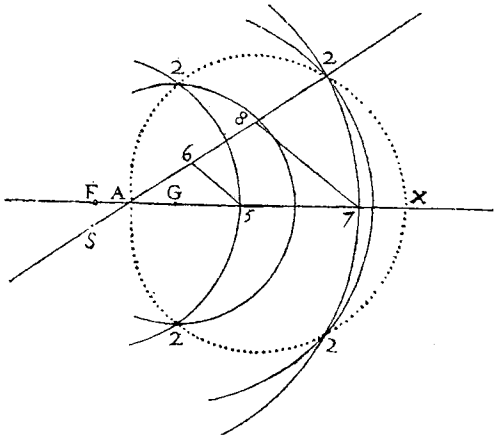


de quoi ces cercles s'entrecoupent aux points marqués 2, 2, qui sont ceux de cette seconde Ovale, A2X.

Pour la troisième et la quatrième, au lieu de la ligne AG, il faut prendre AH de l'autre côté du point A, à savoir du même qu'est le point F. Et il y a ici, de plus, à observer que cette ligne AH doit être plus grande que AF, laquelle peut même être nulle, en sorte que le point F se rencontre où est le point A, en la description de toutes ces Ovales. Après cela, les lignes AR et AS étant égales à AH, pour décrire la troisième Ovale, A3Y, je fais un cercle, du centre H, dont le rayon est égal à S6, qui coupe, au point 3, celui du centre F qui passe par le point 5; et un autre, dont le rayon est égal à S8, qui coupe celui qui | passe par le point 7, au point 427
aussi marqué 3: et ainsi des autres. Enfin pour la dernière Ovale, je fais des cercles du centre H, dont les rayons sont égaux aux

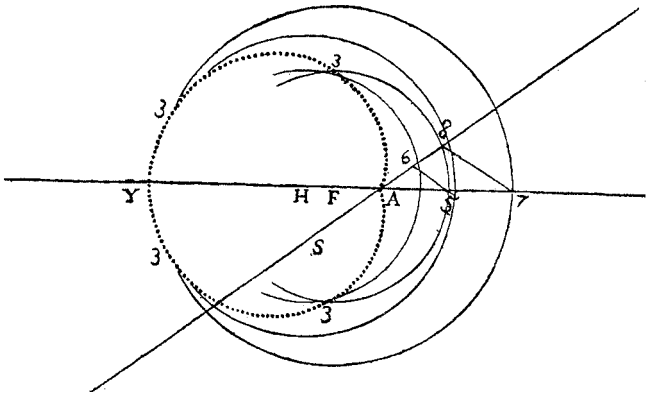
e questo cerchio taglia quello che passa per il punto 7 nel punto *l*, che è ancora uno dei punti della stessa ovale. E così si possono trovare tanti altri punti quanti si vogliono, tracciando nuovamente delle altre linee parallele a 78, e degli altri cerchi con centri F e G.

Per la seconda ovale non c'è alcuna differenza, se non per il fatto che al posto di AR, bisogna prendere, dall'altra parte del punto A, AS uguale ad AG, e il raggio del cerchio descritto, di centro G, affinché tagli il cerchio descritto con centro F
426 e che passa per il punto 5, è | uguale alla linea S6, oppure è uguale a S8, se deve tagliare quello che passa per il punto 7, e

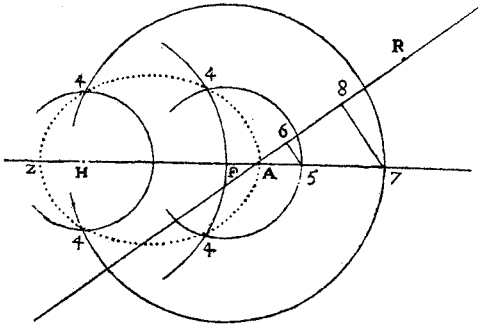


così via. Di modo che questi cerchi si intersecano l'un l'altro nei punti denominati 2, 2, che sono quelli di questa seconda ovale A2X.

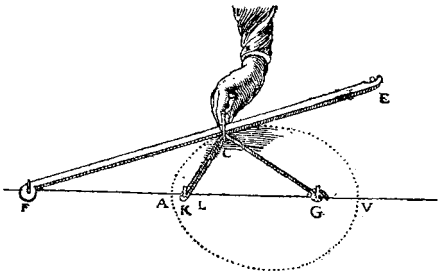
Per la terza e la quarta, al posto della linea AG bisogna prendere AH dall'altra parte del punto A, cioè dalla stessa parte del punto F. E in più si deve osservare, in questo caso, che questa linea AH deve essere maggiore di AF, che può anche essere nulla, di modo che il punto F viene a coincidere con il punto A, nella descrizione di tutte queste ovali. Dopo di che, essendo le linee AR e AS uguali ad AH, per descrivere la terza ovale, A3Y, traccio un cerchio con centro H, il cui raggio sia uguale a S6, che taglia, nel punto 3, il cerchio con centro F che passa per il punto 5, e ne prendo un altro di raggio
427 uguale a S8, che taglia quello che | passa per il punto 7, nel punto anch'esso denotato 3, e così via. Infine per l'ultima ovale prendo dei cerchi di centro H, i cui raggi siano uguali alle

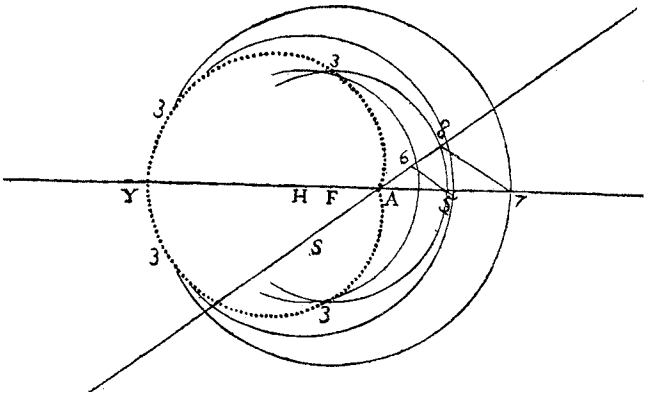


lignes R6, R8 et semblables, qui coupent les autres cercles aux points marqués 4.

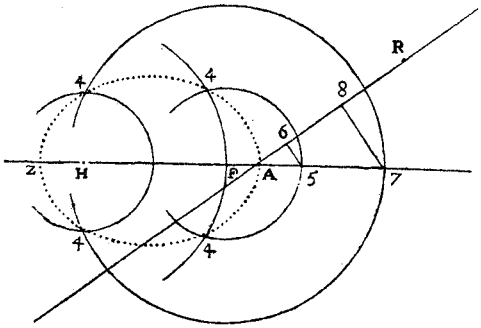


On pourrait encore trouver une infinité d'autres moyens pour décrire ces mêmes ovales: comme, par exemple, on peut tracer la première, AV, lorsqu'on suppose les lignes FA et AG être égales, si on divise | la toute FG au point L, en sorte que FL soit à LG 428



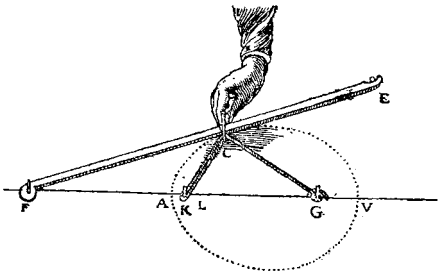


linee R6, R8 e simili, che taglino gli altri cerchi nei punti denotati 4.



Si potrebbe ancora trovare un'infinità di altri modi per descrivere queste stesse ovali: così, per esempio, si può tracciare la prima, AV, supponendo che le linee FA e AG siano uguali, se si divide | l'intera FG nel punto L, di modo che FL stia a

428

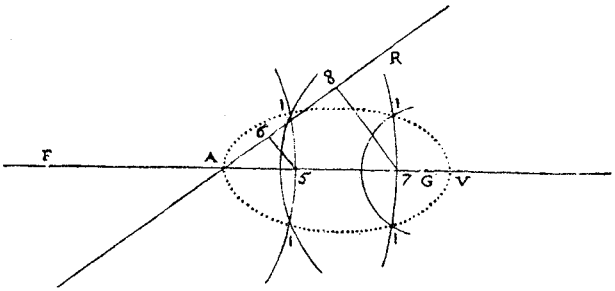


comme A5 à A6, c'est-à-dire qu'elles aient la proportion qui mesure les réfractions. Puis, ayant divisé AL en deux parties égales au point K, qu'on fasse tourner une règle, comme FE, autour du point F, en pressant du doigt C la corde EC, qui, étant attachée au bout de cette règle vers E, se replie de C vers K, puis de K derechef vers C, et de C vers G, où son autre bout soit attaché; en sorte que la longueur de cette corde soit composée de celle des lignes GA plus AL plus FE moins AF. Et ce sera le mouvement du point C qui décrira cette ovale, à l'imitation de ce qui a été dit, en la Dioptrique, de l'Ellipse et de l'Hyperbole. Mais je ne veux point m'arrêter plus longtemps sur ce sujet.

Or, encore que toutes ces ovales semblent être quasi de même nature, elles sont néanmoins de 4 divers genres, chacun desquels contient sous soi une infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diverses espèces que fait le genre des Ellipses, ou celui des Hyperboles. Car, selon que la proportion qui est entre les lignes A5, A6, ou | semblables, est différente, le genre subalterne de ces ovales est différent. Puis, selon que la proportion qui est entre les lignes AF et AG ou AH est changée, les ovales de chaque genre subalterne changent d'espèce. Et selon qu'AG, ou AH, est plus ou moins grande, elles sont diverses en grandeur. Et si les lignes A5 et A6 sont égales, au lieu des ovales du premier genre ou du troisième, on ne décrit que des lignes droites; mais, au lieu de celles du second, on a toutes les Hyperboles possibles, et, au lieu de celles du dernier, toutes les Ellipses. 429

Les propriétés de ces ovales, touchant les réflexions et les réfractions

Outre cela, en chacune de ces ovales, il faut considérer deux parties, qui ont diverses propriétés: à savoir, en la première, la partie qui est vers A fait que les rayons qui, étant dans l'air, viennent du point F, se retournent tous vers le point G, lorsqu'ils rencontrent la superficie convexe d'un verre dont la superficie est 1A1, et dans lequel les réfractions se font telles que, suivant ce



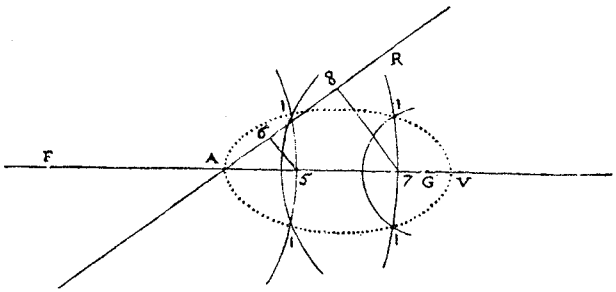
[71] Si veda in particolare l'ultima delle *pièces* che compongono gli *Estratti di matematica*: *B Op* II 1045-1051 (AT X 320-324).

LG come A5 sta a A6, cioè in modo tale che abbiano la proporzione che misura le rifrazioni. Poi, avendo diviso AL in due parti uguali nel punto K, si faccia ruotare un regolo, per esempio FE, attorno al punto F, pressando con il dito C la corda EC, che essendo attaccata all'estremità di questo regolo verso E, si piega da C verso K, poi da K di nuovo verso C, e da C verso G, dove è attaccato l'altro suo estremo. Di modo che la lunghezza di questa corda sia data da quella della linea GA più quella di AL, più quella di FE, meno quella di AF. E sarà il movimento del punto C a descrivere questa ovale, secondo quanto è stato detto, nella *Diottrica*, dell'ellisse e dell'iperbole. Ma non voglio soffermarmi ulteriormente su questo tema.

Ora, benché tutte queste ovali sembrino essere pressoché della stessa natura, esse sono tuttavia di 4 diversi generi, ciascuno dei quali comprende sotto di sé un'infinità di altri generi, che a loro volta comprendono, ciascuno, altrettante diverse specie quanti sono i generi delle ellissi o quelli delle iperboli.
429 Infatti, al variare della proporzione tra le linee A5, A6, o | simili, varia il genere subalterno di queste ovali. Poi, a seconda del variare della proporzione che c'è tra le linee AF e AG o AH, le ovali di ciascun genere subordinato variano di specie. E a seconda che AG, o AH, sia più o meno grande, esse sono diverse in grandezza. E se le linee A5 e A6 sono uguali, al posto delle ovali del primo o del terzo genere si descrivono solo linee rette; ma, al posto di quelle del secondo genere si ottengono tutte le iperboli possibili, e al posto di quelle dell'ultimo genere tutte le ellissi.

Le proprietà di queste ovali riguardanti le riflessioni e le rifrazioni[73]

Inoltre, in ciascuna di queste ovali, bisogna prendere in considerazione due parti, che hanno proprietà diverse: ossia, nella prima, la parte che tende verso A fa sì che i raggi che nell'aria giungono dal punto F, convergano tutti nel punto G, quando incidono sulla superficie convessa di una lente la cui superficie è 1A1, e nella quale le rifrazioni sono tali che, secon-



qui a été dit en la Dioptrique, elles peuvent toutes être mesurées par la proportion qui est entre les lignes A5 et A6, ou semblables par l'aide desquelles on a décrit cette ovale. |

Mais la partie qui est vers V, fait que les rayons qui viennent 430
du point G se réfléchiraient tous vers F, s'ils y rencontraient la superficie concave d'un miroir, dont la figure fût 1V1, et qui fût de telle matière qu'il diminuât la force de ces rayons selon la proportion qui est entre les lignes A5 et A6. Car, de ce qui a été démontré en la Dioptrique, il est évident que, cela posé, les angles de la réflexion seraient inégaux, aussi bien que sont ceux de la réfraction, et pourraient être mesurés en même sorte.

En la seconde ovale, la partie 2A2 sert encore pour les réflexions dont on suppose les angles être inégaux: car, étant en la superficie d'un miroir composé de même matière que le précédent, elle ferait tellement réfléchir tous les rayons qui viendraient du point G, qu'ils sembleraient, après être réfléchis, venir du point F. Et il est à remarquer qu'ayant fait la ligne AG beaucoup plus grande que AF, ce miroir serait convexe au milieu, vers A, et concave aux extrémités: car telle est la figure de cette ligne, qui, en cela, représente plutôt un cœur qu'une ovale.

Mais son autre partie, 2X2, sert pour les réfractions et fait que les rayons qui, étant dans l'air, tendent vers F, se détournent vers G, en traversant la superficie d'un verre qui en ait la figure.

La troisième ovale sert toute aux réfractions et fait que les rayons qui, étant dans l'air, tendent vers F, se vont rendre vers H, dans le verre, après qu'ils ont traversé sa superficie, dont la figure est A3Y3, qui est | convexe partout, excepté vers A, où elle est 431
un peu concave: en sorte qu'elle a la figure d'un cœur aussi bien que la précédente. Et la différence qui est entre les deux parties de cette ovale, consiste en ce que le point F est plus proche de l'une que n'est le point H, et qu'il est plus éloigné de l'autre que ce même point H.

En même façon, la dernière ovale sert toute aux réflexions et fait que, si les rayons qui viennent du point H rencontraient la superficie concave d'un miroir de même matière que les précédents, et dont la figure fût A4Z4, ils se réfléchiraient tous vers F.

De façon qu'on peut nommer les points F et G ou H les points brûlants de ces ovales, à l'exemple de ceux des Ellipses

[72] Vedi *Diottrica*, II, *B Op* I 137-153 (AT VI 93-105).
[73] Sempre nel discorso II, cfr. nota precedente.

do quanto è stato detto nella *Diottrica*[72], esse possono essere tutte misurate per mezzo della proporzione che c'è tra le linee A5 e A6, o simili, in virtù delle quali è stata descritta questa ovale. |
430 Mentre la parte che tende verso V, fa sì che i raggi che giungono dal punto G si riflettano tutti verso F, se incidono sulla superficie concava di uno specchio, la cui figura sia 1V1, e che sia di una materia tale da diminuire la forza di questi raggi secondo la proporzione che sussiste tra le linee A5 e A6. Infatti, in base a ciò che è stato dimostrato nella *Diottrica*[73], è evidente che, ciò posto, gli angoli della riflessione sarebbero diseguali, così come lo sono quelli della rifrazione, e potrebbero essere misurati nello stesso modo.

Nella seconda ovale, la parte 2A2 serve ancora per le riflessioni in cui si suppone che gli angoli siano disuguali: infatti, nel caso in cui la superficie di uno specchio fosse composta dello stesso materiale della precedente, essa farebbe riflettere tutti i raggi provenienti dal punto G in modo tale che, dopo esser stati riflessi, essi sembrerebbero giungere dal punto F. E bisogna notare che, avendo preso la linea AG molto maggiore di AF, questo specchio sarebbe convesso al centro, verso A, e concavo alle estremità: infatti tale è la forma di questa linea che, in questo caso, somiglia più a un cuore che a un'ovale.

Invece l'altra sua parte, 2X2[74], serve per le rifrazioni e fa sì che i raggi che passando nell'aria tendono a F, devino verso G, attraversando la superficie di una lente che ha questa figura.

La terza ovale serve tutta per le rifrazioni e fa sì che i raggi che passando nell'aria tendono a F, si dirigano verso H, nella lente, dopo aver attraversato la sua superficie, la cui figura è
431 A3Y3, che è | convessa ovunque, tranne che verso A, dove è leggermente concava: di modo che ha la figura di un cuore così come la precedente. E la differenza tra le due parti di questa ovale consiste nel fatto che il punto F è più vicino ad una di esse di quanto lo sia il punto H, e più lontano dall'altra di quanto lo sia lo stesso punto H.

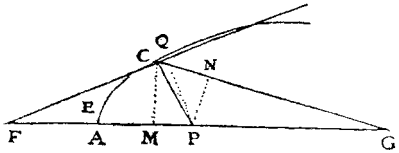
Analogamente, l'ultima ovale serve tutta alle riflessioni e fa sì che se i raggi che provengono dal punto H incontrano la superficie concava di uno specchio dello stesso materiale dei precedenti, e la cui figura sia A4Z4, essi si riflettono tutti in F. Di modo che i punti F e G o H si possono denominare i punti ardenti di queste ovali, alla stregua di quelli delle ellis-

[74] *Descartes 1637* (p. 359) riportava «X2». La correzione è stata apportata in *Schooten* (p. 56).

et des Hyperboles qui ont été ainsi nommés en la Dioptrique.

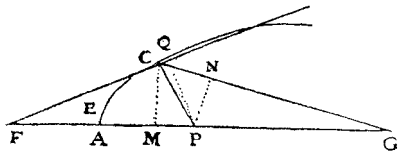
J'omets quantité d'autres réfractions, et réflexions, qui sont réglées par ces mêmes ovales: car, n'étant que les converses ou les contraires de celles-ci, elles en peuvent facilement être déduites. Mais il ne faut pas que j'omette la démonstration de ce que j'ai dit: et, à cet effet, prenons, par exemple, le point C à discrétion en la première partie de la première de ces ovales; puis tirons la ligne droite CP, qui coupe la courbe au point C à angles droits: ce qui est facile par le problème précédent. Car, prenant b pour AG, | c pour AF, $c + z$ pour FC, 432
et supposant que la proportion qui est entre d et e, que je prendrai ici toujours pour celle qui mesure les réfractions du verre proposé, désigne aussi celle qui est entre les lignes A5 et A6, ou semblables qui ont servi pour décrire cette ovale: ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour GC: on trouve que la ligne AP est

Démonstration des propriétés de ces ovales touchant les réflexions et réfractions



$$\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez},$$

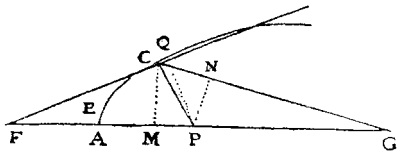
ainsi qu'il a été montré ci-dessus. De plus, du point P, ayant tiré PQ à angles droits sur la droite FC, et PN aussi à angles droits sur GC, considérons que, si PQ est à PN comme d est à e, c'est-à-dire comme les lignes qui mesurent les réfractions du verre convexe AC, le rayon qui vient du point F au point C, doit tellement s'y courber, en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre après vers G: ainsi qu'il est très évident de ce qui a été dit en la Dioptrique. Puis enfin, voyons par le calcul s'il est vrai que PQ soit à PN comme d est à e. Les triangles rectangles PQF et CMF sont semblables: d'où il suit que CF est à CM comme FP est à PQ: et, par conséquent, que FP, étant multipliée par CM et divisée par CF, est égale à PQ. Tout de même, les triangles rectangles PNG et CMG sont semblables; d'où il suit que GP, multipliée par CM et divisée par CG, est



si e delle iperboli che sono stati denominati così nella *Diottrica*[75].

Tralascio una moltitudine di altre rifrazioni e riflessioni che sono regolate da queste stesse ovali: infatti, non essendo che le reciproche o le opposte di queste ultime, possono essere dedotte facilmente. Non bisogna però che tralasci la dimostrazione di ciò che ho detto; e, a tal scopo, prendiamo per esempio ad arbitrio il punto C sulla prima parte della prima di queste ovali; poi tracciamo la linea retta CP, che taglia la curva nel punto C ad angoli retti, il che è semplice, in virtù del problema precedente. Infatti, prendendo b per AG, | c per AF, $c + z$ per FC, e supponendo che la proporzione tra d ed e, che io assumerò qui sempre come quella che misura le rifrazioni della lente considerata, sia anche la proporzione tra le linee A5 e A6, o simili, che sono servite per descrivere questa ovale, il che dà $b - \frac{e}{d}z$ per GC, si trova che la linea AP è

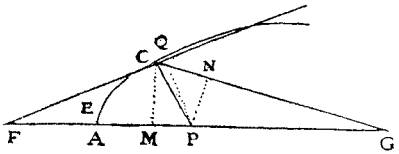
Dimostrazione delle proprietà di queste ovali relative alle riflessioni e alle rifrazioni



432

$$\frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z},$$

come è stato sopra mostrato. Inoltre, avendo tracciato PQ, dal punto P ad angoli retti sulla retta FC, e PN anch'essa ad angoli retti su GC, consideriamo che se PQ sta a PN come d sta a e, cioè come le linee che misurano le rifrazioni della lente convessa AC, il raggio che va dal punto F al punto C deve curvarsi talmente, incidendo su questa lente in modo tale da doversi poi rivolgere verso G: il che è assai evidente sulla base di ciò che è stato detto nella *Diottrica*. Infine, vediamo con il calcolo se è vero che PQ sta a PN come d sta ad e. I triangoli rettangoli PQF e CMF sono simili. Di qui segue che CF sta a CM come FP sta a PQ e, di conseguenza, che FP, moltiplicato per CM e diviso per CF, è uguale a PQ. Parimenti, i triangoli rettangoli PNG e CMG sono simili. Di qui segue che GP, moltiplicato per CM e diviso per CG, è uguale a PN.



[75] Vedi *Diottrica*, VIII, *B Op* I 235 (AT VI 167, ll. 26-29).

égale à PN. Puis, à cause que les multiplications ou divisions, qui se font de deux quantités par une même, ne changent point la | proportion qui est entre elles; si FP, multipliée par CM et divisée 433
par CF, est à GP, multipliée aussi par CM et divisée par CG, comme *d* est à *e*; en divisant l'une et l'autre de ces deux sommes par CM, puis les multipliant toutes deux par CF et, derechef, par CG, il reste: FP multipliée par CG, qui doit être à GP, multipliée par CF, comme *d* est à *e*. Or, par la construction,

FP est $$c + \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez},$$

ou bien $$\mathrm{FP} = \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez},$$

et CG est $$b - \frac{e}{d}z.$$

Si bien que, multipliant FP par CG, il vient:

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Puis

GP est $$b + \frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez},$$

ou bien $$\mathrm{GP} = \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez};$$

et CF est $$c + z.$$

Si bien, que, multipliant GP par CF, il vient

$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Et, parce que la première de ces sommes, divisée par *d*, est la même que la seconde divisée par *e*, il est manifeste que FP, multipliée par CG, est à GP, multipliée par CF, c'est-à-dire que PQ est à PN comme *d* est à *e*. Qui est tout ce qu'il fallait démontrer.

Et sachez que cette même démonstration s'étend à tout ce qui a été dit des autres réfractions, ou réflexions, qui se font dans les ovales proposées, sans | qu'il y faille changer aucune chose que les 434
signes + et − du calcul. C'est pourquoi chacun les peut aisément examiner de soi-même, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête.

Mais il faut, maintenant, que je satisfasse à ce que j'ai omis en la Dioptrique, lorsqu'après avoir remarqué qu'il peut y avoir des verres de plusieurs diverses figures, qui fassent, aussi bien l'un que l'autre, que les rayons venant d'un même point de l'objet s'assemblent tous en un autre point, après les avoir traversés; et qu'entre ces verres, ceux qui sont fort convexes d'un côté, et

[76] Il valore di GP risulta appunto da AG–AP.

Poi, dal momento che moltiplicando o dividendo due quantità
433 per una stessa quantità, non cambia la | proporzione tra loro, se FP, moltiplicato per CM e diviso per CF, sta a GP, anch'esso moltiplicato per CM e diviso per CG, come d sta ad e, dividendo entrambe queste espressioni per CM, e moltiplicandole poi tutt'e due per CF e, ancora per CG, risulta FP moltiplicato per CG, che deve stare a GP, moltiplicato per CF, come d sta ad e. Ora, per costruzione,

FP è $$c + \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z},$$

ossia $$\mathrm{FP} = \frac{bcd^2 + c^2d^2 + bd^2z + cd^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z},$$

e CG è $$b - \frac{e}{d}z.$$

Così che, moltiplicando FP per CG, risulta:

$$\frac{b^2cd^2 + bc^2d^2 + b^2d^2z + bcd^2z - bcdez - c^2dez - bdez^2 - cdez^2}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z}.$$

Poi

GP è $$b + \frac{-bcd^2 + bcde - bd^2z - ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z},$$ [76]

ossia $$\mathrm{GP} = \frac{b^2de + bcde - be^2z - ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z},$$

e CF è $$c + z.$$

Così che, moltiplicando GP per CF, si ricava

$$\frac{b^2cde + bc^2de - bce^2z - c^2e^2z + b^2dez + bcdez - be^2z^2 - ce^2z^2}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z}.$$

E, dal momento che la prima di queste somme, divisa per d, è uguale alla seconda divisa per e, è evidente che FP, moltiplicato per CG, sta a GP, moltiplicato per CF, cioè PQ sta a PN, come d sta ad e. Ciò è tutto quel che si doveva dimostrare.

E sappiate che questa stessa dimostrazione si estende a tutto ciò che è stato detto a proposito delle altre rifrazioni o
434 riflessioni che si producono nelle ovali considerate senza | bisogno di cambiare altro se non i segni + e – del calcolo. Perciò ognuno le può facilmente esaminare da sé senza bisogno che io mi dilunghi.

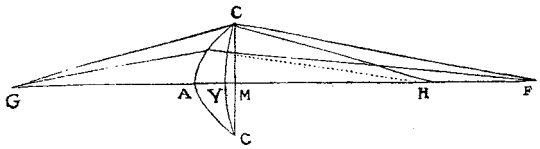
Ma bisogna ora che io completi ciò che ho omesso nella *Diottrica*[77] quando, dopo aver osservato che si possono avere lenti con parecchie figure diverse che, tutte ugualmente bene, fanno sì che i raggi provenienti da uno stesso punto dell'oggetto si riuniscano tutti in un altro punto, dopo averle attraversate, e dopo aver osservato che fra queste lenti, quelle che sono

[77] Vedi *Diottrica*, VIII, *B Op* I 269 (AT VI 195, l. 3 sgg.).

concaves de l'autre, ont plus de force pour brûler que ceux qui sont également convexes des deux côtés; au lieu que, tout au contraire, ces derniers sont les meilleurs pour les lunettes; je me suis contenté d'expliquer ceux que j'ai cru être les meilleurs pour la pratique, en supposant la difficulté que les artisans peuvent avoir à les tailler. C'est pourquoi, afin qu'il ne reste rien à souhaiter touchant la théorie de cette science, je dois expliquer encore ici la figure des verres qui, ayant l'une de leurs superficies autant convexe, ou concave, qu'on voudra, ne laissent pas de faire que tous les rayons, qui viennent vers eux d'un même point ou parallèles, s'assemblent après en un même point; et celle des verres qui font le semblable, étant également convexes des deux côtés, ou bien la convexité de l'une de leurs superficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.

Comment on peut faire un verre autant convexe, ou concave, en l'une de ses superficies, qu'on voudra, qui rassemble à un point donné tous les rayons qui viennent d'un autre point donné

Posons, pour le premier cas, que, les points G, Y, C et F étant donnés, les rayons qui viennent du point G, ou bien qui sont parallèles à GA, se doivent assembler | au point F, après avoir 435
traversé un verre si concave, qu'Y étant le milieu de sa superfi-



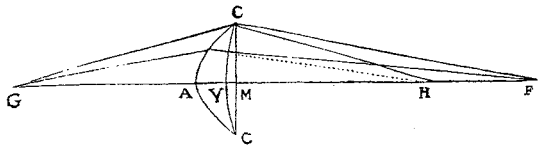
cie intérieure, l'extrémité en soit au point C; en sorte que la corde CMC et la flèche YM de l'arc CYC sont données. La question va là que, premièrement, il faut considérer de laquelle des ovales expliquées la superficie du verre YC doit avoir la figure, pour faire que tous les rayons qui, étant dedans, tendent vers un même point, comme vers H qui n'est pas encore connu, s'aillent rendre vers un autre, à savoir vers F, après en être sortis. Car il n'y a aucun effet, touchant le rapport des rayons changé par réflexion ou réfraction d'un point à un autre, qui ne puisse être causé par quelqu'une de ces ovales; et on voit aisément que celui-ci le peut être par la partie de la troisième ovale qui a tantôt été marquée 3A3, ou par celle de la même qui a été marquée 3Y3, ou enfin par la partie de la seconde qui a été marquée 2X2.

[78] Nel Discorso IX della *Diottrica*: *B Op* I 273-291 (AT VI 196-211) in cui Descartes motiva la preferenza delle lenti iperboliche.

molto convesse da un lato e concave dall'altro hanno più forza per ardere rispetto a quelle che sono ugualmente convesse da entrambe i lati, mentre invece, tutto all'opposto, queste ultime sono le migliori per i cannocchiali, dopo tutto ciò mi sono accontentato di illustrare quelle che ho creduto essere le migliori per la pratica[78], pensando alla difficoltà che gli artigiani potevano incontrare nel tagliarle[79]. Perciò, affinché non resti nulla da desiderare riguardo alla teoria di questa scienza, devo qui illustrare ancora la forma delle lenti che, avendo una delle loro superfici convessa o concava quanto si voglia, continuano a far sì che tutti i raggi che vanno verso di loro provenienti da uno stesso punto o paralleli, si riuniscano poi in uno stesso punto e devo anche illustrare la figura delle lenti che producono un effetto simile, essendo ugualmente convesse dai due lati, oppure in cui la convessità di una delle loro superfici abbia la proporzione data rispetto a quella dell'altra.

Come si può costruire una lente, convessa o concava quanto si voglia su una delle sue superfici, che raccolga in un punto dato tutti raggi che provengono da un altro punto dato

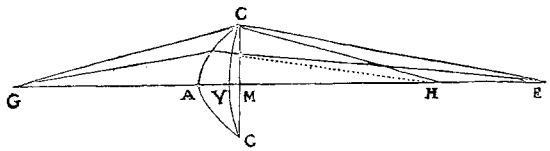
Poniamo per il primo caso che, dati i punti G, Y, C e F, i raggi che provengono dal punto G o che sono paralleli a GA
435 si debbano riunire | nel punto F, dopo aver attraversato una lente concava in modo tale che, se Y è il centro della sua super-



ficie interna, la sua estremità si trovi nel punto C, di modo che la corda CMC e la freccia YM dell'arco CYC siano date. Il problema è posto in modo che, in primo luogo, bisogna considerare quale figura delle ovali considerate debba avere la superficie della lente YC, per fare sì che tutti i raggi che all'interno tendono verso uno stesso punto, per esempio H, che non è ancora noto, si dirigano, dopo che sono usciti, verso un altro, cioè verso F. Infatti non vi è alcun effetto, riguardante il rapporto dei raggi variato dalla riflessione o dalla rifrazione da un punto a un altro, che non possa essere causato da qualcuna di queste ovali; e si vede facilmente che questo effetto può essere causato dalla parte della terza ovale che è stata sopra marcata 3A3, o da quella della stessa che è stata marcata 3Y3, o infine dalla parte della seconda che è stata marcata 2X2. E, dato che

[79] Cfr. *Diottrica*, IX, *B Op* I 291 (AT VI 211, ll. 13-18).

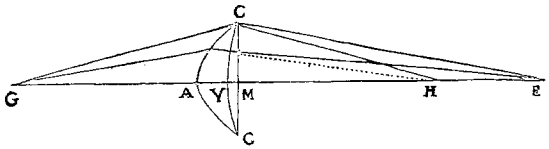
Et, parce que ces trois tombent ici sous même calcul, on doit, tant pour l'une que pour l'autre, prendre Y pour leur sommet, C pour l'un des points de leur circonférence, et F pour l'un de leurs points brûlants; après quoi il ne reste plus à chercher que le point H, qui doit être l'autre point brûlant. Et on le trouve en considérant que la différence qui est entre les lignes FY et FC, doit être à celle qui est entre les lignes HY | et HC, comme *d* est 436
à *e*, c'est-à-dire comme la plus grande des lignes qui mesurent les réfractions du verre proposé est à la moindre; ainsi qu'on peut voir manifestement de la description de ces ovales. Et parce que les lignes FY et FC sont données, leur différence l'est aussi, et, ensuite, celle qui est entre HY et HC, parce que la proportion qui est entre ces deux différences est donnée. Et de plus, à cause que YM est donnée, la différence qui est entre MH et HC l'est aussi; et enfin, parce que CM est donnée, il ne reste plus qu'à trouver MH, le côté du triangle rectangle CMH, dont on a l'autre côté CM; et on a aussi la différence qui est entre CH, la



base, et MH, le côté demandé. D'où il est aisé de le trouver. Car, si on prend *k* pour l'excès de CH sur MH, et *n* pour la longueur de la ligne CM, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH. Et après avoir ainsi <cherché> le point H, s'il se trouve plus loin du point Y que n'en est le point F, la ligne CY doit être la première partie de l'ovale du troisième genre, qui a tantôt été nommée 3A3. Mais si HY est moindre que FY, ou bien elle surpasse HF de tant, que leur différence est plus grande, à raison de la toute FY, que n'est *e*, la moindre des lignes qui mesurent les réfractions, comparée avec *d*, la plus grande: c'est-à-dire que, faisant HF = *c*, et HY = *c* + *h*, *dh* est plus grande que 2*ce* + *eh*; et lors CY doit être la | seconde partie de la même ovale du troisième genre, qui a 437
tantôt été nommée 3Y3. Ou bien *dh* est égale ou moindre que 2*ce* + *eh*: et lors CY doit être la seconde partie de l'ovale du second genre, qui a ci-dessus été nommée 2X2. Et enfin, si le point H est le même que le point F, ce qui n'arrive que lorsque FY et FC sont égales, cette ligne YC est un cercle.

Après cela, il faut chercher CAC, l'autre superficie de ce verre, qui doit être une Ellipse dont H soit le point brûlant, si on

queste tre ricadono qui sotto lo stesso calcolo, bisogna, sia per l'una che per l'altra, prendere Y come loro vertice, C per uno dei punti della loro circonferenza e F per uno dei loro punti ardenti. Dopo di che non resta che cercare il punto H, che deve essere l'altro punto ardente. E lo si trova tenendo conto del fatto che la differenza che c'è tra le linee FY e FC, deve
436 stare a quella tra le linee HY | e HC, come *d* sta a *e*, cioè come la più grande delle linee che misurano le rifrazioni della lente considerata sta alla minore, come si può vedere manifestamente dalla descrizione di queste ovali. E dato che le linee FY e FC sono date, lo è anche la loro differenza, e quindi lo è anche quella tra HY e HC, siccome è data la proporzione che c'è tra queste due differenze. E inoltre, poiché YM è dato, lo è anche la differenza che c'è tra MH e HC e infine, dato che CM è dato, non resta che trovare MH, il lato del triangolo rettangolo CMH, di cui abbiamo l'altro lato CM; e si ottiene anche la differenza che c'è tra CH, la base, e MH, il lato cercato. Da ciò



è facile ricavarlo. Infatti, se si prende *k* per quel che CH eccede MH, e *n* per la lunghezza della linea CM, si avrà $\frac{n^2}{2k} - \frac{1}{2}k$ per MH. E dopo aver cercato in questo modo il punto H, se esso si trova più lontano dal punto Y di quanto lo sia il punto F, la linea CY deve essere la prima parte dell'ovale del terzo genere che è stata sopra denominata 3A3. Ma se HY è minore di FY, oppure supera HF tanto quanto è la loro differenza, in proporzione all'intera FY, di quanto lo sia *e* – la minore delle linee che misurano le rifrazioni – comparata con *d*, che è la maggiore: cioè, ponendo HF = c e HY = $c + h$, è più grande di $2ce + eh$,
437 allora CY deve essere la | seconda parte della stessa ovale del terzo genere, che è stata sopra denominata 3Y3. Oppure dh è uguale o minore di $2ce + eh$, e allora CY deve essere la seconda parte dell'ovale di secondo genere, che è stata sopra denominata 2X2. E infine, se il punto H coincide con il punto F, il che avviene solo quando FY e FC sono uguali, questa linea YC è un cerchio.

Dopo di che, bisogna cercare CAC, l'altra superficie di questa lente, che deve essere un'ellisse di cui H è il punto ardente,

suppose que les rayons qui tombent dessus soient parallèles, et lors il est aisé de la trouver. Mais si on suppose qu'ils viennent du point G, ce doit être la première partie d'une ovale du premier genre, dont les deux points brûlants soient G et H, et qui passe par le point C: d'où on trouve le point A pour le sommet de cette ovale, en considérant que GC doit être plus grande que GA d'une quantité qui soit à celle dont HA surpasse HC, comme d à e. Car, ayant pris k pour la différence qui est entre CH et HM, si on suppose x pour AM, on aura $x - k$ pour la différence qui est entre AH et CH: puis, si on prend g pour celle qui est entre GC et GM, qui sont données, on aura $g + x$ pour celle qui est entre GC et GA; et parce que cette dernière, $g + x$, est à l'autre, $x - k$, comme d est à e, on a:

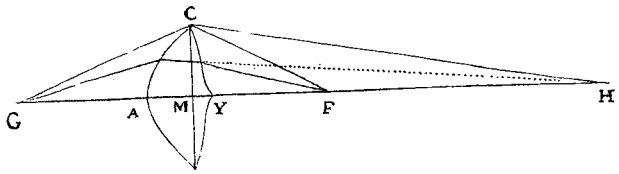
$$ge + ex = dx - dk$$

ou bien $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour la ligne x ou AM, par laquelle on détermine le point A qui était cherché.

Comment on peut faire un verre qui ait le même effet que le précédent, et que la convexité de l'une de ses superficies ait la proportion donnée avec celle de l'autre

Posons maintenant, pour l'autre cas, qu'on ne donne que les points G, C et F, avec la proportion qui est | entre les lignes AM 438
et YM, et qu'il faille trouver la figure du verre ACY, qui fasse que tous les rayons qui viennent du point G s'assemblent au point F.

On peut derechef ici se servir de deux ovales, dont l'une, AC, ait G et H pour ses points brûlants, et l'autre, CY, ait F et H pour les siens. Et pour les trouver, premièrement, supposant le point H, qui est commun à toutes deux, être connu, je cherche AM par les trois points G, C, H, en la façon tout maintenant expliquée: à savoir, prenant k pour la différence qui est entre CH et HM, et



g pour celle qui est entre GC et GM; et AC étant la première partie de l'ovale du premier genre, j'ai $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour AM. Puis je cherche aussi MY par les trois points F, C, H, en sorte que CY soit la première partie d'une ovale du troisième genre: et prenant y pour MY, et f pour la différence qui est entre CF et FM, j'ai $f + y$ pour celle qui est entre CF et FY: puis, ayant déjà k pour celle qui est entre CH et HM, j'ai $k + y$ pour celle qui est entre CH et HY, que je sais devoir être à $f + y$ comme e est à d, à cause

se si suppone che i raggi che cadono su di essa siano paralleli, e allora è facile trovarla. Ma, se si suppone che essi provengano dal punto G, questa deve essere la prima parte di un'ovale del primo genere, i cui due punti ardenti siano G e H e che passa per il punto C: di qui si trova il punto A come vertice di questa ovale, considerando che GC deve superare GA di una quantità che stia a quella di cui HA supera HC, come d sta a e. Infatti, avendo preso k per la differenza che c'è tra CH e HM, se si pone x per AM si avrà $x - k$ per la differenza tra AH e CH, poi, se si prende g per la differenza che c'è tra GC e GM, che sono dati, si avrà $g + x$ per la differenza tra GC e GA, e dato che quest'ultima, $g + x$, sta alla precedente, $x - k$, come d sta a e, si ha:

$$ge + ex = dx - dk$$

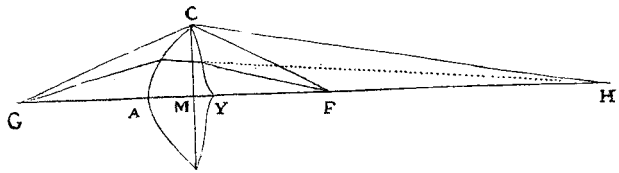
ossia $\frac{ge + dk}{d - e}$ per la linea x o AM, per mezzo della quale si determina il punto A cercato.

Come si può costruire una lente che abbia lo stesso effetto della precedente e in cui la convessità di una delle sue superfici abbia la proporzione data con quella dell'altra

Poniamo ora, per l'altro caso, che siano dati solo i punti G, C e F, con la proporzione | tra le linee AM e YM, e che si debba trovare la figura della lente ACY, che fa sì che tutti i raggi provenienti dal punto G si riuniscano nel punto F.

438

Ci si può qui nuovamente servire di due ovali, di cui una, AC, abbia G e H come punti ardenti e l'altra, CY, abbia F e H come punti ardenti. E innanzitutto, per trovarli, supponendo sia noto il punto H, che è comune a tutt'e due, cerco AM per mezzo dei tre punti G, C, H, nel modo or ora spiegato: cioè, prendendo k per la differenza che c'è tra CH e HM, e g per



quella che c'è tra GC e GM, ed essendo AC la prima parte dell'ovale di primo genere, ottengo $\frac{ge + dk}{d - e}$ per AM. Poi cerco anche MY per mezzo dei tre punti F, C, H, di modo che CY sia la prima parte di un'ovale di terzo genere, e prendendo y per MY, e f per la differenza tra CF e FM, ottengo $f + y$ per quella che c'è tra CF e FY. Poi, avendo già k per la differenza che c'è tra CH e HM, ottengo $k + y$ per quella che c'è tra CH e HY, che io so dover stare a $f + y$ come e sta a d, a causa del-

de l'ovale du troisième genre. D'où je trouve que y ou MY est $\frac{fe-dk}{d-e}$; puis, joignant ensemble les deux quantités trouvées pour AM et MY, je trouve $\frac{ge+fe}{d-e}$ pour la toute AY. D'où il suit que, de quelque côté que soit supposé le point H, cette ligne AY est | toujours composée d'une quantité qui est à celle dont les 439
deux ensemble, GC et CF, surpassent la toute GF, comme e, la moindre des deux lignes qui servent à mesurer les réfractions du verre proposé, est à $d-e$, la différence qui est entre ces deux lignes: ce qui est un assez beau théorème. Or, ayant ainsi la toute AY, il la faut couper selon la proportion que doivent avoir ses parties, AM et MY; au moyen de quoi, parce qu'on a déjà le point M, on trouve aussi les points A et Y et, ensuite, le point H, par le problème précédent. Mais, auparavant, il faut regarder si la ligne AM, ainsi trouvée, est plus grande que $\frac{ge}{d-e}$, ou plus petite, ou égale. Car, si elle est plus grande, on apprend de là que la courbe AC doit être la première partie d'une ovale du premier genre, et CY la première d'une du troisième, ainsi qu'elles ont été ici supposées: au lieu que, si elle est plus petite, cela montre que c'est CY qui doit être la première partie d'une ovale du premier genre, et que AC doit être la première d'une du troisième: enfin, si AM est égale à $\frac{ge}{d-e}$, les deux courbes AC et CY doivent être deux hyperboles.

On pourrait étendre ces deux problèmes à une infinité d'autres cas, que je ne m'arrête pas à déduire, à cause qu'ils n'ont eu aucun usage en la Dioptrique.

On pourrait aussi passer outre et dire, lorsque l'une des superficies du verre est donnée, pourvu qu'elle ne soit que toute plate, ou composée de sections coniques ou des cercles, comment on doit faire son autre superficie, afin qu'il transmette tous les rayons d'un point donné à un autre point aussi donné. Car ce n'est rien | de plus difficile que ce que je viens d'expliquer, ou 440
plutôt c'est chose beaucoup plus facile, à cause que le chemin en est ouvert. Mais j'aime mieux que d'autres le cherchent, afin que, s'ils ont encore un peu de peine à le trouver, cela leur fasse d'autant plus estimer l'invention des choses qui sont ici démontrées.

Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes décrites sur une superficie plate, à celles qui se décrivent dans un espace qui a trois dimensions

Au reste, je n'ai parlé, en tout ceci, que des lignes courbes qu'on peut décrire sur une superficie plate, mais il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à toutes celles qu'on saurait imaginer être formées par le mouvement régulier des points de quelque corps, dans un espace qui a trois dimensions. A savoir, en tirant deux perpendiculaires, de chacun des points de la ligne courbe qu'on veut considérer, sur deux plans qui s'entrecoupent à angles droits, l'une sur l'un et l'autre sur l'autre. Car les extrémités de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes,

l'ovale di terzo genere. Di qui trovo che y o MY è $\frac{fe-dk}{d-e}$. Poi, congiungendo le due quantità trovate per AM e MY trovo $\frac{ge+fe}{d-e}$ per l'intera AY. Di qui segue che, qualunque sia il lato su
439 cui sia posto il punto H, questa linea AY è | sempre composta di una quantità che sta a quella di cui le due GC et CF prese insieme superano l'intera GF, come e, la minore delle due linee che servono a misurare le rifrazioni della lente considerata, sta a $d-e$, che è la differenza tra queste due linee: il che costituisce un teorema assai bello. Ora, avendo l'intera AY, bisogna tagliarla secondo la proporzione che devono avere le sue parti AM e MY, con ciò, dato che si ha già il punto M, si trovano anche i punti A e Y e, poi, il punto H, mediante il problema precedente. Ma, prima, bisogna considerare se la linea AM così trovata è più grande o più piccola, o uguale a $\frac{ge}{d-e}$. Infatti, se è più grande, si conosce da ciò che la curva AC deve essere la prima parte di un'ovale del primo genere, e CY la prima di una del terzo, così come esse sono state qui supposte: al contrario, se è più piccola, ciò mostra che è CY a dover essere la prima parte di un'ovale di primo genere, e che AC deve essere la prima di una del terzo, infine, se AM è uguale a $\frac{ge}{d-e}$, le due curve AC e CY devono essere due iperboli.

Si potrebbero estendere questi due problemi a un'infinità di altri casi, che io non mi soffermo a dedurre, poiché non hanno avuto alcuna applicazione nella Diottrica.

Si potrebbe anche andare avanti e dire, quando è data una delle superfici della lente, supposto che essa non sia tutta piatta o composta di sezioni coniche o di cerchi, in che maniera si deve costruire l'altra sua superficie, affinché essa trasmetta tutti i raggi da un punto dato a un altro punto anch'esso dato.
440 Infatti ciò non è affatto | più difficile di quel che ho appena spiegato o, anzi, è molto più facile poiché il cammino è aperto. Ma io preferisco che siano altri a cercarlo, affinché, se faranno appena un po' di fatica a trovarlo, ciò faccia apprezzare loro ancora di più la scoperta delle cose qui dimostrate.

Come è possibile applicare ciò che qui è stato detto delle linee curve descritte su una superficie piana, a quelle che si descrivono nello spazio a tre dimensioni

Del resto, finora ho parlato qui solo di linee curve che si possono descrivere su una superficie piana, ma è facile riferire tutto ciò che ne ho detto a tutte quelle che si è capaci di immaginare come formate dal movimento regolare dei punti di un qualche corpo, in uno spazio che ha tre dimensioni. Cioè, tracciando due perpendicolari, da ciascuno dei punti della linea curva che si voglia considerare, su due piani che si tagliano l'un l'altro ad angoli retti, una sul primo e l'altra sul secondo. Infatti le estremità di queste perpendicolari descrivono due

une sur chacun de ces plans, desquelles on peut, en la façon ci-dessus expliquée, déterminer tous les points et les rapporter à ceux de la ligne droite qui est commune à ces deux plans: au moyen de quoi, ceux de la courbe qui a trois dimensions sont entièrement déterminés. Même, si on veut tirer une ligne droite qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angles droits les deux lignes courbes qui y sont, aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné. Car, ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux | plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi je pense 441
n'avoir rien omis des éléments qui sont nécessaires pour la connaissance des lignes courbes. |

altre linee curve, una su ciascuno di questi piani, per mezzo delle quali si possono determinare nel modo sopra spiegato tutti i punti e riferirli a quelli della linea retta che è comune a questi due piani; e grazie a ciò quelli della curva tridimensionale sono interamente determinati. Analogamente, se si vuole tracciare una linea retta che tagli questa curva nel punto dato ad angoli retti, bisogna solo tracciare due altre linee rette nei due piani, una in ciascun piano, che tagliano ad angoli retti le due linee curve che lì si trovano , nei due punti dove cadono le perpendicolari che giungono da questo punto dato. Infatti, avendo innalzato altri due piani, uno su ciascuna di queste linee rette, che taglia ad angoli retti il piano su cui essa si trova
441 si avrà l'intersezione di questi due | piani per la linea retta cercata. Penso così di non avere omesso nessuno degli elementi che sono necessari per la conoscenza delle linee curve. |

LIVRE TROISIEME 442

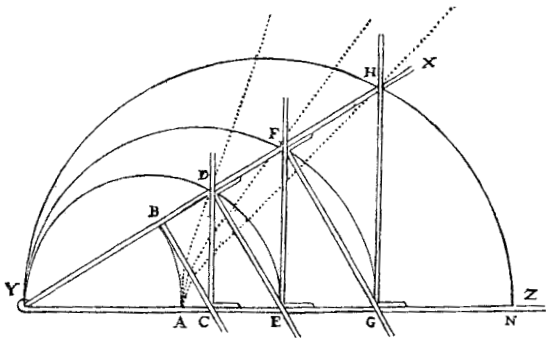
De la construction des Problèmes qui sont solides ou plus que solides

De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque problème

Encore que toutes les lignes courbes, qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier, doivent être reçues en la Géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre, pour la construction de chaque problème; mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même, il est à remarquer que, par les plus simples, on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du Problème proposé plus facile, mais principalement celles qui sont du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Exemple touchant l'invention de plusieurs moyennes proportionnelles

Comme, par exemple, je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la | démonstration soit plus évidente, que d'y 443
employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument



[80] Cfr. *Geometria*, II, *B Op* I 521 (AT VI 389, l. 17 sgg.).

442

LIBRO TERZO

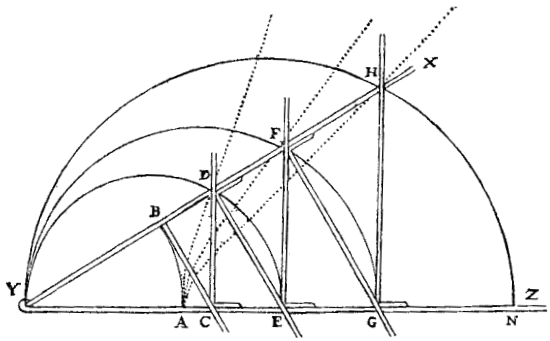
La costruzione dei problemi solidi, o più che solidi

Di quali linee curve ci si può servire per la costruzione di ogni problema

Sebbene tutte le linee curve, che possono essere descritte mediante qualche movimento regolare[80], debbano essere accolte in geometria, ciò non vuol dire che sia permesso di servirsi indifferentemente della prima che si incontra per la costruzione di ogni problema; ma bisogna aver cura di scegliere sempre la più semplice che permetta di risolverlo. E inoltre si deve osservare che, fra le più semplici, non bisogna solo intendere quelle che possono essere descritte più facilmente, né quelle che rendono la costruzione o la dimostrazione del problema proposto più facile, ma principalmente quelle che sono del genere più semplice che possa servire a determinare la quantità ricercata.

Esempio relativo alla determinazione di più medie proporzionali

Così, per esempio, non credo che ci sia alcun modo più facile, per trovare tutte le medie proporzionali che si vogliono, né la
443 cui | dimostrazione sia più evidente, che quello di usare le linee curve che sono descritte con lo strumento XYZ spiegato sopra[81].



[81] Cfr. *Geometria*, II, *B Op* I 523-525 (AT VI 391, l. 1 - 392, l. 14).

XYZ ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA et YE, il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE: et parce que ce cercle coupe la courbe AD au point D, YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la démonstration se voit à l'œil, par la seule application de cet instrument sur la ligne YD: car, comme YA, ou YB qui lui est égale, est à YC, ainsi YC est à YD, et YD à YE.

Tout de même, pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG, ou pour en trouver six entre YA et YN, il ne faut que tracer le cercle YFG, qui, coupant AF au point F, détermine la ligne droite YF, qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN, qui, coupant AH au point H, détermine YH, l'une des six: et ainsi des autres.

Mais, parce que la ligne courbe AD est du second | genre, et 444
qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques, qui sont du premier; et aussi parce qu'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles, par des lignes qui ne sont pas de genres si composés que sont AF et AH, ce serait une faute en Géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de ligne plus simple que sa nature ne permet.

De la nature des Equations

Or, afin que je puisse ici donner quelques règles pour éviter l'une et l'autre de ces deux fautes, il faut que je dise quelque chose en général de la nature des Equations: c'est-à-dire des sommes composées de plusieurs termes, partie connus et partie inconnus, dont les uns sont égaux aux autres, ou, plutôt, qui, considérés tous ensemble, sont égaux à rien: car ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte.

Combien il peut y avoir de racines en chaque Equation

Sachez donc qu'en chaque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité: car, par exemple, si on suppose x égal à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux Equations,

$$x - 2 = 0 \quad \text{et} \quad x - 3 = 0,$$

l'une par l'autre, on aura

$$xx - 5x + 6 = 0 \quad \text{ou bien} \quad xx = 5x - 6,$$

[82] Cfr. *A X****, febraio o marzo 1638, B 150, p. 555 (AT I 460, ll. 13-17).
[83] Cfr. *Geometria*, I, *B Op* I 497 (AT VI 372, ll. 18-22).
[84] Cfr. *A Mersenne*, fine dicembre 1637, B 136, p. 477 (AT I 479, l. 17-480, l.4). Questo

Infatti, volendo trovare due medie proporzionali tra YA e YE, basta descrivere un cerchio il cui diametro sia YE; e dal momento che questo cerchio taglia la curva AD nel punto D, YD è una delle medie proporzionali cercate. La dimostrazione si vede ad occhio, attraverso la sola applicazione di questo strumento sulla linea YD; infatti, come YA, o YB che gli è uguale, sta a YC, così YC sta a YD, e YD a YE.

Analogamente, per trovare quattro medie proporzionali tra YA e YG, o per trovarne sei tra YA e YN, basta tracciare il cerchio YFG che, tagliando AF nel punto F, determina la linea retta YF, che è uno di queste quattro proporzionali; o YHN che, tagliando AH nel punto H, determina YH, una delle sei; e così via per le altre.

444 Ma, dato che la linea curva AD è del secondo | genere, e si possono trovare due medie proporzionali con le sezioni coniche, che appartengono al primo; e dato che si possono anche trovare quattro o sei medie proporzionali con delle linee che non sono di un genere tanto composto quanto quello di AF e AH, sarebbe un errore in geometria usarle[82]. E, d'altro canto, sarebbe anche un errore affaticarsi inutilmente nel voler costruire qualche problema con un genere di linea più semplice di quanto permetta la sua natura.

La natura delle equazioni

Ora, perché io possa dare qualche regola per evitare l'uno o l'altro di questi due errori, bisogna che io dica qualche cosa in generale sulla natura delle equazioni, cioè delle somme composte da più termini, in parte noti e in parte incogniti, dei quali gli uni sono uguali agli altri o, piuttosto che, considerati tutti insieme, sono uguali a zero[83]: infatti spesso sarà meglio considerarli in questo modo.

Quante radici ci possono essere in ogni equazione[84]

Sappiate dunque che in ogni equazione, quante dimensioni ha la quantità incognita, altrettante possono essere le diverse radici, cioè i valori di questa quantità: infatti, per esempio, se si suppone x uguale a 2, oppure $x - 2$ uguale a zero; e di nuovo $x = 3$, oppure $x - 3 = 0$, moltiplicando queste due equazioni,

$$x - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad x - 3 = 0,$$

l'una per l'altra, avremo

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{o anche} \quad x^2 = 5x - 6,$$

problema sarà richiamato da Descartes per rispondere a Didier Dounot (1574-1640) tramite Mersenne: cfr. *A Mersenne*, 9 febbraio 1639, B 202, p. 985 (AT II 503, ll. 6-11). Ma cfr. anche AT II 509n. e CM VIII 307n.

qui est une Equation en laquelle la quantité x vaut 2, et tout ensemble vaut 3. Que si, derechef, on fait | $x - 4 = 0$, et qu'on 445
multiplie cette somme par $xx - 5x + 6 = 0$, on aura

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0,$$

qui est une autre Equation, en laquelle x, ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3 et 4.

Quelles sont les fausses racines

Mais souvent il arrive que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien: comme, si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0,$$

pour une Equation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies, qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une Equation, lorsqu'on connaît quelqu'une de ses racines

Et on voit évidemment, de ceci, que la somme d'une Equation qui contient plusieurs racines, peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit; ou plus la valeur de l'une des fausses. Au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine

Et réciproquement, que si la somme d'une Equation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, + ou – quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme: cette dernière

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0,$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par | $x - 4$, et par 446
$x + 5$; mais non point par x + ou – aucune autre quantité: ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

Combien il peut y avoir de vraies racines en chaque Equation

On connaît aussi, de ceci, combien il peut y avoir de vraies racines, et combien de fausses, en chaque Equation. A savoir: il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et – s'y trouvent de fois être changés; et autant de fausses qu'ils s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes –, qui s'entresuivent. Comme, en la dernière, à cause qu'après + x^4 il y a – $4x^3$, qui est un changement du signe + en –; et après – $19xx$ il y a + $106x$, et après + $106x$ il y a – 120, qui sont encore deux autres changements, on

[85] Si tratta delle radici negative.
[86] Si tratta delle radici positive.
[87] Sulla scelta di Descartes cfr. la nota in AT VI 734 (*Appendice*) relativa alla p. 446.

che è un'equazione dove la quantità x vale 2, e allo stesso
445 tempo vale 3. E se, di nuovo, si pone | $x - 4 = 0$, e si moltiplica questa somma per $x^2 - 5x + 6 = 0$, si avrà

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

che è un'altra equazione, dove x, avendo tre dimensioni, ha anche tre valori, che sono 2, 3, e 4.

Quali sono le radici false

Ma spesso succede che alcune di queste radici siano false[85], o minori di zero; così, se si suppone che x indichi anche il difetto di una quantità, che sia 5, si ha $x + 5 = 0$, che essendo moltiplicato per $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, dà

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

un'equazione dove ci sono quattro radici, cioè tre vere[86], che sono 2, 3, 4 e una falsa che è 5.

Come si può diminuire il numero delle dimensioni di un'equazione, quando si conoscono alcune delle sue radici

E si vede evidentemente, da qui, che la somma di un'equazione che contiene più radici, può essere sempre divisa per un binomio composto dalla quantità incognita, meno il valore di una delle radici vere, qualunque sia; o più il valore di una di quelle false. In questo modo si diminuiscono di tanto le sue dimensioni.

Come si può esaminare se una quantità data è il valore di una radice

E reciprocamente, se la somma di un'equazione non può essere divisa per un binomio composto dalla quantità incognita, + o – qualche altra quantità, ciò testimonia che questa altra quantità non è il valore di nessuna delle sue radici. Ad esempio, quest'ultima:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

446 può ben essere divisa per $x - 2$, e per $x - 3$, e per | $x - 4$, e per[87] $x + 5$; ma non per x + o – qualche altra quantità: ciò dimostra che può avere solo le quattro radici 2, 3, 4 e 5.

Quante radici vere possono esservi in ogni equazione

Si vede anche, da ciò, quante possono essere le radici vere, e quante le false, in ogni equazione. Ovvero: possono essercene di vere tante quante volte i segni + e – si trovano scambiati; e tante false quante volte si trovano due segni +, o due segni –, che si susseguono[88]. Ad esempio, nell'ultima, poiché dopo $+ x^4$ c'è $- 4x^3$, che è un cambiamento del segno + in –; e dopo $- 19x^2$ c'è $+ 106x$, e dopo $+ 106x$ c'è $- 120$, che sono ancora

[88] La regola dei segni proposta qui da Descartes fu contestata da Roberval: cfr. *Carcavi a Descartes*, 9 luglio 1649, B 703, p. 2709 (AT V 374, ll. 1-4). Descartes risponderà nella lettera *A Carcavi*, 17 agosto 1649, B 705, pp. 2737-2739 (AT V 397, ll. 5-18). Carcavi replicherà il 24 settembre 1649: B 711, p. 2757 (AT V 416, l. 24-417, l. 25), adducendo esempi erronei (cfr. AT V 424n-425n.).

connaît qu'il y a trois vraies racines; et une fausse, à cause que les deux signes –, de $4x^3$ et $19xx$, s'entresuivent.

Comment on fait que les fausses racines d'une Equation deviennent vraies, et les vraies fausses

De plus, il est aisé de faire, en une même Equation, que toutes les racines qui étaient fausses deviennent vraies, et, par même moyen, que toutes celles qui étaient vraies deviennent fausses: à savoir, en changeant tous les signes + ou – qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième, ou autres places qui se désignent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième, et semblables qui se désignent par les nombres impairs. Comme, si, au lieu de

$$+ x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0,$$

on écrit

$$+ x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0,$$

on a une Equation en laquelle il n'y a qu'une vraie | racine, qui 447
est 5, et trois fausses, qui sont 2, 3 et 4.

Comment on peut augmenter ou diminuer les racines d'une Equation, sans les connaître

Que si, sans connaître la valeur des racines d'une Equation, on la veut augmenter ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu, en supposer un autre, qui soit plus ou moins grand de cette même quantité, et le substituer partout en la place du premier. Comme, si on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0,$$

il faut prendre y au lieu d'x, et penser que cette quantité y est plus grande qu'x de 3, en sorte que $y - 3$ est égal à x; et au lieu d'xx, il faut mettre le carré d'$y - 3$, qui est $yy - 6y + 9$; et au lieu d'x^3, il faut mettre son cube, qui est $y^3 - 9yy + 27y - 27$; et enfin, au lieu d'x^4, il faut mettre son carré de carré, qui est $y^4 - 12y^3 + + 54yy - 108y + 81$. Et ainsi, décrivant la somme précédente en substituant partout y au lieu d'x, on a

$$\begin{array}{lllll}
y^4 & - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
 & + 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
 & & - 19yy & + 114y & - 171 \\
 & & & - 106y & + 318 \\
 & & & & - 120 \\
\hline
y^4 & - 8y^3 & - 1yy & + 8y & * \; = 0
\end{array}$$

[89] Questa trattazione fu duramente criticata da Jean de Beaugrand (1584-1640), che accusò Descartes di plagio nei confronti di François Viète (1540-1603), citando l'opera *De aequationum recognitione et emendatione*, Parisiis, ex typogr. J. Laquehay, 1615: cfr. *Beaugrand à Mersenne*, mars 1638, CM VII, 87-103 (pubblicata anche in AT V 504-512). Descartes ebbe

due altri cambiamenti, si vede che ci sono tre radici vere e una falsa, perché i due segni – di $4x^3$ e $19x^2$ si susseguono.

Come far sì che le radici false di un'equazione diventino vere, e le vere false

Inoltre, è facile fare in modo che, in una stessa equazione, tutte le radici che erano false diventino vere, e, nello stesso modo, che tutte quelle che erano vere diventino false: cioè cambiando tutti i segni + o – che sono nel secondo, quarto, sesto, o negli altri posti che si indicano con i numeri pari, senza cambiare quelli del primo, terzo, quinto, e via di seguito per i posti che si indicano con i numeri dispari. Ad esempio se, al posto di:

$$+ x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

si scrive

$$+ x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

447 si ha un'equazione dove c'è un'unica | radice vera, che è 5, e tre false, che sono 2, 3 e 4.

Come si possono aumentare o diminuire le radici di un'equazione senza conoscerle[89]

Se, senza conoscere il valore delle radici di un'equazione, la si vuole aumentare o diminuire di una quantità nota, non bisogna far altro che supporre, in luogo del termine incognito, un altro termine, che sia maggiore o minore di quella stessa quantità, e sostituirlo ovunque al posto del primo. Ad esempio, se vogliamo aumentare di 3 la radice di quest'equazione

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

bisogna prendere y al posto di x, e pensare che questa quantità y è più grande di x di 3, di modo che $y - 3$ è uguale a x; e al posto di x^2, bisogna mettere il quadrato di $y - 3$, che è $y^2 - 6y + 9$; e al posto di x^3, bisogna mettere il suo cubo, che è $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; e infine, al posto di x^4, bisogna mettere il suo quadrato del quadrato, che è $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. E così, riscrivendo la somma precedente dove si sostituisce dappertutto y al posto di x, si ha[90]

$$\begin{array}{lllll}
y^4 & - 12y^3 & + 54y^2 & - 108y & + 81 \\
 & + 4y^3 & - 36y^2 & + 108y & - 108 \\
 & & - 19y^2 & + 114y & - 171 \\
 & & & - 106y & + 318 \\
 & & & & - 120 \\
\hline
y^4 & - 8y^3 & - 1y^2 & + 8y & * \quad = 0
\end{array}$$

comunicazione dell'accusa da Mersenne e si difese nella lettera *A Mersenne*, 31 marzo 1638, B 160, pp. 615-617 (AT II 82, ll. 5-14).

[90] Descartes usa l'asterisco per indicare che la somma dei termini incolonnati è zero.

ou bien

$$y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0,$$

où la vraie racine, qui était 5, est maintenant 8, à cause du nombre trois qui lui est ajouté. |

Que si on veut, au contraire, diminuer de trois la racine de 448
cette même Equation, il faut faire

$$y + 3 = x \qquad \text{et} \qquad yy + 6y + 9 = xx.$$

et ainsi des autres. De façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0,$$

on met

$$\begin{array}{lllll} y^4 & + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\ & + 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\ & & - 19yy & - 114y & - 171 \\ & & & - 106y & - 318 \\ & & & & - 120 \\ \hline y^4 & + 16y^3 & + 71yy & - 4y & - 420 \end{array} = 0\,.$$

Qu'en augmentant les vraies racines, on diminue les fausses, et au contraire

Et il est à remarquer qu'en diminuant les vraies racines d'une Equation, on diminue les fausses de la même quantité, ou, au contraire, en diminuant les vraies, on augmente les fausses; et que, si on diminue, soit les unes, soit les autres, d'une quantité qui leur soit égale, elles deviennent nulles, et que, si c'est d'une quantité qui les surpasse, de vraies elles deviennent fausses, ou de fausses, vraies. Comme ici, en augmentant de 3 la vraie racine, qui était 5, on a diminué de 3 chacune des fausses, en sorte que celle qui était 4 n'est plus que 1, et celle qui était 3 est nulle, et que celle qui était 2 est devenue vraie et est 1, à cause que – 2 + 3 fait + 1. C'est pourquoi, en cette Equation,

$$y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0,$$

il n'y a plus que 3 racines, entre lesquelles il y en a | deux qui sont 449
vraies, 1 et 8, et une fausse, qui est aussi 1. Et en cette autre:

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0\,,$$

il n'y en a qu'une vraie, qui est 2, à cause que + 5 – 3 fait +2, et trois fausses, qui sont 5, 6 et 7.

Comment on peut ôter le second terme d'une Equation

Or, par cette façon de changer la valeur des racines sans les connaître, on peut faire deux choses, qui auront, ci-après,

[91] AT VI 448 riporta, per errore, «… en diminuant … / diminuendo», evidente refuso non presente in *Descartes 1637*.

o altrimenti

$$y^3 - 8y^2 - 1y + 8 = 0,$$

dove la radice vera, che era 5, adesso è 8, a causa del numero tre che è stato aggiunto. |

448 Se, al contrario, vogliamo diminuire di tre la radice di questa stessa equazione, bisogna porre

$$y + 3 = x \qquad \text{e} \qquad y^2 + 6y + 9 = x^2.$$

e così anche per le altre, di modo che al posto di

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

si mette

$$\begin{array}{lllll} y^4 & + 12y^3 & + 54y^2 & + 108y & + 81 \\ & + 4y^3 & + 36y^2 & + 108y & + 108 \\ & & - 19y^2 & - 114y & - 171 \\ & & & - 106y & - 318 \\ & & & & - 120 \\ \hline y^4 & + 16y^3 & + 71y^2 & - 4y & - 420 \end{array} = 0\,.$$

Aumentando le radici vere, si diminuiscono le false, e viceversa

Bisogna notare che aumentando[91] le radici vere di un'equazione, si diminuiscono le false della stessa quantità o, al contrario, diminuendo le vere, si aumentano le false; e se si diminuiscono sia le une che le altre di una quantità uguale ad esse, diventano nulle, e se si diminuiscono di una quantità maggiore di esse, da vere diventano false, o da false diventano vere. Ad esempio qui, aumentando di 3 la radice vera, che era 5, si è diminuita di 3 ogni radice falsa, in modo che quella che era 4 è diventata 1, e quella che era 3 è nulla, e che quella che era 2 è diventata vera ed è 1, poichè – 2 + 3 fa + 1. Ecco perché, in questa equazione,

$$y^3 - 8y^2 - 1y + 8 = 0,$$

449 ci sono solo 3 radici, tra le quali ce ne sono | due vere, 1 e 8, e una falsa, che è ancora 1. E in quest'altra:

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0\,,$$

ce n'è una sola vera, che è 2, perché + 5 – 3 fa + 2, e tre false, che sono 5, 6 e 7.

Come si può elidere il secondo termine di un'equazione[92]

Ora, con questo modo di cambiare il valore delle radici senza conoscerle, si possono fare due cose, che avranno, qui di

[92] Anche questo passo della *Geometria* è criticato nella lettera sopra citata (nota n. 89): *Beaugrand à Mersenne*, mars 1638, AT V 506-507.

quelque usage: la première est qu'on peut toujours ôter le second terme de l'Equation qu'on examine: à savoir en diminuant les vraies racines de la quantité connue de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si, l'un de ces termes étant marqué du signe +, l'autre est marqué du signe –, ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le signe +, ou tous deux le signe –. Comme, pour ôter le second terme de la dernière Equation, qui est

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0\,,$$

ayant divisé 16 par 4, à cause des 4 dimensions du terme y^4, il vient derechef 4. C'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, et j'écris

$$\begin{array}{lllll}
z^4 & -16z^3 & +96zz & -256z & +256 \\
 & +16z^3 & -192zz & +768z & -1024 \\
 & & +71zz & -568z & +1136 \\
 & & & -4z & +16 \\
 & & & & -420 \\
\hline
z^4 & * & -25zz & -60z & -36 \;= 0
\end{array}$$

où la vraie racine, qui était 2, est 6, à cause qu'elle | est augmentée de 4, et les fausses, qui étaient 5, 6 et 7, ne sont plus que 1, 2 et 3, à cause qu'elles sont diminuées, chacune de 4. 450

Tout de même, si on veut ôter le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} \Big\} \; xx - 2a^3x + a^4 = 0,$$

parce que, divisant $2a$ par 4, il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$, et écrire

$$\begin{array}{lllll}
z^4 & +2az^3 & +\frac{3}{2}aazz & +\frac{1}{2}a^3z & +\frac{1}{16}a^4 \\
 & -2az^3 & -3aazz & -\frac{3}{2}a^3z & -\frac{1}{4}a^4 \\
 & & +2aazz & +2a^3 & +\frac{1}{2}a^4 \\
 & & -cc & -acc & -\frac{1}{4}aacc \\
 & & & -2a^3 & -a^4 \\
 & & & & +a^4 \\
\hline
z^4 & * & +\frac{1}{2}aazz & -a^3z & +\frac{5}{16}a^4 \;= 0 \\
 & & -cc & -acc & -\frac{1}{4}aacc
\end{array}$$

et, si on trouve après la valeur de z, en lui ajoutant $\frac{1}{2}a$, on aura celle de x.

seguito, un qualche uso: la prima è che si può sempre elidere il secondo termine dell'equazione che si esamina, cioè sottraendo alle radici vere il termine noto di questo secondo termine diviso per il numero delle dimensioni del primo termine, nel caso in cui uno di questi termini è preceduto dal segno + e l'altro dal segno –; oppure aumentandolo della stessa quantità, se hanno tutti e due il segno +, o tutti e due il segno –. Ad esempio, per elidere il secondo termine dell'ultima equazione, che è

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0\,,$$

avendo diviso 16 per 4, in virtù delle 4 dimensioni del termine y^4, si ottiene di nuovo 4. Ecco perché pongo $z - 4 = y$, e scrivo

$$\begin{array}{lllll}
z^4 & -16z^3 & +96z^2 & -256z & +256 \\
 & +16z^3 & -192z^2 & +768z & -1024 \\
 & & +71z^2 & -568z & +1136 \\
 & & & -4z & +16 \\
 & & & & -420 \\
\hline
z^4 & * & -25z^2 & -60z & -36 \quad = 0
\end{array}$$

450 dove la radice vera, che era 2, è 6, perché | è aumentata di 4, e le false, che erano 5, 6 e 7, sono diventate 1, 2 e 3 perché sono diminuite ognuna di 4.

Parimenti, se vogliamo elidere il secondo termine di

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0,$$

dal momento che, dividendo $2a$ per 4, si ottiene $\frac{1}{2}a$, bisogna porre $z + \frac{1}{2}a = x$, e scrivere

$$\begin{array}{lllll}
z^4 & +2az^3 & +\frac{3}{2}a^2z^2 & +\frac{1}{2}a^3z & +\frac{1}{16}a^4 \\
 & -2az^3 & -3a^2z^2 & -\frac{3}{2}a^3z & -\frac{1}{4}a^4 \\
 & & +2a^2z^2 & +2a^3z & +\frac{1}{2}a^4 \\
 & & -c^2z^2 & -ac^2z & -\frac{1}{4}a^2c^2 \\
 & & & -2a^3z & -a^4 \\
 & & & & +a^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$z^4 + (\tfrac{1}{2}a^2 - c^2)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \tfrac{5}{16}a^4 - \tfrac{1}{4}a^2c^2 \quad = 0$$

e, se dopo si trova il valore di z, aggiungendogli $\frac{1}{2}a$, si avrà quello di x.

Comment on peut faire que toutes les fausses racines d'une Equation deviennent vraies, sans que les vraies deviennent fausses

La seconde chose qui aura ci-après quelque usage, est qu'on peut toujours, en augmentant la valeur des vraies racines d'une quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deviennent toutes vraies, en sorte qu'il n'y ait point deux signes +, ou deux signes –, qui s'entresuivent; et, outre cela, que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second. Car, encore que cela se fasse lorsque ces fausses racines sont inconnues, il est aisé néanmoins | de juger à peu près de leur grandeur, et de 451
prendre une quantité qui les surpasse d'autant ou de plus qu'il n'est requis à cet effet. Comme si on a

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0;$$

en faisant $y - 6n = x$, on trouvera

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
y^6 - 36n & y^5 + 540nn & y^4 - 4320n^3 & y^3 + 19440n^4 & y^2 - 46656n^5 & y + 46656n^6 \\
+\ n & -\ 30nn & +\ 360n^3 & -\ 2160n^4 & +6480n^5 & -7776n^6 \\
 & -\ 6nn & +\ 144n^3 & -\ 1296n^4 & +5184n^5 & -7776n^6 \\
 & & +\ 36n^3 & -\ 648n^4 & +3888n^5 & -7776n^6 \\
 & & & -\ 216n^4 & +2592n^5 & -7776n^6 \\
 & & & & +1296n^5 & -7776n^6 \\
 & & & & & -7776n^6 \\
\hline
y^6 - 35ny^5 & +504nny^4 & -3780n^3y^3 & +15120n^4yy & -27216n^5y & * \quad = 0;
\end{array}$$

où il est manifeste que $504nn$, qui est la quantité connue du troisième terme, est plus grande que le carré de $\frac{35}{2}n$, qui est la moitié de celle du second. Et il n'y a point de cas pour lequel la quantité, dont on augmente les vraies racines, ait besoin, à cet effet, d'être plus grande, à proportion de celles qui sont données, que pour celui-ci.

Comment on fait que toutes les places d'une Equation soient remplies

Mais, à cause que le dernier terme s'y trouve nul, si on ne désire pas que cela soit, il faut encore augmenter tant soit peu la valeur des racines, et ce ne saurait être de si peu, que ce ne soit assez pour cet effet: non plus que lorsqu'on veut accroître le nombre des dimensions de quelque Equation, et faire que toutes les places de ses termes soient remplies. Comme, si au lieu de

$$x^5 * * * * - b = 0,$$

on veut avoir une Equation en laquelle la quantité inconnue ait six dimensions, et dont aucun des termes ne soit nul, il faut, premièrement, pour

Come si possono fare diventare vere tutte le radici false di un'equazione, senza che le vere diventino false

La seconda cosa che avrà qui di seguito un'applicazione è che si può sempre, aumentando il valore delle radici vere di una quantità che sia maggiore di quella di ciascuna di quelle false, far sì che diventino tutte vere, in modo che non ci siano due segni +, o due segni –, che si susseguono; e, oltre a ciò, che la quantità nota del terzo termine sia maggiore del quadrato della metà di quella del secondo. Infatti, nonostante ciò si faccia quando queste radici false sono incognite, è facile nondimeno | stimare pressapoco la loro grandezza, e prendere una quantità che le superi di quel tanto o di più di quel che è richiesto per questo scopo. Ad esempio se si ha

451

$$x^6 + nx^5 - 6n^2x^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0,$$

ponendo $y - 6n = x$, si troverà

$$\begin{array}{rrrrrr}
y^6 & -36ny^5 & +540n^2y^4 & -4320n^3y^3 & +19440n^4y^2 & -46656n^5y & +46656n^6 \\
 & +\ ny^5 & -\ 30n^2y^4 & +\ 360n^3y^3 & -\ 2160n^4y^2 & +6480n^5y & -7776n^6 \\
 & & -\ 6n^2y^4 & +\ 144n^3y^3 & -\ 1296n^4y^2 & +5184n^5y & -7776n^6 \\
 & & & +\ 36n^3y^3 & -\ 648n^4y^2 & +3888n^5y & -7776n^6 \\
 & & & & -\ 216n^4y^2 & +2592n^5y & -7776n^6 \\
 & & & & & +1296n^5y & -7776n^6 \\
 & & & & & & -7776n^6 \\
\hline
y^6 & -35ny^5 & +504n^2y^4 & -3780n^3y^3 & +15120n^4y^2 & -27216n^5y & * & =0
\end{array}$$ [93]

dove è manifesto che $504n^2$, che è la quantità nota del terzo termine, è maggiore del quadrato di $\frac{35}{2}n$, che è la metà di quella del secondo. E non c'è un caso per il quale la quantità, di cui aumentiamo le radici vere, abbia bisogno, a questo scopo, di essere maggiore di questo, in proporzione a quelle che sono date.

Come far sì che tutti i posti di un'equazione siano occupati

Poiché però l'ultimo termine risulta nullo, se non si vuole che sia così, bisogna ancora aumentare il valore delle radici anche solo di poco, ma non meno di quanto basta per questo scopo: non più di quando si vuole aumentare il numero delle dimensioni di un'equazione, e fare in modo che tutti i posti dei suoi termini siano riempiti. Ad esempio, se al posto di

$$x^5 * * * * - b = 0,$$

volessimo avere un'equazione dove l'incognita abbia sei dimensioni, e dove nessun termine sia nullo, bisognerebbe, in primo luogo, per

[93] *Descartes 1637* sottrae solo 5 volte $-7776n^6$ da $+46656n^6$. AT riporta il calcolo corretto ($-7776n^6$ deve essere sottratto 6 volte).

$$x^5 * * * * - b = 0, |$$

écrire 452

$$x^6 * * * * - bx * = 0;$$

puis, ayant fait $y - a = x$, on aura

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} - 6a^5y & + a^6 \\ - by & + ab \end{matrix} = 0;$$

où il est manifeste que, tant petite que la quantité a soit supposée, toutes les places de l'Equation ne laissent pas d'être remplies.

Comment on peut multiplier ou diviser les racines sans les connaître

De plus, on peut, sans connaître la valeur des vraies racines d'une Equation, les multiplier ou diviser toutes, par telle quantité connue qu'on veut. Ce qui se fait en supposant que la quantité inconnue, étant multipliée, ou divisée, par celle qui doit multiplier ou diviser les racines, est égale à quelque autre; puis, multipliant, ou divisant, la quantité connue du second terme par cette même qui doit multiplier ou diviser les racines; et par son carré, celle du troisième; et par son cube, celle du quatrième; et ainsi jusques au dernier.

Comment on réduit les nombres rompus d'une Equation à des entiers

Ce qui peut servir pour réduire, à des nombres entiers et rationaux, les fractions et souvent aussi les nombres sourds, qui se trouvent dans les termes des Equations. Comme, si on a

$$x^3 - \sqrt{3}\, x^2 + \tfrac{26}{27}x - \tfrac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

et qu'on veuille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, et multiplier par $\sqrt{3}$ | la quantité connue du second 453
terme, qui est aussi $\sqrt{3}$; et par son carré, qui est 3, celle du troisième, qui est $\frac{26}{27}$; et par son cube, qui est $3\sqrt{3}$, celle du dernier, qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. Ce qui fait

$$y^3 - 3y^2 + \tfrac{26}{9}y - \tfrac{8}{9} = 0.$$

Puis, si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantités connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer $z = 3y$, et, multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, et $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve:

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0,$$

où les racines étant 2, 3 et 4, on connaît de là que celles de l'autre d'auparavant étaient $\frac{2}{3}$, 1 et $\frac{4}{3}$, et que celles de la première étaient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ et $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

[94] AT VI 452 (nota *a*) osserva che *Schooten* ha omesso l'aggettivo «vere».

[95] Anche questo punto è stato espressamente criticato da Beaugrand nella lettera sopra menzionata (nota n. 89): cfr. *Beaugrand à Mersenne*, mars 1638, AT V 507-508. Viète aveva trattato questo argomento sempre nel *De aequationum*…, cit., come osservato da Beaugrand.

$$x^5 * * * * - b = 0, |$$

452 scrivere

$$x^6 * * * * - bx * = 0;$$

poi, dopo aver posto $y - a = x$, si avrà

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 + (-6a^5 - b)y + a^6 + ab = 0,$$

dove è manifesto che, per quanto piccola sia supposta la quantità a, tutti i posti dell'equazione sono occupati.

Come si possono moltiplicare e dividere le radici senza conoscerle

Inoltre, si può, senza conoscere il valore delle radici vere[94] di un'equazione, moltiplicarle o dividerle tutte, per una quantità conosciuta che si desidera. Ciò si fa supponendo che la quantità incognita, essendo moltiplicata o divisa per quella che deve moltiplicare o dividere le radici, sia uguale a qualche altra; poi, moltiplicando o dividendo, la quantità nota del secondo termine per questa stessa che deve moltiplicare o dividere le radici; e quella del terzo per il suo quadrato; e quella del quarto per il suo cubo; e così fino all'ultimo.

Come si riducono i numeri rotti di un'equazione ad interi[95]

Ciò può servire a ridurre a numeri interi e razionali le frazioni e spesso anche i numeri sordi[96], che si trovano nei termini delle equazioni. Ad esempio, se si ha

$$x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + \tfrac{26}{27}x - \tfrac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

e si vuole averne un'altra al suo posto, dove tutti i termini si esprimano per mezzo di numeri razionali, bisogna supporre
453 $y = x\sqrt{3}$, e moltiplicare per $\sqrt{3}$ | la quantità nota del secondo termine, che è anche $\sqrt{3}$; e per il suo quadrato, che è 3, quella del terzo, che è $\frac{26}{27}$; e per il suo cubo, che è $3\sqrt{3}$, quella dell'ultimo, che è $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. Ciò dà[97]

$$y^3 - 3y^2 + \tfrac{26}{9}y - \tfrac{8}{9} = 0.$$

Poi, se si vuole ancora averne un'altra al posto di questa, le cui quantità note si esprimono solo con numeri interi, bisogna porre $z = 3y$, e, moltiplicando 3 per 3, $\frac{26}{9}$ per 9, e $\frac{8}{9}$ per 27, si trova:

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0,$$

da cui, essendo le radici 2, 3 e 4, si deduce che quelle della precedente erano $\frac{2}{3}$, 1 e $\frac{4}{3}$, e che quelle della prima erano $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ e $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

[96] Cioè i numeri irrazionali.

[97] AT riporta per errore $\frac{26}{9}x$, mentre *Descartes 1637* (p. 379) ha $\frac{26}{9}y$, così come *Schooten* (p. 75).

Comment on rend la quantité connue de l'un des termes d'une Equation égale à telle autre qu'on veut

Cette opération peut aussi servir pour rendre la quantité connue de quelqu'un des termes de l'Equation égale à quelque autre donnée. Comme, si, ayant

$$x^3 * - bbx + c^3 = 0,$$

on veut avoir en sa place une autre Equation, en laquelle la quantité connue du terme qui occupe la troisième place, à savoir celle qui est ici bb, soit $3aa$, il faut supposer $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, puis écrire

$$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

Que les racines, tant vraies que fausses, peuvent être réelles ou imaginaires

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires: c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui | corresponde à celles qu'on imagine. Comme, encore qu'on 454
en puisse imaginer trois en celle-ci:

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoi qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.

La réduction des Equations cubiques, lorsque le problème est plan

Or quand, pour trouver la construction de quelque problème, on vient à une Equation en laquelle la quantité inconnue a trois dimensions, premièrement, si les quantités connues qui y sont contiennent quelques nombres rompus, il les faut réduire à d'autres entiers, par la multiplication tantôt expliquée. Et, s'ils en contiennent de sourds, il faut aussi les réduire à d'autres rationaux, autant qu'il sera possible, tant par cette même multiplication que par divers autres moyens, qui sont assez faciles à trouver. Puis, examinant par ordre toutes les quantités qui peuvent diviser sans fraction le dernier terme, il faut voir si quelqu'une d'elles, jointe à la quantité inconnue par le signe + ou –, peut composer un binôme qui divise toute la somme. Et si cela est, le Problème est plan, c'est-à-dire il peut être construit avec la règle et le compas. Car, ou bien la quantité connue de ce binôme est

[98] Nella lettera del marzo 1638 (cfr. nota n. 89), Beaugrand critica (quarta obiezione) questo punto: cfr. *Beaugrand à Mersenne*, mars 1638, AT V 508-510. Queste pagine (sino a AT VI 456) saranno invece richiamate da Descartes nel quadro dell'*affaire* Stampioen-Waessenaer: cfr. *A Schooten*, fine 1638-inizio 1639, B 198, p. 951 (AT II 605, ll. 6-10).

[99] Questo punto sarà contestato da Roberval: cfr. *Carcavi a Descartes*, 24 settembre 1649, B 711, p. 2757 (AT V 417, ll. 2-3).

[100] A questa regola Descartes si richiamerà rispondendo a Didier Dounot: cfr. *A Mersenne*, 9 febbraio 1639, B 202, p. 985 (AT II 503, ll. 11-19). Ma cfr. anche AT II 509n.

Come si rende la quantità nota di un termine di un'equazione uguale a un'altra a piacere[100]

Questa operazione può anche servire per rendere la quantità nota di qualche termine dell'equazione uguale a qualche altra data. Ad esempio, se, avendo

$$x^3 * - b^2x + c^3 = 0,$$

si vuole avere al suo posto un'altra equazione, dove la quantità nota del termine che occupa il terzo posto, ovvero quella che qui è b^2, sia $3a^2$, bisogna supporre $y = x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$, poi scrivere

$$y^3 * - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

Le radici, sia vere che false, possono essere reali o immaginarie

Quanto al resto, tanto le radici vere che le false non sono sempre reali, ma qualche volta sono solo immaginarie[99]: ciò significa che si può sempre immaginarne tante quante ho detto in ogni equazione, ma che qualche volta non v'è alcuna quan-
454 tità che | corrisponde a quelle che si immaginano. Ad esempio, anche se è possibile immaginarne tre in questa:

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

ce n'è tuttavia una sola reale, che è 2, e le altre due, per quanto si aumentino, si diminuiscano o si moltiplichino, nel modo che ho appena spiegato, non si potrebbero rendere se non immaginarie.

La riduzione delle equazioni cubiche, quando il problema è piano[100]

Ora, quando, per trovare la costruzione di qualche problema, si arriva ad un'equazione dove la quantità incognita ha tre dimensioni, in primo luogo, se le quantità note che ci sono contengono qualche numero rotto, bisogna ridurle ad altri interi, con la moltiplicazione ora[101] spiegata. E, se contengono dei numeri sordi, bisogna analogamente ridurle ad altri razionali, finché sarà possibile, tanto con questa stessa moltiplicazione che con altri mezzi, che sono abbastanza facili da trovare. Poi, esaminando in ordine tutte le quantità che possono dividere l'ultimo termine senza frazione, bisogna vedere se alcune di queste, sommate col segno + o – alla quantità incognita, possono comporre un binomio che divide tutta la somma. E se questo avviene, il problema è piano, cioè può essere costruito con riga e compasso. Infatti, o[102] la quantità nota di questo

e CM VIII 307n. Essa venne criticata anche da Jean de Beaugrand cui Descartes rispose nella lettera *A Mersenne*, 23 agosto 1638, B 185, p. 847 (AT II 328, ll. 11-31).

[101] Su questo avverbio (*tantôt*), vedi le spiegazioni date da Descartes nella lettera *A Mersenne*, 27 luglio 1638, B 176, p. 789 (AT II 265, ll. 8-16).

[102] Su questo passaggio cfr. *A Mersenne*, 27 luglio 1638, B 176, p. 789 (AT II 265, l. 17-266, l. 7). Tra i matematici che si opposero a questo luogo dell'opera, Jean de Beaugrand, cui Descartes rispose nella lettera *A Mersenne*, 23 agosto 1638, B 185, pp. 845-847 (AT II 326, l. 22-328, l. 10).

la racine cherchée, ou bien, l'Equation étant divisée par lui, se réduit à deux dimensions: en sorte qu'on en peut trouver après la racine, par ce qui a été dit au premier livre.

Par exemple, si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0, |$$

le dernier terme, qui est 64, peut être divisé sans fraction par 1, 455
2, 4, 8, 16, 32 et 64. C'est pourquoi il faut examiner, par ordre, si cette équation ne peut point être divisée par quelqu'un des binômes: $yy - 1$ ou $yy + 1$; $yy - 2$ ou $yy + 2$; $yy - 4$, etc.; et on trouve qu'elle peut l'être par $yy - 16$, en cette sorte:

$$\begin{array}{rrrrl}
+y^6 & -8y^4 & -124yy & -64 & = 0 \\
\underline{-1y^6} & \underline{-8y^4} & \underline{-4yy} & & \\
0 & \underline{-16y^4} & \underline{-128yy} & & \\
 & -16 & -16 & -16 & \\
\hline
 & +y^4 & +8yy & +4 & = 0.
\end{array}$$

La façon de diviser une Equation par un binôme qui contient sa racine

Je commence par le dernier terme, et divise -64 par -16, ce qui fait $+4$, que j'écris dans le quotient. Puis je multiplie $+4$ par $+yy$, ce qui fait $+4yy$: c'est pourquoi j'écris $-4yy$ en la somme qu'il faut diviser: car il y faut toujours écrire le signe + ou – tout contraire à celui que produit la multiplication: et joignant $-124yy$ avec $-4yy$, j'ai $-128yy$, que je divise derechef par -16, et j'ai $+8yy$ pour mettre dans le quotient. Et en le multipliant par yy, j'ai $-8y^4$ pour joindre avec le terme qu'il faut diviser, qui est aussi $-8y^4$; et ces deux ensemble font $-16y^4$, que je divise par -16. Ce qui fait $+1y^4$ pour le quotient, et $-1y^6$ pour joindre avec $+1y^6$: ce qui fait 0, et montre que la division est achevée. Mais s'il était resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eût pu diviser sans fraction quelqu'un des termes précédents, on eût par là reconnu qu'elle ne pouvait être faite. |

Tout de même, si on a 456

$$y^6 \begin{array}{l} +aa \\ -2cc \end{array} y^4 \begin{array}{l} -a^4 \\ +c^4 \end{array} yy \begin{array}{l} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{array} = 0,$$

le dernier terme se peut diviser, sans fraction, par a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, et semblables. Mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considérer, à savoir aa et $aa + cc$: car les autres, donnant plus ou moins de dimensions, dans le quotient, qu'il n'y en a en la

binomio è la radice cercata, o l'equazione, divisa da questo stesso binomio, si riduce a due dimensioni: in modo che poi si possa trovarne la radice, mediante quanto detto nel libro primo.

Per esempio, se si ha

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0, \mid$$

455 l'ultimo termine, che è 64, può essere diviso esattamente per 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64. Ecco perché bisogna esaminare, in ordine, se questa equazione possa essere divisa da uno dei binomi: $y^2 - 1$ o $y^2 + 1$; $y^2 - 2$ o $y^2 + 2$; $y^2 - 4$, ecc.; e si trova che può esserlo per $y^2 - 16$, in questo modo:

$$\begin{array}{rrrrl}
+y^6 & -8y^4 & -124y^2 & \underline{-64} & =0 \\
\underline{-1y^6} & \underline{-8y^4} & \underline{-4y^2} & & \\
0 & \underline{-16y^4} & \underline{-128y^2} & & \\
 & (-)16 & (-)16 & -16 & \\
\hline
 & +y^4 & +8y^2 & +4 & =0.
\end{array}$$ [103]

Il modo di dividere un'equazione per un binomio che contiene la sua radice

Inizio dall'ultimo termine, e divido – 64 per – 16, il che dà + 4, che scrivo nel quoziente. Poi moltiplico + 4 per + y^2, il che dà + $4y^2$: perciò scrivo – $4y^2$ nell'espressione che si deve dividere. Infatti bisogna sempre scrivere il segno + o – contrario a quello che si ottiene con la moltiplicazione; e sommando – $124y^2$ con – $4y^2$, ho – $128y^2$, che divido di nuovo per – 16, ed ho + $8y^2$ da porre nel quoziente. E moltiplicandolo per y^2, ottengo – $8y^4$ da sommare col termine che si deve dividere, che è anche – $8y^4$; e questi due insieme danno – $16y^4$, che divido per – 16. Questo dà + $1y^4$ per il quoziente, e – $1y^6$ da sommare con + $1y^6$: ciò dà 0, e mostra che la divisione è finita. Invece se fosse rimasta qualche quantità, o se non si fosse potuto dividere esattamente uno dei termini precedenti, avremmo dunque riconosciuto che non sarebbe stato possibile eseguirla. |

456 Parimenti, se si ha

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (-a^4 + c^4)y^2 + (-a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4) = 0,$$

l'ultimo termine può dividersi, esattamente, per a, a^2, $a^2 + c^2$, $a^3 + ac^2$, e simili. Ma ce ne sono solo due che bisogna considerare, ovvero a^2 e $a^2 + c^2$: infatti gli altri, dando più o meno dimensioni nel quoziente, di quante ve ne sono nella quantità

[103] AT VI 455, nota *a*, corregge il testo della matrice che, in *Descartes 1637*, nella penultima riga riportava «16» e non «–16».

quantité connue du pénultième terme, empêcheraient que la division ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimensions d'y^6 que pour trois, à cause qu'il n'y a point d'y^5, ni d'y^3, ni d'y, en toute la somme. Or, en examinant le binôme $yy - aa - cc = 0$, on trouve que la division se peut faire par lui en cette sorte

$$\begin{array}{lll}
y^6 & \left.\begin{array}{r}+aa\\-2cc\end{array}\right\} y^4 & \left.\begin{array}{r}-a^4\\+c^4\end{array}\right\} yy \quad \begin{array}{r}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{array} \quad = 0,\\
\underline{-y^6} & \left.\begin{array}{r}-2aa\\+cc\end{array}\right\} y^4 & \left.\begin{array}{r}-a^4\\-aacc\end{array}\right\} yy \\
0 & \underline{-aa-cc} & \underline{-aa-cc} \qquad \underline{-aa-cc} \\
 & +y^4 & \left.\begin{array}{r}+2aa\\-cc\end{array}\right\} yy \quad \begin{array}{r}+a^4\\+aacc\end{array} \quad = 0.
\end{array}$$

Ce qui montre que la racine cherchée est $aa + cc$. Et la preuve en est aisée à faire par la multiplication.

Quels problèmes sont solides, lorsque l'Equation est cubique

Mais lorsqu'on ne trouve aucun binôme qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'Equation proposée, il est certain que le Problème qui en dépend est | solide. Et ce n'est pas une moindre 457
faute, après cela, de tâcher à le construire sans y employer que des cercles et des lignes droites, que ce serait d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles: car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

La réduction des Equations qui ont quatre dimensions, lorsque le Problème est plan; et quels sont ceux qui sont solides

Que si on a une Equation dont la quantité inconnue ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sourds et rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binôme qui divise toute la somme, en le composant de l'une des quantités qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou du moins, après cette division, il ne reste en l'Equation que trois dimensions, en suite de quoi il faut derechef l'examiner en la même sorte. Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binôme, il faut, en augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme de la somme, en la façon tantôt expliquée; et après, la réduire à une autre qui ne contienne que trois dimensions. Ce qui se fait en cette sorte:

au lieu de $\quad + x^4 \quad * \quad \pm pxx \pm qx \pm r = 0,$

il faut écrire $\quad + y^6 \pm 2py^4 \begin{array}{l}+pp\\\mp 4r\end{array} \quad yy - qq = 0.$

Et pour les signes + ou –, que j'ai omis, s'il y a eu + p en la pré-

nota del penultimo termine, impedirebbero di poter fare la divisione. E notate che io non conto qui le dimensioni di y^6 tranne che per tre, poiché non vi è y^5, né y^3, né y, in tutta l'espressione. Ora, esaminando il binomio $y^2 - a^2 - c^2 = 0$, si trova che la divisione si può fare attraverso esso, in questo modo:

$$\begin{array}{lll} y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 & + (-a^4 + c^4)y^2 & -(a^6 - 2\,a^4c^2 + a^2c^4) = 0, \\ \underline{-y^6 + (-2a^2 + c^2)y^4} & \underline{-(a^4 + a^2c^2)y^2} & \underline{\qquad -a^2 - c^2} \\ 0 & & \\ & \underline{-a^2 - c^2 \qquad -a^2 - c^2} & \\ & +y^4 \qquad +(2a^2 - c^2)y^2 & +a^4 + a^2c^2 \quad = 0. \end{array}$$

Ciò mostra che la radice cercata è $a^2 + c^2$. E la prova è facile da fare con la moltiplicazione.

Quali problemi sono solidi, quando l'equazione è cubica

Invece quando non si trova alcun binomio che possa dividere così tutta l'espressione dell'equazione proposta, è certo che
457 il problema che ne dipende è | solido. E, in base a questo, provare a costruirlo usando solo cerchi e linee rette non è un errore minore che impiegare delle sezioni coniche per costruire quelli che necessitano solo di cerchi: infatti tutto ciò che testimonia una qualche ignoranza si chiama errore.

La riduzione delle equazioni che hanno quattro dimensioni, quando il Problema è piano; e quali sono quelli che sono solidi

Se abbiamo un'equazione dove la quantità incognita ha quattro dimensioni, bisogna nello stesso modo, dopo aver tolto i numeri sordi e rotti, se ce ne sono, vedere se si potrà trovare qualche binomio che divida tutta l'espressione, componendolo con una delle quantità che dividono esattamente l'ultimo termine. E se se ne trova uno, o la quantità nota di questo binomio è la radice cercata, o almeno, dopo questa divisione, rimangono nell'equazione solo tre dimensioni, dopo di che bisogna di nuovo esaminarla nello stesso modo. Invece, quando non si trova un tale binomio, bisogna, aumentando o diminuendo il valore della radice, togliere il secondo termine della somma, nella maniera appena spiegata; e dopo ridurla ad un'altra che contenga solo tre dimensioni. Ciò si esegue in questo modo :

al posto di $\quad + x^4 \quad * \quad \pm px^2 \pm qx \pm r = 0,$

bisogna scrivere $\quad + y^6 \pm 2py^4 + (p^2 \mp 4r)y^2 - q^2 = 0.$

E per i segni + o – che ho omesso[104], se vi era + p nella prece-

[104] Ricordiamo che qui abbiamo modernizzato, sostituendo al segno · la notazione moderna ±.

cédente Equation, il faut mettre en celle-ci $+ 2p$, ou, s'il y a eu $- p$, il faut mettre $- 2p$; et au contraire, s'il y a eu $+ r$, il faut mettre $- 4r$, ou, s'il y | a eu $- r$ il faut mettre $+ 4r$; et soit qu'il y 458
ait eu $+ q$, ou $- q$, il faut toujours mettre $- qq$ et $+ pp$; au moins si on suppose que x^4 et y^6 sont marqués du signe +, car ce serait tout le contraire, si on y supposait le signe –.

Par exemple, si on a

$$+ x^4 \ * \ - 4xx - 8x + 35 = 0,$$

il faut écrire en son lieu

$$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0:$$

car, la quantité que j'ai nommée p étant $- 4$, il faut mettre $- 8y^4$ pour $2py^4$; et celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $\begin{smallmatrix}+16\\-140\end{smallmatrix} yy$, c'est-à-dire $- 124yy$, au lieu de $\begin{smallmatrix}+pp\\-4r\end{smallmatrix} yy$; et enfin, q étant 8, il faut mettre $- 64$ pour $- qq$.

Tout de même,

au lieu de $\quad + x^4 \ * \ - 17xx - 20x - 6 = 0,$
il faut écrire $\quad + y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0:$

car 34 est double de 17; et 313 en est le carré joint au quadruple de 6, et 400 est le carré de 20.

Tout de même aussi,

au lieu de
$$z^4 * \begin{matrix} + \frac{1}{2}aa \\ - cc \end{matrix} zz \begin{matrix} - a^3 \\ - acc \end{matrix} z \begin{matrix} + \frac{5}{16}a^4 \\ - \frac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0,$$
il faut écrire
$$y^6 \begin{matrix} + aa \\ - 2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} - a^4 \\ + c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} - a^6 \\ - 2a^4cc \\ - aac^4 \end{matrix} = 0,$$

car p est $+ \frac{1}{2}aa - cc$, et pp est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, et $4r$ est $- \frac{5}{4}a^4 + aacc$; et enfin $- qq$ est $- a^6 - 2a^4cc - aac^4$. |

Après que l'Equation est ainsi réduite à trois dimensions, il 459
faut chercher la valeur d'yy par la méthode déjà expliquée; et si elle ne peut être trouvée, on n'a point besoin de passer outre, car il suit de là, infailliblement, que le problème est solide. Mais si on la trouve, on peut diviser par son moyen la précédente Equation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnue n'aura que deux dimensions, et dont les racines seront les mêmes que les siennes. A savoir, au lieu de

dente equazione, bisogna mettere in questa $+ 2p$, mentre, se vi era $- p$, bisogna mettere $- 2p$; e al contrario, se vi era $+ r$, biso-
458 gna mettere $- 4r$, mentre, se vi | era $- r$, bisogna mettere $+ 4r$; e sia che ci fosse $+ q$, o $- q$, bisogna sempre mettere $- q^2$ e $+ p^2$, almeno se si suppone che x^4 e y^6 siano preceduti dal segno +: sarebbe infatti tutto il contrario se si supponesse il segno –.

Per esempio, se si ha

$$+ x^4 \ * \ - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

bisogna scrivere al suo posto

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0:$$

infatti, essendo – 4 la quantità che ho chiamato p, bisogna mettere $- 8y^4$ al posto di $2py^4$; ed essendo 35 quella che ho chiamato r, bisogna mettere $(+ 16 - 140)y^2$, cioè $- 124y^2$, al posto di $(+ p^2 - 4r)y^2$; e infine, essendo q uguale a 8, bisogna mettere – 64 per $- q^2$.

Parimenti,

al posto di $+ x^4 \ * \ - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$
bisogna scrivere $+ y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0:$

infatti 34 è il doppio di 17; e 313 è il quadrato sommato al quadruplo di 6, e 400 è il quadrato di 20.

Parimenti,

al posto di $z^4 * + (\frac{1}{2}a^2 - c^2)z^2 + (- a^3 - ac^2)z + (\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2) = 0,$

bisogna scrivere $y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (- a^4 + c^4)y^2 +$
$+ (- a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4) = 0,$

perchè p è $+ \frac{1}{2}a^2 - c^2$, e p^2 è $\frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4$, e $4r$ è $- \frac{5}{4}a^4 + a^2c^2$; e infine $- q^2$ è $- a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4$. |

459 Dopo che l'equazione è stata così ridotta a tre dimensioni, bisogna cercare il valore d'y^2 col metodo già spiegato; e se non può essere trovato, non occore andare avanti: infatti, da ciò segue, infallibilmente, che il problema è solido. Invece, se lo si trova, si può dividere attraverso di esso la precedente equazione in altre due, in ognuna delle quali la quantità incognita avrà solo due dimensioni, e le cui radici saranno le stesse[105]. Cioè, al posto di

[105] Su questa regola chiederà chiarimenti van Schooten: cfr. *Schooten a Descartes*, 10 marzo 1649, B 686, p. 2663 (AT V 319, l. 30-320, l. 5).

$$+ x^4 \ * \ \pm pxx \pm qx \pm r = 0,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ xx - yx + \tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{q}{2y} = 0$$

et

$$+ xx + yx + \tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{q}{2y} = 0.$$

Et, pour les signes + et – que j'ai omis, s'il y a + p en l'Equation précédente, il faut mettre + $\frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci; et – $\frac{1}{2}p$, s'il y a en l'autre – p. Mais il faut mettre + $\frac{q}{2y}$ en celle où il y a – yx; et – $\frac{q}{2y}$, en celle où il y a + yx, lorsqu'il y a + q en la première. Et au contraire, s'il y a – q, il faut mettre – $\frac{q}{2y}$, en celle où il y a – yx; et + $\frac{q}{2y}$, en celle où il y a + yx. En suite de quoi il est aisé de connaître toutes les racines de l'Equation proposée, et par conséquent de construire le problème dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Par exemple, à cause que, faisant

$$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0,$$

pour

$$x^4 \ * \ - 17xx - 20x - 6 = 0, |$$

on trouve que yy est 16, on doit, au lieu de cette Equation, 460

$$+ x^4 \ * \ - 17xx - 20x - 6 = 0,$$

écrire ces deux autres

$$+ xx - 4x - 3 = 0,$$

et

$$+ xx + 4x + 2 = 0:$$

car y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, et q est 20; de façon que

$$+ \tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2y} \text{ fait } - 3,$$

et

$$+ \tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2y} \text{ fait } + 2.$$

Et tirant les racines de ces deux Equations, on trouve toutes les mêmes que si on les tirait de celle où est x^4: à savoir on en trouve une vraie, qui est $\sqrt{7} + 2$, et trois fausses qui sont

$$\sqrt{7} + 2, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad \text{et } 2 - \sqrt{2}$$

Ainsi ayant

$$x^4 \ * \ - 4xx - 8x + 35 = 0,$$

parce que la racine de

$$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0,$$

[106] Ricordiamo che qui abbiamo modernizzato, sostituendo al segno · la notazione moderna ±.

$$+ x^4 \ * \ \pm px^2 \pm qx \pm r = 0,$$

bisogna scrivere queste altre due

$$+ x^2 - yx + \tfrac{1}{2}y^2 \pm \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{q}{2y} = 0$$

e

$$+ x^2 + yx + \tfrac{1}{2}y^2 \pm \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{q}{2y} = 0.$$

E, per i segni + e –, che ho omesso[106], se c'è + p nell'equazione precedente, bisogna mettere + $\frac{1}{2}p$ in ognuna di queste; e – $\frac{1}{2}p$, se c'è – p nell'altra. Invece bisogna mettere + $\frac{q}{2y}$ in quella dove c'è – yx; e – $\frac{q}{2y}$ in quella dove c'è + yx, quando c'è + q nella prima. E, al contrario, se c'è – q, bisogna mettere – $\frac{q}{2y}$, in quella dove c'è – yx; e + $\frac{q}{2y}$ in quella dove c'è + yx. Dopo di che è facile determinare tutte le radici dell'equazione proposta e di conseguenza costruire il problema del quale essa contiene la soluzione, usando soltanto cerchi e rette.

Per esempio, poiché considerando

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0,$$

in luogo di $\quad x^4 \ * \ - 17x^2 - 20x - 6 = 0, |$

460 si trova che y^2 è 16, si deve, al posto di questa equazione,

$$+ x^4 \ * \ - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

scrivere queste altre due

$$+ x^2 - 4x - 3 = 0,$$

e

$$+ x^2 + 4x + 2 = 0:$$

infatti y è 4, $\frac{1}{2}y^2$ è 8, p è 17, e q è 20, di modo che

$$+ \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2y} \text{ dà } - 3,$$

e

$$+ \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2y} \text{ dà } + 2.$$

E estraendo le radici di queste due equazioni, si trovano tutte le stesse che se le estraessimo da quella dove c'è x^4: cioè se ne trova una vera, che è $\sqrt{7} + 2$, e tre false che sono

$$\sqrt{7} + 2, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad \text{e} \quad 2 - \sqrt{2}$$

Così avendo[107]

$$x^4 \ * \ - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

e dato che la radice di

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

[107] AT VI 460, nota *a*, segnala che nella seguente equazione l'asterisco era omesso in *Descartes 1637*: esso è stato ripristinato da *Schooten*.

est derechef 16, il faut écrire

$$xx - 4x + 5 = 0,$$
$$\text{et } xx + 4x + 7 = 0.$$

Car ici

$$+ \tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2y} \text{ fait } 5,$$
$$\text{et } + \tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2y} \text{ fait } 7. \,|$$

Et parce qu'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces 461
deux dernières Equations, on connaît de là que les quatre de l'Equation dont elles procèdent sont imaginaires; et que le Problème, pour lequel on l'a trouvée, est plan de sa nature, mais qu'il ne saurait en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre.

Tout de même, ayant

$$z^4 * \begin{matrix} + \tfrac{1}{2}aa \\ - cc \end{matrix} \Big\} zz \begin{matrix} - a^3 \\ - acc \end{matrix} \Big\} z \begin{matrix} + \tfrac{5}{16}a^4 \\ - \tfrac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0,$$

parce qu'on trouve $aa + cc$ pour yy, il faut écrire

$$zz - \sqrt{aa + cc}\, z + \tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0,$$

et $$zz + \sqrt{aa + cc}\, z + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0.$$

Car y est $\sqrt{aa + cc}$, et $+ \tfrac{1}{2}yy + \tfrac{1}{2}p$ est $\tfrac{3}{4}aa$, et $\tfrac{q}{2y}$ est $\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$. D'où on connaît que la valeur de z est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{- \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{- \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Et, parce que nous avions fait ci-dessus $z + \tfrac{1}{2}a = 0$, nous apprenons que la quantité x, pour la connaissance de laquelle nous avons fait toutes ces opérations, est

$$+ \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Exemple de l'usage de ces réductions

Mais, afin qu'on puisse mieux connaître l'utilité de | cette 462
règle, il faut que je l'applique à quelque Problème.

Si, le carré AD et la ligne BN étant donnés, il faut prolonger le côté AC jusques à E, en sorte qu'EF, tirée d'E vers B, soit égale à NB; on apprend de Pappus qu'ayant premièrement prolongé

è di nuovo 16, bisogna scrivere

$$x^2 - 4x + 5 = 0,$$
$$\text{e } x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Infatti qui

$$+ \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2y} \text{ dà } 5,$$
$$\text{e } + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2y} \text{ dà } 7. \,|$$

461 E dato che non si trova alcuna radice, né vera né falsa, in queste due ultime equazioni, si deduce da ciò che le quattro radici dell'equazione da cui discendono sono immaginarie; e che il Problema, per il quale l'abbiamo trovata, è per sua natura piano, ma non potrebbe essere costruito in nessun modo, perché le quantità date non possono sommarsi.

Parimenti, avendo

$$z^4 * +(\tfrac{1}{2}a^2 - c^2)z^2 + (-a^3 - ac^2)z + (\tfrac{5}{16}a^4 - \tfrac{1}{4}a^2c^2) = 0,$$

dato che si trova $a^2 + c^2$ per y^2, bisogna scrivere

$$z^2 - \sqrt{a^2 + c^2}\, z + \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

e

$$z^2 + \sqrt{a^2 + c^2}\, z + \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0.$$

Infatti y è $\sqrt{a^2 + c^2}$, e $+ \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p$ è $\frac{3}{4}a^2$, e $\frac{q}{2y}$ è $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}$. Da qui si deduce che il valore di z è

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}},$$

o

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}.}$$

E, dato che avevamo prima posto $z + \frac{1}{2}a = 0$, apprendiamo che la quantità x, per la cui conoscenza abbiamo fatto tutte queste operazioni, è

$$+ \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}.}$$

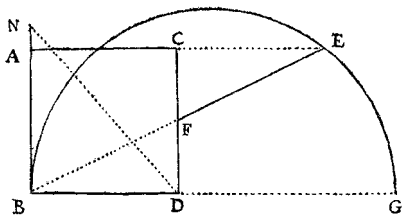
Esempio dell'uso di queste riduzioni

Tuttavia, affinché si possa comprendere meglio l'utilità di |
462 questa regola, bisogna che la applichi a qualche problema.

Se, dato il quadrato AD e la linea BN, bisogna prolungare il lato AC fino ad E, di modo che EF, tracciata da E verso B, sia uguale a NB, si sa da Pappo[108] che, avendo in primo luogo

[108] Cfr. la proposizione 72, libro VII delle *Collectiones* (ed. Hultsch, cit., II, pp. 782-785).

BD jusques à G, en sorte que DG soit égale à DN, et ayant décrit un cercle dont le diamètre soit BG, si on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonférence de ce cercle au point E, qu'on demandait. Mais pour ceux qui ne sauraient point cette construction, elle serait assez difficile à rencontrer, et en la cherchant par la méthode ici proposée, ils ne s'aviseraient jamais de prendre DG pour la quantité inconnue, mais plutôt CF ou FD, à cause que ce sont elles qui conduisent le plus aisément à l'Equation; et lors ils en trouveraient une qui ne serait pas facile à démêler, sans la règle que je viens d'expliquer. Car, posant a pour BD ou CD, et c pour EF, et x pour DF, on a CF $= a - x$, et comme CF, ou $a - x$, est à FE ou c, ainsi FD, ou x, est à BF, qui par conséquent est $\frac{cx}{a-x}$. Puis, à cause du triangle rectangle BDF, dont les côtés sont l'un x et l'autre a, leurs carrés, qui sont $xx + aa$, sont égaux à celui de la base, qui est $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$, de façon que, multipliant le tout par $xx - 2ax + aa$, on trouve que l'Equation est



$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = ccxx, \mid$$

ou bien 463

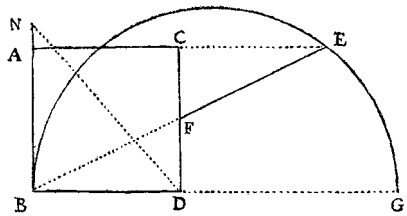
$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 2aa \\ - cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 = 0.$$

Et on connaît, par les règles précédentes, que sa racine, qui est la longueur de la ligne DF, est

$$+ \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Que si on posait BF ou CE ou BE pour la quantité inconnue, on viendrait derechef à une Equation en laquelle il y aurait 4 dimensions, mais qui serait plus aisée à démêler; et on y viendrait assez aisément, au lieu que, si c'était DG qu'on supposât, on viendrait beaucoup plus difficilement à l'Equation, mais aussi elle serait très simple. Ce que je mets ici pour vous avertir que, lorsque le Problème proposé n'est point solide, si en le cherchant par un chemin on vient à une Equation fort composée, on

prolungato BD fino a G, in modo che DG sia uguale a DN, e avendo descritto un cerchio il cui diametro sia BG, se si prolunga la linea retta AC, essa incontrerà la circonferenza di questo cerchio nel punto E richiesto. Ma per quelli che non conoscessero questa costruzione, tale linea sarebbe abbastanza difficile da scoprire, e cercandola col metodo qui proposto, non avrebbero mai l'accortezza di prendere DG per la quantità incognita, ma piuttosto CF o FD, perché sono loro che conducono più facilmente all'equazione;



e allora ne troverebbero una che non sarebbe facile da risolvere, senza la regola che ho appena spiegato. Infatti, ponendo a al posto di BD o CD, e c al posto di EF, e x al posto di DF, si ha CF = $a - x$, e come CF, o $a - x$, sta a FE o c, così FD, o x, sta a BF, che di conseguenza è $\frac{cx}{a-x}$. Poi, in virtù del triangolo rettangolo BDF, i cui cateti sono l'uno x e l'altro a, i loro quadrati, che sono $x^2 + a^2$, sono uguali a quello della base, che è $\frac{c^2x^2}{x^2 - 2ax + a^2}$, di modo che, moltiplicando il tutto per $x^2 - 2ax + a^2$, si trova che l'equazione è

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = c^2x^2, \mid$$

463 o

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$

E si ricava, con le regole precedenti, che la sua radice, che è la lunghezza della linea DF, è

$$+ \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Se si ponesse BF o CE[109] o BE per la quantità incognita, si arriverebbe nuovamente ad un'equazione dove si avrebbero 4 dimensioni, ma che sarebbe più facile da risolvere; e vi si arriverebbe molto facilmente, mentre, se si supponesse DG, si arriverebbe molto più difficilmente all'equazione, ma questa sarebbe anche molto semplice. Rilevo qui tutto ciò affinché siate avvisati del fatto che, quando il Problema proposto non è solido, se cercando la soluzione attraverso un cammino si arrivasse ad un'equazione molto composta, si può ordinaria-

[109] Soppresso in *Schooten*, che lo inserisce dopo «ma piuttosto CF o FD» (AT VI 462, l. 19).

peut ordinairement venir à une plus simple, en le cherchant par un autre.

Je pourrais encore ajouter diverses règles pour démêler les Equations qui vont au cube ou au carré de carré; mais elles seraient superflues, car, lorsque les Problèmes sont plans, on en peut toujours trouver la construction par celles-ci.

Règle générale pour réduire les Equations qui passent le carré de carré

Je pourrais aussi en ajouter d'autres pour les Equations qui montent jusques au sursolide, ou au carré de cube, ou au-delà; mais j'aime mieux les comprendre toutes en une, et dire en général que, | lorsqu'on a tâché de les réduire à même forme que 464
celles, d'autant de dimensions, qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, et qu'ayant dénombré tous les moyens par lesquels cette multiplication est possible, la chose n'a pu succéder par aucun, on doit s'assurer qu'elles ne sauraient être réduites à de plus simples. En sorte que, si la quantité inconnue a 3 ou 4 dimensions, le Problème, pour lequel on la cherche, est solide; et si elle en a 5 ou 6, il est d'un degré plus composé; et ainsi des autres.

Au reste, j'ai omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli, elles se présenteront à vous d'elles-mêmes: et il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant.

Façon générale pour construire tous les problèmes solides, réduits à une Equation de trois ou quatre dimensions

Or, quand on est assuré que le Problème proposé est solide, soit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant, au reste, que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une Parabole, à cause qu'elle est, en quelque façon, la plus simple.

Premièrement, il faut ôter le second terme de l'Equation, s'il n'est déjà nul, et ainsi la réduire à telle forme:

$$z^3 = * \pm apz \pm aaq, |$$

si la quantité inconnue n'a que trois dimensions; ou bien à telle: 465

$$z^4 = * \pm apzz \pm aaqz \pm a^3r,$$

si elle en a quatre; ou bien, en prenant a pour l'unité,

mente arrivare ad una più semplice, cercandone la soluzione attraverso un altro.

Potrei ancora aggiungere diverse regole per trattare le equazioni che arrivano al cubo o al quadrato del quadrato; ma sarebbero superflue, giacché quando i problemi sono piani, si può sempre trovare la costruzione attraverso quelle.

Regola generale per ridurre le equazioni che superano il quadrato del quadrato

Potrei anche aggiungerne altre per le equazioni che giungono fino al sursolido, o al quadrato del cubo, o oltre; ma prefe-
464 risco considerarle tutte insieme, e dire in generale che, | quando si è provato a ridurle alla stessa forma di quelle di uguali dimensioni, che risultano dalla moltiplicazione di altre due che hanno dimensione inferiore e, avendo enumerato tutti i mezzi per i quali questa moltiplicazione è possibile, la riduzione non si è potuta ottenere con nessuno di questi, si può essere certi che tali equazioni non possono essere ridotte ad equazioni più semplici. Di modo che, se la quantità incognita ha 3 o 4 dimensioni, il Problema, per il quale la si cerca, è solido; e se ne ha 5 o 6, è di un grado più composto; e così di seguito.

Quanto al resto, ho omesso qui le dimostrazioni della maggior parte di ciò che ho detto, perché mi sono sembrate talmente facili che, purché vi diate la pena di esaminare metodicamente se ho commesso errori, esse si presenteranno da sole: e sarà più utile impararle in questo modo che leggerle.

Maniera generale per costruire tutti i problemi solidi, ridotti ad un'equazione di tre o quattro dimensioni

Ora, quando si è sicuri che il problema proposto è solido, sia che l'equazione per la quale si cerca la soluzione salga al quadrato del quadrato, sia che salga solo fino al cubo, si può sempre trovarne la radice tramite una qualunque delle tre sezioni coniche, o anche tramite una parte di una di esse, per quanto piccola sia, servendosi, per il resto, solo di rette e cerchi. Ma mi accontenterò qui di dare una regola generale per trovarle tutte per mezzo di una parabola[110], perché essa è, in qualche modo, la più semplice.

In primo luogo, bisogna eliminare il secondo termine dell'equazione, se non è già nullo, e così ridurla a tale forma:

$$z^3 = * \pm apz \pm a^2q, \mid$$

465 se la quantità incognita ha solo tre dimensioni; o altrimenti a tale forma:

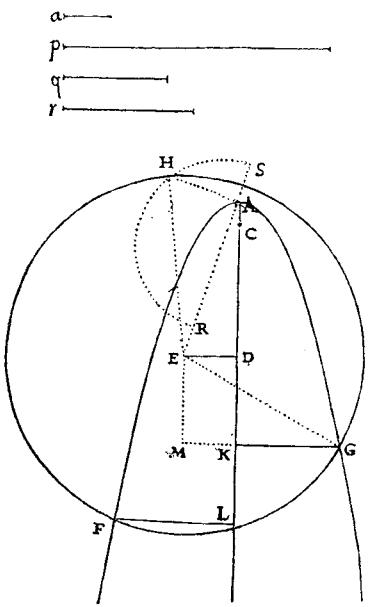
$$z^4 = * \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3r,$$

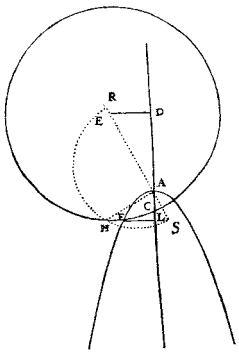
se ne ha quattro; o altrimenti, assumendo a per l'unità,

[110] Cfr. *Beeckman III*, *B Op* II 1371-1377 (AT X 344-346).

à telle: $z^3 = * \pm pz \pm q$
et à telle: $z^4 = * \pm pzz \pm qz \pm r.$

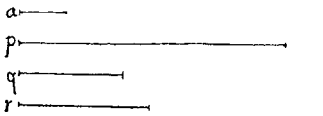
Après cela, supposant que la Parabole FAG est déjà décrite, et que son essieu est ACDKL, et que son côté droit est *a* ou 1, dont AC est la moitié, et enfin que le point C est au-dedans de cette Parabole, et que A en est le sommet: il faut faire CD = $\frac{1}{2}p$, et la prendre du même côté qu'est le point A au regard du point C, s'il y a $+p$ en l'Equation; mais, s'il y a $-p$, il faut la prendre de l'autre côté. Et du point D, ou bien, si la quantité *p* était nulle, du point C, il faut élever une ligne à angles droits jusques à E, en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}q$. Et enfin, | du 466
centre E, il faut décrire le cercle FG, dont le demi-diamètre soit AE, si l'Equation n'est que cubique, en sorte que la quantité *r* soit nulle. Mais quand il y a $+r$, il faut, dans cette ligne AE prolongée, prendre d'un côté AR égale à *r*, et de l'autre AS égale au côté droit de la Parabole, qui est 1; et ayant décrit un cercle dont le diamètre soit RS, il faut faire AH perpendiculaire sur AE, laquelle AH rencontre ce cercle RHS au point H, qui est celui par où l'autre cercle FHG doit passer. Et quand il y a $-r$, il faut, après avoir ainsi trouvé la ligne

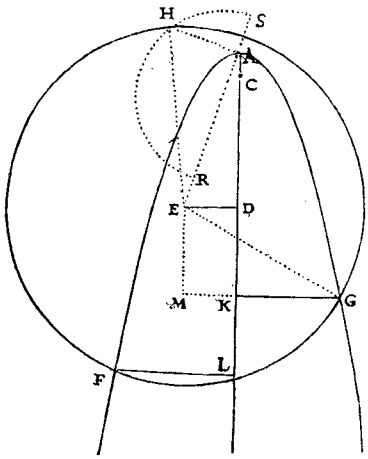


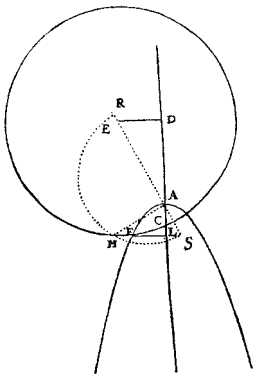


a questa forma: $z^3 = * \pm pz \pm q$
e a questa: $z^4 = * \pm pz^2 \pm qz \pm r$.

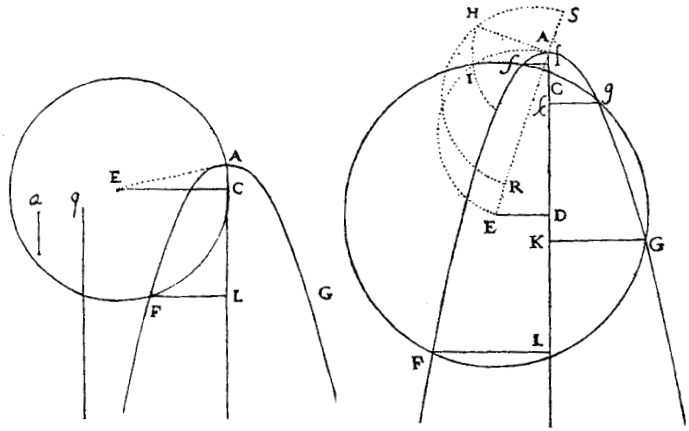
Dopo di che, supponendo che la Parabola FAG sia già descritta, che il suo asse sia ACDKL, e che il suo lato retto, del quale AC è la metà, sia *a* o 1, e infine che il punto C sia all'interno di questa parabola e che A ne sia il vertice, bisogna porre CD = $\frac{1}{2}p$ e prenderla dallo stesso lato in cui si trova il punto A rispetto al punto C[111], se c'è $+p$ nell'equazione; mentre, se c'è $-p$, bisogna prenderla dall'altro lato. E dal punto D, oppure, se la quantità *p* risulta nulla, dal punto C, bisogna innalzare una linea perpendicolare fino ad E, in modo che sia uguale a $\frac{1}{2}q$. E infine, |
466 dal centro E, bisogna descrivere il cerchio FG, il cui semidiametro sia AE, se l'equazione è solo cubica, in modo che la quantità *r* sia nulla. Ma quando c'è $+r$, bisogna, in questa linea AE prolungata, prendere da un lato AR uguale a *r*, e dall'altro AS uguale al lato retto della Parabola, che è 1; e, avendo descritto un cerchio il cui diametro sia RS, bisogna porre AH perpendicolare ad AE, la quale AH incontra questo cerchio RHS nel punto H, che è quello per il quale deve passare l'altro cerchio FHG. E quando c'è $-r$, bisogna, dopo aver trova-







[111] In *Descartes 1637*: «Qu'est le point A au regard du point C / in cui si trova il punto C rispetto al punto A». La correzione in AT VI 465, nota *a*.



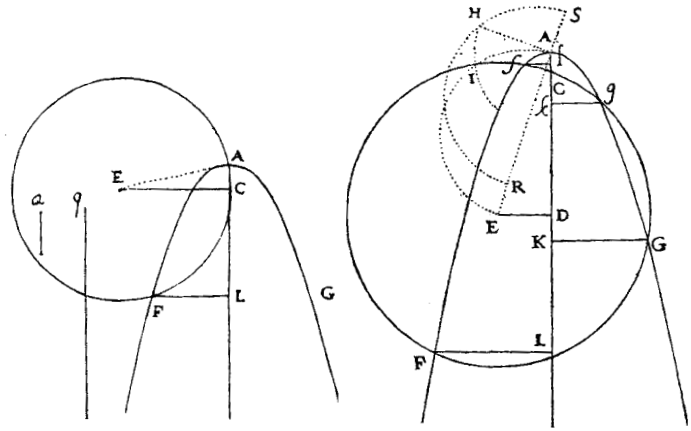
AH, | inscrire AI, qui lui soit égale, dans un autre cercle dont AE 467
soit le diamètre, et lors, c'est par le point I que doit passer FIG, le premier cercle cherché. Or ce cercle FG peut couper ou toucher la Parabole en 1 ou 2 ou 3 ou 4 points, desquels tirant des perpendiculaires sur l'essieu, on a toutes les racines de l'Equation, tant vraies que fausses. A savoir, si la quantité q est marquée du signe +, les vraies racines seront celles de ces perpendiculaires qui se trouveront du même côté de la Parabole que E le centre du cercle, comme FL; et les autres, comme GK, seront fausses. Mais au contraire, si cette quantité q est marquée du signe -, les vraies seront celles de l'autre côté, et les fausses, ou moindres que rien, seront du côté où est E, le centre du cercle. Et enfin, si ce cercle ne coupe ni ne touche la Parabole en aucune point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine, ni vraie ni fausse, en l'Equation, et qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette règle est la plus générale et la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

Et la démonstration en est fort aisée. Car, si la ligne GK, trouvée par cette construction, se nomme z, AK sera zz, à cause de la Parabole, en laquelle GK doit être moyenne proportionnelle entre AK et le côté droit, qui est 1. Puis, si de AK j'ôte AC, qui est $\frac{1}{2}$, et CD qui est $\frac{1}{2}p$, il reste DK ou EM, qui est $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le carré est:

$$z^4 - pzz - zz + \tfrac{1}{4}pp + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}; \,|$$

et à cause que DE ou KM est $\frac{1}{2}q$, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont 468
le carré est

$$zz + qz + \tfrac{1}{4}qq;$$



467 to così la linea AH, | inscrivere AI, che le sia uguale, in un altro cerchio di diametro AE e allora è dal punto I che deve passare FIG, il primo cerchio cercato. Ora, questo cerchio FG può tagliare o tangere la parabola in 1 o 2 o 3 o 4 punti, dai quali, tracciando le perpendicolari sull'asse, otteniamo tutte le radici dell'equazione, sia vere che false. Cioè, se la quantità q è preceduta dal segno +, le radici vere saranno quelle di queste perpendicolari che, come FL, si troveranno dallo stesso lato della parabola in cui si trova E, il centro del cerchio; le altre, come GK, saranno false. Invece al contrario, se questa quantità q è preceduta dal segno –, le vere saranno quelle dall'altro lato, e le false, o minori di zero, saranno dal lato dove c'è E, il centro del cerchio. E infine, se questo cerchio non taglia e non tange la parabola in nessun punto, ciò significa che non c'è alcuna radice, né vera né falsa, nell'equazione, e che sono tutte immaginarie. In questo modo tale regola è la più generale e la più completa che si possa desiderare.

E la dimostrazione risulta molto facile. Infatti, se la linea GK, trovata tramite questa costruzione, si chiama z, AK sarà z^2, in virtù della parabola, in cui GK deve essere media proporzionale tra AK e il lato retto, che è 1. Poi, se da AK tolgo AC, che è $\frac{1}{2}$, e CD, che è $\frac{1}{2}p$, rimane DK o EM, che è $z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, il cui quadrato è:

$$z^4 - pz^2 - z^2 + \tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}; \,|$$

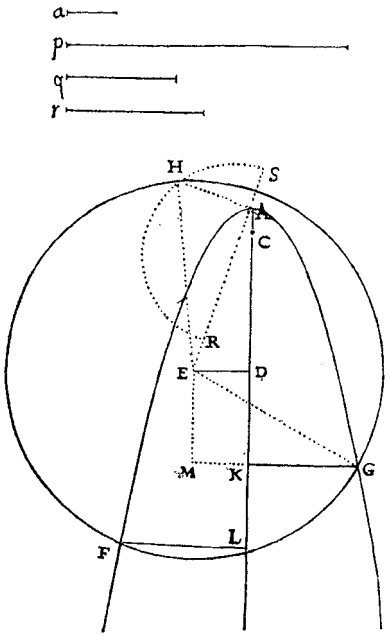
468 e poiché DE o KM è $\frac{1}{2}q$, tutta GM è $z + \frac{1}{2}q$, il cui quadrato è

$$z^2 + qz + \tfrac{1}{4}q^2;$$

et assemblant ces deux carrés, on a

$$z^4 - pzz + qz + \tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{4}pp + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}$$

pour le carré de la ligne GE, à cause qu'elle est la base du triangle rectangle EMG.



Mais, à cause que cette même ligne GE est le demi-diamètre du cercle FG, elle se peut encore expliquer en d'autres termes. A savoir,

$$\text{ED étant } \tfrac{1}{2}q, \text{ et AD étant } \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2},$$

$$\text{EA est } \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{4}pp + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}}, |$$

à cause de l'angle droit ADE. Puis, HA étant moyenne proportionnelle entre AS, qui est 1, et AR, qui est r, elle est $\sqrt{r}$; et à cause de l'angle droit EAH, le carré de HE ou EG est 469

$$\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{4}pp + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4} + r;$$

si bien qu'il y a Equation entre cette somme et la précédente; ce qui est le même que

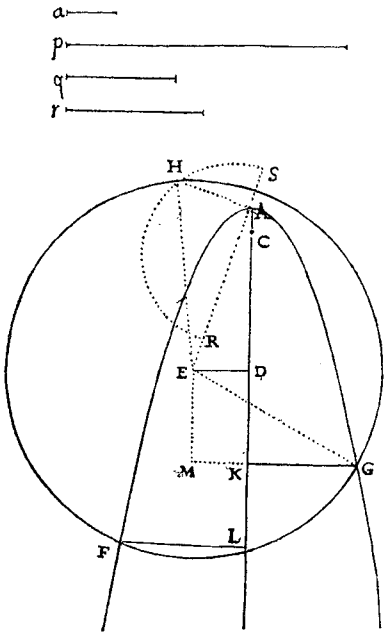
$$z^4 = * + pzz - qz + r:$$

et par conséquent, la ligne trouvée GK, qui a été nommée z, est la racine de cette Equation, ainsi qu'il fallait démontrer. Et si vous

e, sommando questi due quadrati, si ottiene

$$z^4 - pz^2 + qz + \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}$$

per il quadrato della linea GE, perché è la base del triangolo rettangolo EMG.



Tuttavia, poiché questa stessa linea GE è il semidiametro del cerchio FG, si può ancora esprimere in altri termini. Cioè,

essendo ED $\frac{1}{2}q$, ed essendo AD $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$,

EA è $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$, |

469 in virtù dell'angolo retto ADE. Poi, essendo HA media proporzionale tra AS, che è 1, e AR, che è r, essa è $\sqrt{r}$; e, a causa dell'angolo retto EAH, il quadrato di HE o EG è

$$\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4} + r;$$

così che vi è equazione tra questa somma e quella precedente; che è come dire

$$z^4 = * + pz^2 - qz + r,$$

e di conseguenza, la linea trovata GK, che è stata chiamata z, è la radice di quest'equazione, come dovevasi dimostrare. E se

appliquez ce même calcul à tous les autres cas de cette règle, en changeant les signes + et – selon l'occasion, vous y trouverez votre compte en même sorte, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête.

L'invention de deux moyennes proportionnelles

Si on veut donc, suivant cette règle, trouver deux moyennes proportionnelles entre les lignes a et q, chacun sait que, posant z pour l'une: comme a est à z, ainsi z à $\frac{zz}{a}$, et $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q et $\frac{z^3}{aa}$, c'est-à-dire

$$z^3 = * * aaq.$$

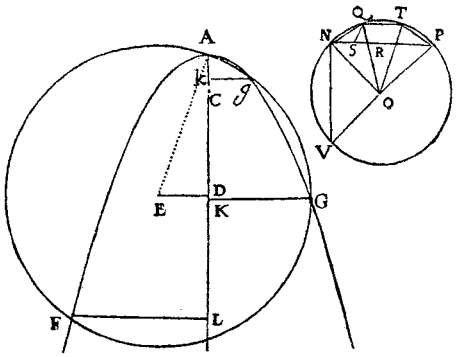
Et la Parabole FAG étant décrite, avec la partie de son essieu AC, qui est $\frac{1}{2}a$, la moitié du côté droit, il faut, du point C, élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, et du centre E, par A, décrivant le cercle AF, | on trouve FL et LA, pour les deux moyennes cher- 470
chées.

La façon de diviser un angle en trois

Tout de même, si on veut diviser l'angle NOP, ou bien l'arc ou portion de cercle NQTP, en trois parties égales, faisant NO = 1, pour le rayon du cercle, et NP = q, pour la subtendue de l'arc donné, et NQ = z, pour la subtendue du tiers de cet arc, l'Equation vient

$$z^3 = * 3z - q.$$

Car, ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT, et faisant QS parallèle à TO, on voit que comme NO est à NQ, ainsi NQ à QR, et QR à



RS: en sorte que NO étant 1, et NQ étant z, QR est zz, et RS est z^3. Et à cause qu'il s'en faut seulement RS ou z^3, que la ligne NP, qui est q, ne soit triple de NQ, qui est z, on a

$$q = 3z - z^3 \quad \text{ou bien} \quad z^3 = * 3z - q.$$

Puis, la Parabole FAG étant décrite, et CA, la moitié de son côté droit principal, étant $\frac{1}{2}$, si on prend CD = $\frac{3}{2}$, et la perpen-

voi applicate questo stesso calcolo a tutti gli altri casi di questa regola, cambiando opportunamente i segni + e –, arriverete allo stesso risultato, senza bisogno che mi ci soffermi.

La determinazione di due medie proporzionali

Se si vuole dunque, seguendo questa regola, trovare due medie proporzionali tra le linee a e q, ognuno sa che, indicando con z l'una, come a sta a z, così z sta a $\frac{z^2}{a}$, e $\frac{z^2}{a}$ a $\frac{z^3}{a^2}$; di modo che vi è equazione tra q e $\frac{z^3}{a^2}$, cioè

$$z^3 = * * a^2q.$$

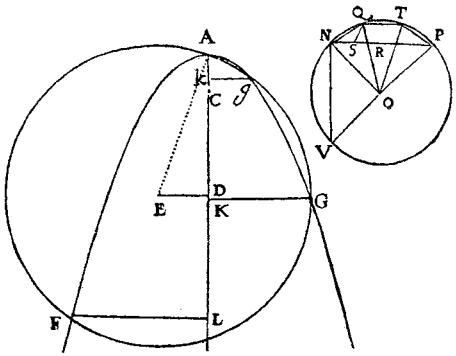
Ed essendo descritta la Parabola FAG con la parte del suo asse AC, che è $\frac{1}{2}a$, la metà del lato retto, bisogna, dal punto C, innalzare la perpendicolare CE uguale a $\frac{1}{2}q$, e descrivendo il
470 cerchio AF di centro E e passante per A, | si trovano FL e LA, le due medie ricercate.

Il modo di dividere un angolo in tre

Parimenti, se si vuole dividere l'angolo NOP, oppure l'arco o la porzione di cerchio NQTP, in tre parti uguali, prendendo NO = 1, come raggio del cerchio, e NP = q, come corda sottesa all'arco dato, e NQ = z, come corda sottesa alla terza parte di questo arco, l'equazione risulta essere

$$z^3 = * 3z - q.$$

Infatti, avendo tracciato le linee NQ, OQ, OT e ponendo QS parallela a TO, si vede che come NO sta a NQ, così NQ sta a



QR, e QR a RS: di modo che, essendo NO = 1 e NQ = z, QR è z^2, e RS è z^3. E poiché manca solo RS, o z^3, perché la linea NP, che è q, sia il triplo di NQ, che è z, si ottiene

$$q = 3z - z^3 \quad \text{o} \quad z^3 = * 3z - q.$$

Poi, descritta la Parabola FAG, in cui CA, la metà del suo lato retto principale, è $\frac{1}{2}$, se si prende CD = $\frac{3}{2}$, e la perpendi-

diculaire DE = $\frac{1}{2}q$, et que, du centre E, par A, on décrive le cercle FA*g*G, il coupe cette parabole aux trois points F, *g* et G, sans compter le point | A, qui en est le sommet. Ce qui montre 471
qu'il y a trois racines en cette Equation, à savoir: les deux GK et *gk*, qui sont vraies, et la troisième qui est fausse, à savoir FL. Et de ces deux vraies, c'est *gk*, la plus petite, qu'il faut prendre pour la ligne NQ qui était cherchée. Car l'autre, GK, est égale à NV, la subtendue de la troisième partie de l'arc NVP qui, avec l'autre arc NQP, achève le cercle. Et la fausse, FL, est égale à ces deux ensemble, QN et NV, ainsi qu'il est aisé à voir par le calcul.

Que tous les problèmes solides se peuvent réduire à ces deux constructions

Il serait superflu que je m'arrêtasse à donner ici d'autres exemples; car tous les Problèmes qui ne sont que solides se peuvent réduire à tel point, qu'on n'a aucun besoin de cette règle pour les construire, sinon en tant qu'elle sert à trouver deux moyennes proportionnelles, ou bien à diviser un angle en trois parties égales; ainsi que vous connaîtrez, en considérant que leurs difficultés peuvent toujours être comprises en des Equations qui ne montent que jusques au carré de carré ou au cube; et que toutes celles qui montent au carré de carré se réduisent au carré, par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube: et enfin qu'on peut ôter le second terme de celles-ci. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse réduire à quelqu'une de ces trois formes:

$$z^3 = * - pz + q.$$
$$z^3 = * + pz + q.$$
$$z^3 = * + pz - q.$$

Or, si on a: $z^3 = * - pz + q$, la règle dont Cardan | attribue l'inven- 472
tion à un nommé Scipio Ferreus, nous apprend que la racine est:

$$\sqrt{\text{C.}+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt{\text{C.}-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}};$$

comme aussi, lorsqu'on a: $z^3 = * + pz + q$, et que le carré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième, une pareille règle nous apprend que la racine est

$$z = \sqrt{\text{C.}+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{\text{C.}+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

D'où il paraît qu'on peut construire tous les Problèmes dont les difficultés se réduisent à l'une de ces deux formes, sans avoir besoin des sections coniques pour autre chose que pour tirer les racines cubiques de quelques quantités données, c'est-à-dire pour trouver deux moyennes proportionnelles entre ces quantités et l'unité.

[112] Girolamo Cardano (1501-1576) rendeva nota la scoperta da parte di Scipione dal Ferro (1465-1526) della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado nella *Ars Magna*

colare DE = $\frac{1}{2}q$, e se, dal centro E, si descrive il cerchio, passante per A, FA*g*G, questo interseca questa parabola nei tre pun-
471 ti F, *g* e G senza tener conto del punto | A, che è il vertice. Ciò dimostra che ci sono tre radici in questa equazione, cioè le due GK e *gk*, che sono vere, e la terza che è falsa, cioè FL. E tra queste due vere, è *gk*, la più piccola, che bisogna considerare come la linea NQ cercata. Infatti l'altra, GK, è uguale a NV, la corda sottesa alla terza parte dell'arco NVP che, con l'altro arco NQP, completa il cerchio. E la radice falsa FL è uguale a queste due insieme, QN e NV, com'è facile vedere tramite il calcolo.

Tutti i problemi solidi si possono ridurre a queste due costruzioni

Sarebbe superfluo soffermarmi a dare altri esempi; infatti tutti i Problemi solidi si possono ridurre a tal punto che non c'è alcun bisogno di questa regola per costruirli, se non in quanto essa serve per trovare due medie proporzionali, o per dividere un angolo in tre parti uguali; di ciò vi renderete conto, considerando che le loro difficoltà possono sempre essere comprese in equazioni che salgono solo fino al quadrato del quadrato o al cubo; e che tutte quelle che salgono al quadrato del quadrato si riducono al quadrato, per mezzo di altre che salgono solo fino al cubo; e, infine, che si può eliminare il secondo termine di queste. Di modo che non ce ne sono che non si possano ridurre ad una di queste tre forme:

$$z^3 = * - pz + q.$$
$$z^3 = * + pz + q.$$
$$z^3 = * + pz - q.$$

472 Ora, se si ha: $z^3 = * - pz + q$, la regola che Cardano | attribuisce ad un certo Scipione dal Ferro[112], ci insegna che la radice è:

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}};$$

come anche, quando si ha: $z^3 = * + pz + q$, e il quadrato della metà dell'ultimo termine è maggiore del cubo di un terzo della quantità nota del penultimo, una regola simile ci insegna che la radice è

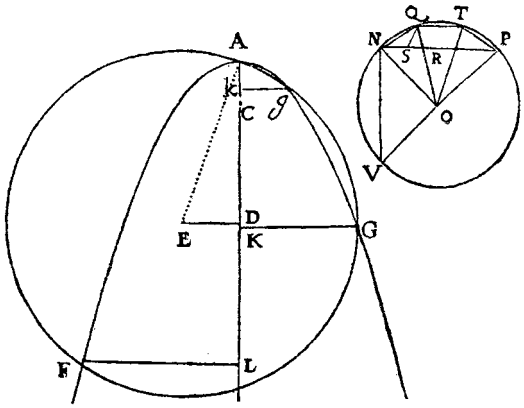
$$z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Da ciò risulta che tutti i problemi, le cui difficoltà si riducono ad una di queste due forme, si possono costruire senza aver bisogno delle sezioni coniche, se non per estrarre le radici cubiche di qualche quantità data, cioè per trovare due medie proporzionali tra queste quantità e l'unità.

(1545), cfr. *Ars magna sive de regulis algebraicis liber unus*, in *Opera Omnia*, Lyon, J. A. Huguetan et M. A. Ravaud, 1663 (vol. IV), cap. XI, p. 249.

Puis, si on a: $z^3 = * + pz + q$, et que le carré de la moitié du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième, en supposant le cercle NQPV, dont le demi-diamètre NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, c'est-à-dire la moyenne proportionnelle entre le tiers de la quantité donnée p et l'unité; et supposant aussi la ligne NP inscrite dans ce cercle, qui soit $\frac{3q}{p}$, c'est-à-dire qui soit à l'autre quantité donnée, q, comme l'unité est au tiers de p; il ne faut que diviser chacun des deux arcs NQP et NVP en trois parties égales, et on aura NQ, la subtendue du tiers de l'un, | et NV, la subtendue du tiers de l'autre, qui, jointes 473
ensemble, composeront la racine cherchée.

Enfin, si on a: $z^3 = * + pz - q$, en supposant derechef le cercle NQPV, dont le rayon NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et l'inscrite NP soit $\frac{3q}{p}$, NQ,

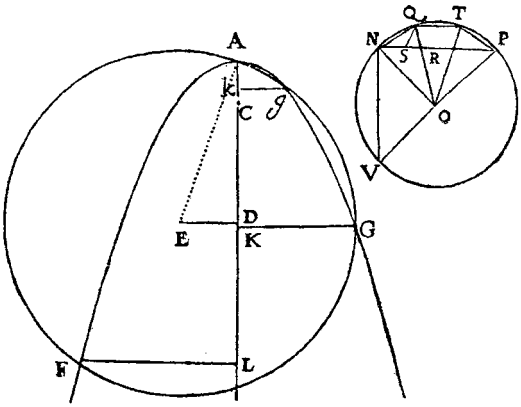


la subtendue du tiers de l'arc NQP, sera l'une des racines cherchées, et NV, la subtendue du tiers de l'autre arc, sera l'autre. Au moins si le carré de la moitié du dernier terme n'est point plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième: car, s'il était plus grand, la ligne NP ne pourrait être inscrite dans le cercle, à cause qu'elle serait plus longue que son diamètre. Ce qui serait cause que les deux vraies racines de cette Equation ne seraient qu'imaginaires, et qu'il n'y en aurait de réelles que la fausse qui, suivant la règle de Cardan, serait

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Inoltre, se si ha: $z^3 = * + pz + q$, e il quadrato della metà dell'ultimo termine non è maggiore del cubo di un terzo della quantità nota del penultimo, supponendo il cerchio NQPV, il cui semidiametro NO sia $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, cioè la media proporzionale tra il terzo della quantità data p e l'unità, e supponendo anche che la linea NP inscritta in questo cerchio sia $\frac{3q}{p}$, cioè supponendo che stia all'altra quantità data, q, come l'unità sta ad un terzo di p, bisogna solo dividere ognuno dei due archi NQP e NVP in tre parti uguali, e si otterrà NQ, la corda sottesa alla terza
473 parte di uno di questi, | e NV, la corda sottesa alla terza parte dell'altro, che, insieme, comporranno la radice cercata.

Infine, se si ha $z^3 = * + pz - q$, considerando di nuovo il cerchio NQPV, il cui raggio NO sia $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e la linea inscritta



NP = $\frac{3q}{p}$, NQ, la corda sottesa alla terza parte dell'arco NQP, sarà una delle radici cercate, e NV, la corda sottesa alla terza parte dell'altro arco, sarà l'altra. Perlomeno se il quadrato della metà dell'ultimo termine non è maggiore del cubo del terzo della quantità nota del penultimo: infatti, se fosse maggiore, la linea NP non potrebbe essere inscritta nel cerchio, perché sarebbe più lunga del suo diametro. Il che farebbe sì che le due radici vere di questa equazione sarebbero immaginarie, e che sarebbe reale solo quella falsa che, seguendo la regola di Cardano, sarebbe[113]

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

[113] AT (VI 473) precisa che l'espressione va intesa in valore assoluto.

La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques, et ensuite de toutes celles qui ne montent que jusques au carré de carré

Au reste, il est à remarquer que cette façon | d'exprimer la va- 474
leur des racines, par le rapport qu'elles ont aux côtés de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connaisse, n'est en rien plus intelligible, ni plus simple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtendues de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple est donné. En sorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuvent être exprimées par les règles de Cardan, le peuvent être autant ou plus clairement par la façon ici proposée.

Car si, par exemple, on pense connaître la racine de cette Equation:

$$z^3 = * + pz + q,$$

à cause qu'on sait qu'elle est composée de deux lignes, dont l'une est le côté d'un cube, duquel le contenu est $\frac{1}{2}q$ ajouté au côté d'un carré, duquel derechef le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; et l'autre est le côté d'un autre cube, dont le contenu est la différence qui est entre $\frac{1}{2}q$ et le côté de ce carré dont le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$: qui est tout ce qu'on en apprend par la règle de Cardan: il n'y a point de doute qu'on ne connaisse autant, ou plus distinctement, la racine de celle-ci

$$z^3 = * + pz - q,$$

en la considérant inscrite dans un cercle dont le demi-diamètre est $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et sachant qu'elle y est la subtendue d'un arc dont le triple a, pour sa subtendue, $\frac{3q}{p}$. Même ces termes sont beaucoup moins embarrassés que les autres, et ils se trouveront beaucoup plus courts, si on veut user de quelque chiffre particulier | pour 475
exprimer ces subtendues, ainsi qu'on fait du chiffre $\sqrt{\text{C.}}$, pour exprimer le côté des cubes.

Et on peut aussi, en suite de ceci, exprimer les racines de toutes les Equations qui montent jusques au carré de carré, par les règles ci-dessus expliquées. En sorte que je ne sache rien de plus à désirer en cette matière. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ni qu'on les détermine par aucune construction qui soit ensemble plus générale et plus facile.

Pourquoi les problèmes solides

Il est vrai que je n'ai pas encore dit sur quelles raisons je me fonde, pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est

[114] Cioè il volume.
[115] Cioè l'area.

Il modo di esprimere il valore di tutte le radici delle equazioni cubiche, e poi di tutte quelle che salgono solo fino al quadrato del quadrato

474 Quanto al resto, bisogna notare che questo modo | di esprimere i valori delle radici, mediante il rapporto che hanno rispetto ai lati di certi cubi di cui si conosce soltanto il contenuto[114], non è affatto più comprensibile, né più semplice, dell'esprimerli mediante il rapporto che le radici hanno con le corde sottese di certi archi, o porzioni di cerchi, di cui è dato il triplo. In modo che tutte le radici delle equazioni cubiche che non possono essere espresse con le regole di Cardano, possono esserlo ugualmente o in modo più chiaro col metodo proposto qui.

Infatti se, per esempio, si pensa nota la radice di questa equazione:

$$z^3 = * + pz + q,$$

poiché si sa che è composta di due linee, di cui l'una è il lato di un cubo, il cui contenuto è $\frac{1}{2}q$ sommato al lato di un quadrato, il cui contenuto[115] è $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$; l'altra è il lato di un altro cubo, il cui contenuto è la differenza tra $\frac{1}{2}q$ e il lato di questo quadrato, il cui contenuto è $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, e questo è tutto quello che si sa dalla regola di Cardano: non c'è dubbio che si conosca ugualmente, o in modo più distinto, la radice di questa equazione

$$z^3 = * + pz - q,$$[116]

considerandola inscritta in un cerchio il cui semidiametro è $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e sapendo che non è altro che la corda sottesa ad un arco il cui triplo ha, come sua corda sottesa, $\frac{3q}{p}$. Questi termini sono anche molto meno complicati degli altri, e risulteranno molto
475 più corti, se si vorrà usare qualche segno particolare | per esprimere queste corde sottese, così come si fa col segno $\sqrt{\text{C.}}$[117], per esprimere il lato dei cubi.

E si può anche, poi, esprimere le radici di tutte le equazioni che salgono fino al quadrato del quadrato, tramite le regole sopra spiegate, di modo che non so desiderare nulla di più in questa materia. Infatti la natura di queste radici non permette infine di esprimerle in termini più semplici, né di determinarle tramite nessuna costruzione che sia insieme più generale e più facile.

Perché i problemi solidi non possono

È vero che non ho ancora detto su quali ragioni mi fondo, per osare assicurare se una cosa sia possibile o meno. Ma, se si

[116] L'equazione, errata in *Descartes 1637* p. 401, è stata corretta da Schooten: cfr. AT VI 735 (*Appendice*).

[117] Ossia il segno che sta per $\sqrt[3]{}$.

ne peuvent être construits sans les sections coniques, ni ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées

pas. Mais, si on prend garde comment, par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation, on jugera bien qu'il n'est pas malaisé de faire un dénombrement de toutes les voies par lesquelles on les peut trouver, qui soit suffisant pour démontrer qu'on a choisi la plus générale et la plus simple. Et particulièrement pour ce qui est des Problèmes solides, que j'ai dit ne pouvoir être construits sans qu'on y emploie quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouver, de ce qu'ils se réduisent tous à deux constructions: en l'une desquelles il faut avoir tout ensemble les deux points qui déterminent deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, et en l'autre, les deux points qui divisent en trois parties égales un arc donné. Car, d'autant que la courbure du cercle ne dépend que d'un simple rapport de toutes ses | parties au point 476
qui en est le centre, on ne peut aussi s'en servir qu'à déterminer un seul point entre deux extrêmes, comme à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données, ou diviser en deux un arc donné. Au lieu que la courbure des sections coniques, dépendant toujours de deux diverses choses, peut aussi servir à déterminer deux points différents.

Mais, pour cette même raison, il est impossible qu'aucun des Problèmes qui sont d'un degré plus composés que les solides, et qui présupposent l'invention de quatre moyennes proportionnelles, ou la division d'un angle en cinq parties égales, puissent être construits par aucune des sections coniques. C'est pourquoi je croirai faire en ceci tout le mieux qui se puisse, si je donne une règle générale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'intersection d'une Parabole et d'une ligne droite, en la façon ci-dessus expliquée. Car j'ose assurer qu'il n'y en a point de plus simple en la nature, qui puisse servir à ce même effet, et vous avez vu comme elle suit immédiatement les sections coniques, en cette question, tant cherchée par les anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes qui doivent être reçues en Géométrie.

Façon générale pour construire tous les problèmes réduits à une Equation qui n'a point plus de six dimensions

Vous savez déjà comment, lorsqu'on cherche les quantités qui sont requises pour la construction de ces Problèmes, on les peut toujours réduire à quelque Equation qui ne monte que jusques au carré de cube, ou au sursolide. Puis vous savez aussi comment, en augmentant la valeur des racines de cette Equation, on peut toujours faire qu'elles deviennent toutes vraies; | et avec 477

essere costruiti senza le sezioni coniche, né quelli che sono più composti senza altre linee più composte

pone attenzione a come, con il metodo di cui mi servo, tutto ciò che cade sotto la considerazione dei geometri si riduce ad uno stesso genere di problemi, che consiste nel cercare il valore delle radici di qualche equazione, si vedrà bene che non è difficile fare una enumerazione di tutte le vie mediante le quali trovarle, tale che sia sufficiente per dimostrare che si è scelta la più generale e la più semplice. E in particolare per quello che riguarda i problemi solidi, che ho detto che non possono essere costruiti senza usare una linea più composta di quella circolare, è cosa che si può facilmente trovare per il fatto che essi si riducono tutti a due costruzioni: in una delle quali bisogna avere tutti insieme i due punti che determinano due medie proporzionali tra due linee date, e nell'altra, i due punti che dividono in tre parti uguali un arco dato. Infatti, dato che che la curvatura del cerchio dipende solo da un semplice rapporto tra tutte le
476 sue | parti e il punto che è il centro, non possiamo servircene che per determinare un solo punto tra due estremi, come ad esempio per trovare un medio proporzionale tra due linee rette date, o per dividere in due un arco dato. Invece la curvatura delle sezioni coniche, dipendendo sempre da due cose diverse, può anche servire a determinare due punti differenti.

Ma, per questa stessa ragione, è impossibile che uno dei Problemi che sono di un grado più composto dei solidi, e che presuppongono la determinazione di quattro medie proporzionali, o la divisione di un angolo in cinque parti uguali, possa essere costruito con una delle sezioni coniche. Ecco perché credo che farò qui del mio meglio se fornisco una regola generale per costruirli, usando la linea curva che si descrive con l'intersezione di una parabola e di una retta, nel modo sopra spiegato[118]. Oso infatti assicurare che non ve n'è di più semplice in natura, che possa servire a questo stesso scopo, e voi avete visto come essa segua immediatamente le sezioni coniche, in quel problema, tanto studiato dagli antichi, la cui soluzione ci indica nell'ordine tutte le linee curve che devono essere accolte in geometria.

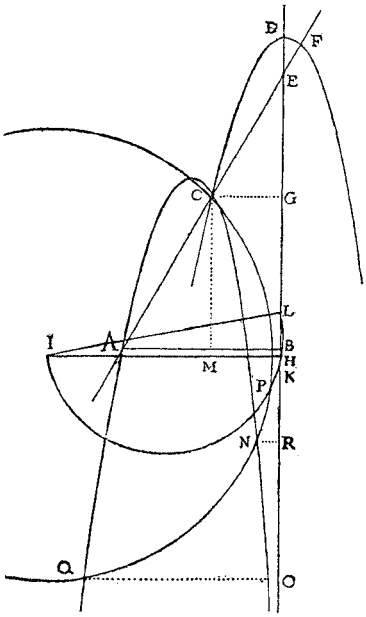
Modo generale per costruire tutti i problemi ridotti ad un'equazione che non ha più di sei dimensioni

Voi sapete già come, quando si cercano le quantità che sono richieste per la costruzione di questi problemi, si possano sempre ridurre a qualche equazione che non supera il quadrato del cubo o il sursolido. Poi sapete anche come, aumentando il valore delle radici di questa equazione, si può sempre fare in
477 modo che diventino tutte vere; | e con questo, far sì che la

[118] Cfr. *Geometria*, II, *B Op* I 545 (AT VI 407, l. 28 sgg.)

cela, que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second; et enfin, comment, si elle ne monte que jusques au sursolide, on la peut hausser jusques au carré de cube, et faire que la place d'aucun de ses termes ne manque d'être remplie. Or, afin que toutes les difficultés dont il est ici question puissent être résolues par une même règle, je désire qu'on fasse toutes ces choses, et, par ce moyen, qu'on les réduise toujours à une Equation de telle forme:

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0,$$



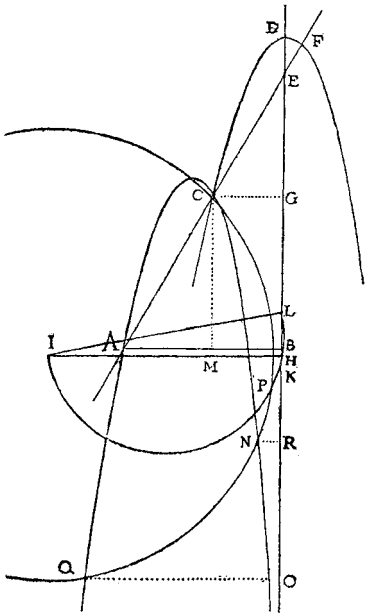
et en laquelle la quantité nommée q soit plus grande que le carré de la moitié de celle qui est nommée p.

Puis, ayant fait la ligne BK indéfiniment longue des deux côtés, et, du point B, ayant tiré la perpendiculaire AB dont la longueur soit $\frac{1}{2}p$, il faut, dans un plan séparé, décrire une Parabole, comme CDF, dont le côté droit principal soit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, que je nommerai n, pour abréger. Après cela, il faut poser le plan dans lequel est cette Parabole, sur celui où sont les lignes AB | et BK, en sorte que son 478
essieu DE se rencontre justement au-dessus de la ligne droite BK. Et, ayant pris la partie de cet essieu qui est entre les points E et D égale à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, il faut appliquer sur ce point E une longue règle, en telle façon qu'étant aussi appliquée sur le point A du plan de dessous, elle demeure toujours jointe à ces deux points, pendant qu'on haussera ou baissera la Parabole tout le long de la ligne BK, sur laquelle son essieu est appliqué. Au moyen de quoi, l'intersection de cette Parabole et de cette règle, qui se fera au point C, décrira la ligne courbe ACN, qui est celle dont nous avons besoin de nous ser-

quantità nota del terzo termine sia maggiore del quadrato della metà di quella del secondo; e infine, se sale solo fino al sursolido, come la si può aumentare fino al quadrato del cubo, e fare in modo che sia occupato il posto di ciascuno dei suoi termini. Ora, affinché tutte le difficoltà di cui qui si tratta possano essere risolte con la stessa regola, richiedo che si facciano tutte queste cose, e che, per questo mezzo, si riducano sempre ad un'equazione di tale forma:

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0,$$

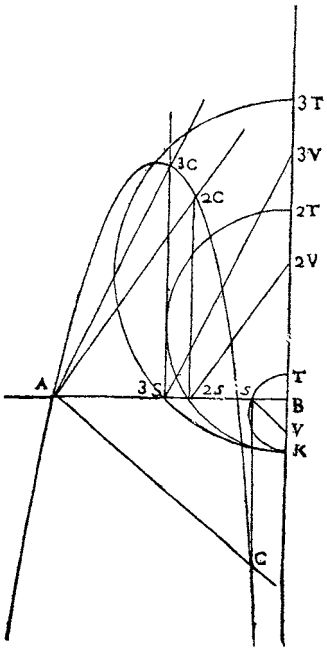
dove la quantità denominata q sia maggiore del quadrato della metà di quella denominata p.



Poi, avendo tracciato la linea[119] BK indefinitamente lunga dalle due parti, e, avendo tracciato dal punto B la perpendicolare AB la cui lunghezza sia $\frac{1}{2}p$, bisogna, in un piano separato, descrivere una parabola, ad esempio CDF, il cui lato retto principale sia $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}p^2}$, che chiamerò n, per abbreviare. Dopo di che, bisogna porre il piano della parabola sopra quello
478 delle linee AB | e BK, in modo che il suo asse DE si incontri esattamente sopra la linea retta BK. E avendo preso la parte di quest'asse che si trova tra i punti E e D, uguale a $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, bisogna applicare su questo punto E un lungo regolo, in modo che essendo anche applicato sul punto A del piano di sotto, rimanga sempre congiunto a questi due punti, mentre si alzerà o abbasserà la parabola lungo la linea BK, sulla quale è applicato il suo asse. In questo modo, l'intersezione di questa parabola e di questo regolo, che avverrà nel punto C, descriverà la linea curva ACN, che è quella di

[119] In riferimento alla figura, cfr. le critiche di Roberval e Carcavi, in: *Carcavi a Descartes*, 24 settembre 1649, B 711, pp. 2757-2759 (AT V 417, l. 26-420, l. 4).

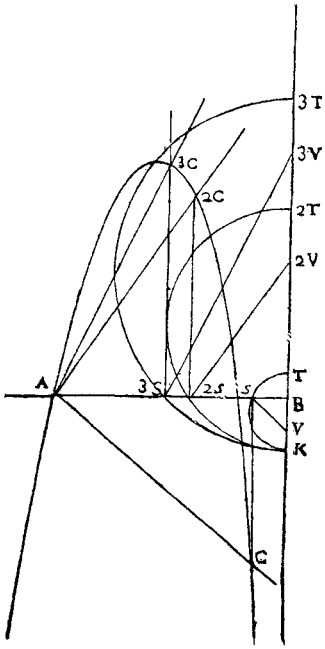
vir pour la construction du Problème proposé. Car, après qu'elle est ainsi décrite, si on prend le point L en la ligne BK, du côté vers lequel est tourné le sommet de la Parabole, et qu'on fasse BL égale à DE, c'est-à-dire à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$; puis, du point L vers B, qu'on prenne, en la même ligne BK, la ligne LH égale à $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; et que, du point H ainsi trouvé, on tire à angles droits, du côté qu'est la courbe ACN, la ligne HI, dont la longueur soit $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, qui, pour abréger, sera nommée $\frac{m}{nn}$; et après, ayant joint les points L et I, qu'on décrive le cercle LPI, dont IL soit le diamètre, et qu'on inscrive en ce cercle la ligne LP dont la longueur soit $\sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}}$; puis enfin, du centre I, par le point P ainsi trouvé, qu'on décrive le cercle PCN. Ce cercle coupera ou touchera la ligne courbe ACN en autant de points qu'il y aura de racines en l'Equation; en sorte que les perpendiculaires tirées de ces points sur la ligne BK, comme CG, NR, QO et | semblables, seront les 479
racines cherchées, sans qu'il y ait aucune exception ni aucun défaut en cette règle. Car, si la quantité *s* était si grande, à proportion des autres, *p, q, r, t* et *v*, que la ligne LP se trouvât plus grande que le diamètre du cercle IL, en sorte qu'elle n'y pût être inscrite, il n'y aurait aucune racine, en l'Equation proposée, qui ne fût imaginaire. Non plus que si le cercle IP était si petit qu'il ne coupât la courbe ACN en aucun point. Et il la peut couper en six différents, ainsi qu'il peut y avoir six diverses racines en l'Equation. Mais, lorsqu'il la coupe en moins, cela témoigne qu'il y a quelques-unes de ces racines qui sont égales entre elles, ou bien qui ne sont qu'imaginaires.



Que si la façon de tracer la ligne ACN, par le mouvement d'une Parabole, vous semble incommode, il est aisé de trou-

[120] Su questo punto cfr. la critica di Roberval: *Roberval contro Descartes,* aprile 1638, B 162, pp. 639-641 (AT II 113, l. 31-114, l. 9) e la risposta di Descartes nella lettera *A Mersenne*,

cui ci dobbiamo servire per la costruzione del Problema proposto[120]. Infatti, dopo averla così descritta, si prenda il punto L sulla linea BK, dal lato verso il quale è rivolto il vertice della Parabola; si ponga BL uguale a DE, cioè a $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$; poi, dal punto L verso B si prenda, sulla stessa linea BK, la linea LH uguale a $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; e, dal punto H così trovato, si tracci ad angoli retti dal lato della curva ACN, la linea HI, la cui lunghezza sia $\frac{r}{2n^2} + \frac{\sqrt{v}}{n^2} + \frac{pt}{4n^2\sqrt{v}}$, che, per abbreviare, sarà chiamata $\frac{m}{n^2}$; e dopo, avendo congiunto i punti L e I, si descriva il cerchio LPI, di diametro IL, e si inscriva in questo cerchio la linea LP la cui lunghezza sia $\sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{n^2}}$; infine, dal centro I, per il punto P così trovato, si descriva il cerchio PCN. Questo cerchio taglierà o toccherà la linea curva ACN in tanti punti quante saranno le radici dell'equazione, di modo che le perpendicolari tracciate da questi punti sulla linea BK, cioè CG, NR, QO
479 e | simili, saranno le radici cercate, senza che vi sia nessuna eccezione né alcun difetto in questa regola. Infatti, se la quantità *s* fosse così grande, in proporzione alle altre, *p*, *q*, *r*, *t*, *v*, che la linea LP risultasse maggiore del diametro del cerchio IL, in modo da non poter essere inscritta, non ci sarebbe nessuna radice nell'equazione proposta che non fosse immaginaria. Analogamente, se il cerchio IP fosse così piccolo da non tagliare la curva ACN in nessun punto. E può intersecarla in sei punti diversi, così che possono esserci sei radici diverse nell'equazione. Tuttavia, quando la taglia in meno punti, questo significa che alcune di queste radici sono uguali tra loro oppure sono immaginarie.



Se poi il modo di tracciare la linea ACN, mediante il movimento di una Parabola, vi sembra scomodo, è facile trovare

3 giugno 1638, B 168, p. 691 (AT II 156, l. 22-157, l. 26). La curva in questione sarebbe, secondo quanto qui affermato, quella raffigurata in *Geometria*, II, *B Op* I 549 (AT VI 410).

ver plusieurs autres moyens pour la décrire. Comme: si, ayant les mêmes quantités que devant pour AB et BL, et la même, pour BK, qu'on avait posée pour le côté droit principal de la Parabole, on décrit le | demi-cercle KST dont le centre soit pris à discré- 480
tion dans la ligne BK, en sorte qu'il coupe quelque part la ligne AB, comme au point S; et que, du point T où il finit, on prenne vers K la ligne TV égale à BL; puis, ayant tiré la ligne SV, qu'on en tire une autre, qui lui soit parallèle, par le point A, comme AC; et qu'on en tire aussi une autre par S, qui soit parallèle à BK, comme SC; le point C, où ces deux parallèles se rencontrent, sera l'un de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouver, en même sorte, autant d'autres qu'on en désire.

Or la démonstration de tout ceci est assez facile. Car, appliquant la règle AE avec la Parabole FD sur le point C, comme il est certain qu'elles peuvent y être appliquées ensemble, puisque ce point C est en la courbe ACN, qui est décrite par leur intersection: si CG se nomme y, GD sera $\frac{yy}{n}$, à cause que le côté droit, qui est n, est à CG comme CG à GD. Et ôtant DE, qui est $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, de GD, on a $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ pour GE. Puis, à cause que AB est à BE comme CG est à GE, AB étant $\frac{1}{2}p$, BE est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Et tout de même, en supposant que le point C de la courbe a été trouvé par l'intersection des lignes droites SC, parallèle à BK, et AC, parallèle à SV; SB, qui est égale à CG, est y, et BK étant égale au côté droit de la Parabole, que j'ai nommé n, BT est $\frac{yy}{n}$. Car, comme KB est à BS, ainsi BS est à BT. Et TV étant la même que BL, c'est-à-dire $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV est $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et comme SB est à BV, ainsi AB est à BE qui est, par conséquent, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, comme devant. | D'où on voit que c'est une même ligne 481
courbe qui se décrit en ces deux façons.

Après cela, parce que BL et DE sont égales, DL et BE le sont aussi: de façon qu'ajoutant LH, qui est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, à DL, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on a la toute DH, qui est

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}};$$

et en ôtant GD, qui est $\frac{yy}{n}$, on a GH, qui est

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{y^2}{n}.$$

Ce que j'écris par ordre en cette sorte

parecchi altri modi per descriverla. Ad esempio: avendo le stesse quantità di prima per AB e BL, e la stessa, per BK, che si era presa come lato retto principale della Parabola, si descri-
480 va il | semicerchio KST, il cui centro sia preso a piacere sulla linea BK, in modo che esso tagli in qualche parte la linea AB, ad esempio nel punto S; e dal punto T dove finisce, si prenda verso K la linea TV uguale a BL; poi, avendo tracciato la linea SV, se ne tracci un'altra ad essa parallela, per il punto A, ad esempio AC; e se ne tracci anche un'altra per S, che sia parallela a BK, ad esempio SC; il punto C, dove queste due parallele[121] s'incontrano, sarà uno di quelli della linea curva cercata. E se ne possono trovare, nello stesso modo, tanti quanti se ne desiderano.

Ora, la dimostrazione di tutto questo è abbastanza facile[122]. Infatti, applicando il regolo AE e la Parabola FD sul punto C, giacché è certo che possono esservi applicati insieme, dato che questo punto C è sulla curva ACN, che è descritta dalla loro intersezione: se CG si chiama y, GD sarà $\frac{y^2}{n}$, perché il lato retto, che è n, sta a CG come CG sta a GD. E sottraendo DE, che è $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, da GD, abbiamo $\frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ per GE. Inoltre, poiché AB sta a BE come CG sta a GE, essendo AB $\frac{1}{2}p$, BE è $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

E parimenti, supponendo che il punto C della curva sia stato trovato tramite l'intersezione delle linee rette SC, parallela a BK, e AC, parallela a SV, SB, che è uguale a CG, è y, e dato che BK è uguale al lato retto della Parabola, che ho chiamato n, BT è $\frac{y^2}{n}$. Infatti, come KB sta a BS, così BS sta a BT. Ed essendo TV uguale a BL, cioè $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV è $\frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. E come SB sta a BV, così AB sta a BE che, di conseguenza, è
481 $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, come prima. | Da ciò si vede che si tratta di una stessa linea curva, che si descrive in questi due modi.

Dopo di che, dato che BL e DE sono uguali, DL e BE lo sono anch'essi: di modo che aggiungendo LH, che è $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, a DL, che è $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, abbiamo tutto DH, che è

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}};$$

e togliendo GD, che è $\frac{y^2}{n}$, abbiamo GH, che è

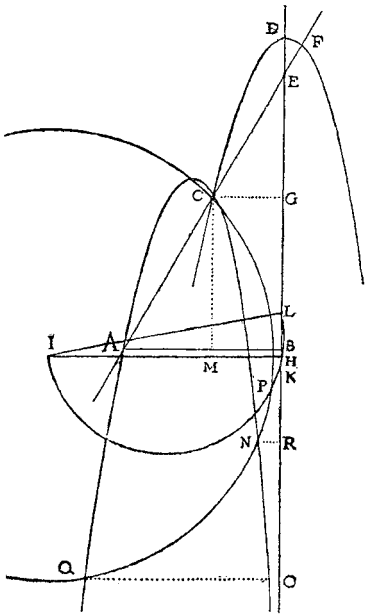
$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{y^2}{n}.$$

E ciò lo scrivo ordinatamente in questo modo:

[121] Cioè AC, parallela a SV, e SC, parallela a BK.
[122] Cfr. *A Mersenne*, 3 giugno 1638, B 168, p. 691 (AT II 157, ll. 11-16).

$$\mathrm{GH} = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}. \mid$$

482



Et le carré de GH est

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nnyy}.$$

Et en quelque autre endroit de cette ligne courbe qu'on veuille imaginer le point C, comme vers N ou vers Q, on trouvera toujours que le carré de la ligne droite, qui est entre le point H et celui où tombe la perpendiculaire du point C sur BH, peut être exprimé en ces mêmes termes, et avec les mêmes signes + et –.

De plus, IH étant $\frac{m}{nn}$, et LH étant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL est

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}},$$

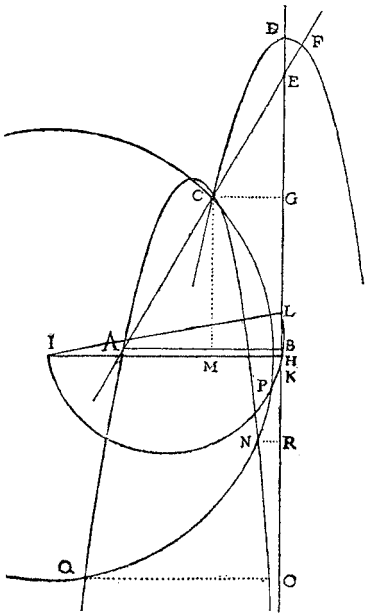
à cause de l'angle droit IHL; et LP étant $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, IP ou IC est

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}},$$

à cause aussi de l'angle droit IPL. Puis, ayant fait CM perpendiculaire sur IH, IM est la différence qui est entre IH et HM ou

$$\mathrm{GH} = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}. \mid$$

482



E il quadrato di GH è

$$\frac{y^6 - py^5 + (-\frac{t}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4}p^2)y^4 + (+2\sqrt{v} + \frac{pt}{2\sqrt{v}})y^3 + (-p\sqrt{v} + \frac{t^2}{4v})y^2 - ty + v}{n^2y^2}.$$

E in qualsiasi altro luogo di questa linea curva in cui si voglia immaginare il punto C, ad esempio verso N o verso Q, si troverà sempre che il quadrato della linea retta, che è tra il punto H e quello dove cade la perpendicolare del punto C su BH, può essere espresso in questi stessi termini, e con gli stessi segni + e –.

Inoltre, essendo IH = $\frac{m}{n^2}$, ed essendo LH = $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL è

$$\sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2v}},$$

in virtù dell'angolo retto IHL; ed essendo LP = $\sqrt{\frac{s}{n^2} + \frac{p\sqrt{v}}{n^2}}$, IP o IC è

$$\sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2v} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{v}}{n^2}},$$

a causa sempre dell'angolo retto IPL. Poi, avendo tracciato CM perpendicolare su IH, IM è la differenza tra IH e HM o

CG, c'est-à-dire entre $\frac{m}{nn}$ et y; en sorte que son carré est toujours

$$\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy,$$

qui étant ôté du carré de IC, il reste:

$$\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy,$$

pour le carré de CM, qui est égal au carré de GH | déjà trouvé. 483
Ou bien, en faisant que cette somme soit divisée comme l'autre par $nnyy$, on a

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}\,yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Puis, remettant

$$\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4, \text{ pour } nny^4;$$
$$\text{et } ry^3 + 2\sqrt{v}\,y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3, \text{ pour } 2my^3;$$

et multipliant l'une et l'autre somme par $nnyy$, on a:

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v$$

égal à

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy;$$

c'est-à-dire qu'on a

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0.$$

D'où il paraît que les lignes CG, NR, QO et semblables sont les racines de cette Equation, qui est ce qu'il fallait démontrer.

L'invention de quatre mojennes proportionelles

Ainsi donc, si on veut trouver quatre moyennes proportionnelles entre les lignes a et b, ayant posé x pour la première, l'Equation est:

$$x^5 \;*\;*\;*\;* - a^4b = 0,$$

ou bien

$$x^6 \;*\;*\;*\;* - a^4bx* = 0. \,|$$

Et faisant $y - a = x$, il vient: 484

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ \\ -a^4b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ \\ +a^5b \end{matrix} = 0$$

CG, cioè tra $\frac{m}{n^2}$ e y, di modo che il suo quadrato è sempre

$$\frac{m^2}{n^4} - \frac{2my}{n^2} + y^2,$$

che, essendo stato sottratto dal quadrato di IC, risulta:

$$\frac{t^2}{4n^2v} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{v}}{n^2} + \frac{2my}{n^2} - y^2,$$

483 per il quadrato di CM, che è uguale al quadrato di GH | già trovato. Oppure, facendo in modo che questa somma sia divisa come l'altra per n^2y^2, si ha

$$\frac{-n^2y^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}\,y^2 - sy^2 + \frac{t^2}{4v}y^2}{n^2y^2}.$$

Poi, rimettendo

$$\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}p^2y^4, \text{ per } n^2y^4$$
$$\text{e } ry^3 + 2\sqrt{v}\,y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3, \text{ per } 2my^3$$

e moltiplicando entrambe le espressioni per n^2y^2 risulta:

$$y^6 - py^5 + (-\frac{t}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4}p^2)y^4 + (2\sqrt{v} + \frac{pt}{2\sqrt{v}})y^3$$
$$+ (-p\sqrt{v} + \frac{t^2}{4v})y^2 - ty + v$$

uguale a

$$(-\frac{t}{\sqrt{v}} - q + \frac{1}{4}p^2)y^4 + (r + 2\sqrt{v} + \frac{pt}{2\sqrt{v}})y^3 + (-p\sqrt{v} - s + \frac{t^2}{4v})y^2;$$

cioè abbiamo

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0.$$

Da ciò risulta che le linee CG, NR, QO e simili sono le radici di questa equazione, che è ciò che si doveva dimostrare.

Così dunque[123], se si vogliono trovare quattro medie proporzionali tra le linee a e b, avendo posto x per la prima, l'equazione è:

La scoperta di quattro medie proporzionali

$$x^5 \ * \ * \ * \ * \ - a^4b = 0,$$

ossia

$$x^6 \ * \ * \ * \ * \ - a^4bx \ * = 0. \ |$$

484 E ponendo $y - a = x$, risulta:

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 +$$
$$+ (-6a^5 - a^4b)y - a^6 + a^5b = 0.$$

[123] AT VI 483 nota *a* congettura che a margine andrebbe aggiunto il titoletto: «L'invention de quatre mojennes proportionelles / L'invention de quatre mojennes proportionelles».

C'est pourquoi il faut prendre $3a$ pour la ligne AB, et $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}} + 6aa}$ pour BK, ou le côté droit de la Parabole, que j'ai nommé n; et $\frac{a}{3n}\sqrt{aa + ab}$ pour DE ou BL.

Et après avoir décrit la ligne courbe ACN sur la mesure de ces trois, il faut faire:

$$\mathrm{LH} = \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa + ab}},$$

$$\mathrm{HI} = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa + ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2nn\sqrt{aa + ab}}$$

et $$\mathrm{LP} = \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa + ab}}{nn}}.$$

Car le cercle qui, ayant son centre au point I, passera par le point P ainsi trouvé, coupera la courbe aux deux points C et N, desquels ayant tiré les perpendiculaires NR et CG, si la moindre, NR, est ôtée de la plus grande CG, le reste sera x, la première des quatre moyennes proportionnelles cherchées.

Il est aisé, en même façon de diviser un angle en cinq parties égales, et d'inscrire une figure de onze ou treize côtés égaux dans un cercle, et de trouver une infinité d'autres exemples de cette règle.

Toutefois il est à remarquer qu'en plusieurs de ces exemples, il peut arriver que le cercle coupe si obliquement la Parabole du second genre, que le point de leur intersection soit difficile à reconnaître, et ainsi, | que cette construction ne soit pas commo- 485
de pour la pratique. A quoi il serait aisé de remédier en composant d'autres règles à l'imitation de celle-ci, comme on en peut composer de mille sortes.

Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, et je tâche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, si on considère qu'ayant réduit à une même construction tous les Problèmes d'un même genre, j'ai tout ensemble donné la façon de les réduire à une infinité d'autres diverses, et ainsi de résoudre chacun d'eux en une infinité de façons; puis, outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'un cercle une ligne droite, et tous ceux qui sont solides, en coupant aussi d'un cercle une Parabole, et enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composés, en coupant tout de même d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la Parabole; il ne faut que suivre la même voie

Ecco perché bisogna prendere $3a$ per la linea AB, e $\sqrt{\frac{6a^3 + a^2b}{\sqrt{a^2 + ab}} + 6a^2}$ per BK, o il lato retto della parabola, che ho chiamato n; e $\frac{a}{3n}\sqrt{a^2 + ab}$ [124] per DE o BL.

E dopo avere descritto la linea curva ACN sulla misura di queste tre, bisogna porre:

$$\mathrm{LH} = \frac{6a^3 + a^2b}{2n\sqrt{a^2 + ab}},$$

$$\mathrm{HI} = \frac{10a^3}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}\sqrt{a^2 + ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2n^2\sqrt{a^2 + ab}}$$

e $$\mathrm{LP} = \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{a^2 + ab}}{n^2}}.$$

Infatti il cerchio che, avendo il suo centro nel punto I, passerà per il punto P così trovato, taglierà la curva nei due punti C e N dai quali, avendo tracciato le perpendicolari NR e CG, se la minore, NR, è sottratta dalla maggiore CG, il resto sarà x, la prima delle quattro medie proporzionali ricercate.

È facile, allo stesso modo, dividere un angolo in cinque parti uguali e inscrivere una figura di undici o tredici lati uguali in un cerchio e trovare una infinità di altri esempi di questa regola.

Bisogna tuttavia sottolineare che, in parecchi di questi esempi, può accadere che il cerchio tagli così obliquamente la Parabola del secondo genere, che il punto della loro intersezione sia difficile da riconoscere, e così | può accadere che questa 485
costruzione non sia comoda per la pratica. A ciò sarebbe facile rimediare costruendo altri regoli ad imitazione di questo, dato che se ne possono trovare di mille tipi.

Ma il mio scopo non è di scrivere un voluminoso trattato, e cerco piuttosto di comprendere molto in poche parole, come si giudicherà forse da ciò che ho fatto, se si considera che, avendo ridotto ad una stessa costruzione tutti i Problemi di uno stesso genere, ho fornito nello stesso tempo il modo per ridurli ad un'infinità di altri diversi, e così di risolvere ognuno in un'infinità di modi; poi, oltre a ciò, avendo costruito tutti quelli che sono piani, intersecando un cerchio con una linea retta, e tutti quelli che sono solidi, intersecando un cerchio con una parabola, e infine tutti quelli che sono di un grado più composti, sempre intersecando un cerchio con una linea che è solo di un grado più composta rispetto alla parabola; bisogna

[124] *Descartes 1637* (p. 412) riporta, come *Schooten* (p. 105), erroneamente $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa + ab}$. AT corregge.

pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini. Car en matière de progressions Mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres. Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

FIN

solo seguire la stessa via per costruire tutti quelli che sono più composti e così all'infinito. Infatti, in materia di progressioni matematiche, quando abbiamo i due o tre primi termini, non è difficile trovare gli altri. E spero che i nostri posteri mi saranno riconoscenti, non solo per le cose che ho appena spiegato, ma anche per quelle che ho omesso volontariamente per lasciare loro il piacere di scoprirle[125].

FINE

[125] Si veda *A Debeaune*, 20 febbraio 1639, B 203, p. 989 (AT II 510, ll. 2-17).

Bompiani ha raccolto l'invito della campagna
"Scrittori per le foreste" promossa da Greenpeace.
Questo libro è stampato su carta certificata FSC,
che unisce fibre riciclate post-consumo a fibre vergini
provenienti da buona gestione forestale e da fonti controllate.
Per maggiori informazioni: http://www.greenpeace.it/scrittori/

Finito di stampare nel mese di settembre 2009
da «La Tipografica Varese S.p.A.»
Stampato in Italia - Printed in Italy